

1995/05

L732

TESE DE
MESTRADO

**O ESPAÇO TEMPO
DE
UM MONOPOLO MAGNÉTICO**

Marcelo Costa de Lima

530.11
L 732

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 1995.



Dedicatória

Originalmente não pensei à quem dedicar esta dissertação. Entretanto, arrumando alguns livros velhos meus, encontrei algumas palavras de Maiakowski que gostaria de registrar...

*Talvez
 se possa esquecer
 o lugar em que se cria pança e papo ,
 mas a terra
 junto a qual
 sofreste fome
 a essa
 é impossível esquecer-la
 jamais*

.....

*Tenho visto lugares
 onde crescem os figos
 as laranjas e os pêssegos
 E cresciam
 sem esforço junto à minha boca .
 Mas era outra coisa !
 A terra
 que conquistaste
 e semi-morto
 custodiaste
 despertando a cada dia
 com o sibilar das balas
 e deitando-te
 com o fuzil ao lado
 com essa terra
 juntarás tua vida
 e por ela irás ao trabalho
 à festa
 e à morte.*

(Extraído de À PLENA VOZ)

... dedico esta dissertação à cidade do Rio de Janeiro.

Agradecimentos

- A Ivano Damião Soares, que me orientou e teve a paciência necessária nos momentos difíceis;
- A Lili, com quem dividi mais intensamente todos os momentos nesta cidade;
- A Teresa Warwar, pelo apoio e carinho que me deu e pelo reforço no sentido de eu “continuar lutando”;
- Aos entes queridos, afetos e amigos que ajudaram a tornar a vida no Rio mais amena e prazerosa: Neuzinha, Rey, Lia, Enzo, Ana Zélia, Analucia, Homero, João, Danilo, Javier, Felipe Paiva, Felipe, Célia, Hélio, Myriam, Denise Costa, Denise, Renata, Etel, Maria, Bibi, Augusto, Alexandre, Paulo, Martha, Vitório, Humberto e Renato;
- A CAPES pela bolsa.

Resumo

O ESPAÇO TEMPO DE UM MONOPOLO MAGNÉTICO

Examinamos classes de soluções das equações de Einstein-Maxwell que tem como fonte um monopolo magnético de Dirac. Exibimos soluções, com topologia de $S^3 \times R$, na qual a linha de singularidades do monopolo é transportada para a estrutura do espaço-tempo. A métrica deste espaço-tempo depende de um único parâmetro, que é a carga magnética do monopolo cujo campo magnético associado é a fonte de curvatura do modelo. Mostramos que a presença da estrutura de cordas no espaço-tempo conduz à violação global das identidades cíclicas do tensor de curvatura e das identidades de Bianchi. Devido à topologia $S^3 \times R$, o modelo apresenta linhas temporais que são geodésicas do tipo tempo fechadas. As transformações de gauge do potencial eletromagnético induzem transformações na variável temporal e vice-versa. Um exame de S^3 nos permite introduzir naturalmente duas variáveis temporais t_N e t_S nas quais a corda eletromagnética coincide com a linha de singularidades que aparece na métrica do espaço-tempo. Esta solução pertence a uma classe de espaços-tempos, com topologia $S^3 \times R$, nos quais podemos definir uma “massa magnética gravitacional”. A “massa magnética” desta solução é a própria carga do monopolo magnético que gera a curvatura.

Summary

THE SPACETIME OF A MAGNETIC MONOPOLE

We examine the classes solutions of Einstein-Maxwell equations with a Dirac magnetic monopole as a gravitational source. We show solutions, with topology $S^3 \times R$, where the monopole string is transferred to space-time. The metric in this space-time depends on one parameter, the magnetic charge of the monopole whose magnetic field is the source of curvature in the model. We show that this string in space-time leads to a global violation on the cyclic identities of the curvature tensor and the Bianchi identities. Because of the topology $S^3 \times R$ the model presents time-like curves that are closed time-like geodesics. The gauge transformations on the eletromagnetic potential induce transformations on the time variable and vice-versa. An examination of S^3 leads us to introduce naturally two time variables t_N and t_S . In these new variables the eletromagnetic string coincides with the string on the space-time metric. This solution belongs to a class of space-times, with topology $S^3 \times R$, where it may be possible to define a “gravitational magnetic mass”. The “magnetic mass” of this solution is the monopole magnetic charge itself which generates curvature.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Summary	v
Índice	vi
Notação e convenções	viii
1 Introdução	1
2 Espaço-tempo com estrutura topológica de $S^3 \times R$	5
2.1 Quatérnions de Hamilton e o Grupo de Lie S^3	5
2.1.1 Geradores do espaço tangente à tri-esfera	8
2.1.2 Os campos invariantes de S^3 e suas 1-formas duais invariantes	11
2.2 Construção das métricas que admitem S^3 como grupo de isometrias	15
2.3 Espaço-tempo $S^3 \times R$ com o tempo definido sobre S^3	18
2.3.1 Tensor de Einstein	20
2.3.2 Tensor de Weyl	25
3 Discussão das soluções	29
3.1 Soluções das Equações de Maxwell	29
3.2 Soluções das equações de Einstein	31
3.2.1 Primeira classe de soluções. A solução de NUT-Brill	32
3.2.2 Segunda classe de soluções	40

4	Singularidades e violação das condições de integrabilidade	45
4.1	Monopolos de Dirac	46
4.2	As condições de integrabilidade e o Lema de Poincarè	51
4.3	As coordenadas t_N e t_S sobre S^3	53
4.4	A fronteira de S^3	57
4.5	O análogo gravitacional	58
4.5.1	O monopolo magnético gravitacional	58
4.5.2	Violação das condições de integrabilidade	63
5	Conclusão	68
6	Apêndice A : Formalismo de tétRADAS	70
7	Apêndice B : Conteúdo Material	78
	Referências	81

Notação e convenções

1. Índices

- (a) gregos minúsculos ($\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3$) são utilizados para caracterizar índices de espaço-tempo;
- (b) latinos minúsculos ($i, j \dots = 1, 2, 3$) são utilizados em componentes espaciais de tensores em base de coordenadas;
- (c) latinos minúsculos entre parênteses ($(i), (j) \dots$) são utilizados como etiquetas que caracterizam algum particular objeto;
- (d) latinos maiúsculos ($A, B \dots = 0, 1, 2, 3$) são utilizados em componentes de tensores em base de tétradas;

2. Derivadas

- (a) A derivada simples sobre funções, relativa ao argumento das mesmas, é denotada por “ ’ ”; exceto quando escrita explicitamente.
- (b) A derivada simples sobre tensores é denotada pelo símbolo “ \mid ”.
- (c) A derivada covariante sobre tensores é denotada pelo símbolo “ \parallel ”.

Capítulo 1

Introdução

Analisamos, neste trabalho, possíveis alternativas de espaços-tempos cuja fonte de curvatura é um monopolo magnético de Dirac. Conforme é sabido, não há como, em princípio, dada uma fonte caracterizar univocamente a métrica e a topologia do espaço-tempo e é justamente devido a isso que temos possíveis espaços-tempos distintos para uma mesma fonte, no caso o monopolo magnético. Em verdade já existem, no contexto da teoria geral da relatividade (TGR), soluções de campo conhecidas que comportam monopolos magnéticos como fonte de gravitação, como é o caso da solução de Reissner-Nordström [14] [13] e NUT-Brill [1] [3], onde estes espaços tempos tem topologias e características significativamente distintas

Os monopolos magnéticos de Dirac induzem, no eletromagnetismo de Maxwell, linhas de singularidade para o potencial eletromagnético A_μ que, por sua vez, conduzem à violação da simetria cíclica sobre o tensor de Maxwell, expressa pelo segundo grupo de equações de Maxwell. O objetivo desta tese é examinar como esta estrutura de linhas de singularidade de um monopolo magnético de Dirac se reflete no espaço-tempo, quando este monopolo gera gravitação. Mostramos três possíveis situações dependendo da topologia do espaço-tempo e da natureza do campo gravitacional.

Em uma primeira situação temos, por exemplo, aquela da solução de Reissner- Nordström [14] tendo um monopolo magnético como fonte da gravitação em um espaço-tempo cuja topologia é a de $R \times R \times S^2$. Nesta solução o espaço-tempo não herda a estrutura de linhas de singularidades do monopolo magnético de Dirac. O parâmetro de carga do monopolo pode, inclusive, ser feito zero sem que isto altere a topologia do espaço-tempo e a natureza do campo gravitacional, no sentido de que continuamos a ter uma solução que representa o campo gravitacional gerado por uma fonte localizada, esfericamente simétrica de massa m .

Na segunda situação temos a solução de NUT-Brill, que é uma generalização da solução de Schwarzschild-Reissner-Nordström para um espaço-tempo cuja topologia é a de $S^3 \times R$ e que engloba uma solução do vazio devido a NUT [1] e a extensão desta para o caso no qual temos um campo eletromagnético, gerando curvatura, associado a uma fonte que é simultaneamente elétrica e magnética, devido a Brill [3]. Para esta solução temos um parâmetro adicional além da massa m e da carga eletromagnética ϵ_0 , que é o chamado parâmetro de NUT. Na solução de NUT-Brill, conforme discutiremos, o espaço-tempo apresenta uma estrutura “tipo corda” análoga àquela que encontramos no eletromagnetismo com monopolo magnético de Dirac. O parâmetro responsável por tais características no espaço-tempo de NUT-Brill é o parâmetro de NUT, que gera a parte magnética do tensor de Weyl. Devido a isto este parâmetro tem sido apontado, na literatura [9], como uma espécie de carga magnética gravitacional ou massa magnética. Esta estrutura de linhas de singularidade, presente na solução de NUT-Brill, é intrínseca à topologia $S^3 \times R$ deste espaço-tempo, não estando relacionada à presença da fonte de natureza eletromagnética no modelo. Deste modo a presença do monopolo não é essencial para gerar um espaço-tempo com tais características, sendo a carga magnética independente do parâmetro de NUT. Desde que a parte magnética do tensor de Weyl é construída com o seu tensor dual, este parâmetro é também denominado massa dual, como iremos discutir na secção (3.2.1).

Há outra motivação para pensarmos o parâmetro de NUT como massa dual. Devido ao caráter curioso deste parâmetro, certos autores [9] empenharam-se em estabelecer uma interpretação física para o mesmo. Examinando soluções estacionárias e assintoticamente planas das equações de Einstein no vácuo, Hansen [12] mostrou que o parâmetro de NUT poderia ser interpretado como um parâmetro dual à massa no seguinte sentido: Hansen introduziu, a definição de potenciais de massa Φ_M e momento angular Φ_J , mostrando que tais potenciais caracterizam univocamente a estrutura local destes espaços-tempos. Expandindo estes potenciais em momentos de multipolo Hansen mostrou que, para a solução de NUT, o monopolo associado a Φ_M correspondia à massa, m , da solução de NUT; enquanto que o monopolo associado a Φ_J correspondia justamente ao parâmetro de NUT. O parâmetro de NUT era caracterizado, desta forma, como um monopolo de momento angular e a dualidade entre este e a massa era sugerida pela existência de uma transformação de dualidade entre os potenciais Φ_M e Φ_J , no sentido de Geroch [8]. Por tal rotação dual podemos, por exemplo, levar uma solução como a de Schwarzschild, onde o único parâmetro presente na solução é a massa m , na solução de NUT “pura”, onde temos somente o parâmetro de NUT gerando gravitação, e vice-versa.

A terceira situação, a qual mostramos neste trabalho, consiste na situação mais simples de um espaço-tempo com estrutura topológica de $S^3 \times R$, tendo um monopolo magnético de Dirac como única fonte da gravitação. A métrica deste espaço-tempo depende de um único parâmetro, que é a carga magnética do monopolo e que desempenha o mesmo papel que o parâmetro de NUT desempenhara no caso daquela solução, e fazendo com que o campo gravitacional herde as estruturas de linhas de singularidades que este monopolo produz no campo eletromagnético.

Para discutirmos este problema de modo claro começamos por introduzir noções de geometria diferencial necessárias à caracterização de um espaço-tempo com topologia de

$S^3 \times R$, exibindo os campos vetoriais que caracterizam o grupo de movimentos sobre a variedade. Deste modo caracterizamos de forma precisa a topologia da variedade e a forma genérica que uma métrica sobre esta variedade admite. Discutimos em seguida classes de soluções das equações de Einstein-Maxwell para um modelo assim construído, exibindo a solução de NUT-Brill e apresentando a solução nova, na qual mostramos que as linhas de singularidade que um monopolo magnético apresenta são transportadas para o espaço-tempo e, diferentemente da solução de NUT-Brill, é o próprio monopolo magnético, que é fonte do campo gravitacional, o responsável por tais efeitos. Mostramos assim que dispomos de um parâmetro no modelo que desempenha o mesmo papel que o parâmetro de NUT o faz na solução de NUT-Brill, sendo que agora o significado físico do mesmo está bem definido, tratando-se da própria carga magnética.

Capítulo 2

Espaço-tempo com estrutura topológica de $S^3 \times R$

Iremos, neste capítulo, coletar alguns resultados relevantes sobre o grupo de Lie S^3 fazendo uso do formalismo dos quatérnions de HAMILTON, para então construirmos uma variedade Riemanniana que admita este grupo de Lie como grupo de isometrias. Exibiremos então todos os cálculos relevantes, em base de tétradas, para a análise do modelo que iremos construir.

2.1 Quatérnions de Hamilton e o Grupo de Lie S^3

Seja um espaço euclidiano quadridimensional E_4 , coberto com coordenadas cartesianas (x^0, x^1, x^2, x^3) .

Definimos em E_4 uma tri-esfera unitária como sendo o lugar geométrico onde:

$$1 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{2.1}$$

Tal espaço E_4 é um espaço vetorial, real, no qual podemos introduzir uma base de versores, linearmente independentes, $\{e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$, que nos permite caracterizar vetores em E_4 , no sistema de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) , como:

$$H = x^\mu e_\mu \quad (2.2)$$

Vamos dotar os elementos $\{e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ de uma lei de produto, tornando o espaço vetorial E_4 uma álgebra. Introduzimos então a seguinte lei de produto:

$$\begin{cases} e_0 e_\mu = e_\mu \\ e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \epsilon_{ij}^k e_k, \end{cases} \quad (2.3)$$

Aos elementos de um espaço vetorial tornado uma álgebra, por alguma particular lei de produto, chamamos QUATÉRNIONS. Assim, os elementos (2.2), agora dotados da particular álgebra (2.3), com identidade, passam a ser chamados QUATÉRNIONS DE HAMILTON.

Assim um quatérnion de Hamilton é todo objeto da forma:

$$H = x^0 e_0 + x^i e_i \quad (2.4)$$

Podemos ainda definir o quatérnion conjugado, de Hamilton, por:

$$H^* = x^0 e_0 - x^i e_i \quad (2.5)$$

Devido a álgebra (2.3), vemos que os quatérnions proporcionais à identidade e_0 são ISOMORFOS ao corpo dos reais. Por isso, sempre que se tratar de um quatérnion deste tipo, iremos abreviadamente suprimir e_0 .

