

TESE DE
MESTRADO

**PERTURBAÇÕES ESCALARES
NO UNIVERSO DE
FRIEDMAN-ROBERTSON-
WALKER**

Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, AGOSTO DE 1994

à Flávia,
que me ensina a amar.

To laugh is to risk appearing a fool
To weep is to risk appearing sentimental
To reach out another is to risk involvement
To explore feelings is to risk exposing your true self
To place your ideas, your dreams, before the crowd is to risk loss
To love is to risk not being loved in return
To live is to risk dying
To hope is to risk despair
To try at all is to risk failure
But to risk we must
Because the greatest hazard in life is to risk nothing
The man, the woman, who risks nothing, does nothing, has nothing, is nothing.

Os versos que antes escrevi mentiam
Mesmo os que amor maior não concebesses:

A meu juízo, então, não parecia
Que a chama, já total, mais clara ardesse.

Mas o tempo, entre mil intervenções,

Se opõe a juras e a reais decretos,

Turva a beleza, esgota a obstinação,

Desvia a mente forte em seus trajetos

Porque — temendo o tempo eu não podia

Dizer do amor total, já manifesto?

É que o amor é criança: eu não ousava
Dar por crescido o que crescendo estava.

William Shakespeare

Agradecimentos

A Mário Novello, por tudo que me ensinou na orientação ao longo do Mestrado e parte da Iniciação Científica;

A Nami Fux Svaiter, que me apresentou à Relatividade Geral;

A José M. Salim, pelos inúmeros auxílios e discussões;

A Renato Portugal, pelos numerosos auxílios com as estações de trabalho e com o MapleV;

A Flávia Perez, Luiz Guilherme e Patrícia Lutterbach, por todo o amor, amizade e carinho que sempre recebi;

A Eduardo Souza Fraga, Thereza Cristina de Lacerda Paiva, Eduardo Lucciola Molon e Valéria Hazan, pela profunda amizade que compartilhamos desde o colégio;

A Orlandino de Souza e à SODEC, por todo o estímulo que me levou à Física;

A Maria Inez e Sergio, meus pais, por tudo que continuam me ensinando;

A Heliette e Lysia, minhas avós, pela compreensão e disposição a qualquer hora;

A Lima e Sueli, por todo o apoio que sempre me deram;

A Luciana, Alessandra, Thiago e Julia, meus irmãos, por fazerem de nossa casa um lugar sempre agradável de estar;

A Renato Klippert, Vitório De Lorenci, Martha Christina Motta da Silva, Sergio

Duque, Denise Coutinho, Filipe Paiva, grandes amigos que conheci no CBPF;

A Myriam Coutinho, pelos infindáveis bom humor e paciência, sem os quais o trabalho certamente teria sido bem mais pesado;

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Perturbações Escalares no Universo de Friedman-Robertson-Walker

A teoria de perturbações cosmológicas no universo de Friedman-Robertson-Walker (FRW) é estudada segundo o formalismo Quasi-Maxwelliano, usando a decomposição em harmônicos introduzida por Lifshitz *et al.*. Restringimo-nos ao caso escalar, relacionado com perturbações na densidade de matéria. Não são estudadas perturbações rotacionais nem ondas gravitacionais. Admitindo um fluido perturbado linear sem fluxo de energia, obtemos um sistema dinâmico fechado para duas variáveis básicas, com interpretação física imediata e independentes de *gauge*. Aplicando um tratamento hamiltoniano, obtemos a instabilidade do universo de FRW.

Summary

Scalar Perturbations in Friedman-Robertson-Walker Universe

The theory of cosmological perturbations in Friedman-Robertson-Walker Universe (FRW) is studied following Quasi-Maxwellian formalism, using the decomposition in harmonics, introduced by Lifshitz *et al.* We restrict ourselves to the scalar case, related to perturbations in the matter density. Rotational perturbations and gravitational waves are not studied. Assuming a linear perturbed fluid without energy flux, we obtain a closed dynamical system for two basic variables, which are of immediate physical interpretation and are gauge invariant. By applying a hamiltonian treatment, we obtain the instability of FRW Universe.

Índice

Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	6
Índice	7
1 Introdução	9
1.1 A <i>Gauge</i>	10
1.2 Programa de Trabalho	11
2 Notações	13
3 Observadores e Observações	15
4 Tensor de Weyl	19
5 Tensor Momentum-Energia	23
5.1 Os Componentes	23
5.2 Equações de Conservação	26
5.2.1 O Fluido Perturbado	27
6 Formalismo Quasi-Maxwelliano	31

6.1	As Equações Quasi-Maxwellianas	33
6.2	Equações de Evolução	36
6.3	Equações de Vínculo	38
7	Lema de Stewart	40
8	Expansão em Harmônicos	43
9	Sistema Dinâmico Fechado	49
9.1	Caso de Sitter	52
9.1.1	O Vácuo	52
9.1.2	O Novo Sistema Fechado	53
10	Variáveis G.I. já Existentes na Literatura	55
10.1	Variáveis de Bardeen	55
10.1.1	Formalismo de Bardeen	55
10.1.2	A equivalência	57
10.2	Variáveis de Ellis e Bruni	58
11	Formalismo Hamiltoniano	60
12	Conclusão	64
A	Harmônicos Escalares	66
B	Perturbações Uniformes	71
C	Cálculo da Parte Elétrica do Tensor de Weyl Perturbado	75

Capítulo 1

Introdução

O estudo de perturbações cosmológicas têm originado muitos trabalhos desde o original de Lifshitz e Khalanikov [1]. O interesse é duplo: os trabalhos podem ser vistos tanto como estudos sobre a estabilidade de soluções exatas das equações de Einstein como sobre a formação de estruturas no nosso universo. Aqui estaremos preocupados somente com a evolução de tais perturbações; não faremos qualquer suposição sobre a origem de seu espectro inicial, embora existam na literatura atual diversos trabalhos neste sentido [2] [3] [4] [5].

O formalismo aqui empregado se aplica a perturbações em espaço-tempos curvos com um fluido perfeito homogêneo e isotrópico como fonte. Contudo, admitiremos que o fluido perturbado pode apresentar *shear*, pressão anisotrópica, e — apenas no caso de perturbação do universo de de Sitter — fluxo de energia. A equação de estado não será alterada pela perturbação:

$$p = \lambda \rho \Rightarrow \delta p = \lambda \delta \rho .$$

Ou seja, somente consideraremos perturbações provocadas pelo próprio fluido gerador da

curvatura.

1.1 A Gauge

A definição de uma perturbação traz consigo um grau de liberdade a mais, chamado de *gauge*. Ela representa a arbitrariedade existente na associação entre os pontos do espaço-tempo de fundo e os do espaço-tempo perturbado, onde devemos comparar os valores de um dado objeto para definirmos sua variação.

Em Mecânica Quântica, o termo *gauge* designa um grau de liberdade arbitrário, que pode permanecer indeterminado independente do observador, pois não tem relação alguma com os dados extraídos de uma experiência. No estudo relativístico de perturbações cosmológicas, no entanto, o termo *gauge* designa a liberdade do observador na escolha da separação entre o que é espaço-tempo de fundo e o que é perturbação. Obviamente, tal escolha não interfere nos dados — como em Mecânica Quântica — mas é necessária aqui para possibilitar a comparação das previsões teóricas com as observações.

Diversos esquemas foram utilizados para solucionar este problema. Inicialmente, tentou-se fixar a *gauge* mediante uma fixação do sistema de coordenadas. Logo percebeu-se, porém, que isto não a determinava completamente, além de impedir a interpretação dos resultados por observadores não adaptados às coordenadas usadas. Bardeen [6] foi responsável por um grande avanço nesta direção definindo artificialmente objetos independentes de *gauge* (IG, daqui por diante); contudo, não são de fácil interpretação em um sistema de coordenadas genérico. Por outro lado, o formalismo de Jordan [7] das equações de Einstein, também conhecido como formulação Quasi-Maxwelliana da Gravitação, introduzido por Hawking [8] no estudo de perturbações cosmológicas, não apresenta esta

dificuldade. Suas equações lidam diretamente com objetos observáveis do fluido — e portanto de interpretação imediata.

O objetivo deste trabalho é demonstrar que estas equações exibem diretamente os objetos IG necessários para a caracterização da evolução das perturbações de todos os objetos interessantes definidos anteriormente na literatura, permitindo que uma eventual fixação de *gauge* seja feita apenas no fim dos cálculos.

Para isto, usaremos a decomposição em harmônicos introduzida por Lifshitz e Khalatnikov [1] e utilizada por Bardeen [6]. Nos restringiremos aqui aos harmônicos escalares: não serão estudados aqui os casos de perturbações rotacionais¹, nem ondas gravitacionais. O total desacoplamento destes modos foi provado, no caso de um universo homogêneo, por Kodama e Sasaki [20].

1.2 Programa de Trabalho

No Cap. 2 são estabelecidas as notações e convenções utilizadas. O Cap. 3 define os projetores espacial e temporal associados a um observador, e define os parâmetros observáveis que caracterizam o campo de velocidades de um fluido. O Cap. 4 introduz o tensor de Weyl (ou tensor Conforme), suas partes irredutíveis e as propriedades de ambos. No Cap. 5 são tratados o tensor Momentum-energia e as equações de conservação que dele se originam. Aqui já podemos obter as primeiras equações para o fluido perturbado. No Cap. 6 são apresentadas as equações Quasi-Maxwellianas, juntamente com as equações de evolução e de vínculo para objetos geométricos e do fluido, obtidas a partir da definição do tensor de Riemann. O Cap. 7 define rigorosamente a liberdade de *gauge* a que nos

¹A exclusão automática de perturbações na vorticidade no caso escalar é explicada no Cap. 8.

referimos na Subseção 1.1. No Cap. 8, é feita a expansão dos objetos perturbados na base de harmônicos escalares. O Cap. 9 mostra como as equações Quasi-Maxwellianas formam um sistema dinâmico fechado para as variáveis introduzidas no Cap. 8. No Cap. 10 expressamos as variáveis básicas aqui definidas em termos dos objetos I.G. já definidos na literatura, mostrando que têm a mesma informação. No Cap. 11, mostramos que é possível a definição de uma hamiltoniana para as variáveis em questão, que esclarece a estabilidade de um universo de Friedman-Robertson-Walker para uma classe de perturbações e abre caminho para uma futura quantização destas perturbações. O Apêndice A define formalmente os harmônicos escalares, seguindo Lifshitz e Khalatnikov [1] e Harrison [23]. No Apêndice B, estudamos, por completeza, as perturbações uniformes possíveis no quadro de perturbações escalares. No Apêndice C incluímos o programa em linguagem para MapleV que calcula os componentes da parte elétrica do tensor de Weyl quando o objeto básico da perturbação é a métrica de FRW. O resultado deste cálculo ilustra a transposição entre as variáveis aqui usadas e os objetos introduzidos por Bardeen [6].

Capítulo 2

Notações

Ao longo deste trabalho, índices latinos variam de 1 a 3, e gregos de 0 a 4. Escrevemos o elemento de linha de Friedman-Robertson-Walker (FRW, daqui por diante) no sistema de coordenadas gaussiano:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j , \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $g_{ij} = -A^2(t) \gamma_{ij}$, sendo $A(t)$ o fator de escala do universo, e γ_{ij} a métrica do 3-espaço:

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (2.2)$$

A curvatura da 3-superfície de homogeneidade K é definida por:

$${}^{(3)}R_{ijkl} \equiv K \gamma_{ijkl} , \quad (2.3)$$

onde $\gamma_{ijkl} \equiv \gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}$. Deste modo, $K = +1$ corresponde a um 3-espaço fechado, $K = 0$ a um plano, e $K = -1$ a um aberto.

Os 4-vetores V_α , perturbados ou não, são normalizados a 1:

$$g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 1 . \quad (2.4)$$

Ao longo do trabalho, fazemos

$$c \equiv 1 ,$$
$$\kappa \equiv \frac{1}{8\pi G} ,$$

o que nos permite escrever as equações de Einstein na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

onde $R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$.

Índices entre parênteses são simetrisados, e entre colchetes são anti-simetrisados:

$$A_{(\alpha\beta)} \equiv A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha} , \quad (2.6)$$

$$A_{[\alpha\beta]} \equiv A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha} . \quad (2.7)$$

Capítulo 3

Observadores e Observações

Na relatividade geral, expressa-se todas as grandezas do estudo na forma tensorial. Assim, elas podem ser definidas independentemente do observador, e são de imediata transformação sob uma mudança arbitrária de coordenadas, permitindo uma formulação covariante de toda a teoria. Do mesmo modo, um observador é definido pelo seu 4-vetor velocidade V^μ , tangente à sua linha de universo — sua trajetória no espaço-tempo.

No entanto, um observador não pode medir tensores. Na realidade, somente podem ser medidas suas projeções ao longo de eixos previamente definidos. O eixo temporal particular de cada observador é definido pela direção de seu 4-vetor velocidade, tangente à sua linha de universo. Para um dado observador, esta direção é totalmente independente das suas particulares¹ direções espaciais — e exatamente por isso é ortogonal a elas.

