

ARNALDO JOSÉ SANTIAGO

EFEITOS DE TAMANHO FINITO
E
CRITICALIDADE EM FRAGMENTAÇÃO NUCLEAR

TESE DE DOUTORADO

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Rio de Janeiro

– 1995 –

– A *Daniela Maiolino Norberto*.

“Ut duo qui fuerant, unum quasi corpore fiant.”

Merculinus.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Chung Kai Cheong, pela orientação sempre precisa, pela amizade e por ter me ensinado não apenas a fazer pesquisa, mas também a postura profissional daquele que se dedica à ciência.
- Aos colegas e amigos do CBPF, em particular, H. Rodrigues, E. C. de Oliveira, M.G. Golçalves, E. de Lima Medeiros, M. Chiapparini, D. Portes Jr., E. de Paiva e L. Castro, que tornaram minha estada no CBPF sempre agradável e profícua.
- Aos amigos do IF-UERJ, com reconhecimento destacado a H.P. de Oliveira, E. Cheb-Terrab e K. von Bulow, pelo estímulo, pelas críticas e pela revisão do texto.
- Aos caríssimos amigos, F. Caruso, G. Pech e N.L. Caruso, com quem tive o prazer de dividir várias tarefas administrativas no IF-UERJ, sem o que, sem dúvida, este trabalho ainda não teria terminado.
- A Maria Neuma G. Rodrigues e Marilena Luna, pelo suporte na área da secretaria.
- Aos Departamentos de Física Nuclear e Altas Energias: DNE (do CBPF) e DFNAE (do IF-UERJ) pela infra-estrutura.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo auxílio financeiro.
- Ao Programa de Capacitação Docente da UERJ/SR-2 pela licença parcial PRO-CAD.

RESUMO

No contexto de modelos percolativos para a fragmentação nuclear, estudamos diferentes critérios de criticalidade em sistemas finitos. Modelos baseados em idéias da teoria de percolação são propostos para a fragmentação nuclear. Nossos resultados mostram que dados experimentais e, em particular, os expoentes críticos da fragmentação nuclear podem ser reproduzidos pelos modelos percolativos, se se trabalha com um critério de criticalidade baseado na multiplicidade de *clusters* pesados. Em sistemas finitos, os expoentes críticos e outras quantidades dos cálculos percolativos dependem da estrutura cristalina.

SUMMARY

Different criteria for criticality in very small systems are discussed in the context of percolation and nucleation approaches to nuclear fragmentation. Models based in percolative ideas are proposed to nuclear multifragmentation. Our results show that experimental data and critical exponents of the nuclear break-up can be well described by percolation models, if one works with criticality criteria based on the multiplicity of heavy clusters. In finite systems, the critical exponents and other quantities of percolative calculations are shown to depend heavily on the lattice structure.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
SUMMARY	v
SUMARIO	vi
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiii
INTRODUÇÃO	1
1. A MULTIFRAGMENTAÇÃO NUCLEAR	11
1.1 Aspectos Experimentais	13
1.1.1 Algumas Medidas Inclusivas	16
1.1.2 Medidas Exclusivas	21
1.2 Modelos Teóricos	27
1.2.1 Modelos Dinâmicos	27
A) Modelos a 1-corpo	28
B) Modelos a n-corpos – Dinâmica Molecular	36
1.2.2 Modelos Não - Dinâmicos	39
A) Modelo de Transição de Fase Líquido-Gás	40
B) Modelos Estatísticos da Multifragmentação	42
C) Modelo de Evaporação Sequencial	48
2. FLUTUAÇÕES E INTERMITÊNCIA EM FRAGMENTAÇÃO NUCLEAR ..	50
2.1 Flutuação e Crescimento de Bolhas na Matéria Nuclear Quente ...	50
2.1.2 A Aproximação de Rarefação	54
2.2 Intermitência	59
2.2.1 Os Momentos Fatoriais Escalados como Medida das Flutuações	61

2.2.2	Intermitência em Fragmentação Nuclear	63
2.2.3	Resultados Obtidos com o Modelo de Percolação	66
3.	O MODELO DE PERCOLAÇÃO NUCLEAR	70
3.1	A Teoria de Percolação	72
3.1.1	Definição e Exemplos	73
3.1.2	Algumas Grandezas Estudadas em Percolação	76
A)	Probabilidade de Percolação $P(p)$	77
B)	Tamanho Médio $S(p)$ dos <i>Clusters</i>	79
C)	Raio Médio de Giração	80
D)	Comprimento de Correlação	81
E)	Auto-Similaridade de <i>Clusters</i> Percolantes - Dimensão Fractal	82
3.1.3	O Limiar de Percolação	85
3.1.4	Escala, Expoentes Críticos e Universalidade	87
A)	A Lei de Escala	87
B)	Expoentes Críticos	89
C)	Universalidade em Grandes Redes	91
3.1.5	Principais Métodos Utilizados em Percolação	92
A)	Expansão em Série	92
B)	Grupo de Renormalização	94
C)	Simulação de Monte Carlo	97
3.2	O Modelo de Percolação Nuclear	98
3.2.1	Introdução	98
3.2.2	A Multifragmentação Nuclear no Contexto do Modelo de Percolação ...	99
3.2.3	O Modelo de Nucleação	101
3.2.4	O Parâmetro de Impacto	104
3.2.5	A Expansão Coulombiana e os Espectros de Energia Cinética	105
3.2.6	O Decaimento Secundário dos <i>Clusters</i>	106

A) Conservação de Energia	106
B) A Evaporação	108
3.3 Resultados Obtidos com o Modelo de Percolação-Evaporação	110
3.4 O Modelo de Percolação Tetraédrica	116
4. EFEITOS DE TAMANHO FINITO NA DESCRIÇÃO PERCOLATIVA DA FRAGMENTAÇÃO NUCLEAR	120
4.1 Transição de Fase Percolativa em Sistemas Finitos	120
4.1.1 Criticalidade e Expoentes Críticos em Sistemas Finitos	122
4.1.2 Universalidade e Escala	129
4.2 Percolação <i>versus</i> Nucleação	134
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	137
APÊNDICE A	143
REFERÊNCIAS	151

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
I.1 - Diagrama de fase da matéria nuclear.	2
I.2 - Classificação de Hüfner para reações nucleares.	3
I.3 - Distribuições de Massa.	4
1.1 - Ilustração esquemática do papel da densidade na fragmentação nuclear.	12
1.2 - Dependência da reação com o parâmetro de impacto.	14
1.3 - Distribuição de multiplicidade.	15
1.4 - Distribuição de massa.	17
1.5 - Distribuição de carga.	17
1.6 - Distribuição de carga.	18
1.7 - Dependência de τ com a energia incidente em reações $p + \text{núcleo}$	19
1.8 - Dependência de τ com a energia incidente em reações $\text{núcleo} + \text{núcleo}$	19
1.9 - Espectro de energia cinética do ^{12}C e ^{16}O	20
1.10 - Espectro de energia cinética resultante da quebra do ^{197}Au	21
1.11 - Distribuições de IMF's.	22
1.12 - Espectros de energia do ^{12}C para diversos ângulos de espalhamento.	22

1.13 - Assimetria na carga.	23
1.14 - Gráficos de Dalitz para a carga.	24
1.15 - Correlações entre $\ln S_3$ e $\ln S_2$	25
1.16 - Momento m_2 versus multiplicidade n	25
1.17 - Coplanaridade versus Esfericidade.	26
1.18 - Evolução TDHF do núcleo ^{109}Ag	30
1.19 - Evolução, segundo a equação de Vlasov, da colisão central $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a $50\text{MeV}/n$	31
1.20 - Evolução, segundo a equação VUU, da colisão central $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a $50\text{MeV}/n$	32
1.21 - Ilustração esquemática dos modelos a 1 - corpo para a dinâmica nuclear.	34
1.22 - Resultados obtidos via BUU e VUU.	35
1.23 - Evolução temporal da colisão central $^{20}\text{Ne} + ^{20}\text{Ne}$ a $100\text{MeV}/n$	36
1.24 - Resultados obtidos com modelo de dinâmica molecular.	38
1.25 - Pressão versus densidade para a matéria nuclear.	41
1.26 - Relação E^* versus T para o ^{131}Xe (a) e para ^{197}Au (b) nas descrições canônica e microcanônica.	43
1.27 - Rendimento relativo versus E^* no tratamento canônico e no microcanônico. ..	44
1.28 - Resultados do Modelo de Multifragmentação Estatística.	47
1.29 - Resultados do Modelo de Evaporação Sequencial.	49
2.1 - Diagrama $T \times \rho$ para a matéria nuclear.	51
2.2 - $P_{exp} \times R/R_c$	53

2.3 - Raio crítico como função de n_0	56
2.4 - Rendimentos obtidos com a interação S_k e $R_i = 1,5fm$ e $R_f = 2,0fm$	57
2.5 - Rendimentos obtidos com a interação $S - B$ e $R_i = 1,5fm$ e $R_f = 2,0fm$	58
2.6 - P_{exp} versus R_i/R_c	58
2.7 - Distribuição de Pseudo-rapidez.	60
2.8 - $\ln(F_i^h)$ versus $-\ln(\delta Z)$	67
3.1 - Exemplo de percolação em uma rede 20×20	74
3.2 - P versus p	78
3.4 - S versus p	80
3.5 - Comprimento de correlação versus p	82
3.6 - Ilustração da Auto-similaridade do Cluster Percolante.	83
3.7 - $M(L)$ versus L	84
3.8 - Testes da Lei de Escala.	89
3.9 - Animais de clusters com $s = 1, 2$ e 3	93
3.10 - Ilustração do Método de GR no Espaço Real.	95
3.11 - A variação na concentração $p' - p$ como função de p , em uma rede triangular que sofre renormalização.	96
3.12 - Ilustração de uma rede inscrita na esfera de raio R_0	100
3.13 - $n(R_{int})$ versus s , para três valores de R_{int}	103
3.14 - Dependência da concentração com o parâmetro de impacto.	105
3.15 - $\langle M \rangle$ e τ versus p	112

3.16 - Distribuição de Massa.	112
3.17 - Espectros de energia do ^{12}C e ^{16}O	114
3.18 - Temperatura e Multiplicidade versus d	114
3.19 - Expoente Aparente versus d e Distribuição de Massa.	115
3.20 - $\langle M \rangle$ e τ versus p	118
3.21 - Rendimentos.	118
3.22 - Multiplicidade total versus p	119
3.23 - Espectros de energia cinética.	119
4.1 - M_2/M_1 , τ e M versus P , P_b e R_{int}	124
4.2 - Distribuições de carga segundo os critérios 1, 2 e 4.	127
4.3 - M , M_2/M_1 e τ versus P	130
4.4 - Distribuições de tamanho nas redes FCC e SC.	131
4.5 - Segundo maior versus maior cluster.	132
4.6 - Raio médio $\langle R_F \rangle$ versus tamanho A_F	132
4.7 - Segundo maior versus maior fragmento.	135
4.8 - Raio médio quadrático $\langle R_F \rangle$ versus tamanho do fragmento.	135
4.9 - P e P_b versus R_{int}	136
A.1 - Ilustração do efeito de compressão em colisões de íons pesados.	147
A.2 - Configuração final.	148
A.3 - Ilustração do efeito de compressão.	149
A.4 - Multiplicidade e distribuição de tamanho.	150

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
2.1 - <i>Expoente intermitente para os momentos de ordem i.</i>	68
3.1 - <i>Probabilidades Críticas de ocupação de sítio e ligação para várias estruturas cristalinas.</i>	86
3.2 - <i>A_0 nas redes SC e FCC.</i>	100
3.3 - <i>τ e $\langle M \rangle$ para $A_0 = 57, 81$ e 123.</i>	113
4.1 - <i>Valores críticos pelos critérios 1, 2 e 4.</i>	125
4.2 - <i>Expoentes críticos pelos critérios 1, 2 e 4.</i>	128
4.3 - <i>Limiares de Probabilidade</i>	130
4.4 - <i>Expoentes críticos nas redes FCC e SC.</i>	133

*“Et eunt homines admirari alta montium
et ingentes fluctus maris et latissimos lapsus
fluminum et oceani ambitum et gyros siderum
et relinquunt seipsos...” †*

Agostinho.

† “E os homens vão admirar as alturas das montanhas, os ingentes fluxos das marés, as largas correntezas dos rios, a extensão dos oceanos, o curso dos astros, e de si próprio eles se descuidam...”

Introdução

*“Et scias, quod haec est longissima
via, ergo patientia et mora sunt necessariae in
nostro magisterio.”[†]*

R. Philosophorum.

As reações de íons pesados a energias intermediárias ($20\text{MeV} \leq E/n \leq 290\text{MeV}$) e altas ($E/n \geq 290\text{MeV}$) vêm, atualmente, despertando um grande interesse, tanto do ponto de vista teórico quanto do experimental. Este interesse se deve ao fato de que, através destas reações é possível estudar-se, em laboratório, a matéria nuclear sob condições de temperatura e densidade muito acima dos valores encontrados em núcleos ordinários. Aliado a isto, podem ocorrer, neste domínio de energia, fenômenos bastante diferentes dos esperados em reações a baixas energias, como por exemplo a fragmentação nuclear e a produção múltipla de partículas. Além disto, se estendermos a faixa de energia para além daquelas que serão consideradas aqui, cálculos de QCD prevêm a transição de fase da matéria hadrônica para um plasma de quarks e gluons. Esta

[†] “E saibei que este caminho é longuíssimo, portanto é necessário ter paciência e perseverança em nosso magistério.”

transição é esperada ocorrer para valores de densidade ρ entre 3 a 7 vezes a densidade da matéria nuclear normal ($\rho_0 = 0.153 fm^{-3}$) e a uma temperatura T_c no intervalo $160 \lesssim T_c \lesssim 200 MeV$. A Fig. I.1 mostra de uma maneira esquemática o diagrama de fase da matéria nuclear. Podemos observar nesta Fig. I.1 que o desconfinamento deve ocorrer dentro da região hachureada. A região em que se espera a ocorrência da fragmentação nuclear é também mostrada.

No caso da fragmentação nuclear (ou multifragmentação nuclear, como igualmente é conhecida), um próton (à alta energia) ou um íon pesado (à energia intermediária ou alta) colide com o núcleo alvo, formando um estado intermediário que se fragmenta, a seguir, em vários pedaços (fragmentos).

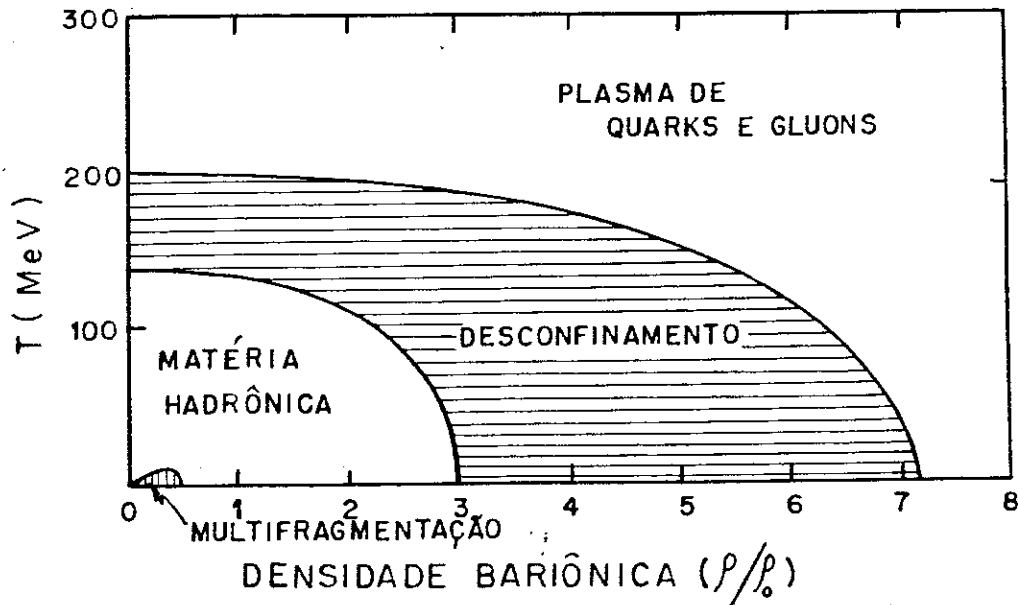


Fig. I.1 - Diagrama de fase da matéria nuclear.

A fim de, à primeira vista, distinguir os processos de fragmentação nuclear dos usuais processos de fissão e espalação, podemos utilizar a classificação de Hüfner [Hüfn,85] que se baseia no número e na massa dos fragmentos produzidos em uma reação nuclear. De fato, na Fig. I.2, podemos observar que, enquanto as reações de espalação produzem um fragmento pesado, com massa A_F da ordem da massa do alvo A_T , a fissão

(binária) leva ao aparecimento de dois fragmentos pesados, cujas massas estão próximas à metade da massa do alvo ($A_F \approx A_T/2$). Já a espalação profunda produz apenas um fragmento com massa comparável à de um fragmento de fissão. Finalmente, a reação de fragmentação produz vários fragmentos com massa de até cerca de $1/3$ de A_T .

A principal característica da distribuição de tamanho dos fragmentos formados, em uma reação de fragmentação, é o fato do número de fragmentos de um certo tamanho A ser proporcional a $A^{-\tau}$, isto é, seguir uma lei de potência. Na Fig. I.3, retirada da Ref. [Hirs,84] está ilustrada a distribuição de massa típica de uma reação de fragmentação. Observe-se que na distribuição de massa, em eventos de fragmentação nuclear, somente fragmentos leves e médios são considerados.

**MULTIPLICIDADE
DE FRAGMENTOS
PESADOS**

≥ 3	Multi frag- mentação		
2		Fissão	
1		Espalação Profunda	Espalação
		$A_T/3$	$2A_T/3$
			A_T

**MASSA DOS
FRAGMENTOS**

Fig. I.2 - Classificação de Hüfner para reações nucleares.

Em vista desta marcante diferença entre os produtos das reações de fragmentação e os gerados pelos demais processos de reação (fissão, espalação), acredita-se que a fragmentação nuclear seja um fenômeno novo, com mecanismo de reação próprio.

Além de buscar o entendimento do processo da fragmentação nuclear, teóricos e experimentais da área esperam que, através do estudo destes processos, se possa

extrair importantes informações sobre a equação de estado da matéria nuclear. De fato, acredita-se que no caso de colisões núcleo-núcleo, a fragmentação nuclear resulta de um processo de compressão seguido de uma expansão. Assim, os fragmentos formados devem carregar alguma informação desse período de alta densidade e temperatura.

Graças ao grande esforço dos grupos experimentais, hoje temos uma grande quantidade de dados experimentais disponíveis, com as mais diversas combinações de alvos e projéteis, numa larga faixa de energia incidente. Paralelamente ao avanço experimental, diversos modelos, usando as mais diversas abordagens teóricas, foram propostos. Contudo, os dados experimentais hoje disponíveis ainda não são capazes de discriminar os diversos modelos existentes. Na verdade, a questão fundamental de a fragmentação nuclear ser um processo sequencial ou simultâneo ainda permanece sem uma resposta razoável.

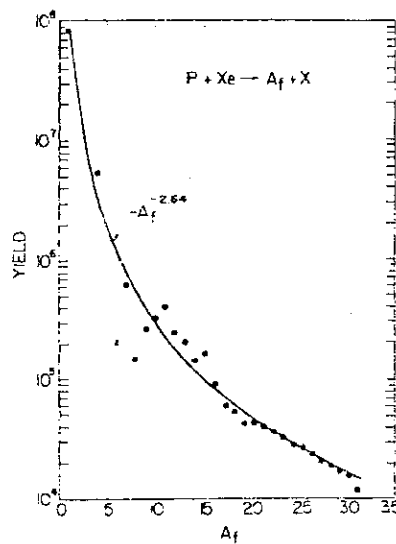


Fig. I.3 - Distribuições de Massa.

Um experimento particularmente importante nesta área é o do Grupo de Purdue [Finn,82], realizado no Fermilab, com reações do tipo $p + {}^{79}Kr$ (${}^{132}Xe$) a altas energias (80 a $350 GeV$ de energia incidente). Eles verificaram que a curva que melhor reproduz a distribuição de massa dos fragmentos leves e médios é uma lei de potência com expoente $\tau \approx 2,6$ para ambas as reações. Estes mesmos autores chamaram a atenção para o fato

de que, no modelo de condensação de Fisher para um gás de van der Waals e, na teoria de percolação para redes infinitas, a distribuição de *clusters*, no ponto crítico, também segue uma lei de potência com expoente crítico τ igual a 2,3 no primeiro caso e compreendido entre 2 e 3 no segundo.

Esta similaridade dos espectros de massa fez com que Finn *et al.* lançassem a hipótese de que os resultados experimentais da fragmentação nuclear seriam uma manifestação de uma transição de fase líquido-gás do sistema nuclear, no ponto crítico. Obviamente, esta interpretação da fragmentação nuclear como um fenômeno crítico veio provocar um grande interesse nesta área. Contudo, devemos lembrar que os estados finais detetados nos experimentos não necessariamente carregam informações limpas sobre a colisão. Vários outros processos na fase final da reação podem obscurecer ou mascarar, nos dados experimentais, possíveis manifestações de comportamento inédito da matéria nuclear. Além disto, em transições de fase em sistemas infinitos unicamente com acoplamento de curto alcance, o fenômeno crítico depende, em geral, de simples fatores geométricos do sistema e não dos detalhes da força. Assim, os fenômenos críticos são classificados dentro de classes que são caracterizadas por alguns (poucos) expoentes críticos que, por sua vez, são universais dentro destas classes. Pode-se especular que esta situação dificilmente seria a mesma em sistemas finitos com forças de longo alcance, como é o caso dos núcleos.

Com efeito, dentro de uma gama enorme de questões que se pode levantar em torno da física das reações de fragmentação, a mais importante é, sem dúvida, a de se realmente uma transição de fase pode ser alcançada num sistema de tão poucas partículas, com as densidades e temperaturas produzidas no processo de colisão. Considerando o tamanho reduzido dos núcleos envolvidos, mesmo no caso daqueles mais pesados, a resposta não é trivial. Uma rigorosa abordagem teórica do problema exigiria uma formulação quântica do problema de muitos corpos, onde graus de liberdade de campos hadrônicos têm que ser explicitamente incluídos. Como ainda não dispomos desta formulação, algumas aproximações têm sido adotadas nas abordagens teóricas das reações

de fragmentação: – uma visão mais macroscópica, em geral, baseada em idéias estatísticas (modelos estáticos) que admitem a equilibração do sistema, com perda da memória do canal de entrada da reação e que, então, se preocupa apenas com o estágio final de desagregação; – e no outro contexto, a ênfase é dada ao movimento dos nucleons no núcleo e às suas interações durante o estágio colisional (modelos dinâmicos). Neste último caso, o processo colisional é tratado, geralmente, via equações cinéticas ou equações clássicas de movimento.

Estas abordagens, apesar de tão diferentes em suas suposições básicas e nas técnicas matemáticas utilizadas, na realidade, se tornam complementares dentro da filosofia de suas utilizações. O objetivo é sempre levar seus resultados a um confronto com os dados experimentais e, desta forma, tentar destacar o que realmente de novo podem as reações de fragmentação nuclear estar fornecendo. Em especial, as reações de fragmentação vêm sendo estudadas, porque podem fornecer informações importantes sobre a compressibilidade nuclear, comportamento de núcleo altamente excitado, fenômenos críticos em microsistemas com forças de longo alcance, etc...

Infelizmente, a grande maioria de dados experimentais são bem descritos em ambas as aproximações estática e dinâmica, que são, em geral baseadas nas mais diferentes concepções. Nem mesmo os mais recentes dados exclusivos têm conseguido discriminar os vários modelos.

Neste sentido, os modelos de percolação, por sua simplicidade, são os melhores candidatos a ‘modelo de fundo’ para testar os demais modelos. Isto porque os modelos percolativos se baseiam apenas em características geométricas e probabilísticas, usando-se o mínimo de informação física e, portanto, podem permitir a separação dos efeitos puramente estatísticos dos aspectos provenientes da própria física do problema. A versatilidade da percolação na descrição da fragmentação nuclear tem sido mostrada por diversos autores, cabendo enfatizar que os modelos baseados em percolação são os mais simples modelos que exibem transição de fase.

Em particular, têm sido sugerido por Campi e Bauer ([Camp,86] e [Baue,88]), in-

dependentemente, através do estudo das correlações entre os momentos de distribuições de carga experimentais e dos momentos das distribuições de tamanho de *clusters* da percolação, que a fragmentação nuclear é um fenómeno crítico, i.é., uma manifestação de uma transição de fase tipo percolativa. Este fenómeno crítico teria, portanto, os mesmos expoentes críticos que os obtidos em transições percolativas. Contudo, mais recentemente, Gilkes *et al.* [Gilk,94] estudando a quebra de núcleos de ^{197}Au em alvos de ^{12}C a $1\text{GeV}/n$ concluíram que os expoentes críticos, extraídos das distribuições de carga dos fragmentos, estão mais próximos dos expoentes críticos obtidos em uma transição de fase líquido-gás, do que dos expoentes críticos calculados em percolação em redes infinitas tridimensionais. Obviamente, esta conclusão deve ser tomada com ressalva, uma vez que efeitos de tamanho finito devem ser cuidadosamente levados em conta no cálculo dos expoentes críticos. Em particular, há a dificuldade intrínseca de se definir a probabilidade crítica em sistemas finitos. Mostraremos neste trabalho que os critérios que têm sido utilizados na fragmentação nuclear e que foram tomados da teoria de percolação em grandes redes, não são muito apropriados. Mais especificamente, um critério de criticalidade baseado na multiplicidades de *clusters* pesados é proposto.

Transições de fase são caracterizadas por uma peculiar troca na maneira pela qual correlações se propagam através do sistema. Como descrever a propagação destas correlações (ou propagação de ordem) próximo do ponto crítico é ainda um problema sem solução [Uzun,93]. É bem estabelecido contudo, que em transições de fase de 1ª ordem, em sistemas infinitos, o comprimento de correlação é finito, enquanto que em transições de 2ª ordem, ele diverge. Então, se o comprimento de correlação é infinito, as forças de curto alcance são irrelevantes para o comportamento crítico do sistema. Além disso, próximo do ponto crítico de uma transição de fase de segunda ordem, as flutuações frequentemente mostram auto-similaridade sobre um grande intervalo de resolução. A medida quantitativa destas flutuações é dada por um expoente crítico denominado expoente intermitente. Se, contudo, a transição de fase é de primeira ordem, o comprimento de correlação é pequeno e o sistema não é auto-similar para grandes escalas no ponto crítico. Consequentemente, neste caso, espera-se que o expoente inter-

mitente se anule. Isto quer dizer que, através do estudo das flutuações não-estatísticas (ou intermitência como elas também são conhecidas), encontrar ou não encontrar, nos dados experimentais de fragmentação nuclear, sinais de intermitência, poderá fornecer instrumento poderoso para, então, distinguir diferentes modelos que foram propostos.

Em particular, Ploszajczak e Tucholski [Plos,91], estudando flutuações não estatísticas na distribuição de carga/massa experimental de emulsão nuclear [Wadd,85] e na distribuição de tamanho dos *clusters* em modelos percolativos, concluíram que estas flutuações são auto-similares e que a chamada dimensão fractal anômala em ambos os sistemas são aproximadamente iguais. Mas, Barz *et al.* [Barz,92], utilizando o modelo de multifragmentação estatística, mostraram que as flutuações encontradas podem apenas ser resultantes das diversas condições iniciais (diversos parâmetros de impacto) para o sistema fragmentante na reação. Estes resultados foram também confirmados em modelos percolativos por Santiago e Chung [Sant,92c]. Contudo, dados mais exclusivos são ainda necessários para esclarecer a questão.

Todos estes resultados criaram a expectativa de que a fragmentação nuclear possa ser descrita pelos mesmos expoentes críticos que os obtidos em percolação. De fato, [Baue,88] e [Li,94] defendem a idéia de que a hipótese de universalidade das grandes redes permanece válida ainda em sistemas finitos. Se isto for verdadeiramente o caso, todos os expoentes críticos e a própria dimensão fractal associados aos modelos de percolação deveriam ser iguais, independentemente do tipo de arranjo dos nucleons (da estrutura da rede). Contudo, não está claro se o próprio conceito de universalidade das grandes redes se aplica ao caso nuclear. Na verdade, um dos objetivos deste trabalho é mostrar que efeitos de tamanho finito violam a hipótese de universalidade, que vem sido adotada na descrição de sistemas nucleares fragmentantes.

Com efeito, através de cálculo de modelo, neste trabalho, estudamos a transição de fase percolativa e a transição de fase em modelos de nucleação em sistemas finitos, via método de Monte Carlo. Para este fim, a percolação de sítio e a percolação de ligação em rede cúbica simples são utilizadas e alguns expoentes críticos da transição de fase

percolativa e da transição de fase nucleativa são extraídos por métodos convencionais e, então, comparados.

Modelos de nucleação apresentam diversas semelhanças com os modelos de percolação ([Dors,93], [Chun,93]). Em particular, ambos procuram descrever toda a física do processo de fragmentação nuclear através de um único parâmetro: - a probabilidade de concentração, no caso da percolação, e o raio efetivo de interação no caso da nucleação. Apresentamos neste trabalho um estudo comparativo entre os dois modelos e mostramos que existe um isomorfismo entre a percolação de ligação e a nucleação e que, apesar deste isomorfismo, importantes diferenças entre estes modelos são encontradas. Discutimos também outra dificuldade intrínseca das abordagens que utilizam o modelo de percolação convencional e analisamos alternativas com o objetivo de contornar esta dificuldade. Trata-se do problema das configurações exóticas.

De fato, o processo de *clusterização* produz configurações um tanto quanto exóticas, tais como a de *clusters* ramificados, tipo hidra etc, os quais, dificilmente podem ser identificados como fragmentos nucleares (pelo menos não como núcleos no estado fundamental). De fato, estas configurações exóticas estão, de alguma forma, relacionadas com algum tipo de energia de excitação, correspondente a algum estado deformado ([Sant,90],[Chao,91]). Atentando para este fato, Campi e Desbois [Camp,85] propuseram algumas condições de compacticidade na posição média e no momentum médio de cada nucleon. Desta forma, *clusters* só seriam constituídos por nucleons cujas interdistâncias e momenta relativos fossem menores que certos valores proporcionais aos valores *rms* do raio e do momentum de Fermi destes *clusters*, respectivamente. Também, com o objetivo de contornar este problema, Chao e Chung [Chao,91] e Santiago e Chung [Sant,93] modificaram a própria definição de *cluster* e propuseram modelos em rede *fcc*, nos quais os *clusters* produzidos são formados por ligações tetraédricas e, portanto, fornecem estruturas mais densas e compactas. Já Santiago e Chung [Sant,90], considerando ainda o mesmo problema, propuseram um modelo de percolação-*evaporação* onde o decaimento secundário dos *clusters* quentes é levado em conta através da teoria de *evaporação* de

Weisskopf [Weis,37]. Desta forma, os *clusters* mais ramificados adquiririam formas mais compactas via emissão de nucleons ou de núcleos leves.

Outro mecanismo que tem sido considerado para se explicar a fragmentação nuclear é a nucleação de bolhas na matéria nuclear quente. Neste contexto, a matéria nuclear comprimida pela colisão atinge, por expansão (isentrópica) subsequente, a região de metaestabilidade, onde bolhas de densidade menor que a fase original (líquida) podem se formar ([Blin,86],[Bond,88]). Em particular, pode ser mostrado que bolhas que surgem na matéria com raio menor que um certo raio (denominado raio crítico) tendem a colapsar, enquanto que aquelas que surgem com raio maior se expandem. Bondorf *et al.*, utilizando uma equação de estado do tipo Skyrme e na aproximação de densidade inicial da bolha nula, mostraram que flutuações de partícula única na pressão cinética podem fazer com que bolhas subcríticas expandam e bolhas supercríticas colapsem. Neste trabalho, estendemos o tratamento para incluir bolhas de densidade inicial arbitrária e, no contexto de diferentes potenciais nucleon-nucleon fenomenológicos, mostramos que este quadro pode ser significativamente modificado.

A estrutura deste trabalho, em linhas gerais, está organizada da seguinte maneira: No Capítulo 1, apresentaremos alguns dados experimentais relativos à fragmentação nuclear e exporemos alguns modelos, que na nossa opinião, são mais representativos das diversas abordagens que têm sido utilizadas para a fragmentação nuclear. No Capítulo 2, o problema de flutuações e intermitência na fragmentação nuclear é discutido.

O Capítulo 3 é iniciado com uma breve revisão das idéias da teoria de percolação e, a seguir, modelos percolativos são propostos para a fragmentação nuclear e seus principais resultados são discutidos em comparação com dados experimentais. O Capítulo 4 será dedicado a uma discussão mais detalhada dos efeitos de tamanho finito e da criticalidade em sistemas muito pequenos via modelos percolativos. Nossas principais conclusões e perspectivas, concernentes aos aspectos que foram abordados neste trabalho, e que em sua maioria tomam como base as referências [Sant,90], [Sant,92a], [Sant,92b], [Sant,93] e [Sant,94], encontram-se resumidas no Capítulo 5.

A Multifragmentação Nuclear

*“Si apud bibliothecam hortulun habes,
nihil deerit.”[†]*

Cícero.

Por ser um processo relativamente novo e muito difícil de se tratar teoricamente, ainda não entendemos bem como ocorre a múltipla produção de fragmentos, apesar da grande quantidade de modelos propostos e trabalhos experimentais. Entretanto, a maior parte dos modelos sugeridos procuram interpretar a multifragmentação como um fenômeno crítico a baixa densidade, isto é, à densidade abaixo da normal. De fato, em termos qualitativos, podemos tentar entender como ocorre a fragmentação nuclear com base em argumentos bastante razoáveis, aplicados a um sistema nuclear de baixa densidade [Ngô,89a]:

Um conjunto de A nucleons (neutrons e prótons) estão, na Fig. 1.1(a), distribuídos em um volume V_0 que corresponde à densidade normal ρ_0 . Nesta densidade, cada nucleon interage fortemente com todos os seus vizinhos, e as leis físicas são, em boa aproximação, dadas pelo campo médio criado por todo o conjunto dos demais nucleons.

[†] “Que mais te falta, se tens uma biblioteca que dá para um jardimzinho?”

Se, em uma reação de íons pesados, o volume V_0 expande muito, a densidade média do sistema decresce e podemos encontrar regiões onde haverá maior concentração de nucleons, e regiões onde a concentração de nucleons será baixa, conforme ilustra a Fig. 1.1(b). E, nesta situação, não é realístico descrever a densidade do sistema em termos de uma densidade média, isto é, em termos de um campo médio pois as flutuações na densidade serão grandes. Com efeito, quando a densidade é baixa, cada nucleon deixa de interagir pela força nuclear com todos os seus vizinhos, porque alguns poderão estar fora do alcance.

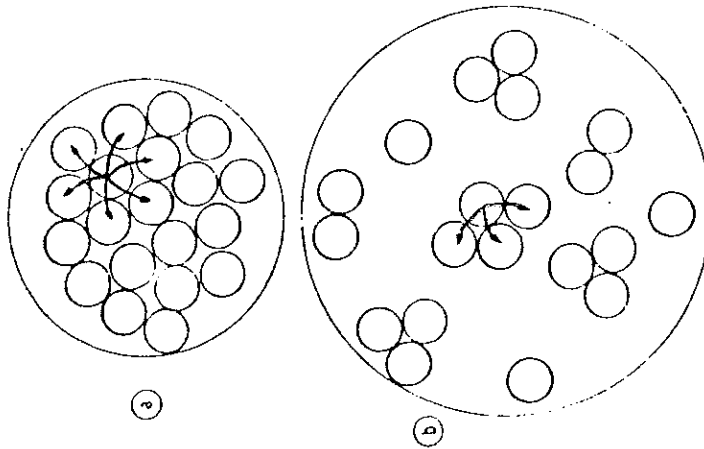


Fig. 1.1 - Ilustração esquemática do papel da densidade na fragmentação nuclear.

Esta configuração (Fig. 1.1.(b)) é muito instável, uma vez que as forças de maior alcance, como a Coulombiana e a centrífuga, são repulsivas. Como consequência, o sistema se divide em vários pedaços, dando origem à multifragmentação nuclear.

Contudo, em termos quantitativos, para tratar corretamente esta produção de fragmentos, precisaríamos de uma teoria quântica de muitos corpos aplicada ao caso nuclear, teoria esta que infelizmente ainda está longe de poder fornecer uma solução ao problema. Em vista dessa dificuldade de ordem teórica, o caminho a seguir foi o de recorrer a abordagens mais simples, dando então surgimento a diversos modelos, muitos dos quais diferem radicalmente uns dos outros, em termos de hipóteses físicas. Apesar disto, os vários modelos que surgiram são capazes de explicar os dados experimentais existentes.

Na próxima Seção, os principais resultados experimentais referentes à fragmentação nuclear serão discutidos e na Seção 1.2 os modelos mais comuns serão brevemente revisados.

1.1 - ASPECTOS EXPERIMENTAIS

Em uma reação de íons pesados, a energias intermediárias e altas, um grande número de canais são abertos e o sistema nuclear resultante da colisão pode evoluir segundo uma larga faixa de temperatura e densidade. A grande dificuldade das reações de íons pesados a tais energias, é saber que fração da energia incidente é usada para excitar o sistema. Por sua vez, a energia de excitação é, basicamente, dividida entre dois graus de liberdade: o grau de liberdade cinético, devido a temperatura, e o grau de liberdade de compressão. A investigação da distribuição da energia disponível entre os modos de compressão e energia térmica requer uma observação detalhada da desexcitação do sistema quente. Sob certas condições, esta desexcitação pode levar o sistema para uma região de instabilidade e a fragmentação do sistema em vários pedaços pode ocorrer. Neste caso, um grande número de partículas leves e fragmentos médios são produzidos. Tipicamente, num evento, podemos encontrar até 40 partículas leves e cerca de 3 ou 4 fragmentos com $Z \geq 3$. Isto faz com que, do ponto de vista experimental, seja extremamente complicado a caracterização de uma partição em termos da multiplicidade total, do número de massa e da carga de cada fragmento. Deve-se notar que as dificuldades experimentais para se medir o A de cada fragmentos são enormes, principalmente na faixa de fragmentos muito leves. Como a multiplicidade final de fragmentos cresce rapidamente com a energia, torna-se, com o aumento da energia do feixe, cada vez mais difícil a coleta de todos os fragmentos produzidos pelas técnicas convencionais de detecção. Esta é a razão porque, nos últimos anos, se desenvolveu com grande sucesso, a técnica dos detetores a 4π , que permitiu a extração de dados exclusivos. De

fato, as dificuldades experimentais acima citadas, fizeram com que praticamente todos os resultados disponíveis até o início da década de 90 fossem dados inclusivos, isto é, dados sem as especificações dos canais a que pertencem. São exemplos de dados experimentais inclusivos as distribuições de carga/massa, os espectros de energia cinética, as distribuições isotópicas, etc.

Devemos observar que os dados inclusivos, podem não conter (ou ocultar) informações sobre o mecanismo de reação em questão uma vez que são provenientes de uma superposição de resultados de diversas colisões.

Uma quantidade extremamente importante na teoria das colisões é o parâmetro de impacto. Contudo, devido à impossibilidade experimental de medi-lo diretamente, partiu-se para a medida da multiplicidade, que guarda uma estreita correlação com o parâmetro de impacto. Na Fig. 1.2 retirada da referência [Teva,82] apresentamos um exemplo que ilustra este fato. Nela observa-se que um mesmo tipo de reação, mas com diferentes parâmetros de impacto, podem dar origem a diferentes produtos de reação – há uma forte dependência da reação com o parâmetro de impacto. Em colisões periféricas (a), o sistema fragmenta-se num processo semelhante à fissão (multiplicidade baixa) enquanto que, em colisões frontais (b), observa-se a completa destruição dos reagentes (multiplicidade alta).

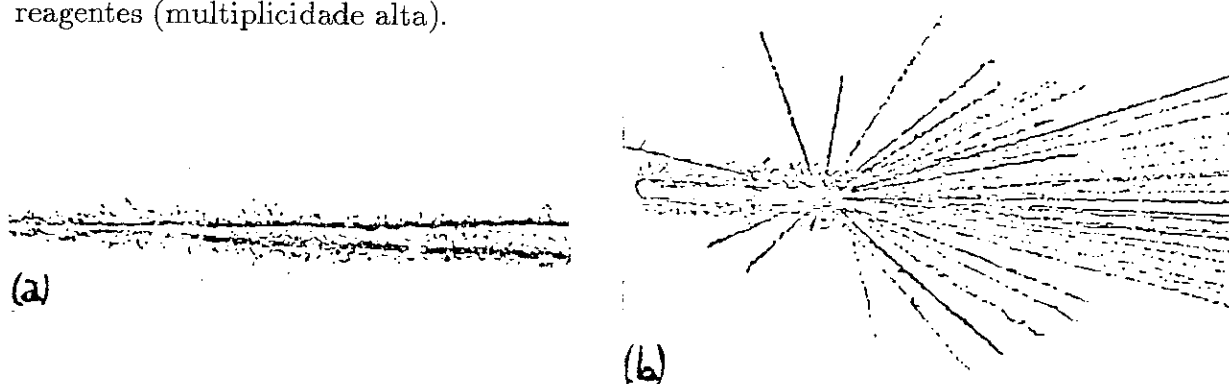


Fig. 1.2 - Dependência da reação com o parâmetro de impacto.

A multifragmentação, que está associada a uma alta multiplicidade de partículas carregadas, deve, predominantemente, ocorrer em colisões mais centrais, que apresen-

tam maior multiplicidade de fragmentos. Esta dependência da multiplicidade com o parâmetro de impacto está também ilustrada na Fig. 1.3, retirada de [Doss,87].

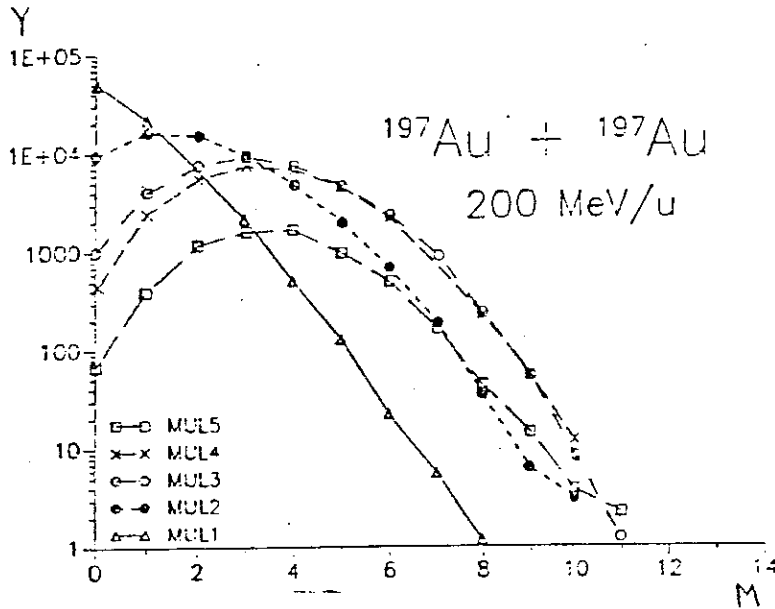


Fig. 1.3 - Distribuição de multiplicidade.

Utilizando desta dependência da multiplicidade com o parâmetro de impacto, vários grupos experimentais conseguiram obter diversos dados “exclusivos” apresentando os resultados para várias janelas de multiplicidade. Especificamente, a quantidade escolhida é N_C , definida como o número de detetores em que, no mínimo, uma partícula carregada é registrada. Assim, eventos com N_C grande (pequeno) corresponde a situações em que o parâmetro de impacto é pequeno (grande).

Outra quantidade, equivalente a N_C , para selecionar eventos em relação aos diversos parâmetros de impacto é a carga Z_{lig} , definida como a carga total distribuída nos fragmentos de massa intermediária (IMF) que são os fragmentos com carga Z_f entre 3 e 20 [Souz,91] ou ainda, os fragmentos com $Z_f \geq 2$ [Kreu,93]. As principais quantidades exclusivas são: a distribuição de multiplicidade de IMF, a assimetria de carga dos fragmentos, correlações de momentos das distribuições de tamanho e os espectros de energia cinética para carga e ângulo fixos.

No que se segue, os principais dados inclusivos e exclusivos serão apresentados.

1.1.1) Algumas Medidas Inclusivas

O exemplo mais típico, na fragmentação nuclear, de dado inclusivo é sem dúvida a distribuição de carga/massa. Experimentalmente identificam-se os fragmentos e conta-se o número destes fragmentos segundo sua massa (ou carga), sem levar em conta os parâmetros de impacto das reações de que provieram. Isto quer dizer que estas distribuições de tamanho correspondem a uma média sobre todos os parâmetros de impacto da reação.

