

1994/03

D362

TESE DE
MESTRADO

TEORIA NÃO LOCAL
DA GRAVITAÇÃO

Vitorio Alberto De Lorenci

530.11
D364

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1994

Um pulso de coração e frio percorrendo o campo...

Dedicatória

A meu avô Vitorio De Lorenci, pela minha formação humana.

Agradecimentos

- Ao Mario Novello pela orientação, incentivo e apoio na elaboração desta tese;
- Ao Mestre Ernesto von Rückert por guiar meus primeiros passos no mundo da física teórica;
- À Eliane Valença, pelos laços de amor e carinho que me acompanharam durante a elaboração deste trabalho;
- Aos meus grandes amigos, José Arnaldo Redinz e Renato Klippert Barcellos, por todo apoio prestado;
- A Dra. Anna C. C. Fraga cuja expectativa de minha vitória sempre me valeu de grande incentivo;
- Aos meus pais Adilenes e Sebastião De Lorenci e ao meu irmão Ivan C. De Lorenci, por todo o carinho e apoio;
- A todos aqueles que de alguma forma vieram a contribuir para o desenvolvimento desta tese, em especial à Myriam S. Coutinho por toda a compreensão e apoio junto à CFC;
- Ao CNPq pela ajuda financeira.

Resumo

Teoria Não Local da Gravitação

Construímos um modelo para a descrição do campo gravitacional por meio de uma formulação não local preservando o seu caráter não linear.

Abstract

Non Local Theory of Gravitation

We construct a model to describe the gravitational field by non-local formulation preserving its non-linear characteristic.

Índice

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Notação e convenções	viii
Introdução	1
1 Relatividade Geral: Alguns Aspectos.	3
1.1 Relações entre os tensores momentum-energia da matéria e gravitação. . .	3
1.2 Condições de coordenadas.	7
1.3 Aproximação linear às equações de campo.	8
2 Teoria de Deser e Laurent para o Campo Gravitacional e o Operador de Projeção $P_{\mu\nu}$.	13
2.1 Equações de campo para a teoria de Deser e Laurent.	14
2.2 O operador de projeção.	17
3 Teoria Não-Local da Gravitação.	21
3.1 As equações de campo.	22

3.2	Solução para simetria esférica, caso estático.	25
3.3	Equações para partículas materiais.	43
3.4	Elemento de linha.	47
3.5	Testes observacionais clássicos.	51
	Conclusão	62
	Apêndice A - Algumas operações envolvendo Δ^{-1}.	63
	Apêndice B - Termos necessários à resolução de $\Delta\sigma_{\alpha\beta}$.	67
	Referências	69

Notação e convenções

1. A métrica utilizada para o espaço plano é definida como $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$;

2. Índices:

(a) gregos minúsculos ($\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3$) são utilizados em componentes de tensores em base de coordenadas;

(b) latinos minúsculos ($i, j \dots = 1, 2, 3$) são utilizados em componentes espaciais de tensores em base de coordenadas;

3. Derivadas:

(a) Derivações ordinárias (parciais) são usualmente denotadas pelo símbolo “|”:

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} \equiv V_{\mu|\nu};$$

(b) Derivações covariantes são denotadas pelo símbolo “||”:

$$\frac{DV^\mu}{Dx^\nu} \equiv V^\mu_{||\nu};$$

4. A conexão afim é definida como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu|\mu} + g_{\kappa\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\kappa});$$

5. Derivada covariante de um tensor contravariante V^μ :

$$V^\mu{}_{|\nu} = V^\mu{}_{;\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda;$$

6. Derivada covariante de um tensor covariante V_μ :

$$V_{\mu|\nu} = V_{\mu;\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda.$$

Introdução

O campo gravitacional, como tratado pela teoria da relatividade geral [1], é considerado auto-interativo, de forma tal que as equações que o descrevem são altamente não lineares. Os efeitos desta não linearidade trazem resultados que podem ser comprovados por observações experimentais, quais sejam, os quatro testes clássicos [11]. Todavia, um modelo linear para a gravitação foi desenvolvido por Deser e Laurent [2], em seu original artigo de 1968 - *Gravitation Without self-interaction*. Tal modelo é construído utilizando um operador de projeção de divergência ordinária nula sobre o tensor momentum-energia da matéria (chamaremos de projeções livres), e estas projeções introduzem não localidade nas equações que descrevem o campo. Por meio desta construção não local, é possível se obter alguns dos resultados que a teoria da relatividade indica como sendo devidos a não linearidade, como a precessão do periélio por exemplo. No entanto, alguns problemas surgem quando da descrição de ondas gravitacionais, problemas estes oriundos do fato de, neste modelo, as ondas gravitacionais não interagirem diretamente com a gravitação.

Neste trabalho investigamos a possibilidade de tratar o campo gravitacional por meio de uma formulação não local preservando o seu carácter não linear. Nesta formulação, consideramos projeções livres do tensor momentum-energia da matéria e da gravitação, onde este último foi construído considerando o primeiro termo não linear da série infinita que compõe o lado direito das equações de Einstein quando escritas na forma expandida [9]. A atuação deste operador de projeção sobre os tensores de momentum-energia equivale

a eliminar as partes não conservadas destes objetos. Quando tais objetos são projetados, ganha-se uma liberdade na teoria, introduzida por certos parâmetros que são coeficientes dos termos projetores. Desta maneira existe uma classe de teorias possíveis nesta formulação, cada qual para um particular conjunto de valores que os parâmetros podem assumir. Nós verificamos, no desenvolvimento do trabalho, que apenas um único conjunto de valores destes parâmetros são permitidos a fim de termos uma boa descrição da gravitação. Estes valores tornam possível, nesta formulação, conciliar a teoria com os resultados experimentais clássicos. Resulta assim, uma teoria unívoca para este fenômeno.

Capítulo 1

Relatividade Geral: Alguns Aspectos.

1.1 Relações entre os tensores momentum-energia da matéria e gravitação.

As equações fundamentais para o campo gravitacional estabelecidas pela teoria da gravitação de Einstein[1] são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde o tensor $T_{\mu\nu}$ compreende a contribuição de momentum-energia de todos os campos presentes no sistema físico os quais descreve, exceto o campo gravitacional. Tal objeto será chamado de tensor momentum-energia da matéria. Se notarmos o lado esquerdo das equações de campo (1.1) usando a definição do tensor de Einstein, as reescreveremos na forma

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Pode-se mostrar facilmente que a divergência covariante deste tensor ($G_{\mu\nu}$) é identicamente nula, donde concluímos que a divergência covariante do tensor da matéria também deve ser nula, a fim de satisfazer as equações dadas em (1.2). Esta importante propriedade do tensor de Einstein estabelece as equações de conservação de momentum-energia, matematicamente expressas pelas relações que seguem,

$$G^{\mu\nu}{}_{||\mu} \equiv 0 \Rightarrow T^{\mu\nu}{}_{||\mu} = 0, \quad (1.3)$$

onde o símbolo $||$ indica derivação covariante.

Explicitamente, podemos escrever a igualdade acima como:

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = T^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T^{\mu\alpha} = 0. \quad (1.4)$$

Mas,

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} \right), \quad (1.5)$$

com

$$g \equiv | \det(g_{\alpha\beta}) |.$$

Desta forma,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) = -\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} (\sqrt{g} T^{\alpha\nu}). \quad (1.6)$$

Vamos definir, na expressão anterior, a densidade tensorial de momentum-energia através do objeto

$$\tau^{\mu\nu} \equiv \sqrt{g} T^{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tau^{\mu\nu} = -\Gamma_{\alpha\nu}^\mu \tau^{\alpha\nu}. \quad (1.8)$$

Usando a definição do símbolo de Christoffel e a propriedade de simetria de $\tau^{\mu\nu}$, chegamos à expressão

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\mu \tau^{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (2g_{\rho\nu|\alpha} - g_{\alpha\nu|\rho}) \tau^{\alpha\nu}, \quad (1.9)$$

que após alguns cálculos resulta em

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\mu \tau^{\alpha\nu} = -\tau^{\alpha\mu}{}_{|\alpha} + g^{\mu\rho} \tau^{\alpha}{}_{\rho|\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\nu}{}^{|\mu} \tau^{\alpha\nu}. \quad (1.10)$$

Comparando esta última com (1.8) teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\tau_\beta{}^\alpha) = \frac{1}{2} \tau^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g_{\alpha\nu}). \quad (1.11)$$

Se quisermos estabelecer as leis de conservação de momentum-energia para um sistema físico fechado, devemos somar ao tensor da matéria o objeto que carregue a informação do conteúdo energético do campo gravitacional[10]. Tal objeto é denominado pseudo-tensor momentum-energia do campo gravitacional. Será visto mais tarde porque não se trata realmente de um verdadeiro tensor. Poderemos assim, escrever a densidade pseudo-tensorial total de momentum-energia, $T^{\alpha\beta}$, como a soma

$$T_\beta{}^\alpha = \tau_\beta{}^\alpha + \sqrt{g} t_\beta{}^\alpha. \quad (1.12)$$

Resumidamente teremos:

- $T_\beta{}^\alpha$ - densidade de pseudo-tensor momentum-energia total;
- $\tau_\beta{}^\alpha$ - densidade de tensor momentum-energia da matéria;

- $\sqrt{g}t_\beta^\alpha$ - densidade de pseudo-tensor momentum-energia do campo gravitacional.

Então, poderemos escrever as leis de conservação na forma:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\mathcal{T}_\beta^\alpha) = 0. \quad (1.13)$$

Ou, usando (1.12),

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\tau_\beta^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}t_\beta^\alpha) = 0, \quad (1.14)$$

que pode ser reescrita, introduzindo (1.11), como

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}t_\beta^\alpha) = -\frac{1}{2}\tau^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g_{\alpha\nu}). \quad (1.15)$$

Esta estabelece uma relação entre a densidade pseudo-tensorial de momentum energia do campo gravitacional e o tensor momentum-energia da matéria.

Como já citamos anteriormente, vamos verificar porque $t_{\alpha\beta}$ não é um verdadeiro tensor[3]. Não nos deteremos aqui em procurar estabelecer uma prova rigorosa para este fato, vamos apenas mostrar uma das várias maneiras de se entender isto. A equação (1.15) determina uma lei de conservação global, dada a condição de derivada ordinária. Se partirmos da hipótese de que $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ seja um verdadeiro tensor, logo, a sua derivada ordinária não será. Desta forma, se $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{|\alpha}$ não é um tensor, poderemos sempre encontrar um sistema de coordenadas no qual $\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{|\alpha} \neq 0$, porém, de (1.13) vemos que isto não é verdade, ou seja, a divergência ordinária de $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ é sempre nula. Concluimos então que nossa hipótese é falsa e $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ não é um verdadeiro tensor. E como este é escrito como a soma de dois objetos, dos quais o primeiro é o conhecido tensor momentum-energia da matéria, logo, o segundo objeto não poderá ser um tensor. Com isto, concluimos nossa prova de que a quantidade que carrega a informação a respeito do conteúdo de momentum-energia do

campo gravitacional não pode ser um verdadeiro tensor.

1.2 Condições de coordenadas.

O tensor $G_{\mu\nu}$, introduzido pela equação (1.2), possui 10 componentes independentes ($G_{\mu\nu}$ é simétrico), resultando em 10 equações algebricamente independentes (equações (1.2)). Uma vez que $G_{\mu\nu}$ é escrito em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que possui também 10 componentes independentes, teríamos o problema completamente resolvido, com 10 equações e 10 incógnitas. Porém, da divergência covariante nula do tensor de Einstein, encontramos 4 identidades diferenciais dadas por (1.3):

$$G^{\mu\nu}{}_{||\mu} \equiv 0.$$

Desta maneira, o número de equações independentes se reduz a 6, pois $G^{\mu\nu}{}_{||\mu}$ estabelece 4 graus de liberdade nas 10 componentes a serem determinadas do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Estes 4 graus de liberdade correspondem ao fato que se $g_{\mu\nu}$ é solução das equações de Einstein, então, o tensor obtido por transformações de coordenadas também o será. Tal transformação envolve 4 funções arbitrárias $x'^{\mu}(x)$, fornecendo 4 graus de liberdade à solução de (1.2). Nós podemos eliminar a ambiguidade no tensor métrico escolhendo um particular sistema de coordenadas, e a escolha de tal sistema pode ser expressa em 4 condições, as quais, quando somadas às 6 equações independentes, determina o sistema completamente, sem ambiguidades.

Uma escolha interessante de um sistema de coordenadas, introduzido por Einstein, é representado pelas condições de coordenadas harmônicas:

$$\Gamma^{\alpha} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = 0. \tag{1.16}$$

Pode ser mostrado que (1.16) constitui na escolha de um particular sistema de coordenadas¹ se considerarmos as equações de transformação para a conexão afim,

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}{}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \quad (1.17)$$

Contraindo esta última com $g'^{\mu\nu}$, teremos:

$$\Gamma'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho} - g'^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}}. \quad (1.18)$$

Daqui, se Γ^{ρ} não for nulo, podemos sempre definir um novo sistema de coordenadas $\{x'^{\alpha}\}$ resolvendo as equações diferenciais parciais de 2-ordem,

$$g'^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\rho}, \quad (1.19)$$

tal que, neste novo sistema $\{x'\}$, $\Gamma'^{\lambda} = 0$.

1.3 Aproximação linear às equações de campo.

Vamos considerar as equações linearizadas para o campo gravitacional, seguindo o procedimento adotado por Einstein em 1918.

