

1994/08

S252

TESE DE
MESTRADO

Variedades de Poisson
com Vínculos de Segunda Classe

CLAUDIO ANAEL GOMES SASAKI

1230

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, JULHO DE 1994



A verdadeira e secular luta pela democratização da vida social baseia-se na autodeterminação, na socialidade e moralidade naturais, no trabalho agradável e na alegria terrena do amor. Encara qualquer ilusão como um perigo. Por isso, não somente não temerá a compreensão natural e científica da vida, mas dela se servirá para dominar os problemas decisivos para o desenvolvimento da estrutura humana de forma não ilusória, mas científica e prática.

Wilhelm Reich

DEDICO

Esta tese é dedicada à *Elizabeth Lima Moreira*.



AGRADEÇO

A todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente.

A Paulo Pitanga pela amizade e prestativa orientação.

A Antonio Teixeira por sua confiança e ajuda.

A Gentil O. Pires por sua amizade, ajuda e incentivo.

A L.P.Colatto por sua amizade, coleguismo e inestimável ajuda com sugestões e auxílio com o LATEX.

A Felipe de Moraes Paiva por ter gentilmente cedido seus arquivos (em LATEX) no formato apropriado para a escrita da tese.

Aos professores José Helayel, Takeshi Kodama, Lígia Rodrigues, Bartolomeu Figueiredo, Sérgio Joffily, Alberto Passos, Adolfo Malbouisson, Luis Carlos, Armando Takeushi e Terezinha Stuchi.

À turma do DCP: Marquinhos, Oswaldo, Zé Luis, Collato, Tião, Álvaro, Renan, Marcelão, Luis Claudio, Marcelo, Vitor, Luis Alberto, Gentil, Helayel, Marco Aurélio, Bietenholtz, Carlos, Fernandão, Daniel, Flávio, Li, Antonio.

Aos companheiros de biritadas: (a lista é grande!) Bartô, Mioco, Wagnerzinho, Cêlia, Zé Luis, Collato, Cambraia, Flávio, Marcelão e Ana, Tião e Cíntia, Armando, Pitanga, Régio, Hélio, Felipe, Rossano, Maneschi, Alexandre, César, Bola e Ana Lúcia, Seu Manoel, Tião, Rodrigo, Ismael, Ronaldo, Bigode, China, Boris, Sobral, Bietenholtz, Jinsk, Marcelo, Renan, Cristiana, Liana, Laudo, Li, Zeng, Vitor, Francisco, Kitty, peruanos, argentinos e cucarachas em geral.

Ao Seu Astérius, por sua amizade e carinho.

A Myriam Simões Coutinho pela ajuda e apoio.

Ao CNPq pelo inestimável suporte financeiro.

Resumo

O capítulo 1 da tese constitui-se num apanhado geral do método de projeção aplicado ao tratamento de sistemas vinculados. Os principais resultados obtidos em [28, 29, 30, 31, 32, 33] são apresentados sumariamente como um formulário comentado.

Desenvolvemos no capítulo 2 uma formulação do método na variedade de Poisson e estudamos algumas características geométricas das subvariedades de segunda classe.

No terceiro capítulo mostramos que o projetor aparece relacionado às deformações das álgebras de Lie associadas a variedades de Poisson [49]. Em especial, temos os parênteses de Dirac como deformações dos parênteses de Poisson.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo em português	iii
Índice	iii
Introdução	1
1 Formulação para dinâmicas vinculadas via campos projetores	8
1.1 Formulação lagrangeana via campos projetores	9
1.1.1 Sistema vinculado clássico	9
1.2 O projetor e a dinâmica do sistema vinculado	11
1.3 O trenó de Chaplygin, um exemplo	14
1.4 Geometria não-holônoma	16
1.5 Quantização de sistemas não-holônomos	18
1.6 O projetor na formulação simplética da mecânica	22
1.7 Eletromagnetismo no gauge de Coulomb	25
2 O projetor na variedade de Poisson	26
2.1 Os parênteses de Poisson	26
2.2 Subvariedades vinculares	31
2.3 O projetor	34
3 Álgebras de Lie definidas pelo projetor	41

3.1	A teoria das deformações das álgebras de Lie	41
3.2	A torção de Nijenhuis do projetor	47
3.3	Deformações dos parênteses de Poisson	48
3.4	O projetor e as deformações da álgebra $N(V)$	50
	Conclusão	54
A	- Apêndice: Mecânica hamiltoniana e vínculos de Dirac	57
B	- Apêndice:	70
B.1	Variedades diferenciáveis	70
B.2	O parêntese de Schouten	76
B.3	Álgebras graduadas	79
B.4	Cohomologias de álgebras	82
	Referências	84

Introdução

O objetivo da presente dissertação de mestrado é generalizar, para a variedade de Poisson, o método de projeção originariamente desenvolvido em [28, 29, 30] para tratar sistemas clássicos sujeitos a vínculos. Partimos de uma síntese de trabalhos anteriores (capítulo 1), construímos uma formulação do método na variedade de Poisson (capítulo 2) e estudamos suas relações com as deformações da álgebra de Lie dinâmica de uma variedade simplética (capítulo 3).

A variedade de Poisson caracteriza-se por possuir uma estrutura matemática que permite definir um parêntese de Poisson generalizado, ou seja, uma álgebra de Lie sobre o anel das funções diferenciáveis da variedade [11, 49, 46].

O primeiro a introduzir e discutir as estruturas de Poisson foi S. Lie [1] em 1875, que as denominava grupo de funções. Posteriormente, um tratamento sistemático veio com os trabalhos de A. Kirillov [2] e A. Lichnerowicz [49] publicados na década de setenta. Desde então, apareceram muitas outras contribuições importantes [11, 44, 72, 63, 46]. Chamadas frequentemente de estruturas hamiltonianas, nos trabalhos de alguns autores elas são definidas de maneiras diversas, todas porém equivalentes [3, 4, 7]. No contexto em que foram estudadas por Kirillov, são casos particulares de álgebras de Lie locais.

Variedades com estrutura de Poisson e suas relações com outras áreas da matemática estão sendo amplamente estudadas. Os estudos de sistemas hamiltonianos completamente integráveis vêm apresentando um grande desenvolvimento [6, 4, 5]. Em 1982, E. Sklyanin encontrou uma interessante estrutura de Poisson quadrática. Um tipo de estrutura de Poisson não-linear é usada na descrição de sistemas integráveis, tanto a nível clássico

como quântico [63, 47].

Nesta introdução, indicaremos algumas razões que conduziram as estruturas de Poisson a uma posição de relevo dentro da mecânica. Princípios por apontar algumas consequências do emprego cada vez maior de técnicas matemáticas na descrição dos sistemas clássicos.

A crescente matematização dos conceitos tem sido uma característica marcante da física teórica. Nos últimos anos esta tendência vem se intensificando, devido ao reconhecimento por parte dos físicos dos valiosos "insights" proporcionados pelos métodos matemáticos desenvolvidos modernamente, e, por outro lado, ao envolvimento pessoal de muitos matemáticos em importantes problemas da física e da área tecnológica.

Em particular a mecânica clássica, por possuir uma interpretação objetiva e lidar com objetos matemáticos muito bem estabelecidos, passou a ser rigorosamente formalizada [24, 12, 15, 8]. A dinâmica clássica atualmente é descrita por intermédio da poderosa linguagem das variedades diferenciáveis, esta por sua vez põe em relevo a geometrização dos conceitos mecânicos. De fato, são imprescindíveis conhecimentos em topologia, geometria diferencial, teoria das equações e estruturas algébricas, para que se possa abordar profundamente o assunto.

A matematização da mecânica viabilizou o tratamento de problemas bastante complexos, que vão desde as irregularidades das órbitas de asteróides na mecânica celeste [21] até o controle e estabilidade de engenhos como satélites e telescópios e muitos outros equipamentos de precisão na área da robótica [20, 10, 22, 31].

O teorema K.A.M. [14], o método de redução em sistemas hamiltonianos com simetrias [12] e as dinâmicas tipo "mixing" [21], notáveis realizações da física deste século, são exemplos do enorme desenvolvimento proporcionado pela matemática.

O cenário onde são estudados os sistemas clássicos é o conhecido formalismo simplético, que proporcionou uma descrição global e invariante da dinâmica [45, 24, 12, 15]. A formulação simplética da mecânica, além de reobter os antigos resultados da teoria dos sistemas hamiltonianos [24] (o estudo dos sistemas sujeitos a vínculos, por exemplo, foi

todo reformulado usando-se os recursos da geometria simplética [25]), possibilitou o tratamento de um grande número de novos problemas. A quantização geométrica [41, 42, 43] só foi possível com o desenvolvimento do formalismo simplético.

Existem, contudo, sistemas cuja complexidade é enorme, e para que possamos tratá-los é necessário possuímos um entendimento bastante profundo de como se relacionam os numerosos e sutis aspectos que compõem a sua dinâmica, bem como torna-se necessária uma abordagem mais refinada que a padrão, ou seja, é necessário trabalharmos com um número adicional de estruturas matemáticas que possibilite uma descrição mais detalhada e eficiente dos processos envolvidos.

O desenvolvimento tecnológico atual coloca um grande número de problemas que precisam de uma abordagem prática e objetiva [10, 20, 19, 13]. As simulações por computadores e os problemas de estabilidade e controle são exemplos típicos, onde a geometria diferencial tem contribuído de forma marcante.

O método da redução em sistemas com simetria, por exemplo, auxilia a compreensão dos problemas do ponto de vista teórico, e também viabiliza processamentos numéricos que, de outro modo, envolveriam uma quantidade tão grande de operações que tornaria o problema inexecutável.

O método objetiva encontrar subvariedades do fibrado cotangente T^*V do espaço de configuração V . Nessas subvariedades (geralmente simpléticas), de dimensão menor do que a de T^*V , podem se apresentar, simplificadas, características como pontos críticos e fluxos hamiltonianos, favorecendo estudos de estabilidade e de algoritmos de integração [10].

A generalidade é um ponto forte do método, que pode ser aplicado inclusive para tratar sistemas não-integráveis e caóticos [10]. Arnold mostrou como podemos visualizar facilmente a estabilidade dinâmica de um corpo rígido livre (caso completamente integrável) usando o teorema da redução [12, 13].

As estruturas de Poisson aparecem em alguns problemas da mecânica, associadas ao

fato de que o conjunto de valores da aplicação momento J^1 , sob certas condições, aparecem como folhas de uma folheação generalizada de T^*V , folheação esta definida pelo ortogonal simplético $(orth F)^2$ do conjunto F de subespaços tangentes às órbitas da ação do grupo G em T^*V [11].

As variedades de Poisson podem ser "suavemente" decompostas em variedades simpléticas de diferentes dimensões [2]. Esta propriedade parece adequada ao tratamento de sistemas bastante comuns em mecânica: um sistema descrito por uma estrutura simplética, quando os parâmetros que o caracterizam atingem um certo valor limite, o sistema ainda possui formulação simplética, porém o número de graus de liberdade pode ser muito diferente. O problema dos três corpos restrito, onde a massa de um corpo que gravita em um potencial variável gerado pelo movimento dos dois outros corpos "tende" a zero, é um exemplo estudado em mecânica celeste.

A estrutura de folheação da variedade de Poisson é útil também em problemas em que o número de graus de liberdade permanece constante, porém a estrutura simplética do espaço varia. O limite newtoniano da relatividade especial ($c \rightarrow \infty$) pode ser descrito por esse formalismo [44].

Há casos em que o espaço de fase está "dividido" em folhas simpléticas. Uma folheação de vínculos de segunda classe se traduz pelo aparecimento de uma estrutura de Poisson [49, 11]. É exatamente nesse contexto que as estruturas de Poisson aparecerão no capítulo 3. Aplicando-se um operador de projeção (capítulo 2), construído para gerar

¹Para um sistema hamiltoniano em que age um grupo (de Lie) G de simetria que é um simplectomorfismo de T^*V , para qualquer que seja $X \in \mathfrak{g}$ (álgebra de Lie associada a G) existe [15] uma aplicação $J : T^*V \rightarrow \mathfrak{g}^*$ que verifica

$$i_{X_{T^*V}} \Omega = -d \langle J, X \rangle;$$

Ω é a 2-forma simplética de T^*V e

$$X_{T^*V} = \frac{d}{dt} \exp(-tX) \cdot x|_{t=0}, \quad (x \in T^*V).$$

²Seja F_x um subespaço de TT^*V ,

$$orth F_x = \{v \in T_x T^*V \mid \Omega(v, u) = 0 \quad \forall u \in F_x\}.$$

campos hamiltonianos tangentes a subvariedades de segunda classe, ao bivector que define a estrutura simplética, obtemos um tensor antissimétrico de ordem 2 que estabelece a estrutura de Poisson. Em outras palavras, o projetor permite que se defina um outro parêntese na variedade, este como veremos não é outro senão o parêntese de Dirac, no caso em que a variedade ambiente seja simplética.

As diferentes possibilidades de se definir parênteses de Poisson e de como essas estruturas se relacionam são temas abordados por um outro ramo da matemática: a teoria das deformações das álgebras de Lie [74, 75, 76, 78, 49, 62]. Essencialmente, é o estudo dos morfismos entre álgebras definidas em um determinado conjunto. As deformações das álgebras e suas aplicações foram amplamente estudadas nas últimas três décadas [76, 79, 77, 80, 82], apesar disso continuam sendo uma área promissora.

Uma aplicação bastante interessante da teoria das deformações é a quantização de sistemas clássicos através do formalismo de Weyl-Wigner-Moyal da mecânica quântica [69, 70, 71]. Nessa abordagem, a teoria quântica é uma teoria estatística no espaço de fase, e os seus parênteses dinâmicos (por exemplo, o parêntese de Moyal) estão em correspondência com os parênteses de Poisson (simpléticos) da mecânica clássica. Com este tratamento, [51] conseguiram calcular espectros de muitos observáveis quânticos.

A seguir descrevemos o esquema geral da redação e justificamos o encadeamento escolhido para a exposição dos tópicos. Cada capítulo tem sua própria introdução onde é apresentado com maior especificidade o material tratado a seguir.

O capítulo 1 constitui-se em um apanhado geral do método projetor, onde expomos resumidamente as suas aplicações, como as equações da dinâmica de um sistema lagrangeano clássico sujeito a vínculos externos, a quantização de sistemas não-holônomos, as bases para a descrição de uma geometria não-holônoma e a formulação do método no espaço simplético. São também comentadas algumas contribuições adicionais e as referências originais sobre o assunto.

As variedades de Poisson e os parênteses (de Poisson) generalizados a elas associados são descritos brevemente no início do capítulo 2. Em seguida definimos um projetor Λ

(campo idempotente) como um tensor do tipo $(1,1)$ construído a partir dos vínculos de segunda classe. O operador Λ projeta os campos hamiltonianos sobre uma subvariedade S definida pelos vínculos e determina uma estrutura de Poisson em V . São explorados também os aspectos duais (covariantes) do projetor. De forma bem direta, o operador de projeção Λ constroi localmente as fibras de S para os campos vetoriais. Analisamos algumas características geométricas de subvariedades lineares localmente definidas.

Abrimos o capítulo 3 com uma rápida introdução à teoria das deformações, em seguida mostramos que os vínculos de segunda classe podem induzir deformações triviais da álgebra de Lie dos campos vetoriais de uma variedade de Poisson. No restante do capítulo, nos restringindo a variedade simplética (caso particular de variedade de Poisson, ver capítulo 2), mostramos que o projetor define estruturas de Poisson e portanto álgebras de Lie de dimensão infinita (álgebras de Lie dinâmicas da variedade [49]). Sob certas condições, estas estruturas são conectadas umas às outras de forma contínua (deformações). Os parênteses de Dirac podem ser obtidos para um certo valor do parâmetro de deformação. Condições impostas sobre o projetor para que este defina uma deformação da álgebra de Lie dinâmica são comentadas ao final.

O apêndice A é dedicado à apresentação dos principais resultados da teoria de Dirac para os sistemas hamiltonianos singulares; o tratamento é local e são apontados alguns aspectos básicos da quantização.

O apêndice B apresenta os fundamentos do cálculo em variedades, uma introdução às álgebras de Lie graduadas e às co-homologias a elas associadas; são também introduzidos os parênteses de Schouten e de Nijenhuis. Os principais resultados desses tópicos são fundamentais para a formulação da teoria das deformações das álgebras de Lie. As operações matemáticas utilizadas nesta dissertação estão todas definidas e exemplificadas neste apêndice.

Ao escrever a versão final da tese, houve a preocupação em organizar e expor o conteúdo dos capítulos de uma maneira didática. Nessa perspectiva, os apêndices deixaram de ser simples sumários das fórmulas utilizadas no texto para tornarem-se pe-

quenas introduções aos temas apresentados na tese.

Capítulo 1

Formulação para dinâmicas vinculadas via campos projetores

Neste capítulo, vamos expor o método de projeção desenvolvido por C. M. do Amaral e P. Pitanga [28, 29, 30] para tratar sistemas mecânicos submetidos a vínculos.

O método é um meio alternativo de se trabalhar com vínculos sem eliminar coordenadas; preserva assim todas as simetrias do sistema, o que é muito útil no processo de quantização.

Resumiremos a seguir os principais resultados obtidos em [30], com o intuito de definir notações e especificar as contribuições originais sobre o tema, nesta tese.

No presente capítulo serão tratados os seguintes temas:

- i) formulação da mecânica vinculada via o operador de projeção;
- ii) geometria não-holônoma, onde os conceitos são introduzidos através do tratamento dos vínculos (não integráveis) pelo método do projetor;
- iii) quantização de sistemas hamiltonianos generalizados, onde o projetor é aplicado ao processo canônico e na integração de caminho; e
- iv) formulação do método projetor na variedade simplética e suas características.

1.1 Formulação lagrangeana via campos projetores

Trataremos essencialmente de sistemas mecânicos submetido a vínculos lineares nas velocidades.

Como é bem sabido, os vínculos, na grande maioria dos sistemas mecânicos, são lineares nas velocidades generalizadas e se dividem em integráveis (holônomos) e não-integráveis (não-holônomos) [9].

Segundo R. Weber [34], não é conhecido nenhum sistema mecânico natural que possua vínculos não-lineares (nas velocidades). No entanto existem métodos que tratam de sistemas sujeitos a restrições não-lineares, porém eles não são suficientemente satisfatórios, pois apresentam problemas que vão desde a violação do determinismo newtoniano até a inequivalência das equações estabelecidas por diferentes métodos [16, 17].

Por outro lado a teoria dos vínculos lineares é bastante satisfatória e inúmeros resultados são conhecidos [9]. Dentre os muitos exemplos temos o método dos multiplicadores de Lagrange, as equações de Appell em pseudo-coordenadas, os sistemas de Caplygin, as equações de Veronec, de Volterra e Maggi, etc. Todos esses métodos se baseiam nos princípios de Hamilton e de D'Alembert, estes por sua vez são muito gerais, bastante poderosos e estão por trás de praticamente todas as teorias da física.

A moderna geometria diferencial tem encontrado na mecânica clássica vinculada um amplo campo de realizações. Por outro lado, os modernos métodos matemáticos desenvolvidos por Poincaré, Arnold, Weinstein, Lichnerowicz e muitos outros, têm aberto novas perspectivas no domínio da pesquisa pura e aplicada em mecânica clássica.

A título de exemplo, citamos o grande interesse na geração automática das equações de movimento em sistemas de multicorpos, que surgem em robótica e biodinâmica. Em [31] as equações de movimento para tais sistemas são obtidas com o auxílio do projetor.

1.1.1 Sistema vinculado clássico

Consideramos um sistemas de n partículas em \mathbf{R}^3 submetido a K vínculos definidos localmente por K 1-formas independentes

$$\Omega^J := a_\mu^J(x) dx^\mu \quad (J = 1, \dots, K) \quad (\mu = 1, \dots, N = 3n) \quad (1.1)$$

Estamos convencionando que repetir índices num monômio implica somar nesses índices. Vamos nos restringir a vínculos independentes do tempo.

O conjunto de K 1-formas independentes define em cada ponto x do espaço \mathbf{R}^N um subespaço vetorial (S_x^s) gerado por $s = (N - K)$ campos vetoriais X^j e tal que

$$S_x^s := \{X_j \in T_x \mathbf{R}^N \perp \Omega^J(X) = 0; j = 1, \dots, s\}. \quad (1.2)$$

A operação de contração entre campos vetoriais e 1-formas $\Omega(X)$ é definida no apêndice B.

Deixando x variar, estabelecemos uma estrutura denominada distribuição diferenciável. Rigorosamente falando, S^s é uma distribuição diferenciável se para cada ponto x existir uma vizinhança $U(x)$ onde são definidos s campos vetoriais linearmente independentes X_1, \dots, X_s , os quais por sua vez geram os subespaços vetoriais locais.