As distribuições de massa que mais chamaram a atenção foram aquelas reportadas pelo grupo de Purdue [Finn,82], que são relativas às reações $p + {}^{79}Kr$ e $p + {}^{129}Xe$ a energias incidentes de 80 a 350 GeV. O interesse sobre estes dados veio, principalmente, da constatação de que as distribuições de massa de fragmentos leves e médios seguem um comportamento de lei de potência, i.e., $\sigma(A_f) \propto A_f^{-\tau}$. De fato, podemos observar na Fig. 1.4 que, em ambas as reações, a distribuição de massa dos fragmentos leves e de massa intermediária ($A_f \leq 30$) pode ser fitada por uma lei de potência com $\tau = 2,64$ ($p + {}^{129}Xe$) e $\tau = 2,65$ ($p + {}^{79}Kr$). Como já mencionamos na Introdução, o grupo de Purdue propôs que este comportamento da distribuição de massa poderia ser um sinal da transição de fase líquido-gás, a qual, em última análise, seria o responsável pela fragmentação nuclear.

Tal comportamento da distribuição de carga/massa é também verificada em colisões núcleo-núcleo, como podemos observar na Fig. 1.5. Com efeito, nesta figura encontram-se os resultados experimentais de Phair *et al.* [Phai,92] para as distribuições de carga das colisões centrais de ${}^{36}Ar + {}^{197}Au$ a 110 MeV/n e ${}^{129}Xe + {}^{197}Au$ a 50 MeV/n, as

quais, podem ser fitadas por uma lei de potência com $\tau = 2,15$ e $2,5$, respectivamente.

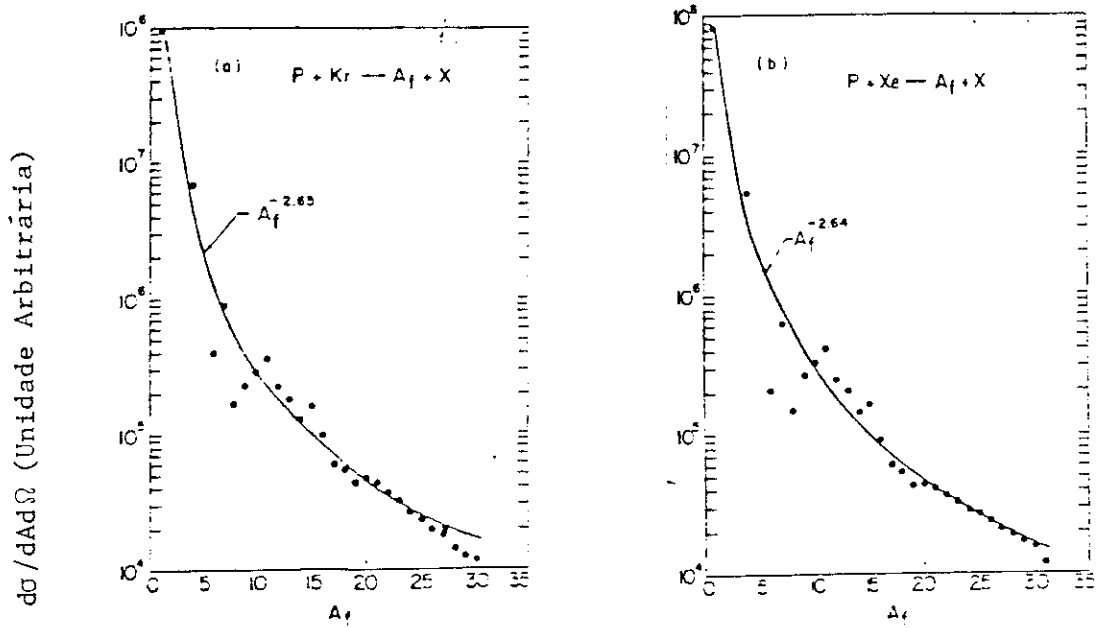


Fig. 1.4 - Distribuição de massa.

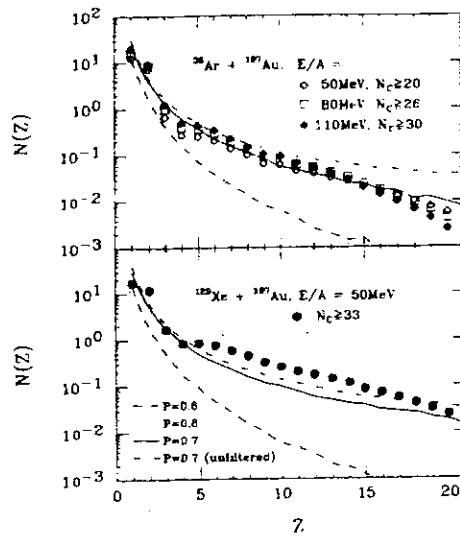


Fig. 1.5 - Distribuição de carga.

Finalmente, na Fig. 1.6, as distribuições de carga resultantes das reações $^{16}\text{O} + ^{197}\text{Au}$ a 60 GeV/n e a 226 GeV/n [Bert,87] são apresentados. Podemos verificar que no

caso da energia mais baixa, os dados ainda podem ser fitados por uma lei de potência com $\tau = 2,6$, enquanto que, no segundo caso, para a energia mais alta, a concordância não é boa e os dados são melhor representados por uma exponencial.

Estes resultados nos mostram que, tanto para reações induzidas por prótons a altas energias quanto em colisões núcleo-núcleo, as distribuições de tamanho dos fragmentos formados têm um mesmo comportamento qualitativo, i.é., seguem uma lei de potência.

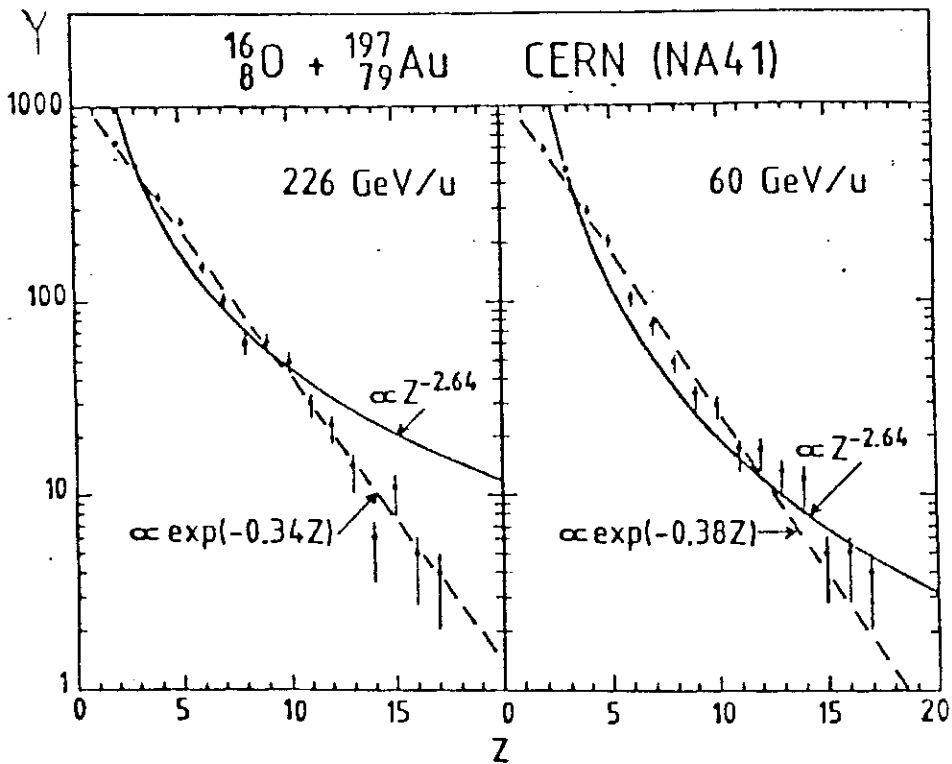


Fig. 1.6 - Distribuição de carga.

A dependencia do expoente aparente τ com relação a energia incidente foi investigada por Mahi *et al.* [Mahi,88] em colisões $p + ^{129}\text{Xe}$ na faixa de 1 a 19 GeV (Fig. 1.7) e por Li *et al.* [Li,94] em reações $^{40}\text{Ar} + ^{45}\text{Sc}$ com energia incidente na faixa de 15 a 115 MeV/n (Fig. 1.8).

Observa-se na Fig. 1.7 que τ decresce com a energia do feixe, atinge um mínimo

($\tau_{min} \approx 1,65$ para $E_{inc} \approx 4,5$ GeV) e cresce até $\approx 2,1$ quando, em $E_{inc} \approx 10$ GeV se estabiliza. Comportamento similar é observado na Fig. 1.8 onde o mínimo de $\tau \approx 1,2$ ocorre em $E_{inc} \approx 25$ MeV/n, quando então, aumenta, chegando a $\tau \approx 4,0$ quando $E_{inc} \approx 100$ MeV/n.

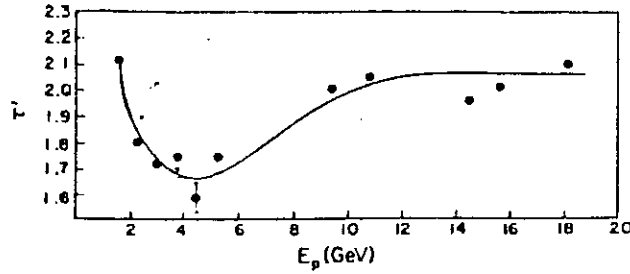


Fig. 1.7 - Dependência de τ com a energia incidente em reações $p + \text{núcleo}$.

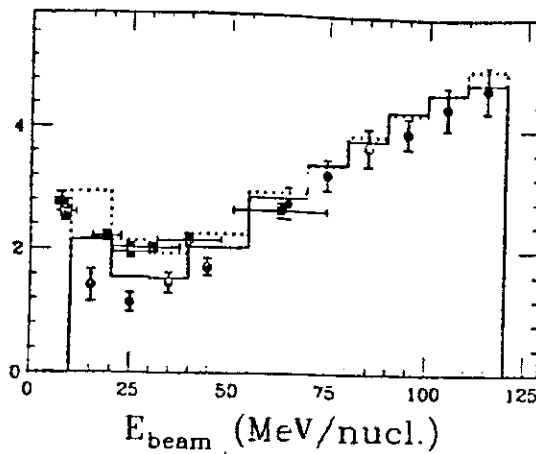


Fig. 1.8 - Dependência de τ com a energia incidente em reações $\text{núcleo} + \text{núcleo}$.

Outro conjunto de medidas experimentais de grande importância é dado pelos espectros de energia cinética dos fragmentos com A fixo. A Fig. 1.9, tirada de Hirsch *et al.* [Hirs,84] mostra os espectros de energia cinética dos isótopos de ^{12}C e ^{16}O , provenientes da reação $p + ^{79}\text{Kr}$ a energia de 80 a 350 GeV. Podemos observar que todas as curvas apresentam praticamente o mesmo comportamento: há um rápido aumento até um valor máximo em torno de 18 MeV para o ^{12}C e 22 MeV para o ^{16}O e, finalmente,

um decaimento exponencial, apresentando todas as curvas uma forma típica de sino.

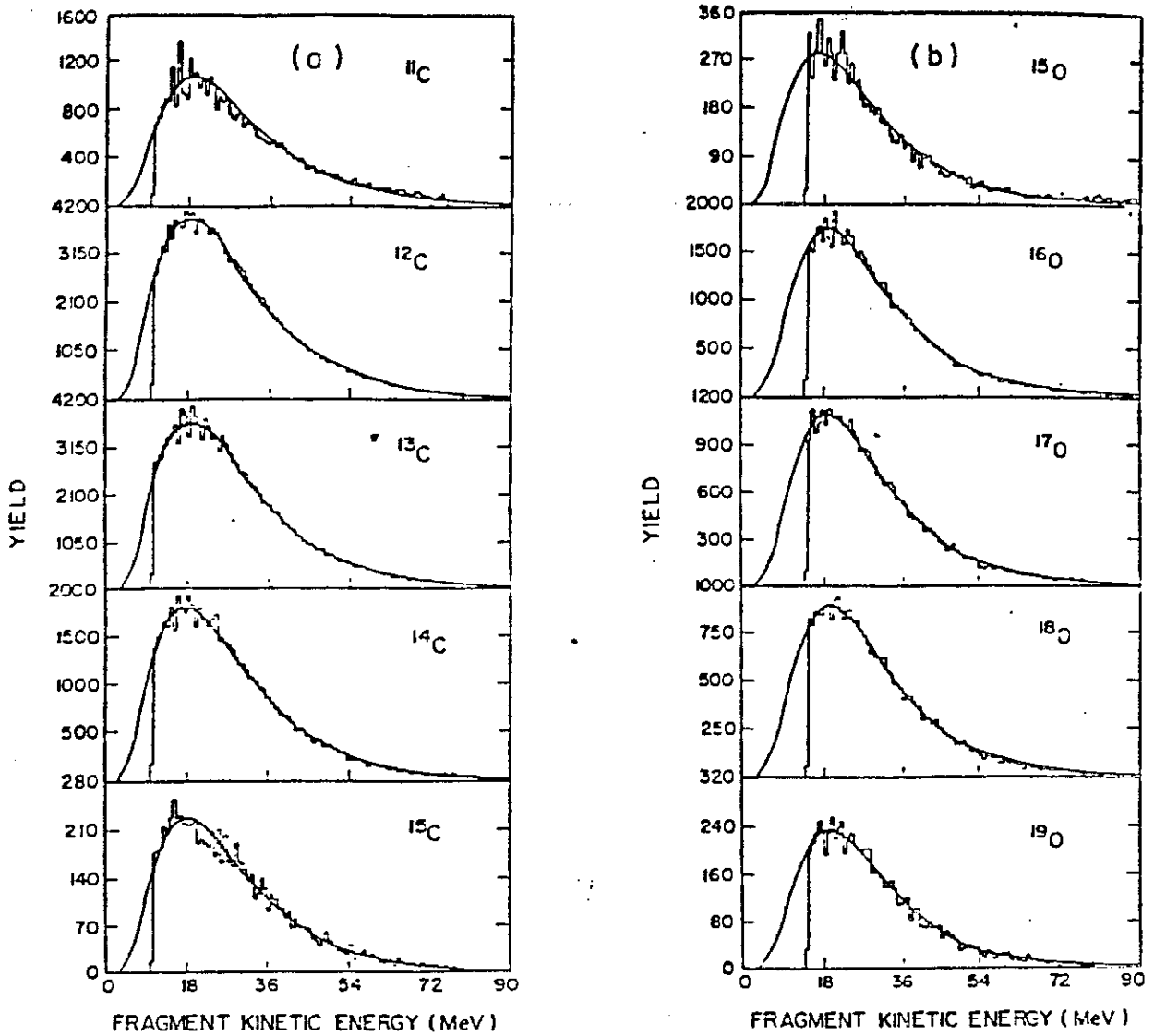


Fig. 1.9 -Espectro de energia cinética do ^{12}C e ^{16}O .

Comportamento similar pode ser observado na Fig. 1.10, tirada da Ref. [Warw,82], correspondente ao espectro de energia dos fragmentos de massa entre 26 a 31 e provenientes da quebra do ^{197}Au provocada pelos vários projéteis indicados.

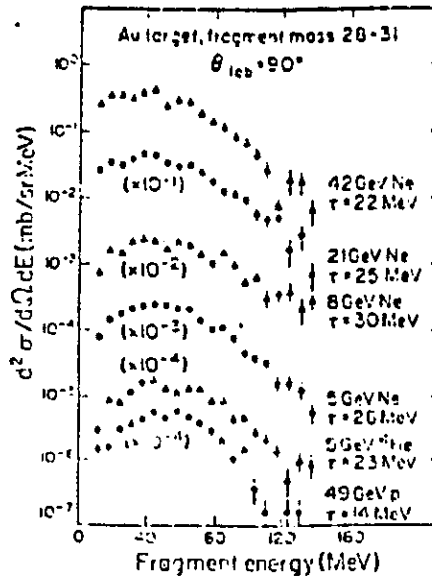


Fig. 1.10 - Espectro de energia cinética resultante da quebra do ^{197}Au .

1.1.2) Medidas Exclusivas

Através da introdução da quantidade N_C (que, como já mencionamos, está experimentalmente relacionada com o parâmetro de impacto) uma grande variedade de dados exclusivos foram medidos nos últimos anos. Uma delas é a distribuição de multiplicidade de IMF's para várias janelas de N_C . A Fig. 1.11 ilustra o comportamento deste tipo de distribuição para a reação $^{36}\text{Ar} + ^{197}\text{Au}$ a várias energias incidentes tal como reportadas por Souza *et al.* [Souz,91]. Observe-se que, em todos os casos, as distribuições seguem um comportamento tipo gaussiano. Para o caso particular da energia de 110 MeV/n e para $N_C \geq 32$ (colisões centrais), o pico está em $N_{IMF} \approx 4$.

Na Fig. 1.12, mostramos os espectros de energia do carbono para diversos ângulos de espalhamento no laboratório e para $N_C \geq 33$, provenientes da reação $^{129}\text{Xe} + ^{197}\text{Au}$ a 50 MeV/n tal como apresentado na Ref. [Bown,92]. Podemos ver que os espectros não mudam muito de forma, mas a largura e o máximo de energia cinética crescem com ângulos decrescentes.

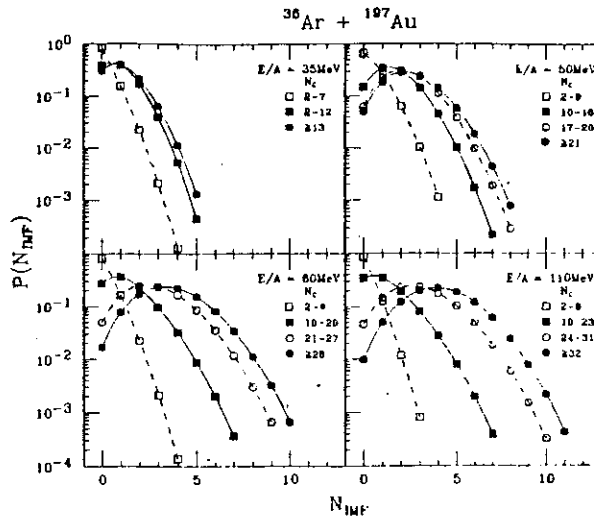


Fig. 1.11 - Distribuições de IMF's.

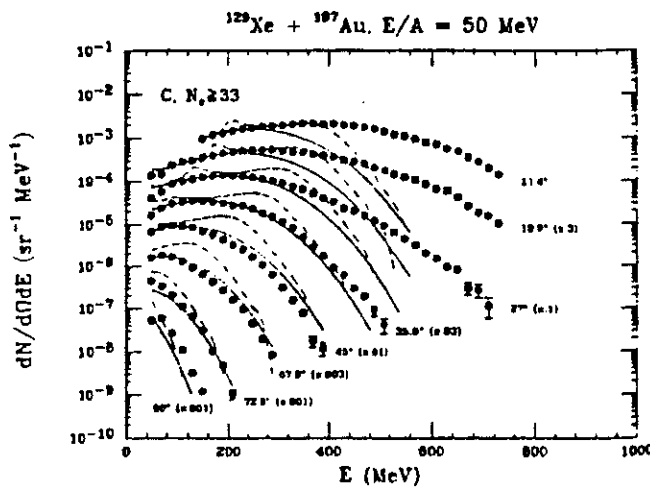


Fig. 1.12 - Espectros de energia do ^{12}C para diversos ângulos de espalhamento.

A Fig. 1.13 mostra os resultados de Kreutz *et al.* [Kreu,93] para a assimetria na

carga dos fragmentos formados nas colisões de ^{197}Au sobre ^{12}C , ^{27}Al , ^{64}Cu e ^{207}Pb a $600\text{MeV}/n$. Esta assimetria é medida pela quantidade $(Z_{\text{max}} - Z_2)/(Z_{\text{max}} + Z_2)$ que está plotada contra a carga ligada do sistema Z_{lig} . Z_{max} e Z_2 são o número de carga do maior e do segundo maior fragmento, respectivamente.

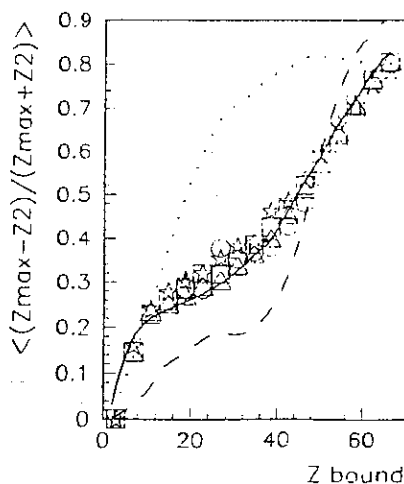


Fig. 1.13 - Assimetria na carga.

Na Fig. 1.14 a assimetria é dada através dos gráficos de Dalitz para a carga, no caso das reações mencionadas, à semelhança dos mesmos gráficos em física de partículas (no caso para a massa). Nestes gráficos as distancias aos eixos são dadas por $d_a = Z_a/(Z_a + Z_b + Z_c)$, $d_b = Z_b/(Z_a + Z_b + Z_c)$ e, $d_c = Z_c/(Z_a + Z_b + Z_c)$. Nestas expressões, Z_a , Z_b e Z_c são os três maiores fragmentos em cada evento e são escolhidos aleatoriamente, *i.é.*, num evento Z_a pode ser o terceiro maior, Z_b o maior e Z_c o segundo maior. Note-se que estão indicadas as faixas de carga ligada bem como os vários alvos utilizados. A conservação de carga faz com que todos os fragmentos formados fiquem encerrados dentro do triângulo. Quando a carga ligada é grande (colisões periféricas) somente clusters grandes aparecerão e estes situam-se nos lados e vértices do triângulo. Todavia, para colisões mais violentas, que correspondem a eventos de alta multiplicidade e menor carga ligada, a região central do triângulo é que passa a ser povoada.

Do estudo dessas assimetrias, espera-se obter informações sobre o mecanismo de reação, uma vez que, modelos sequenciais predizem um decaimento altamente assimé-

trico enquanto que modelos simultâneos predizem uma quebra bastante simétrica.

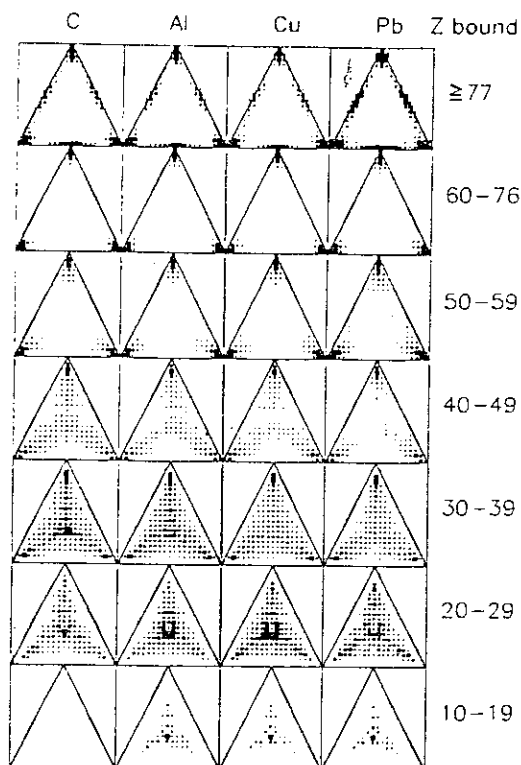


Fig. 1.14 - Gráficos de Dalitz para a carga.

A seguir apresentamos os resultados referentes aos momentos da distribuição de fragmentos. Estes são definidos por $M_k = \sum'_s n_s s^k$, onde n_s é o número de fragmentos de tamanho s , k a ordem do momento e a plica sobre o somatório indica que o maior *cluster* é excluído da soma. Na Fig. 1.15, retirada de [Camp,86], é mostrada a correlação $\ln S_3$ versus $\ln S_2$, onde $S_3 = M_3/M_1$ e $S_2 = M_2/M_1$, com os momentos calculados em cima de distribuições obtidas através (a) da percolação de ligação para um sistema com 216 sítios e (b) de dados experimentais da quebra do ^{197}Au em emulsão nuclear a 990 MeV/n [Wadd,85]. O comportamento é praticamente o mesmo nas duas situações.

Na Fig. 1.16 são mostrados os resultados de Campi [Camp,88] para o momento

condicional m_2 (definido como o valor de M_2 para uma dada multiplicidade) referentes ao modelo de percolação unidimensional (cruzes), tridimensional (círculo) e fragmentação do ^{197}Au (bolas cheias). Os resultados são plotados contra a multiplicidade normalizada n . Pode-se ver claramente que os dados experimentais e os resultados da percolação tridimensional apresentam o mesmo comportamento e diferentes do caso da percolação unidimensional, na região de baixos valores de n . Como não há transição de fase na percolação unidimensional, Campi usou estes resultados para sugerir que a quebra do ^{197}Au se dá de maneira semelhante a uma transição de fase percolativa em sistemas finitos.

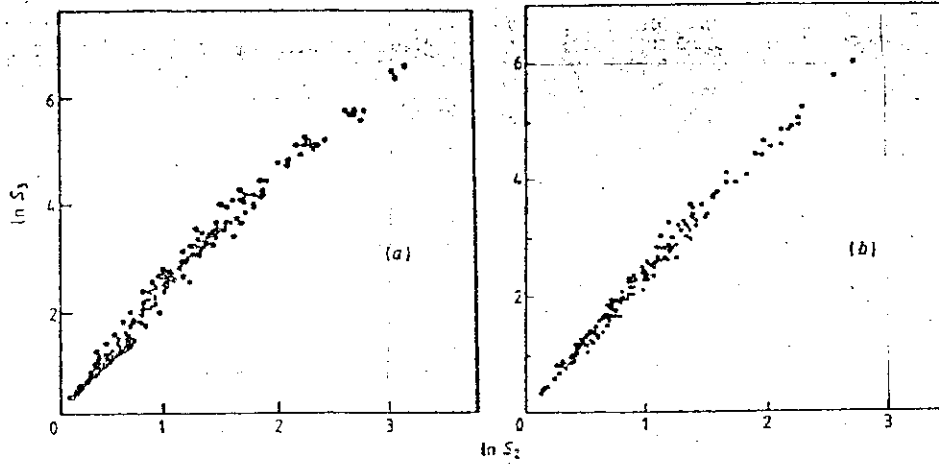


Fig. 1.15 - Correlações entre $\ln S_3$ e $\ln S_2$.

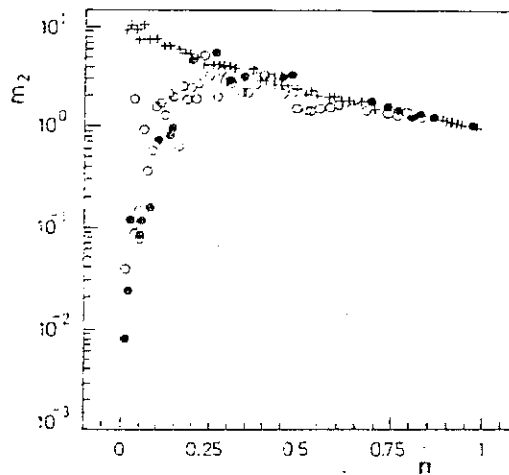


Fig. 1.16 - Momento m_2 versus multiplicidade n .

A forma da distribuição experimental de velocidade dos fragmentos tem sido uti-

lizada na tentativa de se estabelecer o processo de decaimento do sistema fragmentante, i.é., saber se se trata de um processo sequencial ou simultaneo. Na verdade, podemos definir o tensor fluxo-energia cinética no centro de massa como

$$T_{ij} = \frac{\sum_n P_i^{(n)} P_j^{(n)}}{2m_n} \quad (1.1)$$

A soma na Eq. 1.1 se faz sobre todos os fragmentos e $P_i^{(n)}$ é a i-éssima componente carteziana do momentum do n-éssimo fragmento e m_n a sua massa. Ou, usando as grandezas reduzidas:

$$q_i = \frac{t_i^2}{\sum_{j=1}^3 t_j^2} \quad (1.2)$$

sendo $t_1 < t_2 < t_3$ os autovalores de T_{ij} . Neste caso, a esfericidade S e a coplanaridade C da distribuição são dadas por:

$$S = \frac{3}{2}(1 - q_3) \quad (1.3)$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2}(q_2 - q_1).$$

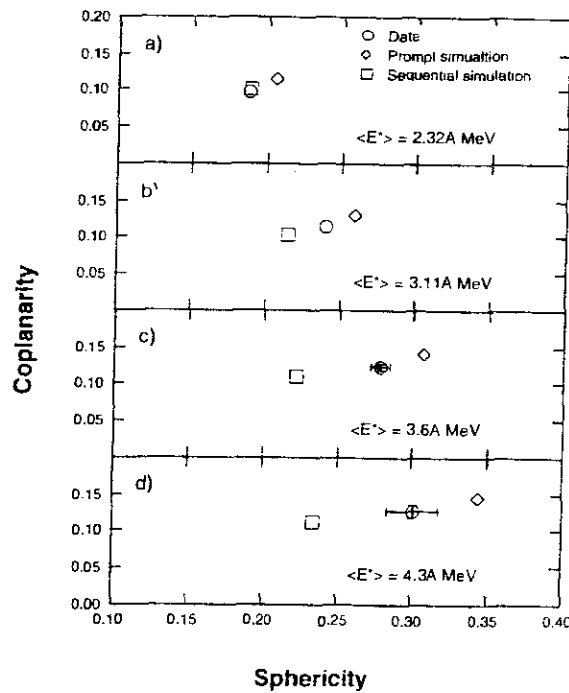


Fig. 1.17 - Coplanaridade versus Esfericidade.

Na Fig. 1.17, tirada de [Beau,94] são mostrados as médias das distribuições de esfericidade-coplanaridade da reação $^{35}\text{Cl} + ^{197}\text{Au}$ a energias incidentes de $35\text{MeV}/n$ (círculos). Os resultados são comparados com cálculos de modelos simultaneos (diamante) e sequenciais (quadrado) para quatro valores da energia de excitação $\langle E^* \rangle$. Devemos notar que, quando $\langle E^* \rangle$ é baixa, os resultados são melhor fitados pelo modelo sequencial. Todavia, quando a energia de excitação cresce, eles se aproximam dos resultados previstos pelos modelos simultaneos.

1.2 - MODELOS TEÓRICOS

Neste trabalho, como já dissemos na Introdução, utilizamos os modelos percolativos e de nucleação para estudar a fragmentação nuclear. Tais modelos são exemplos mais simples de tratamento não-dinâmico, em que apenas o estágio final da reação é envolvido. Contudo, por completeza e para melhor avaliar a importância dos modelos de percolação e nucleação, discutiremos também, embora de forma bastante sucinta, alguns modelos dinâmicos que pretendem descrever a evolução temporal de todo o processo. É o que faremos a seguir.

1.2.1 – Modelos Dinâmicos

Como já mencionamos, colisões de íons pesados a energias intermediárias e altas, devido a uma complicada dinâmica de colisão, apresentam como resultado estados finais que contêm muitos fragmentos de massa intermediária. A evolução no tempo do processo colisional seria, a principio, descrita, no limite não - relativístico, pela equação

de Schrödinger de n -corpos, a qual, pode ser escrita como:

$$H\Psi(1, \dots, n, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(1, \dots, n, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} V_{ij}(r_{ij})$, sendo que as variáveis de partícula única ($i, j = 1, \dots, n$) incluem números quânticos de momento angular orbital, spin, isospin, etc. Nesta equação, efeitos de correlação de muitos corpos são desprezados. Todavia, infelizmente, não sabemos resolver a Eq. 1.4 para $n > 2$. Assim, para contornar este problema, a dinâmica da produção de fragmentos vem sendo abordada por modelos que se baseiam em equações cinéticas, tais como a de Vlasov, ou por modelos que se baseiam em equações clássicas de movimento como é o caso, por exemplo, da dinâmica molecular ou, ainda, por cascata intra-nuclear.

Na presente seção duas principais classes de modelos dinâmicos serão brevemente discutidas: - aquela que corresponde aos modelos a 1-corpo, que, a grosso modo, podemos denominar de modelos de campo - médio, e aquela que corresponde aos modelos a n -corpos que, na fragmentação nuclear, em geral são representados pelos modelos de dinâmica molecular.

A – Modelos a 1 - Corpo

O ponto de partida dos modelos de campo-médio é o fato bem estabelecido de que, para temperaturas suficientemente baixas, as propriedades nucleares (estáticas e dinâmicas) podem ser bem entendidas em termos de nucleons individuais, movendo-se em um campo médio. Interações residuais de 2 ou mais corpos podem ser introduzidas como correções de ordem superior. Através destes modelos, a informação dinâmica obtida corresponde a matriz de densidade de 1 - corpo, e então, a ênfase do estudo são as observáveis de 1 - corpo.

O mais conhecido modelo a 1 - corpo é o TDHF (*Time Dependent Hartree - Fock*) que tem sido muito empregado no estudo e interpretação de fenômenos associados à dinâmica nuclear a energias relativamente baixas ($\leq 10 \text{ MeV/n}$), tais como a fissão e vibrações de superfícies [Shal,74]. O análogo clássico de TDHF é o modelo de Vlasov. Neste modelo, a propagação da densidade de 1 - corpo no espaço de fase (análogo clássico da distribuição de Wigner) é descrita pela equação de Liouville. Nenhum destes dois modelos dá bons resultados na faixa de energia da fragmentação nuclear, pois quando a energia aumenta, o efeito das interações residuais passa a crescer significativamente (o princípio de exclusão torna-se menos efetivo na blocagem dos estados finais para colisões diretas a 2 - corpos entre os nucleons constituintes). Além disto, estes modelos têm a desvantagem de que com a mesma condição inicial sempre se produzirá a mesma densidade final de 1 - corpo, i.e., eles são completamente determinísticos.

De fato, podemos observar na Fig. 1.18, tirada da Ref. [Jung,88], a evolução TDHF do núcleo ^{109}Ag . No lado esquerdo desta figura, apresentamos o corte, em vários instantes, da densidade de partícula única $\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} |\Phi_{\alpha}(\vec{r})|^2$, onde $\Phi(\vec{r})$ é a função de onda de partícula única. A evolução iniciou-se com uma perturbação (um buraco no estado fundamental esférico). Os contornos das linhas denotam vários valores da densidade ρ . No lado direito desta Fig. 1.18, é mostrado um corte na corrente de partícula única $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar \vec{K}}{m} \rho(\vec{r})$. O círculo representa a forma do sistema inicial. Observe que o núcleo é estável contra a perturbação no espaço da densidade. Na realidade a perturbação inicial vai desaparecendo com o tempo e novo núcleo é formado - a fragmentação não pode ser prevista por este modelo.

Resultado similar é obtido via solução da Equação de Vlasov, que é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla_{\vec{r}} f - \nabla_{\vec{r}} V \nabla_{\vec{p}} f = 0. \quad (1.5)$$

Esta equação, como já mencionamos, governa a evolução da densidade de um corpo no espaço de fase ($f = f(\vec{r}, \vec{p}, t)$) autoconsistente com seu próprio potencial de campo

médio $\langle V \rangle (\{\rho(\vec{r})\})$

$$V(\vec{r}) = \langle V \rangle (\{\rho(\vec{r})\}) + V_{Coul}(\{\rho(\vec{r})\}), \quad (1.6)$$

onde

$$\rho(\vec{r}, t) = \int d\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (1.7)$$

é a densidade espacial e V_{Coul} o potencial Coulombiano.

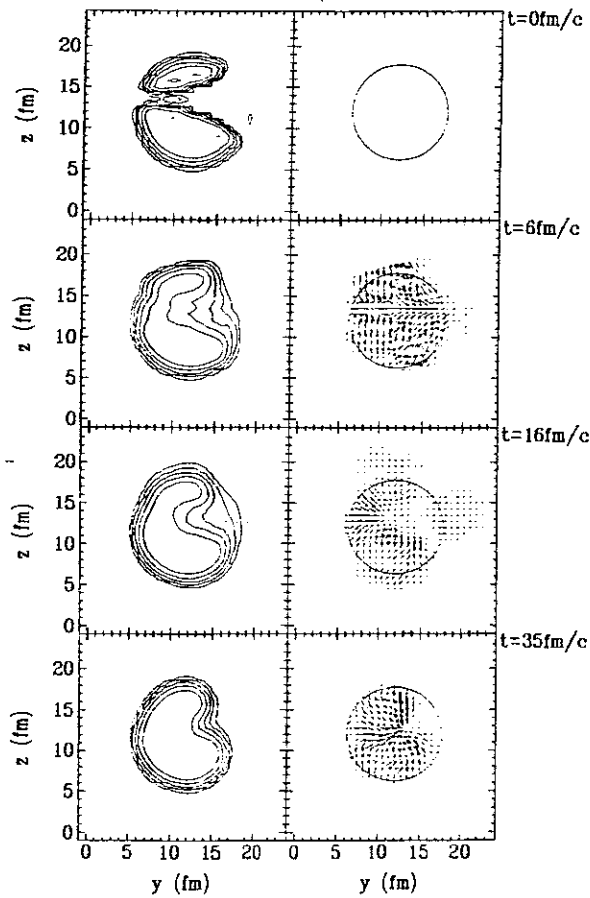


Fig. 1.18 - Evolução TDHF do núcleo ^{109}Ag .

Na Fig. 1.19, tirada da Ref. [Röpke,90], mostramos a evolução da densidade de nucleons da colisão central $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a $50\text{MeV}/n$. Os contornos da densidade são

para vários valores de ρ . Note-se que o resultado final é um corpo no estado excitado e que a clusterização também não pode ser explicada no contexto desta simulação.

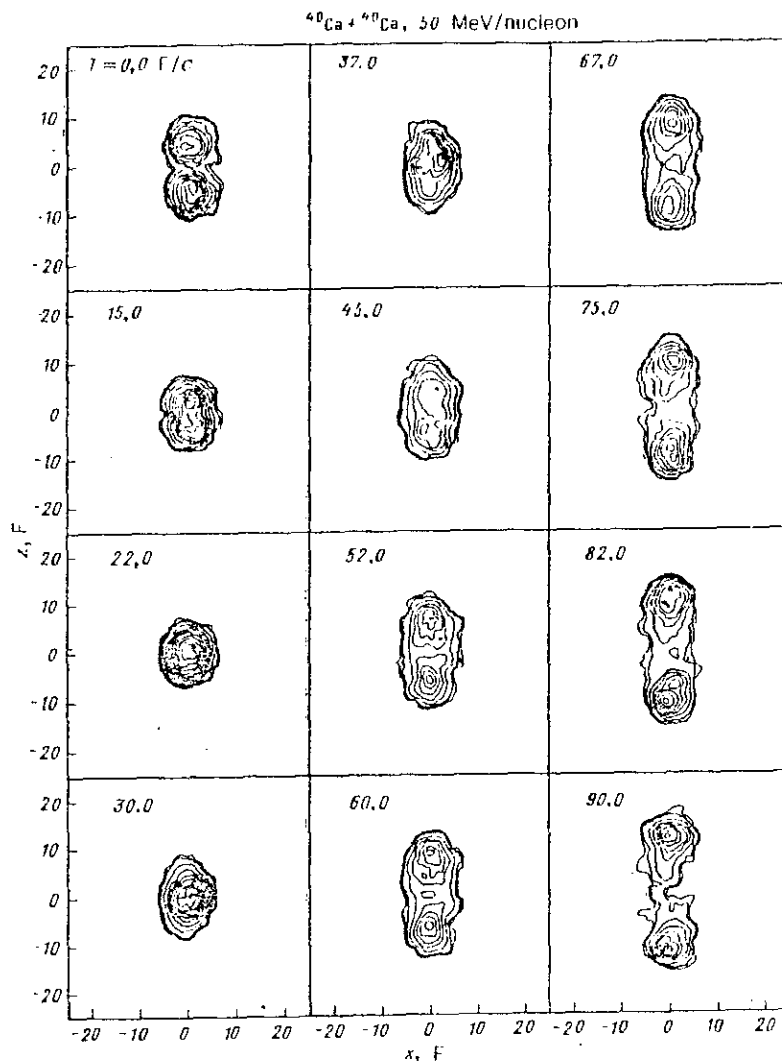


Fig. 1.19 - Evolução segundo a equação de Vlasov da colisão central $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a 50 MeV/n .

Um método geral para incorporar as colisões diretas a 2 - corpos foi primeiramente formulado por Nordhein [Nord,28] e foi adaptado para a física nuclear sob o nome de VUU (Vlasov-Uehling-Uhlenbeck) ou BUU (Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck). Este

método consiste simplesmente em acrescentar um termo de não-homogeneidade I_{col} na Eq. 1.5. Este termo, conforme mostrado por Uehling-Uhlenbeck, permite que na evolução dinâmica, se leve em conta correlações de n-corpos. E neste caso, a Eq. 1.5 assume a forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla_{\vec{r}} f - \nabla_{\vec{r}} V \nabla_{\vec{p}} f = I_{col}. \quad (1.8)$$

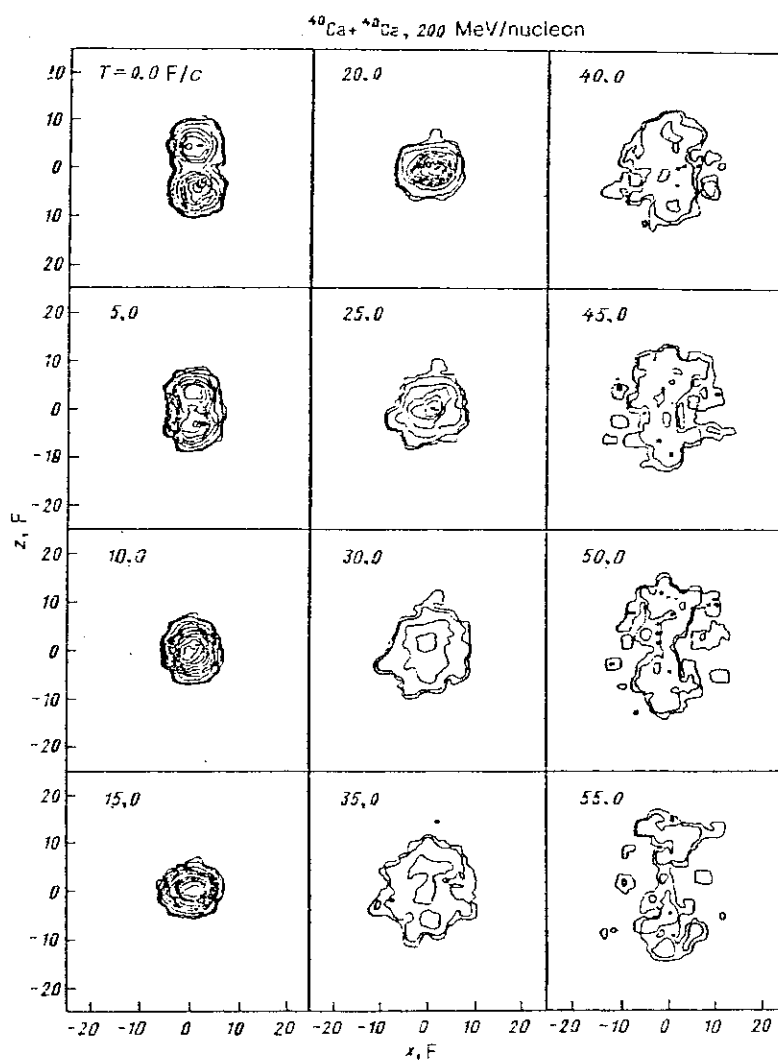


Fig. 1.20 - Evolução, segundo a equação VUU, da colisão central $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a 50 MeV/n .

Nestes modelos, o efeito médio do espalhamento residual a 2 - corpos é incorporado

auto-consistentemente, por exemplo, realizando, a cada intervalo de tempo, uma média sobre um grande número de evoluções paralelas, cada uma das quais representando uma particular manifestação do sistema de n - corpos. Note-se que, embora a cada instante, a informação obtida do sistema seja de n - corpos, a informação dinâmica obtida após a média, é a informação a 1 - corpo, i.e., na verdade, o modelo continua sendo de 1 - corpo, mas é modificado para incorporar o efeito médio de colisões a 2 - corpos. Todavia, uma vez que a média, sobre muitas possíveis evoluções, é feita em cada intervalo de tempo, as flutuações não têm chance de evoluir. Esta falha na ramificação dinâmica é particularmente séria quando instabilidades estão presentes, uma vez que o sistema é forçado, pela média, a compatibilizar as diferentes histórias futuras, ao invés de deixar que a própria evolução dinâmica fizesse a escolha entre elas. Isto faz com que estes modelos não sejam apropriados para a fragmentação nuclear. Contudo, uma maneira natural de contornar esta dificuldade é simplesmente permitir que a própria evolução dinâmica escolha a trajetória a seguir na presença das flutuações. Parece-nos necessário que, de alguma maneira, se deva desenvolver um modelo de equação cinética tal que as flutuações espontaneas, geradas pelas colisões a 2 - corpos, possam se desenvolver independentemente de quaisquer outras possíveis histórias do sistema. Um passo nesta direção foi dado por Bauer *et al.* [Baue,87] que propuseram um modelo tipo BUU onde as flutuações são incorporadas e as colisões são tratadas como pontos de ramificações na evolução da densidade no espaço de fase.