Podemos agora definir a tri-esfera como sendo o lugar geométrico onde temos:

$$H^* H = 1 \quad (2.6)$$

onde, conforme comentamos acima, escrevemos 1 em vez de e_0 .

Sendo H_1 e H_2 dois quatérnions de Hamilton, temos a seguinte propriedade com relação a operação de conjugação do produto destes quatérnions:

$$(H_1 H_2)^* = H_2^* H_1^* \quad (2.7)$$

Com isso, dado um ponto sobre S^3 caracterizado por um quatérnio H , pertencente à S^3 , e dados dois outros quatérnions, U e W , pertencentes à S^3 , então,

$$\tilde{H} = (U H W) \quad (2.8)$$

pertence também à S^3 , devido a (2.6) e (2.7).

Vemos assim que a escolha dos quatérnions de Hamilton tornam as operações sobre a tri-esfera mais econômicas e elegantes mostrando que S^3 é um grupo de Lie que atua

sobre si mesmo por multiplicação à esquerda e à direita, definidos respectivamente por:

$$\begin{cases} \hat{H} = U H \\ \bar{H} = H W \end{cases} \quad (2.9)$$

que também mapeiam, separadamente, S^3 em S^3 , isto é:

$$\begin{cases} \hat{H} \hat{H}^* = 1 \\ \bar{H} \bar{H}^* = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Deste modo existe somente uma e somente uma transformação, para cada caso acima, que transforma $H \neq 0$ em outro quatérnion (\hat{H} ou \bar{H}), sendo respectivamente,

$$\begin{cases} U = \hat{H} H^* \\ W = H^* \bar{H} \end{cases} \quad (2.11)$$

Devido a isto temos então que o grupo definido pelo produto à esquerda (ou à direita) será simplesmente transitivo sobre S^3 . Podemos assim definir um grupo de Lie cuja lei de produto do grupo seja a multiplicação à esquerda (ou à direita).

A partir destas considerações adotaremos a convenção seguinte: sempre que nos referirmos à S^3 daqui em diante, estará subentendido tratar-se do grupo de Lie que atua simplesmente transitivamente sobre si mesmo e que tem sua lei de produto definida pela multiplicação à esquerda [5]. A multiplicação à direita, por sua vez, caracterizará o grupo recíproco à S^3 .

2.1.1 Geradores do espaço tangente à tri-esfera

Vamos agora caracterizar quem são os geradores do grupo S^3 , isto é, quais são os campos vetoriais que geram as translações sobre a tri-esfera. Tomemos, para isso, um ponto arbitrário infinitesimalmente próximo da identidade de S^3 , e_0 , e dado por:

$$h = e_0 + \epsilon^i e_i \quad (2.12)$$

onde $\epsilon^i \ll 1$.

Vemos, então que,

$$h h^* = 1 + O(\epsilon^2) \quad (2.13)$$

e portanto os versores (e_1, e_2, e_3) geram o espaço tangente à tri-esfera na identidade.

A forma destes versores em um ponto qualquer da tri-esfera, caracterizado por um quatérnion H , que geram o espaço tangente à tri-esfera em H , é obtida por multiplicação à esquerda de (e_1, e_2, e_3) na identidade, por H :

$$E_{(i)}(H) = H e_i = x^0 e_0 e_i + x^k e_k e_i \quad (2.14)$$

Estes são chamados campos vetoriais invariantes à esquerda sobre S^3 que são definidos genericamente por:

$$U E_{(i)}(H) = E_{(i)}(UH) \quad (2.15)$$

Assim, usando o sistema de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) , estes campos poderão ser representados, em um ponto arbitrário de S^3 , pelas matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{(1)} = (-x^1, x^0, x^3, -x^2) \\ E_{(2)} = (-x^2, -x^3, x^0, x^1) \\ E_{(3)} = (-x^3, x^2, -x^1, x^0) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Na base de coordenadas $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, estes três campos serão dados então por:

$$\begin{cases} E_{(1)} &= -x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_{(2)} &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^0} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_{(3)} &= -x^3 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^3} \end{cases} \quad (2.17)$$

Expressos nesta última forma podemos, de modo mais imediato, constatar que tais campos satisfazem à algebra do grupo, expressa pelas relações de comutação

$$[E_{(i)}, E_{(j)}] = 2 \epsilon_{ij}{}^k E_{(k)} \quad (2.18)$$

A construção análoga é também possível para o grupo recíproco, sendo os campos vetoriais invariantes à direita definidos por:

$$D_{(i)}(H) W = D_{(i)}(HW) \quad (2.19)$$

Conforme vemos, por (2.17), temos assim definidos três campos invariantes à esquerda sobre S^3 , os quais denotamos por $\chi_{(i)}$, que geram o espaço tangente a S^3 em cada ponto. Podemos agora definir 1-formas diferenciais duais aos mesmos. Numa base de coordenadas arbitrária, estes campos e suas 1-formas duais podem ser escritos como

$$\begin{cases} \chi_{(i)} &= E_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ \omega^{(j)} &= E_\alpha^{(j)} dx^\alpha \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$\langle \chi_{(i)} | \omega^{(j)} \rangle = \delta_{ij}^j = E_{(i)}^\alpha E_\alpha^{(j)} \quad (2.21)$$

Naturalmente o mesmo ocorre para os campos vetoriais invariantes à direita e suas 1-formas duais associadas.

$$\begin{cases} \xi_{(i)} &= D_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ \rho^{(j)} &= D_\alpha^{(j)} dx^\alpha \end{cases} \quad (2.22)$$

onde

$$\langle \xi_{(i)} | \rho^{(j)} \rangle = \delta_{(i)}^j = D_{(i)}^\alpha D_\alpha^{(j)} \quad (2.23)$$

2.1.2 Os campos invariantes de S^3 e suas 1-formas duais invariantes

Para exibirmos explicitamente a forma dos campos vetoriais invariantes à esquerda e à direita, bem como suas respectivas 1-formas duais invariantes devemos escolher uma carta sobre S^3 . Não é conveniente fazer isto com as coordenadas cartesianas (x^0, x^1, x^2, x^3) devido ao vínculo (2.1), que torna este sistema de coordenadas pouco operacional. Tomemos então, para tal propósito, os ângulos de Euler, $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, que são coordenadas sobre a tri-esfera definidas por:

$$\begin{cases} x^0 = \cos\left(\frac{\theta^1}{2}\right)\cos\left[\frac{1}{2}(\theta^3 + \theta^2)\right] \\ x^1 = \cos\left(\frac{\theta^1}{2}\right)\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\theta^3 + \theta^2)\right] \\ x^2 = \text{sen}\left(\frac{\theta^1}{2}\right)\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\theta^3 - \theta^2)\right] \\ x^3 = \text{sen}\left(\frac{\theta^1}{2}\right)\cos\left[\frac{1}{2}(\theta^3 - \theta^2)\right] \end{cases} \quad (2.24)$$

onde,

$$\begin{cases} \theta^1 \in [0, \pi] \\ \theta^2 \in [0, 2\pi] \\ \theta^3 \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (2.25)$$

Em termos dos ângulos de Euler podemos caracterizar os campos vetoriais invariantes por translações à esquerda que são os geradores do grupo de Lie S^3 . Faremos o mesmo para os campos vetoriais invariantes à direita.

Para efeito operacional é interessante introduzir a seguinte representação para os quatérnions de Hamilton (2.3):

$$\begin{aligned} e_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e_1 &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ e_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ e_3 &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Desta forma um quatérnion, H , fica representado pela matriz 2×2 e o produto de quatérnions fica representado pelo produto de matrizes. Um quatérnion de Hamilton, $H \in S^3$, é agora representado por:

$$H = \begin{bmatrix} x^0 + ix^1 & x^2 + ix^3 \\ -x^2 + ix^3 & x^0 - ix^1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

que é uma matriz unitária com determinante positivo e igual à unidade. Tal representação dos quatérnions estabelece assim um ISOMORFISMO entre os elementos do grupo S^3 e os de SU_2 . Um método prático para exibirmos os campos e as 1-formas duais consiste em usar o seguinte resultado [11]:

Controem-se os seguintes produtos matriciais e expande-se o resultado novamente em termos da base (2.26),

$$H^{-1} dH = \omega^{(i)} e_i \quad (2.28)$$

$$dH H^{-1} = \rho^{(i)} e_i \quad (2.29)$$

Deste modo, os coeficientes da expansão na base (2.26) dos produtos matriciais acima constituem, respectivamente, as 1-formas invariantes à esquerda ($\omega^{(i)}$) e à direita ($\rho^{(i)}$), de S^3 .

Tomando, então, as coordenadas sobre S^3 definidas em (2.24), e efetuando os cálculos, podemos exibir as 1-formas invariantes à esquerda e à direita, que são, respectivamente:

$$\begin{cases} \omega^{(1)} = \frac{1}{2} (d\theta^3 + \cos(\theta^1) d\theta^2) \\ \omega^{(2)} = \frac{1}{2} (\text{sen}(\theta^3) d\theta^1 - \cos(\theta^3) \text{sen}(\theta^1) d\theta^2) \\ \omega^{(3)} = \frac{1}{2} (\cos(\theta^3) d\theta^1 + \text{sen}(\theta^3) \text{sen}(\theta^1) d\theta^2) \end{cases} \quad (2.30)$$

e,

$$\begin{cases} \rho^{(1)} = \frac{1}{2} (d\theta^2 + \cos(\theta^1) d\theta^3) \\ \rho^{(2)} = \frac{1}{2} (-\text{sen}(\theta^2) d\theta^1 + \cos(\theta^2) \text{sen}(\theta^1) d\theta^3) \\ \rho^{(3)} = \frac{1}{2} (\cos(\theta^2) d\theta^1 + \text{sen}(\theta^2) \text{sen}(\theta^1) d\theta^3) \end{cases} \quad (2.31)$$

Estas 1-formas satisfazem às relações :

$$\begin{cases} d\omega^{(i)} = -2 \epsilon^i_{jk} \omega^{(j)} \wedge \omega^{(k)} \\ d\rho^{(i)} = 2 \epsilon^i_{jk} \rho^{(j)} \wedge \rho^{(k)} \end{cases} \quad (2.32)$$

Os campos invariantes à esquerda e à direita, sobre S^3 , são obtidos através das relações (2.21) e (2.23), e são respectivamente:

$$\begin{cases} \chi_{(1)} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \\ \chi_{(2)} = 2 \left(\text{sen}\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \frac{\cos\theta^3}{\text{sen}\theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \text{cotg}\theta^1 \cos\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \\ \chi_{(3)} = 2 \left(\cos\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^1} + \frac{\text{sen}\theta^3}{\text{sen}\theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} - \text{cotg}\theta^1 \text{sen}\theta^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \end{cases} \quad (2.33)$$

e,

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{(1)} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \\ \xi_{(2)} = 2 \left(-\text{sen}\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \text{cotg}\theta^1 \cos\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta^2}{\text{sen}\theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \\ \xi_{(3)} = 2 \left(\cos\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^1} - \text{cotg}\theta^1 \text{sen}\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\text{sen}\theta^2}{\text{sen}\theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Estes campos satisfazem naturalmente à álgebra do grupo expressa nas seguintes relações de comutação:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\xi_{(i)}; \xi_{(j)}] = -2 \epsilon^k_{ij} \xi_{(k)} \\ [\chi_{(i)}; \chi_{(j)}] = 2 \epsilon^k_{ij} \chi_{(k)} \\ [\xi_{(i)}; \chi_{(j)}] = 0 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Posto isto, veremos como construir a métrica induzida sobre a tri-esfera, em termos dos campos invariantes (2.33). Para isso vamos estabelecer primeiramente algumas noções.

2.2 Construção das métricas que admitem S^3 como grupo de isometrias

Seja uma variedade (\mathcal{M}, g) de dimensão \underline{m} , onde a métrica, g , admite um dado grupo de isometrias, que atua simplesmente transitivamente sobre a variedade, caracterizado pelos vetores de Killing $\{\xi_{(i)}, i = 1, 2, \dots, m\}$.

A métrica, g , é uma estrutura adicional doada a variedade \mathcal{M} e definida como um operador bilinear que a todo par de campos $(U_{(k)}, U_{(l)})$, sobre \mathcal{M} , associa um número real:

$$g_{(k)(l)} = g(U_{(k)}, U_{(l)}) \quad (2.36)$$

onde (k) e (l) não são índices, mas etiquetas que caracterizam os campos particulares $U_{(k)}$ e $U_{(l)}$.

Se $U_{(k)}^\alpha$ são as componentes dos vetores $U_{(k)}$ na base de coordenadas $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, então as componentes da métrica g , nesta base, serão dadas pela matriz:

$$g_{(k)(l)} = U_{(k)}^\alpha U_{(l)}^\beta g_{\alpha\beta} \quad (2.37)$$

onde $g_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$.

Dizemos que um dado conjunto de vetores $\{\chi_{(i)}, i = 1, 2, \dots, m\}$, linearmente independentes, constitui uma base invariante sob o grupo gerado por $\{\xi_{(i)}, i = 1, 2, \dots, m\}$, se:

$$\mathcal{L}_{\xi_{(i)}} \chi_{(k)} = [\chi_{(i)}, \xi_{(k)}] = 0 \quad (2.38)$$

onde \mathcal{L} denota a derivada de Lie.

Assim a matriz $\gamma_{(k)(l)}$, contruída pela aplicação de g sobre a base invariante $\chi_{(i)}$ é constante sobre toda a variedade, pois:

$$\mathcal{L}_{\xi_{(i)}} \gamma_{(k)(l)} = \mathcal{L}_{\xi_{(i)}} \left(\chi_{(k)}^\alpha \chi_{(l)}^\beta g_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad (2.39)$$

Observando então as relações (2.35), teremos que a métrica induzida sobre a tri-esfera pode ser caracterizada em termos dos campos (2.33), tomados como base invariante, produzindo uma matriz constante $\delta_{(k)(l)}$. Neste caso, os campos (2.34) serão vetores de

Killing da métrica assim construída. O elemento de linha seria então obtido, neste caso, saturando a matriz $\delta_{(k)(l)}$ com as 1-formas duais aos campos invariantes à esquerda (2.33).

$$d\sigma^2 = \delta_{(i)(j)} \omega^{(i)} \omega^{(j)} \quad (2.40)$$

onde $\delta_{(i)(j)}$ é, neste caso, a matriz identidade 3×3 .