Assim sendo, o componente temporal de um vetor qualquer A^μ , relativamente a um observador com 4-velocidade V^μ , é definido:

$$A_T := A^\mu V_\mu.$$

¹As direções dos 3 eixos espaciais — mantidos ortogonais a V^μ — serão mantidas arbitrárias. Por isso, a projeção de um 4-vetor no 3-espaço de um observador deve resultar em um 3-vetor.

Os componentes espaciais vistos por este mesmo observador são obtidos subtraindo-se a parte temporal:

$$A_E^\mu := A^\nu (\delta_\nu^\mu - V_\nu V^\mu) \equiv A^\nu h_\nu^\mu.$$

O 2º termo do lado direito da equação acima será bastante útil, o que justifica a adoção do símbolo compacto h_ν^μ . Ele projeta objetos 4-dimensionais no 3-espaço do observador, ortogonal à direção do seu 4-vetor velocidade. Facilmente verifica-se que ele realmente satisfaz às propriedades de tal projetor:

$$h_\alpha^\mu h_{\mu\beta} = h_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

$$h_\alpha^\beta V_\beta = 0 \quad (3.2)$$

Quando desejamos descrever a cinemática de um fluido, precisamos definir o 4-vetor velocidade de cada elemento desse fluido. Ou seja, se o fluido não está restrito a uma região do espaço, é necessário um campo de velocidades em toda a variedade. A caracterização do estado cinemático do fluido pode ser realizada através da decomposição da derivada covariante de seu campo de velocidades nas suas partes irredutíveis. Separando o componente na direção do próprio V_μ , teremos:

$$V_{\mu;\nu} = a_\mu V_\nu + a_\nu V_\mu + h_\mu^\alpha h_\nu^\beta V_{\alpha;\beta} .$$

Separando também as partes anti-simétrica, a simétrica e o traço:

$$V_{\mu;\nu} = a_\mu V_\nu + a_\nu V_\mu +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} (V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha}) + \\
& + \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \left(V_{\alpha;\beta} + V_{\beta;\alpha} - \frac{2}{3} V^{\epsilon}_{;\epsilon} h_{\alpha\beta} \right) + \\
& + \frac{1}{3} V^{\alpha}_{;\alpha} h_{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A notação usada para os componentes dessa decomposição é [9]:

$$\theta := V^{\alpha}_{;\alpha} , \tag{3.4}$$

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \left(V_{\alpha;\beta} + V_{\beta;\alpha} - \frac{2}{3} V^{\epsilon}_{;\epsilon} h_{\alpha\beta} \right) , \tag{3.5}$$

$$\omega_{\mu\nu} := \frac{1}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} (V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha}) , \tag{3.6}$$

$$a_{\mu} \equiv V_{\mu;\nu} V^{\nu} , \tag{3.7}$$

que então se escreve²:

$$V_{\mu;\nu} = \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + a_{\mu} V_{\nu} . \tag{3.8}$$

O escalar θ é interpretado³ como a expansão do campo de velocidades, e os tensores $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ como a deformação⁴ e rotação do campo, respectivamente. O vetor a_{μ} é a 4-aceleração do fluido. É fácil verificar que eles obedecem às seguintes equações:

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu} , \quad \sigma_{\mu\nu} V^{\mu} = 0 , \quad \sigma_{\mu\nu} h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} ; \tag{3.9}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} , \quad \omega_{\mu\nu} V^{\mu} = 0 , \quad \omega_{\mu\nu} h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\alpha} = \omega_{\alpha\beta} ; \tag{3.10}$$

²Da condição de normalização do 4-vetor velocidade ($g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$), segue que o componente de $V_{\mu;\nu}$ na direção de V_{μ} é nulo: $V_{\mu;\nu} V^{\mu} = 0$; daí segue também que $a_{\mu} V^{\mu} = 0$.

³A interpretação destes objetos pode ser encontrada em [10].

⁴do inglês *shear*.

$$a_\mu V^\mu = 0 . \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Tensor de Weyl

Podemos decompor o tensor de Curvatura nas suas partes irreduzíveis separando os termos referentes a seus traços:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} [R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}] \\ &\quad - \frac{1}{6} R g_{\alpha\beta\mu\nu} + W_{\alpha\beta\mu\nu} , \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} .$$

O tensor $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é chamado Tensor de Weyl. Sabendo que o Tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ e o escalar de curvatura R estão relacionados localmente com a matéria através das equações de Einstein, e verificando que o tensor de Curvatura se reduz ao de Weyl na ausência de matéria ($R_{\mu\nu} = R = 0$), podemos dizer que o tensor de Weyl representa o campo gravitacional livre, determinado não-localmente pela matéria.

Pela sua definição, pode-se ver que o tensor de Weyl apresenta as mesmas simetrias

do tensor de Curvatura, a saber:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\beta\alpha\mu\nu} = -W_{\alpha\beta\nu\mu} = W_{\mu\nu\alpha\beta} ,$$

e obviamente não tem traço algum:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\alpha\mu} = 0 .$$

O tensor de Weyl apresenta a notável propriedade de ser invariante sob transformações conformes, ou seja, aquelas onde a métrica transformada se relaciona com a original através da multiplicação por uma função positiva qualquer¹:

$$\tilde{g}_{\rho\epsilon} \equiv \Omega^2(x^\alpha) g_{\rho\epsilon} \Rightarrow \tilde{W}^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv W^\alpha_{\beta\mu\nu}(\tilde{g}_{\rho\epsilon}) = W^\alpha_{\beta\mu\nu}(g_{\rho\epsilon}) .$$

Por isso este tensor também é muito conhecido na literatura como Tensor Conforme. Duas variedades cujas métricas estão relacionadas por uma transformação deste tipo são ditas variedades conformes. Mais especificamente, se uma variedade for conforme a Minkowski, ela será chamada conformalmente plana. Em tal espaço-tempo sempre existe um sistema de coordenadas no qual é possível escrever a métrica como a métrica de Minkowski multiplicada por uma função [11].

Definimos o dual do Tensor de Weyl através do verdadeiro tensor $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$,

¹Note que a posição dos índices é fundamental, pois

$$\tilde{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \tilde{g}_{\epsilon\alpha} \tilde{W}^\epsilon_{\beta\mu\nu} = \Omega^2 g_{\epsilon\alpha} W^\epsilon_{\beta\mu\nu} = \Omega^2 W_{\alpha\beta\mu\nu} .$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é o pseudo-tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta^*\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}{}^{\rho\epsilon} W_{\rho\epsilon\mu\nu}, \\ W_{\alpha\beta\mu\nu^*} &\equiv \frac{1}{2}\eta^{\rho\epsilon}{}_{\mu\nu} W_{\alpha\beta\rho\epsilon}. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que, neste caso, o dual independe do par de índices utilizado:

$${}^*W_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv W_{\alpha\beta^*\mu\nu} \equiv W_{\alpha\beta\mu\nu^*}.$$

Em analogia com o tensor $F_{\mu\nu}$ do eletromagnetismo², define-se as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl relativamente a um observador com 4-vetor velocidade V^μ :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &:= -W_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu, \\ H_{\alpha\beta} &:= -{}^*W_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu. \end{aligned}$$

Esta decomposição pode ser invertida:

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta\mu\nu} &= \left(\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon} - g^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon} \right) V_\lambda V_\tau E_{\sigma\epsilon} + \\ &+ \left(\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon} + g^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon} \right) V_\lambda V_\tau H_{\sigma\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Os tensores $E_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ satisfazem às seguintes propriedades:

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, \quad E_{\mu\nu} V^\mu = 0, \quad E_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0; \quad (4.3)$$

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}, \quad H_{\mu\nu} V^\mu = 0, \quad H_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (4.4)$$

²Para maiores detalhes na semelhança entre gravitação e eletromagnetismo, ver Novello e Salim [14].

É facilmente verificado que a transformação³

$$E_{\mu\nu} \rightarrow H_{\mu\nu}$$

$$H_{\mu\nu} \rightarrow -E_{\mu\nu}$$

é equivalente à transformação do tensor de Weyl no seu dual.

Substituindo a decomposição (4.1) na identidade de Bianchi⁴[14]:

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = R^{\mu[\alpha;\beta]} , \quad (4.5)$$

podemos escrevê-la em termos do Tensor de Weyl:

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} &= R^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]} \\ &= -\frac{1}{2}T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]} , \end{aligned} \quad (4.6)$$

usando as equações de Einstein na última passagem. Esta forma das Equações de Bianchi será fundamental no desenvolvimento do trabalho. Portanto, vamos nos fixar, durante o próximo capítulo, na definição do tensor $T^{\mu\nu}$, que aparece do lado direito destas equações.

³Semelhante a uma rotação de $\pi/2$ na polarização de uma onda eletromagnética.

⁴A identidade de Bianchi também pode ser escrita na forma [14]

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu;\lambda} + R^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda;\mu} + R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu;\nu} = 0 .$$

Capítulo 5

Tensor Momentum-Energia

5.1 Os Componentes

O tensor $T_{\alpha\beta}$ no lado direito das equações de Einstein é o gerador da curvatura do espaço tempo; por isso deve conter informações sobre todas as formas de energia presentes no fluido¹ em questão. Na verdade, uma rápida análise das equações de Einstein indica que o tensor $T_{\alpha\beta}$ — obviamente simétrico — tem unidades² de energia por unidade de volume (ou, equivalentemente, unidades de pressão), devendo representar, neste caso, as *densidades* de energia presentes.

Para nos orientarmos na definição deste tensor, vamos nos basear em um tensor bem parecido: o Tensor de Esforços de Maxwell³ M_{ij} . Seus componentes representam a força por unidade de área exercida por um campo eletromagnético sobre uma superfície. Mais precisamente, o componente M_{ij} representa a força (por unidade de área) na i -ésima

¹que pode ser qualquer distribuição de matéria ou mesmo radiação.

²Ao longo deste trabalho, $c \equiv 1$. No entanto, se desejarmos ser explícitos, $[T_{00}] = [(energia/volume)c^2]$; $[T_{0i}] = [(energia/volume)c] = [energia/unidade\ de\ área\ times\ unidade\ de\ tempo]$ e $[T_{ij}] = [energia/volume] = [pressão]$

³também conhecido como Tensor das Tensões.

direção agindo sobre um elemento de área orientado na j -ésima direção. Elementos da diagonal ($i = j$) são pressões⁴ — p — e elementos fora da diagonal ($i \neq j$) são pressões anisotrópicas — π_{ij} —, se o sistema e o observador são inercias e co-móveis com o sistema de coordenadas usado. Esta poderia ser, a princípio, a parte espacial do tensor $T_{\alpha\beta}$ se o fluido gerador fosse um campo eletromagnético.

Inspirados no 4-vetor Momentum-energia de uma partícula na relatividade especial — onde o componente temporal indica a energia da partícula em questão — podemos esperar que os componentes $T_{0\mu}$ tenham relação direta com a densidade de energia do fluido em questão, visto por um observador inercial em repouso nas coordenadas usadas. Novamente guiados pela análise dimensional (ver nota 2), podemos supor que o componente T_{00} represente a energia por unidade de volume (multiplicada por c^2) — ρ — e que os componentes T_{0i} representem o fluxo de energia por unidade de área por unidade de tempo — q_i .

É importante salientar que esta “colagem” de componentes não seria um tensor se não se comportasse como tal sob transformações arbitrárias de coordenadas. De fato, pode-se verificar que isto realmente acontece.

A interpretação dos componentes acima foi feita supondo-se um observador inercial co-móvel com o sistema de coordenadas usado. Neste caso, o 4-vetor velocidade do observador é $\tilde{V}^\alpha = \delta_0^\alpha$, o que associa o componente $\alpha = 0$ com o tempo e os componentes $\alpha = 1, 2, 3$ com o espaço deste observador. Para tornar esta interpretação covariante, devemos definir os componentes temporais como as projeções em V^α , e os componentes espaciais como as

⁴Todos os fluidos aqui considerados apresentam as mesmas pressões nas 3 direções espaciais, ou seja, os 3 componentes da diagonal de M_{ij} são idênticos entre si.

projeções em $h_{\alpha\beta}$ (ver Capítulo 3).

Portanto, se para um observador em repouso, ρ foi definido como

$$\rho = T_{\mu\nu} \delta_0^\mu \delta_0^\nu ,$$

então para um observador genérico V^μ , a densidade de energia do fluido será

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu .$$

Analogamente, a pressão deve ser definida como $\frac{1}{3}$ da “parte espacial” do traço de $T_{\mu\nu}$:

$$p = \frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} .$$

Pode-se definir um 4-vetor fluxo de energia q_α sempre pertencente ao 3-espaço do observador⁵:

$$q_\alpha = -T_{\rho\epsilon} V^\rho h^\epsilon{}_\alpha .$$

E a pressão anisotrópica pode ser definida como um 4-tensor simétrico sem traço (pois não pode contribuir para a pressão isotrópica p):

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu - p h_{\mu\nu} .$$

É fácil verificar que as relações acima podem ser invertidas:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} . \quad (5.1)$$

⁵Note que $q_\mu V^\mu = 0$ pela propriedade (3.2), em acordo com a interpretação do observador em repouso.