Escreveremos o tensor métrico como a soma da métrica do espaço plano, $\eta_{\mu\nu}$, e um tensor $\phi_{\mu\nu}$ representando o campo gravitacional, considerando este último como uma pequena perturbação. Assim,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

¹Uma transformação geral de coordenadas não deixa a condição $\Gamma^{\alpha} = 0$ invariante, desde que, como Γ^{α} não é um tensor, sempre poderemos encontrar um particular sistema de coordenadas onde $\Gamma^{\alpha} \neq 0$.

com inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \phi^{\mu\nu} + O(2). \quad (1.21)$$

Utilizando (1.20) e (1.21) nas equações de campo (1.1), e negligenciando os termos de ordem 2 ($O(2)$), encontramos:

$$\square\phi_{\mu\nu} - \phi^\alpha_{\mu|\alpha\nu} - \phi^\alpha_{\nu|\alpha\mu} + \phi^\alpha_{\alpha|\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(\square\phi^\alpha_\alpha - \phi^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta}) = -kT_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Nesta equação, e em todas as que seguem para a teoria linear, os índices são elevados e abaixados por operação da métrica de fundo $\eta^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. As condições de coordenadas harmônicas escritas nesta métrica resultam em:

$$\frac{\partial\phi_\alpha^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_\mu^\mu}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (1.23)$$

Introduzindo (1.23) em (1.22), encontramos as equações de campo reescritas na seguinte forma:

$$\square\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square\phi^\alpha_\alpha = -kT_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

Passemos, então, ao estudo das leis de conservação de momentum-energia para esta aproximação linear. Uma vez que a métrica de fundo agora é a métrica de Minkowski, identificamos as densidades tensoriais com os tensores para este caso:

$$\sqrt{\eta}T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta};$$

$$\sqrt{\eta}t^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta}.$$

onde,

$$\eta \equiv | \det(\eta_{\alpha\beta}) | = 1$$

A lei de conservação de momentum-energia, expressa pela equação (1.15), se reduz a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (t_\beta^\alpha) = -\frac{1}{2} T^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g_{\alpha\nu}). \quad (1.25)$$

Poderemos escrever as equações de campo de maneira ainda mais simplificada, escolhendo convenientemente um novo objeto para representar o campo gravitacional. Uma ótima escolha para este objeto é motivada pela equação (1.24), e escreveremos da seguinte forma:

$$h_{\alpha\beta} \equiv \phi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \phi^\lambda{}_\lambda.$$

Ou, equivalentemente,

$$\phi_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h^\lambda{}_\lambda. \quad (1.26)$$

Então, as equações de campo são reescritas nesta nova definição simplesmente como,

$$\square h_{\alpha\beta} = -k T_{\alpha\beta}. \quad (1.27)$$

E as condições de coordenadas harmônicas (1.23), nesta escolha de $\phi_{\alpha\beta}$, se reduzem a

$$\frac{\partial h^\mu{}_\alpha}{\partial x^\mu} = 0. \quad (1.28)$$

Finalmente, reescrevemos a relação entre os tensores momentum-energia, dada por

(1.25), como

$$\frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) T^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \right) T^{\gamma}_{\gamma}. \quad (1.29)$$

Reescrevendo esta última numa notação mais prática e introduzindo as equações (1.27), encontramos

$$t_{\beta\alpha}{}^{|\alpha} = \frac{1}{2k} \left[h_{\alpha\nu|\beta} \square h^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\lambda|\beta} \square h^{\alpha}_{\alpha} \right], \quad (1.30)$$

que pode ainda ser expressa explicitando uma derivação, resultando:

$$\frac{\partial t_{\beta\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[h_{\rho\nu|\beta} h^{\rho\nu}{}_{|\alpha} - \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\lambda|\beta} h^{\rho}{}_{\rho|\alpha} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\alpha} \left(h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\lambda|\sigma} h^{\rho}{}_{\rho}{}^{|\sigma} \right) \right],$$

donde apresentamos uma forma explícita para $t_{\alpha\beta}$:

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2k} \left[h_{\rho\nu|\beta} h^{\rho\nu}{}_{|\alpha} - \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\lambda|\beta} h^{\rho}{}_{\rho|\alpha} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\alpha} \left(h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\lambda|\sigma} h^{\rho}{}_{\rho}{}^{|\sigma} \right) \right]. \quad (1.31)$$

Então, (1.31) constitui o tensor momentum-energia do campo gravitacional, considerada a aproximação linear.

Se considerarmos uma expansão em todas as ordens na métrica, em $G_{\mu\nu}$, e mantivermos apenas o primeiro termo do lado esquerdo (que denotaremos por $G_{\mu\nu}^{(L)}$, onde o índice (L) indica a linearidade deste objeto), poderemos escrever as equações de campo da seguinte maneira equivalente[9],

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -k \left\{ T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(2)} + t_{\mu\nu}^{(3)} + t_{\mu\nu}^{(4)} + \dots \right\}. \quad (1.32)$$

O segundo termo da expansão, $t_{\mu\nu}^{(2)}$, identificamos com (1.31). Os demais também podem ser construídos recursivamente, derivando em cada ordem o tensor momentum-energia e somando-o às equações de campo, formando uma série infinita. Uma importante car-

acterística desta construção é que encontramos uma forma para as leis de conservação, desde que $G_{\mu\nu}^{(L)}$ apresenta divergência ordinária indenticamente nula. Desta forma, o lado direito de (1.32) também deve satisfazer a este requisito. Isto já foi mostrado por outro caminho através da equação (1.16).

Capítulo 2

Teoria de Deser e Laurent para o Campo Gravitacional e o Operador de Projeção $P_{\mu\nu}$.

Em seu artigo de 1968 (*Gravitation without Self-Interaction*), S. Deser e B. E. Laurent[2], estudaram a possibilidade de se descrever o campo gravitacional como um campo linear de spin-2. Todavia, da teoria de Fierz-Pauli, quando considerado o termo fonte para tal campo, este deve satisfazer ao critério de divergência ordinária nula. Isto pode ser compreendido facilmente, verificando as equações linearizadas de Einstein (desenvolvidas no capítulo anterior), desde que as mesmas são equivalentes às da teoria de Fierz, tomando a divergência do lado esquerdo de (1.22), que resulta ser identicamente nula. Para o caso da gravitação, o tensor momentum-energia da matéria não se conserva separadamente[8, 5, 6], não sendo, desta maneira, um bom objeto para se descrever o termo fonte para esta teoria. Deser e Laurent resolveram este problema introduzindo um operador de projeção de divergência nula sobre o tensor da matéria, obtendo assim uma consistência matemática nesta formulação. Vamos fazer um breve retrospecto, nas seções que seguem,

de alguns tópicos desta formulação.

2.1 Equações de campo para a teoria de Deser e Laurent.

As equações para campos de spin-2, sem fonte, são dada pelas equações de Fierz-Pauli, ou, como já citamos anteriormente, pelas equações linearizadas da relatividade geral:

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = 0, \quad (2.1)$$

onde

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = \square\phi_{\mu\nu} - \phi_{\mu|\alpha\nu}^{\alpha} - \phi_{\nu|\alpha\mu}^{\alpha} + \phi_{\alpha|\mu\nu}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}(\square\phi_{\alpha}^{\alpha} - \phi_{|\alpha\beta}^{\alpha\beta}). \quad (2.2)$$

Utilizamos a métrica de Minkowski ($\eta^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$) para efetuar as contrações. $G_{\mu\nu}^{(L)}$ é invariante sob transformações de gauge

$$\phi'_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} + \xi_{\mu|\nu} + \xi_{\nu|\mu}, \quad (2.3)$$

(ξ_{μ} funções arbitrárias) e satisfaz a identidade diferencial

$$G_{\mu\nu}^{(L)|\nu} \equiv 0. \quad (2.4)$$

Se utilizamos um termo representando a fonte do campo gravitacional, vemos da identidade (2.4) que este deve apresentar divergência nula. Existem maneiras distintas de se construir um objeto que satisfaça a esta relação de conservação. Neste caso, vamos considerar projeções livres do tensor de matéria (por projeções livres chamaremos a característica de divergência ordinária nula dos operadores que utilizaremos). Então, teremos

as equações de campo dadas por:

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -kJ_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

onde k é a constante de acoplamento e

$$J_{\mu\nu} = (P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta} + pP_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + qP_{\mu\nu}P_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

com

$$P_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \square^{-1}\partial_\mu\partial_\nu, \quad (2.7)$$

e¹

$$\square^{-1}\phi \equiv \int d^4x' G(x, x')\phi(x').$$

Deixaremos para a próxima seção a demonstração de que este operador é um projetor. (2.6) é o objeto mais geral possível construído por projeções de (2.7) e que apresenta divergência identicamente nula.

Vamos entender porque dizemos que o operador $P_{\mu\nu}$, definido em (2.7), possui divergência ordinária nula. Para isso, consideremos uma função arbitrária f . Se aplicarmos o operador de projecção,

$$P_{\mu\nu}f = \eta_{\mu\nu}f - \square^{-1}\partial_\mu\partial_\nu f.$$

¹ $G(x, x')$ é a função de Green do operador d'Alambertiano. Na próxima seção, examinaremos melhor tal função.

Tomando a divergência ordinária deste objeto,

$$\partial^\mu (P_{\mu\nu} f) = \partial^\mu (\eta_{\mu\nu} f) - \partial^\mu (\square^{-1} \partial_\mu \partial_\nu f).$$

Admitindo que f seja bem comportada, e entendendo por bem comportada qualquer função que varie ao menos com o inverso da distância ($f \sim \frac{1}{r}$), poderemos comutar os objetos ∂_μ com \square^{-1} , como será melhor entendido na próxima seção. Logo,

$$\partial^\mu (P_{\mu\nu} f) = \partial_\nu f - \square^{-1} \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu f,$$

e desde que

$$\partial_\mu \partial^\mu \equiv \square$$

e

$$\square \square^{-1} = 1,$$

concluimos que

$$\partial^\mu (P_{\mu\nu} f) \equiv 0.$$

Assim, da construção do termo fonte para esta teoria, resulta:

$$J_{\mu\nu}{}^{|\nu} \equiv 0.$$

Desta forma, (2.5) constituem as equações de uma teoria linear coerente para campos

de spin-2. Todavia, vemos da construção do objeto representando a fonte do campo, que esta formulação apresenta uma liberdade com respeito a escolha de valores dos parâmetros p e q . Então, um próximo passo seria relacionar as predições da mesma em função destes parâmetros e, a partir daí, fixá-los de modo a corresponder à observação experimental. Uma vez fixado estes valores, teremos encontrado uma teoria unívoca para a descrição do campo gravitacional, e outros aspectos poderiam ser investigados.

Esta teoria, através de uma escolha adequada dos parâmetros, pode ser formulada localmente, com a não localidade evitada por uso de um gauge conveniente. Não nos estenderemos em outros, dos vários aspectos que podem ser estudados para este tipo de construção, uma vez que só nos interessaremos neste trabalho na formulação unívoca de uma teoria mais completa, que preserve a fundamental característica do campo gravitacional, a saber, a auto-interação (expressa nas equações por meio da não linearidade das mesmas).

2.2 O operador de projeção.

Vamos apresentar, nesta seção, a demonstração de que o operador introduzido pela definição (2.7) é um operador de projeção, como vimos denominando.

Reescrevendo (2.7), de modo a explicitar o termo envolvendo \square^{-1} ,

$$P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \int d^4x' G(x, x') \partial'_\mu \partial'_\nu, \quad (2.8)$$

onde $G(x, x')$ é a função de Green a dois pontos[14], e devemos manter em mente que $G(x, x') \equiv G(x^\mu, x'^\mu)$.

Procuraremos mostrar que $P_{\mu\nu} P^\nu_\alpha \phi = P_{\mu\alpha} \phi$, com ϕ sendo uma função arbitrária. No momento adequado, especificaremos as condições que devem satisfazer tais funções.

Assim, usando (2.8), escreveremos:

$$P_{\mu\nu}P^\nu_\alpha\phi = \left\{ \left(\eta_{\mu\nu} - \int d^4x' G(x, x') \partial'_\mu \partial'_\nu \right) \left(\delta_\alpha^\nu - \int d^4y G(x', y) \partial^{*\nu} \partial^*_\alpha \right) \right\} \phi,$$

onde, o índice (') em ∂' indica que a diferenciação é tomada com respeito à coordenada x' e o índice (*) em ∂^* indica que a diferenciação é tomada com respeito à coordenada y . Expandindo a soma nesta última expressão,

$$P_{\mu\nu}P^\nu_\alpha\phi = \left(\eta_{\mu\alpha} - \int d^4x' G(x, x') \partial'_\mu \partial'_\alpha \right) \phi + \\ - \int d^4y G(x', y) \partial^*_\mu \partial^*_\alpha \phi(y) + \int d^4x' G(x, x') \partial'_\mu \partial'_\nu \int d^4y G(x', y) \partial^{*\nu} \partial^*_\alpha \phi(y).$$

Identificando o primeiro termo do lado direito com a definição (2.7) e passando uma derivação com respeito à coordenada x' para a segunda integração no terceiro termo do lado direito, encontraremos:

$$P_{\mu\nu}P^\nu_\alpha\phi = P_{\mu\alpha}\phi - \int d^4y G(x', y) \partial^*_\mu \partial^*_\alpha \phi(y) + \\ + \int d^4x' G(x, x') \partial'_\mu \int d^4y \partial'_\nu \left(G(x', y) \partial^{*\nu} \partial^*_\alpha \phi(y) \right). \quad (2.9)$$

Vamos estudar mais detalhadamente o seguinte termo desta última expressão,

$$\int d^4y \partial'_\nu \left(G(x', y) \partial^{*\nu} \partial^*_\alpha \phi(y) \right) \equiv I_\alpha.$$

Primeiramente, vamos examinar a função de Green $G(x, y)$.