Podemos nos perguntar se, para uma dada distribuição S^s , existe uma subvariedade S de \mathbf{R}^N tal que, para cada ponto $x \in S$, tenhamos

$$T_x S = S_x^s. \quad (1.3)$$

Se isto acontecer, então S é uma variedade integral de \mathbf{R}^N e S^s é uma distribuição integrável. É neste sentido que aqui falamos em vínculos integráveis.

Podemos representar a variedade integral por

$$x \in S \iff \{x^1, \dots, x^r(\text{arbitrários}), x^{r+1} = c_{r+1}, \dots, x^N = c_N, c_i \in \mathfrak{R}\}. \quad (1.4)$$

Torna-se então evidente a existência de um número incontável de variedades integrais. Essas integrais definem o que chamamos folheação de \mathbf{R}^N ,

$$N_f = \{S_{\{c\}}, c \in \mathfrak{R}^s\}. \quad (1.5)$$

As condições necessárias e suficientes para que uma distribuição S^r seja integrável são dadas pelo teorema de Frobenius e são as seguintes:

$$d\Omega^J(X, Y)|_{x=0} = 0 \quad X, Y \in S_x^s \quad (1.6)$$

para todo ponto $x \in \mathbf{R}^N$. Em termos de campos vetoriais, o teorema de Frobenius é expresso da forma

$$[X_i, X_j] \in S^s \quad X_i, X_j \in S^r \quad (i, j = 1, \dots, s) \quad (1.7)$$

onde o parêntese é o comutador entre campos vetoriais, definido no apêndice **B**.

Se o sistema (1.1) for integrável, então ele irá definir uma subvariedade S de \mathbf{R}^N , com uma métrica herdada de \mathbf{R}^N . Neste caso o sistema de partículas é chamado de holônomo.

Se a distribuição for não integrável o sistema de partículas é chamado não-holônomo.

O operador de projeção, a partir de uma distribuição, é definido pelas aplicações

$$\Lambda : T_x \mathbf{R}^N \rightarrow T_x S \quad (1.8)$$

e

$$Q : T_x \mathbf{R}^N \rightarrow T_x M, \quad (1.9)$$

tais que $T_x \mathbf{R}^N = T_x S \oplus T_x M$.

Se a distribuição for integrável temos $TR^N|_S = TS \oplus TM$.

1.2 O projetor e a dinâmica do sistema vinculado

Em [28], o projetor Λ é obtido a partir dos vínculos de modo a definir deslocamentos compatíveis com as restrições impostas ao sistema.

Seja $V \equiv \mathbf{R}^N$ a variedade configuracional de um sistema de partículas.

O ponto de partida para a construção do projetor é a definição de um conjunto de campos covariantes [26] em TV , X^J , que na carta x^μ ($\mu = 1, \dots, N$) são dados pela expressão

$$X^J := \frac{\partial \Omega^J}{\partial \dot{x}^\mu} e^\mu \quad (J = 1, \dots, K). \quad (1.10)$$

com

$$(e^\mu, e^\nu) = g^{\mu\nu} \quad (1.11)$$

Como os vínculos são independentes por hipótese, os campos definidos acima (ditos campos vinculares) são também independentes e formam, exceto em alguns pontos isolados de V , uma base vetorial de dimensão K . Assim, podemos definir uma métrica localmente não-singular¹

$$(X^A, X^B) := g^{AB} = g^{\mu\rho} \frac{\partial \Omega^A}{\partial \dot{x}^\rho} \frac{\partial \Omega^B}{\partial \dot{x}^\mu}; \quad (1.12)$$

temos então

$$g^{AB} g_{BD} = \delta_D^A, \quad (1.13)$$

e podemos construir vetores contravariantes segundo a métrica local g_{AB} :

$$X_L = g_{LJ} X^J. \quad (1.14)$$

O operador de projeção Λ é definido pelos campos vinculares e pela métrica [28],

$$\Lambda := \mathbf{1} - X^J X_J. \quad (1.15)$$

Λ projeta um campo qualquer num subconjunto do fibrado tangente de V que é com-

¹Para vínculos homogêneos e com dependência linear nas velocidades generalizadas, g^{AB} é uma métrica riemanniana. Se as restrições, por outro lado, tiverem outro tipo de dependência, a métrica seria também função das velocidades (métrica de Finsler).

patível com os vínculos, isto é, cada vetor é projetado num subespaço local, ortogonal ao campo vincular (1.10).

Os elementos de matriz do projetor numa carta local são dados a seguir explicitamente em função dos vínculos:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} - g_{AB} g^{\mu\rho} \frac{\partial \Omega^A}{\partial \dot{x}^{\rho}} \frac{\partial \Omega^B}{\partial \dot{x}^{\nu}}. \quad (1.16)$$

Partindo-se de uma ação clássica definida para o sistema de partículas descrito anteriormente, podemos encontrar as equações que dão a dinâmica e que ao mesmo tempo são compatíveis com as restrições impostas pelos vínculos:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad L : TV \longrightarrow \mathfrak{R}. \quad (1.17)$$

O princípio de Hamilton propõe que a trajetória real de um sistema físico, que obedece à condição dos extremos permanecerem fixos, torna o funcional A estacionário:

$$\delta A |_{\mathbf{c}(t) \text{ real}} = 0; \quad (1.18)$$

δ denota a variação funcional com relação à "variável" $\mathbf{c}(t)$. Como uma variação infinitesimal em torno de um valor de t arbitrário pode ser decomposta em uma variação paralela e outra ortogonal à distribuição vincular, $\delta \doteq \delta_{\parallel} + \delta_{\perp}$, obtemos

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{\nu}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\nu}} \right) \delta_{\parallel} x^{\nu} dt = 0, \quad (1.19)$$

pois $\delta_{\perp} x^{\nu} = 0$, não são permitidas variações nas direções dos campos vinculares.

A variação paralela se escreve com a ajuda do projetor:

$$\delta_{\parallel} x^{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \delta x^{\mu}, \quad (1.20)$$

onde δx^{μ} é um deslocamento arbitrário. Para satisfazer a equação (1.19), não há outra escolha senão

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} \right) \Lambda_\mu^\nu = 0. \quad (1.21)$$

As equações acima, juntamente com os vínculos, determinam completamente a evolução do sistema.

As equações (1.21) são equivalentes àquelas obtidas pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Definimos

$$E_\mu := \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu}; \quad (1.22)$$

como $\Lambda_\nu^\mu E_\mu = 0$, temos

$$\begin{aligned} E_\nu - Q_\nu^\mu E_\mu &= 0, \\ E_\nu = \beta_\nu &:= Q_\nu^\mu E_\mu; \end{aligned} \quad (1.23)$$

mas, é óbvio, não são independentes todos os β_ν 's. Em [28][pag 490] fica estabelecido que

$$\beta_\nu = \lambda_{\mathbf{J}} \frac{\partial \Omega^{\mathbf{J}}}{\partial \dot{x}^\nu}, \quad (1.24)$$

sendo os $\lambda_{\mathbf{J}}$ funções a serem determinadas. Obtemos finalmente

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} = -\lambda_{\mathbf{J}} \frac{\partial \Omega^{\mathbf{J}}}{\partial \dot{x}^\nu}, \quad (1.25)$$

que é a equação fenomenológica de Lagrange para sistemas vinculados; os $\lambda_{\mathbf{J}}$'s são chamados de multiplicadores de Lagrange [23].

1.3 O trenó de Chaplygin, um exemplo

O trenó de Chaplygin é um corpo rígido que possui um eixo de simetria e se movimenta em um plano apoiado por três pontos, dois dos quais podem deslizar livremente, e cujo terceiro ponto é uma "lâmina" rigidamente fixa no corpo. Existe um vínculo não-holônomo

tal que o centro de massa (a uma distancia a da lâmina) só possa se mover ao longo do eixo da lâmina mas não em direções perpendiculares a ela. Esta condição é expressa pela equação

$$\Omega := -a\dot{\phi} + \cos \phi \dot{y} - \sin \phi \dot{x} = 0,$$

onde x e y são as coordenadas do centro de massa e ϕ é o ângulo entre o eixo x e o eixo da lâmina. O vetor e tem três componentes $e = (-\sin \phi, \cos \phi, -a)$; a partir da energia cinética

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + J\dot{\phi}^2), \quad (1.26)$$

obtemos a métrica do espaço de configuração

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.$$

Usando a definição de projetor

$$Q_{\nu}^{\mu} = g_{AB} \mathbf{G}^{\mu\rho} \frac{\partial \Omega^A}{\partial \dot{x}^{\rho}} \frac{\partial \Omega^B}{\partial \dot{x}^{\nu}},$$

obtemos

$$Q = \frac{J}{J+a^2} \begin{bmatrix} \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & a \sin \phi \\ -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & -a \cos \phi \\ J^{-1}a \sin \phi & -J^{-1}a \cos \phi & J^{-1}a^2 \end{bmatrix}.$$

Na ausência de forças externas as equações de movimento tomam a forma

$$d_t \partial_i T = Q_{\mu}^{\nu} d_t \partial_i T,$$

isto é

$$\ddot{x} = \frac{J}{J+a^2} \sin \phi (\ddot{x} \sin \phi - \ddot{y} \cos \phi + a\ddot{\phi}) \quad (1.27)$$

$$\ddot{y} = \frac{J}{J+a^2} \cos \phi (-\ddot{x} \sin \phi + \ddot{y} \cos \phi - a\ddot{\phi}) \quad (1.28)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{a}{J+a^2} (\ddot{x} \sin \phi - \ddot{y} \cos \phi + \ddot{\phi}). \quad (1.29)$$

Estas equações concordam com as obtidas por Chaplygin, utilizando o método das quasi-coordenadas [9].

Levando em conta as equações de vínculos, os sistema de equações diferenciais é reduzido a

$$\left(\frac{J+a^2}{a}\right)\dot{\omega} = -u\omega; \quad \dot{u} = a\omega^2, \quad (1.30)$$

onde $\omega = \dot{\phi}$ e $u = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi$.

1.4 Geometria não-holônoma

É possível se formular uma geometria para as distribuições não-holônomas através do projetor Λ_j^i [30].

Seja V um espaço com uma conexão métrica Γ . Como se sabe, o grupo de holonomia é o grupo de deslocamentos infinitesimais compatíveis com os vínculos ao longo de um paralelogramo de lados Δx^i e δx^i . Se este grupo se reduz à identidade, dizemos que a curvatura é nula nessa região. Os deslocamentos infinitesimais compatíveis em V são dados por

$$dx^{i*} = \Lambda_j^i dx^j. \quad (1.31)$$

Um cálculo simples nos fornece a curvatura R da região descrita por deslocamentos compatíveis:

$$R_{ij}^k = [\partial_i \Lambda_j^i - \partial_j \Lambda_i^i] \Lambda_i^k. \quad (1.32)$$

Se $R = 0$, a geometria é holônoma, caso contrário ela é dita não-holônoma. Assim, podemos ver que o projetor traz informações acerca da holonomia (integrabilidade) do espaço.

A geodésica não-holônoma pode ser definida como a curva em S que torna estacionário o comprimento de arco elementar e que obedece concomitantemente as restrições impostas pelos vínculos [30].

A equação da geodésica não-holônoma é

$$\ddot{x}^j + \dot{x}^r \dot{x}^i [\Gamma_{ir}^j - \nabla_r \Lambda_i^j] = 0, \quad (1.33)$$

onde ∇_r é a derivada covariante. O último termo entre parênteses na expressão acima é uma conexão dita não-holônoma, aparece unicamente em decorrência da existência de vínculos, e por não ser simétrica nos índices inferiores teremos um termo de torção \overline{T} :

$$\overline{T}_{ri}^j = \frac{1}{2} (\partial_r \Lambda_i^j - \partial_i \Lambda_r^j). \quad (1.34)$$

A curvatura \overline{R} proveniente da não-holonomia do espaço pode ser escrita em termos das conexões $\overline{\Gamma}_{rs}^i \equiv \nabla_r \Lambda_s^i$,

$$\overline{R}_{jrs}^i = \partial_j \overline{\Gamma}_{rs}^i - \partial_r \overline{\Gamma}_{sj}^i + \overline{\Gamma}_{jl}^i \overline{\Gamma}_{rs}^l - \overline{\Gamma}_{rl}^i \overline{\Gamma}_{sj}^l. \quad (1.35)$$

Se o sistema for completamente integrável, $\overline{R}_{jrs}^i = 0$. Vale dizer que a variedade não-holônoma admite uma noção mais ampla de paralelismo, pois uma conexão neste espaço é em geral da forma

$$\Gamma^* = \Gamma + \overline{\Gamma}. \quad (1.36)$$

1.5 Quantização de sistemas não-holônomos

A chave para se estabelecer a quantização de um sistema não-holônomo no espaço de fase via projetor é a equivalência entre os vínculos não-integráveis e os vínculos de segunda classe e , concomitantemente, a equivalência entre as restrições holônomas e as de primeira classe² [30].

O conjunto de 1-formas que caracterizam as restrições vinculares assume a seguinte forma no espaço de fase:

$$\Omega^A(x, p) = a^{Ai} p_i = 0. \quad (1.37)$$

Um sistema clássico no espaço de fase é definido pelo hamiltoniano

$$H = \dot{x}^i p_i - L(x, \dot{x}) \quad (1.38)$$

onde

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - U(x) \quad (1.39)$$

é o lagrangeano do sistema no espaço de configuração, e as funções T e U são respectivamente a energia cinética (quadrática nas velocidades generalizadas) e a energia potencial. Impondo-se as condições (1.37), as equações de Hamilton não poderão nos fornecer a dinâmica correta do sistema. Definindo-se porém um momento compatível com os vínculos,

$$\Pi_i := \Lambda_i^j p_j, \quad (1.40)$$

encontraremos [30] as equações de movimento

$$\dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H\}, \quad (1.41)$$

²Calculando-se os parênteses de Poisson dos vínculos, verifica-se a mencionada equivalência.

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, \quad (1.42)$$

onde $\{ , \}$ denota o parêntese de Poisson. Neste procedimento o hamiltoniano permanece inalterado, toda a "deformação" da estrutura (álgebra de Lie) em decorrência dos vínculos (1.37) fica absorvida no momento Π e torna-se clara a alteração na estrutura simplética da teoria:

$$\{x^i, x^j\} = 0, \quad (1.43)$$

$$\{x^i, \Pi_j\} = \Lambda_j^i, \quad (1.44)$$

$$\{\Pi_i, \Pi_j\} = (\partial_i \Lambda_j^h - \partial_j \Lambda_i^h) p_h. \quad (1.45)$$

Efetuando-se a quantização canônica com base nas 3 últimas equações acima, obtém-se as relações

$$\hat{x}^i | \Psi \rangle = [\hat{x}^i, \hat{H}] | \Psi \rangle, \quad (1.46)$$

$$\hat{\Pi}_i^s | \Psi \rangle = [\hat{\Pi}_i^s, \hat{H}] | \Psi \rangle, \quad (1.47)$$

$$(1.48)$$

onde

$$\hat{\Pi}_i^s = \frac{\hat{\Lambda}_i^j \hat{p}_j + \hat{p}_j \hat{\Lambda}_i^j}{2} \quad (1.49)$$

é o operador momento simetrizado compatível com os vínculos.

As diferenças básicas entre esta abordagem e o trabalho de Dirac [37] (ver apêndice A) são a ausência das condições de consistência para os estados quânticos e o fato de não introduzirmos vínculos na hamiltoniana. As duas descrições devem gerar as mesmas distribuições de probabilidades. Para torná-las compatíveis, introduzimos um fator de fase β dependente da posição,

$$| \Psi \rangle = e^{i\beta} | \varphi^s \rangle. \quad (1.50)$$

O estado $|\varphi^s\rangle$ obedece às equações

$$i\hbar \frac{\partial \varphi^s}{\partial t} = H^* \varphi^s, \quad (1.51)$$

onde H^* é uma hamiltoniana compatível com os vínculos (ver eq. A.21 no apêndice A), e

$$-i\hbar a_j^A(x) \frac{\partial \varphi^s}{\partial x^j} = 0, \quad (1.52)$$

respectivamente a equação de Schrödinger e as condições de vínculos.

Agora, podemos inferir que os momentos compatíveis com os vínculos sejam dados por

$$\hat{\Pi}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} + \hbar \frac{\partial \beta}{\partial x^i}. \quad (1.53)$$

Estes momentos deverão ser consistentes com os operadores de momento compatíveis e simetrizados $\hat{\Pi}_i^s$. Procedendo nesse sentido [30, pag 68] vamos finalmente obter

$$\hat{\Pi}_j^s = -i\hbar \left(\Lambda_j^i \partial_i + \frac{\bar{\Gamma}_{ij}^i}{2} \right) \quad (1.54)$$

e é claro

$$H^* = \frac{(\hat{\Pi}^s)^2}{2} + U(x). \quad (1.55)$$

Os termos adicionais que aparecem em H^* , devidos a $\bar{\Gamma}$, são chamados anomalias, mostram o afastamento do homomorfismo entre as álgebras clássica e quântica.

Calculando-se o comutador entre os $\hat{\Pi}_i^s$'s teremos

$$[\hat{\Pi}_i^s, \hat{\Pi}_j^s] = \hbar^2 T_{ij}^h \partial_h + \hbar^2 R_{ij}. \quad (1.56)$$

O termo de curvatura R_{ij} aparece em função da simetrização do momento compatível e carrega um tipo de "deformação" da álgebra. A quantização de um sistema integrável pelo método projetor é livre de anomalias.

Podemos escrever a fase β da forma

$$\beta = \frac{1}{\hbar} \oint dx^i (-Q_i^j p_j) + \frac{i}{2} \oint dx^i \bar{\Gamma}_{hi}^h; \quad (1.57)$$

β é não-integrável, isto é, uma variação da função de onda entre dois pontos do espaço depende do percurso com que ligamos os dois pontos. Em outras palavras, a não-integrabilidade da fase β traz a informação da não-holonomia do espaço.

A integração funcional também pode ser útil na quantização de um sistema não-holônomo. Por esta via, obtemos a condição de quantização [27]

$$\frac{i}{\hbar} \int dx^i \wedge dx^j T_{ij}^h p_h = 2\pi n, \quad n \in Z^*, \quad (1.58)$$

que vem do fato de não admitirmos ambiguidades na definição das representações dos estados quânticos [30]. Dirac mostrou que a condição acima leva à quantização da carga e do spin [36].

Podemos definir o propagador

$$K(x, x', t, t') = \int [Dx(\tau)] \exp \left\{ i \frac{A}{\hbar} \right\} \exp \beta, \quad (1.59)$$

onde β é a fase não-integrável induzida pelos vínculos, $[Dx(t)]$ é a medida funcional e A é o funcional ação,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^j \Lambda_{ij} - U(x) \right) dt. \quad (1.60)$$

"Quebrando-se" a ação em intervalos infinitesimais de tempo e fazendo-se as integrações gaussianas necessárias, emerge o operador hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2} \nabla_i (\Lambda^{ij} \nabla_j) - \frac{\hbar^2}{6} \bar{R}, \quad (1.61)$$

com

$$\nabla_i = \Lambda_i^h \partial_h + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{ki}^k. \quad (1.62)$$

Na literatura [42, 43] encontramos para o mesmo problema, porém com métrica riemanniana, um resultado que difere por um fator (1/2); vale então lembrar que este fator surge no presente tratamento por causa da simetrização do operador momento compatível.

1.6 O projetor na formulação simplética da mecânica

Sejam $\Omega^{(2)\alpha}(x) = 0$ um conjunto de $2M$ vínculos de segunda classe definidos em uma variedade simplética V , sendo que x são as N (par) coordenadas locais em V . No capítulo 2 definiremos variedade simplética, enquanto que vínculos de primeira e segunda classe são descritos no apêndice A. Aqui, como estamos somente descrevendo em linhas gerais as contribuições do método projetor, não nos deteremos em aspectos formais.