Poderíamos ter chegado ao mesmo resultado decompondo (univocamente) o tensor $T_{\alpha\beta}$ em suas partes irreduzíveis, paralelas e ortogonais a V^α :

$$T_{\mu\nu} = A V_\mu V_\nu + B h_{\mu\nu} + C_\mu V_\nu + C_\nu V_\mu + D_{\mu\nu} .$$

A identificação de cada um dos termos $A, B, C_\mu, D_{\mu\nu}$ seria então feita da mesma forma, através da interpretação por um observador adaptado ao sistema de coordenadas usado.

5.2 Equações de Conservação

A Identidade de Bianchi (4.6) contraída leva à equação

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 .$$

que representa a conservação do momentum e da energia. Projetando-a na direção temporal e no 3-espaco de um observador V_μ :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} V_\mu = 0 ,$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu{}^\alpha = 0 ,$$

obteremos:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^\mu V_\mu + q^\alpha{}_{;\alpha} - \pi^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} = 0 , \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} (\rho + p)a_\alpha - p_{;\mu} h^\mu{}_\alpha + \dot{q}_\mu h^\mu{}_\alpha + \theta q_\alpha + \\ + q^\nu \Theta_{\alpha\nu} + q^\nu \omega_{\alpha\nu} + \pi_\alpha{}^\nu{}_{;\nu} + \pi^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} V_\alpha = 0 , \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} := \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} .$$

A geometria do universo de FRW é gerada por um fluido perfeito, ou seja, não há fluxo de energia, pressão anisotrópica, nem aceleração:

$$q_\alpha = 0 , a_\alpha = 0 , \pi_{\alpha\beta} = 0 .$$

e, como o 3-espaço do observador coincide com a 3-superfície de homogeneidade do fluido, temos

$$p_{,\mu} h^\mu{}_\alpha = \rho_{,\mu} h^\mu{}_\alpha = 0 .$$

Desta forma, a equação de conservação (5.2) é escrita:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 , \tag{5.4}$$

e a eq. (5.3) é identicamente satisfeita.

5.2.1 O Fluido Perturbado

Ao calcular a perturbação em qualquer das equações devemos ser cuidadosos com os termos que apresentam uma derivada covariante projetada na direção da 4-velocidade, ou seja, termos do tipo

$$\dot{A}_\mu \equiv A_{\mu;\nu} V^\nu .$$

Exemplificaremos abaixo o cálculo da perturbação de tal termo. No que segue, um til (\sim) indica a nova quantidade perturbada, e um delta (δ) indica a perturbação:

$$\tilde{A} \equiv A_{\text{fundo}} + \delta A .$$

Vamos então calcular

$$\begin{aligned} (\widetilde{\dot{A}}_\mu) &= (A_{\mu;\nu} \widetilde{V}^\nu) = (\tilde{A}_{\mu,\nu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\epsilon \tilde{A}_\epsilon) \tilde{V}^\nu = \\ &= [(A_\mu + \delta A_\mu)_{;\nu} - (\Gamma_{\mu\nu}^\epsilon + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon)(A_\epsilon + \delta A_\epsilon)] (V^\nu + \delta V^\nu) = \\ &= (A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon A_\epsilon + \delta A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon \delta A_\epsilon - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon A_\epsilon) (V^\nu + \delta V^\nu) = \\ &= A_{\mu;\nu} V^\nu + A_{\mu;\nu} \delta V^\nu + [(\delta A_\mu)_{;\nu} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon A_\epsilon] V^\nu . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(\dot{A}_\mu) &\equiv (\widetilde{\dot{A}}_\mu) - \dot{A}_\mu = (\widetilde{\dot{A}}_\mu) - A_{\mu;\nu} V^\nu = \\ &= A_{\mu;\nu} \delta V^\nu + [(\delta A_\mu)_{;\nu} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon A_\epsilon] V^\nu . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Se $A_\mu \equiv 0$ no espaço-tempo de fundo — como a_μ , q_μ , $h_\nu^\mu p_{,\mu}$ — a equação acima se reduz

a:

$$\begin{aligned} \delta(\dot{A}_\mu) &= (\delta A_\mu)_{;\nu} V^\nu = \\ &= (\delta A_\mu)_{;\nu} V^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon \delta A_\epsilon V^\nu = \\ &= (\delta A_\mu)_{,0} - \frac{\theta}{3} \delta A_\mu , \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde usamos $V^\nu = \delta_0^\nu$, e $\Gamma_{\mu 0}^\epsilon = \frac{\theta}{3}$.

Perturbando as eq. (5.2) e (5.3), ignorando termos de segunda ordem e usando a eq. (5.7), obtemos as equações abaixo. Lembramos que, em FRW: $q_{mu} = 0$, $a_\mu = 0$, $\pi_{\mu\nu} = 0$.

$$(\delta\rho)^{\bullet} + \dot{\rho} \delta V^0 + \theta(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)(\delta\theta) + (\delta q^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} \left[(\delta V_\mu) + (\delta V^0) \delta_\mu^0 \right] - (\delta p)_{;\beta} h^\beta{}_\mu + (\rho + p)(\delta a_\mu) \\ + h_{\mu\alpha}(\delta q^\alpha)^{\bullet} + \frac{4}{3}\theta(\delta q_\mu) + h_{\mu\alpha}(\delta\pi^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Neste trabalho, admitimos que o fluido perturbado possa apresentar pressão anisotrópica, mas admitiremos que a perturbação no fluido de fundo seja tal que não haja fluxo de energia, ou seja:

$$\delta\pi_{\alpha\beta} \neq 0, \delta q_\alpha = 0.$$

Contudo, como veremos mais adiante (Seção 9.1), qualquer perturbação em um universo de de Sitter é obrigatoriamente acompanhada de um fluxo de energia.

Além disso, admitiremos um fluido perturbado *linear*, descrito pelo argumento a seguir. De acordo com a termodinâmica relativística estendida, a equação de evolução da pressão anisotrópica é [12]:

$$\tau \dot{\pi}_{ij} + \pi_{ij} = \xi(t) \sigma_{ij}, \quad (5.10)$$

onde τ é o parâmetro de relaxação e $\xi(t)$ é a viscosidade. Se $\tau \dot{\pi}_{ij}(t) \ll \pi_{ij}(t)$, ou seja, o sistema responde rapidamente a pequenas variações na pressão anisotrópica, então:

$$\pi_{ij}(t) \approx \xi(t) \sigma_{ij}(t). \quad (5.11)$$

No regime linear, consideramos que a viscosidade $\xi(t)$ seja aproximadamente constante, ou seja:

$$\xi(t) \approx \xi \implies \pi_{ij}(t) \approx \xi \sigma_{ij}(t) . \quad (5.12)$$

Essa é a chamada aproximação de fluido *linear*.

Capítulo 6

Formalismo Quasi-Maxwelliano

O formalismo Quasi-Maxwelliano das equações de Einstein da gravitação tem sua origem nos trabalhos de Jordan *et al.* [7]. Ele consiste basicamente em considerar as Identidades de Bianchi como equações de campo para as partes irredutíveis do tensor de curvatura¹. Sob projeções adequadas, estas equações de propagação se assemelham às equações de Maxwell para o eletromagnetismo, como veremos na próxima seção.

Este formalismo é bastante útil no estudo de perturbações de modelos cosmológicos conformalmente planos, pois se $W_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv 0$ em toda a variedade, então uma variação no seu valor indicará uma verdadeira perturbação. Pode-se mostrar [18] que o inverso também é válido: uma verdadeira perturbação obrigatoriamente altera o valor do Tensor Conforme. Além disto, este método explicita as equações de propagação e de vínculos sobre quantidades independentes de *gauge*² ($\delta E_{\mu\nu}$, $\delta H_{\mu\nu}$, $\delta\sigma_{\mu\nu}$, δa_μ , etc.).

Este método foi usado pela primeira vez no estudo de perturbações cosmológicas por Hawking [8], em 1966. Em 1976, Olson [13] analisou um erro nas equações de seu precessor.

¹Mais especificamente, as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl (ou tensor Conforme) $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ (veja Cap.4).

²Como pode ser visto pelo Lema de Stewart (Cap.7).

Desde então, diversos trabalhos têm sido publicados seguindo o mesmo método: Em 1983, Novello e Salim [14] realizaram a decomposição em harmônicos introduzida por Lifshitz e Khalatinikov [1], o que lhes permitiu obter outra correção no trabalho de Hawking de 1966. Contudo, optaram pela fixação da *gauge* ($\delta g_{0\alpha} = 0$) desde o início dos cálculos. Ellis e Bruni [15], em um trabalho de 1989, se fixaram na perturbação na densidade em um universo de FRW, especialmente na sua definição e no problema de *gauge* nela embutido. Definiram variáveis independentes de *gauge* a partir de derivadas espaciais de objetos que só dependiam do tempo no espaço-tempo de fundo, tais como pressão, densidade, fator de expansão etc.. Obtiveram, então, equações de evolução para a perturbação na densidade, mas supondo um fluido perturbado perfeito, ou seja, não havia perturbação no fluxo de energia nem na pressão anisotrópica ($\delta q_\alpha = 0$, $\delta \pi_{\alpha\beta} = 0$). Em 1990, Hwang e Vishniac [16], usando também a decomposição em harmônicos, encontraram uma equação de evolução para uma das variáveis IG de Ellis e Bruni — incluindo os efeitos de um fluido perturbado imperfeito — e a identificaram com uma das variáveis de Bardeen [6]. Além disso, apresentaram uma solução exata para a evolução de perturbações na densidade, mas admitindo um fluido perturbado perfeito.

Como será visto mais adiante, algumas das quantidades destacadas pelas equações Quasi-maxwellianas são suficientes para a caracterização de *todas* as variáveis interessantes — dependentes de *gauge* ou não — e de suas evoluções. Neste trabalho, a *gauge* é mantida arbitrária até o fim. Note que isto não é uma falha deste método, mas antes um ponto a favor: se quisermos caracterizar a evolução de um objeto que depende da *gauge*, é óbvio que teremos que fixá-la. A vantagem consiste em poder fazê-lo somente no fim dos cálculos e através de objetos de interpretação imediata, como veremos mais adiante (Cap. 9).

6.1 As Equações Quasi-Maxwellianas

A identidade de Bianchi

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2}T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}T^{\gamma,\beta]} , \quad (6.1)$$

pode ser projetada de 4 formas independentes:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} V_\beta V_\mu h_\alpha{}^\sigma ,$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} \eta^{\sigma\lambda}{}_{\alpha\beta} V_\mu V_\lambda ,$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda}{}_{\alpha\beta} V_\lambda ,$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} V_\beta h_{\mu(\tau} h_{\sigma)\alpha} .$$

Substituindo na identidade de Bianchi (eq. (6.1)) a decomposição (4.2) do tensor de Weyl em termos das suas partes elétrica e magnética

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta\mu\nu} &= \left(\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon} - g^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon} \right) V_\lambda V_\tau E_{\sigma\epsilon} + \\ &+ \left(\eta^{\alpha\mu\lambda\sigma} g^{\beta\nu\tau\epsilon} + g^{\alpha\mu\lambda\sigma} \eta^{\beta\nu\tau\epsilon} \right) V_\lambda V_\tau H_{\sigma\epsilon} , \end{aligned} \quad (6.2)$$

e a decomposição do tensor Momentum-energia (eq. (5.1))

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} V_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} , \quad (6.3)$$

e aplicando as 4 projeções acima separadamente, observando as propriedades (3.9)–(3.11) e (4.3) e (4.4), obtemos as 4 Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação [14]:

$$\begin{aligned}
h^{\epsilon\alpha} h^{\lambda\gamma} E_{\alpha\lambda;\gamma} + \eta^\epsilon{}_{\beta\mu\nu} V^\beta H^{\nu\lambda} \sigma^\mu{}_\lambda + 3H^{\epsilon\nu} \omega_\nu &= \\
= \frac{1}{3} h^{\epsilon\alpha} \rho_{,\alpha} + \frac{\theta}{3} q^\epsilon - \frac{1}{2} (\sigma^\epsilon{}_\nu - 3\omega^\epsilon{}_\nu) q^\nu + \\
+ \frac{1}{2} \pi^{\epsilon\mu} a_\mu + \frac{1}{2} h^{\epsilon\alpha} \pi_{\alpha'}{}^{\nu}{}_{;\nu} , & \quad (6.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{\epsilon\alpha} h^{\lambda\gamma} H_{\alpha\lambda;\gamma} - \eta^\epsilon{}_{\beta\mu\nu} V^\beta E^{\nu\lambda} \sigma^\mu{}_\lambda - 3E^{\epsilon\nu} \omega_\nu &= \\
= (\rho + p)\omega^\epsilon - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} V_\lambda q_{\alpha;\beta} + \\
+ \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) \pi^\mu{}_\alpha V_\lambda , & \quad (6.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_\mu{}^\epsilon h_\nu{}^\lambda \dot{H}^{\mu\nu} + \theta H^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} H_\nu{}^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu V^{\mu;\nu} + \\
+ \eta^{\lambda\nu\mu\gamma} \eta^{\epsilon\beta\tau\alpha} V_\mu V_\tau H_{\alpha\gamma} \Theta_{\nu\beta} - \\
- a_\alpha E_\beta{}^{(\lambda} \eta^{\epsilon)\gamma\alpha\beta} V_\gamma + \\
+ \frac{1}{2} E_{\beta'}{}^\mu{}_{;\alpha} h_\mu{}^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta} V_\gamma = \\
= -\frac{3}{4} q^{(\epsilon} \omega^{\lambda)} + \frac{1}{2} h^{\epsilon\lambda} q^\mu \omega_\mu + \\
+ \frac{1}{4} \sigma_\beta{}^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\alpha\beta\mu} V_\mu q_\alpha + \\
+ \frac{1}{4} h^{\nu(\epsilon} \eta^{\lambda)\alpha\beta\mu} V_\mu \pi_{\nu\alpha;\beta} , & \quad (6.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_\mu{}^\epsilon h_\nu{}^\lambda \dot{E}^{\mu\nu} + \theta E^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2} E_\nu{}^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu V^{\mu;\nu} + \\
+ \eta^{\lambda\nu\mu\gamma} \eta^{\epsilon\beta\tau\alpha} V_\mu V_\tau E_{\alpha\gamma} \Theta_{\nu\beta} + a_\alpha H_\beta{}^{(\lambda} \eta^{\epsilon)\gamma\alpha\beta} V_\gamma -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} H_{\beta}{}^{\mu}{}_{;\alpha} h_{\mu}{}^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta} V_{\gamma} = \\
& = \frac{1}{6} h^{\epsilon\lambda} (q^{\mu}{}_{;\mu} - q^{\mu} a_{\mu} - \pi^{\nu\mu} \sigma_{\mu\nu}) - \\
& - \frac{1}{2} (\rho + p) \sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{2} q^{(\epsilon} a^{\lambda)} - \\
& - \frac{1}{4} h^{\mu(\epsilon} h^{\lambda)\alpha} q_{\mu;\alpha} + \frac{1}{2} h_{\alpha}{}^{\epsilon} h_{\mu}{}^{\lambda} \dot{\pi}^{\alpha\mu} + \\
& + \frac{1}{4} \pi_{\beta}{}^{(\epsilon} \sigma^{\lambda)\beta} - \frac{1}{4} \pi_{\beta}{}^{(\epsilon} \omega^{\lambda)\beta} + \frac{1}{6} \theta \pi^{\epsilon\lambda} . \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Nas equações acima,