Consideremos que $G(x, y)$ satisfaça a relação abaixo:

$$\square_x G(x, y) = \beta \delta(x - y),$$

onde β pode ser $+1$ ou -1 , dependendo da construção (este sinal será estabelecido adiante). E, do critério de invariância translacional da função de Green, podemos escrever a seguinte relação:

$$G(x, y) = G(x - y), \quad (2.10)$$

Assim,

$$\frac{\partial G(x' - y)}{\partial x'} = -\frac{\partial G(x' - y)}{\partial y}. \quad (2.11)$$

Usando este resultado em I_α , encontraremos

$$I_\alpha = - \int d^4 y (\partial^{*\nu} \partial_\alpha^* \phi(y)) (\partial_\nu^* G(x', y)),$$

que pode ser reescrito, mais convenientemente, como segue,

$$I_\alpha = - \int d^4 y \left[\partial^{*\nu} (\partial_\alpha^* \phi(y) \partial_\nu^* G(x', y)) - \partial_\alpha^* \phi(y) \partial^{*\nu} \partial_\nu^* G(x', y) \right].$$

O primeiro termo sob integração é um termo de superfície, que será nulo sempre que a função ϕ for bem comportada, ou seja, variar ao menos com o inverso da distância. Desta maneira,

$$I_\alpha = \int d^4 y \partial_\alpha^* \phi(y) \square G(x', y),$$

e usando a definição

$$\square G(x, y) \equiv +\delta(x, y), \quad (2.12)$$

(donde definimos o valor $\beta \equiv +1$) resulta:

$$I_\alpha = \int d^4 y \partial_\alpha^* \phi(y) \delta(x', y).$$

Retornando estes resultados em (2.9),

$$P_{\mu\nu}P_{\alpha}^{\nu}\phi = P_{\mu\alpha}\phi - \int d^4y G(x', y)\partial_{\mu}^*\partial_{\alpha}^*\phi(y) + \\ + \int d^4x' G(x, x')\partial_{\mu}'\partial_{\alpha}'\phi(x').$$

Rebatizando $y \rightarrow x'$ e $x' \rightarrow x$ na primeira integração, teremos o cancelamento dos dois últimos termos, restando

$$P_{\mu\nu}P_{\alpha}^{\nu}\phi = P_{\mu\alpha}\phi. \tag{2.13}$$

Como pretendíamos demonstrar!

Capítulo 3

Teoria Não-Local da Gravitação.

As equações para campos de spin-2 sem o termo de fonte, como apresentadas na teoria de Fierz, são dadas pelas equações (2.1). Como já vimos discutindo anteriormente, uma maneira completamente equivalente de tratar o problema é considerar uma aproximação linear das equações de Einstein[8], quando tomadas sem o termo de fonte. Se quisermos construir um modelo de spin-2 para o campo gravitacional, devemos estudar qual o objeto que poderia ser utilizado como o gerador do campo, e este objeto deve satisfazer as leis de conservação (divergência ordinária nula). O tensor momentum-energia da matéria não preenche aos requisitos de conservação quando tomado separadamente [5, 6] , desta forma, deveria ser somado a ele, a parte da energia relacionada ao campo em si. Quando somada esta parte de, modo a resultar em uma teoria fechada, encontraremos que o objeto representando a energia do campo é escrito como uma série infinita [9] e em todas as ordens, ou seja, altamente não linear. Este método conduz à teoria da relatividade geral. Uma outra maneira de se construir uma possível teoria foi proposta por Deser e Laurent [2] , estudada no capítulo anterior, e considera *projeções livres* do tensor da matéria. Este método mantém as equações que descrevem o campo como lineares. Esta linearidade nas equações implica em considerar o campo sem auto-interação. Esta teoria é suficiente para

encontrar alguns resultados que são relacionados, na teoria de Einstein, como devidos ao caráter não linear das equações. Embora seja capaz de revelar tais resultados, esta nova descrição do campo gravitacional traz alguns inconvenientes quando tratando outros problemas, por exemplo, ondas gravitacionais. Quando ondas gravitacionais livres viajam através de uma região de campo gravitacional estático, continuam a viajar com velocidade c com respeito ao referencial inercial global, que é definido pelo campo de radiação. Enquanto raios luminosos, por outro lado, viajam com velocidade menor do que c , quando neste referencial, tal que os grávitons viajam mais rápido que a luz.

Neste capítulo, vamos tratar da descrição da gravitação considerando a não localidade introduzida e preservando explicitamente a não linearidade do campo.

3.1 As equações de campo.

Vamos considerar as equações de Fierz com termo fonte,

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -kT_{\mu\nu}.$$

Se introduzirmos o campo $h_{\alpha\beta}$, definido em (1.26), poderemos reescrever as equações como

$$H_{\mu\nu}^{(L)} = -kT_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

onde

$$H_{\mu\nu}^{(L)} = \square h_{\mu\nu} - h_{\mu|\alpha\nu}^{\alpha} - h_{\nu|\alpha\mu}^{\alpha} + \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}_{|\alpha\beta} \tag{3.2}$$

e

$$H_{\mu\nu}^{(L)|\mu} \equiv 0 \tag{3.3}$$

Então, de (3.3), $T_{\mu\nu}$ deve ter divergência nula para que tenhamos um modelo mate-

maticamente coerente. Vamos construir este objeto de maneira a manter o caráter não linear do campo gravitacional.

As equações de Einstein (1.2) podem ser escritas equivalentemente na forma

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -k \left(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(2)} + t_{\mu\nu}^{(3)} + t_{\mu\nu}^{(4)} + \dots \right). \quad (3.4)$$

Com os índices $\{(2), (3), \dots\}$, indicando o grau de não linearidade no campo. Isto pode ser construído de maneiras distintas. Uma delas é se considerarmos toda a expansão na métrica, dada em (1.20) e (1.21), nas equações (1.1), e manter apenas o termo linear no lado esquerdo. Outra maneira pode ser realizada, construindo o tensor momentum-energia para as equações de Fierz, que resulta ser de $O(2)$ no campo, acrescentar o mesmo às equações, e procurar pelo novo tensor momentum-energia, que agora será de $O(3)$ no campo, e assim por diante, construindo, desta feita, toda a série mostrada acima.

Desde que a teoria da relatividade geral em sua primeira aproximação, ou seja, considerando o termo $t_{\mu\nu}^{(2)}$, já se mostra suficiente para descrever todos os fenômenos experimentalmente resolvidos, com precisão superior a que se pode detectar, e ainda fornece as condições suficientes quanto a origem e emissão de ondas gravitacionais, consideraremos então, por motivo de simplicidade¹, apenas este termo da série infinita que compõe o lado direito das equações (3.4). Assim, definiremos o tensor momentum-energia total, da seguinte maneira:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{(M)} + t_{\mu\nu}^{(2)},$$

¹É bem verdade que poderíamos considerar outros termos, que apresentam uma ordem maior de não linearidade, para compor o tensor momentum-energia da gravitação para a teoria que estamos desenvolvendo. No entanto, seria extremamente complicado tratar estes outros termos. Fato este que nos leva a utilizarmos apenas o primeiro termo, que é quadraticamente não linear na variável que representa o campo gravitacional.

onde o índice (M) indica que $T_{\mu\nu}$ é o tensor da matéria. Vamos a partir deste ponto, a fim de aliviar notação, escrever simplesmente,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

lembrando sempre que $t_{\mu\nu}$ é apenas o primeiro termo da série.

Então, escreveremos (3.1) da seguinte maneira:

$$H_{\mu\nu}^{(L)} = -k(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}). \quad (3.6)$$

Todavia, as equações acima construídas apresentam uma inconsistência matemática, uma vez que o lado direito não se conserva identicamente, a não ser quando consideramos toda a série apresentada em (3.4). Resolveremos este problema usando projeções livres sobre o lado direito das equações. Para isto, utilizaremos os operadores de projeções de divergência identicamente nula introduzidos em (2.7). Para representar que algum termo das equações está projetado, usaremos o símbolo ($\hat{\quad}$) sobre o objeto em questão. Assim, (3.1) se tornam,

$$H_{\mu\nu}^{(L)} = -k\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

onde

$$\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \equiv (P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta} + pP_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + qP_{\mu\nu}P_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta}, \quad (3.8)$$

com $P_{\mu\nu}$ introduzido primeiramente por Deser, equação (2.6), discutido no capítulo anterior.

Finalmente, satisfazendo $\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}$ à identidade diferencial

$$\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}{}^{|\mu} \equiv 0, \quad (3.9)$$

temos formulado uma teoria coerente e exata para campos de spin 2, objetivando descrever o campo gravitacional. Uma tal teoria é não local (com a não localidade introduzida pelas projeções de $T_{\alpha\beta}$, de (3.8)) e não linear.

Vemos, no entanto, assim como na teoria linear de Deser e Laurent, que existe uma classe de teorias, com a mesma forma, possíveis nesta formulação. Fato este devido à liberdade introduzida pelos parâmetros p e q . Vamos prosseguir procurando quais valores dos parâmetros são permitidos, a fim de que esta seja uma boa teoria para o campo gravitacional. Uma maneira de se verificar isto é comparando as predições da mesma com os testes observacionais clássicos, e a partir destes, determinar quais soluções possíveis para p e q correspondem à realidade física. Desta maneira, teremos finalmente formulado uma teoria unívoca para a descrição deste fenômeno.

3.2 Solução para simetria esférica, caso estático.

Consideremos o caso de uma distribuição esfericamente simétrica de matéria, caso estático. Vamos resolver as equações para um gauge particular, onde

$$h^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} = 0. \quad (3.10)$$

Nesta escolha de gauge, que é equivalente a usar um sistema de coordenadas harmônicas (no caso da aproximação linear da relatividade geral), teremos o objeto que representa o conteúdo de momentum-energia do campo gravitacional, já derivado na expressão (1.31), e as nossas equações se reduzem a:

$$\square h_{\mu\nu} = -k\hat{T}_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Como estamos considerando o caso estático, devemos notar a redução do operador quadridimensional $\square \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, para o objeto tridimensional $\Delta \equiv g^{ij} \partial_i \partial_j$, isto é,

$$\begin{aligned}\square &\rightarrow \Delta, \\ \square^{-1} &\rightarrow \Delta^{-1}.\end{aligned}$$

E desde que a operação $(\hat{\quad})$, definida em (3.8), é linear na soma,

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \hat{t}_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

com

$$\hat{T}_{\mu\nu} \equiv (P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} + p P_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} + q P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta}) T^{\alpha\beta} \quad (3.13)$$

e

$$\hat{t}_{\mu\nu} \equiv (P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} + p P_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} + q P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta}) t^{\alpha\beta}. \quad (3.14)$$

Usando as representações acima, (3.11) se torna

$$\Delta h_{\mu\nu} = -k (\hat{T}_{\mu\nu} + \hat{t}_{\mu\nu}). \quad (3.15)$$

Antes de procurar pelas componentes de (3.15), devemos adiantar que a única não nula do tensor momentum-energia da matéria, para uma distribuição estática, esfericamente simétrica (como de fato ocorre para sistemas planetários), é a componente T_{00} . Desta forma, podemos listar as componentes de $\hat{T}_{\mu\nu}$:

$$\hat{T}_{00} = (1 + p + q) T_{00}, \quad (3.16)$$

$$\hat{T}_{ij} = (p + q) (\eta_{ij} - \Delta^{-1} \partial_i \partial_j) T_{00}, \quad (3.17)$$

$$\hat{T}_\alpha^\alpha = (1 + 3p + 3q) T_{00}. \quad (3.18)$$

E, usando as equações (3.14) e (1.31), encontramos após algumas manipulações,

$$\begin{aligned} \hat{t}_{00} = & -\frac{1}{2k} \left[\frac{1}{2} (1 + 2p + 2q) \left(h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} h_{\alpha|\sigma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + q \Delta^{-1} \left(\Delta h_{\rho\nu} \Delta h^{\rho\nu} + \Delta h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha}^\alpha \Delta h_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\sigma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\sigma} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_{ij} = & \frac{1}{2k} \left\{ h_{\rho\nu|i} h^{\rho\nu|j} - \frac{1}{2} h_{\alpha|i}^\alpha h_{\beta|j}^\beta - \frac{1}{2} (1 + 2p + 2q) \left(h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} h_{\alpha|\sigma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\sigma} \right) \eta_{ij} - \Delta^{-1} \left[h_{\rho\nu|i} \Delta h^{\rho\nu|j} + h_{\rho\nu|j} \Delta h^{\rho\nu|i} + 2h_{\rho\nu|ij} \Delta h^{\rho\nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} h_{\alpha|i}^\alpha \Delta h_{\beta|j}^\beta - \frac{1}{2} h_{\alpha|j}^\alpha \Delta h_{\beta|i}^\beta - h_{\alpha|ij}^\alpha \Delta h_{\beta}^{\beta} \right] + 2(p + q) \Delta^{-1} \left[h_{\rho\nu|\alpha i} h^{\rho\nu|\alpha} + \right. \right. \\ & \left. \left. + h_{\rho\nu|\alpha i} h^{\rho\nu|\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha|\gamma i}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} - \frac{1}{2} h_{\alpha|\gamma i}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} \right] - q \eta_{ij} \Delta^{-1} \left[\Delta h_{\rho\nu} \Delta h^{\rho\nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Delta h_{\rho\nu|\beta} h^{\rho\nu|\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha}^\alpha \Delta h_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} \right] + (1 + q) \Delta^{-2} \left[2\Delta h_{\rho\nu|ij} \Delta h^{\rho\nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\Delta h_{\rho\nu|i} \Delta h^{\rho\nu|j} + \Delta h_{\rho\nu|\beta i} h^{\rho\nu|\beta} + \Delta h_{\rho\nu|\beta} h^{\rho\nu|\beta} + \Delta h_{\rho\nu|\beta i} h^{\rho\nu|\beta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Delta h_{\rho\nu|\beta j} h^{\rho\nu|\beta} - \Delta h_{\alpha|ij}^\alpha \Delta h_{\beta}^{\beta} - \Delta h_{\alpha|i}^\alpha \Delta h_{\beta|j}^\beta - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma i}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma i}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma j}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_\alpha^\alpha = & -\frac{1}{2k} \left[(1 + 3p + 3q) \left(h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} h_{\alpha|\sigma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + (1 + 3q) \Delta^{-1} \left(\Delta h_{\rho\nu} \Delta h^{\rho\nu} + \Delta h_{\rho\nu|\beta} h^{\rho\nu|\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha}^\alpha \Delta h_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma}^\alpha h_{\beta}^{\beta|\gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