É possível se definir uma métrica local $g^{\alpha\beta}$ partindo-se da estrutura simplética e dos vínculos (de segunda classe) definidos em V :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \{ \Omega^{(2)\alpha}, \Omega^{(2)\beta} \} \\ &= w^{ij} \frac{\partial \Omega^{(2)\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \Omega^{(2)\beta}}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

w^{ij} são elementos de matriz da 2-forma simplética que define a estrutura dinâmica de V , em coordenadas canônicas temos

$$[w^{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad w^{ij}w_{jh} = \delta_h^i.$$

O elemento de matriz do projetor será dado por [29]

$$\Lambda_j^i = \delta_j^i - g_{\alpha\beta} w^{ih} \frac{\partial \Omega^{(2)\alpha}}{\partial x^h} \frac{\partial \Omega^{(2)\beta}}{\partial x^j}; \quad (1.64)$$

com a métrica simplética global w , é possível se definir o seguinte operador:

$$\Lambda^{ij} = \Lambda_k^i w^{kj} = w^{ij} - g_{\alpha\beta} w^{ih} \frac{\partial \Omega^{(2)\alpha}}{\partial x^h} \frac{\partial \Omega^{(2)\beta}}{\partial x^i} w^{lj}. \quad (1.65)$$

O projetor define um parêntese compatível com os vínculos,

$$\{ , \}_{**} := \Lambda^{ij} \partial_i \wedge \partial_j; \quad (1.66)$$

o parêntese acima é o conhecido parêntese de Dirac,

$$\{F, G\}_{**} = w^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} - g_{\alpha\beta} w^{ih} \frac{\partial \Omega^{(2)\alpha}}{\partial x^h} \frac{\partial \Omega^{(2)\beta}}{\partial x^k} w^{kj} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} \quad (1.67)$$

$$= \{F, G\} - \{F, \Omega^{(2)\alpha}\} g_{\alpha\beta} \{\Omega^{(2)\beta}, G\} \quad (1.68)$$

$$= \{F, G\}_D.$$

O espaço admite a existência de uma 2-forma dita pré-simplética Θ^{**} ,

$$\Theta^{**} = dx^i \wedge dx^j \Lambda_j^h w_{hi} + \frac{1}{2} dx^i \wedge dx^j \{ \partial_j \Lambda_i^h - \partial_i \Lambda_j^h \} x_h, \quad (1.69)$$

onde x representam coordenadas em V .

Definiremos agora um tipo de coordenada (na realidade uma pseudo-coordenada) que é compatível com as restrições cinemáticas,

$$x^{i**} = \int dx^j \Lambda_j^i. \quad (1.70)$$

Para assegurar que os parênteses de Poisson entre "observáveis" coincidam com os parênteses de Dirac, define-se paralelamente observáveis f^{**} segundo

$$f^{**} = \int \Lambda_i^j \partial_j f dx^i, \quad (1.71)$$

onde f se relaciona com as formas do espaço ortogonal aos vínculos. Considerando-se um princípio variacional atuando sobre o funcional ação do sistema [29, 30], obtemos a

dinâmica em coordenadas compatíveis,

$$\dot{x}^{i**} = \Lambda^{ij} \partial_j H = \{H, x^i\}^{**}; \quad (1.72)$$

esta mesma equação pode ser escrita em termos de uma hamiltoniana definida na distribuição vincular H^{**} ,

$$H^{**} = \int \Lambda_i^j \partial_j H dx^i, \quad (1.73)$$

$$\dot{x}^{i**} = \{H^{**}, x^{i**}\}. \quad (1.74)$$

Elaborada a formulação simplética, é feita a quantização geométrica do sistema [30]. Como é sabido [41], associando as funções de onda Ψ do espaço de Hilbert com 1-formas e campos vetoriais de V , o passo seguinte é impor as condições de ortogonalidade, definidas pelos vínculos

$$d\Omega^\alpha(X_\Psi) = \{\Omega^\alpha, \Psi\} = 0, \quad (1.75)$$

onde X_Ψ é um campo hamiltoniano definido pela função de onda. A projeção dos campos obedece as condições acima.

A técnica do projetor simplético foi aplicada em [33] para se obter observáveis invariantes de calibre em algumas teorias de campos com vínculos, como a Q.E.D. e o modelo de Schwinger bosônico. A hamiltoniana física (H^{**}) dos modelos é determinada exatamente como vimos anteriormente, ou seja, a partir de quantidades compatíveis com os vínculos.

Um artigo recente [32] trata da quantização dos sistemas não-integráveis com simetria. O projetor aqui é utilizado para caracterizar o espaço, definindo, como vimos, uma conexão induzida pelos vínculos.

1.7 Eletromagnetismo no gauge de Coulomb

A condição

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

$$A_0 = 0,$$

implica num vínculo entre os graus de liberdade do campo eletromagnético livre. No espaço recíproco este vínculo pode ser escrito como

$$\sum_i k_i A_i = 0,$$

e neste caso o projetor tem a forma

$$\Lambda_j^i = \delta_j^i - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Como no exemplo anterior as relações de comutação compatíveis com os vínculos modificam-se para

$$\{A_i, \Pi^*\} = \delta_j^i - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

de acordo com a prescrição de Gupta-Bleuler de quantização do campo eletromagnético.

Capítulo 2

O projetor na variedade de Poisson

Neste capítulo vamos estabelecer a forma de um operador de projeção Λ para se trabalhar com vínculos de segunda classe definidos numa variedade de Poisson; este procedimento generaliza o projetor simplético que obtivemos no capítulo anterior. Λ será definido como um tensor do tipo $(1,1)$, ou seja, uma 1-forma com valores no espaço tangente à variedade de Poisson V . Mostraremos que as subvariedades de segunda classe S , que apresentam uma estrutura de Poisson induzida, podem ser estudadas fazendo-se uso do projetor e de seu complementar Q . A geometria das variedades lineares tangente e transversa a S pode ser determinada pelo método sem que seja necessário eliminar coordenadas. Portanto, o tratamento com campos projetores em variedades de Poisson parece ser bastante adequado quando abordamos a dinâmica em problemas com simetria e a quantização de sistemas com número variável de graus de liberdade.

2.1 Os parênteses de Poisson

Sejam V e $\mathbf{F}(V)$ respectivamente uma variedade e um anel de funções diferenciáveis definidas sobre V e tomando valores num corpo K .

O parêntese de Poisson sobre a álgebra $\mathbf{F}(V)$, denotado por $\{ , \}$, é um parêntese de Lie biderivativo sobre a álgebra associativa $\mathbf{F}(V)$, ou seja, uma operação que leva o produto direto de $\mathbf{F}(V)$ em $\mathbf{F}(V)$, é bilinear e satisfaz as condições

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad H, F \text{ e } G \in \mathbf{F}(V), \quad (2.1)$$

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \quad (2.2)$$

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G. \quad (2.3)$$

Pelas relações (2.1) e (2.2), $\mathbf{F}(V)$ torna-se uma álgebra de Lie de dimensão infinita. Por outro lado as propriedades (2.1) e (2.3) nos dizem que o parêntese de Poisson é dado por um bivector Θ pertencente ao produto tensorial antissimétrico (produto exterior) dos vetores de TV . Podemos definir uma estrutura de Poisson sobre a variedade V por intermédio do campo Θ .

As propriedades (2.2) e (2.3) são conhecidas respectivamente por identidade de Jacobi e regra de Leibniz. A identidade de Jacobi pode ser escrita de uma forma bem compacta (ver apêndice B) através do parêntese de Schouten [57, 58]; assim, ela equivale a

$$[\Theta, \Theta]_S = 0. \quad (2.4)$$

Chamaremos variedade de Poisson uma variedade diferenciável, conexa e de dimensão m sobre a qual se define um bivector Θ que verifica a equação (2.4) acima. O posto de Θ não é necessariamente constante, podendo ser até nulo em alguns pontos. Podemos descrever a variedade de Poisson V como uma "suave" justaposição de folheações simpléticas locais [2]; o parêntese de Poisson em V é determinado pelos parênteses simpléticos definidos sobre as folhas.

Se Θ tem posto constante $2n$, dizemos que $h = (m - 2n)$ é a codimensão de V . Neste caso V é a união de variedades simpléticas de dimensão $2n$, ou seja, V admite uma folheação simplética global [1, 49].

Em coordenadas locais na variedade V , o parêntese de Poisson é determinado pelas

componentes Θ^{ij} de Θ :

$$\{F(x), G(x)\} = \Theta^{ij} \partial_i F(x) \partial_j G(x). \quad (2.5)$$

A regra de Leibniz (2.3) se verifica trivialmente e a condição de antissimetria (2.1) implica em

$$\Theta^{ij}(x) = -\Theta^{ji}(x). \quad (2.6)$$

Finalmente a identidade de Jacobi (2.2) se traduz por

$$\Theta^{jk} \partial_k \Theta^{lm} + \Theta^{lk} \partial_k \Theta^{mj} + \Theta^{mk} \partial_k \Theta^{jl} = 0. \quad (2.7)$$

O bivector Θ se escreve localmente como

$$\Theta = \Theta^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \quad (2.8)$$

onde " \wedge " simboliza o produto tensorial antissimétrico.

Vale dizer que Θ pode ter qualquer tipo de dependência funcional com relação às coordenadas de V . A título de ilustração daremos a seguir um exemplo de estrutura de Poisson cuja dependência é linear. Seja g uma álgebra de Lie real de dimensão finita; a operação binária definida para dois elementos X e Y de g será denotada por $[X, Y]$. Seja g^* o espaço vetorial dual a g e \langle, \rangle a operação de dualidade. Introduzimos um tensor Θ de ordem 2 em g^* definido por

$$i_\Theta(X \wedge Y) = \langle [X, Y], x \rangle \quad (x \in g^*); \quad (2.9)$$

este bivector define em g^* uma estrutura de Poisson linear; realmente é fácil ver que as componentes do Θ numa base são

$$\Theta^{ij} = C_k^{ij} x^k, \quad (2.10)$$

onde as C_k^{ij} são constantes de estrutura da álgebra g e os x^k formam uma base de g^* . As folhas simpléticas neste caso são as órbitas do grupo G em g^* (chamadas órbitas coadjuntas).

Voltando ao caso geral, observemos que a matriz formada pelos elementos Θ^{ij} não precisa ser invertível, e a variedade de Poisson num certo sentido é bem mais geral que a variedade simplética. De fato, a variedade simplética é um caso particular de variedade de Poisson (codimensão $h = 0$) e caracteriza-se por possuir uma 2-forma diferencial Γ^2 , fechada

($d\Gamma^2 = 0$) e não-degenerada (isto é, se sempre existir um campo vetorial Y tal que $\Gamma^2(X, Y) \neq 0$ para qualquer campo $X \neq 0$). Neste caso dizemos que V tem uma estrutura simplética.

A 2-forma simplética Γ^2 em V acarreta a existência de um isomorfismo $I_f : TV \rightarrow T^*V$ dos fibrados vetoriais: pelo fato de Γ^2 ser não-degenerada, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre um campo $X \in TV$ e uma 1-forma $\Gamma^2(X, \cdot)$ ¹:

$$X \longrightarrow i_X \Gamma^2 = \Gamma^2(X, \cdot)$$

ou

$$I_f(X) = i_X \Gamma^2. \quad (2.11)$$

Um campo vetorial que corresponda através do isomorfismo I_f à diferencial de uma função H será chamado campo vetorial hamiltoniano e denotado por X_H ,

$$i_{X_H} \Gamma^2 = dH. \quad (2.12)$$

O isomorfismo I_f é estendido naturalmente para os fibrados tensoriais e assim $\Theta = I_f^{-1}(\Gamma)$ é o bivector que verifica (2.4) [24, 50].

¹As operação de contração (produto interno) $i_X \theta^k$ entre um campo X e uma k -forma θ^k , e $i_\theta T^k$ entre a 1-forma θ e o tensor contravariante T^k , estão definidas no apêndice B.

A mecânica clássica é formulada numa variedade simplética que é o fibrado cotangente T^*V de uma variedade configuracional V [24, 12]. T^*V possui uma estrutura simplética natural, numa carta local (p_i, q^i) ; podemos escolher Γ^2 como sendo a diferencial de uma 1-forma λ de T^*V , $\lambda = p_i dq^i$. Obviamente $\Gamma^2 = dp_i \wedge dq^i$ é fechada e não-degenerada.

Um outro caso de variedade de Poisson muito importante para a mecânica é a variedade canônica (codimensão $h = 1$); ela surge em sistemas hamiltonianos dependentes do tempo (e/ou sujeitos a vínculos dependentes do tempo) [51, 11].

Para as variedades de Poisson não simpléticas, geralmente não é possível se estabelecer um isomorfismo entre as fibras; assim, não existe uma 2-forma globalmente regular que associe um campo vetorial à diferencial de uma função.

A regra de Leibniz $\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$ nos permite identificar um operador diferencial X_F para cada função F ,

$$X_F(G) := \{F, G\} \quad \forall G \in \mathbf{F}(V). \quad (2.13)$$

Como em cada ponto $v \in V$ o valor de $\{F, G\}$ e portanto o de X_F depende somente da diferencial de F , então existe um mapeamento $B : T^*V \rightarrow TV$ tal que $X_F = B(dF)$.

O mapeamento B define o campo Θ :

$$\{F, G\} = i_\Theta(dF \wedge dG). \quad (2.14)$$

Um campo vetorial hamiltoniano X_H é definido pela contração de uma diferencial dH em V pelo bivetor Θ

$$X_H := i_{dH} \Theta. \quad (2.15)$$

Em coordenadas locais

$$X_H = \Theta^{ij}(x) \partial_j H \partial_i. \quad (2.16)$$

Os campos vetoriais hamiltonianos geram uma subálgebra da álgebra de Lie de todos

os campos vetoriais em V , e vale a relação

$$[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}, \quad (2.17)$$

onde a operação definida por $[,]$ é o parêntese de Lie ².

Sejam V_1 e V_2 duas variedades de Poisson. Um mapeamento $J : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$$\{F \circ J, G \circ J\}_1 = \{F, G\}_2 \circ J \quad (2.18)$$

é chamado "Poisson morphism". Uma subvariedade S de uma variedade de Poisson V é uma subvariedade de Poisson se o megulho (ver apêndice B) que define S for um "Poisson morphism". Tal estrutura, se existe, é única.

As órbitas dos campos vetoriais hamiltonianos formam uma folheação generalizada; as órbitas são variedades integrais da distribuição correspondente, a qual é por sua vez invariante face aos fluxos locais dos campos com valores na distribuição. De fato, os campos vetoriais hamiltonianos estabelecem uma relação de equivalência em V : dizemos que um ponto x equivale a y se eles puderem ser ligados por curvas diferenciáveis, cada uma das quais sendo segmentos de linhas integrais de campos hamiltonianos. As classes de equivalência da relação acima são subvariedades de Poisson de V [2]. A dimensão de cada uma dessas subvariedades S_P é igual ao posto de Θ restrito a S_P . S_P são folhas simpléticas de V e dão origem a folheações que aparecem em regiões de V onde o posto de Θ é localmente constante.

2.2 Subvariedades vinculares

Para que $S \subset V$ seja uma subvariedade de Poisson, é necessário e suficiente que todos os campos vetoriais hamiltonianos sejam tangentes a S ; em outras palavras, se e somente se cada espaço tangente $T_x S$ contiver a imagem de $B_x : T_x^* V \rightarrow T_x V$ [44].

²A eq.(2.17) define um homomorfismo $h : F \rightarrow X_F$ entre a álgebra de Lie dos parênteses de Poisson e a álgebra de Lie dos campos vetoriais hamiltonianos (comutador).

Existe uma estrutura de Poisson naturalmente induzida sobre uma subvariedade S se, para cada $x \in S$,

i) $B(TS^\perp) \cap TS = \{0\}$ e

ii) $TS^\perp \cap Ker(B) = \{0\}$, onde TS^\perp é o aniquilador de TS em T_S^*V .

A segunda condição acima equivale a dizer que

$$T_xV = T_xS + Im(B_x),$$

assim S intercepta as folhas simpléticas transversalmente. Como consequência, S é a união de variedades, cada uma das quais é subvariedade de uma variedade simplética. A primeira condição implica em que as variedades que compõem S são de fato simpléticas. Notemos que i) e ii) implicam em

$$T_xV = T_xS \oplus B(T_xS^\perp).$$

A construção acima foi definida para um ideal de funções $I(S)$, diferenciáveis em V e que se anulam em S . Como sabemos, para funções definidas em V existe uma álgebra de Lie definida pelos parênteses de Poisson. O ideal $I(S)$ possui então uma subálgebra a qual chamaremos de álgebra das funções de primeira classe $\Omega^{(1)} \in I(S)$, fechada com relação ao parêntese de Poisson. Denotaremos essa subálgebra por $I_1(S)$.

Chamaremos funções de segunda classe $\Omega \in I(S)$ aquelas que não pertencem a $I_1(S)$. Qualquer campo vetorial X_F , cujo hamiltoniano seja a função F , é automaticamente tangente a S se esta for uma subvariedade de primeira classe. Subvariedades S de segunda classe são ditas de fibra nula [49]. Se quisermos tratar a dinâmica nessas subvariedades de segunda classe, podemos adotar dois procedimentos alternativos: ou modificamos os parênteses de Poisson em S ou projetamos os vetores sobre S .

Escolhemos a segunda alternativa e construiremos um operador $\Lambda : T_S V \longrightarrow TS$ e seu complementar $Q : T_S V \longrightarrow B_S(TS^\perp)$ de tal modo que as condições i) e ii) sejam válidas para as funções de segunda classe.

O projetor Q é um campo tensorial $(1, 1)$ construído a partir do produto tensorial entre uma base de TS^\perp e os duais relativos a B , $B_S(TS^\perp)$. O tensor Q define um mapeamento entre fibrados, $Q : T_S^*V \longrightarrow TS^\perp$ e segue que $(Im\Lambda)_S = (KerQ)_S = (KerB)_S$. Como consequência deste procedimento teremos as seguintes relações se verificando:

$$(ImQ)_S \cap (Im\Lambda)_S = B_S(TS^\perp) \cap TS = \{0\}, \quad (2.19)$$

$$(ImQ)_S \cap (KerB) = TS^\perp \cap KerB = \{0\}. \quad (2.20)$$

Estas condições expressam a complementaridade dos projetores Λ e Q ,

$$(ImQ)_S \oplus (Im\Lambda)_S = T_S V. \quad (2.21)$$

Os operadores vetoriais hamiltonianos originários das funções que definem o ideal $I(S)$ serão definidos por

$$X_\Omega = d\Omega(\Theta) = i_{d\Omega}\Theta. \quad (2.22)$$

As equações (A.33), (A.34) e (A.35) do apêndice A podem ser traduzidas aqui pelas expressões³

$$d\Omega^a(X^b) = C_c^{ab}\Omega^c, \quad (2.23)$$

$$d\Omega^\alpha(X^\beta) = g^{\alpha\beta}, \quad (2.24)$$

$$d\Omega^\alpha(X^a) = C_B^{\alpha a}\Omega^B. \quad (2.25)$$

Por definição

³Os índices latinos maiúsculos representam todos os vínculos da teoria, os índices latinos minúsculos representam os de primeira classe e os índices gregos os de segunda classe.



$$d\Omega^a(X_F^b) = 0, \quad (2.26)$$

com Ω de primeira classe. Porém

$$d\Omega^a(X_F) \neq 0 \quad (2.27)$$

para os vínculos de segunda classe, de modo que os campos hamiltonianos não são tangentes a subvariedades de segunda classe.

2.3 O projetor

Vamos definir um campo vetorial \tilde{X} que verifique a condição de tangência a uma subvariedade de segunda classe S por intermédio de um projetor Λ construído adequadamente, e que projete os campos hamiltonianos em TS ($\tilde{X} := \Lambda(X)$). Como vimos, o projetor deverá ser um tensor de segunda ordem do tipo (1,1) em V .