Na Fig. 1.20 mostramos o resultado de VUU para a colisão central $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ a $200\text{MeV}/n$ [Röpck,90]. O termo colisional de Uehling-Uhlenbeck (I_{col}) foi incluído para se levar em conta correlações de 2 - corpos e sua forma funcional é

$$I_{col} = (2\pi)^{-3} \int d\vec{p}_2 d\Omega'_{1,2} v_{1,2} \frac{d\sigma_{1,2}}{d\sigma'_{1,2}} (\bar{f}_1 \bar{f}_2 f'_1 f'_2 - f_1 f_2 \bar{f}'_1 \bar{f}'_2), \quad (1.7)$$

onde $f_i = f(\vec{r}, \vec{p}; t)$, $v_{1,2}$ é a velocidade relativa de duas partículas testes antes da colisão e, $\bar{f} = 1 - f$ é o fator de blocagem de Pauli. A probabilidade de espalhamento é, então, reduzida pelo fator $(1 - f_1)(1 - f_2)$, que é conhecido como fator de Uehling-Uhlenbeck. A função f_i é calculada como uma média das distribuições das partículas teste no espaço

de fase, sobre diversos conjuntos de $(A_P + A_T)$ partículas teste. Observe-se que a inclusão de I_{col} modificou significativamente os resultados e, agora, um tímido sinal de clusterização pode ser visto.

Podemos resumir a atual situação dos modelos dinâmicos de um corpo, com a ajuda da Fig. 1.21, onde, esquematicamente, estão mostradas as trajetórias correspondentes aos diversos casos discutidos acima. A primeira curva de baixo para cima ilustra a trajetória dinâmica de um modelo a 1 - corpo puro (sem qualquer efeito de correlação de n-corpos, tal como o TDHF e o modelo de Vlasov). Note-se que estes modelos têm como resultado apenas uma trajetória, o que mostra que são apropriados para processos dinâmicos a energias relativamente baixas, i.e., quando os processos dinâmicos envolvem poucas flutuações. Já o 2º tipo de trajetória ilustra a extensão dos modelos a um corpo para modelos (tipo VUU) que incorporam o efeito médio de flutuações espontaneas, geradas pela colisão direta entre os nucleons individuais (colisões a dois corpos), i.e., partindo de um estado dinâmico, muitas trajetórias paralelas são permitidas no pequeno intervalo de tempo Δt , após o qual, a média é calculada e o procedimento repetido. Na verdade, em termos das médias, o sistema ainda segue uma única trajetória que, em geral, é diferente daquela em que estas colisões não são levadas em conta.

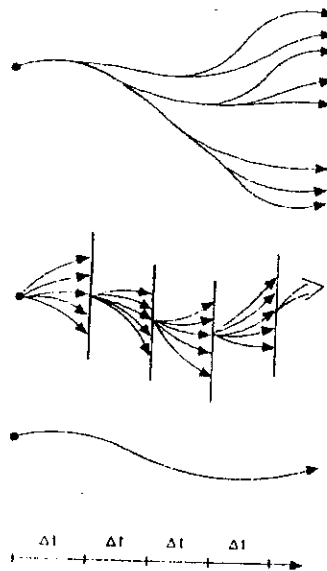


Fig. 1.21 - Ilustração esquemática dos modelos a 1 - corpo para a dinâmica nuclear.

A última trajetória ilustra o possível comportamento do sistema, quando as ramificações dinâmicas devido às flutuações são permitidas terem uma evolução independente ao longo do tempo. Espera-se que tal abordagem, ao contrario das demais, seja apropriada para a fragmentação nuclear.

Apesar do que foi dito nos parágrafos anteriores, uma grande gama de resultados muito interessantes têm sido obtidos via BUU ou VUU. Por exemplo, na Fig. 1.22(a) mostramos os resultados obtidos por Xu *et al.* [Xu,91] para a energia de excitação por partícula dos resíduos em função da energia incidente por partícula, para a reação $^{40}\text{Ar} + ^{27}\text{Al}$ e para dois valores do módulo de compressibilidade nuclear $K = 200\text{MeV}$ e $K = 380\text{MeV}$ e, na Fig.1.22(b), retirada da Ref. [Aich,91], são mostrados os cálculos de energia compressional obtidos via VUU. Os resultados são também comparados com os obtidos pelos modelos de Dirac e Brueckner (DB) e Friedman e Pandharipande (FP).

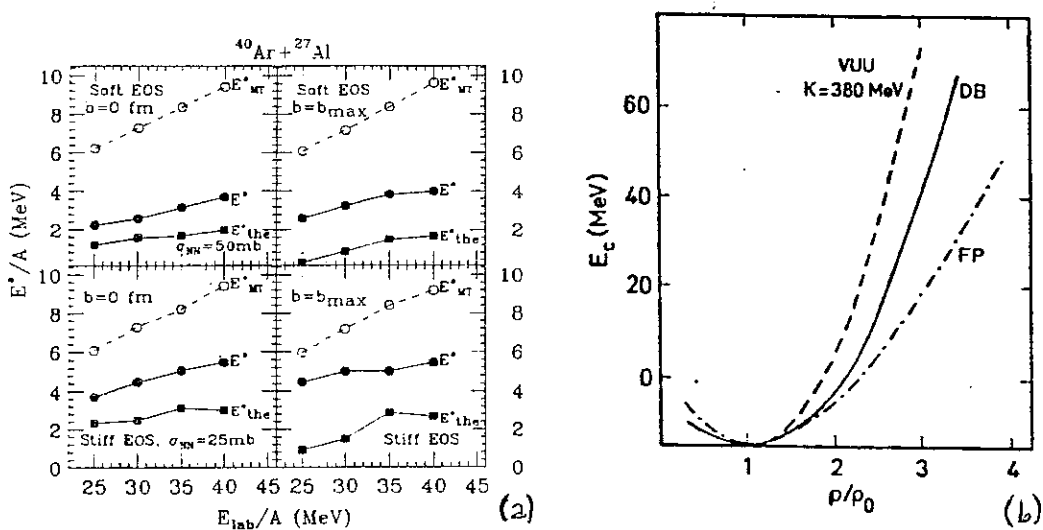


Fig. 1.22 - Resultados obtidos via BUU e VUU.

Na Fig. 1.23 é mostrada a evolução temporal da colisão central $^{20}\text{Ne} + ^{20}\text{Ne}$ a $100\text{MeV}/n$ segundo o modelo da Ref. [Baue,87], em que as ramificações dinâmicas devido às flutuações foram permitidas evoluir independentemente. Note-se que para $t = 60\text{fm}/c$ as flutuações na densidade são tão grandes que levam o sistema a se

quebrar em vários fragmentos.

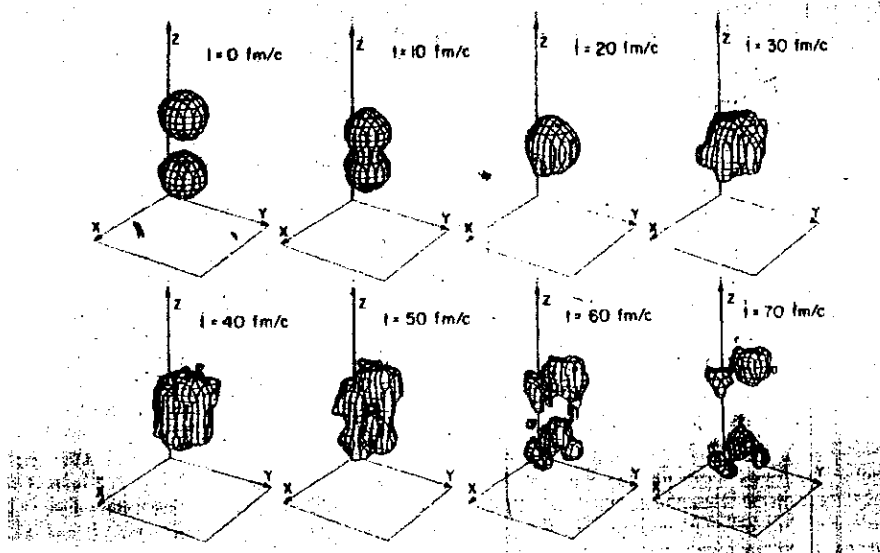


Fig. 1.23 - Evolução temporal da colisão central $^{20}\text{Ne} + ^{20}\text{Ne}$ a $100\text{MeV}/n$.

B – Modelos a n - Corpos – Dinâmica Molecular

Os modelos de dinâmica molecular para reações nucleares são, em geral, extensões da dinâmica molecular química e descrevem via equações clássicas de movimento, a evolução de nucleons individuais que interagem diretamente através de forças de 2-corpos. Na realidade, a densidade de n-corpos no espaço de fase é mapeada em cada instante de tempo e quantidades de muitos corpos (clusterização por exemplo) podem ser estudadas. Embora a evolução dinâmica seja determinista, a dinâmica molecular é capaz de levar em conta, ainda que parcialmente, o problema das flutuações, via

condições iniciais.

O maior problema na adaptação da dinâmica molecular clássica para as reações nucleares tem sido a inclusão do princípio de exclusão de Pauli. Com efeito, a não consideração desse efeito quântico faz com que tais modelos não sejam realistas para baixas energias de excitação, onde a ausência de movimento dos nucleons não permite a reprodução das mais básicas propriedades da matéria nuclear. Para contornar este problema, Aichelin e Stöcker [Aich,86] propuseram o modelo QMD (Quantum Molecular Dynamics) no qual os estados iniciais dos núcleos são preparados de maneira a obedecer a distribuição no espaço de fase dos correspondentes sistemas quânticos, daí o nome do modelo: dinâmica molecular “quântica”. Eles mostraram que os núcleos assim construídos permanecem razoavelmente estáveis quando isolados, até um intervalo de tempo de aproximadamente $200 fm/c$. Contudo, devemos notar que estes núcleos podem não ser intrinsicamente estáveis e então, qualquer perturbação gerada pela colisão, pode destruir a semelhança deles com núcleos que encontramos na natureza no estado fundamental.

No cálculo de dinâmica molecular clássica, que utiliza o método de simulação de Monte Carlo, as posições iniciais \vec{r}_i dos nucleons são aleatória porém uniformemente distribuídas no volume dos dois núcleos (esferas de raios $R = r_0 A^{1/3}$, sendo A o número barionico do projétil ou do alvo), para uma dada distribuição de densidade $\rho(\vec{r}_i)$. De posse da densidade, calcula-se o momentum de Fermi P_F para cada partícula i . O módulo do momentum \vec{p}_i de cada partícula é, então, aleatoriamente escolhido entre $[0, P_f]$. Afim de satisfazer o princípio de Pauli no estado inicial, todas as configurações em que as interdistâncias entre duas partículas (i e j), no espaço de fase, são menores que d_{min} , são rejeitadas, i.é., todas as partições devem satisfazer a:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 (\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2 > d_{min}^2, \quad (1.9)$$

para todo par (i e j). Esta seleção restringe drasticamente o espaço de fase disponível [Rand,87].

As equações de movimento são as equações de Hamilton para n-nucleons,

$$\dot{\vec{p}}_i = \{\vec{p}_i, H\} \tag{1.10}$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \{\vec{r}_i, H\}$$

onde a Hamiltoniana de n-corpos é

$$H = \sum_i^n \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j} V_{ij} \tag{1.11}$$

com

$$V_{ij} = V_P(r_{ij}, p_{ij}) + V_N(r_{ij}) + V_C(r_{ij}). \tag{1.12}$$

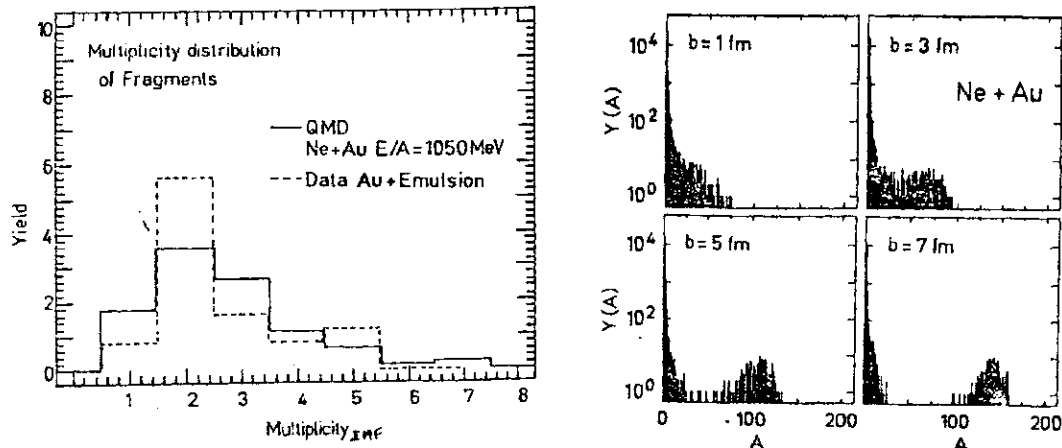


Fig. 1.24 - Resultados obtidos com modelo de dinâmica molecular.

O primeiro termo do potencial de interação é o potencial de Pauli que pode, por exemplo, ser tomado como [Rand,89]:

$$V_P = V_P^0 \left(\frac{\hbar}{p_0 q_0} \right)^3 e^{-\left[\frac{p_{ij}^2}{2p_0^2} - \frac{r_{ij}^2}{2q_0^2} \right]} \tag{1.13}$$

onde V_P^0 , p_0 , q_0 são parâmetros ajustados a resultados do modelo de gás de Fermi. V_N dá a contribuição da interação nucleon-nucleon que, na Ref. [Rand,89] foi tomado como um potencial do tipo Leonard - Jones, i.é.,

$$V_N = V_N^0 \left[\left(\frac{r_1}{r_{ij}} \right)^{p_1} - \left(\frac{r_2}{r_{ij}} \right)^{p_2} \right] \frac{1}{1 + e^{(r_{ij}-d)/a}} \quad (1.14)$$

onde V_N^0 , p_1 , r_1 , p_2 , r_2 , d e a , também são parâmetros ajustáveis. Finalmente, o 3º termo na Eq. 1.12, $V_C(\vec{r}_{ij})$, leva em conta a interação Coulombiana.

Em cada instante, na evolução dinâmica, é necessário verificar se os momenta finais dos nucleons espalhados são bloqueados ou não pelo princípio de Pauli. Caso o sejam, então, os momenta dessas partículas retornam aos valores que tinham antes da colisão.

Na Fig. 1.24 mostramos alguns resultados obtidos com modelos de dinâmica molecular.

1.2.2 – Modelos Não - Dinâmicos

Ignorando completamente o estágio colisional, os modelos não - dinâmicos tratam apenas da fase de desagregação. Isto quer dizer que estes modelos não se preocupam com a evolução dinâmica do sistema até a fase em que este se fragmenta em vários pedaços, mas apenas com a parte final do processo que é caracterizada pela quebra do sistema em muitos fragmentos.

De fato, a maioria destes modelos consideram que, após a colisão, o sistema nuclear resultante atinge o equilíbrio termodinâmico e fragmenta-se, a seguir, em vários pedaços. O mecanismo que provoca esta quebra pode ter origem em instabilidades térmicas como, por exemplo, prediz o modelo da multifragmentação estatística ([Bond,85a] e [Bond,85b]), ou instabilidades mecânicas como admite o modelo da fragmentação a frio [Aich,84] ou ainda, uma transição de fase quer do tipo líquido - gás [Finn,82] quer

do tipo percolativo [Camp,86]. Além destes, há modelos que propõem uma abordagem mais convencional como o modelo de evaporação sequencial [Frie,83a] ou o modelo de fissões binárias sucessivas [More,75].

A seguir, discutiremos os modelos que, na nossa opinião, ilustram melhor as diversas (e diferentes) hipóteses que vêm sendo admitidas para explicar a fragmentação nuclear mas deixaremos para o próximo capítulo o modelo de percolação pois este trabalho é uma aplicação das idéias percolativas a um sistema nuclear.

A – Modelo de Transição de Fase Líquido - Gás

Este modelo trata a formação de fragmentos como uma transição de fase líquido - gás no ponto crítico. A idéia da fragmentação vista como uma transição de fase tem origem no excelente ajuste da distribuição de fragmentos leves e de massa intermediária por uma lei de potência ($\sigma(A_f) \propto A_f^{-\tau}$) com τ entre 2 e 3, tal como dissemos na Introdução. A mesma lei que Fisher [Fish,67] encontrou para a distribuição de massa de gotas no ponto crítico segundo seu modelo de condensação de gás de van der Waals.

Esta semelhança motivou o seguinte cenário para a reação de fragmentação: o sistema alvo-projétil é aquecido pela compressão causada pela colisão. A seguir, o sistema aquecido se expande, convertendo sua energia interna de compressão em energia cinética, até que o ponto crítico seja alcançado. Neste ponto, o sistema sofre uma abrupta transformação do estado líquido (núcleo expandido) para o estado gasoso (gás de fragmentos).

Cálculos de Hartree-Fock mostraram que a matéria nuclear exibe um comportamento similar a de um sistema de van der Waals. Com efeito, ambos os sistemas, nuclear e molecular, apresentam forças atrativas de curto alcance e repulsivas de alcance ainda menor. Na Fig. 1.25, mostramos o diagrama de fase (pressão *versus* densidade)

da matéria nuclear. As três regiões: líquido, coexistência (líquido-gás) e gás, estão indicadas. O lugar geométrico dos pontos de transição é a curva de coexistência. Sob esta curva, o estado gás e o estado líquido podem ser encontrados em equilíbrio de fase. O equilíbrio (igualdade da pressão e dos potenciais químicos) entre as fases é obtido pela construção de Maxwell de áreas iguais. Para $T > T_c$ o sistema encontra-se, sempre, na fase gasosa, contudo, para $T < T_c$ e acima da curva de coexistência, o sistema está sempre na fase líquida. O ponto crítico é definido por $(\partial P/\partial \rho)_T = (\partial^2 P/\partial \rho^2)_T = 0$. É a matéria nuclear na fase gasosa que se resfria, condensando-se em fragmentos que seriam as correspondentes gotículas do modelo de Fisher [Mini,82].

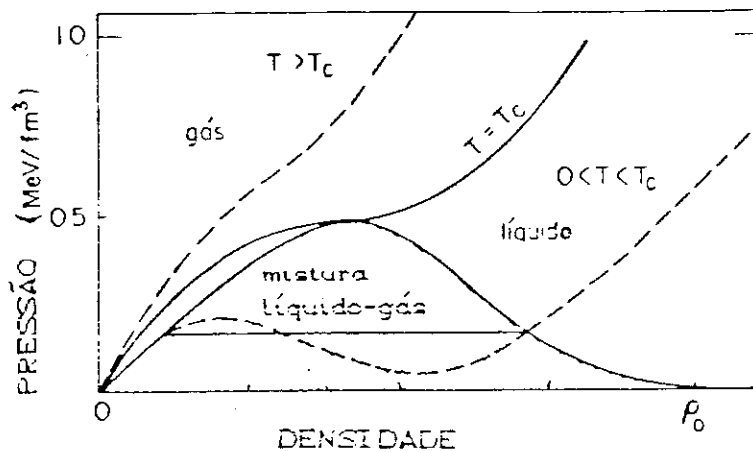


Fig. 1.25 - Pressão versus densidade para a matéria nuclear.

Fisher mostrou que a probabilidade para a formação de uma gotícula de tamanho A à temperatura T é dada por:

$$P(A) \propto A^{-\tau} e^{-(F_A - \mu A)\beta}, \tag{1.15}$$

onde F_A é a energia livre de Helmholtz, μ o potencial químico e $\beta = 1/kT$.

A aplicação do resultado de Fisher para o caso nuclear foi feita considerando-se o sistema nuclear como composto por duas espécies (neutron e próton) e admitindo-se

que a forma analítica da função de Helmholtz é a mesma que a da energia de ligação dada pela fórmula de Weizsäcker, com os coeficientes ajustados apropriadamente. Isto implica nas seguintes modificações:

$$\mu\beta A \rightarrow (\mu_N N_f + \mu_Z Z_f)\beta + [N_f \ln(N_f/A_f) + Z_f \ln(Z_f/A_f)], \quad (1.16)$$

onde o último termo é devido à entropia da mistura de neutron e próton, e os índices N , Z e f denotam neutron, proton e fragmento, respectivamente. A função de Helmholtz fica:

$$F(A_f, Z_f) = a_v A_f - a_s A_f^{2/3} - a_c \frac{Z_f^2}{A_f^{1/3}} - a_{sim} \frac{(A_f - 2Z_f)^2}{A_f} - \delta, \quad (1.17)$$

onde, os coeficiente são os parâmetros ajustáveis do modelo.

A interpretação da fragmentação nuclear como uma transição de fase recebeu da teoria e de novos experimentos vários suportes [Jaqa,83], [Pana,85] e [Gilk,94] mas vem recebendo muitas críticas também [Scha,87], [Boal,84] e [Aich,88].

B – Modelos Estatísticos da Multifragmentação

Estes modelos admitem, como ponto de partida, que o sistema nuclear quente, resultante da colisão, se expande e no instante imediatamente anterior à desagregação, está em equilíbrio termodinâmico ocupando um volume esférico. Isto permite, então, aplicar as leis da mecânica estatística, para saber se e como o sistema pode quebrar-se em vários pedaços.

Os primeiros modelos estatísticos admitem o *ensemble* grande - canônico (número médio de partículas e energia média fixos) ou usam o *ensemble* canônico (energia média fixa) [Koon,81]. Todavia, ao usar a mecânica estatística de equilíbrio para descrever o

sistema fragmentante, devemos ter em mente que se trata de um sistema isolado, finito, e que contém um pequeno número de partículas que interagem por forças de longo alcance. Isto quer dizer que uma descrição mais realista desta situação deve requerer o uso do *ensemble* microcanônico (energia, número de partículas e carga fixos). Com efeito, Bondorf *et al.* [Bond,85a] e [Bond,85b], Gross *et al.* [Gros,86] e Zheng *et al.* [Zhen,87] propuseram modelos estatísticos baseados em *ensemble* microcanônico.

Por outro lado, ao invés de admitir que todos os microestados do sistema sejam equiprováveis, Aichelin e Hufner [Aich,84] supõem que as diferentes partições do sistema inicial é que são equiprováveis e, admitem que a multifragmentação do núcleo se dá de maneira similar ao despedaçamento de uma bola de vidro quando atingida por uma pedra (modelo da fragmentação a frio), obtendo resultados que descrevem bem os dados experimentais.

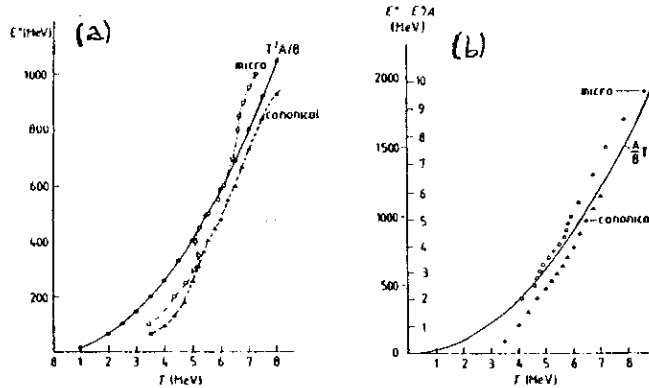


Fig. 1.26 - Relação E^* versus T para o ^{131}Xe (a) e para ^{197}Au (b) nas descrições canônica e microcanônica.

Na realidade, para um sistema macroscópico (com um número de partículas da ordem do número de Avogadro) a aproximação por um sistema aberto em contato com um reservatório de calor a uma temperatura fixa (*ensemble* canônico) é extremamente

boa e o *ensemble* microcanônico (sistema fechado a uma dada energia) não precisa ser utilizado. Neste caso, há uma contínua troca de energia com o reservatório de calor e o valor médio da energia $\langle E \rangle$ é fixo e as flutuações são irrelevantes. De fato, quando o número total de partículas N é muito grande as flutuações relativas $\Delta E/E \propto 1/\sqrt{N}$ são pequenas. Todavia, no caso de um sistema finito e pequeno como o núcleo, como dissemos, as descrições canônicas e microcanônicas não são equivalentes. De fato, na Fig. 1.26, mostramos os resultados obtidos por Gross *et al.* [Gros,90] em que a energia de excitação é dada como função da temperatura, para núcleos de ^{131}Xe (a) e ^{197}Au (b).

Podemos observar, nesta Fig. 1.26, que há uma significativa diferença nos resultados. Contudo, esta diferença diminui quando o sistema aumenta, mas, novamente, se torna muito pronunciada quando observáveis mais exclusivos, como a correlação de fragmentos pesados, são estudados (Fig. 1.27).

Na Fig. 1.27, retirada da Ref. [Barz,86], está plotado o rendimento relativo (em massa) contra a energia de excitação. Observa-se que há uma dramática dependência em relação ao *ensemble* utilizado.

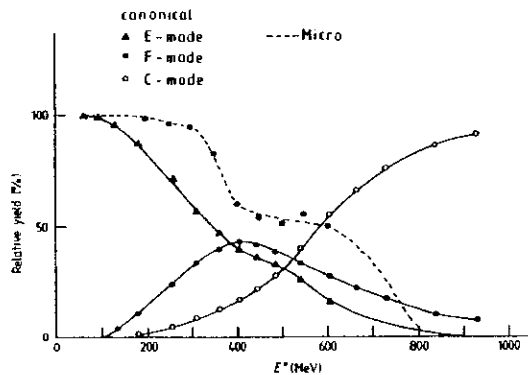


Fig. 1.27 -Rendimento relativo versus E^* no tratamento canônico e no microcanônico.

Tendo em mente esta diferença entre os tipos de abordagem, vejamos, a título de exemplo de tratamento estatístico da multifragmentação, o modelo do grupo do Niels Bohr, i.é., o modelo da multifragmentação estatística de Bondorf *et al.* que, como já

mencionamos, se baseia numa abordagem por *ensemble* microcanônico.

Segundo este modelo, o sistema nuclear sofre grande compressão na colisão projétil + alvo. Como consequência, o sistema se expande de tal forma que a densidade de matéria nuclear decresce, criando bolhas em seu interior. Se a energia depositada é suficientemente alta, o sistema se expande até atingir o volume de quebra V_b (parâmetro do modelo). Após a quebra, os fragmentos formados interagem apenas através da força Coulombiana e podem sofrer quebras secundárias ou evaporar partículas leves, dependendo do seu tamanho e energia de excitação [Botv,87].

No instante da fragmentação, o sistema é considerado estar em equilíbrio termodinâmico e as possíveis partições do sistema (diferentes maneiras de o sistema se quebrar) são determinadas por um cálculo combinatório, incluindo conservação de carga e massa, ponderadas estatisticamente pela entropia $S(\{N_{Z,A}\})$, de acordo com

$$W(\{N_{Z,A}\}) = e^{[S(\{N_{Z,A}\}, T, V_b)]} \quad (1.18)$$

onde

$$S(\{N_{Z,A}\}, T, V_b) = \sum_{Z,A} N_{Z,A} S_{Z,A}(T, V_b) \quad (1.19)$$

sendo que $N_{Z,A}$ é o número de fragmentos com carga Z e número bariônico A . A entropia do fragmento $S_{Z,A}$ é obtida através da energia livre do fragmento (Z, A) por partícula, que pode ser decomposta nas partes translacional e interna, i.é.,

$$F_{Z,A} = F_{Z,A}^{trans} + F_{Z,A}^{int}, \quad (1.20)$$

ficando

$$F_{Z,A}^{trans} = -T \left[\ln Z_{Z,A}^{trans} - \ln \frac{N_{Z,A}!}{N_{Z,A}} \right] \quad (1.21)$$

e

$$F_{Z,A}^{int} = (W_0 + \frac{T^2}{\epsilon_0})A + \beta_0 \left[\frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2} \right]^{5/4} A^{2/3} + \gamma \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_{Z,A} [1 - (1 + \chi)^{1/3}]} \quad (1.22)$$

onde $W_0 = -16MeV$, $\epsilon = 16MeV$, $T_c = 16MeV$, $\gamma = 25MeV$, $\chi = [1 + (M^{1/3} - 1)^3 d/R_0] - 1$, com $R_0 = 1.17A_0^{1/3}$, $d = 1.4fm$, M a multiplicidade da partição e $R_{Z,A}$ é o raio do fragmento, admitido esférico. Na Eq. 1.21, $Z_{Z,A}^{trans}$ é a parte translacional da função partição do fragmento (Z, A) , que é dada por:

$$Z_{Z,A}^{trans} = g_{Z,A} V_f \left[\frac{m_{Z,A} T}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \quad (1.23)$$

onde $g_{Z,A}$ é o fator de degenerescência de spin, $m_{Z,A} \approx m_n A$, sendo m_n a massa de um nucleon e $V_f = V_0 - V_b = \chi V_0$ é o volume livre.

Assim, a entropia $S_{Z,A} = -(\partial F_{Z,A}/\partial T)_V$ fica

$$S_{Z,A} = \ln\left(\frac{g_{Z,A}\chi V_0 A^{3/2}}{\Lambda^3}\right) - \frac{\ln N_{Z,A}!}{N_{Z,A}} + \left(\frac{2T}{\epsilon_0}\right)A + 5\beta_0 \left[\frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2}\right]^{1/4} \left[\frac{T}{T_c^2 + T^2}\right] A^{2/3} + \frac{3}{2} \quad (1.24)$$

onde $\Lambda = (2\pi\hbar^2/m_n T)^{1/2}$ é o comprimento de onda térmico.

A Eq. 1.24 é válida para $A > 4$. No caso de partículas mais leves, são usados os valores experimentais.

Conhecendo-se $S_{Z,A}$, os pesos estatísticos são calculados pela Eq. 1.14 e, então, o valor esperado de qualquer quantidade Q pode ser obtido através de

$$\bar{Q} = \sum_{\{N_{Z,A}\}} W(\{N_{Z,A}\}) Q(\{N_{Z,A}\}) \quad (1.25)$$

onde $Q(\{N_{Z,A}\})$ é o valor de Q para a partição $\{N_{Z,A}\}$ e a soma é sobre todas as possíveis partições do sistema (i.é., aquelas que conservem carga, número bariônico e energia total). Uma vez que o número de partições para um sistema nuclear é muito grande (no caso de $A_0 = 100$, por exemplo, são 190.569.292 partições), método de aproximações tal como o método de Monte Carlo tem que ser utilizado.

Na Fig. 1.28, mostramos dois resultados obtidos com o modelo de multifragmentação estatística para o caso de $A_0 = 100$. Em (a) a temperatura T é plotada como uma função da energia de excitação por nucleon (E^*/A). Observamos que há uma temperatura máxima que o sistema pode suportar, além da qual ele se fragmenta.

Esta temperatura está em torno de 5 a 6 MeV e corresponde a uma energia de excitação de 3 MeV/n. Em (b), a distribuição de massa calculada por este modelo é apresentada.

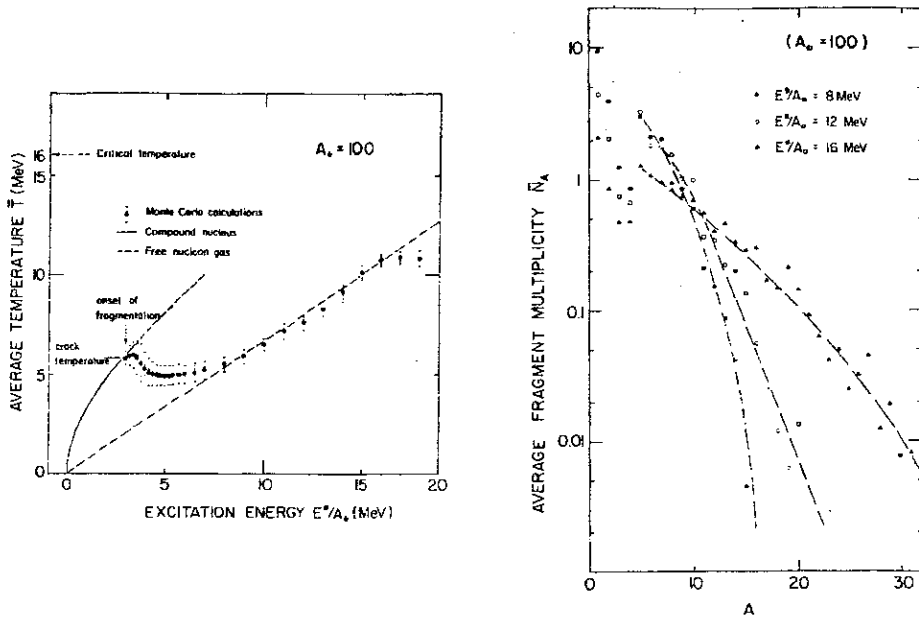


Fig. 1.28 - Resultados do Modelo de Multifragmentação Estatística.

Apesar do sucesso dos modelos estatísticos em descrever uma grande variedade de dados experimentais, restam ainda alguns aspectos interessantes para serem discutidos no contexto destes modelos. Entre eles, destacamos a interação entre os fragmentos que, imediatamente após a quebra, é tratada esquematicamente em termos de cargas pontuais que se repelem Coulombianamente, o que pode ser inadequado. De fato, no caso de fissão binária (o mais simples processo de 'fragmentação'), o estado de transição nem sempre pode ser descrito em termos da interação de fragmentos esféricos [More,75]. Acreditamos que este efeito é até amplificado quando a quebra se dá em vários fragmentos que, em geral, podem ter as mais exóticas configurações, antes de iniciarem o processo de desexcitação.

C – Modelo de Evaporação Sequencial

O modelo de evaporação sequencial de Friedman e Lynch [Frie,83a] propõe a formação de um núcleo composto que decai via emissão sucessiva de fragmentos. Na realidade, eles desenvolveram um formalismo estatístico para a emissão sequencial de partículas, baseado na teoria de Weisskopf, logrando explicar dados experimentais de fragmentação nuclear. Especificamente, eles mostraram que a taxa de emissão de um ‘fragmento’ (*cluster*) do tipo b com energia entre E e $E + dE$ é dada pela seção de choque duplamente diferencial:

$$\frac{d^2 N_b}{dE dt} = (2s_b + 1) \left[\frac{m_b \pi R_b^2}{\pi^2 \hbar^3} \right] (E - V_b) \Theta(E - V_b) e^{[-E/T]} e^{\frac{1}{T} [z_b f^*(T, \rho_p) + n_b f^*(T, \rho_n) - B_b]}, \quad (1.26)$$

onde N_b denota o número de *clusters* emitidos do tipo b com n_b neutrons e z_b protons. s_b , m_b , R_b e B_b são, respectivamente, o spin, a massa, o raio e a energia de ligação do *cluster* b . V_b é a barreira Coulombiana já corrigida para a temperatura nuclear T , f^* a energia livre de excitação por partícula, $\Theta(E - V_b)$, ρ_p e ρ_n são a função degrau, a densidade de prótons e a densidade de neutrons, respectivamente.

De posse da seção de choque (Eq. 1.26), e admitindo-se que após cada emissão o núcleo residual se rethermaliza, as quantidades de interesse, tais como a multiplicidade e o espectro de energia podem ser calculados por simples integrações.

Na Fig. 1.29, mostramos os principais resultados do modelo de evaporação sequencial [Frie,83b]. Nestas figuras, em (a), temos o ajuste feito por Hirsch *et al.* para a distribuição de massa (linha sólida) e os resultados do modelo de evaporação (pontos). Em (b), o histograma é o espectro de energia do ^{12}C calculado e os pontos são do experimento da Ref. [Hirs,84]. Note-se que o modelo reproduz muito bem o espectro de energia embora na distribuição de massa a concordância não seja tão boa. A temperatura inicial do composto (parâmetro ajustável do modelo) foi tomada como 15MeV , que é bem acima do máximo valor de temperatura encontrada experimentalmente nos

núcleos complexos.

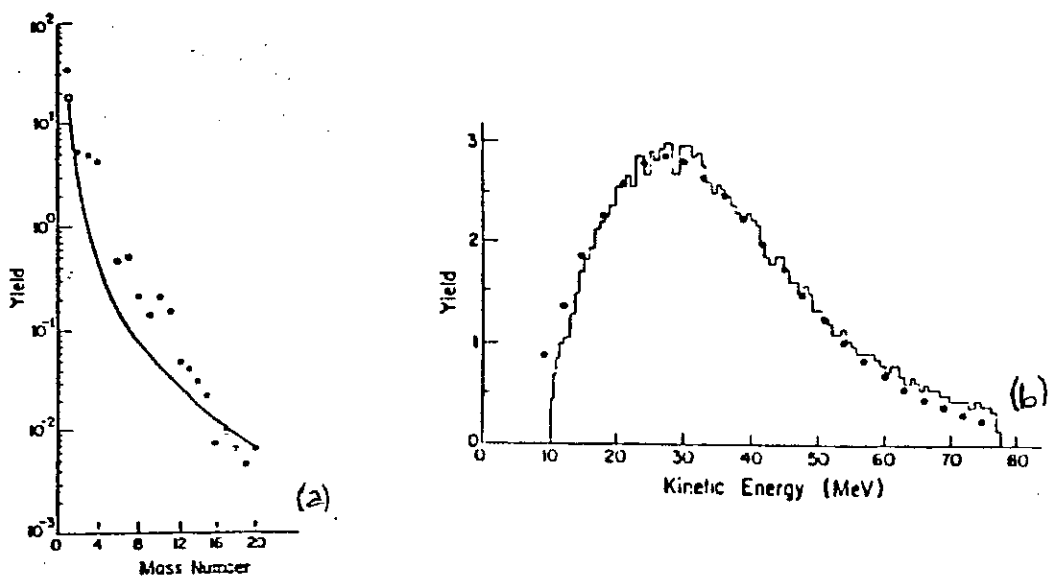


Fig. 1.29 - Resultados do Modelo de Evaporação Sequencial.

Flutuações e Intermitência em Fragmentação Nuclear

“Não concordo com uma só palavra do que dizeis, mas defenderei até a morte o vosso direito de dizê-lo.”

Voltaire.

2.1 - FLUTUAÇÃO E CRESCIMENTO DE BOLHAS NA MATÉRIA NUCLEAR QUENTE

Como já mencionamos no Cap.1, acredita-se que a produção de *clusters* na matéria nuclear seja um processo que ocorre quando, em uma colisão de íons pesados, a densidade do sistema atinge um valor característico denominado densidade de quebra, que é estimada estar entre 1/2 e 1/10 da densidade normal ([Bond,85b], [Baue,86a], [Gross,90]). Estudos teóricos mostram que, devido a expansão, o sistema nuclear pode atingir um certo valor de densidade ($\rho_c \approx 0,06 fm^{-3}$) e de temperatura ($T_c \approx 15 MeV$), para o qual a matéria nuclear sofre uma transição de fase líquido-gás. O papel das flutuações quânticas e das flutuações estatísticas, na transição de fase do sistema nuclear, tem sido muito estudado recentemente ([Rein,85], [Peth,87] e [Blin,88]). Em particular, Blin

et al. mostraram que flutuações quânticas são relevantes apenas para temperaturas do sistema $T \leq 1\text{MeV}$, i.é., a transição de fase da matéria nuclear seria devido a flutuações estatísticas. Consideraremos, nesse trabalho, apenas este último tipo de flutuação.

O problema das flutuações pode ser melhor situado com o auxílio do diagrama $T \times \rho$ para a matéria nuclear (Fig. 2.1). Nesta figura, está indicada a curva de coexistência (linha sólida) dentro da qual a matéria volumétrica é instável contra a separação em duas fases (líquido e gás) e, também, está indicada a linha espínodal isotérmica sobre a qual o módulo volumétrico isotérmico da matéria se anula. Na região sob a linha espínodal, a matéria volumétrica é instável contra as flutuações de pequena amplitude e grande comprimento de onda da densidade. Entre a linha espínodal e a linha de coexistência, a matéria volumétrica é instável contra as flutuações de pequenas amplitudes mas não contra as grandes [Dona,89].

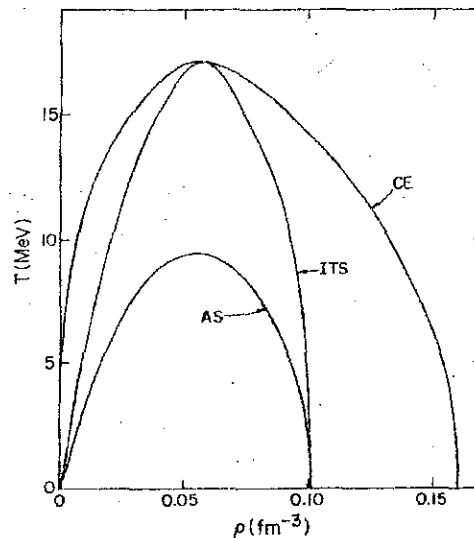


Fig. 2.1 - Diagrama $T \times \rho$ para a matéria nuclear.

Existem dois caminhos nos quais as não-homogeneidades na densidade podem crescer em um líquido inicialmente homogêneo: - o primeiro é através do crescimento de pequenas flutuações que podem evoluir até a matéria se separar em vários pedaços. Este processo é denominado decomposição espínodal. O segundo é através da nucleação de regiões localizadas onde a densidade é bastante diferente da densidade média (nucleação de bolhas ou gotículas). A decomposição espínodal pode ocorrer somente dentro da linha

espinodal isotérmica no diagrama $T \times \rho$, enquanto que a nucleação pode ocorrer em qualquer lugar dentro da linha de coexistência. Consideraremos neste trabalho apenas este último caso. Então, o quadro que se tem em mente é que a matéria nuclear comprimida pela colisão pode, por expansão (isentropica) subsequente, atingir a região de metaestabilidade, onde bolhas de densidade menor que a densidade da fase líquida podem ser formadas [Bond,88] e [Dona,89]. O crescimento e a nucleação de bolhas é que explicam o aparecimento dos *clusters*, com a quebra da matéria em vários pedaços. A formação de gotículas em um vapor superesfriado pode ser tratada de maneira análoga [DeAn,90] (todavia, bolhas aparecem primeiro no processo de expansão). Além disto, consideraremos apenas a formação de bolhas na matéria nuclear quente induzidas por flutuações estatísticas (flutuações na posição de algumas partículas) uma vez que na faixa de energia da fragmentação nuclear a transição de fase devido às flutuações quânticas (tunelamento) são desprezíveis [Blin,88].

Em termodinâmica de equilíbrio, o número médio N de bolhas de raio R , que são criadas no meio em questão é uma função decrescente do potencial termodinâmico $U(R)$, isto é:

$$N(R) \propto e^{-U(R)/T}. \quad (2.1)$$

O potencial termodinâmico associado à bolha pode ser escrito como:

$$U(R) = 4\pi R^2 \sigma(T, \rho, \rho_b) + \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta P. \quad (2.2)$$

Nesta Eq. 2.2, σ denota a tensão superficial (que depende da densidade e da temperatura) e ΔP a diferença de pressão entre as fases líquidas e gás (bolha). $U(R)$ tem um máximo quando $R = R_c$ (o raio crítico da bolha), i.é.,

$$R_c = -\frac{2\sigma}{\Delta P}. \quad (2.3)$$

O significado físico de R_c é óbvio: bolhas com raio menor (maior) que R_c tendem a

colapsar (expandir). Todavia, Bondorf *et al.* [Bond,88] mostraram que flutuações podem modificar este quadro. De fato, eles levaram em conta flutuações de partícula única na pressão cinética (flutuações no número de nucleons que incidem sobre a superfície da bolha por unidade de tempo) e mostraram que, neste caso, bolhas com raios iniciais subcríticos ($R_i < R_c$), críticos ($R_i = R_c$) ou supercríticos ($R_i > R_c$) podem tanto colapsar quanto expandir, embora com diferentes probabilidades. Estes resultados estão ilustrados na Fig. 2.2, tirada da Ref. [Dona,89].

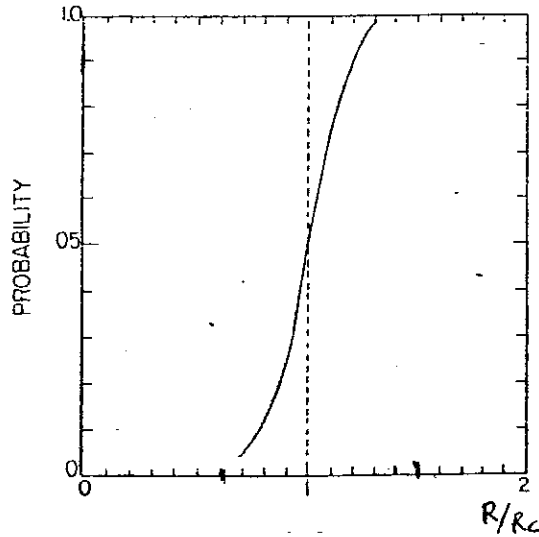


Fig. 2.2 - $P_{exp} \times R/R_c$.