$$\Theta_{\mu\nu} := \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu} . \tag{6.8}$$

Procedemos agora à perturbação das equações acima, lembrando que, em FRW:

$$E_{\mu\nu} = 0 ,$$

$$H_{\mu\nu} = 0 ,$$

$$\omega_{\mu\nu} = 0 ,$$

$$\sigma_{\mu\nu} = 0 ,$$

$$\pi_{\mu\nu} = 0 ,$$

$$a_{\mu} = 0 ,$$

$$q_{\mu} = 0 .$$

Ignorando termos de segunda ordem, e usando a eq. (5.7), obtemos:

$$(\delta E^{\mu\nu})^{\bullet} h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} + \theta (\delta E^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta E_{\nu}{}^{(\alpha} h^{\beta)})_{\mu} V^{\mu;\nu} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_\mu V_\tau (\delta E_{\epsilon\lambda}) h_{\gamma\nu} - \\
& - \frac{1}{2} (\delta H_{\lambda^\mu})_{;\gamma} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\tau = \\
& = -\frac{1}{2} (\rho + p) (\delta\sigma^{\alpha\beta}) + \\
& + \frac{1}{6} h^{\alpha\beta} (\delta q^\mu)_{;\mu} - \frac{1}{4} h^{\mu(\alpha} h^{\beta)\nu} (\delta q_\mu)_{;\nu} + \\
& + \frac{1}{2} h^{\mu(\alpha} h^{\beta)\nu} (\delta\pi_{\mu\nu})^\bullet + \frac{1}{6} \theta (\delta\pi^{\alpha\beta}) , \tag{6.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta H^{\mu\nu})^\bullet h_\mu^\alpha h_\nu^\beta & + \theta (\delta H^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta H_\nu^{(\alpha} h^{\beta)})_\mu V^{\mu;\nu} + \\
& + \frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\lambda\tau\gamma} V_\mu V_\tau (\delta H_{\epsilon\gamma}) h_{\lambda\nu} - \\
& - \frac{1}{2} (\delta E_{\lambda^\mu})_{;\tau} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\gamma = \\
& = \frac{1}{4} h^{\nu\alpha} \eta^{\beta\epsilon\tau\mu} V_\mu (\delta\pi_{\nu\epsilon})_{;\tau} , \tag{6.10}
\end{aligned}$$

$$(\delta H_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} = (\rho + p) (\delta\omega^\epsilon) - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\mu} V_\mu (\delta q_\alpha)_{;\beta} , \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
(\delta E_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} & = \frac{1}{3} (\delta\rho)_{,\alpha} h^{\alpha\epsilon} - \frac{1}{3} \dot{\rho} (\delta V^\epsilon) - \\
& - \frac{1}{3} \dot{\rho} (\delta V^0) V^\epsilon + \\
& + \frac{1}{2} h^\epsilon_\alpha (\delta\pi^{\alpha\mu})_{;\mu} + \frac{\theta}{3} (\delta q^\epsilon) . \tag{6.12}
\end{aligned}$$

6.2 Equações de Evolução

Pela definição do Tensor de Curvatura:

$$V_{\mu;\alpha;\beta} - V_{\mu;\beta;\alpha} = R_{\mu\epsilon\alpha\beta} V^\epsilon , \tag{6.13}$$

obtemos as equações de movimento para as quantidades cinemáticas.

Projetando em $V^\beta h^\mu_\lambda h^\alpha_\rho$ e contraindo nos índices $(\lambda\rho)$, obtemos, após alguns cálculos [17], a equação de evolução da expansão, conhecida como equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 + 2\omega^2 - a^\alpha_{;\alpha} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) , \quad (6.14)$$

Simetrisando no mesmo par de índices $(\lambda\rho)$, temos a evolução do *shear*, ou tensor de cisalhamento:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} &+ \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (-2\omega^2 - 2\sigma^2 + a^\lambda_{;\lambda}) + a_\alpha a_\beta - \\ &- \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu;\nu} + a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu_\beta + \omega_{\alpha\mu} \omega^\mu_\beta = \\ &= -E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (6.15)$$

E, anti-simetrisando, obtemos a equação de evolução da vorticidade:

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} &- \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + \\ &+ \sigma_{\alpha\mu} \omega^\mu_\beta - \sigma_{\beta\mu} \omega^\mu_\alpha = 0 . \end{aligned} \quad (6.16)$$

Procedendo como antes — vide eq. (5.7) — obtemos as equações perturbadas abaixo:

$$(\delta\theta)^* + \dot{\theta} \delta V^0 + \frac{2}{3} \theta (\delta\theta) - (\delta a^\alpha)_{;\alpha} = -\frac{(1+3\lambda)}{2} (\delta\rho) , \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} (\delta\sigma_{\mu\nu})^* &+ \frac{1}{3} h_{\mu\nu} (\delta a^\alpha)_{;\alpha} - \frac{1}{2} (\delta a)_{(\alpha;\beta)} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \\ &+ \frac{2}{3} \theta (\delta\sigma_{\mu\nu}) = -(\delta E_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\delta\pi_{\mu\nu}) , \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$(\delta\omega^\mu)^\bullet + \frac{2}{3}\theta (\delta\omega^\mu) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu\beta\gamma} (\delta a_\beta)_{;\gamma} V_\alpha . \quad (6.19)$$

6.3 Equações de Vínculo

Da mesma definição do tensor de Curvatura, podemos obter 3 equações de vínculos para as quantidades cinemáticas.

A primeira pode ser obtida contraindo-se os índices μ e α na eq. (6.13) e projetando-a no 3-espaço do observador:

$$h^\beta{}_\gamma (V^\alpha{}_{;\alpha;\beta} - V^\alpha{}_{;\beta;\alpha}) = R^\alpha{}_{\epsilon\alpha\beta} V^\epsilon h^\beta{}_\gamma ,$$

obtendo-se:

$$\frac{2}{3}\theta_{;\mu} h^\mu{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha} h^\gamma{}_\lambda - a^\nu (\sigma_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}) = -q_\lambda . \quad (6.20)$$

O segundo vínculo pode ser obtido somando-se a eq. (6.13) 3 vezes com os índices permutados:

$$(V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha})_{;\gamma} + (V_{\gamma;\alpha} - V_{\alpha;\gamma})_{;\beta} + (V_{\beta;\gamma} - V_{\gamma;\beta})_{;\alpha} = (R^\mu{}_{\alpha\gamma\beta} + R^\mu{}_{\beta\alpha\gamma} + R^\mu{}_{\gamma\beta\alpha}) V_\mu .$$

Lembrando que as propriedades de simetria do tensor de Curvatura anulam o lado direito, e projetando o lado esquerdo em V_μ , obtemos:

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0 , \quad (6.21)$$

A última equação de vínculo pode ser obtida multiplicando-se a eq. (6.13) por $\eta_\rho^{\beta\alpha\lambda} V_\lambda$:

$$-\frac{1}{2} h_\tau^\epsilon h_\lambda^\alpha \eta_\epsilon^{\beta\gamma\nu} V_\nu (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{;\gamma} + a_{(\tau} \omega_{\lambda)} = H_{\tau\lambda} . \quad (6.22)$$

Usando a eq. (5.7) no cálculo da perturbação, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(\delta\theta)_{;\lambda} h^\lambda{}_\mu - \frac{2}{3}\dot{\theta}(\delta V_\mu) + \frac{2}{3}\dot{\theta}(\delta V^0)\delta_\mu^0 - \\ - (\delta\sigma^\alpha{}_\beta + \delta\omega^\alpha{}_\beta)_{;\alpha} h^\beta{}_\mu = -\delta q_\mu , \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$(\delta\omega^\alpha)_{;\alpha} = 0 , \quad (6.24)$$

$$\delta H_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h^\alpha{}_{(\mu} h^\beta{}_{\nu)} [(\delta\sigma_{\alpha\gamma})_{;\lambda} + (\delta\omega_{\alpha\gamma})_{;\lambda}] \eta_\beta^{\epsilon\gamma\lambda} V_\epsilon . \quad (6.25)$$

Capítulo 7

Lema de Stewart

O principal problema do estudo de perturbações cosmológicas é a liberdade de *gauge*, que definiremos a seguir através do lema de Stewart [19].

Suponhamos um espaço-tempo FRW embebido em uma variedade pentadimensional. Ele faz parte de uma família de espaço-tempos — que desejamos descrever como perturbações de FRW — nesta variedade. Esta família pode ser parametrizada pela coordenada ϵ ao longo de uma curva integral de um campo vetorial V ortogonal a cada espaço-tempo em cada ponto. Os pontos de quaisquer espaço-tempos situados ao longo de uma mesma curva integral deste campo devem ser considerados como o mesmo ponto. Desta forma, podemos definir a perturbação de uma quantidade através da Derivada de Lie, do seguinte modo:

Seja $Q^{(0)}$ o valor de uma quantidade em determinado ponto P_0 de FRW (denominado \mathcal{M}_0), e Q_ϵ o valor deste mesmo objeto no ponto correspondente, P_ϵ , do espaço-tempo perturbado (denominado \mathcal{M}_ϵ , de acordo com a sua coordenada ao longo das curvas integrais

do campo V). A definição de Derivada de Lie na direção do campo V é, para ϵ pequeno:

$$\mathcal{L}_V Q^{(0)}|_{\mathcal{M}_0} = \frac{Q^* - Q^{(0)}}{\epsilon} ,$$

onde Q^* é o valor de Q_ϵ nas coordenadas de \mathcal{M}_0 . A perturbação em Q é então definida como

$$\delta Q = Q^* - Q^{(0)} = \epsilon \mathcal{L}_V Q^{(0)}|_{\mathcal{M}_0} . \quad (7.1)$$

O campo vetorial usado acima na associação dos pontos é arbitrário, desde que mantido ortogonal a \mathcal{M}_ϵ em todos os pontos. É esta liberdade — dita liberdade de *gauge* — na escolha da associação dos pontos de dois espaço-tempos distintos que introduz uma ambigüidade na teoria.

Existem, porém, objetos cujas perturbações não dependem da escolha deste campo vetorial, chamados *gauge-independentes*:

Seja um campo vetorial W , distinto de V , nesta mesma variedade pentadimensional. A perturbação em Q definida a partir de W é:

$$\widetilde{\delta Q} = \epsilon \mathcal{L}_W Q^{(0)}|_{\mathcal{M}_0} .$$

Então, a variação na perturbação devido à mudança de *gauge* é:

$$\Delta(\delta Q) = \delta Q - \widetilde{\delta Q} = \epsilon \mathcal{L}_{V-W} Q^{(0)}|_{\mathcal{M}_0} . \quad (7.2)$$

O campo $U \equiv W - V$ é um campo vetorial restrito a cada \mathcal{M}_ϵ . Para verificar isto, basta escolher coordenadas $X = (x^\mu, \epsilon)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, e notar que $V^4 = W^4 = 1$, de forma que

$$U^4 = 0.$$

Isso nos permite enunciar o lema de Stewart:

A perturbação em um objeto Q será independente de *gauge*, isto é, $\Delta(\delta Q) = 0$, se e somente se $\mathcal{L}_U Q = 0$ para *qualquer* campo vetorial U definido no espaço-tempo de fundo \mathcal{M}_0 . Para isto, Q deve ser nulo, ou um campo escalar constante e uniforme, ou uma combinação linear de δ_{ν}^{μ} com coeficientes constantes.