Embora a construção que fizemos aqui tenha levado em conta a métrica naturalmente induzida sobre a tri-esfera pela geometria de E_4 , onde S^3 está imersa, qualquer variedade, em três dimensões, cujo elemento de linha se escreva na forma de:

$$d\sigma^2 = \gamma_{(i)(j)} \omega^{(i)} \omega^{(j)} \quad (2.41)$$

onde $\gamma_{(i)(j)}$ for uma matriz constante 3×3 , de assinatura arbitrária, terá um grupo de isometrias S^3 , atuando simplesmente transitivamente sobre a mesma e sendo gerado, no caso de (2.41), pelos campos vetoriais (2.33). Neste caso, os campos (2.34) serão vetores de Killing da métrica assim construída. A situação simétrica ocorre se construirmos o elemento de linha com as 1-formas $\rho^{(i)}$ sendo, neste caso, os geradores do grupo de isometrias dados por (2.34) e os vetores de Killing dados pelos campos (2.33). O grupo de Lie S^3 corresponde a um grupo do tipo Bianchi IX na classificação de Bianchi [17].

Quando dizemos que uma variedade em quatro dimensões tem estrutura de $S^3 \times R$, estamos caracterizando que esta variedade admite um foliamento, no qual, para cada valor constante de um parâmetro definido sobre R , temos uma superfície que é órbita do grupo de isometrias S^3 , simplesmente transitivo, isto é, o próprio S^3 .

Assim, uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, coberta com $(\eta, \theta^1, \theta^2, \theta^3)$, que tenha es-

estrutura de $S^3 \times R$, admite um elemento de linha da forma:

$$dS^2 = \pm d\eta^2 + \gamma_{(i)(j)}(\eta) \omega^{(i)} \omega^{(j)} \quad (2.42)$$

onde η é uma coordenada definida sobre os reais e $\gamma_{(i)(j)}$ é uma matriz que depende somente de η , de assinatura conveniente.

Os vetores de Killing de um espaço-tempo assim construído são, por construção, os campos vetoriais (2.34). No caso de $\gamma_{(i)(j)}$ ser constante, temos ainda o campo vetorial:

$$\xi_{(4)} = \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.43)$$

associado a coordenada η . A relação de comutação de $\xi_{(4)}$ com os campos (2.33) e (2.34) sendo,

$$\begin{cases} [\chi_{(i)}; \xi_{(4)}] = 0 \\ [\xi_{(i)}; \xi_{(4)}] = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

2.3 Espaço-tempo $S^3 \times R$ com o tempo definido sobre S^3

Podemos, agora caracterizar uma variedade $(M, g_{\mu\nu})$, que possui uma estrutura topológica de $S^3 \times R$.

Para fazermos isto, tomamos o resultado (2.42), e postulamos a métrica $g_{\mu\nu}$, que gera o seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = -dr^2 + \gamma_{(i)(j)} \omega^{(i)} \omega^{(j)} \quad (2.45)$$

Tomamos, então a matriz $\gamma_{(i)(j)}$ da forma:

$$\gamma_{(i)(j)} \equiv \begin{pmatrix} -B^2(r) & 0 & 0 \\ 0 & -B^2(r) & 0 \\ 0 & 0 & 4A^2(r) \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

onde $\omega^{(i)}$ são as 1-formas invariantes à esquerda, sobre S^3 , definidas em (2.30). Podemos desprezar os fatores $\frac{1}{2}$ em (2.30) e (2.31), bem como os fatores 2 em (2.33) e (2.34), normalizando assim as relações (2.32) e (2.35). Isto acarreta tomar S^3 de "raio" 2 [4], em vez de tomar "raio unitário" tal qual foi feito no início deste capítulo.

Identificando então $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (\theta, \phi, t)$ vemos, por (2.33), (2.46) e (2.45), que o tempo é, por construção, uma linha fechada em S^3 . Em outras palavras, a curva integral do campo $\frac{\partial}{\partial t}$ é do tipo tempo fechada, de acordo com a métrica (2.47) abaixo. Mais tarde veremos que, para a solução discutida em (4.5.1) esta curva é uma geodésica do tipo tempo fechada. Isto conduz, certamente, a problemas de violação da causalidade no modelo os quais comentaremos no capítulo seguinte. Teremos, então, o seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = 4A^2(r) [dt + \cos\theta d\phi]^2 - B^2(r) [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] - dr^2 \quad (2.47)$$

2.3.1 Tensor de Einstein

Nesta e na próxima secções exibiremos os cálculos de todos os objetos geométricos relevantes para análise do modelo, fazendo o uso do formalismo de tétadas. Por hora vamos exibir os resultados relevantes que conduzem a forma do tensor de Einstein para esta geometria. Como o elemento de linha do modelo é da forma (2.47), escolhemos como base de tétadas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^0 = 2A(r) [dt + \cos \theta d\phi] \\ \theta^1 = B(r) d\theta \\ \theta^2 = B(r) \text{sen}\theta d\phi \\ \theta^3 = dr \end{array} \right. , \quad (2.48)$$

de modo que o elemento de linha se torna, na base de tétadas,

$$dS^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B, \quad (2.49)$$

onde,

$$\eta_{AB} \equiv \text{diag}(+, -, -, -) \quad (2.50)$$

De acordo com os resultados do apêndice A, teremos então:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta^0 = -\left(\frac{A'}{A}\right) \theta^0 \wedge \theta^3 - \left(\frac{2A}{B^2}\right) \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^1 = -\left(\frac{B'}{B}\right) \theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 = \left(\frac{1}{B} \cotg\theta\right) \theta^1 \wedge \theta^2 - \left(\frac{B'}{B}\right) \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 = 0, \end{array} \right. \quad (2.51)$$

donde lemos diretamente os C^A_{BC} , por (A.14). Suas componentes independentes não nulas são então:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{003} = -\left(\frac{A'}{A}\right) \\ C_{012} = -\left(\frac{2A}{B^2}\right) \\ C_{113} = \left(\frac{B'}{B}\right) \\ C_{221} = \left(\frac{1}{B} \cotg\theta\right) \\ C_{223} = \left(\frac{B'}{B}\right) \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Assim as componentes independentes não nulas do coeficiente de rotação de Ricci são, por (A.16):

$$\left\{ \begin{array}{lll} \gamma_{300} = -\left(\frac{A'}{A}\right) & \gamma_{120} = \left(\frac{A}{B^2}\right) & \\ \gamma_{012} = -\left(\frac{A}{B^2}\right) & \gamma_{311} = \left(\frac{B'}{B}\right) & \gamma_{322} = \left(\frac{B'}{B}\right) \\ \gamma_{021} = \left(\frac{A}{B^2}\right) & \gamma_{122} = \left(\frac{1}{B} \cotg\theta\right) & \end{array} \right. \quad (2.53)$$

As componentes independentes, não nulas, da 1-forma de rotação, de acordo com (A.10), são então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{01} = -\left(\frac{A}{B^2}\right) \theta^2 \\ \Theta_{02} = \left(\frac{A}{B^2}\right) \theta^1 \\ \Theta_{03} = \left(\frac{A'}{A}\right) \theta^0 \\ \Theta_{12} = \left(\frac{A}{B^2}\right) \theta^0 + \left(\frac{1}{B} \cotg \theta\right) \theta^2 \\ \Theta_{13} = -\left(\frac{B'}{B}\right) \theta^1 \\ \Theta_{23} = -\left(\frac{B'}{B}\right) \theta^2 \end{array} \right. \quad (2.54)$$

As componentes independentes, não nulas, de $d\Theta_{AB}$ são exibidas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Theta_{01} = -\left(\frac{A}{B^3}\right) \cotg \theta \theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B}\right)' \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\Theta_{02} = -\frac{1}{B} \left(\frac{A}{B}\right)' \theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\Theta_{03} = -\left(\frac{A''}{A}\right) \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{2A'}{B^2} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\Theta_{12} = -\frac{2}{B} \left(\frac{A}{B}\right)' \theta^0 \wedge \theta^3 - \left(\frac{1}{B^2} + 2\frac{A^2}{B^4}\right) \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\Theta_{13} = \left(\frac{B''}{B}\right) \theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\Theta_{23} = -\frac{1}{B} \frac{B'}{B} \cotg \theta \theta^1 \wedge \theta^2 + \left(\frac{B''}{B}\right) \theta^2 \wedge \theta^3 \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Finalmente exibimos, então, as componentes independentes não nulas da 2-forma de curvatura Ω_B^A e do tensor de Riemann R_{BCD}^A de acordo com (A.21), e (A.19), que são

respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{01} = - \left(\frac{A' B'}{A B} + \frac{A^2}{B^4} \right) \theta^0 \wedge \theta^1 + \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \Omega_{02} = - \left(\frac{A' B'}{A B} + \frac{A^2}{B^4} \right) \theta^0 \wedge \theta^2 - \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega_{03} = - \left(\frac{A''}{A} \right) \theta^0 \wedge \theta^3 - \frac{2}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega_{12} = - \frac{2}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \theta^0 \wedge \theta^3 - \left(\frac{1}{B^2} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + 3 \frac{A^2}{B^4} \right) \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega_{13} = - \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \theta^0 \wedge \theta^2 + \left(\frac{B''}{B} \right) \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega_{23} = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \theta^0 \wedge \theta^1 + \left(\frac{B''}{B} \right) \theta^2 \wedge \theta^3 \end{array} \right. \quad (2.56)$$

e,

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_{0101} = - \left(\frac{A' B'}{A B} + \frac{A^2}{B^4} \right) & R_{1313} = \left(\frac{B''}{B} \right) \\ R_{0202} = - \left(\frac{A' B'}{A B} + \frac{A^2}{B^4} \right) & R_{2323} = \left(\frac{B''}{B} \right) \\ R_{0303} = - \left(\frac{A''}{A} \right) & R_{0123} = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \\ R_{1212} = - \left(\frac{1}{B^2} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + 3 \frac{A^2}{B^4} \right) & R_{0231} = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \right)' \end{array} \right. \quad (2.57)$$

O tensor de Ricci será, nesta base de tetradas, diagonal. Este é dado, em termos desta base por:

$$R_{AB} = \eta^{CD} R_{ACBD} \quad , \quad (2.58)$$

e as componentes independentes não nulas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = \left(\frac{A''}{A} + 2 \frac{A' B'}{A B} + 2 \frac{A^2}{B^4} \right) \\ R_{11} = \left(-\frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{A' B'}{A B} + \frac{1}{B^2} + 2 \frac{A^2}{B^4} \right) \\ R_{22} = \left(-\frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{A' B'}{A B} + \frac{1}{B^2} + 2 \frac{A^2}{B^4} \right) \\ R_{33} = - \left(\frac{A''}{A} + 2 \frac{B''}{B} \right) \end{array} \right. \quad (2.59)$$

O escalar de curvatura é dado por,

$$R = \eta^{CD} \eta^{AB} R_{ACBD} \quad , \quad (2.60)$$

que tem a seguinte forma:

$$R = 2 \left(2 \frac{B''}{B} + \frac{A''}{A} + 2 \frac{A' B'}{A B} + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{1}{B^2} - \frac{A^2}{B^4} \right) \quad (2.61)$$

Com isto exibimos, finalmente, as componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{00} = \left(-2 \frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{1}{B^2} + 3 \frac{A^2}{B^4} \right) \\ G_{11} = \left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A' B'}{A B} + \frac{A^2}{B^4} \right) \\ G_{22} = \left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A' B'}{A B} + \frac{A^2}{B^4} \right) \\ G_{33} = \left(2 \frac{A' B'}{A B} + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - \frac{1}{B^2} - \frac{A^2}{B^4} \right) \end{array} \right. \quad (2.62)$$

2.3.2 Tensor de Weyl

Estaremos interessados em discutir soluções de campos das equações de Einstein-Maxwell para as quais o espaço-tempo do modelo não é conformalmente plano. Exibiremos, então, o tensor de Weyl e suas partes elétrica e magnética. Na base de tetradas o tensor de Weyl se escreve como:

$$W_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{1}{2}(\eta_{AC} S_{BD} - \eta_{AD} S_{BC}) - \frac{1}{2}(S_{AC} \eta_{BD} - S_{AD} \eta_{BC}) , \quad (2.63)$$

onde,

$$S_{AB} = R_{AB} - \left(\frac{R}{6}\right) \eta_{AB} \quad (2.64)$$

Todas as componentes do tensor de Weyl são proporcionais às seguintes quantidades definidas abaixo:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \frac{1}{6} \left(\frac{A''}{A} - \frac{B''}{B} - \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} - \frac{4A^2}{B^4} \right) \\ \mathcal{H} = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B}\right)' \end{cases} \quad (2.65)$$

Em termos de \mathcal{E} e \mathcal{H} , as componentes, não nulas, do tensor de Weyl são :

$$\begin{cases} W_{0101} = \mathcal{E} & W_{1212} = 2\mathcal{E} & W_{0123} = \mathcal{H} \\ W_{0202} = \mathcal{E} & W_{1313} = -\mathcal{E} & W_{0231} = \mathcal{H} \\ W_{0303} = -2\mathcal{E} & W_{2323} = -\mathcal{E} & W_{0312} = -2\mathcal{H} \end{cases} \quad (2.66)$$

As partes elétrica e magnética do tensor de Weyl são escritas na base de tetradas

como:

$$\begin{cases} E_{AB} = -W_{ACBD} V^C V^D \\ H_{AB} = -\frac{1}{2}\epsilon_{AC}{}^{EF} W_{EFBD} V^C V^D \end{cases} \quad (2.67)$$

onde temos as seguintes propriedades,

$$\begin{cases} E_{AB} = E_{BA} \\ H_{AB} = H_{BA} \\ E^A{}_A = 0 \\ H^A{}_A = 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

e onde ϵ_{ABCD} é o símbolo de Levi-Civita a quatro índices, e V^A é o campo de velocidades do observador, na base de tétradas.

Tomemos o campo de velocidades dado, na base (2.48) de tétradas, por,

$$V^A = \delta_0^A \quad (2.69)$$

Este campo é, em base de coordenadas, proporcional à $\frac{\partial}{\partial t}$. Tomando os resultados (A.37) e (A.35) do apêndice A e aos coeficientes de rotação de Ricci (2.53), temos que a aceleração e a rotação associadas ao mesmo é, na base (2.48) de tétradas são dadas por:

$$a_3 = \gamma_{300} = -\frac{A'}{A} \quad (2.70)$$

$$\omega_{12} = C_{012} = -\frac{2A}{B^2} \quad (2.71)$$

No campo de velocidades (2.69), temos que as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl são dadas pelas seguintes matrizes diagonais:

$$E_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathcal{E} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$H_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mathcal{H} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

O resultado acima constitui uma das primeiras características que desejamos chamar atenção em um modelo que seja compatível com esta topologia: A parte magnética do tensor de Weyl não é identicamente nula e é dada por funções radiais, tal qual um campo magnético gerado por monopolos. Tal característica não está presente no espaço-tempo de Reisner-Norsdröm, onde a parte magnética do tensor de Weyl é identicamente nula.