De modo alternativo podemos pensar em projetar a estrutura de Poisson Θ à subvariedade S . Devemos impor

$$d\Omega(\tilde{X}_F) = d\Omega(\Lambda X_F) = d\Omega(\Lambda)(i_{dF}X_f) \quad (2.28)$$

$$= d\Omega(dF(\Lambda(\Theta))) = d\Omega(dF(\tilde{\Theta})) = 0. \quad (2.29)$$

Portanto Λ obedece as relações

$$\Lambda(X_F) = dF(\Lambda(\Theta)), \quad (2.30)$$

$$d\Omega(\Lambda) = 0. \quad (2.31)$$

Mostraremos a seguir que o tensor

$$\Lambda = \mathbf{1} - Q := \mathbf{1} - X^\alpha g_{\alpha\beta} d\Omega^\beta, \quad (2.32)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é a inversa da matriz $g^{\alpha\beta}$ definida pela relação (2.24)⁴, satisfaz a todas relações acima. Em uma base coordenada de V , Λ pode ser escrito da forma

$$\Lambda = \delta_i^i \partial_i \otimes dx^i - i_{d\Omega^\alpha}(\Theta) g_{\alpha\beta} d\Omega^\beta \quad (2.33)$$

$$= \delta_i^i \partial_i \otimes dx^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta \partial_i \otimes dx^l, \quad (2.34)$$

cujas componentes são

$$\Lambda_j^i = \delta_j^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_j \Omega^\beta.$$

Λ é idempotente:

$$\begin{aligned} \Lambda_l^i \Lambda_j^l &= \left(\delta_l^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta \right) \left(\delta_j^l - \Theta^{lr} \partial_r \Omega^\gamma g_{\gamma\tau} \partial_j \Omega^\tau \right) \\ &= \delta_j^i - \Theta^{ir} \partial_r \Omega^\gamma g_{\gamma\tau} \partial_j \Omega^\tau - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_j \Omega^\beta + \\ &\quad \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \underbrace{\partial_l \Omega^\beta \Theta^{lr} \partial_r \Omega^\gamma g_{\gamma\tau} \partial_j \Omega^\tau}_{\delta_r^\beta} \\ &= \delta_j^i - \Theta^{ih} \partial_h \Omega^\gamma g_{\gamma\tau} \partial_j \Omega^\tau \\ &= \Lambda_j^i. \end{aligned}$$

Podemos verificar facilmente a equação (2.30),

$$\begin{aligned} \Lambda(X_F)^i &= \Lambda_l^i X_F^l \\ &= X_F^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta X_F^l \\ &= X_F^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta \Theta^{lm} \partial_m F \end{aligned}$$

⁴Admitimos que $g^{\alpha\beta}$ seja localmente invertível.

$$\begin{aligned}
&= X_F^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \{ \Omega^\beta, F \} \\
&= dF(\Theta)^i - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} dF(X_{\Omega^\beta}) \\
&= dF(\Theta)^i - dF(X^\beta) g_{\alpha\beta} d\Omega^\alpha(\Theta)^i \\
&= dF(\Lambda(\Theta))^i,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

bem como a (2.31),

$$\begin{aligned}
d\Omega^\gamma(\Lambda) &= i_{d\Omega^\gamma}(\Lambda) \\
&= \delta_i^\gamma \partial_i \Omega^\gamma dx^l - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta \partial_i \Omega^\gamma dx^l \\
&= \partial_l \Omega^\gamma dx^l - g^{\gamma\alpha} g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta dx^l \\
&= \partial_l \Omega^\gamma dx^l - \delta_\beta^\gamma \partial_l \Omega^\beta dx^l = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Concluindo, podemos estabelecer que

$$\Lambda(\Lambda) = \Lambda, \tag{2.37}$$

$$Q(Q) = Q. \tag{2.38}$$

Verificamos trivialmente que

$$d\Omega^\beta(Q) = d\Omega^\beta, \tag{2.39}$$

$$Q(X^\alpha) = X^\alpha; \tag{2.40}$$

valem portanto os mapeamentos lineares

$$Q : T_S^*V \longrightarrow TS^\perp, \tag{2.41}$$

$$Q : T_S V \longrightarrow B(TS^\perp), \tag{2.42}$$

$$\Lambda : T_S^*V \longrightarrow T^*S, \quad (2.43)$$

neste caso denotado por Λ^* , e

$$\Lambda : T_S V \longrightarrow TS. \quad (2.44)$$

Isso mostra que existem duas variedades complementares, TS e $B_S(TS^\perp)$, tais que

$$B_S(TS^\perp) \oplus TS = T_S V, \quad (2.45)$$

$$TS^\perp \oplus T^*S = T_S^*V. \quad (2.46)$$

Em termos dos projetores essas relações se traduzem por

$$Q(T_S V) \oplus \Lambda(T_S V) = T_S V \quad (2.47)$$

e

$$Q(T_S^*V) \oplus \Lambda(T_S^*V) = T_S^*V \quad (2.48)$$

respectivamente.

A estrutura de Poisson induzida em S é dada pela composição

$$\Lambda \circ B_S \circ \Lambda^* : T^*S \longrightarrow TS. \quad (2.49)$$

A seguir, vamos estudar algumas características geométricas das variedades lineares $B_S(TS^\perp)$ e TS .

Na variedade linear $B_S(TS^\perp)$ podemos definir um bivector

$$Q(\Theta) = X^\alpha g_{\alpha\beta} X^\beta \equiv \Theta^\perp \quad (2.50)$$

e uma 2-forma w^\perp associada

$$w^\perp = g_{\alpha\beta} d\Omega^\alpha d\Omega^\beta, \quad (2.51)$$

tais que

$$w^\perp(\Theta^\perp) = g_{\alpha\beta} d\Omega^\alpha(X^\lambda) g_{\lambda\tau} d\Omega^\beta(X^\tau) = \mathbf{1} \quad (2.52)$$

define o isomorfismo entre $B_S(TS^\perp)$ e TS^\perp , o que acarreta a não-degenerescência de w^\perp .

Vamos tratar o caso em que os vínculos determinam uma estrutura simplética em $B_S(TS^\perp)$. Assim, devemos ter $d\omega^\perp = 0$. Deste modo temos localmente (teorema de Darboux [24, pag. 175]) $w^\perp = d(A_\alpha d\Omega^\alpha) \equiv dA$, o que implica

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial \Omega^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \Omega^\alpha} \right). \quad (2.53)$$

Pela invertibilidade de $g_{\alpha\beta}$, podemos ver que as componentes da 1-forma $A_\alpha d\Omega^\alpha$ obedecem a

$$g^{\alpha\beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial \Omega^\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial \Omega^\beta} \right) = \delta_\gamma^\alpha. \quad (2.54)$$

Em coordenadas locais temos

$$\Theta^{ij} \partial_j \Omega^\alpha \partial_i \Omega^\beta \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial \Omega^\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial \Omega^\beta} \right) = \delta_\gamma^\alpha, \quad (2.55)$$

estas equação são componentes da equação de Maurer-Cartan

$$dA = -\frac{1}{2} \{A, A\}^* \quad (2.56)$$

da 1-forma canônica A sobre um grupo de Lie, cuja álgebra de Lie é gerada pelo conjunto de vínculos de segunda classe $I_2(S)$; os parênteses $\{, \}^*$ são os definidos sobre as 1-formas com valores na álgebra de Lie de modo padrão [64, 44]. Uma solução imediata de (2.56) é

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} \Omega^\beta, \quad (2.57)$$

onde $g_{\alpha\beta} = \text{ctes}$. Essas constantes podem ser relacionadas com parâmetros invariantes de sistemas físicos. A (2.57) permite que definamos sobre $B_S(TS^\perp)$ uma carta canônica $(A_\alpha, \Omega^\alpha)$ tal que

$$i_{\Theta^\perp}(dA_\alpha \wedge d\Omega^\beta) = \delta_\alpha^\beta \quad (2.58)$$

seja satisfeita.

Quando $g^{\alpha\beta} = C_\gamma^{\alpha\beta}\Omega^\gamma$, a álgebra de Lie é gerada por $I_1(S)$ e conseqüentemente a 2-forma ω^\perp é singular sobre a folha ($\Omega^\alpha = 0$).

Vamos considerar a projeção de Θ sobre TS :

$$\tilde{\Theta} = \Lambda(\Theta) = \Theta - X^\alpha g_{\alpha\beta} X^\beta. \quad (2.59)$$

O parêntese definido por $\tilde{\Theta}$ em S ,

$$\{F, G\}^* \equiv i_{\tilde{\Theta}}(dG \wedge dF) = \{F, G\} - \{F, \Omega^\alpha\} g^{\alpha\beta} \{F, \Omega^\beta\}, \quad (2.60)$$

no caso em que a variedade V é simplética, é exatamente o conhecido parêntese que Dirac introduziu no tratamento de sistemas hamiltonianos generalizados. Como o projetor Λ é um tensor simétrico, é claro que $\tilde{\Theta}$ é antissimétrica.

O parêntese (2.60) verifica a identidade de Jacobi

$$\sum_{cicl} (i_{\tilde{\Theta}}(dG \wedge (i_{\tilde{\Theta}}(dF \wedge dH)))) = 0; \quad (2.61)$$

realmente, como

$$(i_{\tilde{\Theta}}(dG \wedge (i_{\tilde{\Theta}}(dF \wedge dH)))) = (i_{\Theta}(dG(\Lambda) \wedge (i_{\Theta}(dF(\Lambda) \wedge dH))), \quad (2.62)$$

temos (2.61) se verificando.

Finalmente, vimos que o projetor é mais uma ferramenta matemática para se trabalhar com estruturas induzidas em subvariedades, em particular aquelas que aparecem em

função de restrições impostas por teorias singulares.

Capítulo 3

Álgebras de Lie definidas pelo projetor

Neste capítulo, veremos que o projetor Λ desempenha um importante papel na teoria das deformações das álgebras de Lie associadas a uma variedade de Poisson V . Numa variedade simplética, os vínculos de segunda classe podem exibir toda uma riqueza de estruturas matemáticas que estão diretamente ligadas à dinâmica de um sistema singular [49]. Procuramos relacionar diversas áreas de pesquisa em matemática com a técnica de projeção, e indicamos uma bibliografia básica. Apesar de bastante difundidos no meio matemático, alguns tópicos só recentemente vêm despertando o interesse dos físicos. Contudo, já existem aplicações desses métodos a muitos problemas; por exemplo, a teoria das deformações é utilizada no processo de quantização [82, 50, 51], as álgebras graduadas relacionam partículas de diferentes estatísticas em supersimetria [73] e as cohomologias de Schouten-Nijenhuis relacionam-se com o formalismo BRST [48].

3.1 A teoria das deformações das álgebras de Lie

Apresentaremos a seguir um pequeno histórico e uma resumida exposição da teoria das deformações das álgebras de Lie.

Gerstenhaber [74] em 1964 foi quem primeiro trabalhou com o conceito de deformação

de uma álgebra; nos seus artigos, as "deformações" aparecem no tratamento dos grupos de cohomologias associados a álgebras de Lie. Na literatura da física, o tema surgiu pela primeira vez nos trabalhos de Melvin [75, 76]. Entre outras coisas ele mostrou que a álgebra de De Sitter (relatividade geral) é obtida por deformação da álgebra de Poincaré (relatividade especial)¹:

$$iSO(3,1) \longrightarrow SO(4,1);$$

fisicamente entende-se que um espaço-tempo "flat" é "deformado" em um espaço-tempo de curvatura não-nula, porém constante. Aplicações a outras áreas da física também são conhecidas, a teoria tem sido utilizada na obtenção de operadores de posição relativísticos e na construção de geradores não-compactos para se obter o espectro das "generating algebras" [79].

Na abordagem (matemática) proposta por Gerstenhaber, o programa principal é encontrarmos correspondências biunívocas entre as diferentes deformações e os membros de certas classes de cohomologias; poderíamos então classificar todas as deformações inequivalentes. Apesar do enorme desenvolvimento na área ainda não existe um método geral de se classificar as diferentes deformações de uma álgebra [77]. A maioria dos resultados obtidos até hoje vêm do tratamento das deformações de primeira ordem [78, 80, 81], sendo que os mais destacados se relacionam com as representações das álgebras e dos grupos de Lie. Por exemplo, podemos descrever propriedades das "álgebras deformadas" ("grupos deformados") em termos de grupos inhomogêneos, nos casos onde aparecem problemas de multiplicidade:

$$i) p^2 > 0 \quad iSO(3,1) \longrightarrow SO(4,1),$$

$$ii) p^2 < 0 \quad iSO(3,1) \longrightarrow SO(3,2),$$

esta descrição é particularmente importante.

A pergunta que motiva a teoria das deformações é a seguinte: *Quantas álgebras podem ser representadas num certo espaço vetorial W e de que forma elas se relacionam ?*

Seja $\mu : W \times W \longrightarrow W$ uma operação binária definida em W , ou seja, uma álgebra

¹ $iSO(3,1)$ é o grupo de Lorentz inhomogêneo ou grupo de Poincaré.

e $x, y, z \in W$. Uma deformação da álgebra μ é uma família uniparamétrica $\{\mu_\lambda\}$ de aplicações, que possam ser escritas como séries de potência de um parâmetro contínuo λ ,

$$\mu_\lambda(x, y) = \mu(x, y) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_r(x, y), \quad (3.1)$$

onde

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mu_\lambda(x, y) = \mu(x, y)$$

e onde $C_r(x, y)$ satisfaz relações que são consequências de imposições sobre μ_λ . Para álgebras associativas, por exemplo, as relações a que C_r obedece provêm da condição de associatividade

$$\mu_\lambda(x, \mu_\lambda(y, z)) = \mu_\lambda(\mu_\lambda(x, y), z). \quad (3.2)$$

Dizemos que uma deformação é não-trivial sempre que os μ_λ não forem equivalentes, qualquer que seja $\lambda \neq 0$; em outras palavras, não existem isomorfismos entre as álgebras da família uniparamétrica para todo $\lambda \neq 0$.

Se quisermos nos restringir a deformações das álgebras de Lie, devemos procurar todos os possíveis mapeamentos $\mu : W \times W \rightarrow W$ que sejam antissimétricos e que simultaneamente obedeçam a identidade de Jacobi, respectivamente as relações (2.1) e (2.2) do capítulo anterior.

Os conceitos de álgebras graduadas, álgebra de Frölicher-Nijenhuis, parênteses e torção de Nijenhuis são importantes na abordagem da teoria das deformações que apresentaremos a seguir. No apêndice B todos esses tópicos são rapidamente comentados visando a sua utilização no texto.

Para que a aplicação μ defina uma álgebra de Lie em W , ela deve pertencer ao $Hom(W \wedge W, W) = Der_1(\wedge W)^2$ e concomitantemente obedecer a relação

$$[\mu, \mu]^{\bar{\wedge}} = 0, \quad (3.3)$$

² $Hom(A, B)$ é o conjunto de todas as aplicações lineares de A em B .

onde o parêntese $[\ ,]^{\bar{\wedge}}$ denota uma operação na álgebra de Frölicher-Nijenhuis de W (ver Apêndice B na parte de cohomologias). Todos os possíveis μ são soluções da equação $[\mu, \mu]^{\bar{\wedge}} = 0$ em $Der_1(\wedge W)$. Chamaremos de C o conjunto solução do problema.

Temos interesse em classificar as soluções em C a menos de um isomorfismo, ou seja, se M for uma transformação linear em W , naturalmente a ela corresponde uma ação em $Der_1(\wedge W)$: $\mu \longrightarrow \mu_M$ definida por $\mu_M(x, y) = (M^{-1}x, M^{-1}y)$; consideramos μ e μ_M equivalentes neste caso.

Estamos interessados em verificar a estrutura das órbitas de C sob a ação do grupo $GL(W)$. Supondo a existência da curva

$$\mu_t = \mu + t\phi + t^2\psi + \dots \quad (3.4)$$

em $Der_1(\wedge W)$, desejamos encontrar as condições para que ela esteja em C .

Uma curva do tipo

$$\mu_t = \mu_{M(t)},$$

onde $M(t)$ é uma curva em $GL(W)$ com $M(0) = id$, é dita ser trivial.

A condição para que $\mu_{M(t)}$ esteja em C é

$$[\mu_{M(t)}, \mu_{M(t)}]^{\bar{\wedge}} = 0.$$

Expandindo a expressão acima em termos de t , parâmetro da curva, obtemos em segunda ordem

$$[\mu_t, \mu_t]^{\bar{\wedge}} \equiv 2t[\mu, \phi]^{\bar{\wedge}} + t^2([\phi, \phi]^{\bar{\wedge}} + 2[\mu, \psi]^{\bar{\wedge}}). \quad (3.5)$$

Uma vez que $[\mu, \mu]^{\bar{\wedge}} = 0$, a multiplicação à esquerda por μ define um operador diferencial δ em $Der(\wedge V)$ (ver cohomologias). A primeira condição imposta é

$$\delta_\mu \phi = 0, \quad (3.6)$$

a segunda

$$\delta_\mu \psi = -\frac{1}{2} [\phi, \phi]^\wedge, \quad (3.7)$$

e desta forma $[\phi, \phi]^\wedge$ é uma cocadeia na cohomologia de δ_μ .

Seja

$$M(t) = id + \Gamma t + \dots,$$

com $\Gamma \in Hom(W, W) = Der_0(\wedge W)$. É fácil mostrar [73] que

$$\mu_{M(t)} = \mu + t [\Gamma, \mu]^\wedge + \dots. \quad (3.8)$$

Obviamente a condição trivial de primeira ordem é dada por

$$\phi = -\delta_\mu \Gamma. \quad (3.9)$$

As possíveis deformações não-triviais de primeira ordem correspondem a um espaço de cohomologia $H^1(\wedge W, \delta_\mu)$. As condições de segunda ordem, de que $[\phi, \phi]^\wedge$ seja uma cocadeia, é independente da escolha de ϕ nesta classe de cohomologia.

Voltemos à álgebra de Frölicher-Nijenhuis; como μ é uma 2-forma "W-valued" e Γ pode ser considerado como uma 1-forma com valores em W [72], facilmente se verifica³ que

$$\Gamma(\mu) \equiv [\mu, \Gamma]^\wedge = \Gamma.\mu \quad (3.10)$$

e desta forma

$$\mu_{M(t)} = \mu + t(\Gamma.\mu) + \dots; \quad (3.11)$$

$\mu_{M(t)}$ está definindo uma deformação trivial no sentido de ser isomórfica a μ . De fato, μ e $\Gamma.\mu$ são estruturas ditas compatíveis⁴; $\Gamma.\mu$ define um parêntese de Lie se Γ for um

³

$\Gamma(\mu)(x, y) := \mu(\Gamma x, y) + \mu(x, \Gamma y) - \Gamma(\mu(x, y))$, $\forall x, y \in W$.

⁴Dizemos que duas estruturas são compatíveis se a soma é também uma estrutura de Lie.

operador de Nijenhuis, isto é, se a torção de Nijenhuis de Γ for nula (ver apêndice B).

Em [72, pag. 42] fica estabelecida a relação

$$[\Gamma.\mu, \Gamma.\mu]^{\wedge} + 2 [\mu, [\Gamma, \Gamma]_{\mu}]^{\wedge} = 0.$$

A partir da expressão acima, podemos ver que $\Gamma.\mu$ define uma estrutura de Lie (álgebra) se e somente se

$$[\mu, [\Gamma, \Gamma]_{\mu}]^{\wedge} = 0.$$

Vimos que

$$\delta_{\mu}\Gamma = \Gamma.\mu,$$

e vale

$$\delta_{\mu}([\Gamma, \Gamma]_{\mu}) = [[\Gamma, \Gamma]_{\mu}, \mu]^{\wedge}.$$

A relação acima nos permite dizer que $\Gamma.\mu$ define um parêntese de Lie se e só se a torção de Nijenhuis é um 2-cociclo. É fácil ver que as estruturas de Lie μ e $\Gamma.\mu$ acarretam

$$[\mu, \Gamma.\mu]^{\wedge} = -\delta_{\mu}(\Gamma.\mu) = -\delta_{\mu}^2\Gamma = 0. \quad (3.12)$$

A expressão

$$[\mu + t\Gamma.\mu, \mu + t\Gamma.\mu]^{\wedge} = [\mu, \mu]^{\wedge} + t([\mu, \Gamma.\mu]^{\wedge} + [\Gamma.\mu, \mu]^{\wedge}) + t^2[\Gamma.\mu, \Gamma.\mu]^{\wedge}$$

anula-se identicamente se a torção de Nijenhuis de λ for um 2-cociclo, mostrando portanto que μ e $\Gamma.\mu$ são estruturas compatíveis.

Podemos resumir tudo o que foi apresentado acima: se μ é uma estrutura de Lie em W e $\Gamma : W \rightarrow W$ é um mapeamento em W , então $\Gamma.\mu = \delta_{\mu}\Gamma$ define uma álgebra de Lie em W se e somente se a torção de Nijenhuis de Γ for nula ($\Gamma.\mu$ é co-fechada na cohomologia de δ_{μ}). Neste caso μ e $\Gamma.\mu$ são compatíveis, $\Gamma.\mu$ define um parêntese $[\ , \]_{\Gamma.\mu}$ compatível com $[\ , \]_{\mu}$, e em consequência disso Γ define também um morfismo entre as álgebras $(W, \Gamma.\mu)$

e (W, μ) o qual preserva a estrutura de Lie.

3.2 A torção de Nijenhuis do projetor

No capítulo anterior estabelecemos a forma de um projetor que age no fibrado tangente de uma variedade de Poisson (3.25),

$$\Lambda = \mathbf{1} - X^\alpha g_{\alpha\beta} d\Omega^\beta. \quad (3.13)$$

A torção de Nijenhuis do tensor Γ (ver Apêndice B) em notação global é definida pela fórmula

$$\begin{aligned} T_N^\Gamma(X, Y) &\equiv [\Gamma, \Gamma]_N(X, Y) \\ &= [\Gamma(X), \Gamma(Y)]_{\mathcal{L}} - \Gamma([\Gamma(X), Y]_{\mathcal{L}}) \\ &\quad + [X, \Gamma(Y)]_{\mathcal{L}} + \Gamma \circ \Gamma[X, Y]_{\mathcal{L}}; \end{aligned} \quad (3.14)$$

\mathcal{L} , uma 2-forma com valores em W , define uma álgebra de Lie e Γ é um tensor do tipo (1,1).

Seja \mathcal{L} a álgebra de Lie usual dos operadores vetoriais definidos sobre uma variedade⁵. O projetor pode definir uma deformação da álgebra \mathcal{L} se sua torção de Nijenhuis for nula.