Capítulo 8

Expansão em Harmônicos

De acordo com suas leis de transformação sob uma mudança de coordenadas no espaço-tempo de fundo, as perturbações podem ser classificadas em escalares, vetoriais e tensoriais. Deve-se ser extremamente cauteloso com esta nomenclatura: uma perturbação escalar pode, em geral, estar relacionada com a variação em um objeto escalar, vetorial ou tensorial. Em outras palavras, a perturbação em um tensor pode ser decomposta em todas as 3 partes acima. Por exemplo, seja $\delta\mathcal{J}_{\mu\nu}$ a perturbação em determinado objeto tensorial $\mathcal{J}_{\mu\nu}$. Ela pode ser escrita como:

$$\delta\mathcal{J}_{\mu\nu} = a A_{,\mu;\nu} + b B_{\mu;\nu} + c C_{\mu\nu} + C g_{\mu\nu} \quad (8.1)$$

onde a, b, c são coeficientes constantes. Obviamente, para que a decomposição acima seja unívoca, ou seja, para que seja impossível gerar um escalar ou um vetor a partir do vetor B_α ou do tensor $C_{\alpha\beta}$, estes devem ter divergência e traço nulos:

$$B^\mu{}_{;\mu} = 0 ,$$

$$C^\mu{}_\mu = 0 ,$$

$$C^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 .$$

Como foi demonstrado por Kodama e Sasaki [20], em um espaço-tempo FRW, equações escalares, vetoriais e tensoriais são completamente desacopladas entre si se são covariantes em relação a uma transformação de coordenadas na 3-superfície espacial de homogeneidade, lineares em objetos geométricos desconhecidos, e no máximo de segunda ordem, no caso de equações diferenciais. Podemos, portanto, nos restringir às perturbações escalares sem perda de generalidade.

A equação (8.1) se reduz então a:

$$\delta \mathcal{J}_{\mu\nu} = a A_{,\mu;\nu} + C g_{\mu\nu} . \quad (8.2)$$

Uma perturbação escalar é, portanto, uma perturbação que pode ser escrita em termos de um escalar (C), derivadas de um escalar ($A_{,\mu}$), ou da métrica ($g_{\mu\nu}$). Note que todo o argumento se aplica igualmente à perturbação de objetos vetoriais.

Aqui já pode-se notar que perturbações rotacionais não podem ser descritas no caso escalar. Procedendo à perturbação da eq. (3.6):

$$\omega_{\mu\nu} := \frac{1}{2} h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} (V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha}) , \quad (8.3)$$

e sabendo que $V_{\alpha;\beta} = \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta}$ é simétrico, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta \omega_{\mu\nu} &= \delta \left[\frac{1}{2} h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} (V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} h_{\mu}{}^{\alpha} h_{\nu}{}^{\beta} \delta (V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (V_{[\alpha;\beta]} - \tilde{V}_{[\alpha;\beta]}) = \\
&= \frac{1}{2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (-\tilde{V}_{[\alpha;\beta]} + \tilde{\Gamma}_{[\alpha\beta]}^\epsilon \tilde{V}_\epsilon) = \\
&= -\frac{1}{2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\tilde{V}_{\alpha,\beta} - \tilde{V}_{\beta,\alpha}) .
\end{aligned}$$

Como a perturbação é restrita ao caso escalar, podemos escrever

$$\tilde{V}_\alpha = V_\alpha + \sum_m V^{(m)}(t) Q^{(m)}(\vec{x})_{,\alpha} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta\omega_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (V_{\alpha,\beta} - V_{\beta,\alpha} + V(t) Q_{,\alpha,\beta} - V(t) Q_{,\beta,\alpha}) = \\
&= -\frac{1}{2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta V(t) (Q_{,\alpha,\beta} - Q_{,\beta,\alpha}) = \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Através das eqs. (6.25) e (6.10), obtemos que não existe perturbação da parte magnética do tensor de Weyl. Note que para isso é necessária a restrição ao caso escalar, ou mais especificamente, devemos escrever a perturbação no *shear* $\sigma_{\alpha\lambda}$ em termos de um escalar, suas derivadas, e da métrica:

$$\delta\sigma_{\alpha\lambda} \equiv s_{,\alpha;\lambda} - g_{\alpha\lambda} s_{,\mu;\nu} g^{\mu\nu} .$$

Obtemos então:

$$\delta H_{\mu\nu} \equiv 0 . \tag{8.5}$$

Devido ao desacoplamento exemplificado na eq. (8.2), podemos usar uma só base

para as perturbações de todos os objetos. Como a isotropia e homogeneidade de FRW permitem uma separação unívoca da dependência espacial da temporal, todos os objetos podem ser escritos como a multiplicação de uma função do tempo por uma função do espaço. Por isso usaremos como base os harmônicos escalares¹ $Q^{(m)}(\vec{x})$.

Repetiremos aqui as equações de definição desta base para facilitar a interpretação das decomposições (8.11) abaixo, lembrando que a derivada covariante é simbolizada por (∇), a derivada covariante tridimensional por (∇^2), e a derivada simples por (∇). A métrica do 3-espaço é γ_{ij} , e deve ser usada para subir e descer os índices nas equações a seguir.

Os harmônicos $Q^{(m)}$ satisfazem à equação

$$\nabla^2 Q^{(m)} = m Q^{(m)} , \quad (8.6)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano tridimensional:

$$\nabla^2 Q^{(m)} \equiv \gamma^{ik} Q_{,i||k}^{(m)} , \quad (8.7)$$

e

$$Q_{ik}^{(m)} \equiv Q_{,i;k}^{(m)} . \quad (8.8)$$

O objeto $\hat{Q}_{ij}^{(m)}$ deve ser definido visando a decomposição de quantidades tensoriais simétricas e sem traço:

$$\hat{Q}_{ij}^{(m)} \equiv \frac{1}{m} Q_{ij}^{(m)} - \frac{1}{3} Q^{(m)} \gamma_{ij} . \quad (8.9)$$

¹ver Apêndice A.

Sua divergência é dada por:

$$\hat{Q}_{(m)||j}^{ij} = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{K}{m} \right) Q_{(m)}^i , \quad (8.10)$$

onde usamos a convenção:

$$Q_{\dot{i}}^{(m)} \equiv Q_{,i}^{(m)} .$$

Assim, podemos escrever as perturbações de todos os objetos presentes nas equações

Quasi-Maxwellianas como:

$$\begin{aligned} \delta E_{ij} &\equiv \sum_m E^{(m)}(t) \hat{Q}_{ij}^{(m)} , \\ \delta \sigma_{ij} &\equiv \sum_m \Sigma^{(m)}(t) \hat{Q}_{ij}^{(m)} , \\ \delta \pi_{ij} &\equiv \sum_m \Pi^{(m)}(t) \hat{Q}_{ij}^{(m)} , \\ \delta a_i &\equiv \sum_m \Psi^{(m)}(t) Q_i^{(m)} , \\ \delta q_i &\equiv \sum_m q^{(m)}(t) Q_i^{(m)} , \\ \delta V_k &\equiv \sum_m V^{(m)}(t) Q_k^{(m)} , \\ \delta V_0 &\equiv \sum_m \beta^{(m)}(t) Q^{(m)} , \\ \delta \rho &\equiv \sum_m N^{(m)}(t) Q^{(m)} , \\ \delta \theta &\equiv \sum_m H^{(m)}(t) Q^{(m)} . \end{aligned} \quad (8.11)$$

(8.12)

Omitiremos, daqui em diante, o índice (m) para simplificar a notação, pois não haverá mistura de harmônicos com m diferentes ao longo de todo o trabalho, uma vez que estamos estudando perturbações em primeira ordem.

De acordo com a discussão no Capítulo 5, usaremos a aproximação de fluido linear:

$$\pi_{\mu\nu} = \xi \sigma_{\mu\nu} . \quad (8.13)$$

Podemos escrever, portanto:

$$\delta\pi_{ij} \equiv \xi \Sigma(t) \hat{Q}_{ij} . \quad (8.14)$$

Pelo lema de Stewart (vide Cap. 7), sabemos que os objetos IG, a princípio independentes entre si, dentre os listados acima são:

$$\delta E_{ij}, \delta \Sigma_{ij}, \delta a_i, \delta q_i . \quad (8.15)$$

O lema de Stewart é válido pois E_{ij} , Σ_{ij} , a_i , q_i são nulos no espaço-tempo de fundo.

Passaremos agora a analisar as equações Quasi-Maxwellianas e as de conservação, visando obter as evoluções e os vínculos a que devem obedecer as quantidades da geometria e do fluido.

Capítulo 9

Sistema Dinâmico Fechado

Neste capítulo, substituímos as expansões em harmônicos, definidas pelas eqs. (8.11), nas equações de evolução, de vínculo e Quasi-Maxwellianas, definidas nos Caps. 5 e 6.

A partir da equação perturbada de evolução do *shear* (eq.6.18), podemos obter:

$$\dot{\Sigma} = -E - \frac{1}{2}\xi \Sigma + m \Psi , \quad (9.1)$$

uma vez que, a partir da eq. (5.7):

$$\delta(\dot{\sigma}_{ij}) = (\delta\sigma_{ij})_{,0} - \frac{2\theta}{3} \delta\sigma_{ij} ,$$

e a partir das eqs. (8.6) e (8.7)

$$\begin{aligned} Q^\alpha_{;\alpha} &= g^{\alpha\beta} Q_{\beta;\alpha} = \\ &= A^{-2} \gamma^{\alpha\beta} Q_{\beta;\alpha} = A^{-2} \gamma^{\alpha\beta} Q_{\beta||\alpha} \\ &= A^{-2} \nabla^2 Q = \\ &= m A^{-2} Q , \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde (||) indica a derivada covariante na 3-superfície de homogeneidade.

Lembrando que a equação de estado do fluido é $p = \lambda \rho$, a equação perturbada para evolução da parte elétrica do tensor de Weyl (eq. 6.9) pode, da mesma forma, ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{E} = & - \left[\frac{1+\lambda}{2} \rho + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3} \right) \right] \Sigma - \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3} \right) E + \\ & + \frac{m}{2} \xi \Psi - \frac{m}{2} q . \end{aligned} \quad (9.3)$$

A equação perturbada de conservação do tensor momentum-energia projetada no 3-espaço do observador (eq. 5.9) se escreve:

$$\begin{aligned} \rho(1+\lambda)\Psi = & \lambda(N - \dot{\rho}V) + \frac{2\xi}{3A^2} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \Sigma - \\ & - \theta q - \dot{q} . \end{aligned} \quad (9.4)$$

E a equação da divergência de $E_{\alpha\beta}$ perturbada (eq. 6.12) é:

$$N - \dot{\rho}V = \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \frac{\xi}{A^2} \Sigma - \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \frac{2}{A^2} E - \theta q . \quad (9.5)$$

Observamos que, se nos restringirmos às perturbações em que não existe fluxo de energia — $q = 0$ — a equação para evolução do *shear* (9.1) não se modifica, mas as demais equações acima se reduzem a:

$$\dot{E} = - \left[\frac{1+\lambda}{2} \rho + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3} \right) \right] \Sigma - \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3} \right) E + \frac{m}{2} \xi \Psi , \quad (9.6)$$

$$\rho(1+\lambda)\Psi = \lambda(N - \dot{\rho}V) + \frac{2\xi}{3A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \Sigma , \quad (9.7)$$

$$N - \dot{\rho}V = \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \frac{\xi}{A^2} \Sigma - 2 \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \frac{1}{A^2} E . \quad (9.8)$$

As equações (9.7) e (9.8) nos permitem escrever Ψ em função de outros objetos independentes de *gauge* e de grandezas do espaço-tempo de fundo¹:

$$\Psi = \frac{2}{\rho A^2(1+\lambda)} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \left[-\lambda E + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3}\right) \xi \Sigma\right] . \quad (9.9)$$

Desta forma, as equações (9.1), (9.6) e (9.9) formam um sistema dinâmico fechado para as variáveis E e Σ , onde os coeficientes são funções do espaço-tempo de fundo $(\rho, \theta, \lambda, A, K)$ e da ordem do harmônico (m):

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} = & - E \left[1 + \frac{2m\lambda}{\rho A^2(1+\lambda)} \left(1 - \frac{3K}{m}\right)\right] + \\ & + \Sigma \left[-\frac{1}{2}\xi + \frac{2m\xi}{\rho A^2(1+\lambda)} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] , \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{E} = & - E \left[\frac{\theta}{3} + \frac{1}{2}\xi + \frac{m\lambda\xi}{\rho A^2(1+\lambda)} \left(1 - \frac{3K}{m}\right)\right] + \\ & - \Sigma \left[\frac{\xi^2}{4} + \frac{1+\lambda}{2}\rho + \frac{1}{6}\theta\xi - \frac{m\xi^2}{\rho A^2(1+\lambda)} \left(1 + \frac{3K}{m}\right) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] . \end{aligned} \quad (9.11)$$

Pode-se escrever os coeficientes das expansões de todos os outros objetos perturbados em termos de E , Σ , e quantidades de FRW. Aqueles objetos que dependem explicitamente de *gauge* obviamente apresentarão termos *explícitos* de pura *gauge*, uma vez que E e Σ

¹O caso $(1+\lambda) = 0$ — Universo de de Sitter — será analisado logo adiante, na Seção 9.1.

são *gauge*-independentes:

$$\delta\rho: N = \frac{1}{A^2}(\xi \Sigma - 2E) \left(1 - \frac{3K}{m}\right) + \dot{\rho} V, \quad (9.12)$$

$$\delta\theta: H = -\frac{1}{A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \Sigma + \dot{\theta} V, \quad (9.13)$$

obtidas a partir das equações (6.12) e (6.23), respectivamente.