Contudo, os resultados de Bondorf *et al.* foram obtidos, admitindo-se que a densidade da fase gasosa (bolha) era sempre zero e usando-se apenas uma equação de estado nuclear específica (baseada em interação tipo Skyrme). Santiago e Chung [Sant,92a] estenderam o tratamento para incluir bolhas de densidade iniciais arbitrárias e no contexto de diferentes potenciais nucleon-nucleon fenomenológicos. A seguir, vamos apresentar os principais pontos desta generalização.

2.1.1) A Aproximação de Rarefação

Consideremos uma bolha esférica de densidade de número n_b e raio R , imersa em um líquido de densidade n_l , infinito e não carregado (a contribuição Coulombiana é uma função decrescente do tamanho da bolha e não foi levada em conta nestes cálculos) à temperatura T , com a óbvia restrição $n_b < n_l$. O campo de velocidade $v(r)$, com o auxílio da equação da continuidade pode ser escrito como

$$v = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R}r, & \text{se } r < R; \\ \frac{\dot{R}}{R^2}r^2, & \text{se } r > R; \end{cases} \quad (2.4)$$

onde o ponto denota derivada temporal. Então, a Hamiltoniana do sistema é dada por:

$$H = 2\pi m(n_l + \frac{n_b}{5})R^3\dot{R}^2 + 4\pi R^2\sigma + \frac{4}{3}\pi R^3\Delta P, \quad (2.5)$$

onde m é a massa do nucleon. Naturalmente, com $n_b = 0$, a Hamiltoniana usada por Bondorf *et al.* é recuperada. As flutuações são explicitamente levadas em conta adotando o mesmo procedimento que o prescrito na Ref. [Bond,88], i.é., a diferença de pressão é separada em duas parcelas:

$$\Delta P = \overline{\Delta P} + \delta\Delta P \quad (2.6)$$

onde $\overline{\Delta P} = (\overline{\Delta P})_b + (\overline{\Delta P})_l$ é a parte média e $\delta\Delta P = (\delta\Delta P)_b + (\delta\Delta P)_l$ é a parte flutuante, ambas escritas como uma soma das contribuições da bolha (sub-índice b) e do líquido (sub-índice l).

Da Eq. 2.5, podemos obter as equações de movimento para o raio R da bolha, as quais, após integração num intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno (comparado com a escala de tempo hidrodinâmico), podem ser escritas como:

$$R(t + \Delta t) = R(t) + V(t)\Delta t \quad (2.7)$$

e

$$\begin{aligned}
 V(t + \Delta t) = V(t) - \frac{\Delta t}{(5n_l + n_b)R(t)} \left[\frac{3}{2} V^2(t)(5n_l + n_b) + 5 \frac{\overline{\Delta P}}{m} + \frac{10\sigma}{mR(t)} \right] + \\
 - \frac{5}{mR(t)(5n_l + n_b)} I(t)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $I(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt \delta\Delta P$ é a impulsão aleatória.

Com relação a $I(t)$, Bondorf *et al.* mostraram que $I(t)$ obedece, aproximadamente, a uma distribuição Gaussiana com valor médio igual a zero e desvio padrão $\Gamma = \alpha m \sqrt{\pi n v_n^3 \Delta t} / 3\pi R$ onde v_n é a velocidade média do nucleon e $\alpha \approx T/\epsilon_F$ é introduzido a fim de levar em conta o fato de que somente os nucleons na superfície do mar de Fermi podem contribuir para as flutuações. Em relação à tensão superficial, admitimos que $\sigma = \sigma_l - \sigma_b$, onde $\sigma_{l(b)}$ é a tensão superficial quando uma bolha de densidade nula esta embebida em um meio de densidade $n_{l(b)}$. A parametrização da tensão superficial $\sigma_k (k = l, b)$ com a temperatura foi tomada como a prescrita na Ref. [Good,84], i.é.,

$$\sigma_k(n_k, T) = \sigma_k(n_k) \left(1 + \frac{3T}{2T_c} \right) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \tag{2.9}$$

onde $T_c \approx 16 MeV$ é a temperatura crítica para as equações de estado usadas neste trabalho. Além disto, como proposto por Bondorf *et al.* $\sigma_k(n_k)$ é considerada variar com a densidade da mesma maneira que a energia de volume.

Para evoluir dinamicamente o sistema, as Eq. 2.7 e 2.8 são resolvidas iterativamente, com $\Delta t = 1 fm/c$. A seguir, mostramos os resultados de nossos cálculos, para os quais supomos $n_l = 0,075 fm^{-3}$. Duas equações de estado nuclear foram usadas: uma baseada na interação tipo Skyrme (Sk) e outra, baseada na interação de Seyler-Blanchard ($S - B$). Na Fig. 2.3 está plotado o raio crítico como função da densidade inicial da bolha n_0 para as interações (Sk) e ($S - B$) nas temperaturas $T = 0$ (linha

tracejada) e $T = 5\text{MeV}$ (linha sólida).

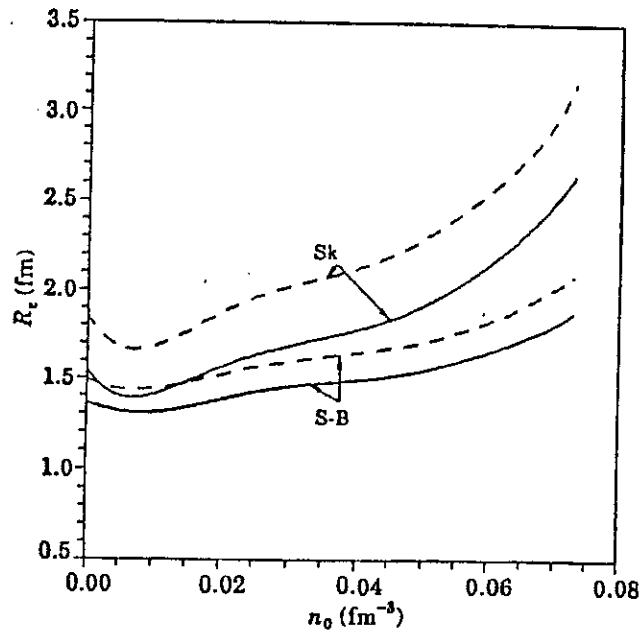


Fig. 2.3 - Raio crítico como função de n_0 .

Note-se que R_c é mais sensível à densidade inicial da bolha no caso da interação Sk e que o efeito da temperatura sobre R_c (que é dado pelo fator $(1 + 3/2T)(1 - T)^{3/2}$) atua como um mero fator de escala, em ambos os casos reduzindo o valor do raio crítico.

A evolução dinâmica de uma bolha, na presença de flutuações, prossegue até que a bolha chegue ao seu estado final, i.é., de colapso ou de expansão. No caso de expansão, o critério usado é que a bolha atinja um volume pelo menos quatro vezes maior que o volume crítico, enquanto que uma bolha é considerada ter colapsado se seu raio atinge o valor $R = R_f = (\frac{n_0}{n_f})^{1/3} R_i$ com $i(f)$ denotando o valor inicial (final) de R . Neste limite de colapso, a bolha e o líquido formam uma matéria homogênea. Em praticamente todos os casos, o estado final foi atingido em $t < 200 \text{ fm}/c$.

Na Fig. 2.4 e 2.5, o rendimento de bolhas que expandiram e o rendimento de bolhas que colapsaram são plotados como função do tempo elapsado t . Os resultados foram obtidos usando um valor arbitrário da densidade inicial para a bolha ($n_0 = 0,05 \text{ fm}^{-3}$) e dois diferentes valores para o raio inicial ($R_i = 1,5 \text{ fm}$ e $2,0 \text{ fm}$). A estatística é de 50.000 corridas. Para comparação, os resultados com $n_0 = 0$ são também apresentados.

Na Fig. 2.4 os resultados são para a interação Sk . O painel (a) corresponde às bolhas que expandiram, enquanto que o painel (b) corresponde às bolhas que colapsaram. Ambas para $R_i = 1,5 fm$. O painel (c) e (d) correspondem a $R_i = 2,0 fm$ para bolhas que expandiram e colapsaram, respectivamente. Note-se que os histogramas têm a forma de sino e os picos apresentam significantes diferenças, revelando uma forte dependência dos resultados com R_i e n_0 .

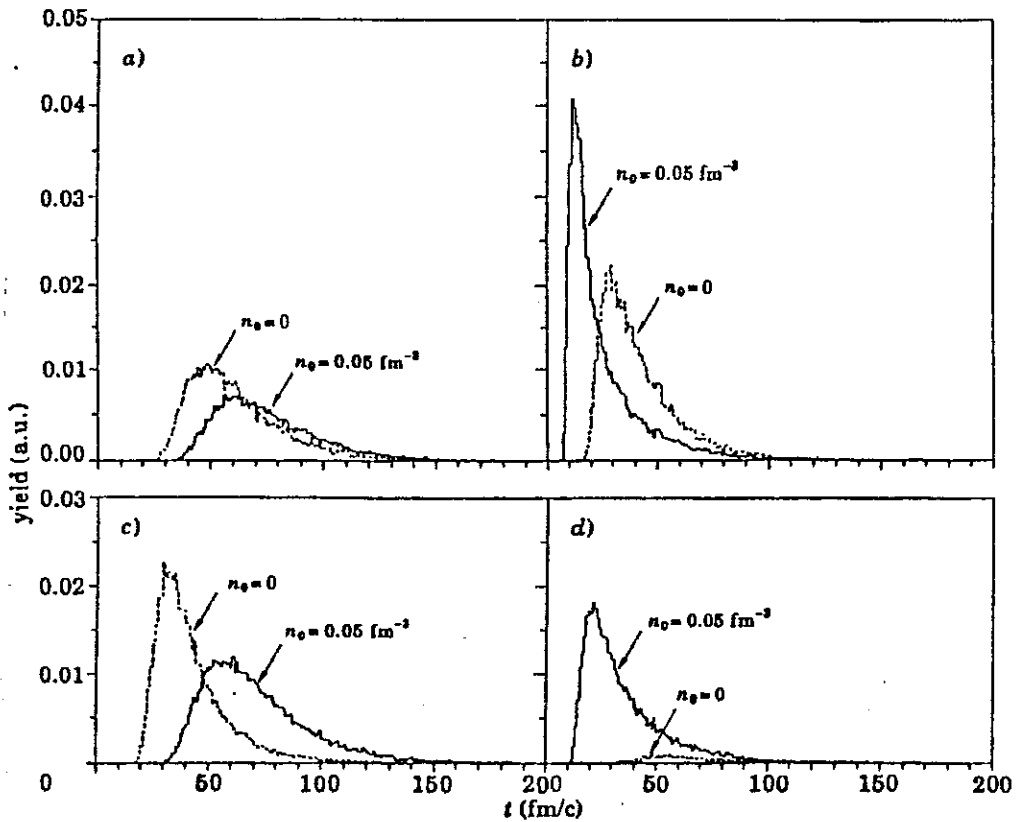


Fig. 2.4 - Rendimentos obtidos com a interação Sk e $R_i = 1,5 fm$ e $R_f = 2,0 fm$.

Na Fig. 2.5, observa-se que esta dependência é ainda mais dramática no caso da interação $S - B$. De fato, pode-se notar que os histogramas para $R_i = 1,5 fm$ correspondente a bolhas que colapsam e $R_i = 2,0 fm$ correspondente a bolhas que expandem são bastante diferentes dos obtidos com a interação Sk . Além disto, para a interação $S - B$, os casos $R_i = 1,5 fm$ e $R_i = 2,0 fm$, correspondetes a bolhas que expandiram e colapsaram, respectivamente, apresentam rendimentos nulos para todo valor de n_0 .

Estes últimos casos não estão ilustrados na Fig. 2.5.

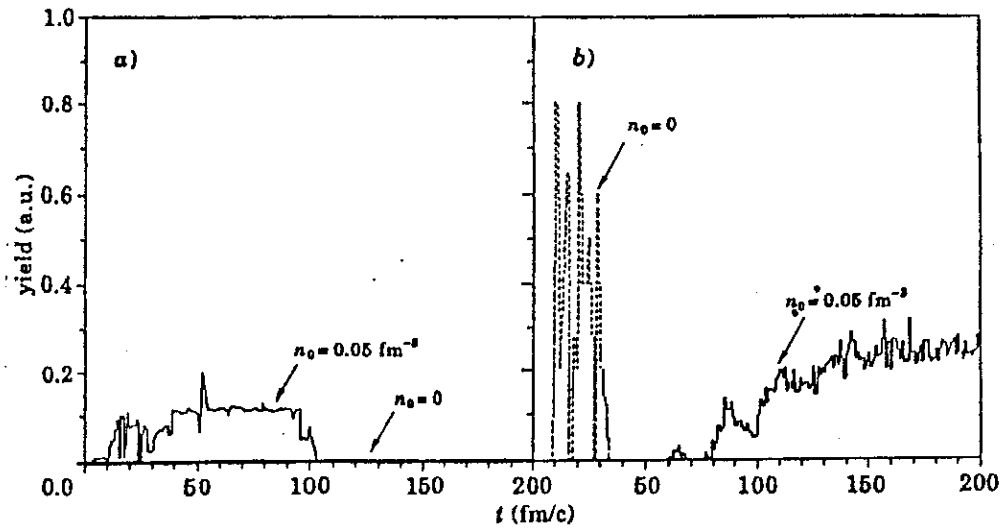


Fig. 2.5 - Rendimentos obtidos com a interação $S - B$ e $R_i = 1,5 fm$ e $R_f = 2,0 fm$.

Na Fig. 2.6, a probabilidade de expansão P_{exp} (definida como a razão entre o número de eventos de bolhas expandidas e o número total de eventos) é plotada como função da razão R_i/R_c para $n_0 = 0$ e $n_0 = 0.05 fm^{-3}$ no caso das duas interações.

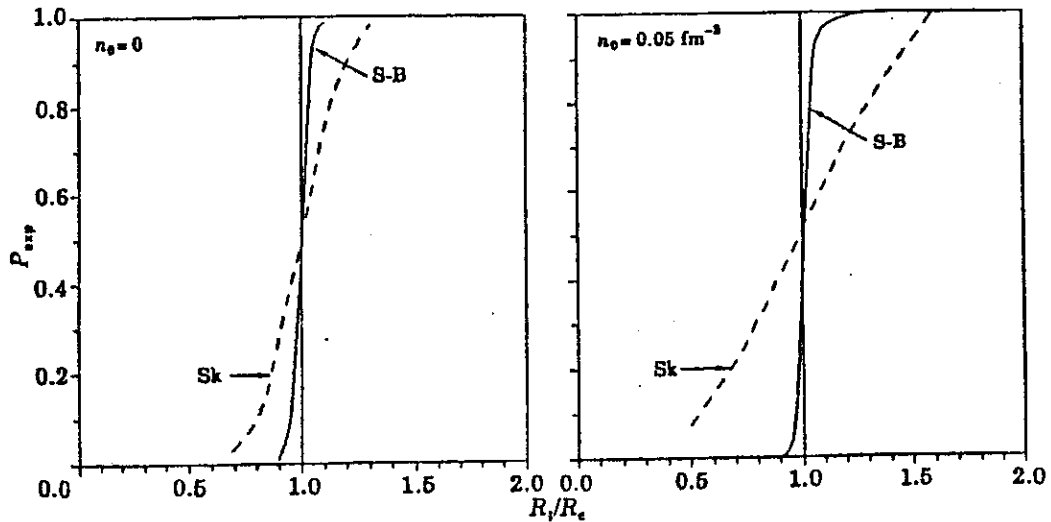


Fig. 2.6 - P_{exp} versus R_i/R_c .

Note-se que no caso em que as flutuações não são incluídas, P_{exp} segue uma função degrau $\Theta(R_i/R_c - 1)$. Os resultados mostram que os efeitos de flutuação são muito

pequenos para a interação $S - B$ e são bastante pronunciados na Sk . O que mostra que os efeitos de flutuação são bastante sensíveis à equação de estado nuclear. Além disto, a aproximação $n_0 = 0$ é muito pobre se se trabalha com a interação Sk mas é melhor se a $S - B$ é usada.

2.2 - INTERMITÊNCIA

Intermittência é um conceito estatístico que tem sido muito usado para analisar flutuações e correlações de uma distribuição. Historicamente, a idéia de intermittência foi primeiramente empregada no estudo de flutuações que ocorrem em problemas de fluxo turbulento da hidrodinâmica [Mand,74] e, em plasmas astrofísicos e magnéto-hidrodinâmica [Zeld,87]. Posteriormente, Bialas e Peschanski [Bial,88a] introduziram este método no estudo da produção de partículas em colisões ultra-relativísticas. Mais recentemente, Ploszajczak e Tucholski [Plos,90] reportaram evidências de intermittência na distribuição de tamanho de fragmentos em reações de fragmentação nuclear.

Partículas carregadas produzidas em colisões a altas energias exibem uma distribuição de rapidez com fortes flutuações. Com efeito, na Fig. 2.7 retirada da Ref. [Burn,83], procuramos ilustrar este fato através da distribuição de pseudo-rapidez que foi obtido de reações $^{20}Ca + ^{12}C$ a $100A TeV$ pela colaboração JACEE.

A questão que se quer responder através do estudo da intermittência é se se trata de flutuações estatísticas ou se o espectro apresentado (Fig. 2.7) é fractal por natureza. Neste último caso, flutuações dinâmicas estão presente e a manifestação da intermittência se dá, como veremos, pela dependência em lei de potência do observável (a distribuição $dN/d\eta$ de pseudo-rapidez, por exemplo) com a resolução ($\delta\eta$) com que este observável é medido, isto é,

$$N(\eta, \delta\eta') = \left(\frac{\delta\eta'}{\eta}\right)^{-\alpha} N(\eta, \delta\eta) \quad (2.11)$$

onde α é chamado expoente intermitente. Em tal caso, a presença de intermitência implica na presença de flutuações não-estatísticas que possuem auto-similaridade em toda a escala de $\delta\eta$.

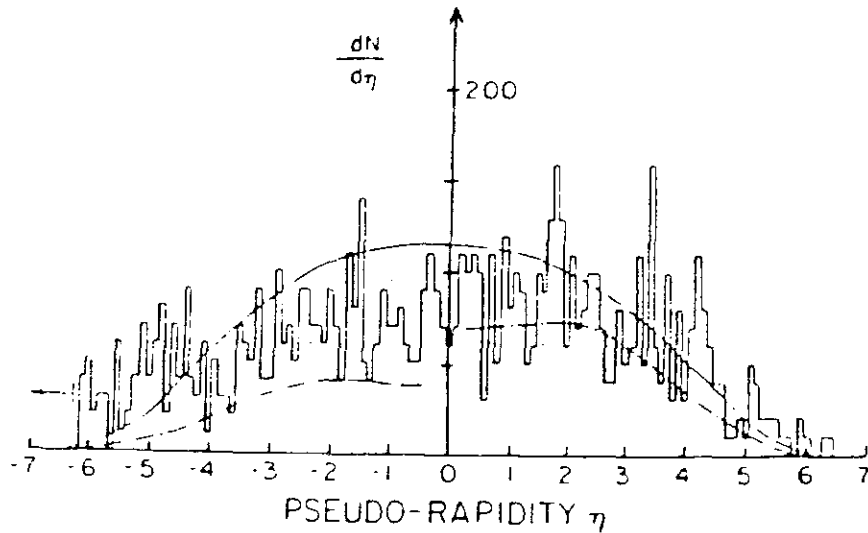


Fig. 2.7 - Distribuição de pseudo-rapidez.

Como mencionamos na Introdução, em colisões de íons pesados, a intermitência, se verificada na distribuição de tamanho de fragmentos, pode fornecer subsídios para que possamos distinguir os resultados dos modelos de transição de fase daqueles que são provenientes de modelos sequenciais. De fato, Bialas e Peschanski [Bial,90] mostraram que um processo de decaimento sequencial pode levar à ocorrência de intermitência com inclinação $\alpha_i \propto i(i - 1)$ enquanto que [Satz,89] encontrou que a ocorrência de intermitência está associada com o ponto crítico de transição de fase de um sistema e, neste caso, $\alpha_i \propto (i - 1)$. Então, a expectativa é que o expoente intermitente possa fornecer informações sobre a importante questão de ser ou não a fragmentação nuclear um fenomeno crítico (neste caso, uma transição de fase de 2ª ordem) como alguns trabalhos sugerem e, então, distinguir decaimento sequencial de uma quebra simultanea, *vis a vis*

$$\text{decaimento sequencial} \rightarrow \alpha_i \propto i(i - 1)$$

$$\text{decaimento simultaneo} \rightarrow \alpha_i \propto (i - 1).$$

Tal esperança deu origem a diversos trabalhos sobre intermitência na área de fragmentação nuclear.

2.2.1) Os Momentos Fatoriais Escalados como Medida das Flutuações

Para identificar o comportamento intermitente de um sistema físico, Bialas e Peschanski [Bial,86] propuseram o estudo dos momentos fatoriais escalados de ordem i (F_i) cuja definição, como será visto abaixo, exclue as flutuações estatísticas. De fato, o método deles consiste em dividir a região de interesse Δy de algum observável (a distribuição de rapidez por exemplo) em M caixas de tamanho $\delta y = \Delta y/M$ e caracterizar as flutuações segundo os momentos (C_i) da probabilidade p_m ($m = 1, \dots, M$) de se encontrar uma partícula na m -ésima caixa, i.é., por

$$\langle C_i \rangle = \left\langle \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (M p_m)^i \right\rangle, \quad (2.12)$$

onde $\langle \rangle$ denota a média sobre muitos eventos. O estudo da dependência de $\langle C_i \rangle$ com o tamanho da caixa δy dá informações sobre a estrutura, tamanho e possivelmente sobre comportamento de escala na variável rapidez.

Existe grande dificuldade em se calcular os momentos como definido na Eq. 2.12. Isto porque as probabilidades p_m podem somente ser estimadas pela razão n_m/N (onde n_m é o número de partículas na m -ésima caixa e N é o número total de partículas no intervalo Δy) e esta estimativa é boa apenas para valores suficientemente grandes de N e δy . Na verdade, é bem estabelecido que as N partículas que formam, de acordo com a probabilidade p_m , um histograma de M caixas seguem uma distribuição multinomial. Bialas e Peschanski [Bial,88b] mostraram que, além das flutuações multinomiais da razão n_m/N em torno do seu valor médio p_m (que são as usuais flutuações estatísticas) existem flutuações da própria probabilidade p_m que são as chamadas flutuações dinâmicas (inter-

mitência). Eles mostraram, ainda, que é possível determinar estas flutuações dinâmicas através dos momentos fatoriais escalados F_i que correspondem à parte dinâmica das flutuações medidas pelos momentos $\langle C_i \rangle$, i.é., se os momentos $\langle C_i \rangle$ puderem ser fatorados como a contribuição devido as flutuações estatísticas mais a contribuição devido as flutuações dinâmicas:

$$\langle C_i \rangle = \langle C_i \rangle_{est} + \langle C_i \rangle_{din}, \quad (2.13)$$

então, $F_i = \langle C_i \rangle_{din}$ com os momentos F_i definidos como [Bial,88]:

$$F_i = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\langle \frac{n_m(n_m - 1) \dots (n_m - i + 1)}{\langle n_m \rangle^i} \right\rangle. \quad (2.14)$$

O fator de normalização, na Eq. 2.14, é escolhido de maneira que $F_i = 1$ para $\delta y = \Delta y$. A escolha de outro fator de normalização proporcional a M^i , não altera a dependencia dos momentos fatoriais com δy [Bial,92]. As propriedades dos momentos fatoriais F_i estão demonstrados nas Refs. [Bial,86], [Bial,88a] e [Bial,88b] e podem ser resumidas como: - Se as flutuações dinâmicas têm um tamanho típico δy_0 , os F_i crescem para $\delta y > \delta y_0$ quando o tamanho da caixa decresce e, saturam para $\delta y < \delta y_0$; - se, por outro lado, flutuações auto-similares existem em toda a escala δy , os momentos fatoriais seguem uma lei de potência

$$\langle F_i \rangle \propto \left(\frac{\Delta y}{\delta y} \right)^{\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i \leq i - 1, \quad (2.15)$$

no limite $\delta y \rightarrow 0$ revelando um crescimento linear do $\log \langle F_i \rangle$ com $\log(1/\delta y)$. Este comportamento é chamado intermitência e a inclinação α_i caracteriza o sinal da intermitência. O caso $i = 1$ é trivial: $F_1 = 1$.

A seguir veremos como o conceito de intermitência vêm sendo aplicado no contexto

da fragmentação nuclear.

2.2.2) Intermittência em Fragmentação Nuclear

Como já mencionamos, flutuações dinâmicas foram estudadas, pela primeira vez em dados experimentais de fragmentação nuclear, por Ploszajczak e Tucholski [Plos,90]. Em particular, eles mostraram que os dados experimentais de Waddington e Freier [Wadd,85] correspondentes à quebra do ^{197}Au a $\sim 1 \text{ GeV/nucleon}$, em emulsão nuclear, exibiam comportamento intermitente. Após este estudo, os momentos fatoriais escalados foram calculados em diversos modelos de fragmentação nuclear. Com efeito, tanto modelos percolativos [Plos,91], [Boze,92], estatísticos [Barz,92], quanto de decaimento sequencial [Frie,92] foram utilizados no estudo das flutuações dinâmicas em fragmentação nuclear.

A aplicação do método dos momentos fatoriais ao caso nuclear é, a princípio, imediata: Para uma dada distribuição do número de fragmentos $n(Z)$ de carga Z , podemos facilmente definir os momentos fatoriais escalados. De fato, dividindo-se o intervalo ΔZ de carga total em M caixas de tamanho $\delta Z = \Delta Z/M$, os momentos fatoriais escalados de ordem i , F_i , podem ser definidos também pela Eq. 2.14, só que, agora, n_m é o número de fragmentos na m -ésima caixa e $N = \sum_{m=1}^M n_m$ é o número total de fragmentos no intervalo ΔZ , em um evento. Neste sentido, a razão $n_m/N = p_m$ é a probabilidade de encontrar um fragmento na m -ésima caixa, i.é., forma-se um histograma onde n_m é o conteúdo da caixa m .

Calculados através da Eq. 2.14, os F_i serão constantes e iguais a 1 quando a população da caixa $n_m = N/M$ independe do evento ou do número da caixa, isto é, quando a distribuição é suave e não flutuante. Todavia, as distribuições em fragmentação nuclear são fortemente *picadas*, de maneira que uma ou duas caixas podem dominar a

soma do numerador e os momentos fatoriais serão proporcionais ao fator M^{i-1} da Eq. 2.14, independentemente da existência ou do tipo de flutuação. Isto quer dizer que os F_i dariam uma falsa indicação de intermitência. Para evitar este problema, Fialkowski *et al.* [Fial,89] propuseram a normalização dos momentos fatoriais escalados por um fator que mede a população média das caixas individuais e obtiveram os momentos normalizados ou momentos horizontalmente escalados como dados por:

$$F_i^h = \left\langle \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{n_m(n_m-1)\dots(n_m-i+1)}{\left(\frac{N}{M}\right)^i} \right\rangle, \quad (2.18)$$

onde $\langle \rangle$ representam a média sobre diferentes eventos (com N possivelmente diferente, também). No caso de distribuições suaves com $N \gg i$, $F_i^h = \langle F_i \rangle$ mas, em geral eles diferem. A principal diferença entre eles, vem do fato de que neste tipo de análise (quer seja vertical quer seja horizontal), tem-se que fazer a média sobre o número de eventos e sobre as caixas no intervalo considerado. Na análise horizontal, os momentos F_i^h são calculados para cada evento individual e, só então, a média é realizada. Já na análise vertical n_m é definido como o número total de fragmentos contidos em uma caixa e, $\langle n_m \rangle$ é a população média desta caixa, contados sobre todos os eventos. Isto é, dependendo da ordem em que as médias são feitas a análise é dita ser vertical ou horizontal.

Os momentos horizontais variam mais suavemente como uma função do tamanho da caixa para distribuições fortemente picadas mas não flutuantes e são identicamente 1 em cada caixa m com arbitrário $\langle n_m \rangle$ para distribuições que exibem flutuações tipo Poisson (estatísticas). Neste sentido, os momentos horizontais são mais gerais que os verticais, pois podem ser aplicados mesmo em distribuições que não são suaves. Isto faz da análise horizontal melhor candidata para o estudo de distribuições de fragmentação nuclear, porque estas, em geral, são fortemente picadas. Além disto, as distribuições de carga/massa em fragmentação nuclear têm que obedecer a leis de conservação de carga/número barionico. Este fato faz com que efeitos de tamanho finito violem três suposições tomadas inicialmente por Bialas e Peschanski [Bial,86]: - a suposição de que

cada caixa pode ter $n_m = 1, \dots, N$ elementos, com N arbitrário; - que a probabilidade de adicionar um elemento em uma caixa é independente da população desta caixa e - que a probabilidade de se adicionar um elemento em uma caixa é independente de outras caixas. De fato, por exemplo, o número máximo de fragmentos com carga 4 é somente a metade do número máximo de fragmentos com carga 2 o que mostra que neste caso, N não é arbitrário; e, se em um evento, um fragmento tem carga igual a carga total do sistema, a probabilidade de existir outro fragmento com carga diferente de zero é nula, isto é, a probabilidade de se adicionar um elemento em uma caixa é independente da população desta e de outras caixas.

A maneira como as leis de conservação afetam os momentos fatoriais constitui ainda um problema que tem sido debatido na literatura ([DeAn,92], [Boze,92]). Todavia, é certo que elas limitam o número de caixas que podem contribuir para um particular momento. Por exemplo, em cada evento, pode existir no máximo um fragmento nas últimas caixas e neste caso (com $n_m = 1$), esta caixa não pode contribuir para os momentos (Eq. 2.18). Como consequência direta, a faixa de variação do observável é efetivamente diminuída. Por exemplo, para um sistema como o ^{197}Au , cuja carga total é 79, e levando em conta o argumento acima, temos cerca de 40 caixas relevantes e, então, o tamanho de caixa (ou resolução), da ordem de no máximo 20 (para se poder dividir a amostra em pelo menos duas caixas). Além disto, para um dado momento i , somente as primeiras Z_0/i caixas podem contribuir. Por exemplo, somente as primeiras 15 caixas contribuirão para o 5^o momento, uma vez que se pode ter no máximo 4 fragmentos com $Z \geq 16$.

Na prática, o efeito de se reduzir o número de caixas não é grave pois em geral, não haverá muitos fragmentos nas caixas que são excluídas. Muito mais grave é a restrição no tamanho máximo da caixa ou, equivalentemente, o menor número de caixas no qual dividimos a distribuição.

Nestes cálculos, usamos $\delta Z \leq 15$. Este número pode parecer arbitrário, mas nos parece razoável com base no que foi discutido acima. Além disto, verificamos que o

expoente intermitente permanece praticamente constante se extendermos a análise para $\delta Z \leq 20$.

2.2.3) Resultados Obtidos com o Modelo de Percolação

Discutiremos no Cap. 3 mais detalhes sobre os modelos percolativos, entretanto, nesta abordagem da fragmentação nuclear, os nucleons do núcleo alvo são considerados ocupar os sítios de um cristal que tomamos como uma rede *fcc*. O cenário que se tem em mente neste tipo de tratamento é que, devido à colisão com o projétil, vários nucleons são ejetados do núcleo alvo, tornando os respectivos sítios desocupados. Os clusters são formados somente se os próximos-vizinhos estão conectados. O critério de conexão é dado pela distancia de próximos vizinhos com a condição de que cada partícula do cluster deve pertencer a um tetraédro.

Consideramos uma rede contendo 201 sítios, inscrita em uma esfera, o que é apropriado para simular a fragmentação do ^{197}Au . Nesta simulação, a quantidade relevante é a probabilidade p de um sítio ser ocupado. Admitimos que a dependência de p com o parâmetro de impacto b obedeça a $1 - f(b)$ onde $f(b)$ tem a mesma forma funcional que a do número de colisões primárias que sofre o projétil quando atravessa o alvo, *i. é.*,

$$p = 1 - p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2} \quad (2.19)$$

onde R é o raio do sistema alvo+projétil, e p_0 é um parametro escolhido de modo tal que a média sobre todos os parâmetros de impacto b forneça a probabilidade crítica p do modelo de percolação.

O seguinte procedimento foi adotado na obtenção da partição do sistema inicial, composto por A_0 nucleons, para o cálculo dos momentos fatoriais escalados:

1. - Escolher aleatoriamente, sobre uma distribuição triangular, o parametro de impacto no intervalo $0 \leq b \leq R$;

2. - Escolher aleatoriamente $p A_0$ sítios na rede *fcc* para serem ocupados por nucleons;
3. - Identificar os clusters e coletá-los de acordo com seu tamanho;
4. - Atribuir carga (0 ou 1) a cada nucleon, conservando a carga total ($\Delta Z = 79$). Por simplicidade, supomos núcleos simétricos.

Obtida a partição, divide-se o intervalo ΔZ em M caixas de tamanho $\delta Z = \Delta Z/M$ e coleta-se o número n_m de fragmentos em cada caixa de acordo com seu tamanho, para então usar a Eq. 2.18.

O método descrito acima é utilizado para calcular os momentos fatoriais escalados, das distribuições de carga geradas pelo modelo de percolação em 2.000 corridas de Monte Carlo.

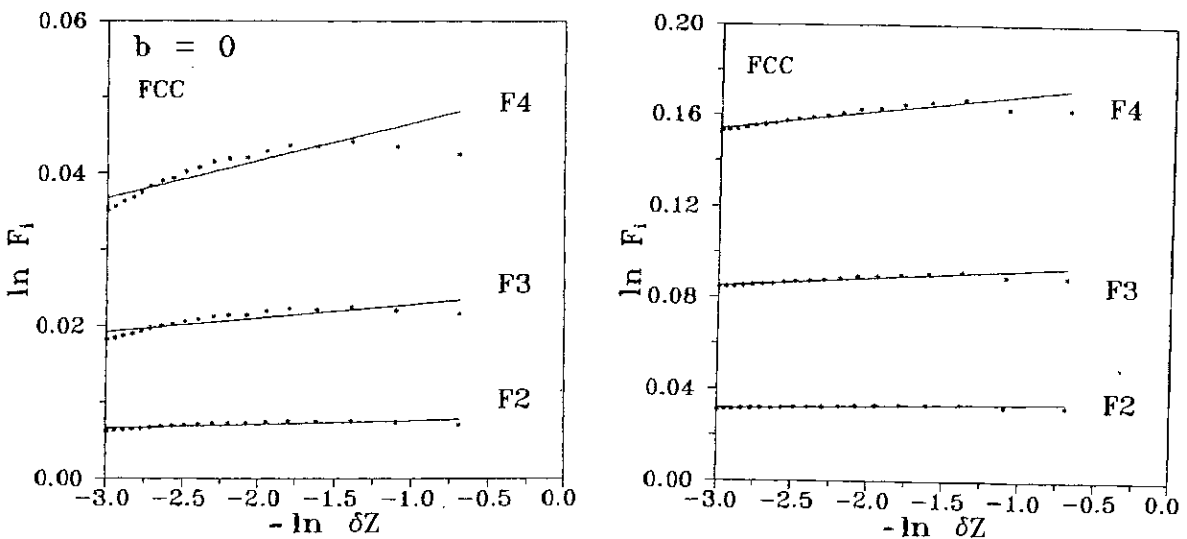


Fig. 2.8 - $\ln(F_i^h)$ versus $-\ln(\delta Z)$.

Na Fig. 2.8 o logaritmo dos momentos F_i é mostrado como uma função do negativo de $\ln \delta Z$. Plotados desta maneira, os momentos fatoriais escalados indicam intermitência se os $\ln F_i$ seguem uma linha reta. A inclinação desta reta é o expoente intermitente α_i . Duas situações são consideradas: colisões centrais (figura (a)) e média sobre o parametro de impacto b , de acordo com a Eq. 2.19, (figura (b)). A linha sólida corresponde a um *fitting* dos dados por uma linha reta. É nítido que no caso $b = 0$, pelo menos

no caso de momentos de ordem mais altas, nossos resultados (pontos) não seguem uma linha reta. Entretanto, se uma média sobre diversos parametros de impactos é também incluída, os pontos podem ser fitados por uma reta. Note-se ainda que a média em b eleva o valor do $\ln F_i$ em cerca de quatro vezes.

Na tabela 2.1 os expoentes intermitentes α_i são comparados com os valores experimentais e com os obtidos na Ref. [Plos,91].

Tabela 2.1 *Expoente intermitente para os momentos de ordem i .*

i	Experimental	FCC	Ref. 1
2	0.013	0.013	0.0008
3	0.036	0.038	0.0025
4	0.064	0.083	0.0051

Pode ser notado que nossa simulação conduz a valores para os expoentes intermitentes que são uma ordem de grandeza maior que os obtidos por Ploszajczak e Tucholski [Plos,91] e estão muito mais próximos dos valores obtidos com os dados experimentais de [Wadd,85]. A pequena discrepância entre nossos resultados e os dados experimentais é esperada diminuir, se uma aproximação mais realista que a aproximação de núcleos simétricos for utilizada.

Os expoentes intermitentes da distribuição de carga de fragmentos gerados pelo modelo de percolação em rede *fcc* se aproxima dos valores experimentais quando se introduz a dependência da probabilidade de ocupação com o parametro de impacto. Este resultado está de acordo com o predito por Barz *et al.* [Barz,92] e indicam que o comportamento intermitente encontrado na reação de fragmentação do ^{197}Au pode ser proveniente da mistura de várias situações dinâmicas na colisão.

Como já mencionamos anteriormente, os menores fragmentos é que efetivamente

contribuem para os momentos. Então, como muitos fenômenos diferentes da fragmentação nuclear podem também contribuir para a produção de fragmentos leves, tais como emissão de pré-equilíbrio e decaimentos secundários, a procura de sinais de transição de fase, nos dados experimentais, através do estudo do expoente intermitente, conforme comentamos na introdução desta seção, pode ficar prejudicada.

O Modelo de Percolação Nuclear

*“Tria sunt necessaria videlicet patientia,
mora et aptitudo instumentorum.”†*

A. Consurgens.

Alguns modelos utilizados no estudo de Fragmentação Nuclear baseiam-se no modelo de percolação, o qual consiste em descrever o processo da fragmentação utilizando essencialmente dois ingredientes básicos a saber: um conjunto de pontos (sítios) e uma regra para decidir se estes pontos estão conectados ou não. Sítios conectados entre si são chamados *clusters*, que, nos modelos de percolação nuclear, são identificados como fragmentos. Implicitamente estes modelos admitem que o processo de quebra do sistema nuclear é um processo frio e explosivo, onde todos os fragmentos são produzidos simultaneamente.

Efetivamente, nos modelos percolativos, toda a física do processo de fragmentação nuclear é descrita por um único parâmetro que é a probabilidade de concentração (de ocupação de sítio p ou de ligação p_b). De fato, o valor da probabilidade de concentração

† “Três coisas são necessárias, a saber, paciência, perseverança e habilidade no manuseio dos instrumentos.”

é associado, de uma maneira genérica, com a violência da colisão, no sentido de que, para baixos valores de p ou de p_b , o “estrago” (i.é., o número de nucleons arrancados ou o número de ligações quebradas entre os nucleons) é grande. Inversamente, maiores valores de p ou p_b refletiriam as colisão menos violentas e que, portanto, deixariam o sistema nuclear praticamente intacto.

Os primeiros modelos percolativos da fragmentação nuclear são devidos a Campi e Desbois [Camp,84] e Biro *et al.* [Biro,86] que usaram percolação de sítio e Bauer *et al.* [Baue,85] que trabalharam com percolação de ligação. Um pouco mais tarde Nemeth *et al.* [Neme,86] trabalharam com percolação de sítio-ligação e Santiago e Chung [Sant,90] propuseram um modelo de percolação-evaporação. Todos estes autores trabalharam com rede cúbica simples. Em 1991, Chao e Chung [Chao,91] propuseram o modelo de percolação tetraédrica em rede *fcc* e mostraram que os efeitos de superfície podiam ser tratados satisfatoriamente dentro dessa percolação. Na percolação tetraédrica, todos os *clusters* são tais que cada sítio conectado pertence a algum tetraédro. Contudo, devido à topologia especial da rede *fcc*, *clusters* de 5 e de 7 nucleons não podem ser formados. Além destes, pela própria natureza da percolação tetraédrica, sistemas ligados de dois (deuterons) ou de três (triton) sítios não podem ser formados, o que fica em desacordo com os dados experimentais. Para contornar este problema, Santiago e Chung [Sant,93] propuseram modificações ao modelo da Ref. [Chao,91] de maneira que a clusterização em deuterons e tritons pudessem ser levadas em conta.

Por outro lado, Ngô *et al.* [Ngô,89b] trataram a produção de fragmentos nucleares em termos de um modelo de agregação e Dorso e Donangelo [Dors,90], Dorso *et al.* [Dors,93] e Chung [Chun,93] propuseram modelos de nucleação estocástica para a fragmentação nuclear. Estes modelos são, em linhas gerais, muito similares aos modelos percolativos, no sentido de que eles também estão baseados em leis probabilísticas. A principal diferença é que, no caso da nucleação, não se faz uso de rede cristalina, i.é., os nucleons não precisam ficar restritos a ocuparem orientações fixas no espaço, e a distância mínima entre os nucleons pode assumir qualquer valor, desde que maior que o

raio de esfera dura nuclear. Além disto, cada nucleon é suposto estar envolvido por uma esfera efetiva de interação, cujo raio R_{int} é imediatamente identificado com o alcance da interação nuclear.

Iniciaremos este capítulo (Seção 3.1) com uma breve revisão dos conceitos básicos de percolação. Na Seção 3.2 discutiremos um modelo de percolação para a fragmentação nuclear. Todavia, a *transição de fase percolativa* em sistemas finitos ficará para ser apresentada no Capítulo 4.

3.1 - A TEORIA DE PERCOLAÇÃO

A teoria de percolação iniciou-se na década de 40 com os estudos de crescimento de moléculas realizados por Flory [Flor,41] e Stockmayer [Stoc,43]. Eles procuravam entender o fenomeno de gelação, que em última análise, é um processo no qual ocorre a formação de uma rede de ligações químicas, gerando todo o sistema. Todavia, a formulação matemática deste tipo de problema foi feita somente em 1957 por Broadbent e Hammersley [Broa,57] que procuraram estudar de que maneira as propriedades aleatórias de um meio influenciam a passagem de um fluido por esse meio. Daí a origem do nome percolação (per = através de, colare = filtrar, coar), que deriva da palavra latina *percolare*, que significa ‘fluir através de’. Alguns anos depois, o significado das palavras meio e fluido, assumiu um sentido mais amplo. Por meio, entendemos agora, um sistema constituído de um grande número de pontos, distribuídos no espaço, que podem ou não estar conectados entre si de acordo com um mecanismo aleatório, e por fluido, entendemos a informação que é transmitida de ponto a ponto. Com estes novos significados, estenderam-se as aplicações da teoria de percolação a diversos ramos da ciência, tais como o estudo de propagação de pragas em plantações, incêndio em florestas, a transmissão de informações de uma rede telefônica, gelação de polímeros em matéria condensada e, até mesmo o estudo do plasma de quarks e gluons ([Baym,79],

[Ngô,88]). Para uma revisão da teoria de percolação, recomendamos os artigos de revisão de Kirkpatrick, Essam e, Stauffer e Aharony, Refs. [Kirk,73], [Essa,80] e [Stau,92], respectivamente.

Mais recentemente, a teoria de percolação vem ocupando lugar de destaque também na física nuclear, onde diversos modelos de percolação têm surgido com a finalidade de estudar a fragmentação nuclear. Não faremos uma discussão detalhada sobre estes mais variados modelos uma vez que este trabalho é um exemplo de aplicação das idéias percolativas à fragmentação nuclear mas, recomendamos para uma revisão a referência [Chun,89].

3.1.1) Definição e Exemplos

Como já mencionamos, os ingredientes básicos da teoria de percolação são:

- Um conjunto de pontos distribuídos em um espaço de dimensão d (por simplicidade uma rede cristalina regular é utilizada e, neste caso, os pontos são os sítios da rede);
- Um critério para decidir se dois dados sítios estão conectados ou não (o critério mais convencional é dado pela distância de 1^o's próximos vizinhos, contudo, a distância entre 2^o's ou outros próximos vizinhos também pode ser usada). Os subconjuntos de sítios conectados são chamados *clusters* e, o estudo das propriedades destes *clusters* constitui a teoria de percolação.

Seja, então, um conjunto de pontos que constituem as redes quadradas (bidimensionais) da Fig. 3.1 retirada da Ref. [Stau,79]. Estas redes são constituídas por 400 sítios cada. Os sítios ocupados são os pontos da figura e os sítios vazios não estão mostrados. Suponhamos que cada sítio possa ser ocupado (ou desocupado) com probabilidade p (ou $1 - p$). Quando p é pequeno, poucos sítios estão ocupados e correspondem aos quadros

da esquerda (painéis (a), (b) e (c)). À medida que p cresce, aumenta também o número de sítios ocupados até que, para grandes valores de p , praticamente todos os sítios da rede ficam ocupados.