De posse destes resultados, e após realizadas algumas simplificações, podemos escrever as componentes das equações de campo (3.15):

$$\begin{aligned} \Delta h_{00} = & -\frac{1+p+3q}{1+3q} k T_{00} + \frac{q}{1+3q} \Delta h_{\alpha}^{\alpha} + \\ & + \frac{1+2p+3q}{4(1+3q)} \left(h_{\rho\nu|\alpha} h^{\rho\nu|\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha|\gamma}^{\alpha} h_{\beta}^{\beta|\gamma} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} = & \left(\eta_{ij} + \Delta^{-1} \partial_i \partial_j \right) k T_{00} + \left(\eta_{ij} + 2 \Delta^{-1} \partial_i \partial_j \right) \Delta h_{00} - \Delta^{-1} \partial_i \partial_j \Delta h_{\alpha}^{\alpha} + \\ & + \Delta^{-1} \left(h_{\rho\nu|ij} \Delta h^{\rho\nu} - h_{\rho\nu|\alpha i} h^{\rho\nu|\alpha}{}_j - \frac{1}{2} h_{\alpha|ij}^{\alpha} \Delta h_{\beta}^{\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha|\gamma i}^{\alpha} h_{\beta}^{\beta|\gamma}{}_j \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{\alpha}^{\alpha} = & -k(1+3p+3q) T_{00} + \frac{1}{2} \left[(1+3p+3q) \left(h_{\rho\nu|\sigma} h^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} h_{\alpha|\sigma}^{\alpha} h_{\beta}^{\beta|\sigma} \right) + \right. \\ & \left. + (1+3q) \Delta^{-1} \left(\Delta h_{\rho\nu} \Delta h^{\rho\nu} + \Delta h_{\rho\nu|\beta} h^{\rho\nu|\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha}^{\alpha} \Delta h_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2} \Delta h_{\alpha|\gamma}^{\alpha} h_{\beta}^{\beta|\gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

As equações acima, se resolvidas, determinam as soluções para o campo gravitacional (componentes) do problema em questão. Todavia, estas equações se mostram extremamente complexas para serem tratadas diretamente, devido ao caráter não linear das mesmas. Desta forma, vamos procurar por um conjunto particular de soluções que possam ser escritas na seguinte maneira:

$$h_{\alpha\beta} = \omega \rho_{\alpha\beta} + \omega^2 \sigma_{\alpha\beta}, \quad (3.25)$$

onde ω são certas funções arbitrárias (que podem ser números) que serão estabelecidas mais adiante. Entendemos neste tipo de solução, que possa haver um desacoplamento entre as partes linear e não-linear da mesma. Desta forma dizemos que $\rho_{\alpha\beta}$ consiste

nas soluções da parte linear e $\sigma_{\alpha\beta}$ nas soluções da parte não-linear. Isto ficará melhor entendido no que seguirá. Vamos redefinir o tensor momentum-energia da matéria como

$$T_{00} = \omega T'_{00}. \quad (3.26)$$

A partir deste ponto, desde que só trataremos com o novo tensor momentum-energia, continuaremos utilizando a notação T_{00} para designá-lo. Então, onde escrevemos T_{00} , entende-se T'_{00} . Se introduzirmos (3.25) e (3.26) nas equações (3.22) a (3.24) e separarmos segundo potências diferentes de ω , encontraremos os seguintes sistemas de equações:

De (3.24):

$O(\omega) \Rightarrow$

$$\Delta \rho^\alpha_\alpha = -k(1 + 3p + 3q) T_{00}, \quad (3.27)$$

$O(\omega^2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma^\alpha_\alpha = & \frac{1 + 3p + 3q}{2} \left(\rho_{\rho\nu|\sigma} \rho^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2} \rho^\alpha_{\alpha|\sigma} \rho^\beta_{\beta|\sigma} \right) + \\ & + \frac{1 + 3q}{2} \Delta^{-1} \left(\Delta \rho_{\rho\nu} \Delta \rho^{\rho\nu} + \Delta \rho_{\rho\nu|\beta} \rho^{\rho\nu|\beta} - \frac{1}{2} \Delta \rho^\alpha_\alpha \Delta \rho^\beta_\beta - \frac{1}{2} \Delta \rho^\alpha_{\alpha|\gamma} \rho^\beta_{\beta|\gamma} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$O(\omega^3) \Rightarrow$

$$\frac{1 + 3p + 3q}{2} \left(2\rho_{\rho\nu|\sigma} \sigma^{\rho\nu|\sigma} - \rho^\alpha_{\alpha|\sigma} \sigma^\beta_{\beta|\sigma} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+3q}{2} \Delta^{-1} \left(2\Delta\rho_{\alpha\beta}\Delta\sigma^{\alpha\beta} + \Delta\rho_{\alpha\beta|\gamma}\sigma^{\alpha\beta|\gamma} + \Delta\sigma_{\alpha\beta|\gamma}\rho^{\alpha\beta|\gamma} + \right. \\
& \left. - \Delta\rho_{\alpha}^{\alpha}\Delta\sigma_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2}\Delta\rho_{\alpha|\gamma}\sigma_{\beta}^{\beta|\gamma} - \frac{1}{2}\Delta\sigma_{\alpha|\gamma}\rho_{\beta}^{\beta|\gamma} \right) = 0, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$O(\omega^4) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \frac{1+3p+3q}{2} \left(\sigma_{\rho\nu|\sigma}\sigma^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha|\sigma}\sigma_{\beta}^{\beta|\sigma} \right) + \\
& + \frac{1+3q}{2} \Delta^{-1} \left(\Delta\sigma_{\rho\nu}\Delta\rho^{\rho\nu} + \Delta\sigma_{\rho\nu|\beta}\sigma^{\rho\nu|\beta} - \frac{1}{2}\Delta\sigma_{\alpha}^{\alpha}\Delta\sigma_{\beta}^{\beta} - \frac{1}{2}\Delta\sigma_{\alpha|\gamma}\sigma_{\beta}^{\beta|\gamma} \right) = 0. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

De (3.22):

$O(\omega) \Rightarrow$

$$\Delta\rho_{00} = -\frac{1+p+3q}{1+3q} kT_{00} + \frac{q}{1+3q} \Delta\rho_{\alpha}^{\alpha}, \tag{3.31}$$

$O(\omega^2) \Rightarrow$

$$\Delta\sigma_{00} = \frac{q}{1+3q} \Delta\sigma_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1+2p+3q}{4(1+3q)} \left(\rho_{\alpha\beta|\gamma}\rho^{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}\rho_{\alpha|\gamma}\rho_{\beta}^{\beta|\gamma} \right), \tag{3.32}$$

$O(\omega^3) \Rightarrow$

$$\frac{1+2p+3q}{4(1+3q)} \left(2\rho_{\alpha\beta|\gamma}\sigma^{\alpha\beta|\gamma} - \rho_{\alpha|\gamma}\sigma_{\beta}^{\beta|\gamma} \right) = 0, \tag{3.33}$$

$O(\omega^4) \Rightarrow$

$$\sigma_{\alpha\beta|\gamma}\sigma^{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha|\gamma}\sigma^{\beta|\gamma} = 0. \quad (3.34)$$

De (3.23):

$O(\omega) \Rightarrow$

$$\Delta\rho_{ij} = (\eta_{ij} + \Delta^{-1}\partial_i\partial_j)kT_{00} + (\eta_{ij} + 2\Delta^{-1}\partial_i\partial_j)\Delta\rho_{00} - \Delta^{-1}\partial_i\partial_j\Delta\rho^\alpha_\alpha, \quad (3.35)$$

$O(\omega^2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} = & (\eta_{ij} + 2\Delta^{-1}\partial_i\partial_j)\Delta\sigma_{00} - \Delta^{-1}\partial_i\partial_j\Delta\sigma^\alpha_\alpha + \\ & + \Delta^{-1}\left(\rho_{\rho\nu|i j}\Delta\rho^{\rho\nu} - \rho_{\rho\nu|\alpha i}\rho^{\rho\nu|\alpha}{}_j - \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|i j}\Delta\rho^\beta_\beta + \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|\gamma i}\rho^{\beta|\gamma}{}_j\right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$O(\omega^3) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \Delta^{-1}\left(\rho_{\alpha\beta|i j}\Delta\sigma^{\alpha\beta} + \Delta\rho^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta|i j} - \rho_{\alpha\beta|\gamma i}\sigma^{\alpha\beta|\gamma}{}_j - \sigma_{\alpha\beta|\gamma i}\rho^{\alpha\beta|\gamma}{}_j + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|i j}\Delta\sigma^\beta_\beta - \frac{1}{2}\sigma^\alpha_{\alpha|i j}\Delta\rho^\beta_\beta + \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|\gamma i}\sigma^{\beta|\gamma}{}_j + \frac{1}{2}\sigma^\alpha_{\alpha|\gamma i}\rho^{\beta|\gamma}{}_j\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$O(\omega^4) \Rightarrow$

$$\Delta^{-1} \left(\sigma_{\rho\nu|ij} \Delta \sigma^{\rho\nu} - \sigma_{\rho\nu|\alpha i} \sigma^{\rho\nu|\alpha}{}_j - \frac{1}{2} \sigma^\alpha{}_{\alpha|ij} \Delta \sigma^\beta{}_\beta + \frac{1}{2} \sigma^\alpha{}_{\alpha|\gamma i} \sigma^\beta{}_\beta{}^{|\gamma}{}_j \right) = 0. \quad (3.38)$$

Entretando, das equações acima, vemos que o conjunto (3.31) e (3.35) nos permite identificar certas funções livres, de tal maneira que:

$$\rho_{00} \rightarrow \rho'_{00} = \rho_{00} + \chi_{00},$$

$$\rho_{ij} \rightarrow \rho'_{ij} = \rho_{ij} + \chi_{ij},$$

com

$$\Delta \chi_{00} = 0,$$

$$\Delta \chi_{ij} = 0.$$

E o conjunto (3.32) e (3.36) nos permite identificar, da mesma maneira, as seguintes funções livres:

$$\sigma_{00} \rightarrow \sigma'_{00} = \sigma_{00} + \pi_{00},$$

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \pi_{ij},$$

com

$$\Delta \pi_{00} = 0,$$



$$\Delta\pi_{ij} = 0.$$

Este conjunto de funções livres pode ser usado para satisfazer as relações (3.33,3.34) e (3.37,3.38). Obviamente, as equações para os termos contraídos, (3.29 e 3.30), também estão sendo consideradas. Não as citamos no contexto porque já se encontram implicitamente associadas às componentes (00) e (ij). Desta forma, só nos preocuparemos em resolver o conjunto (3.27,3.28,3.31,3.32,3.35,3.36), que nos dará uma particular solução para o problema, e que nos será suficiente, já que estamos procurando fixar os parâmetros livres, p e q , da teoria. Devemos esclarecer que este tipo de solução é apenas especulativo, uma vez que não demonstramos estar as relações acima citadas satisfeitas quando consideradas as funções livres χ e π . Para comprovar a veracidade desta hipótese, deveríamos resolver o sistema de equações para estas funções, que é não linear e bastante complexo. No entanto, este tipo de solução que estamos propondo, pode ser encarada como uma expansão, onde os termos em $O(\omega^3)$ e $O(\omega^4)$ seriam termos de correção “pós-pós newtoniana”, e não afetam os resultados a que vamos investigar. Desta maneira, preferimos atentar à possibilidade de que tais soluções sejam de fato exatas.

Assim, estaremos procurando por soluções das seguintes equações:

$$\Delta\rho^\alpha_\alpha = -k(1 + 3p + 3q)T_{00},$$

$$\Delta\rho_{00} = -\frac{1 + p + 3q}{1 + 3q}kT_{00} + \frac{q}{1 + 3q}\Delta\rho^\alpha_\alpha,$$

$$\Delta\rho_{ij} = (\eta_{ij} + \Delta^{-1}\partial_i\partial_j)kT_{00} + (\eta_{ij} + 2\Delta^{-1}\partial_i\partial_j)\Delta\rho_{00} - \Delta^{-1}\partial_i\partial_j\Delta\rho^\alpha_\alpha,$$

$$\Delta\sigma^\alpha_\alpha = \frac{1+3p+3q}{2} \left(\rho_{\rho\nu|\sigma}\rho^{\rho\nu|\sigma} - \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|\sigma}\rho^\beta_{\beta|\sigma} \right) + \\ + \frac{1+3q}{2}\Delta^{-1} \left(\Delta\rho_{\rho\nu}\Delta\rho^{\rho\nu} + \Delta\rho_{\rho\nu|\beta}\rho^{\rho\nu|\beta} - \frac{1}{2}\Delta\rho^\alpha_\alpha\Delta\rho^\beta_\beta - \frac{1}{2}\Delta\rho^\alpha_{\alpha|\gamma}\rho^\beta_{\beta|\gamma} \right),$$

$$\Delta\sigma_{00} = \frac{q}{1+3q}\Delta\sigma^\alpha_\alpha + \frac{1+2p+3q}{4(1+3q)} \left(\rho_{\alpha\beta|\gamma}\rho^{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|\gamma}\rho^\beta_{\beta|\gamma} \right),$$

e

$$\Delta\sigma_{ij} = \left(\eta_{ij} + 2\Delta^{-1}\partial_i\partial_j \right) \Delta\sigma_{00} - \Delta^{-1}\partial_i\partial_j\Delta\sigma^\alpha_\alpha + \\ + \Delta^{-1} \left(\rho_{\rho\nu|ij}\Delta\rho^{\rho\nu} - \rho_{\rho\nu|\alpha i}\rho^{\rho\nu|\alpha}_j - \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|ij}\Delta\rho^\beta_\beta + \frac{1}{2}\rho^\alpha_{\alpha|\gamma i}\rho^\beta_{\beta|\gamma}_j \right),$$

Vamos seguir o conselho do Rei de Copas² para resolver as equações acima. No entanto, mostraremos a resolução apenas daquelas que não forem por demais complexas, e que, envolvendo um grande volume de cálculos, deixaria tedioso o trabalho de estudar esta tese. Para estas, listaremos os resultados diretamente no apêndice A.