Numa carta local escrevemos a torção de Nijenhuis de Λ

$$\begin{aligned} (T_N^\Lambda(X, Y))^l &= X^r Y^s \{ -\Lambda_h^l (\partial_s \Lambda_r^h) + \Lambda_h^l (\partial_r \Lambda_s^h) - \\ &\quad \Lambda_r^l (\partial_h \Lambda_s^h) + \Lambda_s^l (\partial_h \Lambda_r^h) \}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se o projetor é constante, ou seja, se os vínculos forem planares, a torção é nula e Λ determina uma deformação. A torção de Nijenhuis do projetor pode se anular também de forma não-trivial. Podemos trabalhar a fórmula acima para casos específicos, e tirar

⁵ $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$; $[X, Y]_{\mathcal{L}} f = (X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i) \partial_i f$.

condições sobre os vínculos envolvidos em cada problema.

Operadores de Nijenhuis idempotentes podem ser construídos em uma "twilled Lie algebra" (álgebra de Lie g que é soma direta de duas subálgebras de Lie a e b , $g = a \oplus b$). Usando-se os operadores idempotentes, $\Pi_{a(b)} : g \rightarrow a(b)$, podemos obter classes de sistemas hamiltonianos como a cadeia de Toda, para cada álgebra de Lie semisimples que é concomitantemente uma "twilled algebra" [72].

3.3 Deformações dos parênteses de Poisson

No capítulo anterior vimos que a aplicação bilinear $\{ , \}$ que leva $\mathbf{F}(V) \times \mathbf{F}(V)$ em $\mathbf{F}(V)$ torna o espaço $\mathbf{F}(V)$ das funções definidas sobre a variedade V uma álgebra de Lie de dimensão infinita. Denotaremos esta álgebra por $N(V)$. N admite a cohomologia (ver apêndice B) de Chevalley-Eilemberg: as i -cocadeias C de $N(V)$ são as aplicações multilineares e antissimétricas⁶ de $N(V)^i$ em $N(V)$ e as 0-cocadeias são os próprios elementos de $N(V)$. A coborda da i -cocadeia C é a $(i + 1)$ -cocadeia ∂C definida por

$$\partial C(f_0, \dots, f_i) = \frac{1}{i!} \epsilon_{0\dots i}^{\lambda_0 \dots \lambda_i} \{f_{\lambda_0}, C(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_i})\} - \frac{1}{2(i-1)!} \epsilon_{0\dots i}^{\lambda_0 \dots \lambda_i} C(\{f_{\lambda_0}, f_{\lambda_1}\}, f_{\lambda_2}, \dots, f_{\lambda_i}),$$

com $f_\lambda \in N(V)$. Dizemos que C é um cociclo se $\partial C = 0$. Uma i -cocadeia é dita ser 1-diferenciável se ela é definida a partir de operadores diferenciais de primeira ordem atuando sobre os elementos de $N(V)$. Esse tópico e as suas relações com outras características das variedades de Poisson são tratados em [54, 52, 53, 49].

A cohomologia de Chevalley-Eilemberg aparece no tratamento das deformações dos parênteses de Poisson e desempenha um importante papel na classificação dessas deformações.

Vamos considerar a aplicação bilinear $[,]$ de $\mathbf{F}(V) \times \mathbf{F}(V)$ em $\mathbf{F}(V)$ que é dada formalmente pela série

⁶Ver definição de ϵ no apêndice B.

$$[F, G]_\lambda = \{F, G\} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_r(F, G), \quad (3.16)$$

cujo $C_r(F, G)$ é uma 2-cocadeia sobre $\mathbf{F}(V)$ na cohomologia de Chevalley-Eilenberg; ela define uma deformação formal da álgebra $N(V)$ se a identidade de Jacobi (2.2) for formalmente satisfeita.

A expressão

$$[F, G]_\lambda = \{F, G\} + \lambda C(F, G) \quad (3.17)$$

define uma deformação infinitesimal de $N(V)$ se (2.2) for satisfeita, isto equivale a dizer que $C(F, G)$ é um 2-cociclo em $\mathbf{F}(V)$ [49].

Seja uma série formal de bivectores definidos sobre uma variedade V

$$\Theta_\lambda = \Theta + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \Theta_\lambda, \quad (3.18)$$

tais que para todos os valores de λ tenhamos

$$[\Theta_\lambda, \Theta_\lambda]_S = 0. \quad (3.19)$$

O parêntese de Poisson definido pelo λ -ésimo termo Θ_λ ,

$$\{F, G\}_{\Theta_\lambda} \quad F, G \in \mathbf{F}(V), \quad (3.20)$$

satisfaz a identidade de Jacobi (ver capítulo 2) e define uma deformação formal 1-diferenciável de $N(V)$ que é deduzida da estrutura geométrica de V .

Uma deformação formal 1-diferenciável é dita ser rigorosa se existirem Θ_λ e T_λ tais que

$$T_\lambda[F, G] - \{T_\lambda F, T_\lambda G\}_{\Theta_\lambda} = 0, \quad (3.21)$$

onde

$$T_\lambda = id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s, \quad (3.22)$$

e os T_s são operadores diferenciais de ordem s sobre $\mathbf{F}(V)$.

Se Θ_1 é um 2-cociclo sobre $N(V)$ e T uma 1-cocadeia 1-diferenciável, tais que para uma deformação infinitesimal 1-diferenciável (3.17)

$$\Theta_\lambda = \Theta + \lambda\Theta_1, \text{ e} \quad (3.23)$$

$$T_\lambda = id + \lambda T \quad (3.24)$$

verificam a equação (3.21) em segunda ordem, dizemos que (3.17) é uma deformação rigorosa infinitesimal.

3.4 O projetor e as deformações da álgebra $N(V)$

No que segue, nos restringimos à variedade simplética V . Consideremos uma folheação de V de codimensão $2R$ cujas folhas são subvariedades simpléticas de V definidas por vínculos de segunda classe ($\Omega^\alpha = cte$; $\alpha = 1, \dots, 2R$).

O projetor

$$\Lambda = \mathbf{1} - Q = \mathbf{1} - X^\alpha g_{\alpha\beta} d\Omega^{(2)\beta} \quad (3.25)$$

define uma estrutura tangente à folheação; ou seja, determina uma estrutura de Poisson em V cujo bivector associado é

$$\tilde{\Theta} = \Lambda(\Theta) = \Theta - X^\alpha g_{\alpha\beta} X^\beta = \Theta - \Gamma, \quad (3.26)$$

com $\Gamma = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} X^\alpha \wedge X^\beta$.

As componentes de $\tilde{\Theta}$ numa carta local são dadas por

$$(\tilde{\Theta})^{ij} = \Theta^{ij} - \Theta^{ik} \partial_k \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_l \Omega^\beta \Theta^{lj}. \quad (3.27)$$

Vimos no capítulo anterior que o parêntese de Dirac é exatamente o parêntese definido pelo tensor $\tilde{\Theta}$, cujo posto é $(m - 2R)$. É interessante notar que o parêntese de Dirac pode ser construído a partir de parênteses simpléticos, os quais são definidos por restrições de $\tilde{\Theta}$ às folhas vinculares [49].

Se $\tilde{\Theta}$ realmente define uma estrutura de Poisson em V , então vale

$$[\tilde{\Theta}, \tilde{\Theta}]_S = [\Theta - \Gamma, \Theta - \Gamma]_S = 0, \quad (3.28)$$

e como consequência

$$2 [\tilde{\Theta}, \Gamma]_S = [\Gamma, \Gamma]_S. \quad (3.29)$$

Vamos introduzir o tensor

$$\Theta_\lambda = \Theta - \lambda \Gamma; \quad (3.30)$$

observamos que para $\lambda = 0$ reobtemos Θ e que $\Theta_{\lambda=1} = \tilde{\Theta}$.

Como vimos, se para todo λ

$$[\Theta_\lambda, \Theta_\lambda]_S = 0, \quad (3.31)$$

o parêntese

$$\{F, G\}_{\Theta_\lambda} = i_{\Theta_\lambda}(dF \wedge dG) \quad (3.32)$$

define uma deformação rigorosa da álgebra de Lie $N(V)$ da variedade simplética (V, Θ) na álgebra de Lie da variedade de Poisson $(V, \tilde{\Theta})$.

A condição necessária e suficiente para que (3.31) seja satisfeita é que

$$[\Gamma, \Gamma]_S = 0; \quad (3.33)$$

podemos alternativamente dizer que Γ deve ser um 2-cociclo [49].

O termo Γ do tensor Θ_λ depende dos vínculos e da estrutura do espaço V , aqui no caso uma variedade simplética. A seguir vamos explorar algumas condições para que os vínculos de segunda classe de fato definam deformações da álgebra $N(V)$.

As componentes de $[\Gamma, \Gamma]_S$ são dadas por

$$\frac{1}{2} [\Gamma, \Gamma]_S^{ijk} = \Gamma^{hi} \partial_h \Gamma^{jk} + \Gamma^{hj} \partial_h \Gamma^{ki} + \Gamma^{hk} \partial_h \Gamma^{ij}, \quad (3.34)$$

ver definição de parêntese de Schouten no apêndice B.

A equação (3.33) é escrita em termos de Q e do bivetor Θ como

$$(Q\Theta)^{hi} \partial_h (Q\Theta)^{jk} + (Q\Theta)^{hj} \partial_h (Q\Theta)^{ki} + (Q\Theta)^{hk} \partial_h (Q\Theta)^{ij} = 0 \quad (3.35)$$

ou como

$$\begin{aligned} & \Theta^{hm} T_{mn} \Theta^{ni} \partial_h \Theta^{jm} T_{mn} \Theta^{nk} + \\ & \Theta^{hm} T_{mn} \Theta^{nj} \partial_h \Theta^{km} T_{mn} \Theta^{ni} + \\ & \Theta^{hm} T_{mn} \Theta^{nk} \partial_h \Theta^{im} T_{mn} \Theta^{nj} = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $T_{mn} := \partial_m \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_n \Omega^\beta$.

Em variedades simpléticas, o teorema de Darboux assegura a existência de coordenadas canônicas tais que $\Theta^{r, \bar{r}} = \Theta^{\bar{r}, r} = 1$, onde $\bar{r} = r + (\dim V)/2$; assim estabelecemos uma condição para que os vínculos determinem uma deformação na álgebra $N(V)$:

$$\sum_{\text{cicl}}^{i,j,k} \partial_h \Omega^\alpha g_{\alpha\beta} \partial_i \Omega^\beta \partial_h (\partial_j \Omega^\gamma g_{\gamma\delta} \partial_k \Omega^\delta) = 0. \quad (3.37)$$

A condição acima é trivialmente satisfeita se todas as segundas derivadas são nulas, ou seja, se todos os vínculos forem planares.

Em [49] fica estabelecido que a condição necessária e suficiente para que $\Theta_\lambda = \Theta - \lambda\Gamma$ defina uma deformação rigorosa dos parênteses de Poisson nos parênteses de Dirac é que a distribuição vincular gerada pelos campos X^α seja integrável. Podemos pôr essa condição em função do projetor Q (ver apêndice B): Sejam X e Y dois campos quaisquer da distribuição vincular; uma vez que (ver capítulo 2)

$$Q(X^\alpha) = X^\alpha,$$

a torção de Nijenhuis do operador Q é nula,

$$T_N^Q(Q(X), Q(Y)) = 0. \tag{3.38}$$

Conclusão

There are problems in theoretical physics awaiting solution,..., the solution of which problems will presumably require a drastic revision of our fundamental concepts. Quite likely these changes will be so great that it will be beyond the power of human intelligence to get the necessary new ideas by direct attempts to formulate the experimental data in mathematical terms. The theoretical worker in the future will therefore have to proceed in a more indirect way. The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalise the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and after each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities. Dirac [36]

No primeiro capítulo vimos que o método projetor é bastante adequado ao tratamento de diversos problemas como a quantização de sistemas não-holônomos e o estudo dos sistemas hamiltonianos singulares [28, 29, 30]. Nestes casos, o método apresenta duas vantagens, a primeira é permitir que se trabalhe com coordenadas cartesianas naqueles casos em que não podemos (ou não desejamos) eliminar coordenadas, e a segunda reside no fato de não ser necessário o uso de multiplicadores de Lagrange; estes, como sabemos, apresentam certos problemas no processo de quantização [36, 39]. São muitas as consequências da aplicação do projetor aos sistemas vinculados; dentre elas, destacamos a formulação de uma geometria não-holônoma, cujos objetos como conexões e curvaturas desempenham importantes papéis na descrição da dinâmica de tais sistemas [30, 32, 33].

A extensão do método projetor para o caso das subvariedades de uma variedades de Poisson, em particular às subvariedades que possuem estrutura de Poisson, abre novas perspectivas no estudo dos sistemas singulares. As variedades de Poisson, como sabemos, são espaços apropriados ao tratamento de uma série de sistemas que, embora complexos, são muito comuns em mecânica [44]. Por possuírem folheações simpléticas locais, essas variedades podem descrever processos onde o número de graus de liberdade não permanece fixo ou onde a estrutura do espaço dinâmico varia. O que há de comum nos dois casos é o fato das diversas etapas da evolução temporal do sistema estarem continuamente ligadas por um parâmetro e que, para certos valores que ele assume, o problema admite formulação simplética.

No capítulo 2 formulamos a técnica de projeção para a variedade de Poisson e verificamos que, com o projetor, podemos obter informações da geometria das subvariedades (vínculos); inclusive a estrutura de Poisson das subvariedades de segunda classe aparece escrita em função da estrutura (de Poisson) da variedade ambiente e do projetor Λ . Esses resultados são bastante animadores e acreditamos que o método, bastante simples, pode ajudar a descrever características importantes da dinâmica de um sistema vinculado numa variedade de Poisson. Um estudo particularmente interessante seria o dos sistemas definidos em variedades que são grupos de Lie, onde geralmente o movimento é descrito no espaço dual à álgebra de Lie do grupo [11, 12, 10]. Relacionar o método projetor e o método de redução (ver introdução) para tratar sistemas vinculados com simetrias também parece um programa promissor.

No último capítulo vimos que o projetor desempenha um importante papel na teoria das deformações das álgebras de Lie associadas a variedades de Poisson. No caso em que a variedade V é simplética, um folheação de vínculos de segunda classe define uma estrutura de Poisson em V . Esta, por sua vez, é obtida pela aplicação de Λ à estrutura simplética de V . Fazendo uso do operador de projeção Λ conseguimos mostrar condições para que os vínculos de fato determinem deformações das álgebras. Nestes casos, o parêntese de Dirac é uma deformação dos parênteses de Poisson de V .

Acreditamos que a maior contribuição do nosso trabalho, enquanto tese de mestrado, foi relacionar alguns tópicos da literatura matemática ao nosso tratamento de sistemas vinculados e apresentar o material de forma introdutória, de modo a trazer para junto dos físicos "ferramentas" de trabalho bem conhecidas pelos matemáticos.

Apêndice A

Mecânica hamiltoniana e vínculos de Dirac

Seja $F = F(x^1, \dots, x^N; \alpha_1, \dots, \alpha_M)$ uma função de N variáveis x^i e M parâmetros α_j .

Definamos agora uma transformação de variáveis

$$y_i = \frac{\partial F(x; \alpha)}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (\text{A.1})$$

Se o jacobiano da transformação acima for diferente de zero, teremos $x^i = \phi^i(y; \alpha)$ ($i = 1, \dots, N$) e em particular podemos ter $\phi^i = \frac{\partial G(y; \alpha)}{\partial y_i}$, sendo $G = G(y_1, \dots, y_N; \alpha)$. As funções F e G são conectadas pela seguinte relação:

$$G(y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N \{x^i(y)y_i\} - F(x(y)). \quad (\text{A.2})$$

O quadro abaixo resume o esquema das transformações, as quais chamamos de duais¹:

$$(x^1, \dots, x^N) \longrightarrow (y_1, \dots, y_N), \quad F(x; \alpha) \longrightarrow G(y; \alpha), \quad y_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} \longrightarrow x^i = \frac{\partial G}{\partial y_i},$$
$$G = \sum_{i=1}^N \hat{x}^i y_i - \hat{F} \longrightarrow F = \sum_{i=1}^N x^i \hat{y}_i - \hat{G}.$$

¹ $\hat{G}(x) := G(y(x)), \hat{F}(y) := F(x(y)).$

Fazendo-se derivações parciais com relação aos parâmetros obtemos de (A.2)

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha_k}\right)_y = \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \alpha_k}\right)_y - \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x^h} \frac{\partial \hat{x}^h}{\partial \alpha_k}\right)_y \right\} - \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \alpha_k}\right)_x; \quad (\text{A.3})$$

com $y_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ na equação acima obtemos

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \alpha_k}\right)_y = - \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}\right)_x. \quad (\text{A.4})$$

De modo geral definimos um sistema físico (clássico) por uma lagrangeana L que obedece algumas condições de analiticidade e simetria.

Definimos o momento canonicamente conjugado à variável q^i :

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^i}. \quad (\text{A.5})$$

Fazendo-se as correspondências $x^i \longrightarrow \dot{q}^i$, $y_i \longrightarrow p_i$, $F \longrightarrow L$, $G \longrightarrow H_c$, $\alpha \longrightarrow (q; t)$ e juntamente com

$$\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right| \neq 0, \quad (\text{A.6})$$

estabelecemos $H_c = H_c(p_1, \dots, p_N; q^1, \dots, q^N; t)$ que obedece a

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (\text{A.7})$$

com $H_c = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}^i - L$ e, é claro, pelas eqs. (A.4), valem

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)_{\dot{q}^i} = \left(\frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right)_{p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H_c}{\partial t}. \quad (\text{A.8})$$

Os sistemas clássicos definidos por H_c podem ser quantizados promovendo-se as variáveis dinâmicas p_i e q^i a operadores num espaço de Hilbert e impondo-se uma relação de comutação para os operadores, a qual possui a mesma álgebra de Lie que a dos

parênteses de Poisson das variáveis do espaço de fase clássico.

Existe uma certa ambiguidade na definição do hamiltoniano quântico, porém para sistemas com um número finito de graus de liberdade podemos, através de um ordenamento específico dos operadores na hamiltoniana (ordenamento de Weyl) e da imposição de simetrias, contornar este problema. Pode acontecer, no entanto, que uma dada lagrangeana não satisfaça a equação (A.7), neste caso a L é dita singular e não podemos definir todas as velocidades generalizadas em função dos momentos canonicamente conjugados, e em termos estritos não é possível obtermos a hamiltoniana canônica H_c . Pelas equações de Euler-Lagrange, podemos concluir que a dinâmica de sistemas desse tipo não é univocamente determinada especificando-se as velocidades e coordenadas num dado instante inicial. A ocorrência de lagrangeanas singulares em importantes problemas da física fez com que se tentasse estender o procedimento de quantização canônica para esses casos também. Abaixo tentaremos expor resumidamente o método de Dirac e os seus principais resultados.

Seja

$$\Lambda_{ij} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}; \quad (\text{A.9})$$

se o posto dessa matriz for $R_\Lambda < N$, então podemos inverter a equação (A.5) para as R_Λ velocidades \dot{q}^a ,

$$\dot{q}^a = f^a(\{q^i\}, \{p_b\}, \{\dot{q}^\rho\}). \quad (\text{A.10})$$

Fica claro que quando substituirmos \dot{q}^a acima na equação (A.5), formalmente teremos

$$p_i = g_i(q, \{p_b\}, \{\dot{q}^\rho\}) \quad (i = 1, \dots, N); \quad (\text{A.11})$$

com $i = a \in [1, R_\Lambda]$ a equação acima se reduz à identidade, porém para $i = \rho \in [R_\Lambda+1, N]$ obtemos

$$p_\rho = g_\rho(q, \{p_b\}) \quad (\rho = R_\Lambda+1, \dots, N). \quad (\text{A.12})$$

É claro que g_ρ não pode depender de nenhuma \dot{q}^ρ , caso contrário ainda poderíamos

relacionar mais velocidades e o posto de Λ seria maior que R_Λ , o que é contrário à nossa hipótese inicial. Surgem assim $M = N - R_\Lambda$ vínculos, chamados primários; em consequência deles a dinâmica do sistema se processa num subespaço S do espaço de fase EF , cuja dimensão é M . Os vínculos primários ϕ são definidos pelas equações

$$\phi^\rho(q, p) := p_\rho - g_\rho(q, \{p_\alpha\}) \quad (\rho = 1, \dots, m), \quad (\text{A.13})$$

sendo $S = \{(q, p) \in EF \mid \phi^\rho(q, p) = 0, \rho = 1, \dots, m\}$.