Se a regra para conexão de dois sítios ocupados é que sejam próximos vizinhos, isto é, que a interdistância entre eles, no caso da rede quadrada, seja igual ao parâmetro de rede d (vide Fig. 3.1), então, podemos ver que o tamanho dos *clusters* formados (que nada mais é do que o conjunto de sítios contidos no *cluster*), depende da probabilidade de ocupação p e que, quanto maior o p , maior o tamanho dos *clusters*. No painel(f), está ilustrado também o maior *cluster* formado (cruzes) quando $p = 0.6$. Se estendermos esta imagem para o caso de uma rede infinita, existirá uma probabilidade crítica p_c , bem definida, a partir da qual, pela primeira vez, aparece um *cluster* conectando toda a rede, isto é, o *cluster* percolante. Neste caso, então, se diz que o sistema passou de um estado não-percolante ($p < p_c$) para um estado percolante ($p \geq p_c$). Discutiremos com mais detalhes alguns métodos utilizados para estimar p_c no Cap. 4.

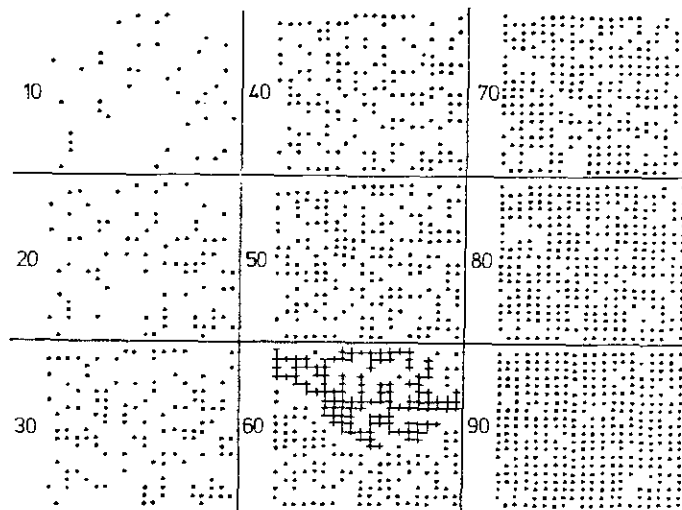


Fig. 3.1 - Exemplo de percolação em uma rede 20×20 .

Temos dois tipos básicos de percolação que são a percolação de sítio e a percolação de ligação. A percolação de sítio é aquela em que as conexões são supostas ativas e os sítios ocupados são aleatoriamente escolhidos. Por outro lado, quando todos os sítios

estão ocupados e as conexões entre eles é que podem ser quebradas aleatoriamente, diz-se tratar de percolação de ligação. Podemos ter, ainda, uma percolação híbrida de sítio-ligação, em que ambos os mecanismos acima citados estão presentes.

Resumindo em termos da probabilidade de ocupação de sítio ou em termos da probabilidade de ligação, temos,

- a) Percolação de Sítio: a probabilidade de cada sítio estar ocupado é p ou a probabilidade de cada sítio estar desocupado é $1 - p$, com $0 \leq p \leq 1$.
- b) Percolação de Ligação: todos os sítios estão ocupados e a ligação entre dois dados sítios pode estar presente com probabilidade p_b ou ausente com probabilidade $1 - p_b$; com $0 \leq p_b \leq 1$.
- c) Percolação de Sítio-Ligação: os sítios são ocupados com probabilidade p e as ligações entre eles são quebradas com probabilidade $1 - p_b$.

Para um dado tipo de rede, vale a desigualdade [Vino,73]:

$$p_c^{\text{sítio}} \geq p_c^{\text{ligação}}. \quad (3.1)$$

i.é., a probabilidade crítica de ocupação de sítio é sempre maior ou igual à probabilidade crítica de ligação. Este resultado pode ser facilmente entendido, uma vez que ao removermos um sítio, por exemplo, de uma rede cúbica simples, quebramos automaticamente, seis ligações.

Na discussão acima, limitamo-nos aos tipos mais comuns de percolação. Existem, entretanto, diversos outros tipos de percolação como, por exemplo, a percolação direcionada onde as conexões dependem do sentido do fluxo de informação, a percolação a alta densidade, na qual os sítios só serão conectados se formarem estruturas geométricas compactas (densas) bem definidas (tetraédros, por exemplo), a percolação anisotrópica,

onde as conexões em diferentes direções têm probabilidades distintas, etc...

3.1.2 – Algumas Grandezas Estudadas em Percolação

A diferença essencial entre a percolação e outras teorias de transição de fase é a ausência de um hamiltoniano. A transição percolativa é, geralmente, um fenômeno puramente geométrico probabilístico, onde os *clusters* são objetos estáticos bem definidos. Isto faz da percolação um problema de geometria que se espera resolver a partir do estudo das distribuições de tamanho e das formas dos *clusters*. Muitas propriedades de interesse podem ser extraídas das distribuições de tamanho dos *clusters*, independentemente das formas particulares destes *clusters*. Neste caso, a grandeza fundamental é o número médio $n(p)$ de *clusters* finitos (normalizado por sítio) e definido como

$$n(p) = \sum_s' n_s(p). \quad (3.2)$$

onde n_s é o número de *clusters* de tamanho s por sítio da rede. Conhecendo-se $n_s(p)$ para todos os valores de s podemos calcular todas as grandezas da percolação que sejam independentes das formas dos *clusters*. Na Eq. 3.2, a plica sobre o somatório indica a exclusão do cluster percolante (infinito).

A grandeza $n(p)$ apresenta singularidade para $p \rightarrow p_c$ e a forma assintótica de sua parte singular (que denotaremos pelo subscripto *sing*) é:

$$n(p)|_{sing} \sim (p_c - p)^{2-\alpha^g} \quad (p \rightarrow p_c^-) \quad (3.3)$$

$$n(p)|_{sing} \sim (p - p_c)^{2-\alpha^l} \quad (p \rightarrow p_c^+)$$

onde os expoentes α^l ou α^g só dependem da dimensão (d) e, no caso de $d = 3$ são $\alpha^g = \alpha^l = -0.6^\dagger$. Note-se que, aqui, o subscrito *sing* significa a parte principal (maior) não-analítica da quantidade subscrita. Não significa necessariamente que esta quantidade vá para infinito. Por exemplo, se a quantidade Q , para $p \rightarrow p_c$, varia como $Q(p) = Q_0 + Q_1(p - p_c) + Q_2(p - p_c)^{1,3} + Q_3(p - p_c)^{1,8} + Q_4(p - p_c)^2$, a parte singular ou crítica $Q(p)|_{sing}$ é dado pelo termo singular dominante na derivada de ordem mais baixa de $Q(p)$, i.é., pelo termo $Q_2(p - p_c)^{1,3}$. O termo $Q_3(p - p_c)^{1,8}$ é o termo de correção de escala e os demais termos $Q_0 + Q_1(p - p_c) + Q_4(p - p_c)^2$ são denominados de fundo analítico.

A – Probabilidade de Percolação $P(p)$

A probabilidade de percolação $P(p)$ é definida como a probabilidade de um sítio (ocupado ou não), escolhido aleatoriamente, pertencer a um *cluster* infinito. Esta probabilidade pode ser encontrada a partir do fato de que, para cada sítio, na percolação de sítio, existem três opções: *a*) ou ele está vazio (com probabilidade $(1 - p)$), *b*) ou ele pertence ao *cluster* percolante (com probabilidade pP) ou ainda, *c*) ele faz parte do conjunto de *clusters* finitos incluindo *clusters* isolados (com probabilidade $p(1 - P)$). Além disto, cada *cluster* de tamanho s tem exatamente s sítios ocupados, logo, a probabilidade P_s de um sítio qualquer pertencer a este *cluster* é $P_s = sn_s$, já que n_s é o número de *clusters* de tamanho s dividido pelo número total de sítios. Como a soma de todas estas probabilidades tem que ser igual a 1, temos

$$1 - p + pP(p) + \sum_s sn_s(p) = 1 \quad (3.4)$$

[†] As expansões em série são consistentes com a hipótese de igualdade dos expoentes críticos em p_c^+ e p_c^- , para qualquer dimensão d , mas não existem provas destas simetrias e as evidências numéricas não são esmagadoras.

onde \sum'_s denota a soma sobre todos os *cluster* finitos e, na verdade, a Eq. 3.4 pode ser reescrita como:

$$P(p) = 1 - \frac{\sum'_s n_s s}{p} \quad (3.5)$$

O significado da Eq. 3.5 é claro: - ou o sítio ocupado (com probabilidade p) pertence ao *cluster* infinito (probabilidade $P(p)$) ou pertence a (ou é) um dos *clusters* finitos (probabilidade $\sum'_s n_s s$).

Como não há *cluster* infinito para $p < p_c$, temos que $P(p < p_c) = 0$ todavia, $P(p > p_c) \cong 1$. Para $p \rightarrow p_c^+$, $P(p)$ apresenta singularidade cujo comportamento assintótico é:

$$P(p)|_{sing} \sim (p - p_c)^\beta \quad (p \rightarrow p_c^+), \quad (3.6)$$

onde o expoente β também só depende da dimensão e é aproximadamente 0.4 para $d = 3$.

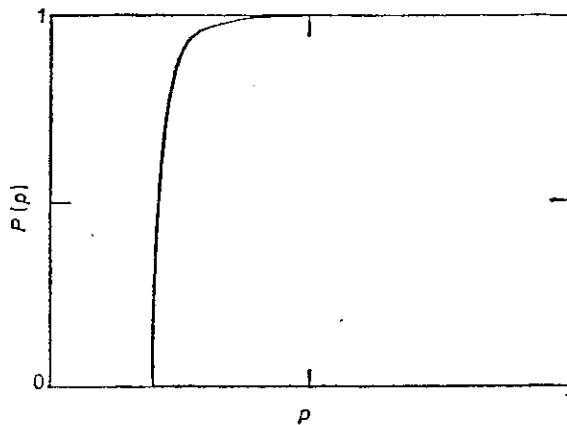


Fig. 3.2 - P versus p .

A Fig. 3.2, retirada da Ref. [Essa,80], mostra um gráfico $P \times p$ para o problema de percolação de sítio em uma rede *fcc* ($p_c \approx 0.1965$). Observe-se que para $p \geq p_c$, a probabilidade de um sítio pertencer ao *cluster* infinito é aproximadamente 1 enquanto que, para $p < p_c$, é zero.

Além disto, pode-se verificar que, para uma dada rede, $P(p)$ satisfaz à desigualdade [Vino,73]:

$$P_{\text{sítio}}(p) \leq P_{\text{ligação}}(p), \quad (3.7)$$

onde a igualdade só se verifica se $p = 0$ ou 1 ou se o cristal tem a estrutura de árvore. Desta forma, se $P(p)$ é uma função que cresce monotonicamente com p , então (cf. Eq. 3.5):

$$p_c^{\text{sítio}} \geq p_c^{\text{ligação}}, \quad (3.8)$$

conforme já havíamos mencionado.

B – Tamanho Médio $S(p)$ dos *clusters*

Pode ser definido como

$$S(p) = \frac{\sum'_s n_s s^2}{\sum'_s n_s s}. \quad (3.9)$$

onde, como já vimos, $n_s s$ é a probabilidade de um sítio arbitrário pertencer a um cluster finito de tamanho s . Assim, Eq. 3.9 nada mais senão a média ponderada do tamanho dos *clusters*.

A parte singular desta função diverge para $p \rightarrow p_c$ com um comportamento assintótico da forma

$$S_{\text{sing}}(p) \sim (p_c - p)^{-\gamma^g} \quad (p \rightarrow p_c^-) \quad (3.10)$$

$$S_{\text{sing}}(p) \sim (p - p_c)^{-\gamma^l} \quad (p \rightarrow p_c^+)$$

A Fig. 3.4, extraída de [Essa,80], ilustra o comportamento de $S(p)$ em função de p . As

estimativas de $\gamma^{g,l}$ são melhores que as de β e indicam que $\gamma^{g,l} \approx 1.8$ para $d = 3$.

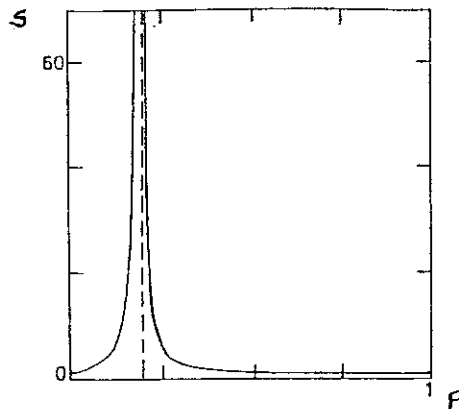


Fig. 3.4 - S versus p .

Existem também grandezas microscópicas (que dependem não só do tamanho do *cluster* como também de sua forma específica) que desempenham um papel importante na teoria de percolação, entre elas, destacamos o comprimento de correlação e o raio médio dos *clusters* que são quantidades de interesse para o estudo de fragmentação nuclear. Além destes, o perímetro dos *clusters* de um dado tamanho e a superfície de um *cluster* são parâmetros que servem para distinguir entre as várias formas possíveis de um *cluster* (forma ‘ramificada’, tipo ‘queijo suíço’, tipo ‘hidra’, etc).

C – Raio Médio de Giração do *cluster*

Em percolação, a distribuição de tamanho dos *clusters* depende fortemente do parâmetro de concentração. Se a probabilidade de ocupação (por exemplo) é menor que p_c , os *clusters* são pequenos. Por outro lado, para p acima de p_c , existem *clusters* de vários tamanhos nos buracos do *cluster* percolante e o tamanho destes *clusters* e suas extensões lineares têm distribuições características, enquanto que o limiar de percolação ($p = p_c$) é caracterizado por uma distribuição de tamanho que não tem tamanho típico, i.é., seguem uma distribuição de lei de potência.

O raio médio de giração R_s de um *cluster* de tamanho s pode ser definido como [Stau,79]:

$$R_s^2 = \sum_{i=1}^s \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_o|^2}{s} \quad (3.11)$$

onde $\vec{r}_o = \sum_{i=1}^s \vec{r}_i/s$ é a posição do centro de massa do *cluster* e \vec{r}_i a posição do i -ésimo sítio ocupado no referencial do laboratório. A soma é realizada sobre todos os sítios de um dado *cluster*.

A Eq. 3.11 mostra que o raio de giração de um *cluster* nada mais é que o valor *rms* das posições dos sítios dentro do *cluster*, medido em relação a seu centro de massa.

D – Comprimento de Correlação ξ

Outra grandeza muito utilizada para caracterizar a distribuição de *clusters* é o comprimento de correlação, que é definido como a média quadrática das distâncias entre todos os sítios ocupados num *cluster* finito.

O comprimento de correlação pode também ser definido em termos do raio de giração. De fato, como $2R_s^2$ é a distância média quadrática entre dois sítios de um *cluster* de tamanho s , e como a probabilidade de um sítio qualquer pertencer a esse *cluster* é $n_s s$, a correspondente média de $2R_s^2$ sobre todos os *clusters* dá o comprimento de correlação, i.é.,

$$\xi(p) = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s(p)}{\sum_s s^2 n_s(p)} \quad (3.12)$$

Assim, o comprimento de correlação é, em última análise, a distância média entre

dois sítios de um *cluster*, a média sendo tomada sobre os vários *clusters* de tamanho s .

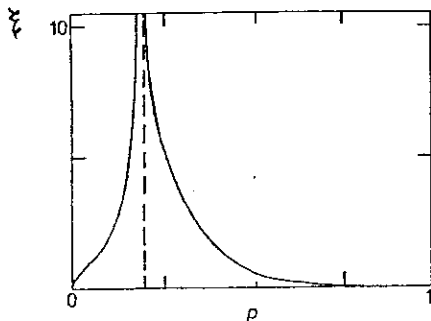


Fig. 3.5 - Comprimento de correlação versus p .

O comprimento de correlação é finito para $p \neq p_c$ mas diverge para $p \rightarrow p_c$. A forma assintótica da parte singular de ξ para $p \rightarrow p_c$ é:

$$\xi_{sing}(p) \sim |p - p_c|^{-\nu^g} \quad (p \rightarrow p_c^-) \tag{3.13}$$

$$\xi_{sing}(p) \sim |p - p_c|^{-\nu^l} \quad (p \rightarrow p_c^+)$$

com $\nu \approx 0.9$. O comportamento típico de $\xi(p)$ está ilustrado na Fig. 3.5, retirada de [Essa,80].

E – Auto-Similaridade de *Clusters* Percolantes – Dimensão Fractal

Auto-similaridade é a propriedade de simetria através das escalas. A fim de visualizar o que vem a ser a auto-similaridade de um *cluster* percolante, consideremos uma rede triangular como ilustra a Fig. 3.6(a), onde uma parte do *cluster* percolante está ilustrada. Se olharmos este *cluster* com uma resolução maior, alguns detalhes serão mais nítidos, mas o grosso da estrutura do *cluster*, por exemplo o fato de que existem buracos de todos os tamanhos em sua estrutura, ainda permanecerá o mesmo. Na realidade, esta constatação reflete o fato de que o *cluster* percolante é estatisticamente

auto-similar. Esta auto-similaridade está intimamente conectada à estrutura fractal do *cluster* percolante e pode ser tratada quantitativamente por técnicas de renormalização no espaço real (cf. Seção 3.1.5).

Na Fig. 3.6(b), ilustramos os sítios ocupados após termos escalado a Fig. 3.6(a) por um fator $b = 3$, usando o procedimento que será descrito na Seção 3.1.5 e, na Fig. 3.6(c), destacamos uma parte do *cluster* percolante da rede escalada. Observe que não há diferença qualitativa entre o *cluster* da figura (c) escalado, e o *cluster* ilustrado na figura (a). De fato, na Fig. 3.6(d), o *cluster* escalado foi inserido dentro do *cluster* original na região demarcada pelo retângulo menor. Observe que o *cluster* escalado apresenta a mesma estrutura do *cluster* original e que esta figura é similar à Fig. 3.6(a).

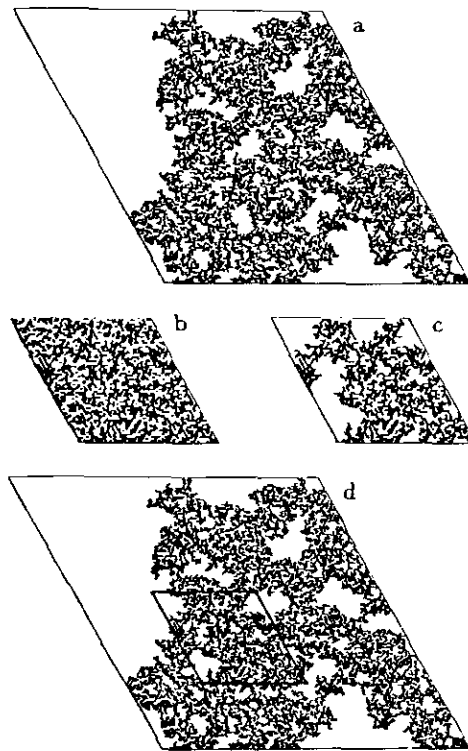


Fig. 3.6 - Ilustração da Auto-similaridade do Cluster Percolante.

A estrutura fractal do *cluster* percolante pode ser melhor entendida em termos da chamada dimensão fractal D . Esta última, a grosso modo, pode ser definida, para um

objeto de massa M e comprimento L como [Mand,82]:

$$M \propto L^D \tag{3.14}$$

Para um objeto ser caracterizado como um fractal é necessário que D seja menor que a dimensão d do espaço Euclidiano onde o objeto está imerso.

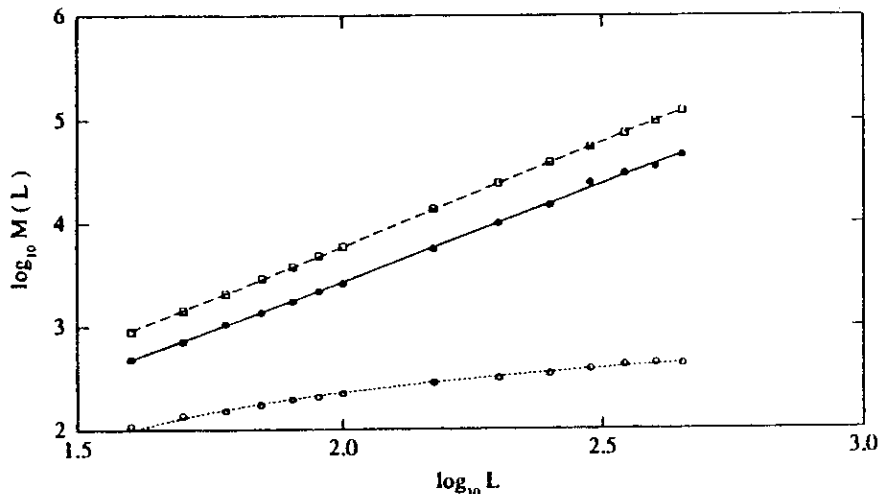


Fig. 3.7 - $M(L)$ versus L .

Em percolação, define-se a massa de um *cluster* como o número de sítios que ele contém, i.e., pelo seu tamanho. Podemos, então, estudar como a massa $M(L)$ do maior *cluster* cresce com o tamanho L da rede. De fato, para redes tridimensionais, se $P(p)$ (cf. Seção B) é a densidade de sítios do *cluster* percolante, para $p > p_c$, $M(L) \propto P(p)L^3$. Todavia, se $p < p_c$ (não há *cluster* percolante) então, $M(L)/L^3 \rightarrow 0$. Para $p = p_c$, $M(L)$ deve ter um comportamento similar ao caso $p > p_c$.

A dependência de M com o tamanho da rede tem sido estudada por diversos autores [Stau,79]. Os resultados obtidos encontram-se ilustrados na Fig. 3.7, na qual a massa do maior *cluster* é *plotada* como função da dimensão linear L de uma rede quadrada. Os círculos cheios são para $p = p_c = 0.593$. A linha sólida corresponde ao *fitting* da função $M(L) = AL^D$ onde A é uma constante e $D = 1,89$. Para $p > p_c$ (no caso $p = 0.65$) que correspondem aos quadrados da figura, os resultados também seguem uma lei de potência com $D = 2,03$ (linha tracejada). Já os resultados para valores de p abaixo de p_c , i.e., $p = 0.5$ (círculos vazios), são melhores *fitados* por $M(L) = A + B \ln L$ (linha

pontilhada).

Estes resultados podem ser resumidos por:

$$M(L)|_{sing} \sim \begin{cases} \ln L, & \text{se } (p < p_c); \\ L^D, & \text{se } (p = p_c); \\ L^E, & \text{se } (p > p_c). \end{cases} \quad (3.15)$$

com $D < d < E$. O que mostra que o *clusters* percolante tem estrutura fractal e sua massa cresce, em média, segundo $M(L) \sim \bar{A}L^D$, com $D \approx 1,89$ para redes bidimensionais. A média é tomada sobre muitos eventos e a amplitude \bar{A} é uma amplitude efetiva estimada por simulações em sistemas finitos.

Esta lei de escala para a massa $M(L)$ do *cluster* é também aplicada para massas de *clusters* obtidos após uma mudança de escala no tamanho da rede por um fator b , i.é., $L' = L/b$. De fato,

$$M(L/b) = \bar{A}(L/b)^D \quad (3.16)$$

logo

$$M(L) = b^D M(L/b) \quad (3.17)$$

que é válida assintoticamente no limite de L e L/b grandes. Note-se que o lado esquerdo da Eq. 3.17 é independente de b , o que quer dizer que $M(L)$ é uma função homogênea e, então, $M(L)$ é uma lei de potencia, i.é., $M(L) \sim L^D$. Resumindo, a geometria fractal do *cluster* percolante e sua auto-similaridade estatística estão relacionadas e expressas, quantitativamente, pela Eq. 3.17. Embora tenhamos tomado uma rede bidimensional como exemplo, toda esta discussão é também válida para redes tridimensionais, só que, neste caso, $D \approx 2,5$.

3.1.3 – O Limiar de Percolação

Comentamos, na Seção 3.1.1, que existe uma certa probabilidade limiar p_c , a partir da qual, numa rede infinita, um *cluster* percolante sempre será encontrado.

O limiar de percolação é um parâmetro não universal e depende não só da estrutura cristalina como também do tipo de percolação. Exceto em alguns poucos casos, não há uma maneira exata de se calcular esta probabilidade crítica e muitos tipos de aproximação são utilizados como o método de Monte Carlo, grupo de renormalização e expansões em série. Na Tabela 3.1, retirada de Stauffer e Aharony [Stau,92], podemos observar os vários valores da probabilidade crítica para os varios tipos de rede no caso de percolação de sítio e de ligação, obtidos através destes diferentes métodos de cálculo. Note que a desigualdade da Eq. 3.8 é satisfeita em todos estes tipos de rede e que quanto mais complexa a rede, i.e., quanto maior o número de coordenação, menor o valor da probabilidade crítica.

Tabela 3.1 Probabilidades Críticas de ocupação de sítio e ligação para várias estruturas cristalinas.

Rede	sítio	ligação
Colméia	0.6962	0.65271
Quadrada	0.592746	0.50000
Triangular	0.500000	0.34729
Diamante	0.43	0.388
Cúbica Simples	0.3116	0.2488
bcc	0.246	0.1803
fcc	0.198	0.119
hipercubica (d=4)	0.197	0.1601
hipercubica (d=5)	0.141	0.1182
hipercubica (d=6)	0.107	0.0942
hipercubica (d=7)	0.089	0.0787

Os resultados da Tabela 3.1 foram obtidos para redes cujo tamanho tende para infinito. Veremos no Cap. 4 que efeitos de tamanho finito modificam sensivelmente

estes valores.

3.1.4 – Escala, Expoentes Críticos e Universalidade

A – A Lei de Escala

Através da definição de tamanho típico de *cluster*, Stauffer [Stau,79] propõe uma teoria de escala fenomenológica que, em última análise, relaciona diferentes quantidades sem contudo se preocupar em calcular nenhuma delas diretamente. A concepção de escala é sugerida com dois expoentes ‘livres’ (σ e τ) que devem ser ajustados aos dados experimentais. Repetimos a seguir, de maneira sucinta, a proposta de Stauffer.

O tamanho típico do *cluster* (S_ζ) é definido como o tamanho do *cluster* que dá a principal contribuição para a parte singular de $\sum_s s n_s$ ou $\sum_s s^2 n_s$ ou $\sum_s s^3 n_s$ ou etc. Em qualquer uma das diferentes definições, admite-se que o tamanho típico seja o mesmo, a menos de fatores numéricos. Pode-se mostrar que o tamanho típico do *cluster* torna-se muito grande na vizinhança da transição de fase e diverge quando $p = p_c$. Especificamente, postula-se que o comportamento no limiar de percolação seja dominado pelo *cluster* de tamanho S_ζ .

Com este postulado, pode-se chegar, facilmente, à lei de escala para o número de *clusters*. De fato, se a parte singular de S_ζ comporta-se como:

$$S_\zeta|_{sing} \propto |p - p_c|^{-1/\sigma}, \quad (p \rightarrow p_c) \quad (3.18)$$

onde σ é um expoente crítico. Todas as propriedades dos *clusters* devem depender da razão s/S_ζ , sendo s o tamanho do *cluster* com a probabilidade p , uma vez que o tamanho típico de *cluster* é admitido ser único. Assim, a razão n_s/n_{s_ζ} (ou $n_s(p)/n_s(p_c)$) ou qualquer outra razão de grandezas da percolação, podem ser determinadas como função

da razão s/S_ζ . Da Eq. 3.18, podemos ver que esta razão entre os tamanhos pode ser escrita como

$$\frac{s}{S_\zeta} \propto |(p - p_c)s^\sigma|^{1/\sigma}, \quad (3.19)$$

então,

$$v_s(p) = n_s(p)/n_s(p_c) = f(s/S_\zeta), \quad (3.20)$$

i.é.,

$$n_s(p) = n_s(p_c)f[|(p - p_c)|s^\sigma], \quad (3.21)$$

com $f(0) = 1$ pois $v_s(p_c) = 1$.

Como a única forma possível⁺ para o comportamento de $n_s(p_c)$ com s é

$$n_s(p_c) \propto s^{-\tau}, \quad (3.22)$$

então, a lei de escala para o número de *cluster* é dada por

$$n_s(p) \propto s^{-\tau} f[|(p - p_c)|s^\sigma], \quad (3.23)$$

A Eq. 3.20 mostra porque teorias deste tipo são chamadas de teoria de escala. Se fizermos o gráfico de n_s contra s para diferentes $p - p_c$ e se escalarmos o tamanho do *cluster* s dividindo-o por S_ζ e o número de *clusters* $n_s(p)$ por $n_s(p_c)$, então, nestas variáveis escaladas, as funções são independentes de $p - p_c$. De fato, nas Fig. 3.8, tirada de Stauffer [Stau,79], mostramos o gráfico $-\ln v_s$ versus z para valores subcríticos (a) e supercríticos (b) e o gráfico n_s versus s para $p = p_c$ (c). z é uma função da distância ao ponto crítico, i.é., $z = f(p - p_c)$. Repare que a lei de escala preve que os pontos para diferentes valores de p devem seguir a mesma curva, o que os gráficos mostram

⁺ Note que qualquer outra forma de decaimento mais complicado como por exemplo $n_s(p_c) \propto s^{-\tau} \exp(-s/S_0)$, mostraria que em p_c existiria um outro cluster de tamanho típico e finito S_0 . Além disto, como $S_\zeta(p = p_c)$ é infinito, teríamos mais que um tamanho típico de cluster em contradição com o postulado inicial.

ser efetivamente o caso. Os cálculos foram realizados em redes triangulares (a) e (b) e cúbica simples (c).

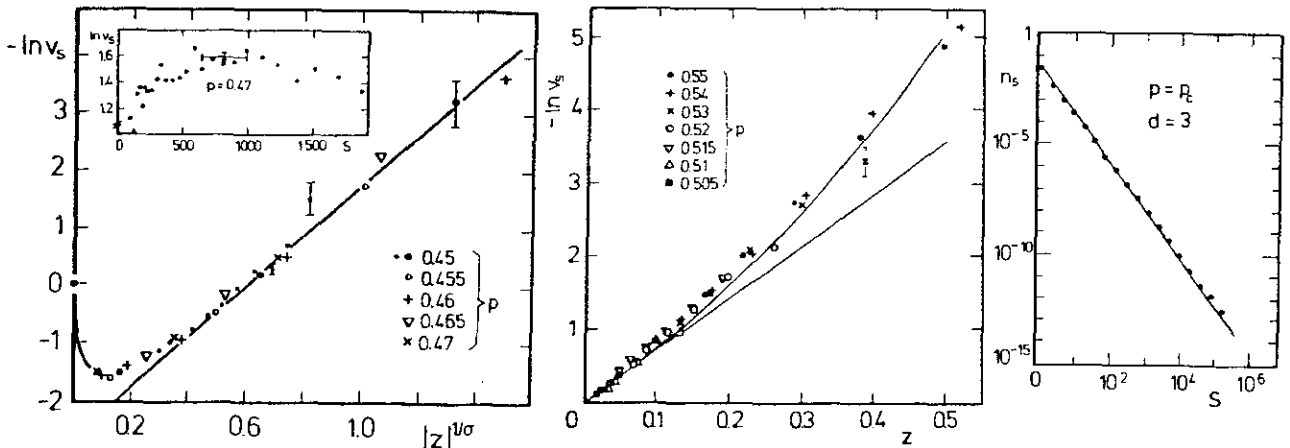


Fig. 3.8 - Testes da Lei de Escala.

B – Expoentes Críticos

Na Seção 3.1.2, vimos que a parte singular de diversas grandezas da teoria de percolação, tais como o número total de *clusters* por sítios ($\sum_s n_s$), o tamanho médio de *cluster* ($\sum_s n_s s^2$) etc, divergia ou tendia a zero com determinados expoentes. Na realidade, estes expoentes, denominados expoentes críticos, descrevem o comportamento do sistema na transição de fase percolativa e são definidos através dos momentos da distribuição de *clusters*. Então, primeiramente, vamos definir o momento de ordem k das distribuições de tamanho dos *clusters* como:

$$M_k = \sum_s n_s s^k, \tag{3.24}$$

onde, o somatório exclui o *cluster* percolante.

Usualmente, apenas uns poucos expoentes críticos são necessários à caracterização de um fenômeno crítico, por exemplo, os expoentes α , β e γ , que são definidos a partir dos primeiros momentos, i.é.,

$$M_0 \propto |p - p_c|^{2-\alpha}$$

$$M_1 \propto (p - p_c)^\beta$$

e,

$$M_2 \propto |p - p_c|^{-\gamma}.$$

Por outro lado, admitindo a lei de escala para o número de *clusters* (Eq. 3.23), e substituindo na Eq. 3.24, obtemos

$$M_k = \sum_s s^{-\tau+k} f[|(p - p_c)|s^\sigma]. \quad (3.25)$$

É uma boa aproximação substituir o somatório desta Eq. 3.25 por uma integral, para redes cujo tamanho $L \rightarrow \infty$, já que apenas grandes *clusters* são responsáveis pelas singularidades. Assim,

$$M_k \approx \int_0^\infty s^{k-\tau} f(z) \frac{dz}{z} \frac{s}{\sigma}, \quad (3.26)$$

onde $z = (p - p_c)s^\sigma$. Desta última, $s = \frac{z^{1/\sigma}}{(p - p_c)^{1/\sigma}}$ e $\frac{dz}{z} = \sigma \frac{ds}{s}$. Então,

$$M_k \approx \frac{1}{\sigma} |(p - p_c)|^{\frac{\tau-1-k}{\sigma}} \int_0^\infty z^{\frac{1+k-\tau}{\sigma}} f(z) \frac{dz}{z}. \quad (3.27)$$

A contribuição da integral é uma constante, logo,

$$M_k|_{sing} \propto |p - p_c|^{\frac{\tau-1-k}{\sigma}}. \quad (3.28)$$

Assim, por exemplo, para $k = 0$ (multiplicidade de *cluster*), $k = 1$ (probabilidade de percolação ou intensidade do percolante) e $k = 2$ (tamanho médio de *cluster*), obtemos, através das Eqs. 3.3, 3.6, 3.10 e 3.28 respectivamente, as seguintes relações entre os expoentes críticos:

$$2 - \alpha = \frac{\tau - 1}{\sigma} \quad \beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma}. \quad (3.29)$$

que são as relações de escala para os expoentes críticos.

C – Universalidade em Grandes Redes

O conceito de universalidade, primeiramente introduzido por Kadanof [Kada,76], para fenômenos críticos térmicos é, em última análise, uma classificação semi-empírica de diferentes sistemas em algumas (poucas) classes de universalidade. A universalidade assegura que os expoentes críticos e outras propriedades qualitativas (por exemplo a forma da função escala) são independentes de detalhes tais como alcance da interação ou estrutura de rede. Somente a dimensão é capaz de alterar os expoentes críticos.

Em percolação, postula-se que os expoentes críticos e a forma da função escala $f(z)$ permanecem os mesmos para diferentes redes de mesma dimensão. Mais quantitativamente, a lei de escala (Eq. 3.23) é generalizada, para diferentes redes de mesma dimensão, introduzindo-se na Eq. 3.23 fatores de escala dependentes da estrutura da rede (a e a_1). Se denotarmos por f_u a função de escala que independe da rede, a lei de escala fica

$$n_s = a_0 s^{-\tau} f_u[a_1(p - p_c)s^\sigma] \quad (3.30)$$

com $f_u(0) = 1$. Desta maneira, para uma dada distância ao ponto crítico ($p - p_c$), a forma da distribuição n_s é a mesma para as diferentes redes de mesma dimensão d ; somente as escalas para os eixos n_s e s são diferentes. Veremos no Cap.4 que efeitos de

tamanho finito podem modificar este quadro.

3.1.5 – Principais Métodos Utilizados em Percolação

A popularidade das idéias de percolação na física deve-se não só à sua grande aplicabilidade a diversos fenômenos físicos como também à sua adequação à descrição de fenômenos críticos. Uma formulação precisa desta adequação se baseia no estudo da similaridade entre a percolação e a transição de fase térmica. Tal formulação foi dada, pela primeira vez, por Kasteleyn e Fortuin [Kast,69] que estabeleceram uma relação entre grandezas termodinâmicas do modelo de Potts com q estados e grandezas correspondentes da percolação. Não discutiremos esta formulação, pois isto foge ao que nos propomos, todavia, uma importante consequência dos resultados de Kasteleyn e Fortuin é a de incorporar à percolação muitas das técnicas utilizadas em física estatística e fenômenos de transições de fase, tais como Grupo de Renormalização, Expansões em Série e Simulação de Monte - Carlo. Nesta seção, revisaremos brevemente estas técnicas.

A – Expansão em Série

Diversas quantidades da percolação, tais como o número $n_s(p)$ de *clusters*, têm sido calculadas exatamente, através do método de ‘expansão em séries’. Esta abordagem consiste em calcular exatamente o valor do número médio $n_s(p)$ de *clusters* (o que se mostra possível somente para pequenos valores de s) e, através deste, o valor de determinada grandeza A_s que, posteriormente, é extrapolada para $s \rightarrow \infty$. A visualização deste método é muito fácil. Consideremos um *cluster* de tamanho $s = 2$ em uma

rede quadrada. Tal *cluster* consiste de dois sítios ocupados, os quais, necessariamente estão circundados por 6 sítios próximos vizinhos desocupados. Além disto, ele pode ser orientado vertical ou horizontalmente na rede (Fig. 3.9 (b)). E, conseqüentemente, o número médio de *clusters* de $s = 2$ é igual a duas vezes o produto da probabilidade de termos 2 sítios ocupados na rede (p^2) e da probabilidade de termos 6 sítios desocupados $(1 - p)^6$, i.é., $n_2 = 2p^2(1 - p)^6$, onde o fator 2 vem do fato de que *clusters*, ainda que identicos a menos de uma rotação, são considerados diferentes. O número de sítios vazios que são próximos vizinhos de sítios ocupados é chamado de perímetro (t) do *cluster*, enquanto que o número de configurações de *clusters* de tamanho s e perímetro t , geométricamente diferentes (g_{st}) são denominados animais. Assim, para um *cluster* genérico de tamanho s temos:

$$n_s(p) = \sum_t g_{st} p^s (1 - p)^t. \tag{3.31}$$

Na Fig. 3.9, estão ilustradas as possíveis configurações para $s = 1, 2$ e 3. Os sítios pertencentes a *clusters* estão denotados por pontos e o perímetro por cruces. Abaixo das figuras estão os valores de n_s exatos para estes *clusters*. Nesta Fig. 3.9 podemos observar ainda que o número de possíveis configurações cresce rapidamente com o tamanho do *cluster* e o uso de computador para efetuar a contagem torna-se indispensável, mesmo para *clusters* muito pequenos.

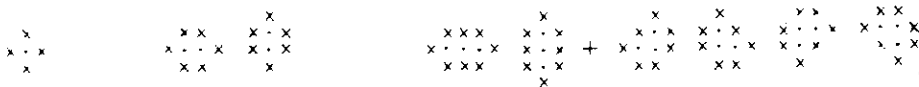


Fig. 3.9 - Animais de *clusters* com $s = 1, 2$ e 3.

Na verdade, mesmo com o auxílio do computador, n_s só pode ser determinado para s da ordem de 10. Esta limitação é, sem dúvida, a grande desvantagem deste método. Apesar disto, a maior parte das quantidades são facilmente extrapoladas, por exemplo, se uma quantidade A_s tem um valor limite finito A_∞ para $s \rightarrow \infty$, então, basta fazer o gráfico de A_s versus $1/s$ e observar se o comportamento é uma linha reta e, então

extrapola-se esta linha até o ponto $1/s = 0$. A interseção desta reta com o eixo das coordenadas dá o valor de A_∞ . Por outro lado, se a função não segue uma reta mas apresenta uma curvatura, faz-se o gráfico de A_s em função de alguma potência de $1/s$ até que, desta maneira, possa obter uma reta e, pelo procedimento anterior, obter A_∞ . Este método têm fornecido resultados tão precisos quanto os resultados obtidos através do Método de Monte Carlo.

O método de expansão em série também permite a obtenção dos expoentes críticos dos vários momentos da distribuição $M_k = \sum_s n_s(p)s^k$. Só que, neste caso, ao invés de primeiro extrapolar a curva para grandes valores de s , expande-se o momento M_k em uma série de potências de p , isto é, $\sum_s n_s(p)s^k = \sum_l a_l p^l$. Pela Eq. 3.31, vemos que n_s varia com p^s (desprezando-se potências de ordem superior). Então, através do conhecimento de n_s exato, podemos também obter os coeficientes a_l exatos, ainda que para s da ordem de 10. Desta forma, como vimos na Seção 3.1.4B, conhecendo M_k , os expoentes críticos são facilmente calculados. Este método de obtenção de expoentes críticos em termos de série de potências é usual em teorias de transição de fase [Domb,72].

B – Grupo de Renormalização

A técnica do Grupo de Renormalização (GR) de Wilson (para uma revisão veja por exemplo a Ref. [Wils,74]) foi aplicada pela primeira vez à percolação em 1975 por Harris *et al.*[Harr,75]. O GR em percolação está baseado no fato do comprimento de correlação ξ ser muito grande na região crítica, divergindo para $p = p_c$ (veja Eq. 3.13). Logo, quando $p = p_c$, todos os comprimentos finitos tais como os diâmetros dos *clusters* são muito menores que ξ de forma que o sistema parece similar, ignorando-se simples fatores de escala, e isto é verdade qualquer que seja a escala de comprimento adotada para o estudo do sistema. Desta forma, é possível “renormalizar” o sistema, tomando médias sobre regiões cujas dimensões são $\ll \xi$, sem olhar para cada ponto deste sistema

individualmente. Este processo reduz o número de graus de liberdade, de maneira que o sistema renormalizado é uma versão reescalada (e simplificada) do sistema original. Se a renormalização é feita na própria rede chama-se *GR no espaço real*. Todavia, se for feita no espaço de Fourier chama-se *GR no espaço recíproco*. Discutiremos aqui, e de maneira sucinta, apenas o primeiro caso.

As transformações de GR no espaço real substituem grupos locais de sítios e ligações por um número menor de sítios e ligações com parâmetros renormalizados, escolhidos de modo a preservar a conectividade local. Estabelece-se então, uma relação entre problemas similares com escalas de comprimento diferentes, a partir da qual se pode obter o limiar de percolação e os expoentes críticos. O GR no espaço real foi aplicado, pela primeira vez, à percolação por Young e Stinchcombe [Youn,75] e, desde então, esta técnica de renormalização tem aparecido em vários trabalhos [Essa,80].

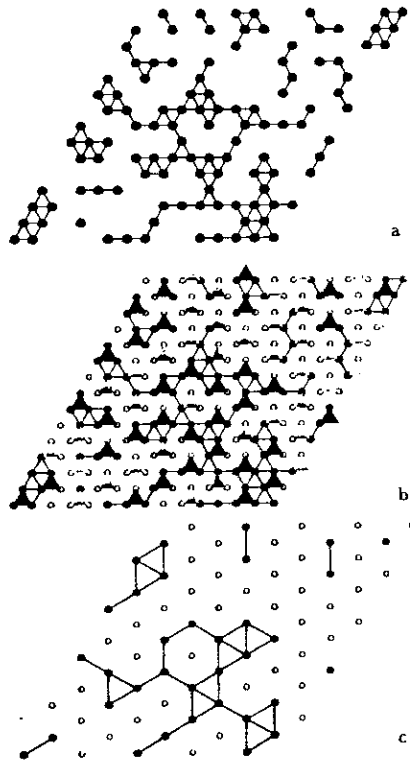


Fig. 3.10 - Ilustração do Método de GR no Espaço Real.

O método do GR pode ser melhor entendido através de um exemplo. Consideremos uma rede triangular, cujos sítios são ocupados com $p = p_c = 0.5$, como ilustra a Fig.

3.10 (a). Nesta figura, os sítios vazios não estão ilustrados. No caso da rede triangular, podemos mudar a escala da rede por um fator $b = \sqrt{3}$ simplesmente substituindo os 3 sítios da célula por um único sítio localizado no centro geométrico da célula. Os novos sítios são considerados estarem ocupados se a maioria dos sítios na célula forem ocupados, e vazios se a maioria forem desocupados. Cada grupo de três sítios na nova rede formam triângulos. Se a maioria dos sítios de um triângulo são ocupados, o triângulo é pintado de preto (Fig. 3.10 (b)). Na Fig. 3.10 (c) os triângulos pintados são trocados por círculos cheios os quais são identificados como os sítios ocupados da nova rede re-escalada. O procedimento pode ser repetido mais e mais vezes. E neste caso, a cada etapa o resultado é um novo cristal com uma nova concentração p' de sítios ocupados a qual esta relacionada com p , a concentração antes do processo de renormalização, por

$$p' = p^3 + 3p^2(1 - p), \tag{3.32}$$

i.é., para cada valor da probabilidade p da rede original, se tem um valor de p' para a rede renormalizada.