A possibilidade de ser esta contribuição identificada, posteriormente, como gerada por uma “carga magnética” gravitacional, dependerá das possíveis soluções das equações de Einstein, para esta geometria, bem como a possibilidade de fornecer uma significação física para a mesma, interpretando-a em termos de uma fonte material. Poderíamos ainda suspeitar que fontes de natureza eletromagnética pudessem ser responsáveis pelo surgimento

de tal contribuição para o tensor de Weyl. Se de fato esta contribuição estiver relacionada à alguma fonte de natureza eletromagnética, então esperamos que estruturas deste tipo sejam geradas em soluções das equações de Einstein-Maxwell, num espaço-tempo com esta topologia.

Historicamente monopolos magnéticos foram postulados, por Dirac, de modo a introduzir uma simetria nas equações do eletromagnetismo clássico, preservando “tanto quanto possível” a estrutura formal do eletromagnetismo concebida por Maxwell. Desta forma Dirac viu-se forçado a introduzir fontes de campo representadas por linhas de singularidades (cordas) às quais Dirac chamou linhas nodais. Se pensarmos no sentido de Dirac, monopolos magnéticos são fontes de campo “problemáticas” teoricamente, no sentido de que conduzem a certas violações das condições de integrabilidade para o potencial eletromagnético, justamente devido à presença das linhas de singularidades [15].

Conforme veremos adiante, nas soluções das equações de campo, o espaço-tempo com a topologia de $S^3 \times R$ também apresenta linhas de singularidade semelhantes às aquelas produzidas por um monopolo magnético no eletromagnetismo. A parte magnética do tensor de Weyl, \mathcal{H} , será sempre proporcional a um parâmetro que desempenha, na gravitação, um papel semelhante ao de um “monopolo magnético gravitacional” e é devido a este parâmetro que existem semelhanças formais entre o campo gravitacional, em espaço-tempo com esta topologia, e o campo magnético de um monopolo magnético de Dirac.

Capítulo 3

Discussão das soluções

Neste capítulo iremos discutir as soluções das equações de Einstein-Maxwell para o espaço-tempo que admite uma métrica da forma (2.47). Observando a métrica (2.47), somos levados a supor a presença de campos gerando a anisotropia que existe, sobre S^3 , caracterizada pelas funções distintas $A(r)$ e $B(r)$. Devido a simetria radial que a métrica, por construção, apresenta podemos propor que a anisotropia é gerada, conforme fez notar Brill [3], pela presença de campos elétrico e magnético radiais.

Comecemos então por discutir as soluções das equações de Maxwell.

3.1 Soluções das Equações de Maxwell

Devido a (2.62), vemos que o tensor momento-energia puramente eletromagnético, contruído a partir do tensor de Maxwell deverá ser diagonal nesta base, de modo a ser compatível com o tensor de Einstein (2.62). Uma escolha natural, que conduz a esta forma diagonal para o tensor momento-energia eletromagnético, consiste em tomarmos apenas campos elétrico e magnético radiais.

Assim tomando como únicas componentes independentes e não identicamente nulas para o tensor de Maxwell, na base de tétradas (2.48):

$$\begin{cases} F^{03} = E_r(r) \\ F^{12} = H_r(r) \end{cases} \quad (3.1)$$

Conforme os resultados (A.30) e (A.31), as equações de Maxwell fornecem:

$$\begin{cases} (E_r)' - \left(\frac{2A}{B^2}\right) H_r + 2\left(\frac{B'}{B}\right) E_r = j^0 \\ (H_r)' + \left(\frac{2A}{B^2}\right) E_r + 2\left(\frac{B'}{B}\right) H_r = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Fazendo, sobre a coordenada radial, a transformação:

$$\frac{A}{B^2} dr = dR \quad (3.3)$$

As equações (3.2) tornam-se:

$$\begin{cases} \frac{d}{dR}(B^2 E_R) - 2(B^2 H_R) = \left(\frac{B^4}{A} j^0\right) \\ \frac{d}{dR}(B^2 H_R) + 2(B^2 E_R) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

A solução para o vazio é então da forma:

$$\begin{cases} E_R = \frac{\epsilon_0}{B^2} \text{sen}(2R) \\ H_R = \frac{\epsilon_0}{B^2} \text{cos}(2R) \\ j^0 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

que é uma solução onde a fonte é, simultâneamente, elétrica e magnética, sendo ϵ_0 uma constante de integração.

Outra possibilidade é a solução de puro campo magnético:

$$\begin{cases} H_R &= \frac{\mu_0}{B^2} \\ j^0 &= -\mu_0 \frac{2A}{B^4} \end{cases} \quad (3.6)$$

que é uma solução do tipo monopolo magnético. A presença da corrente no caso desta segunda solução se deve ao fato de que o referencial de tetradas é girante.

Para as duas soluções apresentadas acima o tensor momento-energia eletromagnético assume, indistintamente, a mesma forma. Usando os campos (3.5) ou (3.6) podemos construir o tensor momento-energia eletromagnético que é dado, em base de tetradas, por,

$$T_{AB}^{em} = F_{AC} F^C_B + \frac{1}{4} \eta_{AB} F_{CD} F^{CD} \quad (3.7)$$

e este será um tensor da forma:

$$T_{AB}^{(em)} \equiv \frac{\Sigma_0^2}{2B^4} \text{diag}(+, +, +, -) \quad (3.8)$$

onde Σ_0 é uma constante que pode ser identificada tanto com ϵ_0 quanto com μ_0 , dependendo da fonte em questão.

Passemos então à discussão do problema completo analisando as possíveis soluções das equações de Einstein.

3.2 Soluções das equações de Einstein

Além da fonte de natureza eletromagnética, dada por (3.8), consideraremos ainda a possibilidade de termos presença de poeira e constante cosmológica nas equações de Einstein,

$$G_{AB} + \Lambda \eta_{AB} = T_{AB}^{(em)} + T_{AB}^{(mat)} \quad (3.9)$$

de modo que estas são, explicitamente, da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho - \Lambda + \frac{\Sigma_0^2}{2B^4} = \left(-2\frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{1}{B^2} + 3\frac{A^2}{B^4} \right) \\ \Lambda + \frac{\Sigma_0^2}{2B^4} = \left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \frac{A^2}{B^4} \right) \\ \Lambda + \frac{\Sigma_0^2}{2B^4} = \left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \frac{A^2}{B^4} \right) \\ \Lambda - \frac{\Sigma_0^2}{2B^4} = \left(2\frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} - \frac{A^2}{B^4} \right) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Ao derivarmos a equação de primeira ordem em (3.10), e ao usarmos novamente a própria equação no resultado, encontramos a seguinte relação:

$$\frac{A'}{A} \left[\frac{B''}{B} - \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} - \frac{A^2}{B^4} \right] = \frac{B'}{B} \left[\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \frac{A^2}{B^4} - \Lambda - \frac{\Sigma_0^2}{2B^4} \right] \quad (3.11)$$

vemos que, se uma das duas condições abaixo forem satisfeitas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A'}{A} = 0 \quad \text{ou,} \\ \frac{B''}{B} - \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} - \frac{A^2}{B^4} = 0 \end{array} \right. , \quad (3.12)$$

não precisamos mais nos preocupar com a equação de segunda ordem em $A(r)$, pois esta passa a ser automaticamente satisfeita. Cada uma das condições acima nos conduz a classes distintas de soluções as quais passamos a discutir.

3.2.1 Primeira classe de soluções. A solução de NUT-Brill

Vamos, por hora, nos deter na segunda possibilidade. Esta nos conduzirá à classe de soluções onde encontramos a solução conhecida como devida a NUT-Brill. Estamos

chamando de "primeira classe" de soluções àquelas para as quais:

$$\frac{B''}{B} - \frac{A' B'}{A B} - \frac{A^2}{B^4} = 0 \quad (3.13)$$

Esta equação é imediatamente integrada em termos de uma nova coordenada radial definida por:

$$A(r) dr = d\bar{r} \quad (3.14)$$

Em termos de \bar{r} a equação (3.13) fica:

$$\frac{d^2}{d\bar{r}^2} B = \frac{1}{B^3} \quad (3.15)$$

cuja integral primeira é:

$$\left(\frac{d}{d\bar{r}} B \right)^2 + \frac{1}{B^2} = \alpha^{-2} \quad (3.16)$$

sendo α^{-2} uma constante de integração. A solução geral para $B(\bar{r})$ sendo da forma:

$$B^2(\bar{r}) = \alpha^2 + \alpha^{-2} (\bar{r} - \bar{r}_0)^2 \quad (3.17)$$

É conveniente redefinirmos ainda uma vez a coordenada radial, de modo a escrever (3.17) de um modo mais elegante. Definimos assim:



$$\tilde{r} = \alpha^{-1}\bar{r} \tag{3.18}$$

$$\frac{d}{d\tilde{r}} = \alpha \frac{d}{d\bar{r}}$$

de modo que a solução (3.17) agora se escreve como:

$$B^2(\tilde{r}) = \alpha^2 + (\tilde{r} - \tilde{r}_0)^2 \tag{3.19}$$

Por questão de consistência vimos que, com a condição (3.13) satisfeita, a equação de segunda ordem em $A(r)$ torna-se irrelevante. Além disto é fácil ver que substituindo (3.13) no sistema original (3.10) as primeira e última equações tornam-se idênticas, a menos de um sinal global, para

$$\rho = 0 \quad , \tag{3.20}$$

tratando-se portanto de uma solução para o vazio. A única equação ainda não identicamente satisfeita em (3.10) é a própria equação de primeira ordem da qual partiu nossa análise. Com a solução (3.15), a equação de primeira ordem em (3.10) pode ser escrita, em termos de \bar{r} , como :

$$\left(\frac{d}{d\bar{r}}A^2\right)\left(\frac{1}{B}\frac{d}{d\bar{r}}B\right) - A^2\left[\frac{d}{d\bar{r}}\left(\frac{1}{B}\frac{d}{d\bar{r}}B\right)\right] = \frac{1}{B^2} - \frac{\epsilon_0^2}{2B^4} \tag{3.21}$$

Esta pode ser arrumada, como uma derivada total,

$$\left(\frac{1}{B}\frac{d}{d\bar{r}}B\right)^2\frac{d}{d\bar{r}}\left[\left(\frac{1}{B}\frac{d}{d\bar{r}}B\right)^{-1}A^2\right] = \frac{1}{B^2} - \frac{\epsilon_0^2}{2B^4} \tag{3.22}$$

que também é imediatamente integrável. Deste modo, integrando a equação (3.22) em termos de \tilde{r} teremos:

$$A(\tilde{r})^2 = \alpha^2 \left(1 - 2 \frac{m(\tilde{r} - \tilde{r}_0) + \alpha^2 - \frac{\epsilon_0^2}{4}}{(\tilde{r} - \tilde{r}_0)^2 + \alpha^2} \right) \quad (3.23)$$

Com isso, o elemento de linha (2.47), fica

$$dS^2 = F^2(\tilde{r}) \left[d\tilde{t} + 2\alpha \cos\theta d\phi \right]^2 - B^2(\tilde{r}) \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right] - F^{-2}(\tilde{r}) d\tilde{r}^2 \quad (3.24)$$

onde,

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= 2\alpha t \\ F^2 &= \left(1 - 2 \frac{m(\tilde{r} - \tilde{r}_0) + \alpha^2 - \frac{\epsilon_0^2}{4}}{(\tilde{r} - \tilde{r}_0)^2 + \alpha^2} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esta solução, devido a Newman, Tamburino e Unti [1], estendido ao caso eletromagnético por Brill [3], é uma solução das equações de Einstein-Maxwell,

$$R_{AB} = T_{AB}^{(em)}, \quad (3.26)$$

onde $T_{AB}^{(em)}$ é o tensor momento-energia, de natureza puramente eletromagnética, devido a presença de campos elétrico e magnético radiais.

Fazendo as transformações (3.14) e (3.18) e tomando $\tilde{r}_0 = 0$, os campos (3.5) e as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl (2.65), expressos em termos da nova coordenada \tilde{r} , ficam:

$$\begin{cases} F^{03} = E_{\bar{r}} = 2 \frac{\epsilon_0 \alpha \bar{r}}{(\alpha^2 + \bar{r}^2)^2} \\ F^{12} = H_{\bar{r}} = \epsilon_0 \frac{\alpha^2 - \bar{r}^2}{(\alpha^2 + \bar{r}^2)^2} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E} = - \frac{m \bar{r}^3 + (3\alpha^2 - \frac{\epsilon_0^2}{2}) \bar{r}^2 - 3\alpha^2 m \bar{r} - \alpha^2 (\alpha^2 - \frac{\epsilon_0^2}{2})}{(\bar{r}^2 + \alpha^2)^3} \\ \mathcal{H} = - \alpha \left(\frac{\bar{r}^3 - 3m \bar{r}^2 - (3\alpha^2 - \epsilon_0^2) \bar{r} + m \alpha^2}{(\bar{r}^2 + \alpha^2)^3} \right) \end{cases} \quad (3.28)$$

Temos então uma geometria estática, dependente de três parâmetros, a qual corresponde a uma generalização da solução de Schwarzschild-Reisser-Nordström para a topologia $S^3 \times R$, conforme havíamos comentado.

Na solução de NUT-Brill. O parâmetro α funciona como uma espécie de carga que gera a contribuição da parte magnética do tensor de Weyl. Para vermos isto tomemos a solução assintótica de (3.28) nas regiões onde $\bar{r} \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E} \rightarrow \frac{m}{\bar{r}^3} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^4}\right), \quad (3.29)$$

$$\mathcal{H} \rightarrow -\frac{\alpha}{\bar{r}^3} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^4}\right). \quad (3.30)$$

Vemos assim que este parâmetro tem um caráter “dual” à massa, m , no sentido de que m é uma “carga” associada a parte elétrica do tensor de Weyl enquanto que α é uma “carga” associada á parte magnética do mesmo.

Devido a este fato, Ramaswamy e Sen [9] introduziram a noção de “ massa-dual” em relatividade geral definida, de um modo conveniente, como uma “carga” relacionada ao

fluxo da parte magnética do tensor de Weyl sobre uma superfície nula no infinito. A massa, por sua vez, fica definida como um fluxo associado a parte elétrica do tensor de Weyl. Tal “massa-dual” somente pode ser não identicamente nula se a topologia desta superfície nula no infinito for a de S^3 e por isto o espaço-tempo que admite “massa dual” tem que ser acausal. Foi por este motivo que comentamos no capítulo (2) que a acausalidade do modelo seria um problema incontornável. Estes autores [9] mostraram que, para a solução de NUT, a “massa-dual” corresponde justamente ao parâmetro aqui caracterizado por α , essencialmente devido ao resultado (3.30) e ao infinito tipo nulo que este espaço-tempo admite. Como já discutimos Hansen [12] produziu outro argumento para denominar este parâmetro massa dual estando a noção de dualidade associada aos potenciais Φ_M e Φ_J que se relacionam por uma transformação dual no sentido de Geroch [8] e que tem, associados aos mesmos, monopólos que são respectivamente, no caso da solução de NUT, a massa (m) e o parâmetro de NUT (α).