Antes de mais nada, vamos estabelecer a forma explícita do tensor momentum-energia da matéria, a fim de termos mais clareza no que seguirá.

Admitiremos a seguinte forma para T_{00} :

$$T_{00} = a\Theta(r_s - r), \quad (3.39)$$

onde a é a densidade de momentum-energia, r_s o raio do suporte e $\Theta(r_s - r)$ é a função

²L. Carroll, Alice no País das Maravilhas

degrau, definida da maneira usual,

$$\Theta(r_s - r) = \begin{cases} 0, & r > r_s \\ 1, & r \leq r_s. \end{cases} \quad (3.40)$$

Vamos definir também, a quantidade proporcional à massa do sistema físico,

$$m \equiv \frac{k}{8\pi} \int dV T_{00}. \quad (3.41)$$

Desde que T_{00} é dado por (3.39) e a integração é realizada por todo o espaço,

$$m = \frac{ak}{8\pi} V_{r_s}. \quad (3.42)$$

Passemos agora à resolução das equações de campo.

De (3.27),

$$\Delta \rho_\alpha^\alpha = -k(1 + 3p + 3q) T_{00}.$$

Integrando num volume V que abrange todo o sistema, teremos

$$\int dV \Delta \rho_\alpha^\alpha = -k(1 + 3p + 3q) \int dv T_{00} = -8\pi (1 + 3p + 3q) m|_{r > r_s},$$

mas

$$\Delta \equiv \eta^{ij} \partial_i \partial_j = -\nabla^2 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla},$$

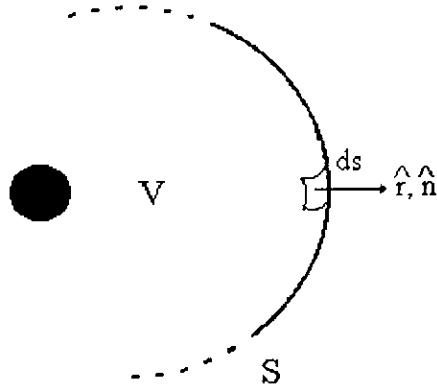


Figura 3.1

então, usando o teorema de Gauss para integrais de superfície, encontramos:

$$\int dV \Delta \rho_\alpha^\alpha = - \int dS \vec{\nabla} \rho_\alpha^\alpha \cdot \hat{n},$$

onde \hat{n} é o vetor unitário perpendicular à superfície de integração, como mostrado na figura (3.1).

Se admitirmos que $\rho_\alpha^\alpha = \rho_\alpha^\alpha(r)$, e realizarmos a integração em coordenadas esféricas, o único termo do gradiente do campo ρ não nulo será o radial, logo

$$- \left(r^2 \frac{\partial \rho_\alpha^\alpha}{\partial r} \right) \Big|_{r>r_s} \int d\theta d\phi \sin^2(\theta) = -4\pi \left(r^2 \frac{\partial \rho_\alpha^\alpha}{\partial r} \right) \Big|_{r>r_s}.$$

Assim,

$$-4\pi \left(r^2 \frac{\partial \rho_\alpha^\alpha}{\partial r} \right) \Big|_{r>r_s} = -8\pi (1 + 3p + 3q) m \Big|_{r>r_s}.$$

Mas,

$$\frac{\partial \rho_\alpha^\alpha(r)}{\partial r} = \frac{d\rho_\alpha^\alpha(r)}{dr},$$

e se fizermos r variar na região ($r > r_s$), transformaremos esta relação em uma nova equação diferencial,

$$\frac{d\rho_\alpha^\alpha}{dr} = 2(1 + 3p + 3q) \frac{m}{r^2},$$

que pode ser novamente integrada, resultando:

$$\rho_\alpha^\alpha = -2(1 + 3p + 3q) \frac{m}{r} \Big|_{r>r_s}. \quad (3.43)$$

Vamos prosseguir, resolvendo a equação para $\Delta\rho_{00}$. Introduzindo (3.27) em (3.31) obtemos,

$$\Delta\rho_{00} = -\frac{1 + p + 4q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q} kT_{00}, \quad (3.44)$$

que pode ser integrada imediatamente, usando o mesmo procedimento anterior, resultando:

$$\rho_{00} = -2 \frac{1 + p + 4q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q} \frac{m}{r} \Big|_{r>r_s}. \quad (3.45)$$

Desde que o operador Δ^{-1} satisfaz a relação

$$\Delta\Delta^{-1}f = f, \quad (3.46)$$

onde f é uma função bem comportada, poderemos retornar às equações anteriores e entender o significado da operação de Δ^{-1} sobre T_{00} . Ou seja, se aplicarmos este operador sobre a equação (3.44), obteremos

$$\rho_{00} = -\frac{1 + p + 4q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q} k \Delta^{-1} T_{00}. \quad (3.47)$$

Comparando esta última com (3.45), chegamos a

$$\Delta^{-1} T_{00} = \frac{2m}{kr}. \quad (3.48)$$

Uma vez obtidos estes resultados, passemos à resolução da equação (3.35). Substituindo (3.44) e (3.27) em (3.35),

$$\Delta \rho_{ij} = -\frac{p + q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q} (\eta_{ij} - \Delta^{-1} \partial_i \partial_j) k T_{00}. \quad (3.49)$$

Vamos escolher de resolver esta equação por aplicação direta de Δ^{-1} . Desta forma, e usando (3.48), encontramos:

$$\rho_{ij} = -2 \frac{p + q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q} (\eta_{ij} - \Delta^{-1} \partial_i \partial_j) \frac{m}{r}. \quad (3.50)$$

Mas, como pode ser facilmente demonstrado,

$$\Delta^{-1} \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right), \quad (3.51)$$

logo,

$$\rho_{ij} = -\frac{p + q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q} \frac{m}{r} \left(\eta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right). \quad (3.52)$$

Assim, temos resolvido o primeiro conjunto de equações, que correspondem à contribuição linear do tipo de solução que propomos em (3.25).

As próximas equações a serem resolvidas, (3.28, 3.32 e 3.36), envolvem cálculos muito elaborados, de tal sorte que deixamos listados nos apêndices A e B as manipulações mais trabalhosas.

Aplicando sobre a equação (3.28) a operação Δ^{-1} , e usando os resultados encontrados nos apêndices A e B, chegaremos à seguinte expressão:

$$\Delta\Delta\sigma_\alpha^\alpha = c_1 \frac{m^2}{r^6} + c_2 k m a \frac{x^i \Theta(r_s - r)|_i}{r^3} + c_3 (ak\Theta(r_s - r))^2,$$

onde $c_{i,(i=1,2,3)}$ são combinações dos parâmetros p e q . Não nos preocuparemos em explicitar estas combinações, até chegarmos à solução. A derivada da função degrau, apresentada no segundo termo do lado direito da equação acima, é reescrita na forma da função delta de Dirac:

$$\frac{\partial\Theta(r_s - r)}{\partial x^i} = \frac{\partial\Theta(r_s - r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{x_i \delta(r - r_s)}{r},$$

assim,

$$\Delta\Delta\sigma_\alpha^\alpha = c_1 \frac{m^2}{r^6} + c_3 (ak\Theta(r_s - r))^2 - ac_2 m \frac{\delta(r - r_s)}{r^2}. \quad (3.53)$$

Antes de integrar esta última, por conveniência de notação, denominaremos a quantidade

$$f(r) \equiv \Delta\sigma_\alpha^\alpha,$$

e faremos ainda a consideração de que $f(r)$ seja uma função bem comportada, de tal forma que se anule para regiões muito afastadas à distribuição de matéria. Em verdade, como

será visto logo adiante, nós usaremos a hipótese de que $f(r)$ varie ao menos com o inverso do quadrado da distância. Depois de encontrada a solução, retornaremos e justificaremos a validade desta hipótese.

Integrando, então, (3.53), no volume limitado pelas superfícies S_1 e S_2 , como mostrado na figura 3.2, resulta:

$$\int_{V_{r>r_s}} dV \Delta f(r) = c_1 m^2 \int_{V_{r>r_s}} dV \frac{1}{r^6} + c_3 k^2 a^2 \int_{V_{r>r_s}} dV \Theta^2(r_s - r) + \\ - a c_2 m \int_{V_{r>r_s}} dV \frac{\delta(r - r_s)}{r^2}.$$

Usando o teorema de Gauss, no lado esquerdo desta relação, encontraremos:

$$\int_{V_{r>r_s}} dV \Delta f(r) = - \int_{V_{r>r_s}} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(r) = - \sum_i \int_{S_i} dS \vec{\nabla} f(r) \cdot \hat{n}_i = \\ = - \left[\int_{S_1} dS_1 \frac{df(r)}{dr} \hat{r} \cdot \hat{n}_1 + \int_{S_2} dS_2 \frac{df(r)}{dr} \hat{r} \cdot \hat{n}_2 \right] = \\ = \int_{S_1} dS_1 \frac{df(r)}{dr} - \int_{S_2} dS_2 \frac{df(r)}{dr}.$$

Se fizermos $S_2 \rightarrow \infty$, teremos a integração nesta superfície se anulando, desde que admitimos o bom comportamento de $f(r)$ para regiões afastadas. Assim, e integrando em coordenadas esféricas, encontramos:

$$\int_{V_{r>r_s}} dV \Delta f(r) = 4\pi \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) \Big|_{r_1}.$$

Do lado direito da equação, os termos em $\delta(r - r_s)$ e $\Theta(r_s - r)$ são nulos na região a que

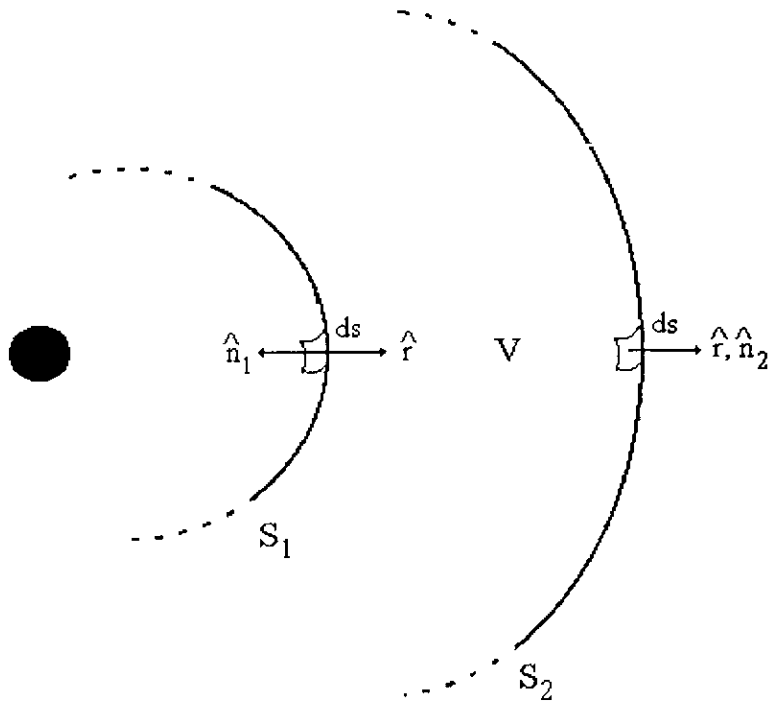


Figura 3.2:

vimos integrando, desta forma, o único termo que contribui para a solução externa é:

$$c_1 m^2 \int_{V_{r>r_s}} dV \frac{1}{r^6} = m^2 \left[4\pi \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \right].$$

Igualando ambos resultados,

$$4\pi \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) \Big|_{r_1} = m^2 \left[4\pi \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \right],$$

e, resolvendo o lado direito e fazendo as devidas simplificações,

$$\frac{df}{dr} \Big|_{r_1} = \frac{1}{3} c_1 \frac{m^2}{r^5} \Big|_{r_1}.$$

Se fizermos r variar novamente na expressão acima, ou seja, tornando esta última uma

equação diferencial, poderemos resolvê-la para a região externa, resultando:

$$f(r) = \frac{c_1 m^2}{12 r^4} \Big|_{r>r_s}.$$

Desta forma, retornando à definição de $f(r)$, encontraremos:

$$\Delta\sigma_\alpha^\alpha = \frac{c_1 m^2}{12 r^4} \Big|_{r>r_s}.$$

Procedendo da mesma maneira para esta equação, encontramos por fim,

$$\sigma_\alpha^\alpha = c_1' \frac{m^2}{r^2}, \quad (3.54)$$

com

$$c_1' = -\frac{15}{4}q^3 - 3p^3 - \frac{21}{2}pq^2 - \frac{39}{4}p^2q - \frac{17}{4}q^2 - \frac{17}{4}p^2 - \frac{17}{2}pq + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}.$$

Vemos, da solução encontrada acima, que é válida nossa hipótese inicial de que σ_α^α variasse ao menos com o inverso do quadrado da distância.