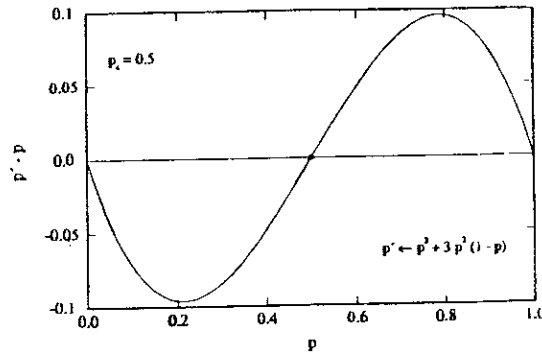


Fig. 3.11 - A variação na concentração $p' - p$ como função de p , em uma rede triangular que foi reescala por um fator $b = \sqrt{3}$.

Na Fig. 3.11, é mostrada a variação na concentração, $p' - p$, causada por um procedimento de renormalização como função da concentração de sítios ocupados. Note-se que, no ponto crítico, $p = p_c = 0.5$ e, então, pela Eq. 3.32, vemos que, também,

$p' = 0.5$. Isto é, no ponto crítico, a renormalização não troca a concentração dos sítios ocupados. O ponto crítico é um ponto fixo da renormalização.

O método do GR leva a resultados comparáveis ou melhores que os do método de expansão em série e mostra-se muito apropriado para estudar as propriedades da percolação como um todo, mas não fornece informações diretas sobre as propriedades dos *clusters*.

C – Simulação por Monte Carlo

O desenvolvimento sistemático de métodos de Monte Carlo iniciou-se aproximadamente em 1944. Desde então, tem encontrado grande aplicação em diversos ramos da ciência [Bind,79]. Em particular, na Física, o método Monte Carlo consiste basicamente em usar números aleatórios para simular os processos físicos com a premissa de que as observáveis físicas podem ser aproximadas por valores médios calculados em um grande número de corridas.

Em percolação, desde 1961 [Stau,79], vários autores têm utilizado a técnica de Monte Carlo não só no cálculo de várias grandezas macroscópicas associadas à simulação de rede, crescimento de um *cluster*, flutuações de forma para um *cluster*, etc, mas também, no cálculo de parâmetros relativos à estrutura de *clusters* tais como raio, área de superfície e o perímetro de *clusters* de um dado tamanho.

Este trabalho é um exemplo de aplicação do Método de Monte Carlo a um problema de percolação.

3.2 - O MODELO DE PERCOLAÇÃO NUCLEAR

3.2.1) Introdução

No estudo de reações de fragmentação, o resultado que mais nos interessa da teoria de percolação é a lei de escala, que dá o número de *clusters* de tamanho s (*cluster* constituído por s sítios), $n(s, p)$, em função da concentração (p por exemplo). Isto porque, como vimos, a função de escala no ponto crítico é igual a 1 e, conseqüentemente, neste caso, a lei de escala diz que a distribuição de tamanho dos *clusters* formados segue uma lei de potência, com $\tau = 2.1$ para redes infinitas tridimensionais.

No caso de redes finitas, não há um ponto crítico bem definido e a transição de percolação, isto é, a transição de um estado não-percolante para o estado em que existe um *cluster* percolante é atenuada. De fato, ao contrário de uma rede infinita em que, se $p \geq p_c$ sempre existe um *cluster* infinito, e se $p < p_c$ não existe *cluster* percolante, em redes finitas existe um intervalo de probabilidade na vizinhança de p_c , no qual o *cluster* percolante pode ser encontrado tanto para $p \geq p_c$ quanto para $p \leq p_c$. Além disto, em redes finitas existe problemas quanto à própria definição de *cluster* percolante e, em geral, ele é definido como o *cluster* que conecta os extremos da rede. Todavia, quando o sistema não tem fronteiras retas ou planas, esta definição também é problemática, principalmente em sistemas muito pequenos. Apesar destas dificuldades, modelos de percolação vêm sendo amplamente utilizados para estudar a multifragmentação nuclear que é um fenômeno que envolve no máximo algumas centenas de sítios.

Os modelos de percolação para a fragmentação nuclear se baseiam na hipótese de que a configuração de nucleons, dentro do sistema que se fragmenta, possa ser descrita por uma rede. Obviamente, esta aproximação é válida se a energia envolvida for muito maior que a energia de Fermi dos nucleons. Todavia, como veremos na Seção 3.2.3,

através do modelo de nucleação, a própria existência da rede não é condição necessária para uma boa descrição da fragmentação nuclear. Essencialmente, os cálculos de percolação tem por objetivo simular a fragmentação nuclear com o auxílio do Método de Monte Carlo. A seguir faremos uma genérica ilustração de como o modelo foi aplicado.

3.2.2) A Multifragmentação Nuclear no Contexto do Modelo de Percolação

O fato de uma teoria baseada completamente na geometria e probabilidade descrever tão bem os dados experimentais resultantes de um processo de fragmentação nuclear – que é, em última análise, um problema de teoria quântica de muitos corpos – pode ser entendido qualitativamente. De fato, sabemos que, no meio nuclear, atuam as forças nucleares atrativas de curto alcance e as forças repulsivas de longo alcance. Como resultado de uma reação de fragmentação o sistema nuclear é comprimido e se esquentado. Consequentemente ele se expande. Se a expansão for o suficiente, um dado nucleon não necessariamente interage com seus vizinhos por força nucleares. O curto alcance da interação nuclear implica que somente os mais próximos vizinhos interagem fortemente e, então, aparecerão ‘rachaduras’. Tais rachaduras tendem a crescer com a expansão, dando formação aos *clusters*. Esta produção de *cluster* é um problema típico que pode ser tratado apropriadamente pelos métodos de percolação.

Por exemplo, nos modelos baseados em percolação de sítio, onde o parâmetro (a probabilidade) de ocupação de sítio p pode ser diretamente relacionado com a densidade de número ρ do sistema através de:

$$\rho = \frac{p}{d^3} \quad (3.33)$$

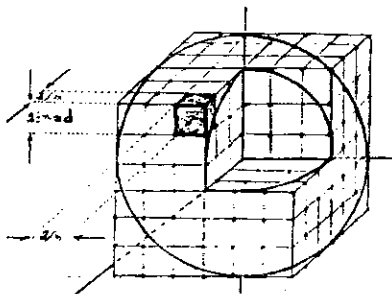
sendo d o parâmetro de rede.

A descrição da produção de fragmentos em reações induzidas por prótons relativísticos, através do modelo de percolação de sítio, pode ser resumida da seguinte

maneira:

O sistema nuclear (alvo mais projétil) é representado por A_0 sítios constituindo uma rede. Em geral, por simplicidade, uma rede cúbica simples é escolhida, mas outras redes (*fcc* por exemplo) também podem ser utilizadas. Operacionalmente esta rede está inscrita numa esfera de raio R_0 (Fig.3.12), tal que contenha aproximadamente o mesmo número de nucleons do sistema. A variação do número de sítios com o quadrado de R_0 (em unidades de d^2) é apresentada na Tabela 3.2 para as redes *sc* e *fcc*. A seguir, sorteiam-se, aleatoriamente, os $A_0(1 - p)$ sítios desta rede que deverão ser desocupados e estabelece-se uma regra para decidir quais dos sítios (que permaneceram na rede) se encontram conectados entre si. Os sítios vazios estão associados à emissão de partículas rápidas pelo alvo, devido a interação com o projétil incidente. Da mesma maneira, o número de prótons emitidos é admitido ser uma função do número de prótons do projétil mais alvo Z_0 e é dado por $Z_0(1 - p)$.

Tabela 3.2 - A_0 nas redes SC e FCC



R_0^2 (in units of e^2)	SC	FCC
1	7	13
2	19	19
3	27	43
4	33	55
5	57	79
6	75	87
7	81	135
8	93	141
9	123	177
10	147	201

Fig. 3.12 - Rede SC inscrita na esfera de raio R_0 .

Se os sítios ocupados são próximos vizinhos, eles interagem fortemente e, então, estarão conectados e formarão um *cluster*, de tamanho igual ao número de sítios ocupados que o constituem. Aqueles sítios que estiverem ocupados, mas não possuírem próximos vizinhos, constituirão *clusters* isolados.

Então, com a probabilidade de ocupação p , podemos simular a fragmentação nuclear no contexto da teoria de percolação sem nenhuma informação específica nuclear. De maneira análoga, no caso da percolação de ligação, através da probabilidade de quebra

de ligação $(1 - p_b)$, podemos, também, tratar a fragmentação nuclear, só que, neste caso, nenhum nucleon é arrancado do sistema mas as ligações entre os A_0 sítios é que são quebradas.

Após a formação dos *clusters*, cargas são, então, atribuídas randomicamente aos nucleons de cada *cluster*, de maneira que a razão carga-massa de cada *cluster* seja a mesma que a do sistema inicial.

Ao terminar este estágio da simulação, os *clusters* que representam os fragmentos já têm número bariônico e carga bem definidos e, a distribuição de *clusters*, automaticamente, satisfaz a lei de conservação de número bariônico e carga. Isto significa que a partição está determinada, exceto pela condição de que deve também, satisfazer a conservação de energia total.

Nas próximas seções discutiremos como a conservação de energia pode ser introduzida no contexto da percolação e como tratar o problema de configurações exóticas num quadro de percolação - evaporação, bem como introduzir outras quantidades físicas tais como o parâmetro de impacto em modelos percolativos. Antes porém, apresentaremos o modelo de nucleação.

3.2.3 – O Modelo de Nucleação

Discutiremos, agora, de maneira sucinta, o modelo de nucleação o qual é, em completa analogia com o modelo de percolação, um modelo baseado em probabilidade e geometria. A principal diferença é que, no modelo de nucleação, cada nucleon é considerado estar envolvido por uma esfera efetiva de interação cujo raio R_{int} pode assumir valores que vão desde o raio de esfera dura nuclear, passa por um valor “crítico” e vai até um valor limite dado pelo raio do sistema. Além disto, em nucleação, os sítios não têm posições rígidas determinadas por uma rede circunscrita em uma esfera de raio R_0 ,

mas ocupam, aleatoriamente, qualquer lugar dentro desta esfera.

Na realidade, o modelo de nucleação é um caso típico de percolação no contínuo com critério de conexão dado pelo raio efetivo de interação R_{int} , i.é., se a interdistância entre dois nucleons é menor (maior) que $2R_{int}$ estes nucleons estão conectados (desconectados). Todas as grandezas estudadas na percolação usual podem ser definidas na nucleação. Em particular, o número médio $n(R_{int})$ de *clusters* finitos (normalizado por sítio) pode ser definido como

$$n(R_{int}) = \sum_s n_s(R_{int}). \quad (3.34)$$

onde n_s é o número de *clusters* de tamanho s por sítio do sistema. A dependência de $n(R_{int})$ com R_{int} revela a variação do número médio de *clusters* finitos com o alcance da interação.

Tal como nos cálculos percolativos, em nucleação, o comportamento de $n(R_{int})$ com o tamanho s do cluster não é necessariamente monotônico. Todavia, grandes *clusters* não podem ser muito numerosos e, conseqüentemente, é de se esperar que $n(R_{int})$ tenda a zero para $s \rightarrow \infty$. A Fig. 3.13 procura ilustrar a dependência de $n(R_{int})$ com s . Pode-se observar nesta figura que para pequenos valores de R_{int} o decaimento de $n(R_{int})$ com s é exponencial:

$$n_s \propto e^{[-s/S_0]^\sigma} \quad (3.35)$$

onde S_0 é um *cluster* de tamanho característico. Além disto, observa-se também que para um certo valor R_{int}^c , a distribuição $n(R_{int}^c)$ decresce segundo uma lei de potência:

$$n_s(R_{int}^c) \propto s^{-\tau} \quad (3.36)$$

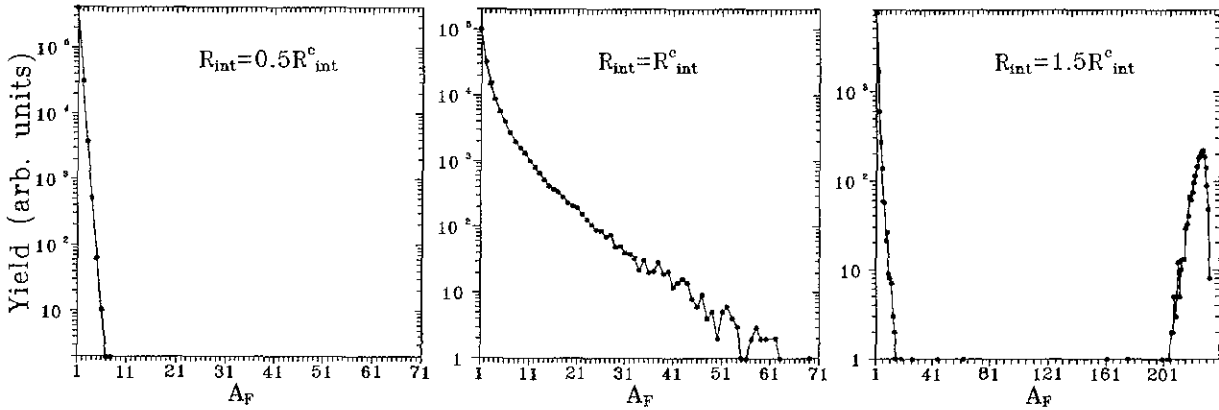


Fig. 3.13 - $n(R_{int})$ versus s , para três valores de R_{int} .

Fisicamente, tal como em percolação, a Eq.3.36 nos diz que para R_{int}^c não há um *cluster* de tamanho característico no sistema, mas que existem *clusters* de qualquer tamanho. A ausência de um tamanho característico é uma situação típica de ponto crítico. Para valores de R_{int} acima de R_{int}^c existe um *cluster* ‘infinito’ (que conecta todo o sistema). Na verdade uma transição de fase ocorre para R_{int}^c . O sistema passa de uma fase em que o *cluster* percolante não está presente para uma fase em que aparece tal *cluster* infinito.

Na realidade, para $R_{int} \rightarrow R_{int}^c$ e no limite de $s \rightarrow \infty$ a seguinte relação de escala pode ser obtida [Herm,86]:

$$n_s(R_{int}) = s^{-\tau} f[(R_{int} - R_{int}^c)s^\sigma]. \quad (3.37)$$

Isto significa que a parte singular dos momentos $M_k(R_{int}) = \sum_s' s^k n_s(R_{int})$ tem, em completa analogia com o caso da percolação, o seguinte comportamento:

$$M_k(R_{int})|_{sing} \propto |R_{int} - R_{int}^c|^{(\tau-k-1)/\sigma} \quad (3.38)$$

Do ponto de vista computacional, o procedimento também é análogo ao dos modelos percolativos. Usando o método de Monte Carlo, sorteia-se a posição de todos os nucleons dentro de uma esfera de raio R_0 , correspondente ao volume expandido ($V = \alpha V_0$). Para se levar em conta os efeitos de superfície nuclear, o módulo de cada vetor posição é escolhido aleatoriamente segundo uma distribuição razoável (que tomamos como sendo a distribuição trapezoidal) para a densidade nuclear e as cargas são atribuídas ao acaso a cada nucleon, de acordo com a razão carga - massa do sistema inicial.

3.2.4 – O Parâmetro de Impacto

Nos cálculos acima, não levamos em conta a dependência da reação com o parâmetro de impacto b . Isto quer dizer que aqueles cálculos se aplicam exclusivamente para colisões centrais. Porém, os dados experimentais resultam dos mais variados tipos de colisões, nas quais, em geral, o parâmetro de impacto é diferente de zero.

No caso da percolação nuclear, a dependência da concentração p com o parâmetro de impacto é um problema em aberto e tem sido estudada por diversos autores.

Bauer *et al.* [Baue,86a] trabalhando com a percolação de ligação para simular colisões $p + N$ propuseram a seguinte relação entre p_b (probabilidade de quebra de ligação) e b :

$$p_b = \frac{p_0}{1 + e^{b-R/a}}, \quad (3.39)$$

onde p_0 é o parâmetro livre do modelo, R o raio do núcleo alvo e, a é tomado como $0.5 fm$. Santiago e Chung [Sant,90] mostraram que se se trabalha com percolação de sítio é uma boa aproximação usar a seguinte relação:

$$p_s = 1 - \frac{p'_0}{1 + e^{b-R/a}}, \quad (3.40)$$

onde p'_0 é um parâmetro e, R e a assumem os mesmos valores que os da Eq.3.39. Note-se que, em geral, $p_s \neq 1 - p_b$.

O parâmetro de impacto b deve ser sorteado segundo uma distribuição triangular para se levar em conta o fato de que as colisões periféricas são mais prováveis.

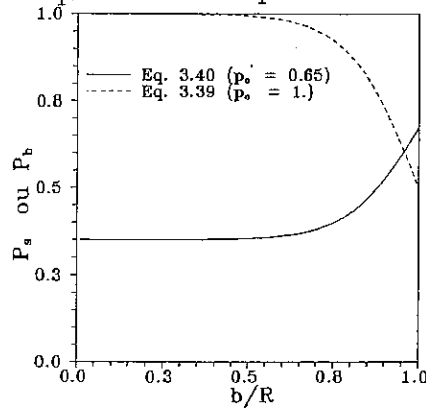


Fig. 3.14 - Dependência da concentração com o parâmetro de impacto.

Todas estas dependências da concentração com o b refletem o fato de que quanto maior p (ou p_b), maior o número de sítios ocupados (ou o número de ligações presentes) e, esta situação deve corresponder a colisões mais periféricas, isto é, grandes parâmetros de impacto. Já as colisões centrais correspondem a p (ou p_b) menores. De fato, como pode ser visto na Fig. 3.14 este comportamento para os valores extremos de b ($b = R$ e $b = 0$) é aproximadamente descrito pelas Eqs. 3.39 e 3.40.

3.2.5 – A Expansão Coulombiana e Os Espectros de Energia Cinética

Após a quebra do sistema nuclear, a interação entre os fragmentos é basicamente de origem Coulombiana. A repulsão entre estes fragmentos irá iniciar um processo de expansão (expansão Coulombiana) que transformará praticamente toda a energia Coulombiana em energia cinética. O estudo dos espectros de energia cinética dos fragmentos pode fornecer importantes informações sobre a dinâmica da fragmentação e sobre a localização em que os fragmentos são produzidos dentro do volume nuclear que

se fragmenta.

A descrição dinâmica do processo de expansão pode ser feita em termos da Hamiltoniana clássica do sistema a qual é dada por:

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} \frac{Z_i Z_j e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (3.41)$$

onde m_i , $r_{i,j}$ e P_i são, respectivamente, a massa, a posição e o momentum do $i(j)$ -ésimo fragmento. As posições iniciais dos fragmentos já estão devidamente fixadas por suas posições na rede e são uma função do parâmetro de rede d . Na realidade, admitimos que toda a carga e toda a massa de cada *cluster* está concentrada no seu CM. Os momentos iniciais foram obtidos segundo uma distribuição de Maxwell-Boltzmann na temperatura inicial de cada partição. As equações de movimento são, então, obtidas da Eq.3.41 e integradas numericamente [Chun,87]. O processo de expansão prossegue até que a energia cinética dos fragmentos deixe de sofrer alterações apreciáveis. Ajustando o parâmetro de rede d aos dados experimentais, podemos obter uma estimativa para a densidade de quebra (Eq. 3.33).

3.2.6 – O Decaimento Secundário dos *Clusters*

A – Conservação de Energia

Vimos que, através da percolação ou da nucleação, podemos gerar partições, com as mais diversas multiplicidades, cujos *clusters*, a princípio, poderiam ser identificados como fragmentos. Todavia, além de conservar carga e número barionico, estas partições devem ainda, satisfazer a conservação de energia total. A fim de podermos incluir a conservação de energia em nossos cálculos de percolação, temos que obter uma depen-

dencia funcional entre o parâmetro p e a energia de excitação por partícula ϵ^* (ou a temperatura). Tal relação deve depender da energia total depositada no sistema durante a colisão. Contudo, a energia total depositada no sistema está relacionada com a dinâmica da reação e, em última análise, com a própria interação nucleon-nucleon durante o processo colisional. Assim sendo, esta relação é extremamente difícil de ser obtida em bases puramente teóricas. Então, por simplicidade, utilizamos o *ansatz* de Campi e Desbois [Camp,84]:

$$\epsilon^* = \epsilon_0 \left(\frac{1-p}{p} \right) \quad (3.42)$$

que relaciona a energia de excitação por nucleon ϵ^* com a probabilidade de ocupação p . Implicitamente, nesta relação, admite-se que a ejeção de um nucleon provoca uma excitação de $\epsilon_0 = 8$ MeV no núcleo residual. A Eq.3.42 reflete a previsão teórica de que quanto menor a probabilidade de ocupação, maior deve ser o estrago na rede e, consequentemente, maior a energia depositada no alvo pelo projétil. Uma vez determinada a energia de excitação, a energia total pode ser escrita como:

$$E_{tot} = E_0^* + E^{fund}, \quad (3.43)$$

onde $E_0^* = pA_0\epsilon^*$ é a energia de excitação total do sistema que contém pA_0 sítios ocupados (nucleons) e E^{fund} é a energia do estado fundamental do sistema.

Podemos ainda, reescrever a energia total como a soma das energias de cada fragmento ($E_{A,Z}$) mais a energia Coulombiana da esfera homogênea carregada com a carga total do sistema fragmentante [Bond,85a]:

$$E_0^* + E^{fund} = \frac{3Z_0^2 e^2}{5R_F} + \sum_{A,Z} N_{A,Z} E_{A,Z}, \quad (3.44)$$

onde $N_{A,Z}$ é o número de *clusters* de tamanho A e carga Z , $R_F = (3V_F/4\pi)^{1/3}$ é o

raio da esfera homogênea. A energia $E_{A,Z}$ de cada *cluster* é obtida via modelo da gota líquida térmica e, então, carrega dependência explícita na temperatura (cf. seção 1.2.2).

Então, resolvendo a Eq. 3.44, podemos determinar univocamente a temperatura da partição tal que a energia total seja conservada. Se a solução desta equação for negativa, a partição é abandonada e nova partição é sorteada, repetindo-se em seguida, todo o processo.

B – A Evaporação

Os *clusters*, imediatamente após o processo de fragmentação do sistema nuclear, em geral, encontram-se em estados fortemente excitados. Isto quer dizer que eles devem ser vistos como pré-fragmentos e não como os fragmentos que são detectados em seus estados finais. Precisamos, então, descrever o mecanismo através do qual os fragmentos perderão a energia em excesso via evaporação de nucleons ou agregado de nucleons. A fim de poder aplicar a teoria de evaporação nuclear ao problema dos fragmentos quentes, admitimos que, logo após a quebra, os fragmentos atingem o equilíbrio termodinâmico.

A teoria de evaporação nuclear já é bem estabelecida (para uma revisão veja a Ref.[Eric,60]) e, os trabalhos mais recentes são, em sua maioria, generalizações da teoria estatística de Weisskopf [Weis,37]. Todavia, a título de revisão, descreveremos, de uma maneira sucinta, o processo da evaporação, tal como tem sido utilizado no estudo do decaimento secundário dos *clusters* quentes ([Sant,89a],[Sant,89b]).

Weisskopf obteve, a partir da hipótese de balanço detalhado e usando considerações de espaço de fase, a probabilidade por unidade de tempo, de um núcleo A emitir uma partícula j , com energia cinética compreendida entre E e $E + dE$ como:

$$P_j(E)dE = \gamma_j \sigma_j E e^{(S_j - S_i)} dE \quad (3.45)$$

onde $\gamma_j = g_j m_j / \pi^2 \hbar^3$ e $\sigma_j = \sigma_0 (1 - V_j/E) \theta(E - V_j)$, com σ_j denotando a seção de choque da reação inversa, θ a função degrau, $S_{f(i)}$ a entropia do núcleo final (inicial), V_j a barreira Coulombiana corrigida para a temperatura nuclear e, g_j e m_j são a multiplicidade de spin e a massa da partícula emitida, respectivamente.

A entropia dos *clusters* pode ser calculada com o auxílio do modelo da gota líquida térmica, *i.é.*,

$$S = \frac{2T}{\epsilon_0} A + 5\beta_0 A^{2/3} \left(\frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2} \right)^{1/4} \frac{T}{T_c^2 + T^2} \quad (3.46)$$

onde T é a temperatura do *cluster* e os demais termos têm o significado usual.

Se escrevermos a entropia em termos da energia cinética E_j , podemos, então, integrar a Eq.3.45 sobre todo o intervalo de energia E e obter a probabilidade total de emissão de uma partícula por unidade de tempo. Desta maneira, acoplando as equações de decaimento com as equações de movimento da expansão Coulombiana obtemos os fragmentos em seus estados finais de excitação (núcleo frio) e de energia cinética. Contudo, como a escala de tempo do processo de evaporação é muito maior que a escala de tempo da expansão Coulombiana, nós, por simplicidade, a exemplo de Barz *et al.* [Barz,86], admitimos que o processo de evaporação só se inicia após a completa realização da expansão Coulombiana. E, neste caso, o tempo pode ser ignorado, de modo que podemos introduzir as probabilidades relativas de emissão de duas partículas, 1 e 2. Com efeito, seguindo o procedimento proposto por Dostrovsky *et al.* [Dost,58], obtemos:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma_2 T_2^2}{\gamma_1 T_1^2} e^{[S_2 - S_1]}. \quad (3.47)$$

Na Eq. 3.47, S_k e T_k são, respectivamente, o valor máximo que a entropia e a temperatura do núcleo residual pode assumir, após evaporar a partícula k .

Estas probabilidades relativas foram, então, calculadas para neutrons, prótons, deuteron, triton, ^3He e partículas α . A probabilidade de evaporação de *clusters* mais pesados não foi levada em conta, uma vez que seu valor é desprezível frente à probabi-

lidade das partículas leves, listadas acima.

A partícula a ser evaporada é, então, aleatoriamente sorteada, segundo às probabilidades relativas acima. Após a evaporação, o sistema residual é admitido entrar em equilíbrio térmico e, suas respectivas quantidades termodinâmicas (temperatura, entropia, etc) podem ser recalculadas. Uma nova partícula é sorteada e todo o processo se repete até que o *cluster* remanescente não possa mais evaporar.

3.3 - RESULTADOS OBTIDOS COM O MODELO DE PERCOLAÇÃO – EVAPORAÇÃO

Utilizamos o procedimento descrito na Seção 3.2 para investigar o comportamento da distribuição de massa e dos espectros de energia cinética, resultantes de processos de fragmentação nuclear. Usando a percolação (de sítio) convencional em rede cúbica simples para simular a fragmentação nuclear, determinamos a distribuição de massa com e sem a evaporação de partículas, para vários valores da probabilidade de ocupação e , estudamos a dependência da distribuição de massa com o parâmetro de impacto. Com as mesmas partições que reproduziram o espectro de massa experimental, calculamos o espectro de energia cinética do ^{12}C e ^{16}O , procurando reproduzir os dados experimentais de Hirsch *et al.*, referentes a colisões $p+^{87}\text{Kr}$ a energias de 80 a 350 GeV. Nestes cálculos, por simplicidade, adotamos a aproximação de núcleos simétricos.

Para simular a fragmentação de um sistema com $A_0 = 81$ sítios, o qual é o mais apropriado para a reação acima (cf. Tabela 3.2), o método de Monte Carlo foi usado para gerar as partições necessárias.

Os resultados, naturalmente, dependem da probabilidade de ocupação p . De fato, podemos facilmente nos convencer de que, para valores pequenos de p , a maioria dos

constituintes (sítios) ficarão isolados ou se agregarão em *clusters* pequenos, resultando portanto, em uma pequena multiplicidade de *clusters* de tamanho médio ou intermediário (que passamos a denotar por $\langle M \rangle$), enquanto que, para valores grandes de p , encontraremos grandes *clusters* com baixa multiplicidade. Todavia, existe um valor de p que maximiza $\langle M \rangle$, e este valor, que denotaremos por p_c , é o valor que temos sugerido ([Sant,90], [Chao,91], [Sant,93] e [Sant,94]) como probabilidade ‘crítica’ para a descrição de eventos de fragmentação nuclear. Na verdade, em sistemas finitos, outros critérios de criticalidade são possíveis e, no Cap.4 discutiremos com maior detalhe esta questão.

Uma vez definida a probabilidade ‘crítica’, levamos em conta a dependência do parâmetro de impacto b da seguinte forma:

Sorteamos b segundo uma distribuição triangular e atribuímos um valor arbitrário para o parâmetro p'_0 da Eq. 3.40. Com isso, a Eq. 3.40 nos fornece o valor de p que, então, usamos para calcular todas as quantidades de interesse, tais como: multiplicidade de fragmentos de tamanho intermediário, multiplicidade total de fragmentos, etc. Repetimos o procedimento para um grande número de valores de b , mantendo-se, contudo, o mesmo p'_0 . No final, fizemos a média sobre todas as corridas, obtendo os valores médios das multiplicidades, a distribuição de massa dos fragmentos e, consequentemente, o expoente aparente τ .

O próximo passo é repetir o processo variando o parâmetro p'_0 . Com isto, obtemos que, para cada valor de p'_0 , encontramos um valor médio para a probabilidade p . Evidentemente, haverá um certo valor de p'_0 , para o qual a média em p coincidirá com a probabilidade “crítica” p_c .

Tal como discutido na Seção 3.2.6, obrigamos também a todas as partições a conservarem energia e levamos em conta o decaimento secundário dos *clusters* quentes.

Na Fig. 3.15 a multiplicidade média $\langle M \rangle$ de fragmentos com $A \geq 4$ (painel *a*) e o expoente aparente τ (painel *b*) são mostrados como uma função da probabilidade

média de ocupação p . Três situações são consideradas: (i) sem evaporação e somente colisões centrais (curva pontilhada), (ii) sem evaporação mas com colisões não-centrais (curva tracejada) e, (iii) com evaporação e colisões não-centrais (linha sólida).

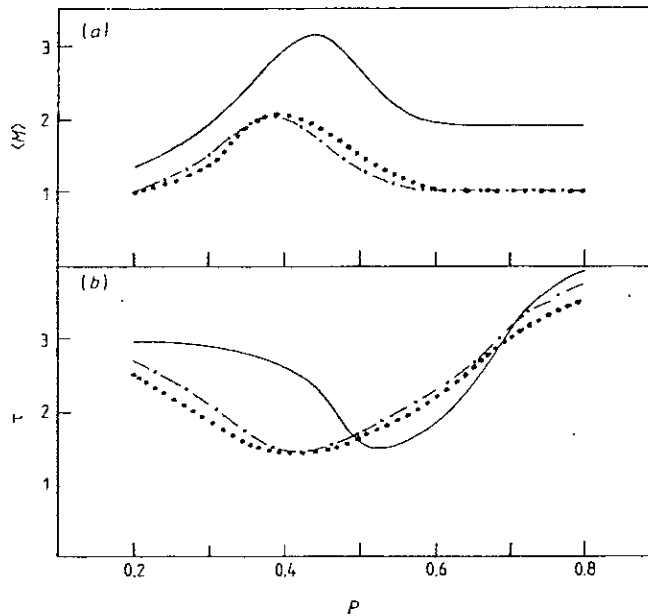


Fig. 3.15 - $\langle M \rangle$ e τ versus p .

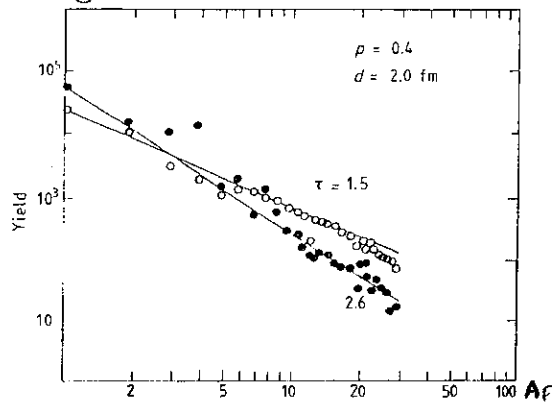


Fig. 3.16 - Distribuição de Massa.

Observe que o comportamento qualitativo não muda de uma situação para outra. Na verdade $\langle M \rangle$ cresce com p , atinge um máximo e depois decresce assintoticamente para 1 (sem evaporação) ou 2 (com evaporação). Como era de se esperar, o decaimento secundário aumenta o valor de $\langle M \rangle$. Comportamento oposto é exibido por τ , que

decrece à medida que p aumenta, atinge um mínimo ($\approx 1,5$) para diferentes valores de p e, então, aumenta lentamente com p . Note-se ainda que a dependência da probabilidade de ocupação com o parâmetro de impacto causa um deslocamento para a direita na curva de τ .

A distribuição de massa para $p = 0.4$ e $d = 2,0 \text{ fm}$ é mostrado na Fig. 3.16, para duas situações: os fragmentos primordiais (i.é., sem evaporação) e os fragmentos após a evaporação de partículas leves, os quais estão representados na figura, respectivamente, pelos círculos vazios e cheios.

Como se vê na figura, o expoente aparente τ muda de $\tau \approx 1,5$ (distribuição primordial) para $\tau \approx 2,6$ (após a evaporação).

Tabela 3.3 τ e $\langle M \rangle$ para $A_0 = 57, 81$ e 123 .

	SP			PEC			PEV		
A_0	57.0	81.0	123.0	57.0	81.0	123.0	57.0	81.0	123.0
τ	1.9	1.7	1.5	1.9	1.8	2.0	2.1	2.6	2.6
$\langle M \rangle$	1.5	1.5	2.5	1.5	1.5	1.7	2.4	3.0	3.8

Na Tabela 3.3 estão resumidos os valores de $\langle M \rangle$ e τ para diversos tamanhos do sistema inicial, i.é., $A_0 = 57, 81$ e 123 , nos casos de percolação usual sem evaporação (SP), percolação mais conservação de energia (PEC) e percolação + evaporação (PEV). Estes resultados podem ser comparados aos resultados experimentais: $\tau \approx 2,0$ para $p + {}^{58}Ni$ [Andr,89], e $\tau \approx 2,6$ para $p + {}^{87}Kr$ e $p + {}^{135}Xe$ [Hirs,84].

Os espectros de energia podem fornecer informações sobre a dinâmica do processo de fragmentação nuclear.

Na Fig. 3.17, os espectros de energia cinética dos fragmentos de ${}^{12}C$ (a) e ${}^{16}O$ (b) (linhas tracejadas) estão comparados com os resultados experimentais (linhas sólidas), para $p = 0.4$, ϵ_0^* e, dois valores para o parâmetro de rede, $d = 2,0 \text{ fm}$, que corresponde

a uma densidade de quebra de $\rho \approx 0.05 fm^{-3}$ e, $d = 2,5 fm$ que dá $\rho \approx 0.025 fm^{-3}$.

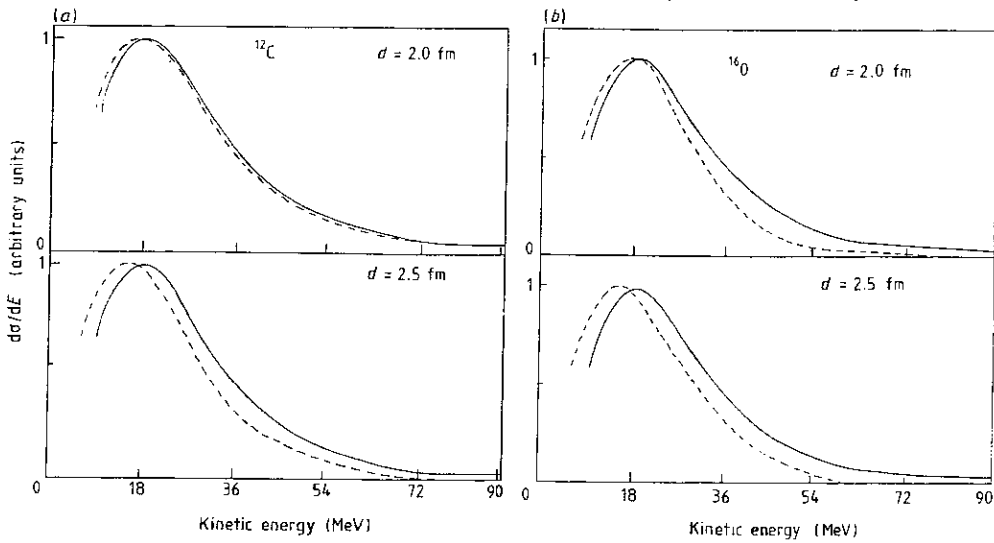


Fig. 3.17 - Espectros de energia do ^{12}C e ^{16}O .

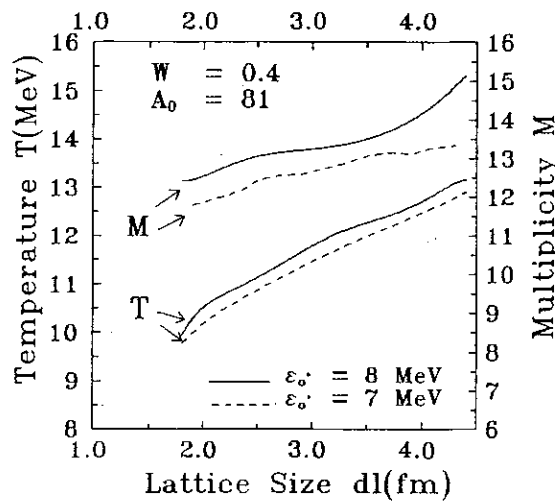


Fig. 3.18 - Temperatura e Multiplicidade Total versus d .

Observe que os espectros de energia dependem fortemente do parâmetro de rede uma vez que grandes valores de d (os fragmentos estão mais afastados), diminuem a energia Coulombiana disponível na hora da quebra. O parâmetro de rede está limitado, na simulação da fragmentação nuclear por percolação em rede cúbica simples, aos valores $d_i = 1,88 fm^{-3}$ e $d_f = 4,1 fm^{-3}$. Estes valores correspondem a densidades de $\rho_i = \rho_0$ e $\rho_i = 0,1\rho_0$, respectivamente, e, como já mencionamos, vêm sendo adotados como

valores limites para a densidade de quebra.

Na Fig. 3.18, para o sistema $A_0 = 81$ e $p = 0.4$, ilustramos a dependência da temperatura e da multiplicidade total com d , para dois valores de ϵ_0^* . As linhas sólidas correspondem a $\epsilon_0^* = 8 \text{ MeV}$ e as tracejadas a $\epsilon_0^* = 7 \text{ MeV}$. Note-se que, como consequência da conservação de energia (Eq. 3.44), tanto a multiplicidade total quanto a temperatura crescem com d . De fato, como E_{total} é a mesma em cada configuração, um decréscimo na energia Coulombiana provoca um aumento na energia térmica.

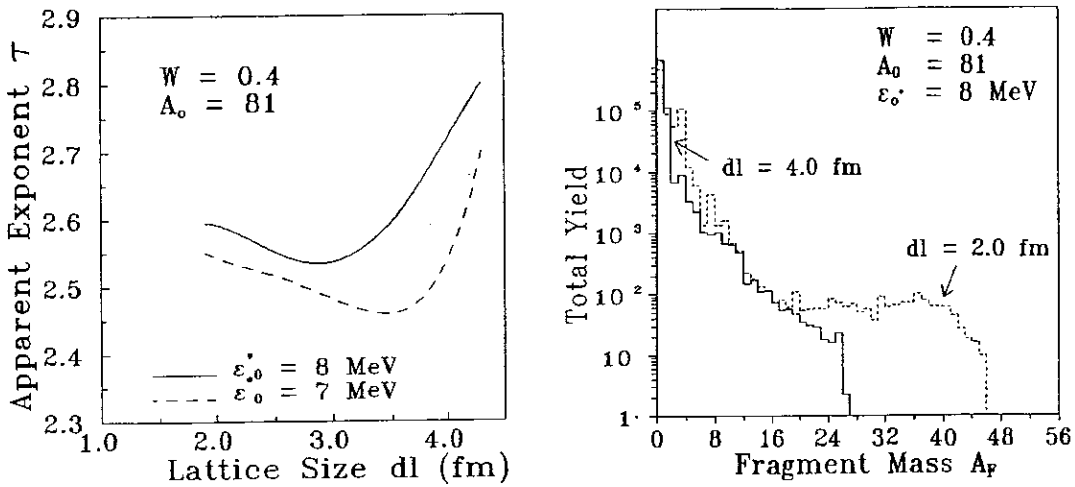


Fig. 3.19 - Expoente Aparente versus d e Distribuição de Massa.

Na Fig. 3.19(a), o expoente aparente τ é mostrado como função de d e na Fig. 3.19(b) a distribuição de massa de fragmentos ilustrada para $d = 2,0 \text{ fm}$ (linha sólida) e $d = 4,0 \text{ fm}$ (linha tracejada). Observe que, para o maior valor de d , o rendimento de fragmentos pesados vai rapidamente a zero devido a temperatura (maior quantidade de partículas são evaporadas).

3.4 – O Modelo de Percolação Tetraédrica

O Modelo de Percolação Tetraédrica de Chao e Chung [Chao,91] trata a formação de fragmentos através da teoria de percolação de sítio em rede *fcc*. A diferença essencial entre este modelo e os de percolação usual está na *clusterização*, i.é., no critério de conexão de sítios. Na verdade, na percolação tetraédrica, cada partícula de um *cluster* está conectada a outras três partículas, de maneira que a figura geométrica resultante seja um tetraédro. Além disto, *clusters* com sítios em comum são combinados entre si, formando um novo *cluster*. Foi mostrado em [Chao,91] que a conexão de *clusters* com pelo menos dois sítios em comum conduz a melhores resultados, se comparados a dados experimentais da fragmentação nuclear. Todavia, como já havíamos mencionado, o modelo de percolação tetraédrica não é capaz de gerar *clusters* com $s = 2, 3, 5$ e 7 . A fim de corrigir esta falha, pelo menos com relação aos dois elementos mais abundantes em uma reação de fragmentação, Santiago e Chung [Sant,93] sugeriram o acoplamento da percolação usual ao modelo da Ref. [Chao,91] a qual seria aplicada aos nucleons que haviam sido deixados fora dos *clusters* pela percolação tetraédrica. A versão melhorada deste modelo foi denominada de modelo de percolação tetraédrica modificado.

O procedimento de cálculo é bastante simples. Consideramos uma rede *fcc* inscrita em uma esfera contendo 87(135) sítios, a qual é apropriada para simular as reações $p + {}^{79}Kr$ ($p + {}^{132}Xe$ a $80 - 350 GeV$ [Hirs,84], sem graus de liberdade de isospin. Como os resultados experimentais são provenientes dos mais variados tipos de colisão, admitimos que a probabilidade de ocupação de sítio depende do parâmetro de impacto b , e esta dependência foi considerada ter a mesma forma funcional que o número de colisões primárias que o próton incidente quando atravessa o núcleo alvo, i.é.,

$$p(b) = 1 - p_0 \sqrt{1 - (b/R)^2} \quad (3.48)$$

onde R é o raio do núcleo alvo e p_0 um parâmetro que foi escolhido de maneira que a média sobre todos os $p(b)$ seja igual a probabilidade crítica p_c do modelo de percolação tetraédrica.

Após a quebra, forças Coulombianas levam os *clusters* a se repelirem mutuamente. As condições iniciais da expansão Coulombiana [Chun,87] foram: a posição \vec{r}_i foi tomada como a posição do centro de massa do *cluster* i e, o momento \vec{p}_i foi obtido admitindo-se uma distribuição de Woods-Saxon para a densidade de número ρ , tal que

$$|\vec{p}_i| = \hbar \left(\frac{3}{2} \pi^2 \rho \right)^{1/3} \quad (3.49)$$

e as direções foram escolhidas aleatoriamente. Não se introduziu temperatura para ser consistente com uma descrição puramente geométrica - probabilística para a fragmentação nuclear. Todavia, a percolação tetraédrica em rede *fcc* estima uma temperatura de quebra de $5MeV$ para a fragmentação nuclear [Faul,89], enquanto que a percolação usual em rede cúbica simples necessita de $T = 11MeV$ para reproduzir os dados experimentais [Sant,89a].

A seguir, são apresentados nossos principais resultados via método de Monte Carlo, envolvendo uma estatística de 2.500 corridas.

Na Fig. 3.20, $\langle M \rangle$ e τ são mostrados como uma função da probabilidade de ocupação p . Os resultados são referentes aos modelos de percolação tetraédrica (*fcc*), de percolação tetraédrica modificado (*fcc modified*) e percolação em rede cúbica simples (*sc*). Dois sistemas foram considerados: $A_0 = 81$ (a) e $A_0 = 135$ (b). Note-se que a modificação não altera a curva de $\langle M \rangle$ e que há uma grande diferença entre os resultados da percolação *sc* e *fcc*.