Adotando-se a equivalência entre o fato de Λ ser singular e a existência de vínculos, faz sentido se definir uma hamiltoniana canônica. Pode ser mostrado que as equações de Euler-Lagrange implicam que, em S , valham as equações

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c^{(p)}}{\partial p_i} + \frac{\partial \phi^\rho}{\partial p_i} \dot{q}^\rho, \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c^{(p)}}{\partial q^i} - \frac{\partial \phi^\rho}{\partial q^i} \dot{q}^\rho \quad (i = 1, \dots, N), \quad (\text{A.15})$$

onde $H_c^{(p)} = H_c^{(p)}(q, \{p_\alpha\})$. Estas equações, no entanto, não são equivalentes às equações de Euler-Lagrange, pois os \dot{q}^ρ são ainda funções indeterminadas. De fato, como veremos adiante, condições adicionais sobre os vínculos irão determinar se todos ou alguns desses \dot{q}^ρ podem ser encontrados. Ficará claro que a determinação de algumas dessas funções também eliminará o mesmo número de vínculos. Como nem sempre é útil, ou mesmo possível na prática, se inverter a relação (A.5), devemos "livrar" a hamiltoniana da restrição a S ; porém é claro não podemos perder informações acerca dessa restrição, pois é em S que a dinâmica do sistema se processa. Introduzimos então o conceito de igualdade fraca: " \approx ". Dizemos que duas funções F e G são fracamente iguais, $F \approx G$, se elas coincidem em S (subespaço de EF). Seja $H'(q, p) \approx H_c^{(p)}(q, \{p_\alpha\})$; usando-se as equações (A.14) e (A.15), a hamiltoniana definida acima e as relações

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \left(F - \phi^\rho \frac{\partial F}{\partial p_\rho} \right) \approx \frac{\partial}{\partial q^i} \left(G - \phi^\rho \frac{\partial G}{\partial p_\rho} \right), \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(F - \phi^\rho \frac{\partial F}{\partial p_\rho} \right) \approx \frac{\partial}{\partial p_i} \left(G - \phi^\rho \frac{\partial G}{\partial p_\rho} \right), \quad (\text{A.17})$$

válidas para duas funções G e F definidas em EF tais que $G \approx F$ em S , chegaremos às seguintes equações:

$$\dot{q}^i \approx \{q^i, H\} + v^\rho \{q^i, \phi^\rho\} \approx \{q^i, H_T\}, \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H\} + v^\rho \{p_i, \phi^\rho\} \approx \{p_i, H_T\}, \quad (\text{A.19})$$

onde

$$H := H' - \sum_\rho \phi^\rho \frac{\partial H'}{\partial p_\rho} \approx H_c^{(p)} \quad (\text{A.20})$$

e

$$H_T = H + \sum_{\rho=1}^m v^\rho \phi^\rho, \quad (\text{A.21})$$

o qual é chamado hamiltoniano total do sistema. A operação $\{, \}$ é o parêntese de Poisson usual do EF . Definimos $v^\rho = \dot{q}^\rho$. Para uma variável dinâmica G qualquer, vale $\dot{G}(q, p) \approx \{G, H_T\}$.

O sinal de igualdade fraca nas equações acima significa que a imposição de vínculos primários é feita somente após todas as diferenciações tiverem sido efetuadas, o que é consistente com a definição de parêntese de Poisson. A condição de que a dinâmica se processa na "superfície" definida pelos vínculos nos faz impor

$$\dot{\phi}^\rho \approx \{\phi^\rho, H_T\} \approx 0 \quad (\rho = 1, \dots, m) \quad (\text{A.22})$$

ou equivalentemente

$$\{\phi^\rho, H\} + \sum_{\sigma=1}^m v^\sigma \{\phi^\rho, \phi^\sigma\} \approx 0 \quad (\rho = 1, \dots, m). \quad (\text{A.23})$$

Se a matriz $P := [\{\phi^\rho, \phi^\sigma\}]$ possuir inversa, podemos determinar todos os m v^ρ e o problema estaria completamente resolvido. Por outro lado, pode acontecer que o posto da matriz P acima seja $R < m$; neste caso tomamos combinações lineares dos vínculos

primários $\varphi^\rho = \sum_{\sigma=1}^m \alpha^{\rho\sigma} \phi^\sigma$ de tal forma que valham

$$\det \left[\left\{ \varphi^\rho, \varphi^\theta \right\} \right] \approx 0 \quad (\rho, \theta = 1, \dots, R < m), \quad (\text{A.24})$$

$$\left\{ \varphi^\rho, \varphi^\theta \right\} \approx 0 \quad \text{se } (\rho = R + 1, \dots, m) \quad (\theta = 1, \dots, m). \quad (\text{A.25})$$

Com essa redefinição dos vínculos primários teremos

$$\left\{ \varphi^\rho, H \right\} + \sum_{\sigma=1}^R \left\{ \varphi^\rho, \varphi^\sigma \right\} u^\sigma \approx 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\left\{ \varphi^\rho, H \right\} \approx 0 \quad (\rho = R + 1, \dots, m). \quad (\text{A.27})$$

As primeiras são usadas para se determinar os $R u^\theta$, ao passo que as equações $\left\{ \varphi^\rho, H \right\} \approx 0$ ou são identicamente satisfeitas ou geram o que chamaremos de vínculos secundários.

Repetindo o algoritmo descrito acima para esses novos vínculos, podemos novamente determinar mais alguns u^θ ou gerar novos vínculos secundários. O processo pára quando nenhum novo vínculo puder ser gerado. Neste ponto, se todos os u^θ puderem ser determinados, o nosso sistema será dito de segunda classe. Se, por outro lado, um certo número l de u^θ ainda restarem indeterminados, então o sistema possui simetria de gauge (simetria local) associada a um grupo (de Lie) de l parâmetros. Se agora então tivermos no problema um certo número m de vínculos primários e $(M - m)$ vínculos secundários, a dinâmica do sistema irá se processar num subespaço S_Ω de EF que é gerado por todos os vínculos Ω^α (primários e secundários). A dinâmica em S_Ω é dada por

$$\left\{ F(q, p), H_T \right\} \approx 0, \quad (\text{A.28})$$

$$\left\{ \Omega^A, H_T \right\} \approx 0 \quad (A = 1, \dots, M). \quad (\text{A.29})$$

Uma função $F(q, p)$ é dita de primeira classe se

$$\left\{ F, H \right\} \approx 0 \quad (\text{A.30})$$

$$e \{F, \Omega^A\} \approx 0 \quad (A = 1, \dots, M); \quad (\text{A.31})$$

notamos portanto que

$$\{F, \Omega^A\} = \sum_{B=1}^M C^{AB}(q, p) \Omega^B \approx 0. \quad (\text{A.32})$$

Funções de EF que não possuam essas propriedades são ditas de segunda classe. Podemos ter vínculos de primeira ou de segunda classe independentemente do fato de serem primários ou secundários. O quadro é o seguinte:

$$\{\Omega^{(1)a}, \Omega^{(1)b}\} \approx 0, \quad (\text{A.33})$$

$$\{\Omega^{(1)a}, \Omega^{(2)\beta}\} \approx 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\{\Omega^{(2)\alpha}, \Omega^{(2)\beta}\} \not\approx 0. \quad (\text{A.35})$$

A matriz $Q^{\alpha\beta} := [\{\Omega^{(2)\alpha}, \Omega^{(2)\beta}\}]$ possui $(\det \not\approx 0)^2$; denotaremos a sua inversa por T .

A condição de constância temporal implica em

$$\{\Omega^{(1)a}, H\} \approx 0, \quad (\text{A.36})$$

$$\{\Omega^{(2)\alpha}, H\} + \sum_{\beta=1}^{m^{(2)}} \{\Omega^{(2)\alpha}, \varphi^{(2)\beta}\} v^{(2)\beta} \approx 0, \quad (\text{A.37})$$

onde $m^{(2)}$ é o número de vínculos primários de segunda classe.

Podemos escrever a hamiltoniana total (A.21) separando as contribuições dos vínculos

²Se $\det \approx 0$, haveria pelo menos em uma linha (coluna) de Q uma combinação linear identicamente igual a zero, sem que entretanto os coeficientes fossem "nulos" (fracamente nulos) obrigatoriamente. Seja $\lambda_\alpha \Omega_\alpha^{(2)}$ uma combinação linear dos vínculos de segunda classe,

$$\{\lambda_\alpha \Omega_\alpha^{(2)}, \Omega_\beta^{(2)}\} = \lambda_\alpha \{\Omega_\alpha^{(2)}, \Omega_\beta^{(2)}\} \approx 0, \quad \forall \beta;$$

neste caso $\lambda_\alpha \Omega_\alpha^{(2)}$ seria de primeira classe, contrariando a nossa hipótese inicial, devemos ter portanto Q invertível.

de primeira e segunda classe:

$$H_T = H + \sum_{\alpha=1}^{m^{(1)}} \varphi^{(1)\alpha} v^{(1)\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m^{(2)}} \varphi^{(2)\beta} v^{(2)\beta}. \quad (\text{A.38})$$

Definimos em seguida

$$H^{(1)} := H + \sum_{\beta=1}^{m^{(2)}} \varphi^{(2)\beta} v^{(2)\beta}, \quad (\text{A.39})$$

que é obviamente de primeira classe. As equações (A.36) e (A.37) nos dão

$$v^{(2)\alpha} \approx - \sum_{\beta=1}^{M^{(2)}} T^{\alpha\beta} \left\{ \Omega^{(2)\beta}, H \right\} \quad (\alpha = 1, \dots, m^{(2)}), \quad (\text{A.40})$$

$$0 \approx \sum_{\beta=1}^{M^{(2)}} T^{\alpha\beta} \left\{ \Omega^{(2)\beta}, H \right\} \quad (\alpha = m^{(2)} + 1, \dots, M^{(2)}). \quad (\text{A.41})$$

As equações de movimento ficam

$$\dot{F} \approx \{F, H\} - \sum_{\alpha,\beta}^{M^{(2)}} \left\{ F, \Omega^{(2)\alpha} \right\} T^{\alpha\beta} \left\{ \Omega^{(2)\beta}, H \right\} + \sum_{a=1}^{m^{(1)}} \left\{ F, \varphi^{(1)a} \right\} v^{(1)a}. \quad (\text{A.42})$$

Define-se então os parênteses de Dirac das funções F e G :

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \sum_{\alpha,\beta=m^{(2)}+1}^{M^{(2)}} \left\{ F, \Omega^{(2)\alpha} \right\} T^{\alpha\beta} \left\{ \Omega^{(2)\beta}, H \right\}. \quad (\text{A.43})$$

Para sistemas de primeira classe há dois caminhos para se fazer a quantização:

- i) realizar os vínculos como condições impostas sobre os estados quânticos;
- ii) impor condições adicionais para fixar os parâmetros v^b restantes.

Ao nível clássico, os vínculos de segunda classe não apresentam nenhuma inconsistência. Porém a nível quântico, realizando-se os vínculos operatorialmente como condições a que todos os estados quânticos do sistema devem obedecer, encontramos a seguinte inconsistência: se

$$\hat{\Omega}^{(2)\alpha} | \Psi \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\Omega}^{(2)\beta} | \Psi \rangle = 0,$$

teremos como consequência

$$[\hat{\Omega}^{(2)\alpha}, \hat{\Omega}^{(2)\beta}] | \Psi \rangle = 0;$$

mas classicamente, por definição, vínculos de segunda classe não obedecem a álgebra sugerida acima.

A equação (A.33) nos mostra que os vínculos de primeira classe podem ser realizados como operadores, sem a inconsistência apontada acima para os de segunda classe, sendo que para um sistema de primeira classe o esquema de quantização é o seguinte:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar \delta_\nu^\mu, \quad (\text{A.44})$$

$$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 0 \quad \forall \mu, \nu, \quad (\text{A.45})$$

$$[\hat{\Omega}^{(1)a}, \hat{\Omega}^{(1)b}] = \epsilon_c^{ab} \hat{\Omega}^{(1)c}, \quad (\text{A.46})$$

$$[\hat{\Omega}^{(1)a}, \hat{H}_T] = \epsilon_b^a \hat{\Omega}^{(1)b}, \quad (\text{A.47})$$

onde ϵ_b^a são funções das ϵ_c^{ab} .

O vetor de estado deve satisfazer a equação de Schrödinger e a restrição dos vínculos

$$\hat{\Omega}^{(1)a} | \Psi \rangle = 0, \quad (\text{A.48})$$

de modo a verificar

$$[\hat{\Omega}^{(1)a}, \hat{\Omega}^{(1)b}] | \Psi \rangle = \epsilon_c^{ab} \hat{\Omega}^{(1)c} | \Psi \rangle. \quad (\text{A.49})$$

No caso de haverem vínculos de segunda classe, estes devem ser "eliminados" da teoria, o que é feito pelo uso dos parênteses de Dirac. Podemos observar que os vínculos de segunda classe valem fortemente dentro desses parênteses,

$$\{\Omega^{(2)\alpha}, B(p, q)\}_D = \{\Omega^{(2)\alpha}, B\} - \delta^{\alpha\beta} \{\Omega^{(2)\beta}, B\} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Se o sistema só possui vínculos de segunda classe, a transição para a mecânica quântica

se processa da forma

$$i \{A, B\}_D \longrightarrow [\hat{A}, \hat{B}], \quad (\text{A.51})$$

e por outro lado os vínculos são realizados fortemente como equações operatoriais; mas, claro, ainda vale a restrição sobre o vetor de estado: $\hat{\Omega}^{(2)\alpha} | \Psi \rangle = 0$.

Num sistema de primeira classe ou num sistema onde os vínculos de segunda classe já foram eliminados, as restrições de primeira classe dão origem a simetrias no hamiltoniano H_T . É fácil ver que os vínculos de primeira classe devem ser geradores de transformações de simetria infinitesimais do hamiltoniano [35]. Podemos escrever uma expressão geral para o gerador infinitesimal dessas transformações,

$$G(t) = \varepsilon^a(t) \Omega^{(1)a}(p, q); \quad (\text{A.52})$$

com isso, a variação infinitesimal sofrida por uma função F é dada por $\delta_G F = \{F, G\}$.

Impondo que a ação seja invariante face a simetria, obtemos condições sobre os parâmetros ε^a [40]:

$$\delta_G S = 0 \implies \delta_G v^{(1)a} = \dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b (h^{ba} + v^{(1)c} C^{cba}) \quad (a = 1, \dots, m^{(1)}), \quad (\text{A.53})$$

$$0 = \dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b (h^{ba} + v^{(1)c} C^{cba}) \quad (a = m^{(1)} + 1, \dots, M^{(1)}), \quad (\text{A.54})$$

tais que

$$\{H^{(1)}, \Omega^{(1)a}\} = h^{ab} \Omega^{(1)b},$$

$$\{\Omega^{(1)a}, \Omega^{(1)b}\} = C^{abc} \Omega^{(1)c}.$$

As equações (A.53) mostram como se transformam os parâmetros v , ao passo que as equações (A.54) implicam em $(M^{(1)} - m^{(1)})$ condições impostas sobre as ε^a , correspondentes aos $(M^{(1)} - m^{(1)})$ vínculos secundários de primeira classe. A escolha $\varepsilon^a = 0$, $a = m^{(1)} + 1, \dots, M^{(1)}$, é em geral incompatível com as condições, e demonstra a necessi-

dade de se incluir os vínculos secundários de primeira classe em (A.52). Podemos também ver isso fazendo duas transformações infinitesimais geradas por vínculos primários de primeira classe com parâmetros ε^a e $\bar{\varepsilon}^a$. Tomando a diferença entre a composição das transformações em ordem invertida obtemos

$$\Delta F = \varepsilon^a \bar{\varepsilon}^b \left\{ F, \left\{ \phi^{(1)a}, \phi^{(1)b} \right\} \right\}; \quad (\text{A.55})$$

mas como em geral

$$\left\{ \phi^{(1)a}, \phi^{(1)b} \right\} = f^{abc} \Omega^{(1)c},$$

podemos então fazer a seguinte conjectura (de Dirac): *Observáveis e estados de um sistema físico são invariantes face a transformações geradas por vínculos de primeira classe, primários e secundários, agindo independentemente.*

Pela conjectura acima, as equações de movimento devem ser dadas pela hamiltoniana estendida H_E ,

$$H_E := H^{(1)} + \zeta^a \Omega^{(1)a}, \quad (\text{A.56})$$

onde as ζ^a seriam multiplicadores de Lagrange. $\delta_G S \implies \delta_G \zeta^a = \dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b (h^{ba} + \zeta^c C^{cba})$, e assim não temos mais restrições sobre os ε_a . Contudo, as equações de movimento obtidas com H_E nem sempre são equivalentes às equações de Euler-Lagrange. Para quantidades invariantes de gauge, as dinâmicas de H_T e H_E são equivalentes e, é claro, equivalentes às equações de Euler-Lagrange. Isto é provado para sistemas contendo unicamente vínculos de primeira classe[38].

Assim, para uma função F ,

$$\dot{F} \approx \{F, H\}_D + \left\{ F, \Omega^{(1)a} \right\}_D \zeta^a. \quad (\text{A.57})$$

Agora, com todos os parâmetros livres, podemos tentar impor condições adicionais $\chi^a \approx 0$, cujo índice a varia de 1 até $M^{(1)}$, para se determinar os ζ^a . Procedendo nessa direção vamos impor $\det \left[\left\{ \chi^a, \Omega^{(1)b} \right\} \right] \not\approx 0$, sendo que " \approx " agora vale no subespaço $\Gamma^* \subset$

$\Gamma \subset EF$ definido pelos vínculos e pelas condições de gauge χ^a . A condição de constância temporal para as χ^a é

$$\{\chi^a, H\}_D + \sum_{b=1}^{M^{(1)}} \{\chi^a, \Omega^{(1)b}\}_D \zeta^b \approx 0 \quad (a = 1, \dots, M^{(1)}). \quad (\text{A.58})$$

Podemos determinar os multiplicadores ζ^b em Γ^* univocamente. É claro, podemos tratar os vínculos e as condições subsidiárias em pé de igualdade. Assim definimos

$$\bar{Q} := \begin{pmatrix} \bar{Q}^{11} = \{\Omega^{(1)}, \Omega^{(1)}\}_D & \bar{Q}^{12} = \{\Omega^{(1)}, \chi\}_D \\ \bar{Q}^{21} = \{\chi, \Omega^{(1)}\}_D & \bar{Q}^{22} = \{\chi, \chi\}_D \end{pmatrix}, \quad (\text{A.59})$$

portanto

$$\zeta^a \approx - \sum_{b=1}^{M^{(1)}} U^{(12)ab} \{\chi^b, H\}_D \quad (a = 1, \dots, M^{(1)}), \quad (\text{A.60})$$

onde $U = \bar{Q}^{-1}$. Para quantizarmos o sistema tornamos os vínculos fortemente iguais a zero. Introduzimos desse modo os "parênteses de Dirac" em Γ^* ,

$$\{A, B\}_{D^*} = \{A, B\}_D - \sum_{r,s=1}^{2M^{(1)}} \{A, \Sigma^r\}_D U^{rs} \{\Sigma^s, B\}_D; \quad (\text{A.61})$$

então

$$\{\Sigma^r, B\}_{D^*} = 0 \quad (r = 1, \dots, 2M^{(1)}), \quad (\text{A.62})$$

$$\{\Omega^{(2)\alpha}, B\}_{D^*} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, M^{(2)}). \quad (\text{A.63})$$

O novo parêntese é implementado fortemente para todos os vínculos e condições subsidiárias. A evolução temporal de uma função A é dada por $\dot{A} \approx \{A, H\}_{D^*}$, de forma mais explícita

$$\dot{A} \approx \{A, H\}_D - \sum_{a,b} \{A, \Omega^{(1)a}\}_D U^{(12)ab} \{\chi^b, H_c\}_D. \quad (\text{A.64})$$

É claro que este procedimento só é válido no caso em que as condições subsidiárias não envolvem os multiplicadores de Lagrange ζ^a . Isto, para o caso do eletromagnetismo,

exclui por exemplo o gauge temporal tipo $A^0 = 0$, pois o campo A^0 faz o papel de um multiplicador nessa teoria. Métodos para tratar esses casos foram desenvolvidos em [39].

Apêndice B

B.1 Variedades diferenciáveis

Chamaremos variedade diferenciável o par (V, ξ) onde V é um conjunto topológico tipo hausdorff e possui uma cobertura de abertos [64, 65, 24, 8], e onde ξ é o anel das funções reais definidas sobre V e tais que verificam

- i) $F \in \xi$ é tal que $F : V \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma aplicação contínua,
- ii) se uma função $H : V \rightarrow \mathfrak{R}$, definida numa vizinhança C de cada ponto p , é coincidente com alguma função de ξ , então $H \in \xi$,
- iii) se $F : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é C^∞ e se $F_1, \dots, F_k \in \xi$, então $G(F_1, \dots, F_k) \in \xi$, e
- iv) existe uma vizinhança N_p de cada ponto p na qual estão definidas k funções F^k de ξ , e de modo que $x^k := F^k(q)$, $q \in N_p$ é um homeomorfismo de N_p num aberto de \mathfrak{R}^k . Cada elemento de ξ restrito a N_p concorda com alguma $G(F^1, \dots, F^k)$.

Obs(1): Se k independe do ponto, então dizemos que a variedade (V, ξ) tem dimensão k .

Obs(2): ξ é o anel das funções de V em \mathfrak{R} , no sentido de soma e multiplicação ponto a ponto. As constantes formam um sub-anel de ξ .