Resta-nos resolver as equações para as componentes σ_{00} e σ_{ij} . A resolução de (3.32) segue exatamente o mesmo procedimento que adotamos para resolver σ_α^α , por isso vamos escrever diretamente sua solução,

$$\sigma_{00} = c_2' \frac{m^2}{r^2}, \quad (3.55)$$

com

$$c_2' = -\frac{5}{4}q^3 - p^3 - \frac{7}{2}pq^2 - \frac{13}{4}p^2q - \frac{3}{2}q^2 - \frac{3}{2}p^2 - 3pq + \frac{1}{4}. \quad (3.56)$$

Finalmente, passemos a equação (3.36). Usando os resultados dos apêndices, aplicação

do operador Δ^{-1} e após algumas manipulações algébricas, teremos

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \left(c_4 \eta_{ij} + c_5 \Delta^{-1} \partial_i \partial_j \right) \frac{m^2}{r^2} + \\ & + \Delta^{-1} \Delta^{-1} \left(c_6 \frac{\eta_{ij}}{r^6} + c_7 \frac{x_i x_j}{r^8} \right). \end{aligned}$$

Os termos estão todos calculados separadamente no apêndice A. Desta forma, encontramos a seguinte solução:

$$\sigma_{ij} = c_3 \frac{m^2 x_i x_j}{r^2}, \quad (3.57)$$

com

$$c_3 = \frac{5}{3} q^3 + 2p^3 + 7pq^2 + \frac{13}{2} p^2 q + \frac{11}{4} q^2 + \frac{11}{4} p^2 + \frac{11}{2} pq - \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} p - \frac{1}{4}. \quad (3.58)$$

As equações (3.45), (3.52), (3.55) e (3.57) descrevem o campo gravitacional para a região externa à distribuição de matéria, definida anteriormente. Como podem ser trivialmente testadas, estas soluções satisfazem ao particular gauge a que vimos trabalhando, qual seja: $h^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0$.

3.3 Equações para partículas materiais.

Vamos procurar por uma expressão para as equações das partículas materiais se movendo no campo provocado pela fonte não-local $\hat{T}_{\mu\nu}$, introduzida pela equação (3.7). Veremos ao final desta seção que podemos estabelecer perfeita equivalência com uma teoria geométrica (introduzindo uma métrica $g_{\mu\nu}$).

Consideremos uma nuvem de poeira incoerente não interagindo. Vamos descrever as partículas constituintes deste fluido por quatro funções do espaço tempo, a que chamare-

mos a^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Vamos escolher a componente a^0 para descrever as medidas de tempo próprio. Definiremos a quadri-velocidade da maneira usual, como a variação das coordenadas espaço temporais com respeito ao tempo próprio, para uma dada partícula.

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{da^0}. \quad (3.59)$$

Dada a lei de transformação que leva das coordenadas x^μ em a^μ ,

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} da^\nu,$$

teremos na expressão (3.59),

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} \frac{da^\nu}{da^0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial a^\nu} \delta_0^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial a^0}.$$

Assim, poderemos reescrever nossa definição de quadri-velocidade na forma,

$$U^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial a^0} \right)_{a^i, (i=1,2,3)}. \quad (3.60)$$

Vamos definir a densidade própria de momentum-energia, ρ_0 . Haja visto que ρ_0 é a densidade de momentum-energia medida por um observador comovente com o fluido. Então, a lagrangeana da matéria pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \rho_0 U_\mu U^\mu. \quad (3.61)$$

Na ausência de acoplamento, a variação de \mathcal{L} com respeito às funções a^μ determina as equações de movimento, e resulta na expressão para o tempo próprio da relatividade restrita. A lagrangeana de Interação é escrita acoplando o campo ao tensor momentum-

energia. Desde que o campo está sendo considerado adimensional, teremos

$$\mathcal{L}_I = \phi^{\mu\nu} \hat{T}_{\mu\nu}, \quad (3.62)$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{L}_I = \psi^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

com

$$\psi_{\mu\nu} = (P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} + p\eta_{\mu\nu} P_{\alpha\beta} + qP_{\mu\nu} P_{\alpha\beta}) \phi^{\alpha\beta}. \quad (3.64)$$

Assim, resulta uma densidade total de lagrangeana \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I,$$

ou

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_0 U_\mu U^\mu + \psi^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Considerando a variação de \mathcal{L} com respeito a a^0 , e usando o princípio de Hamilton ($\delta\mathcal{L} = 0$), resulta³:

$$\left[\eta_{\mu\nu} U^\mu \frac{\partial U^\nu}{\partial a^0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial a^0} (\psi^{\mu\nu} T_{\mu\nu}) \right] \delta a^0 = 0.$$

Se evidenciarmos uma derivação com respeito a a^0 , encontramos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a^0} \left(\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu + \frac{2}{\rho_0} \psi^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right) = 0.$$

³A variação de uma função qualquer $\varphi(\mathbf{x})$ com respeito ao tempo próprio a^0 , pode ser expressa na forma:

$$\delta\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial a^0} \delta a^0.$$

Logo, identificando o termo entre parênteses com uma constante, que normalizaremos, resulta:

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu + \frac{2}{\rho_0}\psi^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 1. \quad (3.66)$$

Definimos o tensor momentum-energia da matéria da maneira usual:

$$T_{\mu\nu} \equiv \rho_0 U_\mu U_\nu. \quad (3.67)$$

Então, introduzindo (3.5), (3.59) e (3.67) em (3.66), e realizando algumas manipulações, obtemos,

$$(\eta_{\mu\nu} + 2\psi_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{da^0} \frac{dx^\nu}{da^0} = \left(1 - \frac{2}{\rho_0}\psi^{\mu\nu}t_{\mu\nu}\right),$$

ou, multiplicando toda a expressão por $(da^0)^2$,

$$\left[1 - \frac{2}{\rho_0}\psi^{\mu\nu}t_{\mu\nu}\right] (da^0)^2 = (\eta_{\mu\nu} + 2\psi_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu. \quad (3.68)$$

Definindo o termo entre colchetes por

$$S(\phi) \equiv \left[1 - \frac{2}{\rho_0}\psi^{\mu\nu}t_{\mu\nu}\right], \quad (3.69)$$

reescreveremos finalmente:

$$(da^0)^2 = S(\phi)^{-1} (\eta_{\mu\nu} + 2\psi_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.70)$$

com

$$S(\phi)^{-1} = \left\{1 + \frac{2}{\rho_0}\psi^{\mu\nu}t_{\mu\nu} + \frac{4}{\rho_0^2}\psi^{\mu\nu}\psi^{\alpha\beta}t_{\mu\nu}t_{\alpha\beta} + \dots\right\}. \quad (3.71)$$

Como já citamos anteriormente, podemos, nesta formulação, estabelecer uma perfeita equivalência com uma teoria geométrica, identificando a métrica,

$$g_{\mu\nu} = S(\phi)^{-1} (\eta_{\mu\nu} + 2\psi_{\mu\nu}).$$

Embora $g_{\mu\nu}$ seja uma função local, podemos, para este caso, expressá-la em termos de campos não locais⁴, como pode ser visto diretamente da definição do campo $\psi_{\mu\nu}$.

3.4 Elemento de linha.

Uma vez dada a descrição do campo, pelas soluções (3.45), (3.52), (3.55) e (3.57), e também as equações para partículas materiais, vamos prosseguir reescrevendo a expressão derivada para a modificação do tempo próprio (3.70) em termos destas soluções. Vamos primeiramente expressar nossas soluções na variável fundamental a que vimos tratando. Neste ponto do desenvolvimento, podemos argumentar que uma boa maneira de estabelecer a função ω , introduzida em (3.25), é identificá-la à constante de acoplamento k . Isto sempre pode ser feito se pensarmos que ω deve ser tal, que torne o campo h adimensional. Desta forma, deve ser proporcional a k , mas o fator de proporcionalidade pode ser deixado a resolver nas equações polinomiais dos parâmetros livres p e q , que são coeficientes de todas as componentes dos objetos que aparecem nas soluções de ϕ . Assim, identificaremos a partir deste momento, ω com k . Retornando então, estes resultados à expressão dada em (3.25), e esta em (1.26), que é o campo fundamental a que estamos tratando, resulta:

$$\phi_{00} = \frac{1}{2} (a' - 4b') \frac{km}{r} + \frac{1}{2} (d' + f') \left(\frac{km}{r} \right)^2, \quad (3.72)$$

⁴Todavia, a interpretação de tal objeto, a métrica, construída através destes campos, nos leva a conjecturar a possibilidade da formulação de uma geometria não local, a qual deixaremos para futuras investigações.

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & \left[\left(-b' - \frac{a'}{2} \right) \frac{km}{r} + \left(-\frac{d'}{2} + \frac{f'}{2} \right) \left(\frac{km}{r} \right)^2 \right] \eta_{ij} + \\ & + \left[-b' \frac{km}{r} + f' \left(\frac{km}{r} \right)^2 \right] \frac{x^i x^j}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

e o termo contraído

$$\phi_{\alpha}^{\alpha} = \left(-a' - 4b' \right) \frac{km}{r} + \left(-d' + f' \right) \left(\frac{km}{r} \right)^2. \quad (3.74)$$

Os parâmetros multiplicativos nas equações acima, $(a', b', d'$ e $f')$, são combinações dos parâmetros livres da teoria. Não vamos nos preocupar em escrever a forma explícita para eles, até que encontremos a forma definitiva para o elemento de linha⁵. Sempre usaremos redefinições convenientemente, a fim de aliviar a notação.

Na expressão (3.70), para o caso em que estamos interessados, o fator conforme $S(\phi)^{-1}$ só contribui com o primeiro termo, pois todos os outros são de ordem maior ou igual que $O(3)$ (como pode ser visto diretamente de (3.71)), que negligenciaremos⁶. Desta forma, trataremos apenas com $(da^0)^2$ escrito da seguinte maneira:

$$(da^0)^2 = (\eta_{\mu\nu} + 2\psi_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu},$$

ou, expandindo a soma,

$$(da^0)^2 = (\eta_{00} + 2\psi_{00}) (dx^0)^2 + (\eta_{ij} + 2\psi_{ij}) dx^i dx^j. \quad (3.75)$$

⁵Usaremos a denominação *elemento de linha*, daqui por diante, apesar da presente teoria não ser fundamentalmente geométrica. Desta forma, justifica-se o abuso de linguagem pela simplicidade de notação.

⁶O fato de desconsiderarmos, neste ponto do desenvolvimento, termos de ordem $O(3)$, na expressão para a modificação do tempo próprio, é realizado tendo em vista que usaremos esta relação apenas para resolver os testes clássicos da gravitação, onde tal aproximação é válida.

Precisamos derivar as componentes do campo não-local, $\psi_{\mu\nu}$, que aparecem nesta última relação. Então, usando (3.72) a (3.74) em (3.64), e após algumas manipulações, resulta:

$$\psi_{00} = A' \left(\frac{2km}{r} \right) + B' \left(\frac{2km}{r} \right)^2, \quad (3.76)$$

e

$$\psi_{ij} = \left[C' \left(\frac{2km}{r} \right) + D' \left(\frac{2km}{r} \right)^2 \right] \eta_{ij} + \left[F' \left(\frac{2km}{r} \right) + G' \left(\frac{2km}{r} \right)^2 \right] \frac{x^i x^j}{r^2}. \quad (3.77)$$

Vamos continuar a derivação para o elemento de linha, usando, a partir deste ponto até onde for conveniente, unidades de $2km$. Nestas unidades as relações acima se escrevem:

$$\psi_{00} = \frac{A'}{r} + \frac{B'}{r^2}, \quad (3.78)$$

e

$$\psi_{ij} = \left(\frac{C'}{r} + \frac{D'}{r^2} \right) \eta_{ij} + \left(\frac{F'}{r} + \frac{G'}{r^2} \right) \frac{x^i x^j}{r^2}. \quad (3.79)$$

Introduzindo (3.78) e (3.79) em (3.75),

$$\begin{aligned} (da^0)^2 &= \left(1 + 2\frac{A'}{r} + 2\frac{B'}{r^2} \right) (dx^0)^2 + \\ &+ \left[\left(1 + 2\frac{C'}{r} + 2\frac{D'}{r^2} \right) \eta_{ij} + \left(2\frac{F'}{r} + 2\frac{G'}{r^2} \right) \frac{x^i x^j}{r^2} \right] dx^i dx^j. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Esta expressão está calculada para um sistema de coordenadas cartesiano ortogonal. Se escrevermos em coordenadas esféricas, considerando uma nova redefinição dos parâmetros,

encontraremos por fim,

$$(da^0)^2 = \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{b}{r} + \frac{B}{r^2}\right) dr^2 - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 d\Omega, \quad (3.81)$$

com

$$d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (3.82)$$

Enfim, os parâmetros que aparecem nas equações acima são escritos em termos dos parâmetros livres como segue:

$$a = -3(p+q)^2 - 2(p+q) + 1, \quad (3.83)$$

$$b = 3(p+q)^2 + 2(p+q) + 1, \quad (3.84)$$

$$d = \frac{3}{2}(p+q)^2 + \frac{5}{2}(p+q) + 1, \quad (3.85)$$

$$A = -\frac{15}{16}q^4 - \frac{3}{4}p^4 - \frac{57}{16}pq^3 - \frac{51}{16}p^3q - \frac{81}{16}p^2q^2 - \frac{11}{8}q^3 - \frac{21}{16}p^3 + \\ -\frac{65}{16}pq^2 - 4p^2q - \frac{3}{16}(p+q)^2 + \frac{1}{4}(p+q), \quad (3.86)$$

$$B = \frac{15}{8}q^4 + \frac{3}{2}p^4 + \frac{57}{8}pq^3 + \frac{51}{8}p^3q + \frac{81}{8}p^2q^2 + \frac{29}{16}q^3 + \frac{15}{8}p^3 + \\ + \frac{11}{2}pq^2 + \frac{89}{16}p^2q - \frac{9}{16}(p+q)^2 - \frac{1}{8}(p+q), \quad (3.87)$$

$$D = \frac{15}{16}q^3 + \frac{3}{4}p^3 + \frac{21}{8}pq^2 + \frac{39}{16}p^2q + \frac{17}{16}(p+q)^2 - \frac{1}{8} \quad (3.88)$$

Na próxima seção, derivaremos as soluções para a equação de órbita e procuraremos resolver os testes observacionais clássicos, a fim de fixar os bons valores de p e q . Por bons

valores, entenderemos aqueles que tornem esta uma boa teoria da gravitação, ou seja, que possam dar a descrição dos fenômenos cuja previsão teórica tenha sido experimentalmente comprovada.