O rendimento de fragmentos leves e de massa intermediária para $A_0 = 87$ e $A_0 = 135$, no caso dos modelos *sc* (círculos abertos) e *fcc modified* (triângulos) estão mostrados na Fig. 3.21. Para comparação, os resultados experimentais da Ref. [Hirs,84] estão incluídos também (círculos cheios). As curvas correspondem ao ajuste dos dados experimentais por uma lei de potência. Note-se que os resultados da percolação *fcc modified* estão mais próximos dos dados experimentais que a percolação *sc*. Todos

os rendimentos foram normalizados a $A = 1$.

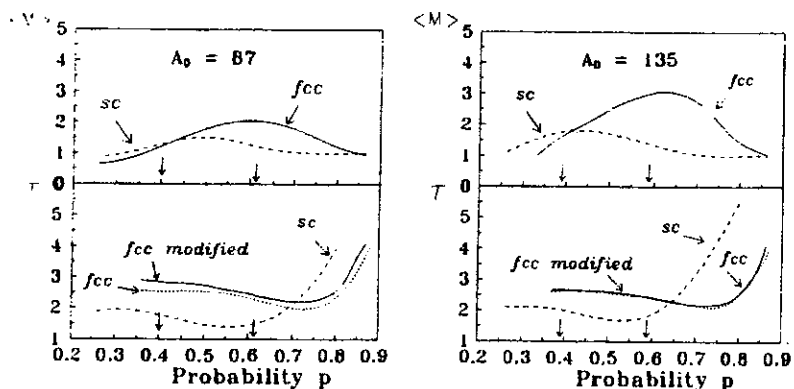


Fig. 3.20 - $\langle M \rangle$ e τ versus p .

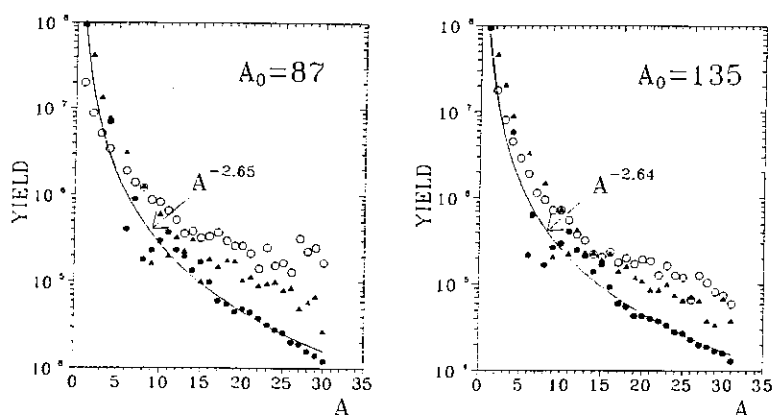


Fig. 3.21 - Rendimentos.

As diferenças entre o modelo *fcc* e o modelo *fcc modified* são melhor observadas em termos da multiplicidade total. De fato, na Fig. 3.22, a multiplicidade total é apresentada como uma função de p para $A_0 = 87$ e $A_0 = 135$, para os modelos *fcc* (linhas tracejadas) e *fcc modified* (linhas cheias). Observe-se que a modificação introduzida

no modelo diminui sensivelmente a multiplicidade total.

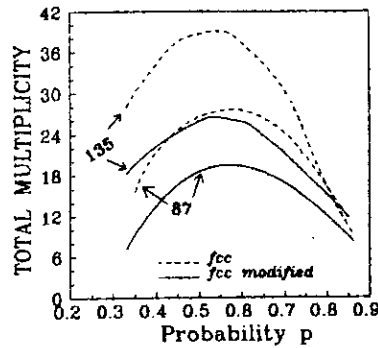


Fig. 3.22 - Multiplicidade total versus p.

Tal redução na multiplicidade deve provocar importantes mudanças na distribuição de energia Coulombiana com conseqüentes alterações nos espectros de energia cinética. De fato, na Fig. 3.23, mostramos os espectros de energia cinética para o ¹²C (a) e ¹⁶O (b) obtidos através da quebra de um sistema com A₀ = 87, usando o modelo *fcc* (histograma tracejado) e *fcc modified* (histograma). Os resultados devem ser comparados aos dados experimentais de Hirsch *et al.* (curvas sólidas). Nitidamente a redução da multiplicidade provoca um aumento na energia Coulombiana levando o modelo *fcc modified* a uma melhor concordância com os resultados experimentais.

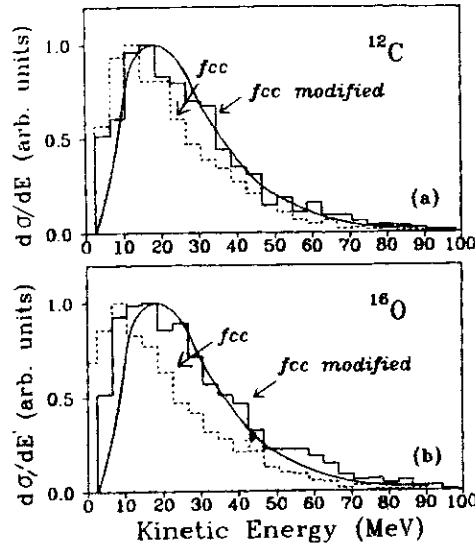


Fig. 3.23 - Espectros de energia cinética.

Efeitos de Tamanho Finito na Descrição Percolativa da Fragmentação Nuclear

*“...Igitur venerabile
utimini natura, quia ex ea et per eam et in ea
generatur ars nonstra et non in alio: et ideo
magisterium nostrum est opus naturae et non
opiticiis.”†*

R. Philosophorum.

Há mais de uma década atrás, verificou-se que a distribuição de massa dos fragmentos resultantes de uma reação induzida por prótons a altas energias segue uma lei de potência, tal como já havíamos mencionado na Introdução. Esta lei de distribuição de tamanho dos clusters é a mesma que foi encontrada por Fisher [Fish,67] na sua teoria de condensação e em cálculos percolativos em rede infinita, quando ambas as distribuições são calculadas no ponto crítico. Este comportamento das distribuições de massa nas reações de fragmentação, tem sido interpretado como uma possível assinatura de um fenómeno crítico (uma transição de fase líquido-gás [Finn,82] ou uma transição de

† “...Por isso utilizamos a venerável natureza; pois é dela, por ela e nela que é gerada nossa arte, e não de outra coisa qualquer: assim sendo, o nosso magistério é obra da natureza e não do artífice.”

fase tipo percolativa [Camp,86]), reforçando a expectativa de que seja possível extrair, dos dados experimentais de fragmentação nuclear, importantes informações acerca da equação de estado da matéria nuclear quente.

Estimulados pela interpretação acima, muitos trabalhos sobre transição de fase líquido-gás na matéria nuclear tem sido realizados, admitindo-se uma equação de estado tipo van der Waals (veja por exemplo a Ref. [Good,84]). Por outro lado, a hipótese de uma transição de fase percolativa tem sido defendida por Campi [Camp,86] e Bauer [Baue,88]. O primeiro introduziu também a técnica de análise de evento-por-evento no estudo das correlações entre os momentos dos clusters. Campi e Bauer mostraram que a fragmentação em experimentos de emulsão nuclear [Wadd,85] seguem o mesmo comportamento que os resultados de cálculos percolativos em 3 dimensões. O comportamento destes últimos é, por sua vez, bastante diferente do comportamento encontrado em percolação em $1D$. Como percolação em $1D$ não apresenta transição de fase, este resultado tem sido considerado como uma forte indicação de uma possível transição de fase em eventos de fragmentação nuclear. Neste capítulo, admitimos que este é o caso, mas chamamos a atenção para o fato de que a possibilidade de comportamento crítico em sistemas fragmentantes tão pequenos como os núcleos atômicos é ainda um problema que vem sendo muito debatido no contexto de diversos modelos. Em particular, a natureza desta criticalidade (caso ela verdadeiramente ocorra) e seus sinais não são bem entendidos ainda. Na realidade, efeitos de tamanho finito necessariamente têm de ser levados em conta a fim de que possamos obter um sinal inequívoco da transição de fase. Discutiremos a seguir esta questão particularmente em dois modelos: o de percolação e o de nucleação, cientes, contudo, de que a resposta que poderemos obter para esta questão fundamental é necessariamente limitada, porém, em nossa opinião, ainda muito útil.

Iniciaremos este capítulo (Seção 4.1) discutindo os critérios de criticalidade e o problema dos expoentes críticos em sistemas finitos e, na Seção 4.2, fazemos um estudo

comparativo entre os modelos de percolação e de nucleação da fragmentação nuclear.

4.1 - A TRANSIÇÃO DE FASE PERCOLATIVA EM SISTEMAS FINITOS

Como vimos no capítulo 1, em teoria de percolação, onde redes infinitas são admitidas, a probabilidade crítica não é um parâmetro universal, mas depende do tipo de rede, da dimensão do espaço e do tipo de percolação. Exceto em alguns poucos casos, não existe uma maneira exata de se calcular estas probabilidades críticas. Por outro lado, os fenômenos críticos são usualmente caracterizados por uns poucos expoentes críticos que não dependem da rede mas apenas da dimensão do espaço e têm o mesmo valor em ambas as percolações de sítio e de ligação. Todavia, esta universalidade dos expoentes críticos pode não ser obedecida no caso de sistemas finitos onde os efeitos de tamanho finito estão longe de serem desprezíveis. Em particular, não existe uma maneira única para definir o limiar de percolação em sistemas finitos, que seria o análogo da concentração crítica em sistemas infinitos. E, o que é mais embaraçoso, tem sido verificado que diferentes definições resultam em diferentes valores para o limiar de percolação. Na próxima seção, discutiremos os diversos critérios que têm sido propostos para se estimar a concentração crítica em sistemas finitos.

4.1.1) Criticalidade e Expoentes Críticos - Limiar de Percolação

Se a fragmentação nuclear é um fenômeno crítico, o problema central a ser colocado é como estimar a probabilidade “crítica” em sistemas muito pequenos. Diversos critérios têm sido adotados na estimativa deste limiar de percolação, como por exemplo:

- 1) A posição do máximo do segundo momento da distribuição de clusters como função

da concentração, tal como sugerido por Campi, [Camp,86];

- 2) A posição do mínimo do expoente crítico da distribuição de clusters como função da concentração [Baue,86];
- 3) Definindo-se *cluster* percolante em sistemas finitos como sendo o *cluster* com tamanho igual ou maior do que a metade dos constituintes do sistema, neste caso, a probabilidade crítica é tomada como o valor da probabilidade em que o *cluster* percolante aparece pela primeira vez [Desb,87].

Contudo, como foi apontado por Stauffer e Aharony [Stau,92], a multiplicidade de *clusters* com tamanho maior ou igual a 4 é correlacionada com o segundo momento e o expoente crítico da distribuição de *clusters*. Na realidade, esta multiplicidade, que passamos a denotar por \mathcal{M} , não é senão a multiplicidade de *clusters* $M_0 = \sum_s n_s$, excluído o número de clusters com $s = 1, 2$ e 3 . Foi mostrado também que tal exclusão conduz à melhor concordância com a lei de escala [Stau,92]. Na fragmentação nuclear esta exclusão é sugerida por dados experimentais que revelam que a maior contribuição para o rendimento de partículas leves é proveniente de partículas prontas (emissão de pré-equilíbrio), que são emitidas nos instantes iniciais da reação [Warw,82]. Assim, espera-se que, através da exclusão destas partículas leves, se possa computar a multiplicidade de clusters provenientes da fragmentação nuclear, livres da contaminação das partículas que seriam provenientes deste processo inicial. Neste caso, uma melhor aproximação é esperada. Além disto, qualitativamente, \mathcal{M} é igual a zero no limite de concentração muito pequena (onde o sistema é formado apenas por constituintes isolados), e igual a 1 no limite oposto de muito alta concentração. Para valores intermediários, \mathcal{M} assume um valor máximo, que ocorre quase na mesma posição que o máximo do segundo momento ou o mínimo do expoente crítico da distribuição de tamanho, quando plotados contra a probabilidade de concentração. Assim, outro critério para a determinação do limiar de percolação em sistemas fragmentantes é proposto:

- 4) A posição do máximo de \mathcal{M} .

A fim de compararmos os diferentes critérios acima, realizamos simulações de Monte Carlo (estatística de 3.000 corridas), utilizando o modelo de percolação nuclear exposto no Cap.3. A percolação de sítio, a percolação de ligação, ambas em rede cúbica simples e, o modelo de nucleação, são usados para simular a fragmentação de sistemas nucleares cujo número de constituintes A_0 foi tomado igual a 81, 203 e 350. Estes tamanhos foram escolhidos, tendo em vista comparação com dados experimentais. A densidade de quebra n foi tomada como 1/5 da densidade normal ($n_o = 0.153 fm^{-3}$) e o parametro de rede d foi escolhido de maneira que $n = 1/d^3$ (na percolação de ligação) e $n = P/d^3$ (na percolação de sítio) onde P é a probabilidade de ocupação de sítio. Já o fator de expansão α do modelo de nucleação correspondente a $n = 1/5n_o$, foi tomado como 1,71, pois $\alpha = (n_o/n)^{1/3}$.

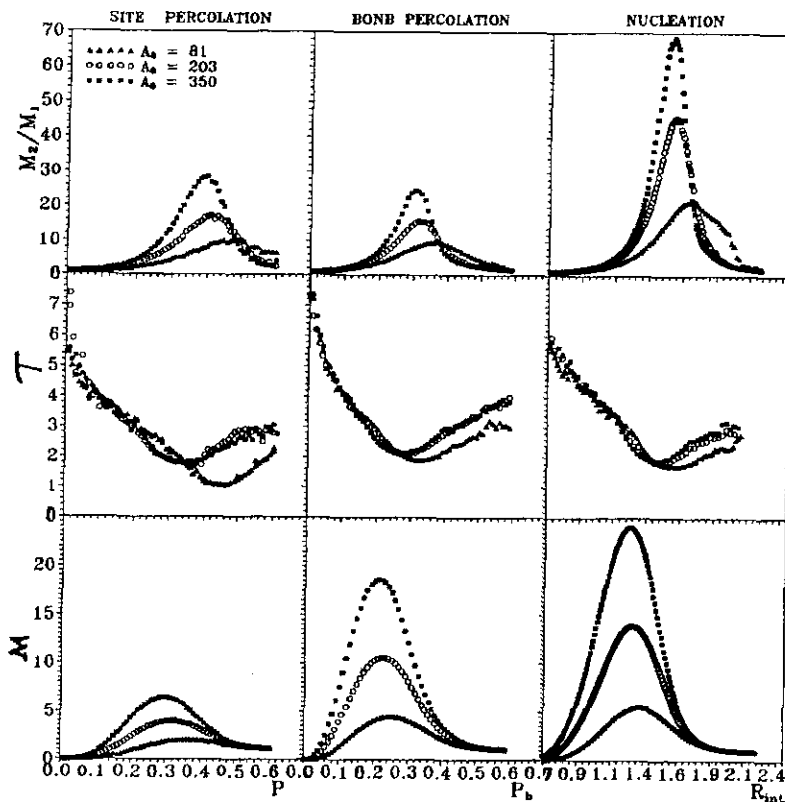


Fig. 4.1 - M_2/M_1 , τ e M versus P , P_b e R_{int} .

Na Fig. 4.1, mostramos os gráficos de M_2/M_1 (ao contrario de apenas M_2 , seguindo

sugestão de Campi [Camp,86]), τ e \mathcal{M} como função da probabilidade de ocupação de sítio P (painel à esquerda), da probabilidade de ligação P_b (painel central) e, do raio de interação R_{int} (painel à direita). M_2/M_1 e \mathcal{M} apresentam forma de sino, com maior largura para sistemas menores e, a curva de τ segue o comportamento de forma de sino-invertido também com maior largura para sistemas menores. Nitidamente, observa-se também que o limiar de percolação é sensível aos diferentes critérios de criticalidade e ao tamanho do sistema.

Tabela 4.1 Valores críticos pelos critérios 1, 2 e 4.

A_0		(1)	(2)	(4)
		M_2/M_1 (max)	τ (min)	\mathcal{M} (max)
81	P	0.50	0.44	0.40
	P_b	0.37	0.32	0.25
	R_{int}	1.66	1.57	1.32
203	P	0.41	0.35	0.32
	P_b	0.31	0.28	0.22
	R_{int}	1.54	1.45	1.26
350	P	0.40	0.32	0.30
	P_b	0.30	0.26	0.21
	R_{int}	1.52	1.39	1.24

Usando-se os critérios 1, 2 e 4, obtemos as probabilidades “críticas” que estão agrupadas na Tabela 4.1. Pode-se observar que, ainda para um sistema de mesmo tamanho, diferentes critérios conduzem a diferentes valores para o limiar de percolação.

Além disto, os efeitos de tamanho finito no caso do critério 4 são significativamente diferentes dos outros dois casos. No caso de sistemas finitos, o limiar de percolação calculado pelo uso do critério 4 decresce de valores acima de P_c – a probabilidade crítica em sistemas infinitos ($P_c \approx 0,25$ para percolação de ligação e $P_c \approx 0,31$ para percolação de sítio) para valores abaixo de P_c , quando A_0 aumenta de 81 para 350, enquanto que ele está sempre acima de P_c se os critérios 1 e 2 são utilizados.

Diferentes limiares devem provocar fortes efeitos na distribuição de massa (ou carga), na distribuição de multiplicidade e nos espectros de energia. Para mostrar estes efeitos explicitamente no caso da distribuição de massa, colocamos na Fig. 4.2 os resultados obtidos quando os critérios 1, 2 e 4 são usados para o cálculo. A aproximação de núcleos simétricos e a percolação de ligação com $d = 3,197 fm$ foram utilizados. Por simplicidade, o decaimento secundário dos *clusters* também não será levado em conta. Isto é razoável para os nossos objetivos, porque em percolação de ligação e na nucleação o efeito líquido do processo de evaporação é apenas aumentar o rendimento de partículas leves ([Kimu,92],[Chun,94]). Como os momentos da distribuição de *clusters* são dominados pelos termos maiores, os expoentes críticos, que são extraídos deles, não são alterados significativamente. Além disto, as probabilidades críticas também não são afetadas pelo decaimento secundário pois são computadas no instante da quebra.

Na Fig. 4.2 os quadrados cheios denotam o critério 1, os círculos o 2, e os triângulos cheios o critério 4. Os dados experimentais estão representados por cruces e são correspondentes a colisões centrais (selecionadas por apropriadas janelas de multiplicidade N_c de partículas carregadas, que são experimentalmente definidas como o número de detetores nos quais ao menos uma partícula carregada foi detetada). No painel $A_0 = 81$, os dados são correspondentes a colisões $^{40}Ar + ^{45}Sc$ a $65 MeV/nucleon$ e foram tomados da Ref. [Li,94]. No painel $A_0 = 203$, os dados são de Waddington e Freier [Wadd,85]. Os eventos centrais foram selecionados usando-se $N_c \geq 30$. Finalmente, para $A_0 = 350$, os dados são da Ref. [Phai,92] e correspondem a reações $^{129}Xe + ^{197}Au$ com $N_c \geq 33$.

Claramente, o limiar de percolação obtido pelo critério 4 (dado pela posição do

máximo de \mathcal{M}), reproduz melhor a lei de potência experimental. Qualitativamente os resultados são os mesmos no caso da percolação de sítio e da nucleação, apesar de os resultados da percolação de sítio serem mais sensíveis ao processo de evaporação.

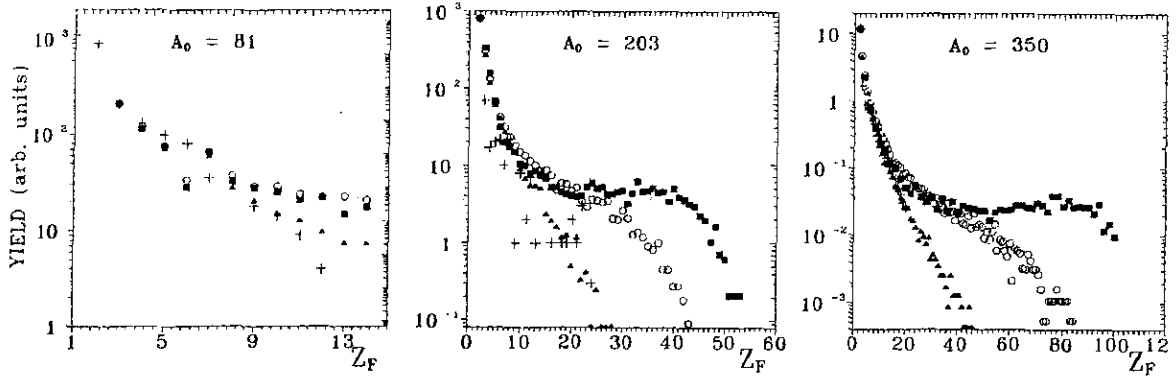


Fig. 4.2 - Distribuições de carga segundo os critérios 1, 2 e 4.

Conforme vimos no Cap. 3, os fenômenos críticos são caracterizados por uns poucos expoentes críticos, que no caso de sistemas infinitos só dependem da dimensão da rede. Estes expoentes críticos são calculados por meio dos momentos da distribuição de *clusters* (Eq. 3.24) e estão inter-relacionados pelas chamadas relações de escala (Eq. 3.29). Conseqüentemente, basta extrair independentemente dois expoentes críticos que os demais ficam automaticamente determinados.

A fim de ver como os expoentes críticos, no caso de sistemas finitos, dependem da condição de criticalidade, colocamos na Tabela 4.2 os expoentes τ , β e λ_{32} obtidos através da aplicação dos critérios 1, 2 e 4. O último expoente sendo definido como a inclinação da curva $\ln M_3$ versus $\ln M_2$, que é dada por $\lambda_{32} = 1 + 1/\sigma \gamma$ [Camp,86]. O expoente τ foi extraído diretamente da distribuição de carga; e β , calculado procurando-se pela inclinação da curva $\ln S_{max}$ versus $\ln |P - P_c|$, onde S_{max} é o cluster de tamanho máximo no evento. Para este último *plot*, tomamos dez valores supercríticos de P , na vizinhança de P_c (números ligeiramente menores que dez não alteram significativamente

os resultados). A probabilidade crítica P_c , em cada caso, é tomada da Tabela 4.1. Este procedimento foi sugerido por Elliot *et al.* [Elli,94] e é equivalente ao uso da Eq. 3.28 com $k = 1$. No caso da percolação de ligação, as relações e procedimentos são os mesmos, sendo que na nucleação, a inclinação é obtida do gráfico de $\ln S_{max}$ versus $\ln|R_{int} - R_{int}^{cr}|$.

Com os valores de τ e β , os expoentes σ e γ podem ser obtidos das relações de escala.

Tabela 4.2 Expoentes críticos pelos critérios 1, 2 e 4.

Exponent		(1) M_2/M_1 (max)	(2) τ (min)	(4) \mathcal{M} (max)	<i>Au</i> fragmentation (exp)
τ	site	1.78	1.70	1.82	2.14±0.06
	bond	2.25	2.13	2.39	
	nucl	1.89	1.85	2.20	
β	site	0.17	0.23	0.27	0.29±0.02
	bond	0.21	0.29	0.29	
	nucl	0.10	0.14	0.16	
λ_{32}	site	1.68	1.72	2.00	2.22± 0.10
	bond	1.93	2.01	2.23	
	nucl	1.85	1.96	2.32	

A Tabela 4.2 agrupa os expoentes críticos calculados pelos modelos de percolação de sítio, percolação de ligação e nucleação, para cada um dos três critérios acima. O sistema considerado é $A_0 = 203$. Para comparação, os valores de τ e β , extraídos de dados experimentais da fragmentação do ^{197}Au por cinemática inversa [Gilk,94] e os valores de λ_{32} baseados em experimentos de emulsão nuclear [Wadd,85] são também mostrados. Pode ser visto que o critério 4 fornece valores para os expoentes críticos

mais próximos dos valores experimentais, exceto no caso de τ que é superestimado quando obtido pela percolação de ligação. Estes resultados, juntamente com os mostrados na Fig. 4.2 sugerem a escolha do máximo de \mathcal{M} como critério de criticalidade em sistemas nucleares fragmentantes. Contudo, deve-se notar que os valores experimentais dos expoentes críticos β e τ são baseados na linearidade entre a probabilidade de concentração e a multiplicidade de fragmentos [Gilk,94] e esta hipótese não pode, a princípio, ser justificada.

4.1.2) Universalidade e Escala

Como já havíamos mencionado, a universalidade das grandes redes assegura que os expoentes críticos e outras propriedades qualitativas são independentes da estrutura cristalina da rede, e do tipo de percolação (se percolação de sítio ou de ligação). Somente a dimensão é capaz de alterar os expoentes críticos. Todavia, como podemos observar na Tabela 4.2, os expoentes críticos em sistemas finitos dependem não só do critério de criticalidade como também do tipo de percolação. Assim, espera-se também, que haja diferenças ao passarmos da rede SC para uma outra rede, por exemplo, FCC. Com efeito, realizamos um estudo comparativo de percolação de sítio em redes cúbica simples (SC) e redes cúbicas de face centrada (FCC), cujos principais resultados são abaixo apresentados.

Na Fig. 4.3, a multiplicidade \mathcal{M} de fragmentos pesados, o expoente aparente τ e o momento M_2/M_1 estão plotados contra a probabilidade de ocupação P . O painel à esquerda mostra os resultados para a rede FCC e o da direita os resultados para a rede SC. Três sistemas foram considerados $A_0 = 81$ (triângulos cheios), 203 (círculos vazios) e 350 (quadrados cheios). É nítido que as curvas são mais abertas e que os valores máximos de \mathcal{M} e de M_2/M_1 e o próprio mínimo de τ são maiores no caso da rede SC, para todos os sistemas considerados. Observa-se também que em $P \approx 0.4$ (para a rede

FCC) e $P \approx 0.6$ (para a rede SC), \mathcal{M} e M_2/M_1 praticamente estabilizam seus valores como função do tamanho do sistema. A localização do máximo de \mathcal{M} , do máximo M_2/M_1 e do mínimo de τ , como era de se esperar, ocorrem em diferentes posições. Em particular, os resultados para a rede FCC estão sempre na região de menor P quando comparados com os resultados da rede SC.

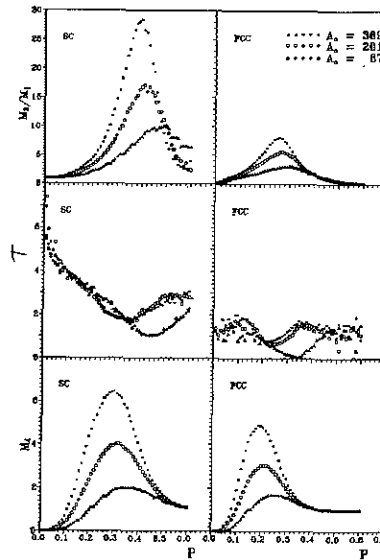


Fig. 4.3 - \mathcal{M} , M_2/M_1 e τ versus P .

Na Tabela 4.3 estão agrupados os valores da probabilidade crítica P_c no caso da percolação de sítio em redes FCC e SC, para os sistemas $A_0 = 81, 203$ e 350 , usando o critério de criticalidade apresentado na seção anterior.

Tabela 4.3 *Limiares de Probabilidade*

A_0	81	203	350
FCC	0.26	0.22	0.19
SC	0.40	0.32	0.30

Diferentes limiares de probabilidade levam a diferentes distribuições de tamanho. Isto está mostrado explicitamente no caso de $A_0 = 203$ na Fig. 4.4, onde estão plotadas as distribuições de tamanho para $P = 0,5P_c$; $P = P_c$ e $P = 1,5P_c$, no caso de percolação em rede FCC (quadrados cheios) e SC (círculos vazios). Como os P_c 's são diferentes para as duas redes cristalinas, na realidade as distribuições na Fig. 4.4 são resultadas de cálculos para valores diferentes de P . Todas as distribuições estão normalizadas a 1.

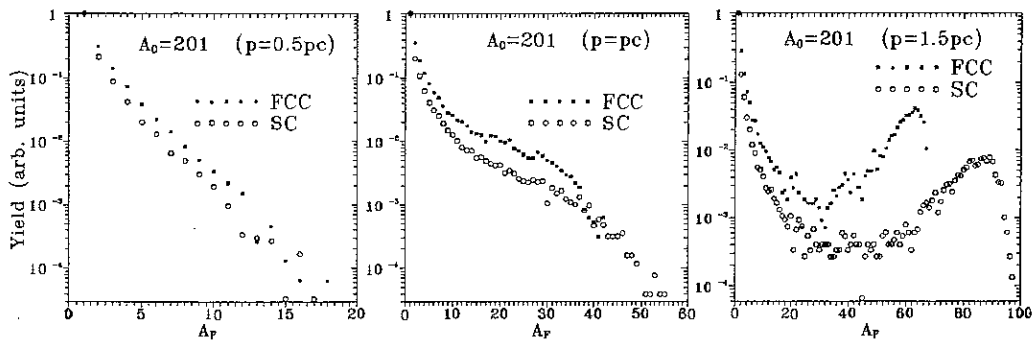


Fig. 4.4 - Distribuições de tamanho nas redes FCC e SC.

Note-se que as distribuição de massa dependem sensivelmente da rede utilizada, principalmente para $P \geq P_c$. Além disto, os maiores fragmentos encontrados na rede FCC são $A_F \approx 40$ e $A_F \approx 70$ para $P = P_c$ e $P = 1,5P_c$, respectivamente, que seriam comparados com $A_F \approx 55$ e $A_F \approx 100$, para $P = P_c$ e $P = 1,5P_c$ respectivamente,

encontrados na rede SC.

Diferenças significativas podem também ser encontradas na própria estrutura dos clusters formados nas duas redes. Na Fig. 4.5, está plotado o segundo maior contra o maior cluster (valores médios), ambos normalizados a 1, no caso das redes FCC (quadrados cheios) e SC (círculos vazios). Observa-se que, no caso da rede FCC, o segundo maior cluster é sempre menor que o da rede SC e, seu tamanho vai rapidamente a zero quando o tamanho do *percolante* é maior que cerca de $0,2A_0$.

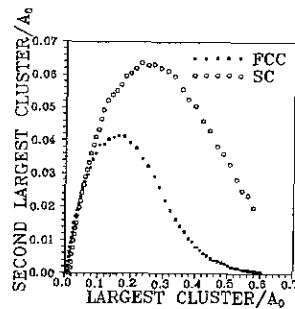


Fig. 4.5 - Segundo maior *versus* maior cluster.

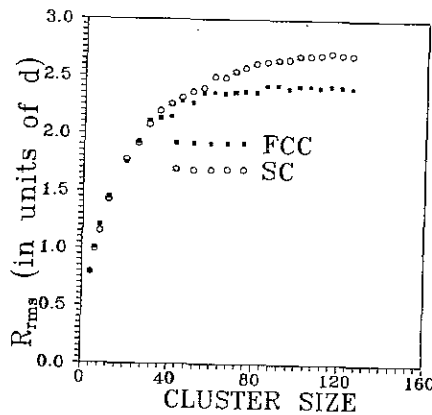


Fig. 4.6 - Raio médio $\langle R_F \rangle$ *versus* tamanho A_F .

Na Fig. 4.6, está plotado o raio médio quadrático $\langle R_F \rangle$ contra o tamanho do cluster no caso de percolação de sítio em rede FCC (quadrados cheios) e SC (círculos vazios). Os valores estão em unidades da distância entre primeiros próximos vizinhos d .

Nota-se que os valores de $\langle R_F \rangle$ praticamente não dependem da estrutura cristalina no caso de clusters pequenos. Todavia, quando A_F cresce, pelo menos dentro do limite considerado, os clusters obtidos na rede FCC são sempre mais compactos que os obtidos na rede SC.

Estas dependências na estrutura cristalina devem se refletir nos próprios expoentes críticos. De fato, seguindo o procedimento da seção 4.1.1, calculamos os expoentes τ , β e λ_{32} para a rede FCC. Os resultados para percolação de sítio e $A_0 = 203$, encontram-se agrupados na Tabela 4.4 onde, para comparação, incluímos também os resultados para a rede SC.

Tabela 4.4 *Expoentes críticos nas redes FCC e SC.*

	τ	β	λ_{32}
FCC	1.65	0.22	1.86
SC	1.82	0.27	2.00

Nossos resultados mostram que, no caso de sistemas finitos, os expoentes críticos, as propriedades dos clusters e sua própria estrutura dependem fortemente do tipo de rede cristalina. Isto claramente sugere uma violação da hipótese de universalidade que tem sido admitida em sistemas finitos ([Baue,88] e [Li,94]).

4.2 - PERCOLAÇÃO VERSUS NUCLEAÇÃO

Diversos autores têm apontado similaridades entre os modelos de percolação e de nucleação para a fragmentação nuclear ([Dors,93],[Chun,93]). A semelhança mais imediata é que, em ambos os modelos, toda a física do processo é admitida ser descrita por um único parâmetro, - o parâmetro de concentração P ou P_b (em percolação) ou o raio efetivo de interação R_{int} (na nucleação). De fato, foi ainda sugerido [Dors,93] que a nucleação pode ser considerada como uma percolação sem rede, i.e., um tipo de percolação no contínuo. Se isto for verdadeiramente o caso, então tanto a percolação quanto a nucleação pertenceriam à mesma classe de universalidade e, então, os expoentes críticos e a própria dimensão fractal dos modelos nucleativos seriam os mesmos que os obtidos através dos modelos percolativos. Por outro lado, é de se esperar alguma diferença entre estes modelos, proveniente de efeitos de tamanho finito, pois na nucleação as esferas efetivas de interação podem se interpenetrar, enquanto que na percolação, a interdistância entre qualquer par de nucleons vizinhos é constante. Com efeito, na Tabela 4.2 podemos nitidamente observar que os expoentes críticos obtidos através dos modelos de nucleação são bastante diferentes dos obtidos em percolação, independentemente do critério de criticalidade utilizado. E, a Fig. 4.1 mostra as diferenças entre as multiplicidades nos cálculos nucleativos e de percolação. Em particular, as multiplicidades são sempre maiores no caso da nucleação. Diferentes distribuições de multiplicidade em sistemas finitos devem provocar diferenças na própria distribuição de tamanho dos clusters. De fato, na Fig. 4.7 está *plotado* o segundo maior contra o maior fragmento, ambos normalizados a 1, para $A_0 = 203$. Para comparação, é também apresentado o *fitting* polinomial (curva sólida) dos dados experimentais da fragmentação do ^{197}Au em emulsão nuclear [Wadd,85]. Observa-se que a nucleação (quadrados cheios) e a percolação de ligação (cruzes) fornecem correlações muito próximas à apresentada pelos dados experimentais enquanto que os resultados apresentados pela percolação de

sítio (triângulos cheios) estão mais afastados.

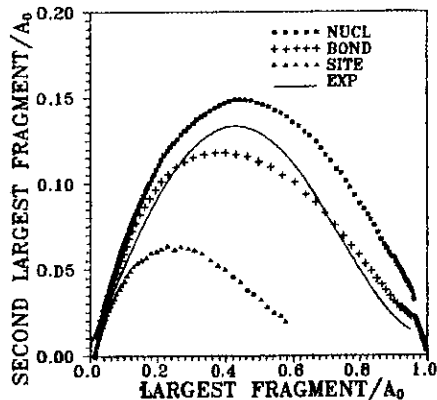


Fig. 4.7 - Segundo maior versus primeiro maior fragmento.

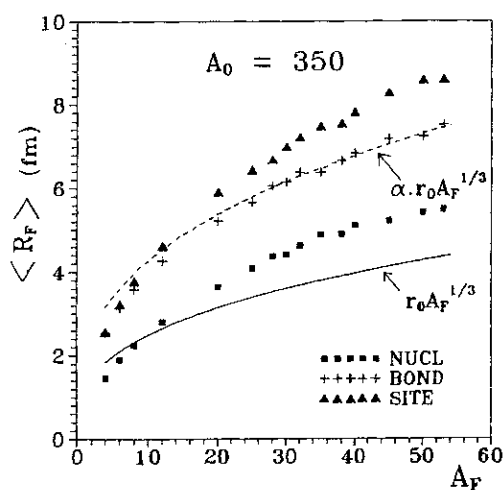


Fig. 4.8 - Raio médio quadrático $\langle R_F \rangle$ versus tamanho do fragmento.

A Fig. 4.8 traz o *plot* do raio médio quadrático $\langle R_F \rangle$ contra o tamanho A_F do fragmento, para $A_0 = 350$. Podemos observar que a nucleação (quadrados cheios) fornece, sistematicamente, valores menores para o raio dos fragmentos, quando comparados com a percolação de ligação (cruzes) e percolação de sítio (triângulos cheios). Este fato pode ser facilmente entendido uma vez que na nucleação as esferas de interação associadas a cada nucleon são permitidas interpenetrar, i.é., a interdistância entre dois mais próximos vizinhos pode ser menor ou igual a $2R_{int}$, enquanto que nos cálculos percolativos, esta interdistância é constante e igual ao parâmetro de rede d , tal com já havíamos mencionado. Em outras palavras, os *clusters* são mais compactos na nucleação do que em percolação.

Apesar de todas estas diferenças, podemos correlacionar os parâmetros dos dois modelos, i.é., a probabilidade de concentração e o raio efetivo de interação. Para isto, consideremos os pontos fixos dados pelo máximo de M_2/M_1 , o mínimo de τ e o máximo de \mathcal{M} para sistemas de diferentes tamanho (cf. Tabela 4.2). Desta forma, podemos obter uma correlação entre as quantidades de interesse, plotando (veja Fig. 4.9) a probabilidade de ocupação de sítio P (painel *a*) e a probabilidade de ligação P_b (painel *b*), como função do raio efetivo de interação R_{int} . Podemos observar que P_b está, numa boa aproximação, linearmente correlacionado com R_{int} . Contudo, este comportamento não é seguido no caso de P , que apresenta muitos pontos desviados da linha reta. O resultado da regressão linear é apresentada em cada caso. A correlação linear sugere um isomorfismo entre a nucleação e a percolação de ligação, significando que um modelo é essencialmente igual ao outro.

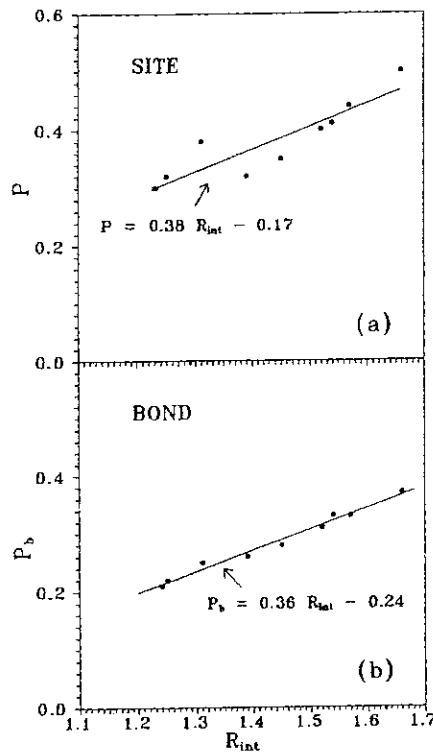


Fig. 4.9 - P e P_b versus R_{int} .

Conclusões e Perspectivas

A fragmentação nuclear vem sendo investigada há mais de uma década, com grande interesse e empenho, quer do ponto de vista experimental, quer do ponto de vista teórico. Neste trabalho, procuramos usar as idéias da teoria de percolação para tentar extrair dos processos de fragmentação nuclear o máximo de informações relevantes à equação de estado da matéria nuclear quente. A percolação foi escolhida pelo fato de que os modelos percolativos são os modelos mais simples que apresentam transição de fase e, desse modo, podem fornecer uma base simples para investigar possível comportamento crítico do sistema nuclear. Com este objetivo em mente, começamos apresentando os principais resultados experimentais e discutindo diversos modelos teóricos, tanto dinâmicos quanto não-dinâmicos. A quantidade de dados experimentais existentes e a diversidade de modelos propostos refletem apenas a alta complexidade do processo. Com efeito, até o presente momento, a fundamental questão de ser a fragmentação nuclear um processo sequencial ou simultâneo ainda não foi satisfatoriamente respondida. Muito mais esforço experimental e teórico serão necessários para que se chegue a uma resposta conclusiva. Desta forma, a proposta desafiadora do grupo de Purdue de que a fragmentação nuclear seja um fenómeno crítico (uma transição de fase líquido-gás) não pode ser confirmada nem descartada, com o conhecimento que temos hoje dos processos de fragmentação

nuclear.

Devemos salientar que, da parte experimental, os dados provenientes de reações $p + \text{núcleo}$ foram substancialmente enriquecidos, nos últimos anos, com dados extraídos de reações núcleo + núcleo. Além disso, como o caráter inclusivo dos primeiros resultados experimentais não permitisse a discriminação entre vários modelos teóricos, uma quantidade considerável de experimentos com detetor de 4π vem sendo utilizadas desde então. Isto tem contribuído para um melhor entendimento da fragmentação nuclear, cujo quadro atual podemos resumir da seguinte maneira:

O quadro que se supõe existir no caso das reações $p + \text{núcleo}$ é bastante diferente do quadro para colisões núcleo + núcleo. Com efeito, em uma reação $p + \text{núcleo}$, devido à grande componente longitudinal do momentum incidente, ocorre emissão de partículas prontas, sendo que a deposição de energia é feita, basicamente, através do aumento de energia térmica no sistema que, então, se quebra em vários pedaços. No outro caso, em se tratando de colisões núcleo + núcleo, ocorre uma forte compressão no sistema composto do projétil + alvo. Isto provoca o aquecimento da matéria nuclear que, então, se expande, tornando-se em certo ponto, instável contra a formação de *clusters*.

Por outro lado, simulações dinâmicas mostram que as instabilidades ocorrem longe do ponto crítico e que a lei de potência da distribuição de massa/carga (que vem sendo encarada como uma assinatura da transição de fase) pode ser reproduzida através apenas de uma média sobre diferentes parâmetros de impacto. Estes resultados, se confirmados (distribuições de tamanho em colisões centrais ainda parecem seguir uma lei de potência), podem descartar o modelo de transição de fase líquido-gás, mas não a própria possibilidade de transição. De fato, se nas energias em questão, o modelo de cristal for apropriado à descrição do núcleo, a fragmentação pode ser manifestação de um outro tipo de transição de fase – uma transição percolativa. Neste caso, a fragmentação nuclear seria descrita como uma transição de segunda ordem, com parâmetro de ordem dado pelo primeiro momento da distribuição de *clusters*.

Essas considerações tornam os modelo percolativos (e a classe de modelos que

eles representam) particularmente atraentes, principalmente pela sua versatilidade em descrever fenômenos críticos.

Naturalmente, na aplicação da teoria de percolação à fragmentação nuclear, efeitos de tamanho finito devem, necessariamente, ser levados em conta, uma vez que a teoria de percolação supõe redes infinitas. Com efeito, em sistemas finitos, a própria probabilidade crítica deixa de apresentar um valor bem definido. Isto então, abre possibilidade para que o ponto *crítico* seja obtido através de diversos critérios de criticalidade. Além disto, investigando diferentes critérios de criticalidade em sistemas finitos, encontramos que o limiar de probabilidade de concentração (no caso de modelos percolativos) e o valor limiar para o raio efetivo de interação (no caso da nucleação) são fortemente dependentes do critério utilizado. Isto é, para diferentes critérios, encontramos diferentes valores para o limiar de concentração. Em particular, mostramos, neste trabalho, que os dados experimentais de fragmentação nuclear são melhor reproduzidos quando o critério, baseado na multiplicidade de fragmentos pesados \mathcal{M} , é utilizado.

Por outro lado, comparando os resultados de percolação com os de nucleação, encontramos uma estreita similaridade entre a percolação de ligação e o modelo de nucleação, sugerindo a existência de uma relação isomórfica entre os dois modelos. Um fato notável, ainda, é que os expoentes críticos calculados pela percolação de ligação, percolação de sítio e nucleação, em sistemas finitos, assumem valores diferentes para os diferentes modelos. Tais valores, por sua vez, também diferem do valor do caso infinito.

Para verificar se os expoentes críticos, em sistemas finitos, dependem também da estrutura cristalina, cálculos comparativos de percolação em diferentes redes foram feitos e os resultados mostram claramente que a hipótese da universalidade das grandes redes, que tem sido admitida na fragmentação nuclear por Bauer e por Li *et al.*, é violada em sistemas finitos.

Estes resultados sugerem como extensão natural desse trabalho, o uso de modelos de percolação ou de nucleação para estudar, de modo simplificado, certos efeitos dinâmicos, tais como o de compressão, em colisões de íons pesados. Uma possível abordagem deste

problema, é apresentada no apêndice A.

É interessante salientar que a capacidade dos modelos percolativos e de nucleação, de tratar satisfatoriamente a fase de *clusterização* é aproveitada inclusive por muitos cálculos dinâmicos, que os incorporam na fase final do processo.