Obs(3): Existem definições alternativas de variedades diferenciáveis [64, 24, 12, 8, 66]; escolhemos a definição acima por evidenciar mais os aspectos algébricos.

Seja Ψ uma aplicação entre duas variedades diferenciáveis (V, ξ) e $(\bar{V}, \bar{\xi})$, $\Psi : V \rightarrow \bar{V}$; este mapeamento induz uma aplicação do anel $\bar{\xi}$ em ξ representada por

$$\bar{F} := F \circ \Psi \text{ com } \bar{F} \in \bar{\xi}, \bar{F}(\bar{p}) = F(p), \bar{p} = \Psi(p), F \in \xi.$$

A aplicação $\Psi : V \rightarrow \bar{V}$ é diferenciável se $\bar{F} \circ \Psi$ pertencer ao anel ξ para qualquer $\bar{F} \in \bar{\xi}$. Valem as seguintes regras de composição:

$$(\bar{F} + \bar{G}) \circ \Psi = \bar{F} \circ \Psi + \bar{G} \circ \Psi, \quad (\text{B.1})$$

$$(\bar{F}\bar{G}) \circ \Psi = (\bar{F} \circ \Psi)(\bar{G} \circ \Psi). \quad (\text{B.2})$$

O grupo de transformações (diferenciáveis) uniparamétrico, em uma variedade, é constituído por aplicações ϕ_t ($t \in \mathfrak{R}$) em (V, ξ) que verificam

- i) $\phi_t : V \times \mathfrak{R} \rightarrow V$ é diferenciável,
- ii) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

Com base nas definições acima podemos fazer $F_t = F \circ \phi_t$, ($F \in \xi$) com F_t sendo C^∞ em $t \in \mathfrak{R}$. A derivada de F_t com relação ao parâmetro $t \in \mathfrak{R}$ tomada em $t = 0$, denotada por $X(F)$, tem as seguintes propriedades [45]:

- i) $X(F) \in \xi$ se $F \in \xi$,
- ii) $X(F + G) = X(F) + X(G)$,
- iii) $X(F.G) = F.X(G) + X(F).G$ (regra de Leibnitz), e
- iv) $X(c) = 0$, c é uma constante.

$X : \xi \rightarrow \xi$ é o gerador infinitesimal do grupo $\{\phi_t\}$. Chamaremos de campo vetorial contravariante em V todo operador que obedece as quatro últimas condições acima. Vamos definir também a multiplicação de X por uma função $(G.X)(F) := G.X(F)$; assim, o conjunto de todos os campos vetoriais é um módulo M sobre o anel ξ .

Cada grupo $\{\phi_t\}$ de transformações de (V, ξ) a um parâmetro define um campo vetorial contravariante, a recíproca não é verdadeira. Por outro lado, um grupo $\{\phi_t\}$ é completamente definido pelos geradores infinitesimais [64].

Dizemos que X se anula no ponto p se $X(F)(p) = 0$, $\forall F \in \xi$ e que o suporte de X , $\text{supp}X$, é o menor conjunto fechado fora do qual X se anula.

Lema(B1): Se $F(q) = G(q)$ para algum q pertencente a uma certa vizinhança N_p de um ponto p então $X(F)(p) = X(G)(p)$. Temos $\text{supp}X(F) \subset \text{supp}F \cap \text{supp}X$.

Pelo lema acima, fica estabelecido que o valor de $X(F)$ numa vizinhança N_p de um ponto p depende somente da restrição de F àquela vizinhança. Podemos escrever

$$X(F)(q) = a^k(x)\partial_k F(x) \quad (a^k \text{ é } C^\infty), \quad (\text{B.3})$$

onde x são coordenadas locais com as quais é possível expressar a função $F \in \xi$ (analítica) numa vizinhança N_p de um certo ponto p . Agora podemos ver o paralelismo entre os conceitos de campo vetorial contravariante do cálculo tensorial e o definido acima.

Escreveremos $X(F)(p)$ como $X_p(F)$, esta notação caracteriza X_p como um funcional sobre ξ . Todos os funcionais restritos ao ponto p formam um espaço vetorial denotado por $T_p V$ que é o conhecido espaço tangente a V no ponto p . $T_p V$ caracteriza-se por

- i) $X_p(F + G) = X_p(F) + X_p(G)$,
- ii) $X_p(F.G) = F(p).X_p(G) + X_p(F).G(p)$, e
- iii) $X_p(c) = 0$, c é uma cte $\in \xi$.

Podemos ver que um campo vetorial contravariante associa a cada ponto p de V um objeto de $T_p V$, e faz isso de um modo diferenciável. Na linguagem dos fibrados isto é chamado de secção no fibrado TV [67, 65, 64].

A derivada de uma aplicação $\phi : V \rightarrow \bar{V}$ é um mapeamento entre fibrados tangentes, $\phi_{*p} : TV \rightarrow T\bar{V}$, definido a cada ponto por $X_p(\bar{F} \circ \phi) = \bar{X}_{\bar{p}}(\bar{F})$ com $\bar{F} \in \bar{\xi}$ e $\bar{p} = \phi(p)$; o mapeamento ϕ_{*p} é linear.

Obs(4): Apesar de entrar uma $\bar{F} \in \bar{\xi}$ na definição de derivada, é fácil ver que ϕ_* só depende do mapeamento ϕ e do ponto p .

Obs(5): $\phi_* : TV \rightarrow T\bar{V}$ é diferenciável.

Dizemos que um mapeamento F entre duas variedades $F : S \rightarrow V$ é uma imersão de S em V se a derivada dessa aplicação $F_* : T_s S \rightarrow T_{v=F(s)} V$ for injetiva, isto é, o posto de F_* é igual à dimensão de S . Um mapeamento $G : S \rightarrow V$ é dito um mergulho, se G é uma imersão injetiva. A imagem de G , $Im(G)$, é chamada subvariedade de V e é difeomórfica a S .

Obs(6): O comutador $[X_1, X_2] := X_1 X_2 - X_2 X_1$ é um campo vetorial¹ e vale a identidade (de Jacobi) $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$. Desta forma o espaço linear de todos os campos vetoriais contravariantes se transforma num anel de Lie.

Um campo vetorial covariante é uma 1-forma linear θ sobre um módulo M tomando valores em ξ e satisfaz

- i) $\theta(X) \in \xi$,
- ii) $\theta(X_1 + X_2) = \theta(X_1) + \theta(X_2)$,
- iii) $\theta(G.X) = G.\theta(X)$, $G \in \xi$.

Pode ser provado que [45] $\text{supp}\theta(X) \subset \text{supp}\theta \cap \text{supp}X$ [45].

Lema(B.2): O valor de $\theta(X)(p)$ depende somente de X_p , e essa dependência é linear. Podemos escrever um objeto do espaço cotangente T_p^*V no ponto p do modo $\theta(X)(p) = \theta_p(X_p)$; esta fórmula expressa a dualidade entre o espaço linear das 1-formas B sobre o anel ξ e o espaço vetorial formado pelos campos contravariantes.

Para um elemento F de ξ , fixo, $X(F)$ é um funcional sobre M com valores em ξ e deste modo define um campo vetorial covariante dF (diferencial de F):

$$dF(X) := X(F). \quad (\text{B.4})$$

Nem todo campo vetorial covariante é diferencial de função.

Como consequência da definição de diferencial de uma função temos

- i) $d(F + G) = dF + dG$,
- ii) $d(F.G) = F.dG + G.dF$,
- iii) $dc = 0$, onde c é uma constante.

Se tomarmos $F \equiv x^k$ e $X = \partial_i$, então

$$dx^k(\partial_i) \equiv (dx^k, \partial_i) = \partial_i(x^k) = \delta_i^k. \quad (\text{B.5})$$

¹A expressão desse parêntese numa carta local será vista mais adiante neste apêndice, como um caso particular de derivada de Lie.

Uma forma linear λ em B , tomando valores em ξ , define de modo unívoco um campo vetorial contravariante X : $X(F) := \lambda(dF)$; com essa identificação podemos tomar k 1-formas lineares independentes para formar uma base local de B . Definiremos uma r -forma θ^r como sendo um campo tensorial covariante, o qual é antissimétrico e multilinear sobre M , tomando valores em ξ .

Sejam θ^k e θ^l respectivamente uma k -forma e uma l -forma em V ; definiremos o produto externo $\theta^k \wedge \theta^l$ em V como uma $(k+l)$ -forma cujo valor em $(k+l)$ vetores de TV é dado por

$$\theta^k \wedge \theta^l(X_1, \dots, X_{(k+l)}) = \sum sgn(\epsilon) \theta^k(X_{\epsilon(1)}, \dots, X_{\epsilon(k)}) \theta^l(X_{\epsilon(k+1)}, \dots, X_{\epsilon(k+l)})$$

onde $\epsilon(1) < \dots < \epsilon(k)$, $\epsilon(k+1) < \dots < \epsilon(k+l)$ e onde $(\epsilon(1), \dots, \epsilon(k), \epsilon(k+1), \dots, \epsilon(k+l))$ é uma permutação dos números $(1, 2, \dots, k+l)$, $sgn(\epsilon) = 1$ se a permutação ϵ for par e (-1) caso a permutação seja ímpar. Soma-se sobre as $C_k^{k+l} = C_l^{k+l}$ parcelas.

Um campo vetorial covariante gera uma 2-forma, isto é, um tensor covariante e antissimétrico de ordem 2 pelo que chamaremos de diferenciação exterior d ,

$$(d\theta)(X_1, X_2) = X_1(\theta(X_2)) - X_2(\theta(X_1)) - \theta([X_1, X_2]).$$

Podemos generalizar a definição de diferencial exterior para k -formas genéricas (ver [64, pag]). As propriedades da diferencial são listadas abaixo:

- i) $dd = 0$,
- ii) $d(\theta_1 + \theta_2) = d\theta_1 + d\theta_2$,
- iii) $d(\theta^k \wedge \theta^l) = d\theta^k \wedge \theta^l + (-1)^k \theta^k \wedge d\theta^l$, onde \wedge denota o produto exterior entre duas formas quaisquer,
- iv) d leva uma k -forma numa $(k+1)$ -forma,
- v) d é linear com relação às constantes.

Obs(7): Se uma certa k -forma θ pode ser escrita como diferencial de alguma $(k-1)$ -forma, então dizemos que θ é exata. Se $d\theta = 0$ para uma certa k -forma, dizemos que θ é fechada.

Podemos ver que neste tratamento ("index-free"), a estrutura diferencial não é determinada pelos sistemas de coordenadas que podem ser homeomorficamente estabelecidos para uma dada variedade, porém é determinada pelo anel ξ das funções diferenciáveis sobre (V, ξ) . Devemos observar que os campos vetoriais contravariantes, por definição, são lineares somente sobre o sub-anel das constantes, ao passo que os campos vetoriais covariantes são lineares sobre todo anel ξ , o que inclusive possibilita a sua definição ponto a ponto.

Obs(8): Definiremos a operação de contração ou produto interno $i_X \theta^k$ de um campo vetorial X de V pela k -forma θ^k do modo

$$i_X \theta^k(X_1, \dots, X_{k-1}) = \theta^k(X, X_1, \dots, X_{k-1});$$

$i_X \theta^k$ é uma $(k-1)$ -forma em V . Vejamos por exemplo o caso em que $\theta = a_i dx^i$ e $X = x^i \partial_i$:

$$\begin{aligned} i_X \theta = \theta(X) &= a_i dx^i(x^j \partial_j) \\ &= a_i x^j dx^i(\partial_j) \\ &= a_i x^j \langle dx^i, \partial_j \rangle \\ &= a_i x^j \partial_j(x^i) = a_i x^i. \end{aligned}$$

Vale também a seguinte relação:

$$i_X(\theta^k \wedge \theta^l) = i_X \theta^k \wedge \theta^l + (-1)^k \theta^k \wedge i_X \theta^l.$$

Obs(9): Podemos definir também a contração $i_\theta T^k$ de uma 1-forma θ em V por um tensor contravariante T^k de ordem K ; $i_\theta T^k$ será um tensor contravariante de ordem $(k-1)$ em V . Vejamos como isto ocorre num sistema de coordenadas local: se $\theta = a_i dx^i$ e

$T^k = \tau^{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}$ então

$$i_\theta T^k = \tau^{i_1, \dots, i_k} \theta(\partial_{i_1}) \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} = a_j \tau^{j, \dots, i_k} \partial_{i_2} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}.$$

B.2 O parêntese de Schouten

O parêntese de Schouten definido para campos contravariantes completamente antissimétricos é dado pela formula²

$$\left[\Sigma^{[\sigma+1]}, \Gamma^{[\gamma+1]} \right]_S^{j_1 \dots j_\sigma h i_1 \dots i_\gamma} = (\sigma + 1) \Sigma^{k[j_1 \dots j_\sigma} \partial_k \Gamma^{h i_1 \dots i_\gamma]} - (\gamma + 1) \Gamma^{k[i_1 \dots i_\gamma} \partial_k \Sigma^{h j_1 \dots j_\sigma]}, \quad (\text{B.6})$$

onde Σ é um tensor de ordem $(\sigma + 1)$ e Γ é de ordem $(\gamma + 1)$. O resultado da operação definida acima é um novo tensor contravariante, completamente antissimétrico (multivetor) de ordem $(\sigma + \gamma + 1)$. Valem as relações [57]

$$\left[\Sigma^{[\sigma+1]}, \Gamma^{[\gamma+1]} \right]_S = (-1)^{(\sigma+1)(\gamma+1)} \left[\Gamma^{[\gamma+1]}, \Sigma^{[\sigma+1]} \right]_S;$$

se γ for par então

$$\left[\Gamma^{[\gamma+1]}, \Gamma^{[\gamma+1]} \right]_S = 0.$$

Verifica-se também uma "identidade de Jacobi"

$$(-1)^{\lambda(\sigma+1)} [\Sigma, [\Gamma, \Lambda]_S]_S + (-1)^{\gamma(\lambda+1)} [\Lambda, [\Sigma, \Gamma]_S]_S + (-1)^{\sigma(\gamma+1)} [\Gamma, [\Lambda, \Sigma]_S]_S = 0.$$

Quando somente bivectores são escolhidos para formar o novo tensor, temos a seguinte definição para o "Schouten bracket" em notação global

$$[X \wedge Y, U \wedge V]_S = [X, U] \wedge Y \wedge V + X \wedge [Y, U] \wedge V + Y \wedge [X, V] \wedge U + X \wedge U \wedge [Y, V],$$

²(p) denota simetria nos p índices internos aos parênteses e [p] denota completa antissimetria.

onde X, Y, U e V são vetores contravariantes. Vale lembrar que o parêntese de Schouten é a única extensão do parêntese de Lie que transforma a álgebra graduada e comutativa dos multivetores em uma álgebra de Lie graduada (com "n-vector fields" de grau $(n-1)$) para a qual a ação adjunta é uma derivação com relação ao produto exterior:

$$[U, V \wedge W]_S = [U, V]_S \wedge W + (-1)^{u(v+1)} V \wedge [U, W]_S.$$

O parêntese de Schouten definido acima, para os multivetores, se relaciona diretamente com uma expressão que generaliza a da derivada exterior das 1-formas:

$$dw_1(X, Y) = Xw_1(Y) - Yw_1(X) - w_1([X, Y]_{\mathcal{L}}).$$

A generalização para uma forma qualquer é obtida a seguir; sendo $w_{\sigma+\lambda+1}$ uma $(\sigma + \lambda + 1)$ -forma, define-se outras duas formas:

$$(w_{\Sigma})_{i_1 \dots i_{\lambda}} = w_{i_1 \dots i_{\lambda} j_0 \dots j_{\sigma}} \Sigma^{j_0 \dots j_{\sigma}}, \quad (w_{\Lambda})_{j_1 \dots j_{\sigma}} = w_{j_1 \dots j_{\sigma} i_0 \dots i_{\lambda}} \Lambda^{i_0 \dots i_{\lambda}},$$

com $(\Sigma \wedge \Lambda)^{j_0 \dots j_{\sigma} i_0 \dots i_{\lambda}} = \Sigma^{j_0 \dots j_{\sigma}} \Lambda^{i_0 \dots i_{\lambda}}$. A expressão da referida generalização é

$$dw(\Sigma \wedge \Lambda) = dw_{\Lambda}(\Sigma) + (-1)^{(\sigma+1)(\lambda+1)} dw_{\Sigma}(\Lambda) - w([\Sigma, \Lambda]_S);$$

observemos que $(\Sigma \wedge \Lambda)$ é um $(\sigma + \lambda + 2)$ -vetor. Como vimos, o parêntese de Schouten é simplesmente uma regra para se obter novos tensores a partir de uma certa família de tensores. Em física, estamos acostumados com algumas operações elementares do cálculo tensorial, como por exemplo a contração de dois tensores, a multiplicação tensorial, etc. Conhecemos também algumas operações não triviais para se obter novos tensores. Um exemplo é o da diferenciação exterior d definida acima, $d : \wedge^n T^*V \longrightarrow \wedge T^*V$, e outro é o da derivada de Lie de um campo X com relação ao campo Y , $\mathcal{L}_Y X \equiv [Y, X]_{\mathcal{L}} = YX - XY$, cuja generalização para tensores de qualquer ordem é

$$[Y, T] \equiv \mathcal{L}_Y T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = Y^h \partial_h T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \sum_{k=1}^r T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots (\sigma) k \dots i_r} \partial_\sigma Y^{ij} + \sum_{k=1}^s T_{j_1 \dots (\sigma) k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{j_k} Y^\sigma;$$

o símbolo $(\sigma)_k$ significa que a k -ésima posição é ocupada por σ e não por i_k ou j_k . Como vimos, esta também pode ser representada por um parêntese. Algumas operações tensoriais definidas por parênteses foram estudadas por Schouten e Nijenhuis [55, 56, 57, 58, 59]. Em particular, eles estudaram alguns tipos de parênteses bilineares definidos a partir de derivadas e que, além de obedecerem a um tipo de identidade de Jacobi (como por exemplo a segunda propriedade do parêntese de Schouten), são completamente independentes de métricas e/ou conexões. O parêntese de Schouten é característico dessa abordagem.

Em 1951 Albert Nijenhuis, trabalhando em um antigo problema geométrico, descobriu um parêntese em termos do qual o problema era agora resolvido de forma completamente nova [58]. O parêntese de Nijenhuis pode ser apresentado pela expressão

$$[\Gamma, \Lambda]_N(X, Y) = [\Gamma(X), \Lambda(Y)]_{\mathcal{L}} + [\Lambda(X), \Gamma(Y)]_{\mathcal{L}} - \Lambda[\Gamma(X), Y]_{\mathcal{L}} - \Gamma[\Lambda(X), Y]_{\mathcal{L}} - \Lambda[X, \Gamma(Y)]_{\mathcal{L}} - \Gamma[X, \Lambda(Y)]_{\mathcal{L}} + \Lambda\Gamma[X, Y]_{\mathcal{L}} + \Gamma\Lambda[X, Y]_{\mathcal{L}},$$

onde Γ e Λ são mapeamentos lineares de um espaço E nele mesmo; em outras palavras, são tensores do tipo (1,1). O parêntese de Nijenhuis de dois tensores (1,1) gera um tensor do tipo (1,2). Associada ao parêntese de Nijenhuis definiremos a seguir a torção de Nijenhuis:

$$T_N(X, Y) \equiv [\Lambda, \Lambda]_N(X, Y) = [\Lambda(X), \Lambda(Y)]_{\mathcal{L}} - \Lambda([\Lambda(X), Y]_{\mathcal{L}} + [X, \Lambda(Y)]_{\mathcal{L}}) + \Lambda \circ \Lambda[X, Y]_{\mathcal{L}}.$$

Esta torção aparece em diversos ramos da matemática e da física, está por exemplo ligada à condição de integrabilidade local de campos tensoriais simétricos. Se Λ determina uma estrutura quase-complexa numa variedade, $\Lambda \circ \Lambda = -1$, a condição necessária e suficiente para que uma estrutura quase-complexa seja complexa é que a torção de Ni-

jenhuis se anule [68, 64, 65]. No caso em que Λ é um campo tensorial idempotente (um projetor) e Q o seu complementar em V , $\Lambda = \mathbf{1} - Q$, eles determinam a cada ponto da variedade TV (fibrado tangente de V) dois espaços vetoriais mutuamente ortogonais, TV_Λ e TV_Q . As condições de integrabilidade desses espaços podem ser postas diretamente em correspondência com a torção de Nijenhuis[55, 57, 59]; por exemplo, a condição necessária e suficiente para que os dois subespaços TV_Λ e TV_Q (ou as distribuições associadas a eles) sejam integráveis simultaneamente é que a torção de Nijenhuis seja nula para quaisquer X e Y de TV ; lembremos ainda que $[\Lambda, \Lambda]_N = [Q, Q]_N$ de modo geral. Na teoria da holonomia, a torção é parte de uma curvatura definida no espaço fibrado de uma variedade compacta [60].