3.5 Testes observacionais clássicos.

A expressão derivada para $(da^0)^2$ nos permite proceder da mesma maneira como é realizado para o caso da teoria da relatividade geral, para a equação da órbita. Do princípio da mínima ação de Hamilton,

$$\delta \int (da^0)^2 = 0.$$

Se escrevermos (3.81) nesta forma,

$$\delta \int \left\{ \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2} \right) \left(\frac{dt}{da^0} \right)^2 - \left(1 + \frac{b}{r} + \frac{D}{r^2} \right) \left(\frac{dr}{da^0} \right)^2 + \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{da^0} \right)^2 + \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{da^0} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

E, desde que o princípio variacional conduz às mesmas soluções para $\delta f F^{\frac{1}{2}}$ e $\delta f F$, facilita-nos prosseguir com a variação,

$$\delta \int \left[\left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2} \right) \left(\frac{dt}{da^0} \right)^2 - \left(1 + \frac{b}{r} + \frac{D}{r^2} \right) \left(\frac{dr}{da^0} \right)^2 + \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \left(\frac{d\theta}{da^0} \right)^2 - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{da^0} \right)^2 \right] = 0.$$

donde reconhecemos a lagrangeana⁷,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2}\right) \left(\frac{dt}{da^0}\right)^2 - \left(1 + \frac{b}{r} + \frac{D}{r^2}\right) \left(\frac{dr}{da^0}\right)^2 + \\ & - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 \left(\frac{d\theta}{da^0}\right)^2 - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{da^0}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Uma vez de posse da lagrangeana, poderemos procurar pelas soluções das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.90)$$

Vamos então, considerar cada uma das componentes de (3.90):

i) $\mu = 0, x^0 = t$:

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0,$$

mas

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = 2 \frac{d}{da^0} \left[\left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2}\right) \dot{t} \right],$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

⁷Usaremos a notação (\mathcal{L}) para a lagrangeana, entendendo que a mesma não deve ser confundida com a tratada na seção 3.3, como pode ser evidentemente entendido do desenvolvimento que segue.

Assim, retornando às equações de Euler,

$$\frac{d}{da^0} \left[\left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2} \right) \dot{t} \right] = 0,$$

onde vemos que o termo entre colchetes é uma constante de movimento, que definiremos da maneira que segue:

$$\left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2} \right) \dot{t} \equiv E. \quad (3.91)$$

ii) $\mu = 1, x^1 = r$:

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0,$$

se resolvermos os termos e retornarmos à equação de Euler , encontraremos,

$$\begin{aligned} -2 \frac{d}{da^0} \left[\left(1 + \frac{b}{r} + \frac{B}{r^2} \right) \dot{r} \right] &= \left(\frac{a}{r^2} + \frac{2A}{r^3} \right) \dot{t}^2 + \left(\frac{b}{r^2} + \frac{2B}{r^3} \right) \dot{r}^2 + \\ &+ \left(\frac{d}{r^2} + \frac{2D}{r^3} \right) r^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{d}{r^2} + \frac{2D}{r^3} \right) r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2 - 2 \left(1 + \frac{d}{r} + \right. \\ &\left. + \frac{D}{r^2} \right) r (\dot{\theta})^2 - 2 \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

iii) $\mu = 2, x^2 = \theta$:

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

resulta, após resolvidos os termos,

$$\frac{d}{da^0} \left[\left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \dot{\theta} \right] = \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2. \quad (3.93)$$

iv) $\mu = 3$, $x^3 = \varphi$:

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0,$$

como no primeiro caso,

$$\frac{d}{da^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -2 \frac{d}{da^0} \left[\left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} \right],$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0.$$

Assim, retornando às equações de Euler,

$$\frac{d}{da^0} \left[\left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} \right] = 0.$$

Encontramos,

$$\left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2} \right) r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (3.94)$$

Vamos estudar a equação (3.93), a fim de fixar um valor para a variável θ . Por uma conveniente escolha de eixos, podemos fazer $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta} = 0$ para algum a^0 inicial, de maneira tal a satisfazer a equação acima. Mas, como as condições iniciais determinam

uma solução única para o problema, resulta:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \forall a^0. \quad (3.95)$$

Assim, usando (3.95) em (3.94), encontramos,

$$\left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \equiv L.$$

Desta forma, determinamos outra constante de movimento:

$$L \equiv \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 \frac{d\varphi}{da^0}. \quad (3.96)$$

Resta-nos tratar a equação para a coordenada radial (r), dada em (3.92). Todavia, devido a sua complexidade, procuraremos resolver usando diretamente o elemento de linha. Assim, dividindo (3.81) por $(da^0)^2$, resulta:

$$\begin{aligned} 1 = & \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2}\right) \dot{t}^2 + \left(1 + \frac{b}{r} + \frac{D}{r^2}\right) \dot{r}^2 + \\ & - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 \dot{\theta}^2 - \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{D}{r^2}\right) r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Substituindo as quantidades (3.91), (3.95) e (3.96) nesta última, resulta:

$$1 = \left(1 - \frac{a}{r} - \frac{A}{r^2}\right)^{-1} E^2 - \left(1 + \frac{b}{r} + \frac{D}{r^2}\right) \dot{r}^2 - (r^2 + dr + D)^{-1} L^2. \quad (3.98)$$

Se considerarmos a maneira usual de se encontrar a equação da órbita,

$$r' \equiv \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \Rightarrow \dot{r} = \dot{\varphi} r', \quad (3.99)$$

e realizando a substituição de variáveis,

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2}, \quad (3.100)$$

em (3.98), encontraremos,

$$\begin{aligned} u'^2 = & -\left(1 + bu + Bu^2\right)^{-1} \left(u^2 + du^3 + Du^4\right) + \\ & -\left(1 + bu + Bu^2\right)^{-1} \left(1 + du + Du^2\right)^2 \frac{1}{L^2} + \\ & + \left(1 + bu + Bu^2\right)^{-1} \left(1 - au - Au^2\right)^{-1} \left(1 + du + Du^2\right)^2 \frac{E^2}{L^2}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Derivando (3.101) com respeito a φ , e desde que estamos interessados em resolver o problema de uma partícula afastada da origem do campo gravitacional, de tal sorte que $u = \frac{1}{r} \ll 1$, encontraremos após cálculos diretos,

$$\begin{aligned} u'' + u = & \frac{1}{2}a \frac{E^2}{L^2} + \frac{1}{2}(2d - b) \frac{E^2 - 1}{L^2} + \left[(A + a^2 - ab + 2ad) \frac{E^2}{L^2} + \right. \\ & \left. + (-B + 2D + b^2 - 2bd + d^2) \frac{E^2 - 1}{L^2} \right] u + \frac{3}{2}(b - d)u^2 + O(3). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Podemos, a partir de (3.102), encontrar a equação da órbita para o caso planetário, onde temos $E^2 \approx 1$. Assim, tomando esta aproximação, resulta:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{2}a \frac{E^2}{L^2} + (A + a^2 - ab + 2ad) \frac{E^2}{L^2}u + \frac{3}{2}(b - d)u^2. \quad (3.103)$$

Os dois últimos termos fornecem a precessão do periélio. Usando, como uma boa aprox-

imação, que

$$u \approx \frac{1}{2} a \frac{E^2}{L^2},$$

como de fato ocorre para o sistema solar, como exemplo, e retornando às unidades convencionais,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = a \frac{km}{L^2} + 2 \left(\frac{2A}{a} + 2a - \frac{b}{2} + \frac{5}{2}d \right) km u^2.$$

Vimos trabalhando em unidades de $2km$, porém de (3.41),

$$m \equiv \frac{k}{8\pi} \int dV T_{00}.$$

Se definirmos as quantidades,

$$G \equiv \frac{k^2}{8\pi} \tag{3.104}$$

e

$$M \equiv \int dV T_{00}, \tag{3.105}$$

resulta:

$$2km = 2 \frac{k^2}{8\pi} \int dV T_{00} = 2GM.$$

Logo, utilizando esta nomenclatura na equação da órbita,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{L^2} a + 2 \left(\frac{2A}{a} + 2a - \frac{b}{2} + \frac{5}{2}d \right) GM u^2. \tag{3.106}$$

Assim, o segundo termo, no lado direito, fornece a precessão do periélio.

O que estamos procurando é ajustar o valor dos parâmetros p e q , de forma a fechar a nossa teoria para estes valores. Já temos uma equação que pode ser comparada às predições com a observação. Porém, vamos antes resolver um outro teste, que é o desvio dos raios de luz por um campo gravitacional.

Para raios de luz, todas as aproximações feitas acima, até a equação (3.102), continuam válidas, e ainda mais, temos para este caso,

$$\frac{E^2}{L^2} \sim O(2).$$

Então, descartando os termos $\frac{E^2}{L^2}$ multiplicados por u , e considerando que para raios luminosos $da^0 = 0$, encontraremos

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{2}(a - b + 2d)\frac{E^2}{L^2} + \frac{3}{2}(b - d)u^2 + O(3). \quad (3.107)$$

Retornando às unidades convencionais,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = GM(a - b + 2d)\frac{E^2}{L^2} + 3GM(b - d)u^2. \quad (3.108)$$

Na teoria newtoniana da gravitação, o valor previsto para o desvio dos raios luminosos é dado por:

$$GM\frac{E^2}{L^2},$$

que é metade do valor previsto pela teoria da relatividade geral, onde encontra-se,

$$3GMu^2.$$

Se compararmos os valores preditos pelas diferentes teorias, que diferem por um fator $\frac{1}{2}$, encontraremos a seguinte relação:

$$\frac{E^2}{L^2} = \frac{3}{2}u^2,$$

que introduzida na expressão para este fenômeno, predito pela presente teoria, resulta:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}GM(a+b)u^2. \quad (3.109)$$

Daqui, vemos que para as nossas predições resultarem no valor observado para o desvio dos raios luminosos, o lado direito da equação (3.109) deve ser igual a $3GMu^2$. Se usarmos as expressões (3.83) e (3.84), vemos que a soma $(a+b) \equiv 2$, de onde resulta exatamente a predição esperada. Desta forma, encontramos para a deflexão de raios luminosos,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3GMu^2,$$

que é o mesmo valor predito pela relatividade geral, e verificado experimentalmente.

Agora, retornando à equação (3.106), vemos que, comparado aos resultados da relatividade geral, o primeiro termo no lado direito deve ser igual a $\frac{GM}{L^2}$. Como temos a solução identidade $(a+b) \equiv 2$, podemos escolher como uma solução aceitável,

$$a = 1, \quad (3.110)$$

$$b = 1. \quad (3.111)$$

Usando esta solução na equação para a precessão do periélio,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + 3GMu^2 + (4A + 5d)GMu^2.$$

Para este resultado trazer as mesmas previsões para a precessão, devemos encontrar, no lado direito desta última: $\frac{GM}{L^2} + 3GMu^2$. Assim, fixaremos a equação polinomial⁸:

$$4A + 5d = 0. \tag{3.112}$$

Então, se resolvemos o sistema de equações (3.112) e (3.110) ou (3.111), teremos uma única solução possível para os parâmetros p e q , qual seja,

$$p = -1, \tag{3.113}$$

$$q = \frac{1}{3}. \tag{3.114}$$

Finalmente, retornando estes valores aos coeficientes dos termos do elemento de linha, resulta:

$$a = 1,$$

$$b = 1,$$

$$d = 0,$$

$$A = 0,$$

⁸Com esta equação, temos fechado o sistema procurado, ou seja, desde que as equações $a = 1$ e $b = 1$ são, em verdade, uma só (como pode ser visto diretamente de (3.110) e (3.111)), resulta, juntamente com (3.112), duas equações para duas incógnitas.

$$B = -\frac{17}{36},$$

$$D = \frac{17}{36}. \quad (3.115)$$

Estes resultados, quando resolvido o problema do desvio para o vermelho (gravitacional), também concordam com as predições da relatividade geral, como pode ser visto diretamente da equação (3.91),

$$E = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{dt}{da^0}. \quad (3.116)$$

O quarto teste também é satisfeito⁹.

Desta forma, obtivemos os valores dos parâmetros livres (p e q) que tornam esta, uma teoria unívoca à gravitação. Substituindo estes valores na expressão (3.81), obteremos:

$$(da^0)^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{1}{r} - \frac{17}{36r^2}\right) dr^2 - \left(1 + \frac{17}{36r^2}\right) r^2 d\Omega. \quad (3.117)$$

Obtivemos assim, por meio de uma teoria não local não linear, a predição correta para os quatro testes padrões da gravitação.