É necessário frisar que, se realmente quisermos obter uma equação explícita para a definição ou evolução destes ou quaisquer outros objetos dependentes de *gauge*, esta deverá obviamente ser fixada.

9.1 Caso de Sitter

A redução ao sistema dinâmico fechado (9.10) (9.11) só foi possível porque foi admitido que $(1 + \lambda) \neq 0$ na equação (9.7), permitindo que Ψ fosse escrito em função de E e de Σ . No caso $(1 + \lambda) = 0$, o fluido de fundo obedece à equação de estado $p = -\rho$. De fato, existe um fluido que obedece a esta equação: o vácuo, como veremos a seguir [21]:

9.1.1 O Vácuo

Imagine uma câmara evacuada e fechada, com um pistão móvel. Já que a densidade de energia do vácuo ρ_v é constante, a energia interna da câmara é $U = \rho_v V$, onde V é o volume da câmara. Agora suponha que o pistão seja puxado para fora, aumentando o volume de dV . Ao contrário de qualquer substância, o vácuo manterá uma densidade de

energia constante apesar do acréscimo no volume. A mudança na energia então será:

$$dU = \rho_v dV ,$$

que deve ser igual ao trabalho realizado:

$$dW = -p dV ,$$

onde p é a pressão. Por isso, a equação de estado do vácuo é dada por

$$p = -\rho_v . \tag{9.14}$$

O Tensor Momentum-energia de tal fluido (obviamente perfeito) é (ver Cap. 5):

$$T_{\alpha\beta} = \rho_v g_{\alpha\beta} .$$

Portanto, tratar o vácuo como gerador de curvatura é equivalente a inserir uma constante — a Constante Cosmológica $\Lambda = \rho_v$ — no lado direito das Equações de Einstein².

9.1.2 O Novo Sistema Fechado

Vamos voltar às equações perturbadas, usando as expansões 8.11 e que

$$\lambda = -1 , \tag{9.15}$$

$$\rho = cte. \Rightarrow \dot{\rho} = 0 . \tag{9.16}$$

²Justamente por ser uma constante e a geometria riemanniana, a inserção de um termo do tipo $\Lambda g_{\alpha\beta}$ no lado direito das Equações de Einstein não altera as Identidades de Bianchi, e por isso não pode ser tratado desta forma neste formalismo.

A equação de conservação da densidade de matéria (eq. (5.8)), mostra que só haverá perturbação na densidade se existir perturbação no fluxo de energia, ou seja, $q \neq 0$:

$$\dot{N} = \frac{m}{A^2} q . \quad (9.17)$$

A conservação do tensor momentum-energia, projetada (eq. (5.9)), resulta em:

$$\dot{q} + \theta q + N = \frac{2\xi}{3A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \Sigma , \quad (9.18)$$

e a evolução da parte elétrica (eq. (6.9)) de Weyl:

$$\dot{E} - \frac{1}{2}\xi \dot{\Sigma} + \frac{\theta}{3} \left(E - \frac{1}{2}\xi \Sigma\right) = -\frac{m}{2} q . \quad (9.19)$$

A equação de divergência de $E_{;j}$ (6.12) dá origem ao vínculo:

$$\frac{2}{A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \left(E - \frac{1}{2}\xi \Sigma\right) = -N - \theta q . \quad (9.20)$$

Se definirmos a quantidade

$$S := E - \frac{1}{2}\xi \Sigma , \quad (9.21)$$

verificamos que as eqs. (9.17) a (9.20) constituem um sistema dinâmico fechado para as variáveis S , N , q . Note que, em de Sitter, a quantidade N é independente de *gauge*, pois a densidade de matéria ρ é constante e uniforme (vide lema de Stewart, no Cap. 7).

Capítulo 10

Variáveis G.I. já Existentes na Literatura

Neste capítulo mostraremos que as variáveis independentes de *gauge* introduzidas por Bardeen [6] e por Ellis e Bruni [15] podem ser escritas em termos do conjunto mínimo aqui definido, E e Σ — como deveríamos esperar, sendo este conjunto realmente mínimo.

10.1 Variáveis de Bardeen

Para fazermos a ligação entre o formalismo de Bardeen e o usado neste trabalho, vamos inicialmente fazer um breve resumo da abordagem por ele utilizada.

10.1.1 Formalismo de Bardeen

Nesta subseção usaremos a notação de Bardeen:

$S(t)$: Fator de escala do universo;

$$Q_i := -\frac{1}{k} Q_{,i} ;$$

$$k^2 \equiv -m .$$

A abordagem é a introduzida por Lifshitz e Khalatnikov [1]: a quantidade perturbada é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, e as perturbações são decompostas em harmônicos $Q(x^i)$:

$$\tilde{g}_{00} = -S^2(\tau) \left[1 + 2A(\tau)Q(x^j) \right] , \quad (10.1)$$

$$\tilde{g}_{0i} = -S^2 B(\tau) Q_{,i}(x^j) , \quad (10.2)$$

$$\tilde{g}_{ij} = S^2 \left\{ \left[1 + 2H_L(\tau)Q(x^k) \right] \gamma_{ij} + 2H_T(\tau)Q_{,ij}(x^k) \right\} . \quad (10.3)$$

Pode-se notar que os coeficientes da expansão em harmônicos são claramente *dependentes de gauge*.

O grande passo dado neste trabalho foi a definição de objetos independentes de *gauge*, através de combinações adequadas destes coeficientes. Pode-se perceber desde já que a interpretação destes objetos em termos de quantidades observáveis não será nem um pouco imediata, visto que a própria métrica não é diretamente observável, mas apenas sua derivada segunda (o tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\mu\nu}$). Os objetos definidos por Bardeen são:

$$\Phi_A \equiv A + \frac{1}{k} \dot{B} + \frac{1}{k} \frac{\dot{S}}{S} B - \frac{1}{k^2} \left(\ddot{H}_T + \frac{\dot{S}}{S} \dot{H}_T \right) , \quad (10.4)$$

$$\Phi_H \equiv H_L + \frac{1}{3} H_T + \frac{1}{k} \frac{\dot{S}}{S} B - \frac{1}{k^2} \frac{\dot{S}}{S} \dot{H}_T . \quad (10.5)$$

onde $(\dot{})$ indica, obviamente, a derivada em relação ao tempo conforme.

Bardeen também define 2 outros objetos I.G.: um relacionado com a velocidade do

fluido:

$$V_s \equiv V - \frac{1}{k} \dot{H}_T , \quad (10.6)$$

onde V é definido pela equação¹:

$$\frac{V^i}{V^0} \equiv V(\tau) Q^i(x^j) ; \quad (10.7)$$

e um relacionado com a perturbação na densidade de energia:

$$\varepsilon_m \equiv \delta + 3(1 + \lambda) \frac{1}{k} \frac{\dot{S}}{S} (V - B) , \quad (10.8)$$

onde δ é a perturbação na densidade, obviamente dependente de *gauge*.

10.1.2 A equivalência

Em um trabalho de 1989, Goode [22] expressa as variáveis do fluido e da geometria em termos dos objetos independentes de *gauge* introduzidos por Bardeen. Abaixo apresentaremos somente os componentes escalares das quantidades E e Σ , visto que seus componentes vetoriais e tensoriais não são estudados aqui.

$$\sigma_i{}^j = -k S^{-1} V_s Q_i{}^j , \quad (10.9)$$

$$E_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2} S^{-2} k^2 (\phi_A - \phi_H) Q_\alpha{}^\beta . \quad (10.10)$$

Se abaixarmos os índices de todos os objetos acima, podemos compará-los com a decomposição em harmônicos definida neste trabalho (vide Apêndice A). Lembramos

¹Note que a definição de Bardeen abaixo, para V , difere da adotada ao longo deste trabalho.

que os harmônicos são objetos definidos no 3-espaço, e por isso devem ter seus índices abaixados pela métrica $\gamma_{ij} = -S^{-2}(t) g_{ij}$. Procedendo desta forma, obtemos então² [22]:

$$\Sigma = S k V_S , \quad (10.11)$$

$$E = \frac{m}{2}(\phi_A - \phi_H) . \quad (10.12)$$

10.2 Variáveis de Ellis e Bruni

Em 1989, Ellis e Bruni [15], usando também o formalismo Quasi-Maxwelliano, definiram variáveis I.G., a partir de derivadas espaciais de objetos que só dependem do tempo no espaço-tempo de fundo:

$$\mathcal{X}_i \equiv h_i^j \frac{\rho_{,j}}{\rho} , \quad (10.13)$$

$$\mathcal{Y}_i \equiv h_i^j p_{,j} , \quad (10.14)$$

$$\mathcal{Z}_i \equiv h_i^j \theta_{,j} . \quad (10.15)$$

Obviamente, cada uma destas variáveis é nula no espaço de fundo, e portanto são I.G. pelo Lema de Stewart (vide Cap. 7).

A partir da eq. (5.9) e lembrando que $p = \lambda \rho$, pode-se expressar a variável \mathcal{X} em termos da perturbação na aceleração e no *shear*;

$$\delta \mathcal{X}_i = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \delta a_i + \frac{1}{\lambda \rho} \delta \pi_i^k{}_{;k} . \quad (10.16)$$

²Vide Apêndice C para o cálculo da parte elétrica do tensor de Weyl perturbado no esquema de Bardeen.

Usando as eqs. (9.9), (8.14) e (A.9), podemos escrever \mathcal{X} na base mínima E e Σ :

$$\delta\mathcal{X}_i = -\frac{2}{\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \left(E - \frac{\xi}{2}\Sigma\right) Q_i . \quad (10.17)$$

É óbvio que, como $\delta\lambda = 0$, temos $\delta\mathcal{Y} \equiv \lambda \delta\mathcal{X}$.

E, a partir da eq. (6.23), podemos relacionar \mathcal{Z}_i com ΣQ_i :

$$\delta\mathcal{Z}_i = \frac{1}{A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) \Sigma Q_i . \quad (10.18)$$

Desta forma, podemos notar que todos os objetos acima têm a mesma informação, e que a escolha do par adequado para a descrição das perturbações deve ser feita de acordo com a facilidade de confronto com os dados experimentais disponíveis.

Capítulo 11

Formalismo Hamiltoniano

Seria interessante estudar as perturbações em FRW à luz do formalismo Hamiltoniano. Os objetos do conjunto mínimo Σ e E , contudo, não são variáveis canonicamente conjugadas, como pode ser visto pelas suas equações de evolução (9.10) e (9.11). Porém, como este conjunto mínimo é uma *base* para as perturbações, certamente podemos escrever as variáveis canonicamente conjugadas em função deles. Vamos supor uma relação linear:

$$\begin{pmatrix} Q \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ E \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

Vamos fazer uma outra suposição: $\eta = 0$ e $\delta = 0$. A admissão destas simplificações é justificada pela existência de uma solução que as satisfaz, como veremos a seguir.

Admitindo uma Hamiltoniana \mathcal{H} da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} c_1 \mathcal{P}^2 + \frac{1}{2} c_2 Q^2 + c_3 \mathcal{P} Q = \\ &= \frac{1}{2} c_1 (\beta E)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\alpha \Sigma)^2 + c_3 \alpha \beta E \Sigma, \end{aligned} \quad (11.2)$$

e exigindo que as equações de Hamilton sejam satisfeitas, ou seja:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} ,$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} ,$$

obteremos, mediante o uso das eqs. (9.10) e (9.11), as seguintes relações para os coeficientes c_1 , c_2 e c_3 :

$$c_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \left[1 + \frac{2m\lambda}{(1+\lambda)\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \right] , \quad (11.3)$$

$$c_2 = \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{(1+\lambda)}{2} \rho + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{m\xi^2}{(1+\lambda)\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] , \quad (11.4)$$

$$2c_3 = -\frac{\theta}{3} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\xi}{2} \left[-1 + \frac{2m}{3(1+\lambda)\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \right] + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} . \quad (11.5)$$

As equações acima são bastante simplificadas no caso $\xi = 0$, que corresponde à ausência de pressões anisotrópicas no fluido perturbado:

$$c_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \left[1 + \frac{2m\lambda}{(1+\lambda)\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \right] , \quad (11.6)$$

$$c_2 = \frac{\beta(1+\lambda)}{\alpha} \frac{\rho}{2} , \quad (11.7)$$

$$2c_3 = -\frac{\theta}{3} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} . \quad (11.8)$$

Uma possível solução deste sistema é:

$$\dot{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 ,$$

$$\dot{\beta} = \frac{\theta}{3}\beta \Rightarrow \beta = A(t) ;$$

onde as constantes de proporcionalidade foram feitas iguais a 1, por simplicidade.