Este parâmetro α tem uma natureza independente da massa, m , e isto pode ser avaliado da seguinte forma: É sabido que soluções como a de Kerr dependem de dois parâmetros um dos quais é a massa, m (tal qual Schwarzschild), e o outro, J , associado ao momento angular da estrela em rotação. Estes dois parâmetros, em Kerr, não são, em verdade, independentes. Se anulamos m , detruímos a solução de Kerr recaindo em um espaço-tempo plano. Isto já era de se esperar, já que J está associado ao “momento angular” da “massa” m .

No caso da solução de NUT-Brill, o parâmetro α , não está, pelo menos neste mesmo sentido que em Kerr, associado a J . Isto pode ser notado facilmente, tomando a solução com $\epsilon_0 = m = 0$, devido a NUT. Neste caso as quantidades \mathcal{E} e \mathcal{H} em (3.28) reduzem-se à:

$$\begin{cases} \mathcal{E} &= -\alpha^2 \left(\frac{3\tilde{r}^2 - \alpha^2}{(\tilde{r}^2 + \alpha^2)^3} \right) \\ \mathcal{H} &= -\alpha\tilde{r} \left(\frac{\tilde{r}^2 - 3\alpha^2}{(\tilde{r}^2 + \alpha^2)^3} \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

Neste caso temos quatro invariantes não identicamente nulos da geometria dados por [18],

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = E_{AB} E^{AB} - H_{AB} H^{AB} = 6(\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2) \\ I_2 = 2E_{AB} H^{AB} = -12\mathcal{E}\mathcal{H} \\ I_3 = -E_{AB} E^{BC} E^A_C + 3 H_{AB} H^{BC} E^A_C \\ I_4 = H_{AB} H^{BC} H^A_C - 3 E_{AB} E^{BC} H^A_C \end{array} \right. \quad (3.32)$$

onde E_{AB} e H_{AB} são as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl definidas em (2.67).

Tomando as quantidades \mathcal{E} e \mathcal{H} exibidas em (3.31) podemos facilmente avaliar a forma destes invariantes não nulos na solução de NUT “pura”, ($m = \epsilon_0 = 0$). Isto evidencia que α “sozinho” gera gravitação. Assim, o parâmetro de NUT não surge associado quer à massa quer a fonte de natureza eletromagnética, embora seja responsável pela contribuição não nula para \mathcal{H} conforme (3.30) e pelo “vínculo” entre as coordenadas \tilde{t} e ϕ , que caracteriza a topologia de $S^3 \times R$, conforme (3.24).

Na segunda classe de soluções entretanto, veremos que o parâmetro, aqui representado por α será a própria carga magnética.

O caso $\alpha = 0$: A solução de Schwarzschild-Reissner-Nordström

Tomando α nulo em (3.24), destruimos a estrutura de S^3 e com isto passamos a uma solução das equações de Einstein-Maxwell, com simetria esférica, estática e com campo eletromagnético radial. Esta deve constituir portanto, a solução de Schwarzschild-Reisser-

Nordström, como de fato, se vê por (3.24) e (3.25). Neste caso a métrica (3.24) reduz-se à,

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2m}{(\tilde{r}-\tilde{r}_0)} + \frac{\epsilon_0^2}{2(\tilde{r}-\tilde{r}_0)^2}\right) d\tilde{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{(\tilde{r}-\tilde{r}_0)} + \frac{\epsilon_0^2}{2(\tilde{r}-\tilde{r}_0)^2}\right)^{-1} d\tilde{r}^2 + \\ -\tilde{r}^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.33)$$

e interpretamos assim o significado de m e ϵ_0 como sendo, de fato, a massa e a carga de natureza eletromagnética.

Para a solução de Reissner-Nordström, os campos eletromagnéticos e as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl são dados tomando $\alpha = 0$ nas expressões (3.27), (3.29) e (3.30), o que fornece:

$$\begin{cases} F^{03} = E_{\tilde{r}} = 0 \\ F^{12} = H_{\tilde{r}} = -\frac{\epsilon_0}{\tilde{r}^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

e,

$$\mathcal{E} \rightarrow \frac{m}{\tilde{r}^3} + O\left(\frac{1}{\tilde{r}^4}\right) \quad (3.35)$$

$$\mathcal{H} \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

Vemos deste resultado que não há, na solução de Reissner-Nordström nenhum parâmetro que desempenhe o papel de uma “carga magnética gravitacional”, sendo a parte magnética do tensor de Weyl nula, embora haja monopolo magnético presente como fonte do modelo.

3.2.2 Segunda classe de soluções

Para esta classe temos $A(r)$ constante, de acordo com (3.12). Tomando então:

$$A(r) = \alpha \tag{3.37}$$

Neste caso as equações (3.10) reduzem-se àpenas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{(4\alpha^2 - \Sigma_0^2)}{B^4} - 2\Lambda \\ \Lambda = \frac{B''}{B} + \frac{(\alpha^2 - \frac{\Sigma_0^2}{2})}{B^4} \\ \Lambda = \left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{1}{B^2} - \frac{(\alpha^2 - \frac{\Sigma_0^2}{2})}{B^4} \end{array} \right. \tag{3.38}$$

sendo a equação de primeira ordem, para $B(r)$, uma integral primeira da equação de segunda ordem. Assim sendo, basta-nos resolver a equação de primeira ordem e então fazer o ajuste dos parâmetros, se assim for necessário, presentes na solução.

Solução com $\Lambda = 0$

Esta solução é imediata, pois a equação de segunda ordem, em $B(r)$, reduz-se a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} B'' = \frac{\kappa^2}{B^3} \\ \kappa^2 = \left(\frac{\Sigma_0^2}{2} - \alpha^2\right) \end{array} \right. \tag{3.39}$$

cuja solução imediata é:

$$B^2(r) = (r - r_0)^2 + \kappa^2 \tag{3.40}$$

Nesta solução os parâmetros tem que estar associados de modo a satisfazer a condição

de positividade para ρ e para $B^2(r)$. Estas duas condições juntas impõe que:

$$\alpha^2 \in \left[\frac{\Sigma_0^2}{4}, \frac{\Sigma_0^2}{2} \right] \quad (3.41)$$

e o elemento de linha fica escrito como:

$$dS^2 = (d\bar{t} + 2\alpha \cos\theta d\phi)^2 - B^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - dr^2 \quad (3.42)$$

onde $\bar{t} = 2\alpha t$.

Soluções com $\Lambda \neq 0$

Neste caso, tomaremos a equação de primeira ordem em (3.38), sobre a qual faremos a seguinte redefinição na coordenada radial:

$$d\bar{r} = B(r) dr \quad (3.43)$$

Em termos da nova coordenada \bar{r} , o sistema (3.38), fica então:

$$\begin{cases} \rho &= \frac{(4\alpha^2 - \Sigma_0^2)}{B^4} - 2\Lambda \\ \Lambda &= \left(\frac{d}{d\bar{r}}B\right)^2 + V(B) \end{cases} \quad (3.44)$$

onde,

$$V(B) = -\frac{1}{B^2} + \frac{\kappa^2}{B^4} \quad (3.45)$$

estando κ^2 definido em (3.39).

Este "potencial", definido em (3.45), apresenta um valor mínimo, que é por sua vez o valor mínimo admissível para Λ , e dado por:

$$\begin{cases} V_{min} = -\frac{1}{4\kappa^2} \\ B_{min}^2 = 2\kappa^2 \end{cases} \quad (3.46)$$

A equação para $B(\bar{r})$, em (3.44) acima pode ser resolvida por intermédio de integrais elípticas. Devido a forma do "potencial", $V(B)$, vemos que existem soluções periódicas, em um "poço de potencial", para $B(\bar{r})$, quando $\Lambda < 0$. Vamos nos preocupar aqui com este caso.

Para $\Lambda < 0$, devido a expressão para ρ em (3.44), vemos que a contribuição de Λ para ρ é positiva neste intervalo e além disto vemos que a mesma condição (3.41) é suficiente para garantir que ρ será positivo-definida para esta solução. Assim sendo, iremos encontrar a classe de soluções, onde:

$$\Lambda \in] 0, V_{min}] \quad (3.47)$$

Definimos ainda o parâmetro λ :

$$\lambda = \frac{|\Lambda|}{|V_{min}|} \quad (3.48)$$

de modo que,

$$\lambda \in]0, 1[. \quad (3.49)$$

Tomando então a equação para $B(\bar{r})$ em (3.44), podemos reordená-la da seguinte forma:

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{B^2 dB}{\sqrt{[(\omega_0^2 - B^2)(B^2 - \omega_1^2)]}} = \frac{\lambda}{2\kappa\omega_0} d\bar{r} \quad (3.50)$$

onde,

$$\begin{cases} \omega_0^2 &= \frac{2\kappa^2}{\lambda^2} (1 + \sqrt{1 - \lambda^2}) \\ \omega_1^2 &= \frac{2\kappa^2}{\lambda^2} (1 - \sqrt{1 - \lambda^2}) \end{cases} \quad (3.51)$$

A integral em (3.50) é uma integral elíptica inversa, do tipo dn . Integrando (3.50), temos então:

$$\text{dn}^{-1} \left(\frac{B}{\omega_0} \mid m \right) = \frac{\lambda}{2\kappa\omega_0} (\bar{r} - \bar{r}_0) \quad (3.52)$$

onde,

$$m = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2} \quad (3.53)$$

A forma de $B(\bar{r})$ é então, finalmente:

$$B(\bar{r}) = \omega_0 \text{dn} \left(\frac{\lambda}{2\kappa\omega_0} (\bar{r} - \bar{r}_0) \right) \quad (3.54)$$

Que é uma função oscilante entre dois extremos dados por:

$$\begin{cases} B_1 = \omega_1 \\ B_0 = \omega_0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Obtivemos deste modo, soluções com $\Lambda = 0$ e $\Lambda < 0$. Queremos fazer notar que, em ambos os casos, para que tenhamos soluções compatíveis com a positividade de ρ e $B(\bar{r})$, somos forçados a relacionar “diretamente” o parâmetro α à magnitude Σ_0 da “carga” eletromagnética.

Capítulo 4

Singularidades e violação das condições de integrabilidade

Estamos agora em posição de discutir as violações de certas condições de integrabilidade, que ocorrem nas soluções de campo já discutidas, sobre objetos geométricos dos modelos aqui apresentados. Nosso interesse é o de analisar as semelhanças formais entre certos modelos físicos e a possibilidade de, a partir disto, extrair novas significações de caráter físico sobre um problema ainda mal entendido. Conforme já mencionamos anteriormente, no caso deste trabalho, em particular, seguimos este caminho para explorar as semelhanças entre objetos como o parâmetro de NUT e um monopolo magnético no sentido de Dirac.

Para alcançarmos nosso objetivo vamos primeiramente estabelecer algumas noções sobre o monopolo de Dirac para podermos então traçar um paralelo entre a estrutura de linhas de singularidade presentes no eletromagnetismo devido ao monopolo magnético e o problema que surge, no contexto da gravitação, com a solução de NUT-Brill e também com a nova solução.

4.1 Monopolos de Dirac

Conforme já mencionamos no capítulo (2), os monopolos magnéticos foram originalmente introduzidos por Dirac [6]. A motivação do mesmo não foi tão somente introduzir cargas magnéticas de modo a produzir uma perfeita simetria das equações de Maxwell. A pergunta a ser respondida então era o porque da existência da menor carga elétrica que é dada, no contexto da mecânica quântica, pela constante de estrutura fina. Estudando então as alterações na dinâmica quântica de uma partícula quando sujeita a campos externos, observou que o “efeito líquido” de submeter esta partícula a um campo eletromagnético externo era o de tornar a fase da função de onda da partícula não integrável. Esta fase não integrável tinha, por sua vez, sua linha de singularidade transportada para o potencial eletromagnético, que passava então a ser, também, não integrável. Dirac notou ainda que quando as linhas de singularidades (linhas nodais) tinham extremidades (singularidades nodais) dentro de uma superfície de Gauss sobre a qual estivessemos calculando o fluxo do campo magnético, o efeito da singularidade nodal era o de fornecer uma fonte pontual de campo magnético, produzindo um campo radial, e a qual Dirac postulou ser o monopolo magnético. Neste contexto o monopolo magnético surgia, naturalmente, como uma fonte quantizada que, por sua vez, “carregava a quantização” para a carga elétrica. Desta forma o eletromagnetismo passou, de fato, a ter cargas de ambas as naturezas elétrica e magnética, entretanto a natureza da carga magnética continuou a ser, no sentido de Dirac, bastante distinta daquela da carga elétrica, estando sempre associada ao surgimento de linhas de singularidade.

Posteriormente Wu e Yang [10] fizeram um tratamento mais elegante do monopolo magnético, no qual mostraram que o comportamento de uma partícula carregada sobre uma superfície esférica, na presença de um campo externo, é dado por um fator de fase dependente de caminho que conduz aos mesmos resultados do trabalho de Dirac. Estes autores introduziram o chamado potencial de Wu-Yang, que nada mais é que o potencial eletromagnético, A_μ , tomado em formas distintas sobre regiões distintas da casca esférica

que envolve o monopolo magnético, de modo a sempre “evitar” a linha de singularidade [15]. Para precisar melhor o problema das violações nas condições de integrabilidade do potencial eletromagnético A_μ de um monopolo magnético de Dirac, vamos nos restringir, por hora, a situação mais trivial que é aquela do monopolo magnético de Dirac, que não gera campo gravitacional, no espaço-tempo de Minkowski, conforme ilustrada a seguir.

Tomando o espaço de Minkowski com a métrica expressa em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) usuais, e com a seguinte escolha de tétradas,

$$\begin{cases} \theta^0 & = & dt \\ \theta^3 & = & dr \\ \theta^1 & = & r d\theta \\ \theta^2 & = & r \text{sen}(\theta) d\phi \end{cases} \quad (4.1)$$

temos,

$$dS^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (4.2)$$

Um monopolo magnético de Dirac, neste espaço-tempo, produz um campo no qual o tensor de Maxwell é, na base (4.1), da forma,

$$F_{12} = \frac{\mu}{r^2} \quad (4.3)$$

A 2-forma de Maxwell, associada a F_{12} , é:

$$F = F_{AB} \theta^A \wedge \theta^B = \mu \text{sen}\theta d\theta \wedge d\phi \quad (4.4)$$

Se admitirmos que o potencial eletromagnético A_μ , que tem a ele associado a 1-forma

$$A = A_B \theta^B \quad (4.5)$$

gera o campo F_{AB} por,

$$F = dA \tag{4.6}$$

e então,

$$dF = d^2A = 0 \tag{4.7}$$

que constitui o segundo grupo de equações de Maxwell.

Assim, pelo teorema de Stokes, temos que:

$$\int_{\partial V} F = \int_{\partial V} dA = \int_V d^2A = \int_V dF = 0 \tag{4.8}$$

onde ∂V é a superfície esférica $r = r_0 = \text{constante}$ que é um S^2 e V é o domínio que esta superfície encerra.