⁹O quarto teste é o conhecido Radar Delay Time[8]. Uma vez encontrado a expressão correta para o desvio dos raios luminosos, este teste já se satisfaz identicamente, desde que é formulado sobre os mesmos fundamentos. Desta forma, não nos preocuparemos aqui, em resolvê-lo explicitamente. O leitor poderá encontrá-lo resolvido em vários livros textos de gravitação.

Conclusão

Foi desenvolvido um modelo não local para a descrição do campo gravitacional, preservando a sua característica auto-interativa. Para este, realizamos projeções livres dos tensores momentum-energia da matéria e da gravitação, considerado este último não linear de segunda ordem no campo. Resolvemos o problema da ambiguidade na formulação, devido à invariância na construção da teoria, segundo valores particulares dos parâmetros livres (introduzidos pelas projeções livres), comparando as predições da mesma com os testes observacionais clássicos. Desta forma, encontramos um único conjunto possível de valores para os parâmetros, compatíveis com os dados experimentais. Resultando assim, em uma teoria unívoca capaz de descrever o campo gravitacional.

Uma vez estabelecida a teoria, notamos os vários possíveis caminhos para futuras investigações, dos quais já podemos enumerar alguns:

- Dada a solução dos parâmetros livres, verificar se alguma escolha de gauge conduz a uma formulação local, e suas implicações;
- Estudar a compatibilidade de tal teoria na predição da estrutura de campo forte, tal como o de estrelas de nêutrons;
- Interpretação geométrica - possibilidade de construção de uma geometria não-local.

Apêndice A - Algumas operações envolvendo Δ^{-1} .

Vamos, a seguir, dar um exemplo esclarecedor do método utilizado para realizar as operações de Δ^{-1} sobre algumas funções, dependentes da coordenada radial, que nos interessam na resolução das equações de campo, e a seguir, listar outros resultados que seguem o mesmo procedimento. Por fim, faremos o mesmo com respeito a algumas funções mais gerais.

Começemos por resolver a seguinte aplicação:

$$\Delta^{-1} \left(\frac{1}{r} \right) \equiv f(r).$$

Se aplicarmos o operador inverso Δ sobre $f(r)$, encontraremos a relação:

$$\Delta \Delta^{-1} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r}.$$

Ou, em termos de $f(r)$,

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}. \tag{A.1}$$

Esta operação identidade é sempre válida para funções do tipo,

$$f(r) \sim \frac{1}{r^n}, n \geq 1,$$

que chamaremos, a partir deste ponto, de *funções bem comportadas*. Integrando (A.1) em dV e aplicando o teorema de Gauss, resulta por um lado,

$$\int_V dV \Delta f(r) = - \int_S dS \vec{\nabla} f(r) \cdot \hat{n} = -4\pi \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) \Big|_r,$$

e por outro lado,

$$\int_V dV \frac{1}{r} = \int_{\tau, \theta, \varphi} dr d\theta d\varphi r \sin(\theta) = 2\pi r^2 \Big|_r.$$

Logo, igualando os resultados e deixando a coordenada radial livre, encontraremos,

$$\frac{df}{dr} = -\frac{1}{2},$$

que pode ser integrada novamente, resultando:

$$f(r) = -\frac{r}{2},$$

ou finalmente, de (A.1),

$$\Delta^{-1} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{r}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Como já havíamos anunciado anteriormente, listaremos outros resultados importantes que seguem o mesmo procedimento:

$$\Delta^{-1} \left(\frac{1}{r^4} \right) = -\frac{1}{2r^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta^{-1} \left(\frac{1}{r^6} \right) = -\frac{1}{12r^4}, \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta^{-1} \left(\Delta^{-1} \frac{1}{r^6} \right) = \frac{1}{24r^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta^{-1} \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r^2} \right) = \left(\frac{\eta_{ij}}{r^2} + 2 \frac{x_i x_j}{r^4} \right). \quad (\text{A.6})$$

Vamos passar agora, ao cálculo de aplicações de Δ^{-1} sobre funções do tipo

$$\frac{x_i x_j}{r^8}.$$

Para isto, vamos considerar que a operação de comutação:

$$\Delta^{-1} \partial_i \partial_j f(r) = \partial_i \partial_j \Delta^{-1} f(r), \quad (\text{A.7})$$

seja válida. Com $f(r)$ funções bem comportadas. Ao término deste apêndice, comentaremos a respeito da validade desta afirmação. Uma prova rigorosa não se faz necessária. Usaremos também, os resultados encontrados anteriormente, sem fazermos citação a eles.

Vamos desenvolver ambos os lados de (A.7), para $f(r) = \frac{1}{r^4}$, separadamente:

i) $\Delta^{-1} \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r^4} \right)$:

$$\Delta^{-1} \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r^4} \right) = \Delta^{-1} \left[4 \left(\frac{\eta_{ij}}{r^6} + 6 \frac{x_i x_j}{r^8} \right) \right],$$

e, desde que Δ^{-1} é linear sob operação de soma,

$$\Delta^{-1} \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r^4} \right) = 4\eta_{ij} \Delta^{-1} \left(\frac{1}{r^6} \right) + 24\Delta^{-1} \left(\frac{x_i x_j}{r^8} \right).$$

Por outro lado,

j) $\partial_i \partial_j \Delta^{-1} \left(\frac{1}{r^4} \right)$:

$$\partial_i \partial_j \Delta^{-1} \left(\frac{1}{r^4} \right) = \partial_i \partial_j \left(-\frac{1}{2r^2} \right) = -\left(\frac{\eta_{ij}}{r^4} + 4 \frac{x_i x_j}{r^6} \right).$$

Comparando ambos os lados, resulta:

$$4\eta_{ij} \Delta^{-1} \left(\frac{1}{r^6} \right) + 24\Delta^{-1} \left(\frac{x_i x_j}{r^8} \right) = \partial_i \partial_j \left(-\frac{1}{2r^2} \right) = -\left(\frac{\eta_{ij}}{r^4} + 4 \frac{x_i x_j}{r^6} \right),$$

ou ainda,

$$\Delta^{-1} \left(\frac{x_i x_j}{r^8} \right) = -\frac{1}{36r^4} \left(\eta_{ij} + 6 \frac{x_i x_j}{r^2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, vamos listar outros resultados que seguem o mesmo tipo de procedimento:

$$\Delta^{-1} \left(\frac{x_i x_j}{r^6} \right) = \frac{1}{4r^2} \left(\eta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

e

$$\Delta^{-1} \Delta^{-1} \left(\frac{x_i x_j}{r^8} \right) = -\frac{1}{36r^2} \left(\eta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{x_i x_j}{r^2} \right). \quad (\text{A.10})$$

As operações realizadas acima, que necessitaram do uso da comutação dos operadores Δ^{-1} e ∂ , são justificadas facilmente se apelarmos a resolver o caminho contrário, ou seja, partir do resultado, e tentar chegar às equações que o originaram. Isto pode ser feito em todas as operações acima, sem trazer qualquer problema de divergência. Desta forma, justifica-se comutar os operadores citados. Se quisermos uma prova mais rigorosa para isto, é só retornarmos à demonstração da propriedade de projetor do operador $P_{\mu\nu}$, dada no capítulo 2, onde usamos esta mesma relação de comutação, que se mostrou válida para funções bem comportadas, as quais vimos usando por todo o trabalho.

Apêndice B - Termos necessários à resolução de $\Delta\sigma_{\alpha\beta}$.

Nesta seção, listaremos os resultados das contrações de vários termos que aparecem nas equações para σ_{00} , σ_{α}^{α} e σ_{ij} , que resolvemos no capítulo 3. Os parâmetros que aparecem nestas relações são polinômios em p e q , e deixaremos para explicitar suas expressões no final.

$$\rho_{\alpha\beta|\gamma}\rho^{\alpha\beta|\gamma} = \beta_1 \frac{m^2}{r^4}, \quad (\text{B.1})$$

$$\rho_{\alpha|\gamma}\rho^{\beta|\gamma} = -\alpha_3^2 \frac{m^2}{r^4}, \quad (\text{B.2})$$

$$\Delta\rho_{\alpha\beta}\Delta\rho^{\alpha\beta} = \beta_2 k^2 T_{00}^2 + \beta_3 \frac{m^2}{r^6}, \quad (\text{B.3})$$

$$\Delta\rho_{\alpha\beta|\gamma}\rho^{\alpha\beta|\gamma} = \beta_4 km T_{00|i} \frac{x^i}{r^3} + \beta_5 \frac{m^2}{r^6}, \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta\rho_{\alpha}^{\alpha}\Delta\rho_{\beta}^{\beta} = \beta_6 k^2 T_{00}^2, \quad (\text{B.5})$$

$$\Delta\rho_{\alpha|\gamma}\rho^{\beta|\gamma} = 2\beta_6 km T_{00|i} \frac{x^i}{r^3}, \quad (\text{B.6})$$

$$\rho_{\alpha\beta|ij}\Delta\rho^{\alpha\beta} = \beta_4 km \frac{T_{00}}{r^3} \left(\eta_{ij} + 3 \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + 16\alpha_2^2 \frac{m^2}{r^6} \left(\eta^{ij} + \frac{3}{2} \frac{x^i x^j}{r^2} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\rho_{\alpha\beta|\gamma i}\rho^{\alpha\beta|\gamma} = \frac{m^2}{r^6} \left(\beta_8 \eta_{ij} - \beta_9 \frac{x^i x^j}{r^2} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\rho_{\alpha|ij}\Delta\rho_{\beta}^{\beta} = 2\beta_6 mk \frac{T_{00}}{r^3} \left(\eta_{ij} + 3 \frac{x^i x^j}{r^2} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$\rho_{\alpha|\gamma i}\rho^{\beta|\gamma} = \alpha_3^2 \frac{m^2}{r^6} \left(\eta_{ij} - 3 \frac{x^i x^j}{r^2} \right). \quad (\text{B.10})$$

Vamos, a seguir, explicitar as expressões para os parâmetros que aparecem em todas as relações acima listadas:

$$\beta_1 = -14(p+q)^2 - 8(p+q) - 4, \quad (\text{B.11})$$

$$\alpha_3 = -2(1 + 3p + 3q), \quad (\text{B.12})$$

$$\beta_2 = 4(p + q)^2 + 2(p + q) + 1, \quad (\text{B.13})$$

$$\beta_3 = 24(p + q)^2, \quad (\text{B.14})$$

$$\beta_4 = 6(p + q)^2 + 4(p + q) + 2, \quad (\text{B.15})$$

$$\beta_5 = -36(p + q)^2, \quad (\text{B.16})$$

$$\beta_6 = (1 + 3p + 3q)^2, \quad (\text{B.17})$$

$$\alpha_2 = -\frac{p + q + 3pq + 3q^2}{1 + 3q}, \quad (\text{B.18})$$

$$\beta_8 = 32(p + q)^2 + 8(p + q) + 4, \quad (\text{B.19})$$

$$\beta_9 = 24(p + q)^2 + 24(p + q) + 12. \quad (\text{B.20})$$

Referências

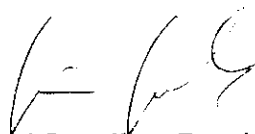
- [1] A. Einstein, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 142, 1917. Traduzido para o inglês em *The Principle of Relativity* Methuen, (1923).
- [2] S. Deser and B. E. Laurent, “*Gravitation Without Self-Interaction*”. Ann. Phys., **50**, 76 (1968).
- [3] C. Moller, “*On the Localization of the Energy of a Physical System in the General Theory of Relativity*”. Ann. Phys., **4**, 347 (1958).
- [4] S. N. Gupta, “*Quantization of Einstein’s Gravitational Field: Linear Approximation*”. Proc. Phys. Soc., A **65**, 162 (1952).
- [5] OR. C. Tolman, “*On the Use of the Energy-Momentum Principle in General Relativity*”. Phys. Rev., **35**, 875 (1930).
- [6] A. Papapetrou, “*Einstein’s Theory of Gravitation and Flat Space*”. Proc. R. I. A., A **52**, 11 (1948).
- [7] S. N. Gupta, “*Einstein’s and Other Theory of Gravitation*”. Rev. Mod. Phys., **29**, 334 (1957).
- [8] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*”. John Wiley & Sons, Inc. N. Y. (1972).

- [9] R. P. Feynman, "*Lectures on Gravitation*". California Inst. Techonology. (1962-3).
- [10] L. Landau e E. Lifshitz, "*Teoria do Campo*". Ed. Mir, Moscou (1980).
- [11] R. K. Pathria, "*The Theory of Relativity*". Pergamon Press, N. Y. (1974).
- [12] R. Adler, M. Bazirn and M. Schiffer, "*Introduction to General Relativity*". Mc Graw-Hill, Inc, N. Y. (1965).
- [13] H. C. Ohanian, "*Gravitation and Spacetime*". W. W. Norton, N. Y. (1976).
- [14] E. Zauderer, "*Partial Differential Equations of Applied Mathematics*". John Wiley & Sons. N. Y. (1983).
- [15] M. Novello e V. A. De Lorenci, "*Non Linear Non Local Theory of Gravitation*".
Notas de Física, CBPF-NF-070/94, Dez/94. {Em fase de publicação.}

“TEORIA NÃO LOCAL DA GRAVITACÃO”

Vitório Alberto de Lorenci

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Mário Novello - Presidente



Maurício Ortiz Calvão



Nelson Pinto Neto



Luiz Alberto Rezende de Oliveira

Rio de Janeiro, 21 de dezembro de 1994