As variáveis canonicamente conjugadas \mathcal{P} e \mathcal{Q} são, então:

$$\mathcal{Q} = \Sigma , \quad (11.9)$$

$$\mathcal{P} = A(t)E . \quad (11.10)$$

A Hamiltoniana, portanto, é:

$$\mathcal{H} = \frac{(1 + \lambda)}{4} \rho A \mathcal{Q}^2 - \frac{1}{2A} \left[1 + \frac{2m\lambda}{(1 + \lambda)\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) \right] \mathcal{P}^2 . \quad (11.11)$$

De imediato percebe-se que a Hamiltoniana não é conservada. Isso se deve ao fato do sistema não ser fechado: o espaço-tempo de fundo está em expansão, podendo fornecer esta energia excedente.

Podemos interpretar facilmente este formalismo se o aplicarmos a um caso bastante conhecido: o universo estático de Einstein, descrito por uma densidade de matéria e fator de escala constantes. Desta forma, a Hamiltoniana acima se reduz a:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\mu^2} \mathcal{P}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \mathcal{Q}^2 , \quad (11.12)$$

onde μ e ω são constantes reais, admitindo que termo entre colchetes na eq. (11.11) seja positivo. Obtemos, portanto, a hamiltoniana de um oscilador harmônico com massa imaginária, indicando a instabilidade do modelo de Einstein.

Para que o resultado acima seja válido, é necessário que ω seja real, ou seja:

$$1 + \frac{2m\lambda}{(1+\lambda)\rho A^2} \left(1 - \frac{3K}{m}\right) > 0 . \quad (11.13)$$

Se $\lambda = 0$, o resultado é válido para qualquer valor de m . Se $\lambda < -1$ ou $\lambda > 0$, os valores adequados de m são:

$$m > 3K - \frac{\rho A^2 1 + \lambda}{2 \lambda} . \quad (11.14)$$

Se $-1 < \lambda < 0$, os valores de m devem ser:

$$m < 3K - \frac{\rho A^2 1 + \lambda}{2 \lambda} . \quad (11.15)$$

Uma perturbação arbitrária apresentará diversos valores para m — ou seja, diversos modos na sua decomposição em harmônicos —, alguns dos quais satisfarão uma das inequações acima (respeitado o valor de λ do fluido). As amplitudes de tais modos, por obedecerem à Hamiltoniana de um oscilador harmônico invertido, crescerão. Isto indica a **instabilidade** de um universo do tipo Friedman-Robertson-Walker sob perturbações sem pressões anisotrópicas no regime de fluido linear nem fluxo de energia.

Capítulo 12

Conclusão

Neste trabalho, estudamos as perturbações em um Universo de Friedman-Robertson-Walker, usando a decomposição em harmônicos introduzida por Lifshitz e Khalatnikov [1]. Devido ao total desacoplamento [20] entre os harmônicos escalar, vetorial e tensorial, podemos nos restringir aos harmônicos escalares. Neste caso, não existem perturbações na vorticidade nem na parte magnética do tensor de Weyl (Cap. 8). Estão excluídas também as perturbações por ondas gravitacionais, que só podem ser descritas por perturbações tensoriais.

Obtivemos um sistema de equações diferenciais lineares em Σ e E , que são os coeficientes das expansões do shear e da parte elétrica do tensor de Weyl na base dos harmônicos, respectivamente. Podemos também escrever, em termos deste conjunto, a evolução de quantidades dependentes ou não de *gauge*, possibilitando sua fixação eventual apenas no final dos cálculos. São obtidas relações entre E e Σ e as outras variáveis independentes de *gauge* já existentes na literatura, definidas por Bardeen [6] e por Ellis *et al* [15].

No último capítulo, foi obtida uma hamiltoniana para as perturbações. As variáveis

canonicamente conjugadas, adequadas no caso de ausência de pressão anisotrópica, são $A(t)E$ e Σ , onde $A(t)$ é o fator de escala do universo de Friedman-Robertson-Walker. A partir deste formalismo podemos verificar imediatamente a instabilidade do universo de Friedman-Robertson-Walker sob perturbações sem fluxo de calor ou pressão anisotrópica no regime de fluido linear (Cap. 5). Como verificação do resultado, obtém-se trivialmente a instabilidade do universo de Einstein. O tratamento hamiltoniano abre caminho, além disto, para a quantização das perturbações.

Apêndice A

Harmônicos Escalares

Optamos neste trabalho pela base das funções harmônicas $Q^{(m)}(x^i)$, independentes do tempo cosmológico $x^0 \equiv t$, definidas nas 3-superfícies de homogeneidade de FRW, o que possibilita a separação total da dependência temporal das funções expandidas nesta base:

$$\mathcal{F}(x^\mu) \equiv \sum_m F_{(m)}(t) Q^{(m)}(x^i) .$$

As funções harmônicas $Q^{(m)}(x^i)$ geram o espaço das funções escalares e obedecem à seguinte relação:

$$\nabla^2 Q^{(m)} = m Q^{(m)} , \quad (\text{A.1})$$

onde m indica a ordem do harmônico e ∇^2 é o Laplaciano tridimensional:

$$\nabla^2 Q^{(m)} := \gamma^{ik} Q_{,i||k}^{(m)} = \gamma^{ik} Q_{,i;k}^{(m)} ,$$

lembrando que γ^{ik} é a métrica do 3-espaço, $(||)$ indica a derivada covariante na 3-superfície, e $(;)$ a derivada covariante 4-dimensional. Nas equações a seguir omitiremos o índice (m) , uma vez que não haverá acoplamento de modos diferentes ao longo de todo o cálculo.

Admitindo uma solução da eq.(A.1) do tipo

$$Q(x^i) = R(r) \Phi(\theta, \phi) ,$$

obtem-se que as soluções mais gerais para a parte angular são os harmônicos esféricos ordinários, formados a partir dos Polinômios de Legendre [23] [24]:

$$\Phi(\theta, \phi) = Y_{lm}^{\pm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{\pm im\phi} P_{lm}(\theta, \phi) ,$$

e que a função radial obedece a uma equação que depende da curvatura do 3-espaço, K .

Para harmônicos de ordem m , a equação é [23]:

$$\frac{(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^3}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \frac{d}{dr} R \right) + \left(-m - \frac{l(l+1)}{r^2(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^{-2}} \right) R = 0 . \quad (\text{A.2})$$

As soluções desta equação para $K \neq 0$ são escritas em termos das Funções Associadas de Legendre [23] [24]:

$$R(r) = P_{\mu\epsilon}(\cos \zeta) \frac{r}{1 \pm \frac{1}{4}r^2} ,$$

onde o sinal da equação é o mesmo de K , e:

$$\mu = l + \frac{1}{2} ,$$

$$\epsilon \equiv -\frac{1}{2} \pm (1 - mK)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\cos \zeta \equiv \cos(\sqrt{K}\alpha) ,$$

onde α é definido por uma das equações:

$$\text{sen}\alpha \equiv \frac{r}{1 + \frac{1}{4}r^2}, \text{ se } K = +1;$$

$$\text{senh}\alpha \equiv \frac{r}{1 - \frac{1}{4}r^2}, \text{ se } K = -1.$$

No caso $K = +1$, impondo as condições de periodicidade necessárias em um espaço fechado, obtemos os autovalores da eq. (A.1):

$$-m = \gamma(\gamma + 2), \quad \gamma = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.3})$$

No caso de curvatura negativa ($K = -1$), não há condições de periodicidade a serem impostas, e por isso m pode assumir qualquer valor real negativo:

$$-m = \gamma^2 + 1, \quad \gamma^2 \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Se $K = 0$, a eq. (A.2) se reduz a:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (-mr^2 - l(l+1)) R = 0, \quad (\text{A.5})$$

cujas soluções são as funções esféricas de Bessel e de Neumann de ordem l :

$$\Pi_{ml} = (\text{sen } r)^l \frac{d^{m+1} \cos(mr)}{d(\cos r)^{l+1}}, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

$$-m = \gamma^2, \quad \gamma^2 \geq 0.$$

Aqui se faz necessária uma observação: neste trabalho, estamos interessados nas per-

turbações *escalares*, isto é, perturbações de quaisquer objetos que possam ser totalmente decompostas em termos dos harmônicos acima definidos (e suas derivadas), e da métrica. As definições de bases para perturbações escalares em vetores e tensores são únicas, a menos de uma normalização. Lembramos que, uma vez que os objetos Q são definidos no 3-espaço, os índices das equações abaixo devem ser levantados (abaixados) com a métrica γ^{ij} (γ_{ij}). Definimos¹ então o vetor Q_i e o tensor Q_{ij} :

$$Q_i \equiv Q_{,i} \quad , \quad (A.6)$$

$$Q_{ij} \equiv Q_{,ij} \quad . \quad (A.7)$$

É necessária também a definição de um tensor simétrico sem traço:

$$\hat{Q}_{ij} \equiv \frac{1}{m} Q_{ij} - \frac{1}{3} Q \gamma_{ij} \quad , \quad (A.8)$$

cuja divergência é dada por:

$$\hat{Q}^{ik}{}_{||k} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3K}{m} \right) Q^i \quad . \quad (A.9)$$

Desta forma, podemos expandir as perturbações escalares de escalares (ρ , θ , V_0) em termos de Q , de vetores (a_i , V_i) em termos de Q_i , e de tensores simétricos sem traço (E_{ij} , H_{ij} , σ_{ij} , π_{ij}) em termos de \hat{Q}_{ij} (vide Cap. 8).

Deve-se observar que a decomposição em harmônicos não é sempre unívoca, como demonstrado por Stewart [19]: a decomposição de um tensor é única se $K = 0, -1$; mas,

¹Chamamos atenção para a definição usada aqui, por ser diferente da introduzida por Lifshitz [1] e usada por Bardeen [6], onde $Q_i \equiv -\frac{1}{\sqrt{-m}} Q_{,i}$.

se $K = +1$, é permitida a adição de um vetor de Killing na parte vetorial e de um escalar² ξ na parte escalar. Por sua vez, a decomposição de um vetor em suas partes escalar e vetorial é unívoca a menos de uma constante aditiva no escalar, para qualquer valor de K . Obviamente, a “decomposição” de um escalar é unívoca.

É conveniente estudarmos separadamente o caso das perturbações uniformes em toda a 3-superfície de homogeneidade, ou seja, aquelas que podem ser expressas somente como uma função do tempo:

$$\mathcal{F}(x^\mu) \equiv F(t) .$$

Isto será feito no apêndice seguinte.

²que deve satisfazer $(\nabla^2 + 3)\xi = 0$.

Apêndice B

Perturbações Uniformes

Podemos supor que as perturbações tenham um componente uniforme, ou seja, o mesmo em toda a hipersuperfície de homogeneidade de FRW. Neste caso, poderíamos escrever a perturbação de tensores mais geral como:

$$\delta F_{ij}(t) \equiv \mathcal{F}_{ij}(t) + \sum_{m>0} \mathcal{F}^{(m)}(t) Q_{ij}^{(m)}(\vec{x}) ,$$

pois, quando $m = 0$ (vide Apêndice A), não podemos definir os harmônicos Q_i nem Q_{ij} . Contudo, vemos que tal decomposição não é possível: basta derivarmos espacialmente ambos os lados da equação acima. O lado esquerdo e o primeiro termo do lado direito serão nulos, mas o somatório dará uma contribuição diferente de zero. O mesmo argumento se aplica ao caso vetorial. Isto indica que perturbações vetorial ou tensorial uniformes não podem ser acopladas às perturbações escalares, devendo ser decompostas na base dos harmônicos vetoriais e tensoriais, respectivamente.

Resta o caso das perturbações uniformes em escalares. Devemos esperar que sejam resultado de uma simples mudança de coordenadas, uma vez que $\delta E_{ij} = \delta H_{ij} = 0$.

Verificaremos a seguir que isto de fato acontece. A perturbação de escalares mais geral pode ser escrita como:

$$\delta F(t) \equiv \mathcal{F}(t) + \sum_{m>0} \mathcal{F}^{(m)}(t) Q^{(m)}(\vec{x}) , \quad (\text{B.1})$$

onde o primeiro termo do lado direito pode ser absorvido no somatório quando m puder assumir o valor 0 — ou seja, nos 3-espacos plano e fechado. Novamente o termo do somatório não pode existir, pelo mesmo motivo visto acima.

Vamos escrever tais perturbações uniformes como:

$$\begin{aligned} \delta\rho(t) &\equiv N(t) , \\ \delta\theta(t) &\equiv H(t) , \\ \delta V_0(t) &\equiv \beta(t) . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A equação da divergência de E_{ij} (eq. (6.12)) se escreve como:

$$(\delta\rho)_{,\alpha} h^{\alpha\epsilon} - \dot{\rho} \delta V^\epsilon - \dot{\rho} V^\epsilon \delta V^0 = 0 \quad (\text{B.3})$$

A equação de Raychaudhuri (eq. (6.17)) fica:

$$(\dot{\delta\theta}) + \frac{2}{3}\theta \delta\theta = -\frac{1+3\lambda}{2} \delta\rho . \quad (\text{B.4})$$

A equação de vínculo (6.23) dá origem a:

$$(\delta\theta)_{,\alpha} h^{\alpha\epsilon} - \dot{\theta} \delta V_\epsilon + \dot{\theta} \delta_\epsilon^0 \delta V^0 = 0 . \quad (\text{B.5})$$

As equações de conservação projetadas em V_μ e no 3-espaço podem ser escritas, respectivamente, como:

$$(\dot{\delta\rho}) + \theta(1 + \lambda) \delta\rho + \rho(1 + \lambda) \delta\theta = 0 , \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{p} \delta V_\alpha + \dot{p} \delta_\alpha^0 \delta V^0 - (\delta p)_{,\beta} h^\beta_\alpha = 0 . \quad (\text{B.7})$$

Substituindo as eqs. (B.2) nas equações acima, obtemos:

$$\delta V_\alpha = 0 , \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{H} + \frac{2}{3}\theta H + \frac{1+3\lambda}{2}N = 0 , \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{N} + (1 + \lambda)\theta N + (1 + \lambda)\rho H = 0 . \quad (\text{B.10})$$

Um sistema de 2 equações diferenciais lineares de primeira ordem tem uma única solução para cada variável dependente e admite um total de 4 constantes arbitrárias.