De uma maneira geral, nos modelos percolativos admite-se, que a colisão de um íon pesado energético com o núcleo alvo, provoca a emissão de nucleons prontos e/ou a quebra de várias ligações entre os nucleons do sistema. Como consequência da colisão, há deposição de energia no sistema que, então, se expande e, eventualmente entra em equilíbrio termodinâmico. Ao atingir uma densidade de $\rho \approx 1/5, 1/3, \text{ ou } 1/2\rho_0$, segundo os modelos de nucleação, percolação de sítio (ou ligação) e, percolação tetraédrica modificado, respectivamente, o sistema, passando por uma transição de fase percolativa, se quebra em vários pedaços. Estas densidades de quebra estão dentro dos limites estimados por previsões teóricas de outros modelos.

Adotando como critério de criticalidade a posição do máximo de \mathcal{M} , conseguimos reproduzir através do modelo de percolação convencional, acoplado ao decaimento secundário dos clusters, os espectros de energia cinética do ^{12}C e do ^{16}O e a distribuição de massa obtidos das reações $p + K^*r$ a energias entre 80 e 350 GeV. Mostramos também que o expoente aparente τ da distribuição de massa depende sensivelmente do parâmetro de impacto e da evaporação dos clusters quentes e, segundo este modelo de percolação-evaporação, τ assume o valor 2,6 em excelente concordância com o valor experimental. A temperatura de quebra, necessária para reproduzir os dados experimentais, é $T \approx 10\text{MeV}$. Esta temperatura é um pouco elevada em relação aos valores, até agora observados experimentalmente.

Uma outra questão bastante interessante está relacionada com a seguinte pergunta: – Será possível reproduzir os dados experimentais pelas idéias da teoria de percolação sem a introdução de novo ingrediente físico, tal como a temperatura? Para melhor esclarecer este ponto, propusemos o chamado modelo de percolação tetraédrica modificado. Este modelo, como todos os modelos percolativos, supõe que a fragmentação

nuclear seja um processo frio e explosivo, e leva em conta o decaimento secundário dos clusters de uma maneira efetiva, através de considerações puramente geométricas. Assim, com o mesmo critério de criticalidade mencionado acima, mostramos que os espectros de energia cinética do ^{12}C e do ^{16}O e as distribuições de massa experimentais das reações $p + \text{Kr}$ e $p + \text{Xe}$, na mesma faixa de energia que a citada acima, podem ser bem reproduzidos. Isto quer dizer que um modelo essencialmente frio pode fornecer uma boa descrição para a fragmentação nuclear. Em particular, os expoentes aparentes das distribuições de massa obtidos são $\tau = 2,40$ para a reação $p + \text{Kr}$ e, $\tau = 2,44$ para a reação $p + \text{Xe}$, e estão em boa concordância com os resultados experimentais.

Este último modelo também foi usado no estudo da intermitência em fragmentação nuclear. Nossos cálculos mostraram que o expoente intermitente da distribuição de carga de fragmentos gerada pelo modelo de percolação em rede *fcc* se aproxima dos valores experimentais, quando se introduz a dependência da probabilidade de ocupação com o parametro de impacto. Este resultado está de acordo com o predito por Barz *et al.* e indica que o comportamento intermitente encontrado na reação de fragmentação do ^{197}Au pode ser proveniente da mistura de várias situações dinâmicas na colisão.

No que diz respeito às flutuações na pressão cinética sobre o crescimento de bolhas na matéria nuclear quente, fizemos uma simples generalização do cálculo de Bondorf *et al.* para incluir bolhas com densidade arbitrárias, utilizando diferentes equações de estado. Nossos resultados mostram que, se a interação Seyler-Blanchard é usada, os efeitos das flutuações são pequenos e que a aproximação de bolhas de densidade nula não é uma boa aproximação, principalmente se se usa uma equação de estado do tipo Skyrme.

Finalmente, mostramos que se efeitos de tamanho finito são levados em conta na determinação dos limiares de concentração, os expoentes críticos obtidos através dos modelos de percolação e de nucleação estão muito próximos daqueles extraídos de dados experimentais de fragmentação nuclear. Na verdade, nossos resultados não confirmam a conclusão de Gilkes *et al.* de que os expoentes críticos da fragmentação nuclear estão

mais próximos dos expoentes de uma transição de fase líquido-gás. Todavia, lembramos que os dados experimentais foram obtidos, admitindo-se uma relação de linearidade entre a multiplicidade e a probabilidade de concentração dos modelos percolativos. Esta hipótese pode, a princípio, ser não justificada.

Devemos, agora, lembrar que, em todos os nossos cálculos, foi admitida a hipótese de equilíbrio termodinâmico. Contudo, tal hipótese não é absolutamente trivial. Na realidade, existem dúvidas procedentes de que o sistema nuclear resultante da colisão, na faixa de energia em questão, possa entrar em equilíbrio termodinâmico. Esta questão não pode ser esclarecida no contexto de modelos puramente percolativos. Neste sentido, um esforço maior em cálculos dinâmicos, descrevendo a fase colisional, se faz necessário.

Como mencionamos no início deste trabalho, há uma grande expectativa de se aumentar nosso reduzido conhecimento sobre a equação de estado da matéria nuclear. Com efeito, cálculos dinâmicos recentes, baseados em BUU ([Xu,93],[Souz,94]), mostraram que a evolução temporal do sistema nuclear passa por configurações exóticas (bolhas e discos), cuja forma depende fortemente da compressibilidade K da matéria nuclear, no sentido de que, para grandes (pequenos) valores de K , i.é., para uma equação de estado dura (mole), obtém-se uma configuração em forma de disco (bolha). Acredita-se que os vestígios dessas formas exóticas possam ser encontradas no estudo da distribuição angular dos fragmentos produzidos. Neste contexto, como os modelos dinâmicos ainda não conseguem descrever a clusterização, desponta a perspectiva de uma crescente utilização da percolação e da nucleação, acopladas a um tratamento dinâmico da fase colisional da reação.

APÊNDICE A

A fim de modelar o problema da compressão no contexto dos modelos percolativos, vamos revisar o que outros modelos, tais como os hidrodinâmicos, nos dizem sobre o assunto.

Começamos com a equação da continuidade para um fluido não relativístico que é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde ρ é a densidade do fluido e \vec{v} é a velocidade local. O índice i varia de 1 a 3 e, índices repetidos denotam soma.

As equações de conservação para o momentum e energia são

$$\frac{\partial M_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(M_i v_i) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(E v_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j \sigma_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (\text{A.3})$$

respectivamente. Nestas equações, q_i é a componente do fluxo de calor \vec{q} , σ_{ij} é o tensor

das tensões e o momentum \vec{M} e a energia E são definidos por:

$$\vec{M} = \rho \vec{v}$$

e, (A.4)

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

Nesta Eq. A.4, a energia interna por unidade de massa e inclui as contribuições térmicas e compressionais que, por sua vez, são dadas, respectivamente, por

$$e(n, T) = e_0(n) + T(n, T)$$

e

$$e_{com}(n) = e_0(n) - e_0(n_0)$$

onde $e_0(n)$ é a energia no estado fundamental por nucleon, $T(n, T)$ é a energia térmica por nucleon e $e_0(n_0)$ é a energia de equilíbrio no estado fundamental quando a matéria se encontra na densidade nuclear normal n_0 .

O fluxo \vec{q} da Eq. A.3 pode ser escrito de acordo com a lei de Fourier, como $\vec{q} = -k(\nabla T)$, sendo k o coeficiente de condutividade térmica.

Quando dois íons pesados colidem, uma região de elevada densidade e temperatura é formada na interface entre os dois núcleos e, a onda de choque gerada, se propaga através do sistema.

Para obter as equações da onda de choque, vamos admitir um fluido perfeito (sem viscosidade ou condução de calor) em um meio infinito e estudar a propagação de uma onda em uma dimensão. As quantidades físicas do fluido que se encontra à frente da onda de choque serão denotadas pelo sub-índice 0 e as propriedades do fluido atrás da onda de choque serão denotadas pelo sub-índice 1. Admitindo que a velocidade do fluido, tanto o que está à frente como o que está atrás da onda de choque, no referencial

do laboratório, seja v_i e, denotando a velocidade da onda de choque por v_s , a velocidade do fluido no referencial da onda de choque é:

$$u_i = v_i - v_s, \quad i = 0, 1.$$

Neste referencial, as derivadas temporais são nulas e as Eqs. A.1-3 ficam:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad \frac{d}{dx}(\rho u^2 + P) = 0 \quad \frac{d}{dx}[\rho u(h + \frac{1}{2}u^2)] = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde $h = e + P$ é a entalpia do fluido.

Integrando as Eqs. A.5, na interface da onda de choque, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_0 u_0, \\ \rho_1 u_1^2 + P &= \rho_0 u_0^2 + P_0, \\ h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 &= h_0 + \frac{1}{2}u_0^2. \end{aligned}$$

Estas equações são as condições de continuidade ou condições de Hugoniot-Rankine para a onda de choque e relacionam as propriedades do fluido na interface da onda de choque. Manipulações algébricas destas equações mostram que

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{2}(P_1 - P_0)(V_1 + V_0) \quad (\text{A.6})$$

$$e_1 - e_0 = \frac{1}{2}(P_1 + P_0)(V_1 - V_0)$$

com $V_i = 1/\rho_i$. As Eqs. A.6 determinam as propriedades do fluido antes e após a propagação da onda de choque, e são válidas se o fluido não sofre variações em sua composição (ionização, transformações químicas, etc). Como mostrado por [Cour,48], as únicas soluções físicas para as Eq. A.6, são aquelas para as quais $\rho_1 > \rho_0$, i.é., ondas

de compressão. Ondas para as quais $\rho_1 < \rho_0$ são rarefações e não são físicas porque, neste caso, envolvem um decréscimo de entropia.

Das Eq. (A.6) podemos calcular o máximo de compressão que o sistema pode sofrer:

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)_{max} = 1 + \frac{(e_0(\rho_1) - e_0(\rho_0) + T)}{bT} \quad (A.7)$$

A generalização destes resultados para um fluido relativístico foi, pela primeira vez, apresentada por [Taub,48]. Ele integrou as equações de Euler relativísticas e, admitiu a aproximação de onda plana, obtendo então, as equações de Hugoniot-Rankine para o fluido relativístico. Seguindo procedimento análogo ao acima descrito, o máximo de compressão para o fluido relativístico, no referencial de repouso, é dado por [Clar,86]

$$f(n)\left(\frac{n}{n_0} - \gamma\right) - \epsilon_0(n)\frac{n}{n_0}[b\gamma^2 + \gamma^2 - 1 - b\gamma\frac{n}{n_0}] = 0 \quad (A.8)$$

onde $f(n) = n^2 \frac{d\epsilon}{dn} - bn\epsilon_0(n)$ e $n/n_0 = \rho$.

A Eq. A.8, em geral, deve ser resolvida numericamente e o valor de n/n_0 que é a raiz desta equação é o máximo de compressão no referencial próprio. Se a energia por nucleon é uma constante, $\epsilon_0(n) = n_0 m_0$ e, então, $f(n) = bnm_0$. Assim,

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)_{max} = \frac{\gamma^2(b+1) - b\gamma - 1}{b(\gamma - 1)}. \quad (A.9)$$

No limite não relativístico, $\gamma \rightarrow 1$, logo

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)_{max} = \frac{b+2}{b} \quad (A.10)$$

Para um gás não-relativístico, $b = 2/3$ e o máximo de compressão corresponde a uma densidade máxima $n_{max} = 4n_0$. Já no limite ultra-relativístico, γ é muito grande e, então,

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)_{max} = \frac{b+1}{b}\gamma. \quad (A.11)$$

Para um gás relativístico, $b = 1/3$, logo, $n_{max} = 4\gamma n_0$. Repare que, neste caso, não há um limite máximo de compressão.

A Fig. A.1(a), retirada da Ref. [Clar,86], ilustra o efeito de compressão na colisão $^{238}\text{U} + ^{238}\text{U}$ a 800 A MeV , com parâmetro de impacto 0.3, no contexto de modelos hidrodinâmicos. Na Fig. A.1(b), a simulação foi feita usando equação tipo BUU [More,92]. Neste último caso, a colisão é central e a colisão considerada é $^{96}\text{Mo} + ^{96}\text{Mo}$ a 75 MeV/n . Os painéis (a), (b), (c) e (d) correspondem a $t = 20, 60, 120$ e 160 fm/c . A constante de compressibilidade foi tomada, em ambos os casos, como $K = 200 \text{ MeV}$.

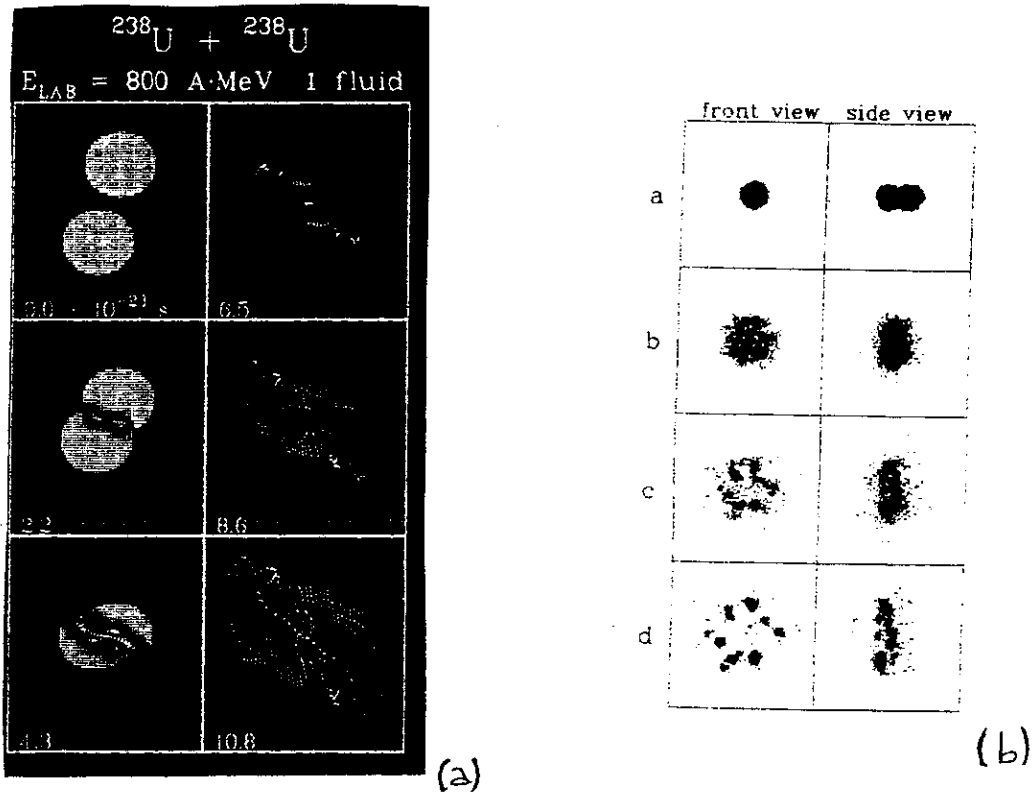
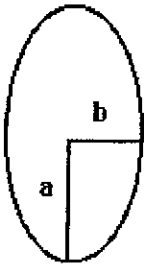


Fig. A.1 - Ilustração do efeito de compressão em colisão de íons pesados.

Note-se que nas previsões destes modelos dinâmicos, a aproximação de forma esférica, que vem sendo utilizada nas simulações não-dinâmicas da fragmentação nuclear não parece ser uma boa aproximação. Pode ser visto ainda que, quanto maior a

compressão, maior a expansão do sistema resultante da colisão.

Pretendemos então, parametrizar estes efeitos no contexto dos modelos percolativos. A vantagem destes modelos, como já mencionamos, é a sua simplicidade e transparência. De fato, as simulações que forneceram os resultados apresentados na Fig. A.1, envolvem uma série de hipóteses físicas de maneira que seria difícil separar o real efeito da compressão sobre, por exemplo, os espectros de energia e distribuições de tamanho, mesmo que estes modelos pudessem levar em conta correlações de muitos corpos e, então, gerar os *clusters*. Neste caso, os modelos percolativos, que são baseados essencialmente em geometria e probabilidade, parecem ser a ferramenta adequada ao problema.



Com efeito, adotando o modelo de nucleação, admitimos que o sistema resultante de uma colisão de íons pesados, tenha a mesma forma que a ilustrada na Fig. A.2, onde os semi-eixos a e b , são parâmetros do modelo.

Admitindo que a compressão na direção do feixe seja proporcional a γ (Eqs. A.10 e A.11), $b = R_0/\gamma$, onde R_0 é o raio da esfera (forma do sistema sem compressão) de volume V_0 . Como o sistema se expande, $V_f = \lambda V_0$ sendo λ o fator de expansão de volume do modelo de nucleação. Então, $a = \sqrt{\lambda\gamma}R_0$. Isto é, os parâmetros a e b do sistema deformado podem ser relacionados com os parâmetros R_0 e λ do modelo de nucleação por:

$$a = \sqrt{\lambda\gamma}R_0 \quad e \quad b = R_0/\gamma \quad (A.12)$$

Dependendo do valor de γ , diferentes configurações finais são obtidas e, conseqüentemente, diferentes resultados são esperados para os espectros de energia e distribuições de tamanho. De fato, na Fig. A.3, apresentamos as configurações finais para $A_0 = 233$. Neste caso, pelo modelo de nucleação, $\lambda = 1,71$ e $R_0 = 7.2fm$. No painel superior os resultados são para $\gamma = 1$ e, no painel superior, $\gamma = 2,3$. No caso $\gamma = 1$,

sem compressão, o sistema tem simetria esférica e somente a projeção das partículas no plano (X, Y) é apresentada. Para $\gamma = 2, 3$, o movimento do projétil se dá na direção Z e a projeção do sistema (figuras *a*), *b*) e *c*), foi feita nos planos (X, Y) , (Y, Z) e (X, Z) (respectivamente).

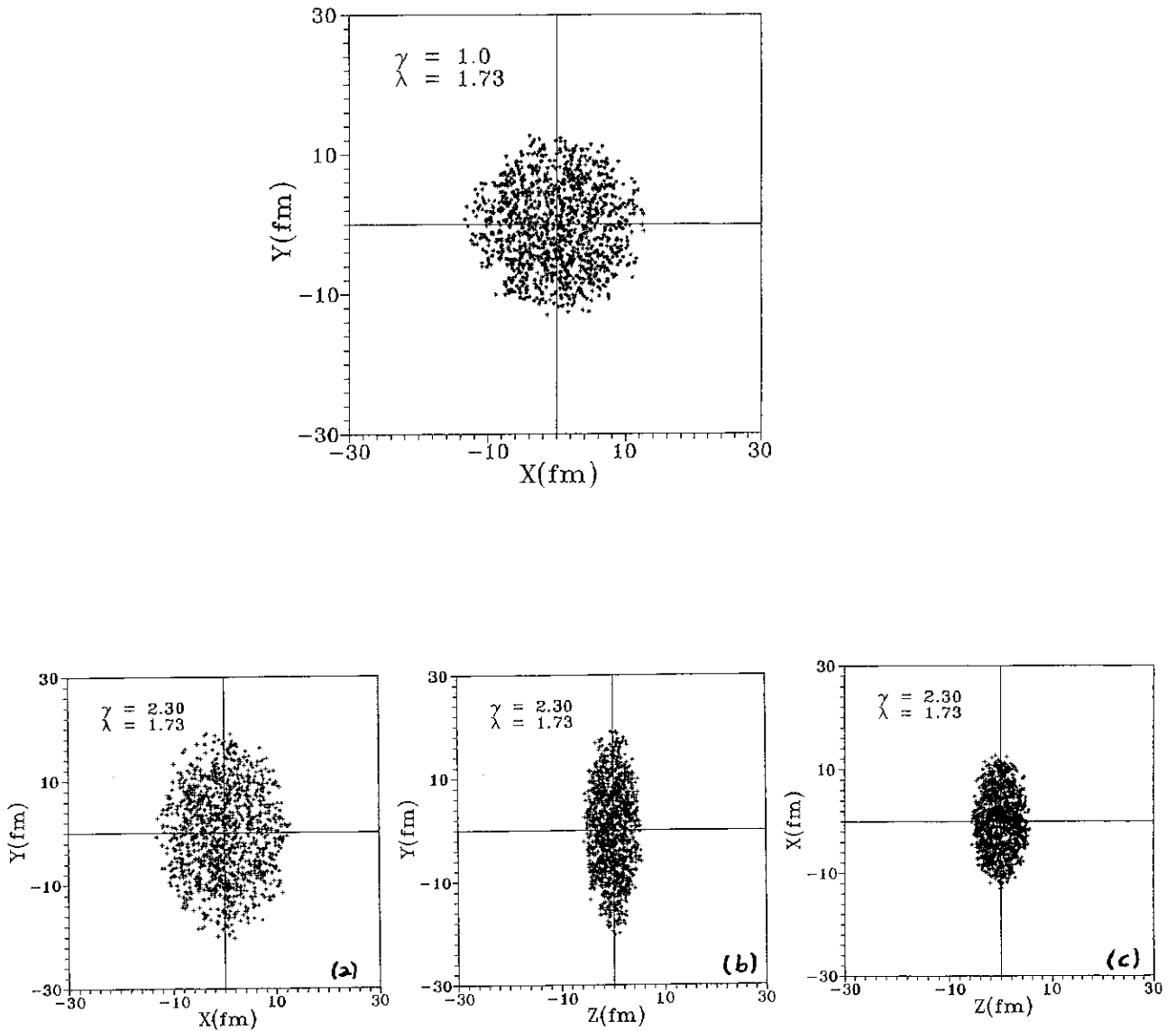


Fig. A.3 - Ilustração do efeito de compressão.

Na Fig. A.4, apresentamos os resultados preliminares para a distribuição de tamanho de um sistema com $A_0 = 233$ para várias energias do projétil. Este sistema é apropriado simular a reação $^{36}\text{Ar} + ^{197}\text{Au}$. Os quadrados cheios, os triângulos cheios e os

círculos vazios denotam $\gamma = 1; 1,2e2, 3$, respectivamente. Na Fig. A.4(a), mostramos o efeito da compressão sobre a multiplicidade total e na Fig. A.4(b), os resultados são para a distribuição de tamanho. Note-se que a multiplicidade total é fortemente dependente da energia do projétil e que, quanto mais alta esta energia, maior a multiplicidade. Observe-se também que o número de fragmentos pesados decresce rapidamente com a energia do projétil.

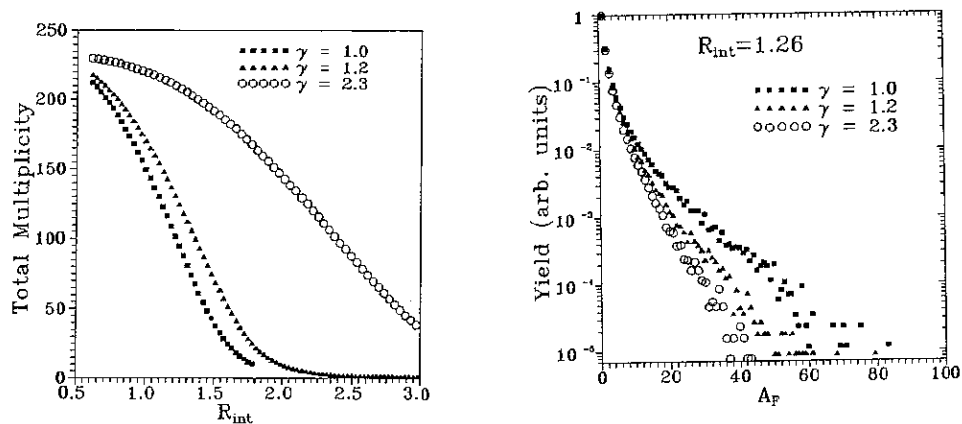


Fig. A.4 - Multiplicidade e Distribuição de Tamanho.

Referências

- [Aich,84] J. Aichelin, J. Hüfner e R. Ibarra, *Phys. Rev. C* **30**, 107 (1984).
- [Aich,86] J. Aichelin e H. Stöcker, *Phys. Lett.* **176B**, 14 (1986).
- [Aich,88] J. Aichelin, G. Peilert, A. Bohnet, A. Rosenhauer, H. Stöcker e W. Greiner, *Phys. Rev C* **37**, 2451 (1988).
- [Aich,91] J. Aichelin, *Phys. Rep.* **202**, 233 (1991).
- [Andr,89] L.N. Adronenko, A.A. Kotov, L.A. Vaishnena, W. Neubert, H.W. Barz, J.P. Bondorf, R. Donangelo, H. Schulz, *Phys. Lett.* **219B**, 165 (1986).
- [Barz,86] H.W. Barz, J.P. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin e H. Schulz, *Nucl. Phys.* **A448** 753 (1986).
- [Barz,92] H.W. Barz, J.P. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin e H. Schulz e K. Sneppen, *Phys. Rev. C* **45**, R2541 (1992).
- [Baue,85] W. Bauer, D.R. Dean, U. Mosel e U. Post, *Phys. Lett.* **150B**, 53 (1985).
- [Baue,86a] W. Bauer, U. Post, D.R. Dean e U. Mosel, *Nucl. Phys.* **A452** (1986), 699.

- [Baue,86b] W. Bauer, D.R. Dean, U. Mosel e U. Post, *Proceedings of the International Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations XIV*, Hirschegg, (1986).
- [Baue,87] W. Bauer, G.F. Bertsch e S. Das Gupta, *Phys. Rev. Lett* **58**, 863 (1987).
- [Baue,88] W. Bauer, *Phys. Rev. C* **38**, 1297 (1987).
- [Baym,79] G. Baym, *Physica* **96A**, 131 (1979).
- [Beau,94] L. Beaulieu, R. Laforest, J. Pouliot, R. Roy, C. St-Pierre, G.C. Ball, E. Hagberg, D. Horn e R.B. Walker, *Nucl. Phys.* **A580**, 81 (1994).
- [Bert,87] B. Berthier, R. Boisgard, J. Julien, J.M. Hisleur, R. Lucas, C. Mazur, C. Ngô e M. Ribrag, *Phys. Lett.* **193B**, 417 (1987).
- [Bial,86] A. Bialas e R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B273**, 703 (1986).
- [Bial,88a] A. Bialas e R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B308**, 857 (1988).
- [Bial,88b] A. Bialas e R. Peschanski, *Phys. Lett.* **207B**, 59 (1988).
- [Bial,90] A. Bialas e K. Zalewski, *Phys. Lett.* **238B**, 413 (1990).
- [Bial,92] A. Bialas, *Acta Phys. Pol.* **B23**, 561 (1992).
- [Bind,79] K. Binder (ed.), *Monte Carlo Methods in Statistical Physics; Topics in Current Physics*, Vol. 7, Springer, Heidelberg, (1979).
- [Biro,86] T.S. Biro, J. Knoll e J. Richert, *Nucl. Phys.* **A459**, 693 (1986).
- [Blin,86] A.H. Blin, M. Brack e B. Hiller, *Phys. Lett.* **182B**, 239 (1986).
- [Blin,88] A.H. Blin, B. Hiller, H. Reinhardt e P. Schuck, *Nucl. Phys.* **A484**, 295 (1988).
- [Boal,84] D.H. Boal, *Phys. Rev. C* **30**, 119 (1984).
- [Bond,85a] J.P. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin, C.J. Pethick, H. Schulz e K. Sneppen, *Nucl. Phys.* **A443**, 321 (1985).
- [Bond,85b] J.P. Bondorf, R. Donangelo, I.N. Mishustin, C.J. Pethick e H. Schulz, *Nucl. Phys.*

- A444, 460 (1985).
- [Bond,88] J.P. Bondorf, R. Donangelo e K. Sneppen, *Phys. Lett* **214B**, 321 (1988).
- [Botv,87] A.S. Botvina, A.S. Iljinov, I.N. Mishustin, J.P. Bondorf, R. Donangelo e K. Sneppen, *Nucl. Phys.* **A475**, 663 (1987).
- [Bowm,91] D. R. Bowman, G.F. Peaslee, R. T. de Souza, N. Carlin, C. K. Gelbke, W. G. Gong, Y. D. Kim, M. A. Lisa, W. G. Lynch, L. Phair, M. B. Tsang, C. Willians, N. Colonna, K. Hanold, M. A. McMahan, G. J. Wozniak, L. G. Moretto e W. A. Friedman, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 1527 (1991).
- [Bowm,92] D. R. Bowman, C.M. Mader, G.F. Peaslee, W. Bauer, N. Carlin, R.T. Souza, C.K. Gelbke, W.G. Gong, Y.D. Kim, M.A. Lisa, W.G. Lynch, L. Phair, M.B. Tsang, C. Willians, N. Colonna, K. Hanold, M.A. McMahan, G.J. Wozniak, L.G. Moretto e W. A. Friedman, *Phys. Rev. C* **46**, 1834 (1992).
- [Boze,92] P. Bozek, M. Ploszajczak e A. Tucholski, *Nucl. Phys.* **A539**, 693 (1992).
- [Brac,82] M. Brack e W. Stocker, *Nucl. Phys.* **A388**, 230 (1982).
- [Broa,57] S.R. Broadbent e J.M. Hammersley, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **53**, 629 (1957).
- [Burn,83] T.H. Burnett et al, JACEE collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2062 (1983).
- [Camp,84] X. Campi e J. Desbois, *Proc. 7th High Energy Heavy Ion Study*, Darmstadt, (1984).
- [Camp,85] X. Campi e J. Desbois, *Proc. of the 23th International Winter Meeting on Nuclear Physics*, Bormio, (1985).
- [Camp,86] X. Campi, *J. of Phys.* **A19**, L917 (1986).
- [Camp,88] Campi X., *Phys. Lett.* **208B**, 351 (1988).
- [Cebr,90] D.A. Cebra, S. Howden, J. Karn, A. Nadasen, C.A. Ogilvie, A. Vander Molen, G.D. Westfall, W.K. Wilson, J.S. Winfield e E. Norbeck, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2246 (1990).

- [Cerr,88] C. Cerruti, J. Desbois, R. Boisgard, C. Ngô, J. Natowitz e J. Nemeth, *Nucl. Phys.* **A476**, 75 (1988).
- [Chao,91] N.C. Chao e K.C. Chung, *J. of Phys.* **G17**, 1851 (1991).
- [Chun,87] K.C. Chung, R. Donangelo e H. Schechter, *Phys. Rev. C* **36**, 986 (1987).
- [Chun,89] K.C. Chung, *Proc. of the IV - Jorge André Swieca - Summer School in Nuclear Physics*, MG, Brasil, 107 (1989).
- [Chun,93] K.C. Chung, *J. of Phys.* **G19**, 1373 (1993).
- [Chun,94] K.C. Chung, aceito para publicação, *Comm. Theor. Phys.*, (1994).
- [Clar,86] R.B. Clare e D. Strottman, *Phys. Rep.* **141**, 177 (1986).
- [Cook,87] N.D. Cook e V. Dallacasa, *Phys. Rev. C* **35**, 1883 (1987).
- [Cour,48] R. Courant e K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, J. Wiley, New York, (1948).
- [Desb,87] J. Desbois, R. Boisgard, C. Ngô e J. Nemeth, *Z. Phys.* **A328**, 101 (1987).
- [DeAn,90] A.R. DeAngelis, *Phys. Rev. C* **42**, 2617 (1990).
- [DeAn,92] A.R. DeAngelis, D.H.E. Gross e R. Heck, *Nucl. Phys.* **A537**, 606 (1992).
- [Domb,72] C. Domb e M.S. Green (eds.), *Phase Transition and Critical Phenomena*, Vol. **1-6**, Academic, London, (1976).
- [Dona,89] R. Donangelo, K. Sneppen e J.P. Bondorf, *Phys. Lett.* **219B**, 165 (1989).
- [Dors,90] C.O. Dorso e R. Donangelo, *Phys. Lett.* **244B**, 165 (1990).
- [Dors,93] C.O. Dorso, P.E. Bolonga e R. Donangelo, *Phys. Rev. C* **47**, 2204 (1993).
- [Doss,87] K.G.R. Doss, H.-A. Gustafsson, H. Gutbrod, J.W. Harris, B.V. Jacak, K.-H. Kampert, B. Kolb, A.M. Poskanzer, H.-G. Ritter, H.R. Schmidt, L. Teitelbaum, M. Tincknell, S. Weiss e H. Wieman *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2720 (1987).

- [Dost,58] I. Dostrovsky, P. Rabinowitz e R. Bivins, *Phys. Rev.* **111**, 1659 (1958).
- [Elli,94] J.B. Elliot, M.L. Gilkes, J.A. Hauger, A.S. Hirsch, E. Hjort, N.T. Porile, R.P. Scharenberg, B.K. Srivastava, M.L. Tincknell e P.G. Warren, *Phys. Rev. C* **49**, 3185 (1994).
- [Eric,60] T. Ericson, *Adva. Phys.* **9**, 425 (1960).
- [Essa,80] J.W. Essam, *Rep. Prog. Phys.* **43**, 835 (1980).
- [Faul,89] J.C.R. Faulhaber, *Tese de Mestrado*, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, (1989).
- [Fial,89] K. Fialkowski, B. Wosiek e J. Wosiek, *Acta Phys. Pol.* **B20**, 639 (1989).
- [Finn,82] J.E. Finn, S. Agarwal, A. Bujak, J. Chuang, L.J. Gutay, A.S. Hirsch, R.W. Minich, N.T. Porile, R.P. Scharenberg, B.C. Stringfellow e F. Turkot, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1321 (1982).
- [Fish,67] M.E. Fisher, *Physics* **3**, 265 (1967).
- [Flor,41] P.J. Flory, *J. Am. Chem. Soc.* **63**, 3083 (1941).
- [Frie,83a] W.A. Friedman e W.G. Lynch, *Phys. Rev. C* **28**, 16 (1983).
- [Frie,83b] W.A. Friedman e W.G. Lynch, *Phys. Rev. C* **28**, R950 (1983).
- [Frie,92] W.A. Friedman, *Phys. Rev. C* **46**, R1595 (1992).
- [Gilk,94] M.L. Gilkes, S. Albergo, F. Bieser, F.P. Brandy, Z. Caccia, D.A. Cebra, A.D. Chacon, J.L. Chance, Y. Choi, S. Costa, J.B. Elliott, J.A. Hauger, A.S. Hirsch, E.L. Hjort, A. Insolia, M. Justice, D. Keane, J.C. Kintner, V. Lindenstruth, M.A. Lisa, U. Lynen, H.S. Matis, M. McMahan, C. McParland, W.F.J. Müller, D.L. Olson, M.D. Partlan, N.T. Porile, R. Potenza, G. Rai, J. Rasmussen, H.G. Ritter, J. Romanski, J.L. Romero, G.V. Russo, H. Sann, R. Scharenberg, A. Scott, Y. Shao, B.K. Srivastava, T.J.M. Symons, M. Tincknell, C. Tuvé, S. Wang, P. Warren, H.H. Wieman e K. Wolf, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1590 (1994).
- [Good,84] A.L. Goodman, J.I. Kapusta e A.Z. Mekjian, *Phys. Rev. C* **30** (1984), 851.

- [Gros,86] D.H.E. Gross, X.Z. Zhang e S.Y. Xu, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1544 (1986).
- [Gros,90] D.H.E. Gross, *Rep. Prog. Phys.* **53**, 605 (1990).
- [Harr,75] A.B. Harris, T.C. Lubensky, W.K. Holcomb e C. Dasgupta, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 327 (1975).
- [Herm,86] H.J. Hermann, *Phys. Rep.* **136**, 153 (1986).
- [Hirs,84] A.S. Hirsch, A. Bujak, J.E. Finn, L. Gutay, R.W. Minich, N.T. Porile, R.P. Scharenberg, B.C. Stringfellow e F. Turkot, *Phys. Rev. C* **29**, 508 (1984).
- [Hüfn,85] J. Hüfner, *Phys. Rep.* **125**, 129 (1985).
- [Jung,88] Chr. Jung, W. Cassing e U. Mosel e R.Y. Cusson, *Nucl. Phys.* **A477**, 256 (1988).
- [Jaqa,83] R.H. Jaqaman, A.Z. Mekjian e L. Zamick, *Phys. Rev. C* **27**, 2782 (1983).
- [Kada,76] L.P. Kadanoff, *Ann. Phys.* **100**, 359 (1976).
- [Kast,69] P.W. Kasteleyn e C.M. Fortuin, *J. Phys. Soc. Japan Suppl.* **26**, 11 (1969).
- [Kimu,92] K. Kimura e Y. Tanaka, *J. of Phys.* **G18**, 359 (1992).
- [Kirk,73] S. Kirkpatrick, *Rev. Mod. Phys.* **45**, 574 (1973).
- [Kreu,93] P. Kreuzt, J. C. Adloff, M. Begemann-Blaich, P. Bouissou, J. Hubele, G. Imme, I. Iori, G. J. Kunde, V. Lindenstruth, Z. Liu, U. Lynen, R. J. Meijer, U. Mikau, A. Moroni, W. F. J. Müller, C. Ngô, C. A. Ogilvie, J. Pochodzalla, G. Raciti, G. Rudolf, H. Sann, A. Schüttaul, W. Seidel, L. Stuttge, W. Trautmann e A. Tucholski, *Nucl. Phys.* **A556**, 672 (1993).
- [LeCo,50] K.J. LeCouter, *Proc. Phys. Soc.* **A63**, 259 (1950).
- [Li,94] T. Li, W. Bauer, D. Graig, E. Gualtieri, S. Hannuschke, R. Pak, A. M. Vander Molen, G. D. Westfall, J. S. Winfield, R. Lacey, A. Nadasen, R. S. Tickle e E. Norbeck, *Phys. Rev. C* **49**, 1630 (1994).
- [Mand,74] B.B. Mandelbroat, *J. Fluid Mech.* **62**, 331 (1974).

- [Mand,77] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York, (1977).
- [Mand,82] B.B. Mandelbrot, *preprint IBM Yorktown Heights*, N.Y., (1982).
- [Mahi,88] M. Mahi, A.T. Bujak, D.D. Carmony, Y.H. Chung, L.J. Gutay, A.S. Hirsch, G.L. Paderewski, N.T. Porile, T.C. Sangster, R.P. Scharenberg e B.C. Stringfellow, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1936 (1988).
- [Mini,82] R.W. Minich, S. Agarwal, A.T. Bujak, J. Chuang, J.E. Finn, L.J. Gutay, A.S. Hirsch, N.T. Porile, R.P. Scharenberg e B.C. Stringfellow, *Phys. Lett.* **118B**, 458 (1982).
- [More,75] L.G. Moretto, *Nucl. Phys.* **A247**, 211 (1975).
- [More,92] L.G. Moretto, K. Tso, N. Colonna e J. Wozniak, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1884 (1992).
- [Myer,69] W.D. Myers e W.J. Swiatecki, *Ann. of Phys.* **55**, 395 (1969).
- [Myer,85] W.D. Myers, W.J. Swiatecki e C.S. Wang, *Nucl. Phys.* **A436**, 185 (1985).
- [Neme,86] J. Nemeth, M. Barranco, J. Desbois e C. Ngô, *Z. Phys.* **A325**, 347 (1986).
- [Ngô,88] C. Ngô, *Nucl. Phys.* **A488**, 233c (1988).
- [Ngô,89a] C. Ngô, *Proc. of the IV - Jorge André Swieca - Summer School in Nuclear Physics*, MG, Brasil, (1989).
- [Ngô,89b] C. Ngô, H. Ngô, S. Leray e M.E. Spina, *Nucl. Phys.* **A499**, 148 (1989).
- [Nord,28] L.D. Nordheim, *Proc. Roy. Soc.* **A119**, 689 (1928).
- [Pana,85] A.D. Panagiotou, M.W. Curtin e D.K. Scott, *Phys. Rev. C* **31**, 55 (1985).
- [Peth,87] C.J. Pethick e D.G. Ravenhall, *Nucl. Phys.* **A471**, 19c (1987).
- [Phai,92] L. Phair, W. Bauer, D. R. Bowman, N. Carlin, R. T. de Souza, C. K. Gelbke, W. G. Gong, Y. D. Kim, M. A. Lisa, W. G. Lynch, G. F. Peaslee, M. B. Tsang, C. Willians, F. Zhu, N. Colonna, K. Hanold, M. A. McMahan, G. J. Wozniak e L. G. Moretto, *Phys. Lett.* **285B**, 10 (1992).

- [Plos,90] M. Ploszajczak e A. Tucholski, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1539 (1990).
- [Plos,91] M. Ploszajczak e A. Tucholski, *Nucl. Phys.* **A523**, 651 (1991).
- [Rand,87] J. Randrup e S.E. Koonin, *Nucl. Phys.* **A474**, 173 (1987).
- [Rand,89] J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A495**, 245c (1989).
- [Rein,85] H. Reinhardt e H. Schulz, *Nucl. Phys.* **A432**, 630 (1985).
- [Röpke,90] G. Röpke, H. Schulz, K.K. Gudima e V.D. Toneev, *Sov. J. Part. Nucl.* **21**, 153 (1990).
- [Sant,89a] A.J. Santiago, *Tese de Mestrado*, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, (1989).
- [Sant,89b] A.J. Santiago e K. C. Chung, *Proc. of the Int. Nucl. Phys. Conf.*, SP, Brasil, **vol. I**, 401 (1989).
- [Sant,90] A.J. Santiago e K.C. Chung, *J. of Phys.* **G16**, 1483 (1990).
- [Sant,92a] A.J. Santiago e K.C. Chung, *Il Nuov. Cim.* **105A**, 1729 (1992).
- [Sant,92b] A.J. Santiago, *Acta Phys. Pol.* **B23**, 875 (1992).
- [Sant,92c] A.J. Santiago e K.C. Chung, *Anais da XV Reunião de Trabalhos sobre Física Nuclear no Brasil*, 57 (1992).
- [Sant,93] A.J. Santiago e K.C. Chung, *J. of Phys.* **G19** 349 (1993).
- [Sant,94] A.J. Santiago e K.C. Chung, submetido para publicação, *Prog. Theor. Phys.*, (1994).
- [Satz,89] H. Satz, *Nucl. Phys.* **B326**, 613 (1989).
- [Schl,87] T.J. Schlagel e V.R. Pandharipande, *Phys. Rev. C* **36**, 162 (1987).
- [Souz,91] R.T. de Souza, L. Phair, D.R. Bowman, N. Carlin, C.K. Gelbke, W.G. Wong, Y.D. Kim, M.A. Lisa, W.G. Lynch, G.F. Peaslee, M.B. Tsang, H.M. Xu, F. Zhu e W.A. Friedman, *Phys. Lett.* **268B**, 1214 (1991).

- [Souz,94] S.R.A. Souza, *Tese de Doutorado*, Universidade de Paris-Sud - Centre D'Orsay, (1994).
- [Shal,74] A. deShalit e H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics*, Vol. I, cap. VII, John Wiley & Sons, INC., N.Y., (1974).
- [Stau,79] D. Stauffer, *Phys. Rep.* **54**, 1 (1979).
- [Stau,92] D. Stauffer e A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, 2nd ed. (London: Taylor and Francis), (1992).
- [Stoc,43] W.H. Stockmayer, *J. Chem. Phys.* **11**, 45 (1943).
- [Teva,82] *The Tevalac* (Proposta de facilidade de RNR com 10 GeV/A), LBL, PUB 5081, (1982).
- [Uzum,93] D.I. Uzunov, *Theory of Critical Phenomena, Mean Field, Fluctuations and Renormalization*, World Scientific, London, (1993).
- [Vice,85] A. Vicentini, G. Jacucci e V.R. Pandharipande, *Phys. Rev. C* **31**, 1783 (1985).
- [Vino,73] K.S.S. Vinod e S. Kirkpatrick, *Adv. Phys.* **20**, 325 (1973).
- [Wadd,85] C.J. Waddington e P.S. Freier, *Phys. Rev. C* **31**, 888 (1985).
- [Warw,82] A.I. Warwick, H.H. Wieman, H.H. Gutbrod, M.R. Maier, J. Peter, H.G. Ritter, H. Stelzer e F. Weik, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1719 (1982).
- [Weis,37] V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **52**, 295 (1937).
- [Wils,74] K.G. Wilson e J. Kogut, *Phys. Rep.* **12C**, 75 (1974).
- [Xu,91] H.M. Xu, W.G. Lynch, P. Danielewicz e G.F. Bertsch, *Phys. Lett.* **261B**, 240 (1991).
- [Youn,75] A.P. Young e R.B. Stinchcombe, *J. of Phys.* **C8**, L535 (1975).
- [Zeng,87] Xiao-Ze Zeng, D.H.E. Gross e Z. Yuming, *Nucl. Phys.* **A461**, 641 (1987).
- [Zeld,87] Ya.B. Zeldovich, *Sov. Phys. Usp.* **30**, 353 (1987).

“EFEITOS DE TAMANHO FINITO E CRITICALIDADE EM FRAGMENTAÇÃO NUCLEAR”

ARNALDO JOSÉ SANTIADO

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Chung Kai Cheong - Presidente

Raul Donangelo

Takshi Kodama

Constantino Tsallis

Odilon Antônio Paula Tavares

Emil de Lima Medeiros - Suplente

Rio de Janeiro, 24 de novembro de 1995