Entretanto, devido a forma (4.4), na presença de monopolos magnéticos de Dirac, a integral sobre uma superfície $r = \text{constante}$ não é nula:

$$\int_V d^2A = \int_{\partial V} dA = \mu \tag{4.9}$$

Este resultado mostra que não existe um potencial A_μ bem definido, que gere o tensor F_{AB} em (4.4). Vemos que a contribuição não nula para a integral de superfície acima, evidencia que tal superfície esta sendo “perfurada” pela linha nodal que A_μ apresenta no caso da fonte ser um monopolo magnético de Dirac. Desta forma, pela integral (4.9), temos que: ou ∂V é toda a superfície esférica menos um ponto (ou uma pequena vizinhança deste ponto); ou A é singular em algum ponto de ∂V .

Ainda com respeito às relações (4.9) acima vemos que este resultado conduz a violação da condição de integrabilidade para A_μ :

$$d^2A = 0 \quad (4.10)$$

Conforme Wu e Yang [10], podemos então introduzir formas distintas para o potencial eletromagnético A , uma delas sendo aquela que descreve corretamente a física do problema para uma região que exclui as vizinhanças do polo sul da casca esférica que envolve o monopolo magnético; a outra sendo aquela que descreve corretamente a física na região que exclui a vizinhança do polo norte.

Designando-as, como usualmente por A_N e A_S , temos:

$$\begin{cases} A_N = \frac{\mu}{r} \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \right) \theta^2 \\ A_S = -\frac{\mu}{r} \left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) \theta^2 \end{cases} \quad (4.11)$$

Que são soluções de (4.6) para um campo magnético da forma (4.3). O potencial A_N tem sua linha de singularidade perfurando a casca esférica, que engloba o monopolo magnético, no polo sul da superfície esférica que envolve o monopolo. Já o potencial A_S tem sua linha de singularidade perfurando o polo norte. Nas vizinhanças do equador da esfera, ambas as expressões acima fornecem o mesmo conteúdo físico conduzindo às relações corretas para o fluxo do campo magnético através da casca esférica que envolve o monopolo.

Até aqui, mesmo com a presença dos monopolos magnéticos, a estrutura do eletromagnetismo, tal qual concebida por Maxwell, continuou a mesma, descrita a partir do potencial eletromagnético A_μ , que é um campo de gauge do grupo $U(1)$, e que gera os campos físicos elétrico e magnético, possuindo a liberdade de gauge usual sobre a 1-forma

A:

$$A \rightarrow A' = A + d\Gamma \quad (4.12)$$

Devido a isto, vemos que as formas (4.11) somente podem diferir, nas regiões próximas ao equador, se for devido a uma transformação de gauge do tipo (4.12). Vemos então, por (4.11) e (4.12), que neste caso,

$$A' - A = d\Gamma = A_N - A_S = 2 \frac{\mu}{r \operatorname{sen}\theta} \theta^2 \quad (4.13)$$

donde,

$$\Gamma = 2\mu\phi \quad (4.14)$$

A quantização do monopolo é obtida quando, avaliamos os efeitos deste campo de gauge $U(1)$ sobre a dinâmica da partícula. A equação de Schrödinger para a partícula que se move em um campo caracterizado por A é:

$$\frac{1}{2m} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 \psi = E \psi \quad (4.15)$$

Se fizermos uma transformação de gauge do tipo (4.12) sobre A , de modo que a equação de Schrödinger seja invariante de gauge, então o gauge Γ em (4.14) será absorvido pela fase da função de onda e daí a fase tornar-se, como mencionamos no início, não integrável. É fácil mostrar que o fator de fase que relaciona a função de onda antes da transformação de gauge e aquela que absorve a transformação de gauge em sua fase, é dado por:

$$\exp \frac{ie}{hc} 2\mu\phi \quad (4.16)$$

Considerações sobre o caráter unívoco da função de onda impõe que tal fase seja um múltiplo inteiro de $2\pi n$ e daí temos que o monopolo magnético de Dirac é quantizado.

Insatisfeitos com a presença das linhas de singularidade e os problemas que surgem decorrentes disto, certos autores introduziram uma nova abordagem para o eletromagnetismo de modo a também ganhar simetrias nas equações de Maxwell, sem entretanto ter os problemas relacionados às linhas nodais de Dirac. Para isso é preciso introduzir uma descrição do eletromagnetismo em termos de dois novos potenciais eletromagnéticos [16]. Esta abordagem, entretanto, não nos interessa para o paralelo que queremos traçar no presente trabalho e por isto não nos preocuparemos com a mesma. Aquilo que foi exposto acima, sobre os monopolos de Dirac já é suficiente para servir de motivação à discussão que nos deterá a seguir.

4.2 As condições de integrabilidade e o Lema de Poincarè

O sucesso obtido por Dirac ao identificar singularidades matemáticas com fontes físicas dependeu da possibilidade de associar os efeitos produzidos, pela singularidade, sobre a dinâmica da partícula. Naturalmente, o fato de termos (4.9) não nula pode dever-se, perfeitamente, a uma má aplicação do teorema de Stokes sobre domínios nos quais os objetos a serem integrados estão mal definidos, sendo que isto poderia não produzir qualquer efeito físico dinâmico. Para formalizar precisamente as condições nas quais a relação, expressa pelo teorema de Stokes,

$$\int_{\partial V} T = \int_V dT \quad (4.17)$$

é de fato uma identidade, sendo ∂V a fronteira do domínio V , vamos chamar a atenção para o Lema de Poincarè e discutir as consequências de sua violação, seja no problema dos monopolos magnéticos de Dirac, seja no problema análogo gravitacional que queremos traçar.

O Lema de Poincarè assegura o seguinte:

EM QUALQUER CONJUNTO, U , HOMEOMORFO A UM ABERTO DO R^n , TODA FORMA DIFERENCIAL FECHADA É EXATA

isto é, se Π é uma p -forma diferencial, definida em U , tal que,

$$d\Pi = 0 \quad (4.18)$$

então existe uma $(p-1)$ -forma π , tal que:

$$\Pi = d\pi \quad (4.19)$$

Deste modo, se o domínio de integração V , no teorema de Stokes, é homeomorfo a R^4 , no caso da variedade ser um espaço-tempo, então para qualquer forma fechada T :

$$\int_V d\Pi = \int_V d^2\pi = \int_{\partial V} d\pi = \int_{\partial V} \Pi = 0 \quad (4.20)$$

No caso do eletromagnetismo, isto é violado na presença de monopolos magnéticos pois o segundo grupo de equações de Maxwell, que originalmente fornecia:

$$dF = 0 \Rightarrow F = dA \quad (4.21)$$

e,

$$\int_{\partial V} F = \int_{\partial V} dA = 0 \quad , \quad (4.22)$$

agora fornece, conforme (4.9):

$$\int_{\partial V} F = \mu = \int_{\partial V} dA \quad (4.23)$$

O resultado (4.23) pode agora ser interpretado das seguintes maneiras equivalentes: ou o domínio V não é homeomorfo a um aberto de R^4 e neste caso teríamos $V = A(R^4) - \{\varsigma\}$ onde $\{\varsigma\}$ é o conjunto de pontos excluídos do aberto $A(R^4)$; ou V é homeomorfo a um aberto de R^4 mas a forma fechada F não é definida como uma forma exata em todo V , mas somente em $A(R^4) - \{\varsigma\}$. Em ambos os casos dizemos, por abuso de linguagem, que “o lema de Poincarè é violado”. O resultado não nulo em (4.23) vem, então, da contribuição da fronteira $\partial V \cap \{\varsigma\}$.

4.3 As coordenadas t_N e t_S sobre S^3

Antes de discutirmos como um monopolo de Dirac transporta para o espaço-tempo o problema das linhas de singularidades, vamos analisar a topologia induzida pela tri-esfera no espaço dos ângulos de Euler (θ, ϕ, t) definidos em (2.24). Isto nos trará um melhor entendimento dos domínios das integrações que faremos, sobre S^3 , nas secções seguintes.

Vamos mostrar agora que os planos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são reduzidos, por identificações, a toros unidimensionais T^1 , isto é, a círculos S^1 . Consideremos o caso $\theta = 0$. De acordo com (2.24), temos para $\theta = 0$:

$$\begin{cases} x^0 &= \cos[\frac{1}{2}(t + \phi)] \\ x^1 &= \text{sen}[\frac{1}{2}(t + \phi)] \\ x^2 &= 0 \\ x^3 &= 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Então estes pontos de S^3 ficam invariantes sob toda transformação da forma,

$$\begin{cases} t &\rightarrow t + \delta \\ \phi &\rightarrow \phi - \delta \end{cases} \quad (4.27)$$

onde δ é uma constante arbitrária. Deste modo todos os pontos do plano $\theta = 0$, relacionados por (4.27), devem ser identificados. Equivalentemente, todos os pontos das retas $t + \phi = \bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_0$ constante arbitrária, são identificados. Com isto, cada uma das retas $t + \phi = \bar{\tau}_0$ fica reduzida a um ponto que pode ser caracterizado pela constante $\bar{\tau}_0$. Esta constante pode então ser usada como coordenada para o círculo S^1 obtido pelas identificações (4.24), (4.25) e (4.27), a qual denotaremos por t_N :

$$t_N = \bar{\tau}_0 = t + \phi \quad (4.28)$$

Para $\theta = \pi$, de acordo com (2.24), temos:

$$\begin{cases} x^0 = 0 \\ x^1 = 0 \\ x^2 = \text{sen}\left[\frac{1}{2}(t - \phi)\right] \\ x^3 = \text{cos}\left[\frac{1}{2}(t - \phi)\right] \end{cases} \quad (4.29)$$

Neste caso S^3 fica invariante sob toda transformação da forma,

$$\begin{cases} t \rightarrow t + \delta \\ \phi \rightarrow \phi + \delta \end{cases} \quad (4.30)$$

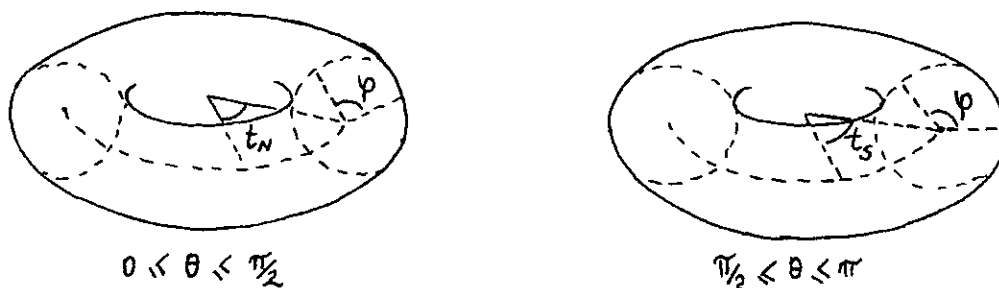
com δ uma constante arbitrária. Vemos agora que, em $\theta = \pi$, os pontos deste plano relacionados por (4.30) devem ser identificados. Estes constituem os pontos das retas $t - \phi = \tau_0$, τ_0 uma constante arbitrária. Deste modo, semelhante à situação anterior, cada uma das retas $t - \phi = \tau_0$ fica reduzida a uma ponto agora caracterizado por τ_0 e esta constante pode ser usada como coordenada para o círculo S^1 obtido pelas identificações (4.24), (4.25) e (4.30), e a qual denotaremos por t_S :

$$t_S = \tau_0 = t - \phi \quad (4.31)$$

Podemos agora usar estas coordenadas t_N e t_S , com (θ, ϕ) , para caracterizar S^3 como a união de dois toros sólidos identificados pela sua fronteira dada pelo toro, T^2 , correspondente a $\theta = \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi$). Vamos arbitrar $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ de modo que cada toro corresponda a um "hemisfério" de S^3 .

Tomando então $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de acordo com todas as identificações discutidas acima,

podemos considerar este domínio dos ângulos de Euler ($0 \leq t, \phi \leq 2\pi$) com topologia do toro sólido $C^2 \times S^1$, onde C^2 é o disco descrito por (θ, ϕ) e S^1 é o círculo coberto pela coordenada t_N ($t_N = t + \phi$). Analogamente, para $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, sendo que agora o círculo S^1 é descrito, neste intervalo de θ , por t_S ($t_S = t - \phi$). As situações dos dois toros, assim obtidos, é ilustrada na figura abaixo:



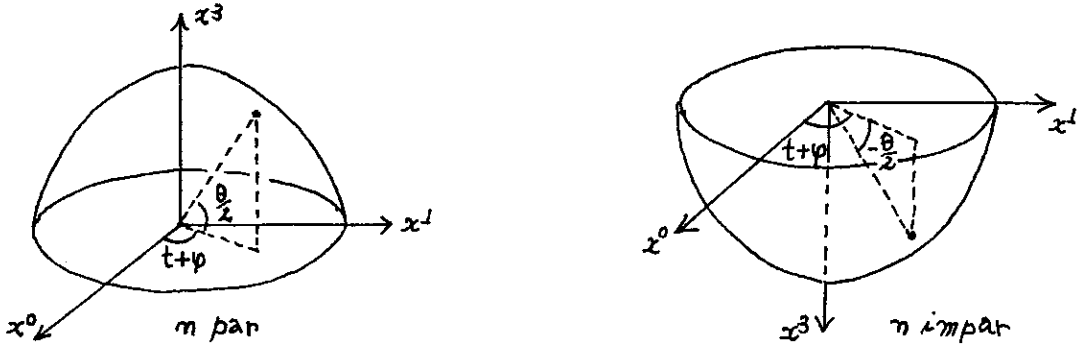
Conforme veremos na secção (4.5.1), enquanto na coordenada t a métrica é singular em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, na coordenada t_N a métrica se torna regular em $\theta = 0$ enquanto que na coordenada t_S a métrica se torna regular em $\theta = \pi$.

4.4 A fronteira de S^3

A tri-esfera é uma variedade sem fronteira. Se excluimos um ponto de S^3 obtemos uma fronteira que é S^2 . Para mostrarmos isto, seccionemos S^3 por um plano. Por comodidade tomemos o plano $x^2 = 0$ ($t - \phi = 2n\pi$) em (2.24). Nesta situação temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 = \cos(\frac{\theta}{2})\cos[\frac{1}{2}(t + \phi)] \\ x^1 = \cos(\frac{\theta}{2})\text{sen}[\frac{1}{2}(t + \phi)] \\ x^2 = 0, \quad t - \phi = 2n\pi \\ x^3 = \text{sen}(\frac{\theta}{2})(-1)^n \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Vemos, assim, que no caso desta secção particular, a fronteira é uma casca esférica S^2 de raio unitário.



Podemos diminuir gradativamente o raio tomando secções do tipo $x^2 = x_0^2$, de modo que o raio seja muito pequeno:

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^3)^2 = 1 - (x_0^2)^2 = \epsilon \quad (4.33)$$

Esta corresponde a situação limite de “tirarmos um ponto” de S^3 . Como mostramos acima, ganhamos, deste modo, uma fronteira que é S^2 de raio $\epsilon \ll 1$.