B.3 Álgebras graduadas

Uma álgebra graduada consiste de um sistema de módulos $M = \{\mathcal{L}_n\}$, cujo índice n se refere a um grupo abeliano (em geral Z ou Z_2) para o qual é definida uma operação "•" (produto) bilinear tal que

$$\mu_n \bullet \mu_m \rightarrow \mu_{n+m} \in \mathcal{L}_{n+m},$$

com $\mu_n \in \mathcal{L}_n$ e $\mu_m \in \mathcal{L}_m$. "•" pode ser g-comutativa,

$$\mu_n \bullet \mu_m = (-1)^{nm} \mu_m \bullet \mu_n,$$

e/ou g-associativa,

$$(\mu_n \bullet \mu_m) \bullet \mu_p = \mu_n \bullet (\mu_m \bullet \mu_p).$$

A álgebra exterior das formas diferenciais é um exemplo de álgebra graduada g-comutativa e g-associativa. Um elemento geral de M pode ser escrito como uma soma finita de componentes, sendo que a j -ésima componente pertence ao módulo \mathcal{L}_j , $M = \bigoplus_c \mathcal{L}_n$. O grau de um elemento geral μ será o grau do mais alto índice de módulos que formam a "string" de módulos.

Para o entendimento da teoria das deformações, é importante o conceito de álgebra de Lie graduada. Podem ocorrer dois casos: 1) uma álgebra graduada que é concomitantemente uma álgebra de Lie. O parêntese de Schouten definido para tensores simétricos contravariantes

$$\left[\Sigma^{(\sigma+1)}, \Gamma^{(\gamma+1)} \right]_S^{j_1 \dots j_\sigma \ h \ i_1 \dots i_\gamma} = (\sigma + 1) \Sigma^{k(j_1 \dots j_\sigma} \partial_k \Gamma^{h \ i_1 \dots i_\gamma)} - (\gamma + 1) \Gamma^{k(i_1 \dots i_\gamma} \partial_k \Sigma^{h \ j_1 \dots j_\sigma)},$$

onde Σ é um tensor de ordem $(\sigma + 1)$ e Γ é de ordem $(\gamma + 1)$, é um exemplo desse primeiro caso.

2) Uma álgebra graduada cujo produto (bilinear) é dado pela operação $[\ ,]_{\mathcal{L}g}$ que verifica as relações

$$[\mu_n, \mu_m] = (-1)^{mn+1} [\mu_m, \mu_n]$$

e

$$(-1)^{mp} [[\mu_m, \mu_n], \mu_p] + (-1)^{nm} [[\mu_n, \mu_p], \mu_m] + (-1)^{pn} [[\mu_p, \mu_m], \mu_n] = 0.$$

Um exemplo deste tipo de álgebra de Lie graduada é dado pelo parêntese de Schouten de tensores contravariantes e completamente antissimétricos. A última identidade acima, que faz o papel de identidade de Jacobi para as álgebras graduadas, pode ser disposta de uma forma que nos possibilita uma interpretação muito útil:

$$[\mu_n, [\mu_m, \mu_p]] = [[\mu_n, \mu_m], \mu_p] + (-1)^{np} [\mu_m, [\mu_n, \mu_p]].$$

A expressão acima para μ_n de ordem par pode ser vista como uma derivação de $[\mu_m, \mu_p]$ pois é exatamente uma regra de Leibniz para um produto na álgebra. Para μ_n ímpar, a mesma regra é dita ser uma antiderivação. Em geral um operador $D : M \longrightarrow M$ tal que $D : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_{n+k}$ satisfaça a

$$D(\mu_m \bullet \mu_p) = (D\mu_n) \bullet \mu_p + (-1)^{mk} \mu_m \bullet D\mu_p$$

é dito ser uma derivação (graduada) de grau k . Esta definição vale para todas as álgebras graduadas como definidas acima e não requer g -associatividade nem g -comutatividade.

Um tipo especial de álgebra de Lie graduada e que será útil para se estabelecer alguns resultados da teoria das deformações (ver cap 3) será apresentado a seguir [73]. Sendo $V = \bigoplus V_n$ um espaço vetorial graduado, definimos para V o conjunto dos endomorfismos $End_k(V)$ consistindo de todos os mapeamentos lineares R tais que $RV_n \subset V_{n+k}$; mais especificamente, R é dado por uma "string" de mapeamentos lineares tais que um $R_k^n \in End_k(V)$ leva um certo V_n em V_{n+k} . De modo geral, $End_k(V)$ tem dimensão infinita. Seja $End(V) := \bigoplus End_k(V)$; definindo-se o produto

$$[R_m, R_n] = R_m R_n - (-1)^{mn} R_n R_m,$$

$End(V)$ torna-se uma álgebra de Lie graduada [73]. Verifica-se também que o conjunto das derivações graduadas de V , $Der(V)$, é uma subálgebra de $End(V)$.

Seja $V = \wedge W^*$ a álgebra exterior sobre o espaço W^* , dual a W . Aqui, o produto g -comutativo é dado pela relação $w_m \wedge w_n = (-1)^{mn} w_n \wedge w_m$, $w_m \in V_n = \wedge^n W^*$. Como vimos, podemos considerar aqui a existência de $Der(V)$. Analisemos o caso em que W tem dimensão finita e conseqüentemente V também. Os termos de ordem positiva ($\wedge^n W^*$ com $n \geq 0$) são todos gerados por W^* . Podemos concluir que toda derivação é determinada pela sua ação sobre W^* e assim torna-se possível a seguinte identificação:

$$Der_k(V) \equiv Hom(W^*, \wedge^{k+1} W^*) = \wedge^{k+1} W^* \otimes W.$$

Portanto uma k -derivação corresponde a uma $(k+1)$ -forma em V com valores em W (" W -valued forms"). Podemos definir esta k -derivação em V segundo

$$(D_{\theta_{k+1}} w_l)(X_1, \dots, X_{k+l}) = \sum_P sgn(\epsilon) w_l(\theta_{k+1}(X_{\epsilon(1)}, \dots, X_{\epsilon(k+1)}), X_{\epsilon(k+2)}, \dots, X_{\epsilon(k+l)}),$$

com $X_i \in W$, θ uma $(k+1)$ -forma e w uma 1-forma, ambas com valores em W . Em

[59] $D_\theta w$ é denotada por $w\bar{\wedge}\theta$; esta operação, definida para os elementos de V , gera uma álgebra graduada com a propriedade

$$(w\bar{\wedge}\theta)\bar{\wedge}\psi - w\bar{\wedge}(\theta\bar{\wedge}\psi) = (-1)^{rs} \{(w\bar{\wedge}\psi)\bar{\wedge}\theta - w\bar{\wedge}(\psi\bar{\wedge}\theta)\},$$

onde θ é de grau $(r + 1)$ e ψ é de grau $(s + 1)$.

Um comutador é definido por intermédio da operação $\bar{\wedge}$,

$$[\theta, \psi]^{\bar{\wedge}} := \theta\bar{\wedge}\psi - (-1)^{rs}\psi\bar{\wedge}\theta = D_\psi\theta - (-1)^{rs}D_\theta\psi,$$

e é conhecido como o parêntese de Richardson-Nijenhuis [61, 62]; obedece a uma g -identidade de Jacobi e verifica também a relação $[D_\theta, D_\psi] = D_{[\theta, \psi]^{\bar{\wedge}}}$; também exhibe a subálgebra $Der(V)$, de $End(V)$. Esta regra é conhecida como álgebra de Frölicher-Nijenhuis.

B.4 Cohomologias de álgebras

Seja uma álgebra de Lie graduada L , juntamente com um operador diferencial $\delta : L_k \longrightarrow L_{k+n}$ definido para qualquer K e tal que verifique

$$\delta^2 = 0,$$

$$\delta[\mu_k, \mu_l] = [\delta\mu_k, \mu_l] + (-1)^{kn}[\mu_k, \delta\mu_l],$$

com $\mu_k \in L_k$ e $\mu_l \in L_l$. Vamos considerar o conjunto de μ_k tais que $\delta\mu_k = 0$; seja $Z_k \subset L_k$ este conjunto. Se juntarmos todos os Z_k , pela segunda relação acima obteremos uma subálgebra $Z = Z_k$ de L . Denotando por $B_k \subset L_k$ o conjunto de elementos μ_k que são obtidos por derivação de algum elemento w , as identidades acima implicam que $B_k \subset L_k$ e que se juntarmos todos os B_k obteremos um conjunto B que é um ideal de Z . Os espaços quocientes $H_k(L) = Z_k/B_k$ juntos formam a álgebra graduada $H(L)$ chamada

álgebra de cohomologia de L (relativa ao operador δ). Vamos então dar um exemplo: se L for a álgebra de Frölicher-Nijenhuis de um espaço vetorial W , e μ for um elemento de $Der_1(V)$ tal que $[\mu, \mu]^{\bar{\wedge}} = 0$, então μ definirá um operador diferencial em V quando multiplicar um elemento de V à esquerda e, como vimos anteriormente, também definirá um mapeamento bilinear antissimétrico de $W \times W$ em W . É fácil ver que a identidade $[\mu, \mu]^{\bar{\wedge}} = 0$ na álgebra de Frölicher-Nijenhuis corresponde à identidade de Jacobi clássica em W [73]. Concluindo, μ define uma álgebra de Lie clássica em W .

- [10] J. E. Marsden, O. M. O'Reilly, F. J. Wicklin and B. W. Zombro, "Symmetry, Stability, Geometric Phases, and Mechanical Integrators", (Nonlinear Science Today **1** (1991) 04).
- [11] C. M. Marle, "Poisson Manifolds in Mechanics", (Bifurcation Theory, Mechanics and Physics, MIA, edited by C.P. Bruter, A. Aragnol and A. Lichnerowicz (1983)).
- [12] I. V. Arnold, "Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica", (M.I.R., Moscou, 1978).
- [13] I. V. Arnold, "Sur la Géométrie Différentielle des Groupes de Lie de Dimension Infinie et ses Applications a L'Hidrodynamicque des Fluides Parfaits", (Ann.Inst.Fourier n **16 1** (1966) 319).
- [14] I. V. Arnold, "Small denominators and stability problems in celestial mechanics", (Uspek. Matem. Nauk **18** (1963) 85).
- [15] J. M. Souriau, "Structure des Systèmes Dynamiques", (Dunod, Paris (1970)).
- [16] W. Muschik, "Axiome für Zwangskräfte bei geschuindigkeitsabhängigen Nebenbedingungen", (ZAMM **60** (1980)).
- [17] G. Prange, "Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik", (Encykl. d. Math. Wissensch. IV. 2 (1933)).
- [18] F. Gantmacher, "Lectures in Analytical Mechanics", (M.I.R.,Moscou, 1970).
- [19] R. Montgomery, "Isoholonomic Problems and Some Applications", (Commun. Math. Phys **128** (1990) 565).
- [20] D. Lewis and J. C. Simo, "Nonlinear stability of rotating pseudo-rigid bodies", (Proc. Roy. Soc. A **427** (1990) 218).
- [21] M. V. Berry, "Regular and Irregular Motion", (Phys. Trans. R. Soc. London A **287** (1977) 237).

- [22] T. R. Kane and D. A. Lavinson, "Multibody Dynamics", (ASME Journal of Applied Mechanics **50** (1983) 1071).
- [23] C. Lanczos, "The Variational Principles of Mechanics", (fourth ed., University of Toronto Press. Canada (1974)).
- [24] R. Abraham and J. E. Marsden, "Foundations of Mechanics", second edition, (Benjam-Cummings Reading, Massaschusetts, 1982).
- [25] J. Sniatycki, "Dirac brackets in geometric dynamics", (Ann. Inst. H. Poincaré A **20** (1974) 365).
- [26] H. Rund, "The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations", N. York (1973); Colloq. International du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg (1953).
- [27] P. Pitanga and K. Mundim, "Projector in Constrained Quantum Dynamics", (II Nuovo Cimento A **101** (1989) 345).
- [28] P. Pitanga e C. M. do Amaral, "Campos Projetoires na Dinâmica Vinculada", (Rev.Bras.Fis. **3** (1982) 473).
- [29] P. Pitanga, "Symplectic Projector in Constrained Systems", (II Nuovo Cimento A **103** (1990) 1529).
- [30] P. Pitanga, Tese de Doutorado, (CBPF, (1990)).
- [31] P. Pitanga, "Projector Method and Constrained Systems", (II Nuovo Cimento A **109** (1994) 113).
- [32] P. Pitanga, "Quantization of a Nonholonomic System with Symmetry", (II Nuovo Cimento A **109** (1994) 583).
- [33] M. A. Santos, J. C. Mello and P. Pitanga, "Physical variables in gauge theories", (Z. Phys. C - Particles and Fields **55** (1992) 271).

- [34] René W. Weber, “Hamiltonian Systems with Constraints and their Meaning in Mechanics”, (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Physik* **31** 1980).
- [35] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics”, (*Proc. Roy. Soc. A* **246** (1958) 326).
- [36] P. A. M. Dirac, “Quantized Singularities in the Eletromagnetic Field”, (*Proc. Camb. Phil. Soc A* **127** (1932) 60).
- [37] P. A. M. Dirac, (*Proc. Roy. Soc. A* **246** (1958) 333).
- [38] M. E. U. Costa, H. O. Giratti and T. J. M. Simoes, (*Phys. Rev D* **32** (1985) 405).
- [39] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovinsk, (*Phys. Lett. B* **55** (1975) 224), (*Phys.Lett. B* **72** (1978) 343), I. A. Batalin and G. A. Vilkovinsk, (*Phys.Lett. B* **69** (1977) 309).
- [40] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla and K. D. Rothe, “Non-perturbative methods in 2-dimensional Quantum field Theory”, (*World Scientific* (1991)).
- [41] A. Niemi, “Symplectic Geometry of Strings”, (*Ann. Phys.* **187** (1988) 369).
- [42] D. J. Simms and N. M. Woodhouse, “Lectures in Geometric Quantization”, (*Lectures Notes in Physics* 53. (Springer, 1976)).
- [43] R. J. Blattner, “Quantization and Representation Theory, in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces”, (*Proc. Sym. Pure. Math* (Providence) **26** (1973) 147).
- [44] A. Weinstein, “The Local Structure of Poisson Manifold”, (*J.Diff.Geom.* **18** (1983) 523).
- [45] Res Jost, “Poisson Brackets (An Unpedagogical Lecture)”, (*Rev. of Mod. Phys.* april (1964) 572).
- [46] J. Grabowski, G. Marmo, A. M. Perelomov, “Poisson Structures: Towards a Classification” (*Mod. Phys. Lett.* **8** (1993) 1719).

- [47] E. K. Sklyanin, "Algebraic Structure connected with the Yang-Baxter equation", (Funct. Anal. Appl. **16** (1982) 263).
- [48] S. Okubo, "Nijenhuis tensor, BRST cohomology, and related algebras", (preprint, Department of Physics and Astronomy, The University of Rochester (04/07/1989)).
- [49] A. Lichnerowicz, "Les Variétés de Poisson et leurs Algèbres de Lie Associées, (J. Diff. Geom. **12** (1977) 253).
- [50] A. Lichnerowicz, "Quantum Mechanics and Deformations of Geometrical Dynamics", (Quantum Theory, Groups, Fields and Particles. 3-82 (1983) by D. Reidel Publishing Company; editor A. O. Barut).
- [51] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, "Deformation Theory and Quantization I and II", (Annals of Physics **111** (1978) 61-110).
- [52] A. Avez and A. Lichnerowicz, "Dérivations et premier groupe de cohomologie pour des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique, (C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **275** (1972) 113).
- [53] A. Lichnerowicz, "Cohomologie 1-différentiable d'algèbres de Lie associées à une variété symplectique, (C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **277** (1973) 215).
- [54] C. Chevalley and S. Eilemberg, "Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras", (Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948) 85).
- [55] J. A. Schouten, "Ricci Calculus", (Springer, Berlin (1954)).
- [56] J. A. Schouten, "On the differential operators of first order in tensor calculus", (Conv.Geom.Diff. Ed.Cremonese, Roma (1954)).
- [57] A. Nijenhuis, "Jacobi type Identities for Bilinear Diferential Concomitants of Certain Tensor Fields", (Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. A **58** (1955) 390).

- [58] A. Nijenhuis, “Invariant Differentiation Techniques, (Geometrodynamics Proceedings, ed (1985). edited by A.Pràstaro, World Scientific).
- [59] A. Nijenhuis and A. Frölicher, “Theory of Vector-valued differential forms”, (I. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. A **59** (1956) 338).
- [60] A. Nijenhuis, “On the holonomy groups of linear connections”, (IA, IB - Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam A **56** (1953) 233); (II - Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam A **57** (1954) 17).
- [61] A. Nijenhuis and R. W. Richardson, “Cohomology and deformations in graded Lie algebras”, (Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966) 01).
- [62] A. Nijenhuis and R. W. Richardson, “Deformations of Lie algebras structures”, (J. Math. Mech. **17** (1967) 89).
- [63] Ya. I. Granovski, I. M. Lutzenko and A. S. Zhedanov, (Ann. Phys. **217** (1992) 01).
- [64] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, Graduate Student Series in Physics. Editora Adam Hilger. (New York, 1990).
- [65] C. Nash and S. Sen, “Topology and Geometry for Physicists”, (Academic Press, Inc. Orlando, Flórida (1983)).
- [66] B. F. Schutz, “Geometrical Methods of Mathematical Physics”,(Cambridge University Press, Cambridge (1980)).
- [67] M. Daniel and C. M. Viallet, “The geometrical setting of Gauge Theories of the Yang-Mills type, (Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 175).
- [68] P. Candelas, “Lectures on Complex Manifolds”, Superstrings and Grand Unification, proceeding of the Winter School on High Energy Physics, edited by T. Pradhan, 1988, World Scientific).

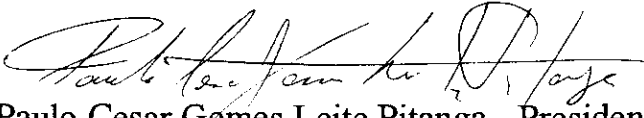
- [69] H. Weyl, “The Theory of Groups and Quantum Mechanics”, (Dover, New York, (1931)).
- [70] E. P. Wigner, (Phys. Rev. **40** (1932) 749).
- [71] J. E. Moyal, (Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99).
- [72] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, “Poisson-Nijenhuis structures”, (Ann. Inst. Henri Poincaré **53** (1990) 35).
- [73] L. Corwin, Y. Ne’eman and S. Sternberg, “Graded Lie algebras in Mathematics and Physics (Bose-Fermi symmetry)”, (Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 573).
- [74] M. Gerstenhaber, “On the deformations of rings and algebras”, (Ann. Math. **79** (1964) 59).
- [75] M. A. Melvin, (Bull. Am. Phys. Soc. **7** (1962) 493).
- [76] M. A. Melvin, (Bull. Am. Phys. Soc. **8** (1963) 356).
- [77] R. Hermann, (Commun. Math. Phys. **2** (1966) 251, **3** (1966) 53, **5** (1967) 131, **6** (1967) 157); M. Levy-Nahas, (J. Math. Phys. **8** (1967) 1211, Commun. Math. Phys. **9** (1968) 242).
- [78] C. P. Boyer, “Deformations of Lie Algebras and Groups and their Applications”, (Rev. Mex. Phys. **23** (1974) 99).
- [79] Y. Dothan, M. Gell-Mann and Y. Ne’eman, (Phys. Lett. **17** (1965) 148; M. Brandet and C. Itzykson, (Rev. Mod. Phys. **38** (1966) 330); L. Weaver and L. C. Biedenharn, (Nucl. Phys. A **185** (1972) 01); C. P. Boyer and K. B. Wolf, (Nuovo Cimento lett. **8** (1973) 458);

- [80] J. Rosen and P. Roman, (*J. Math. Phys.* **2** (1966) 2072; A. Chakrabarti, (*J. Math. Phys.* **9** (1968) 2087); A. Sankaranarayanan, (*J. Math.* **9** (1968) 611); J. G. Nagel and K. T. Shah, (*J. Math. Phys.* **11** (1970) 1779); R. Gilmore, (*J. Math. Phys.* **13** (1972) 883).
- [81] C. P. Boyer and K. B. Wolf, (*J. Math. Phys.* **14** (1973) 1853).
- [82] J. Niederle, "Quantization as Mapping and as Deformation", (*Quantum Theory, Groups, Fields and Particles*, in *Mathematical Physics Studies* vol 4, edited by A. O. Barut, D. Reidel Publishing Company (1983)).

**“VARIÉDADE DE POISSON COM VÍNCULOS DE
SEGUNDA-CLASSE”**

Cláudio Anael Gomes Sasaki

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Paulo Cesar Gomes Leite Pitanga - Presidente


Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira - Presidente


Juan Alberto Mignaco

J. A. Helayël - Neto
José Abdalla Helayël-Neto

Rio de Janeiro, 04 de outubro de 1994