4.5 O análogo gravitacional

4.5.1 O monopolo magnético gravitacional

Vamos agora, finalmente, tomar dentre as soluções aquela que nos interessa fundamentalmente: O campo gerado por um único monopolo de Dirac, dado por (3.6), em um espaço-tempo com a topologia de $S^3 \times R$. Esta solução corresponde a tomarmos a solução (3.36) escolhendo o limite inferior em (3.40), quando $\Lambda = 0$. Temos então a seguinte situação:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = \mu_0 \\ B^2(r) = r^2 + \frac{\mu_0^2}{4} \\ \rho = 0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

onde tomamos $r_0 = 0$.

O campo magnético, de acordo com (3.6), é então da forma,

$$H_r(r) = \frac{\mu_0}{r^2 + \frac{\mu_0^2}{4}} \quad (4.35)$$

Este gera, de acordo com (3.42), a seguinte geometria:

$$dS^2 = (d\bar{t} + \mu_0 \cos\theta d\phi)^2 - B^2(r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - dr^2 \quad (4.36)$$

onde $\bar{t} = \mu_0 t$.

Este é, de fato, o elemento de linha devido exclusivamente à presença do monopolo magnético, no espaço-tempo $S^3 \times R$, que se torna um espaço-tempo plano para $\mu_0 = 0$. Tal geometria admite geodésicas tipo-tempo fechadas como se pode notar por (2.69) e (2.70), haja vista que nesta solução $A(r) = \text{constante}$.

Para mostrarmos que a linha de singularidade do potencial A , que gera o campo (4.35), é herdada pelo espaço-tempo e coincide justamente com a linha de singularidade que também conduzirá, mais adiante, à violação de $d^2\theta^A = 0$ em (4.49), comecemos por notar que o potencial “de Yang-Wu”, que gera o campo (4.35), nesta geometria, pode ser escrito como.

$$\begin{cases} A_N &= \frac{\mu_0}{B} \left(\frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\theta} \right) \theta^2 \\ A_S &= -\frac{\mu_0}{B} \left(\frac{1+\cos\theta}{\text{sen}\theta} \right) \theta^2 \end{cases} \quad (4.37)$$

Notamos que, analogamente ao espaço-tempo plano, A_N está bem definido sobre o “hemisfério norte” ($\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0$) de S^3 , tendo sua linha de singularidade em $\theta = \pi$. O potencial A_S estando bem definido sobre o “hemisfério sul” ($\pi \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}$) de S^3 com sua linha de singularidade em $\theta = 0$. Numa vizinhança do “equador” de S^3 tanto A_N quanto A_S estão bem definidos, descrevem corretamente o mesmo campo físico, e portanto estes devem diferir por uma transformação de gauge:

$$A_N = A_S + d\Gamma = A_S + 2\frac{\mu_0}{B \text{sen}\theta} \theta^2 \quad (4.38)$$

donde,

$$\Gamma = 2\mu_0\phi \quad (4.39)$$

Vejamos agora o intervalo no qual a coordenada \bar{t} é uma boa coordenada para caracterizar a métrica (4.36). Invertendo a relação para \bar{t} em (2.48), temos, neste caso,

$$d\bar{t} = \theta^0 - \mu_0 \frac{\text{cotg}\theta}{B} \theta^2 \quad (4.40)$$

Desta expressão, em termos da base ortonormal de tétradas, obtemos diretamente que:

$$d\bar{t} \cdot d\bar{t} = 1 - \mu_0^2 \left(\frac{\text{cotg}\theta}{B} \right)^2 \quad (4.41)$$

Vemos assim que \bar{t} não é a melhor escolha para a coordenada temporal pois esta torna a métrica (4.36) singular tanto em $\theta = 0$ quanto em $\theta = \pi$. Temos entretanto uma possível escolha para a coordenada temporal de modo que a métrica seja sempre singular em um único ângulo θ , sendo este ponto o “polo norte” ($\theta = 0$), de S^3 , ou o “polo sul” ($\theta = \pi$), de S^3 . Esta nova escolha de coordenadas constitui justamente nas coordenadas t_N e t_S definidas em (4.28) e (4.31). Podemos assim definir,

$$\begin{cases} t_N &= \bar{t} + \mu_0\phi \\ t_S &= \bar{t} - \mu_0\phi \end{cases} \quad (4.42)$$

onde,

$$t_N = t_S + 2\mu_0\phi \quad (4.43)$$

Assim vemos que a transformação de gauge que leva $A_N \leftrightarrow A_S$ é equivalente à transformação de coordenada temporal que leva $t_N \leftrightarrow t_S$

Esta nova escolha para a coordenada temporal é mais conveniente e natural pois nesta coordenada t_N a métrica somente é singular nas vizinhanças de $\theta = \pi$ e na coordenada t_S a métrica somente é singular nas vizinhanças de $\theta = 0$. Isto nos leva a interpretar S^3 como a união de dois toros sólidos, tal como já observamos anteriormente. No primeiro toro sólido, temos t_N bem definido e este toro tem raio, θ , dentro do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ sendo que $\theta = \frac{\pi}{2}$ define um 2-toro, T_N^2 , que constitui a fronteira toro sólido. No segundo toro sólido, temos t_S bem definido com o raio, θ , do toro dentro do intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Em $\theta = \frac{\pi}{2}$ este segundo toro também tem um 2-toro, T_S^2 , por fronteira que é a mesma para os dois

toros sólidos e portanto são identificados, isto é, $T_S^2 \equiv T_N^2$.

Em termos destas novas coordenadas temos as respectivas 1-formas θ^0 :

$$\begin{cases} \theta_N^0 &= dt_N - A_N \\ \theta_S^0 &= dt_S - A_S \end{cases} \quad (4.44)$$

Vemos, deste modo, que a escolha do gauge para o potencial A induz uma escolha de gauge "natural" para a coordenada temporal, com as linha de singularidade de A e da métrica (θ^0) coincidindo. Se fazemos a transformação de gauge (4.39) sobre A , esta induz na coordenada temporal a mesma transformação de modo a continuarmos com uma boa coordenada temporal, sobre um novo domínio, com a linha de singularidade do novo potencial A' coincidindo com aquela da métrica na nova coordenada temporal.

Deste modo, vemos que as patologias que este monopolo magnético de Dirac introduz na teoria eletromagnética de Maxwell é agora herdada pelo espaço-tempo que o mesmo gera, com topologia de $S^3 \times R$. É neste sentido que dizemos tratar-se também de um monopolo magnético gravitacional. Em um espaço-tempo como o de Reissner-Nordström onde a fonte é de puro monopolo magnético tais características não são observadas, isto é, patologias que o monopolo introduz no eletromagnetismo não são notadas no espaço-tempo e o monopolo não gera qualquer contribuição da parte magnética do tensor de Weyl.

As quantidades \mathcal{E} e \mathcal{H} serão, para a solução (4.36):

$$\begin{cases} \mathcal{E} &= -\frac{\frac{\mu_0^2}{4}}{(r^2 + \frac{\mu_0^2}{4})^2} \\ \mathcal{H} &= -\frac{\mu_0 r}{2(r^2 + \frac{\mu_0^2}{4})^2} \end{cases} \quad (4.45)$$

Vemos assim, a partir destes resultados, que embora estejamos tratando de um espaço-

tempo distinto daquele da solução de NUT-Brill, para a solução (4.36), o efeito do parâmetro α continua sendo essencialmente o mesmo, gerando a contribuição da parte magnética do tensor de Weyl, que tem comportamento assintótico semelhante ao caso da solução de NUT-Brill:

$$\mathcal{E} \rightarrow O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (4.46)$$

e,

$$\mathcal{H} \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{r^3} \quad (4.47)$$

Vemos assim que, nesta nova solução, é essencialmente a própria fonte magnética que gera contribuição para a parte magnética do tensor de Weyl, contrariamente à solução de NUT-Brill.

4.5.2 Violação das condições de integrabilidade

Veamos agora como o problema análogo, das violações das condições de integrabilidade que surge no eletromagnetismo quando há um monopolo de Dirac como fonte, surge na gravitação quando a topologia do espaço-tempo é aquela de $S^3 \times R$. Observando as 1-formas (2.51), vemos que sobre a superfície $S^3 : r = r_0 = \text{constante}$, na variedade $S^3 \times R$:

$$d\theta^0 = -2 A \operatorname{sen}\theta \, d\theta \wedge d\phi \quad (4.48)$$

Assim, pelo teorema de Stokes,

$$\int_{S^3:r=r_0} d^2\theta^0 = \int_{\partial S^3:S^2} d\theta^0 = -8 \pi A(r_0) \quad (4.49)$$

Como obtivemos uma contribuição não nula do lado direito na expressão acima, então teremos, devido ao resultado (A.22) do apêndice A, uma violação na simetria cíclica do tensor de Riemann, de acordo com (A.25), para qualquer valor de r , por todo o espaço-tempo.

$$d^2\theta^A = 0 \Rightarrow R^\lambda_{[\mu\nu\sigma]} = 0 \quad (4.50)$$

Esta é uma situação análoga àquela do eletromagnetismo, quando a presença do monopolo de Dirac introduzia linhas de singularidade sobre o potencial A_μ , violando a simetria cíclica do tensor de Maxwell,

$$d^2A = 0 \Rightarrow F_{[\mu\nu|\sigma]} = 0 \quad , \quad (4.51)$$

sendo que agora, no caso gravitacional, as linhas de singularidade aparecem nas 1-formas θ^0 , isto é na métrica, devido a presença de $\alpha \neq 0$.

É fácil notar que para as soluções de campo já discutidas isto, de fato, ocorre. Tanto no caso da solução de NUT-Brill, quanto na solução nova que apresentamos, temos para r muito grande:

$$\int_{S^3:r=r_0} d^2\theta^0 = \int_{\partial S^3:S^2} d\theta^0 = -8 \alpha \pi \quad (4.52)$$

Este resultado, tal qual no caso eletromagnético (4.9), mostra que temos uma violação do lema de Poincarè, sendo a contribuição não nula em (4.52) devido à borda $S^2 \cap \{\zeta\}$, onde $\{\zeta\}$ é agora uma linha de singularidade de θ^0 .

Outra condição de integrabilidade que exibimos no apêndice A é aquela que envolve as identidades de Bianchi, (A.23), estando relacionada aos $d^2\Theta_{AB}$.

Para as soluções das equações de Einstein-Maxwell discutidas no presente trabalho temos as seguintes contribuições dos $d\Theta_{AB}$, sobre a superfície $r = r_0$, que não são identicamente nulas quando integradas sobre esta superfície :

Na solução de NUT-Brill

A partir de (2.55) e da solução (3.24), podemos exhibir:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Theta_{03} |_{\partial S^3:S^2} = -2 \left(\frac{m\alpha}{\tilde{r}_0^2} + \frac{(2\alpha^2 - \Sigma_0^2)}{\tilde{r}_0^3} + \dots \right) \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ d\Theta_{12} |_{\partial S^3:S^2} = - \left(1 + \frac{4\alpha^2}{\tilde{r}_0^2} + \dots \right) \sin \theta d\theta \wedge d\phi \end{array} \right. \quad (4.53)$$

e então, tomando \tilde{r} muito grande,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S^3:\tilde{r}=\tilde{r}_0} d^2\Theta_{03} = \int_{\partial S^3:S^2} d\Theta_{03} = -8 \alpha m \pi \frac{1}{\tilde{r}_0^2} \\ \int_{S^3:\tilde{r}=\tilde{r}_0} d^2\Theta_{12} = \int_{\partial S^3:S^2} d\Theta_{12} = -4 \pi \left(1 + \frac{4\alpha^2}{\tilde{r}_0^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Na solução de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström, conforme já mencionamos, é o caso particular $\alpha = 0$ da solução de NUT-Brill. Fazendo então α nulo nas relações (4.54), temos:

$$\begin{cases} \int_{S^3: \bar{r}=\bar{r}_0} d^2\Theta_{03} &= \int_{\partial S^3: S^2} d\Theta_{03} = 0 \\ \int_{S^3: \bar{r}=\bar{r}_0} d^2\Theta_{12} &= \int_{\partial S^3: S^2} d\Theta_{12} = -4\pi \end{cases} \quad (4.55)$$

Vemos que neste caso não há qualquer violação das identidades de Bianchi, como já era esperado, pois o espaço-tempo de Reissner-Nordström não herda as linhas de singularidades do monopolo presente como fonte de curvatura. O resultado não nulo que aparece em $d^2\Theta_{12}$ não sendo devido a qualquer parâmetro do modelo e sim a um problema de sistema de coordenadas.

Na solução nova com $\Lambda = 0$

Tomando agora (2.55) para a solução (4.36), temos a seguinte contribuição não nula dos $d\Theta_{AB}$ para mesma:

$$d\Theta_{12} |_{\partial S^3} = - \left(1 + \frac{3\mu_0^2}{4r_0^2} \right) \sin\theta d\theta \wedge d\phi \quad (4.56)$$

e então, para r muito grande,

$$\int_{S^3} d^2\Theta_{12} = \int_{\partial S^3} d\Theta_{12} = -4\pi \left(1 + \frac{3\mu_0^2}{4r_0^2} \right) \quad (4.57)$$

Vemos que tanto em (4.54), quanto em (4.57), temos contribuições não nulas para as integrais de alguns dos $d^2\Theta_{AB}$ que causam, de acordo com (A.23), violações globais das identidades de Bianchi, tanto no espaço-tempo de NUT-Brill quanto naquele da nova solução.

A violação devida a $d^2\Theta_{12}$ em (4.54) e (4.57), entretanto, devem ser olhadas como um resultado curioso que ocorre justamente devido à presença de $\alpha \neq 0$ (NUT) ou $\mu_0 \neq 0$ (nova solução) e conduz à violação das identidades de Bianchi tanto no espaço-tempo de NUT-Brill quanto no caso da nova solução. Vemos ainda que a contribuição de α (ou μ_0) surge sempre em termos de $O(\frac{1}{r^2})$.

Capítulo 5

Conclusão

A analogia traçada neste trabalho entre o campo gravitacional em um espaço-tempo com simetria radial, com topologia de $S^3 \times R$, e o campo magnético gerado pelo monopolo magnético de Dirac veio do fato de que, assim como temos no eletromagnetismo a violação da identidade $dF = 0$ globalmente conduzindo à idéia de monopolos magnéticos de Dirac; no contexto da gravitação, a violação das identidades de Bianchi globalmente conduz à idéia de uma espécie de “carga magnética gravitacional”.

A estreita analogia que existe entre as duas situações foi apontada em diversas situações ao longo do trabalho, como é o caso das relações (4.54), (4.57). Vimos nestas relações que o paralelo não é perfeito pois no caso gravitacional, embora o parâmetro de NUT (ou o monopolo no caso da solução nova) seja o responsável pela violação das identidades de Bianchi, este parâmetro não produz um “fluxo” constante (como se viu em (4.9) no caso eletromagnético) através da superfície S^2 . Conforme vimos em (4.54) e (4.57), este “fluxo” tem um decaimento da ordem de $\frac{1}{r^2}$ no caso gravitacional. Em ambas as soluções, a de NUT e a nova, o parâmetro essencial analisado é o objeto que causa tal violação nas identidades de Bianchi e que é o análogo gravitacional do monopolo magnético de Dirac.

Conforme vimos, é possível fornecer um significado físico para tal “carga magnética

gravitacional”, que gera a parte magnética do tensor de Weyl (\mathcal{H}), associando-o à própria carga magnética como no caso da solução nova apresentada.

O parâmetro de NUT permanece ainda como uma fonte de gravitação de natureza obscura, que produz os mesmos efeitos que o monopolo o faz na solução nova aqui apresentada, e que não tem relação com qualquer fonte de natureza eletromagnética. O ponto fundamental é que o monopolo de Dirac pode gerar um espaço-tempo cujo campo gravitacional tem características patológicas análogas às de seu campo magnético, de natureza significativamente distinta daquele que o monopolo gera na solução de Reissner-Nordström onde as violações das identidades de Bianchi não são observadas, conforme (4.55) e o campo \mathcal{H} é nulo, conforme já discutimos em (3.36), de modo que o campo gravitacional não guarda, neste caso, paralelos com o campo magnético gerado por um monopolo de Dirac.

Embora não tenhamos nos detido em discutir detalhadamente a noção de massa dual [9], pode-se mostrar que na nova solução (4.36), a massa dual corresponde ao monopolo que gera \mathcal{H} , reforçando ainda mais a idéia de que o monopolo é, na solução nova, um parâmetro que desempenha o mesmo papel que o parâmetro de NUT desempenhara no caso da solução de NUT-Brill, sendo agora este parâmetro de natureza física conhecida, ou seja, a carga do monopolo.

Capítulo 6

Apêndice A : Formalismo de tétRADAS

Dada uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, podemos sempre escolher, localmente, um sistema de referência no qual o elemento de linha assume a forma:

$$dS^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$\theta^A = e^A_{\ \mu} dx^\mu \quad (\text{A.2})$$

são as 1-formas de tétRADAS de Lorentz e

$$\eta_{AB} = g_{\mu\nu} e^\mu_{\ A} e^\nu_{\ B} = \text{diag}(+, -, -, -) \quad (\text{A.3})$$

é a métrica localmente minkowskiana.

A matriz composta pelos $(e^A{}_\mu)$ caracteriza a base de tétradas e a sua inversa é caracterizada pelos parâmetros $(e_A{}^\mu)$ tais que:

$$e^A{}_\mu e^\nu{}_A = \delta^\nu{}_\mu \quad (\text{A.4})$$

Qualquer tensor do espaço-tempo poderá, então, ser projetado na base de tétradas através das expressões,

$$\begin{aligned} V^A &= e^A{}_\mu V^\mu \\ V^{AB} &= e^A{}_\mu e^B{}_\nu V^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e assim por diante.

Os  ndices de tétradas são abaixados e levantados pelas matrizes η_{AB} e η^{AB} , respectivamente, onde,

$$\eta_{AB}\eta^{AC} = \delta_B{}^C \quad (\text{A.6})$$

A partir destas no es podemos então, usando o cálculo de formas diferenciais, fazer todos os cálculos em Relatividade Geral na base de tétradas. Para isso definimos então:

$$d\theta^A = \gamma^A{}_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (\text{A.7})$$

$$C^A{}_{BC} = \gamma^A{}_{BC} - \gamma^A{}_{CB} \quad (\text{A.13})$$

tal que a equação (A.7) fica agora escrita na forma:

$$d\theta^A = \frac{1}{2} C^A{}_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (\text{A.14})$$

sendo este novo coeficiente antissimétrico nos dois últimos índices:

$$C^A{}_{BC} = -C^A{}_{CB} \quad (\text{A.15})$$

A relação inversa de (A.13) sendo a seguinte.

$$\gamma^A{}_{BC} = \frac{1}{2} (C^A{}_{ABC} + C^A{}_{BCA} - C^A{}_{CAB}) \quad (\text{A.16})$$

Posto isto, podemos agora tomar a definição do tensor de Riemann,

$$V_{\mu}{}_{\nu}{}_{\parallel\alpha} - V_{\mu}{}_{\parallel\alpha}{}_{\nu} = V_{\lambda} R^{\lambda}{}_{\mu\nu\alpha} \quad (\text{A.17})$$

e projetá-la na base de tétradas. Isto fornece a seguinte relação:

$$\frac{1}{2} R^A{}_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = d\Theta^A{}_B + \Theta^A{}_C \wedge \Theta^C{}_B \quad (\text{A.18})$$

Com a relação acima podemos então definir a 2-FORMA DE CURVATURA,

$$\Omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (\text{A.19})$$

que possui a seguinte simetria:

$$\Omega_{AB} = -\Omega_{BA} \quad (\text{A.20})$$

e então escrever a SEGUNDA EQUAÇÃO DE ESTRUTURA DE CARTAN:

$$\Omega^A_B = d\Theta^A_B + \Theta^A_C \wedge \Theta^C_B \quad (\text{A.21})$$

A partir destas relações podemos obter todas as simetrias do tensor de Riemann. Em particular, se tomarmos as relações (A.2) e (A.10), e aplicarmos duas vezes o gradiente nas mesmas teremos:

$$d^2\theta^A = -\Omega^A_B \wedge \theta^B = -\frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^B \wedge \theta^C \wedge \theta^D \quad (\text{A.22})$$

e ainda,

$$d^2\Theta^A_E = B^A_{EBCD} \theta^B \wedge \theta^C \wedge \theta^D \quad (\text{A.23})$$

Como o operador d^2 é identicamente nulo,

$$d^2 = 0 \quad (\text{A.24})$$

temos que as relações (A.22) e (A.23) fornecem:

$$R^A{}_{[BCD]} = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$B^A{}_{E[BCD]} = 0 \quad (\text{A.26})$$

sendo a (A.25) equivalente a simetria cíclica do tensor de Riemann e a (A.26) equivalente às identidades de Bianchi projetadas na base de tétradas.

Algumas relações relevantes escritas na base de tétradas

Apresentamos abaixo a forma de algumas relações e leis físicas quando escritas na base tetrada. Embora certas leis que não envolvem explicitamente derivadas, como é o caso das equações de Einstein, sejam escritas do mesmo modo, apenas substituindo os índices de espaço-tempo pelos índices de tétradas, o mesmo não ocorre com aquelas que envolvem explicitamente a derivação, como é o caso das equações de Maxwell.

Definindo então a “derivação em tetrada” por,

$$|_A = \parallel_{\mu} e_A^{\mu} \quad (\text{A.27})$$

teremos:

CONSERVAÇÃO DO TENSOR MOMENTUM-ENERGIA:

$$T^{AB}{}_{|B} + \gamma^A{}_{BC} T^{BC} + T^{AB} \gamma^C{}_{BC} = 0 \quad (\text{A.28})$$

onde,

$$T^{AB} = T^{\mu\nu} e_{\mu}^A e_{\nu}^B \quad (\text{A.29})$$

EQUAÇÕES DE MAXWELL:

$$F^{AB}{}_{|B} + \gamma^A{}_{BC} F^{BC} + F^{AB} \gamma^C{}_{BC} = J^A \quad (\text{A.30})$$

e

$$F_{[AB|C]} + F_{E[A} C^E{}_{BC]} = 0 \quad (\text{A.31})$$

onde

$$F^{AB} = F^{\mu\nu} e_{\mu}^A e_{\nu}^B \quad (\text{A.32})$$

$$J^A = J^{\mu} e_{\mu}^A \quad (\text{A.33})$$

são, respectivamente, o tensor de Maxwell e a quadri-corrente elétrica projetados na base de tetradas.

PARÂMETROS CINEMÁTICOS DO CAMPO DE VELOCIDADES:

Expansão:

$$\theta = V^A{}_{|A} + V^A \gamma^B{}_{AB} \quad (\text{A.34})$$

Rotação:

$$\omega_{AB} = h^C{}_A h^D{}_B [V_{[C|D]} - \gamma^E{}_{[CD]} V_E] \quad (\text{A.35})$$

Deformação:

$$\sigma_{AB} = h^C_A h^D_B [V_{(C|D)} - \gamma^E_{(CD)} V_E] - \frac{1}{3} \theta h_{AB} \quad (\text{A.36})$$

Aceleração:

$$a_A = V_{A|B} V^B + \gamma_{ABC} V^B V^C \quad (\text{A.37})$$

onde

$$h_{BA} = h_{\mu\nu} e^\mu_B e^\nu_A \quad (\text{A.38})$$

é o projetor do espaço ortogonal ao campo de velocidades, na base de tétradas.

Capítulo 7

Apêndice B : Conteúdo Material

A forma geral de um tensor momento-energia, projetado paralelamente e perpendicularmente a um campo de velocidades V^A , na base de tétradas, é dada por:

$$T_{AB} = (\rho + p) V_A V_B - p \eta_{AB} + Q_A V_B + Q_B V_A + \pi_{AB} \quad (\text{B.1})$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = T_{AB} V^A V^B, \text{ é a densidade de energia,} \\ p = -\frac{1}{3} h^{AB} T_{AB}, \text{ é a pressão escalar,} \\ Q_A = h_{AC} V_B T^{CB}, \text{ é o fluxo de energia,} \\ \pi_{AB} = h_{AC} h_{BD} T^{CD} - \frac{1}{3} h_{MN} T^{MN} h_{AB}, \text{ é a pressão anisotrópica,} \\ h_{AB} = \eta_{AB} - V_A V_B, \text{ é o projetor do espaço normal à } V^A. \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

Por construção, tanto o vetor que caracteriza o fluxo de energia, bem como o tensor que caracteriza a pressão anisotrópica, pertencem ao espaço, local, de repouso do observador cujo campo de velocidades é V^A . Além disto, pela sua própria definição, π_{AB} não possui traço. Com isso estes objetos satisfazem as seguintes propriedades.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_A V^A = 0 \\ \pi_{AB} V^B = 0 \\ \pi_{AB} V^A = 0 \\ \pi_{AB} \eta^{AB} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

Vejamos então qual a forma mais geral do tensor momento-energia quando projetado “perpendicularmente” e “paralelamente” ao campo de velocidades,

$$V^A = \delta_0^A \quad (\text{B.4})$$

Daí vemos, por (B. 3), que neste sistema de referência temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = 0 \\ \pi_{0A} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Assim a forma mais geral possível, para T_{AB} , é:

$$T_{AB} \equiv \begin{pmatrix} \rho & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & p + \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ Q_2 & \pi_{12} & p + \pi_{22} & \pi_{23} \\ Q_3 & \pi_{13} & \pi_{23} & p + \pi_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

onde, por (B. 3), temos:

$$\pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Se, nesta base de tétradas o tensor momento-energia for diagonal temos entao:

$$T_{AB} \equiv \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p + \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p + \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p - 2\pi \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Tensor momento-energia eletromagnético

Na base de tétradas o tensor momento-energia eletromagnético se escreve como:

$$T_{AB}^{em} = F_A^C F_C^B + \frac{1}{4} \eta_{AB} F_{CD} F^{CD} \quad (\text{B.9})$$

Que tem, por defini o, a propriedade:

$$\eta^{AB} T_{AB}^{em} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Esta propriedade, juntamente com (B. 6) e (B. 7), conduz a equa o de estado característica para a radia o eletromagnética:

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (\text{B.11})$$

Referências

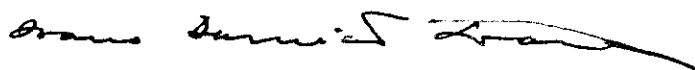
- [1] E. Newman, L. Tamborino, & T. Unti I.N. (1963), "*Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric*", J. Math. Phys. 4; 915.
- [2] C. Misner (1963) "*The Flatter regions of Newmann, Unti, and Tamborino's Generalized Schwarzschild Space*", J. Math. Phys. 4; 924.
- [3] D.R. Brill (1964), "*Electromagnetic Fields in Homogeneous, Nonisotropic Universe*", Phys. Rev. B 133, 3 ; 73.
- [4] I. Ozsváth & E. L. Schucking (1969) "*The finite Rotating Universe*", Ann. Phys. 55; 166.
- [5] I.D. Soares (1993) "*Cosmologia Relativista*". Curso ministrado no CBPF, no primeiro semestre de 1994.
- [6] P. A. M. Dirac (1931) "*Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*", Proc. Roy. Soc. London A 133, 3; 60.
- [7] R. Geroch (1970) "*Multipole Moments. II. Curved Space*", J. Math. Phys. 11,8; 2580.
- [8] R. Geroch (1971), J. Math. Phys. 12, 918.
- [9] S. Ramaswamy & A. Sen (1981) "*Dual-mass in general relativity*", J. Math. Phys. 22, 11; 2612.

- [10] T.T. Wu & C.N. Yang (1975) "*Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*", Phys. Rev. D **12**, 12; 3845.
- [11] Flanders, H. (1963) "*Differential Forms.* ", Academic Press, New York.
- [12] Hansen, R (1974), J. Math. Phys. **15**, 46.
- [13] Adler, Bazin & Schiffer (1975) "*Introduction to General Relativity*", McGraw-Hill, Inc.
- [14] Reissner, H (1916) "*Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie*", Ann. Physik, **50**: 106 - 120.
- [15] Para formulação de monopolos de Dirac em termos de fibrados ver: J. Friedman & R. Sorkin (1979) "*Dyon spin and statistics: A fiber-bundle theory of interacting magnetic and electric charges*", Phys. Rev. D **20**, 10; 2511.
- [16] Para formulação do eletromagnetismo em termos de dois potenciais eletromagneticos ver:
V.I. Strazhev (1972), Theor. Mat. Fiz. **13**,200.
N.Cabibbo & E. Ferrari (1962), Nuovo Cim. **23**, 1147.
- [17] B. Doubrovine, S. Novikov & A. Fomenko (1985) "*Géometrie contemporaine: méthodes et applications.*", Editions Mir, Moscou.
- [18] M. Novello & J. Duarte de Oliveira (1980) "*On Dual Properties of the Weyl Tensor.*", Gen. Rel. Grav. **12**, 11; 871.

“O ESPAÇO TEMPO DE UM MONOPOLO MAGNÉTICO”

Marcelo Costa de Lima

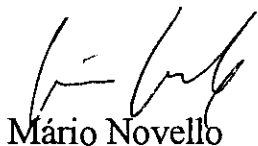
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



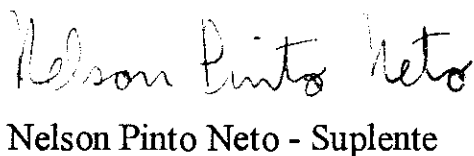
Ívano Damião Soares - Presidente



Luciane Rangel de Freitas



Mário Novello



Nelson Pinto Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 24 de março de 1995