Podemos tentar uma solução para o sistema (B.9) (B.10) do tipo:

$$H(t) = a\dot{\theta} + b ,$$

$$N(t) = c\dot{\rho} + d .$$

Substituindo-a no sistema, obtemos, após algumas manipulações algébricas:

$$\dot{\rho} = -\frac{4b}{3(1+3\lambda)(a-c)}\theta - \frac{d}{a-c} ,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{d}{a-c}\frac{\theta}{\rho} + \frac{b}{a-c} .$$

Comparando com as eqs. (5.4) e (6.14) do espaço-tempo de fundo, podemos perceber que os únicos valores possíveis para as constantes a , b , c , d são:

$$a = c, \quad b = d = 0 .$$

o que faz com que as funções $N(t)$ e $H(t)$ sejam:

$$N(t) = a \dot{\rho} , \tag{B.11}$$

$$H(t) = a \dot{\theta} . \tag{B.12}$$

De fato, se realizarmos uma transformação de coordenadas infinitesimal:

$$t \rightarrow t' = t + t_0 ,$$

a densidade de matéria $\rho(t)$ se transformará como:

$$\rho(t) \rightarrow \rho'(t') = \rho(t) + \dot{\rho}(t) t_0 + \dots$$

Portanto,

$$\delta\rho = \dot{\rho}(t) t_0 . \tag{B.13}$$

Comparando esta equação com a eq. (B.11), podemos interpretar a constante a como a variação do tempo cósmico referente à mudança na origem da coordenada temporal.

Apêndice C

Cálculo da Parte Elétrica do Tensor de Weyl Perturbado

Neste Apêndice mostramos o programa escrito em MapleV para o cálculo dos componentes da parte elétrica do tensor de Weyl perturbado segundo o esquema introduzido por Lifshitz e Khalatnikov — a perturbação da métrica. Ao longo do programa estão os comentários necessários para sua compreensão. Os objetos definidos por Bardeen — ϕ_A e ϕ_H — são imediatamente reconhecidos na solução final, armazenada em linguagem Maple no arquivo *elet.m*.

Deve-se observar que, no programa abaixo, usou-se um sistema de coordenadas gaussiano, isto é, onde é possível a definição de um tempo cósmico. Para efetuar o mesmo cálculo com tempo conforme, é necessário alterar as definições de g_{44} nas linhas 11 e 34, respectivamente, para:

$$g_{44}:=S(t)^2:$$

$$g_{44}:=S(t)^2*(1+2*A(t)+Q):$$

Abaixo segue o programa:

```
interface(labeling=false):

#CALCULA OS OBJETOS DO ESPACO DE FUNDO --- FRW ,
#COLOCANDO UM 'o' PARA DIFERENCIA-LOS DOS OBJETOS DO ESPACO PERTURBADO,
# E OS SALVA EM fried.m

x1:=r;x2:=theta;x3:=phi;x4:=t;
g11:=-S(t)^2/(1-K*r^2);
g22:=-S(t)^2*r^2;
g33:=g22*sin(theta)^2;
g44:=1;
display(metric);
tensor();

for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    go.i.j:=g.i.j;
    ho.i.j:=h.i.j;
    Ro.i.j:=R.i.j;
    Ro.i.4.j.4:=R.i.4.j.4;
    for p from 1 to 4 do
      Co.i.j.p:=C.i.j.p
    od
  od
od:
Ro:=simplify(R);

save 'fried.m';

#read 'fried.m':
#CALCULA A INVERSA DA METRICA DE BARDEEN,
#E A SALVA EM inverse.m
```

```

g44:=(1+2*A(t)*Q):
g41:=B(t)*Q1:g14:=g41:
g42:=B(t)*Q2:g24:=g42:
g43:=B(t)*Q3:g34:=g43:
g11:=-S(t)^2*((1+2*HL(t)*Q)/(1-K*r^2)+2*HT(t)*Q11):
g22:=-S(t)^2*((1+2*HL(t)*Q)*r^2+2*HT(t)*Q22):
g33:=-S(t)^2*((1+2*HL(t)*Q)*r^2*sin(theta)^2+2*HT(t)*Q33):
g12:=-S(t)^2*(2*HT(t)*Q12):g21:=g12:
g13:=-S(t)^2*(2*HT(t)*Q13):g31:=g13:
g23:=-S(t)^2*(2*HT(t)*Q23):g32:=g23:

```

```
display(metric);
```

```
#calculando a inversa
```

```
invmetric():
```

```
siderel:={Q}:
```

```

for m from 1 to 3 do
  siderel:=siderel union {Q.m}:
  for n from m to 3 do
    siderel:=siderel union {Q.m.n}
  od
od:

```

```
words(0):
```

```
gc(0):
```

```
#SIMPLIFICANDO A METRICA CONTRA-VARIANTE
```

```
readlib(mtaylor);
```

```

for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    h.i.j:=mtaylor(h.i.j,siderel,2)
  od
od:

```

```
save 'inverse.m';
```

```
#! compress inverse.m
```

```
#CALCULA RIEMANN E O SALVA EM
```

```
#riemann.m
```

```

#DEFININDO A CONTRIBUICAO GAMMAijm * Qm para a derivada covariante de Qm
k:='k':
for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    CQ.i.j:=0:
    for m from 1 to 3 do
      CQ.i.j:=CQ.i.j+Co.i.j.m*diff(Q(r,theta,phi),x.m)
    od
  od
od:

#DEFININDO hatQij e Qi, com k e todas as derivadas necessarias
k:='k':
subset1:={Q=Q(r,theta,phi)}:
for m from 1 to 3 do
  subset1:=subset1 union {Q.m=-1/k*diff(Q(r,theta,phi),x.m)}:
  for n from m to 3 do
    subset1:=subset1 union {Q.m.n=1/k^2*(diff(Q(r,theta,phi),x.m,x.n)-CQ.m.n)
      +1/(3*S(t)^2)*go.m.n*Q(r,theta,phi)}
  od
od:

for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    h.i.j:=subs(subset1,h.i.j):
    g.i.j:=subs(subset1,g.i.j)
  od
od:

d1metric():

d2metric():

#Calculando Christoffel

Christoffel1():

Christoffel2():

#Calculando Riemann

```

```

Riemann():

#save 'riem.m';

#SIMPLIFICACAO DO TENSOR DE RIEMANN

#define a lista de substituicoes para converter os harmonicos em gij e hij
#em objetos que nao sao funcoes, possibilitando assim a simplificacao de
#termos de ordem > 2

setsub:={Q(r,theta,phi)=Y}:
for m from 1 to 3 do
  setsub:=setsub union {diff(Q(r,theta,phi),x.m)=Y.m}:
  for n from 1 to 3 do
    setsub:=setsub union {diff(Q(r,theta,phi),x.m,x.n)=Y.m.n}:
    for p from 1 to 3 do
      setsub:=setsub union {diff(Q(r,theta,phi),x.m,x.n,x.p)=Y.m.n.p}:
      for q from 1 to 3 do
        setsub:=setsub union
          {diff(Q(r,theta,phi),x.m,x.n,x.p,x.q)=Y.m.n.p.q}
      od
    od
  od
od:

#substituindo
for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    g.i.j:=subs(setsub,g.i.j):
    h.i.j:=subs(setsub,h.i.j):
    for v from 1 to 4 do
      for s from 1 to 4 do
        R.i.j.v.s:=subs(setsub,R.i.j.v.s):
      od
    od
  od
od:

```



```
#Define a lista de simplificacoes --- side relations
```

```
siderelY:={Y}:
```

```
for m from 1 to 3 do
```

```
  siderelY:=siderelY union {Y.m}:
```

```
  for n from 1 to 3 do
```

```
    siderelY:=siderelY union {Y.m.n}:
```

```
    for p from 1 to 3 do
```

```
      siderelY:=siderelY union {Y.m.n.p}:
```

```
      for q from 1 to 3 do
```

```
        siderelY:=siderelY union {Y.m.n.p.q}
```

```
      od
```

```
    od
```

```
  od
```

```
od:
```

```
#simplificando
```

```
for i from 1 to 4 do
```

```
  for j from 1 to 4 do
```

```
    for m from 1 to 4 do
```

```
      for l from 1 to 4 do
```

```
        R.i.j.m.l:=mtaylor(R.i.j.m.l,siderelY,2)
```

```
      od
```

```
    od
```

```
  od
```

```
od:
```

```
#salvando
```

```
save 'riem2.m';
```

```
#CALCULO E SIMPLIFICACAO DO TENSOR DE RICCI,
```

```
#A PARTIR DE RIEMANN SIMPLIFICADO
```

```
#CALCULA RICCI
```

```

for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    R.i.j:=0:
    for m from 1 to 4 do
      for n from 1 to 4 do
        R.i.j:=R.i.j-h.m.n*R.m.i.j.n
      od
    od
  od
od:

#SALVA
save 'ricci.m';

#! compress ricci.m

#SIMPLIFICA RICCI

for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    R.i.j:=simplify(mtaylor(R.i.j,siderelY,2))
  od
od:

#SALVA RICCI SIMPLIFICADO

save 'ricci2.m';

#! compress ricci2.m

#CALCULO E SIMPLIFICACAO DO ESCALAR DE CURVATURA

#! compress ricci2.m

R:=0:
for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    R:=R+h.i.j*R.i.j
  od
od:

```

```

R:=simplify(mtaylor(R,sidereY,2)):

save 'resc.m';

#! compress resc.m

#Calcula a parte eletrica do tensor de Weyl

for i from 1 to 4 do
  for j from i to 4 do
E.i.j:=mtaylor((R.i.4.j.4)-1/2*(R.i.j*g44+R44*g.i.j-R.i.4*g.j.4-R.j.4*g.i.4)+
1/6*R*(g.i.j*g44-g.i.4*g.j.4),sidereY,2):
    od
od:

#save 'weyl.m';

#Simplifica e ordena de maneira adequada cada componente de Eij
lista:=[A(t),B(t),HL(t),HT(t),diff(B(t),t),diff(A(t),t),diff(HL(t),t),
diff(HT(t),t),diff(HT(t),t,t),diff(HL(t),t,t),k,Y1,Y2,Y3,Y11,Y12,Y13,Y22,Y23,
Y33,sin(theta)]:
for i from 1 to 4 do
  for j from i to 4 do
    E.i.j:=collect(simplify(E.i.j,{cos(theta)^2-1=-sin(theta)^2}),lista,normal)
  od
od:

E21:=E12:
E31:=E13:
E32:=E23:
E41:=E14:
E42:=E24:
E43:=E34:

save 'weyl2.m';

#Usa a equacao de definicao dos harmonicos para simplificar os componentes
#de Eij

```

```

#read 'weyl2.m';
W:=0:
for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    W:=W-1/k^2*S(t)^2*ho.i.j*(Y.i.j-CQ.i.j)
  od
od:
W:
subs(setsub,"):
simplify("):
factor("):
simplify("{cos(theta)^2-1=-sin(theta)^2}):
eq:=Y=":
for i from 1 to 3 do
  eq.i:=Y.i.i=solve(eq,Y.i.i):
  E.i.i:=factor(subs(eq.i,E.i.i))
od:
save 'elet.m';

```

Referências

- [1] E. M. Lifshitz e I. M. Khalatnikov, *Adv. Phys.* **12**, (1963) 185.
- [2] A. Berera e Li-Zhi Fang, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 4 (1994) 458.
- [3] J. Hwang, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 3 (1994) 299.
- [4] A. Guth e So-Young Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 15 (1982) 1110.
- [5] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt e M. S. Turner, *Phys. Rev. D*, **28**, 4 (1983) 679.
- [6] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 6 (1980) 1882.
- [7] P. Jordan, J. Ehlers, W. Kundt, *Abh. Akad. Wissund Lit. Maing. Mat. Nat. K1*, n^o 2 (1960).
- [8] S. Hawking, *Astrophys. J.* **145** (1966) 544.
- [9] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [10] I. D. Soares, Notas de aula do curso *Gravitação*, ministrado no CBPF (1993), não publicado.

- [11] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press Inc., New York and London, 1967.
- [12] W. Israel, *Ann. Phys.* 100 (1976) 310.
- [13] D. W. Olson, *Phys. Rev. D* 14, 2 (1976) 327.
- [14] M. Novello e J. M. Salim, *Fund. of Cosmic Phys.* 8 (1983) 201.
- [15] G. F. R. Ellis e M. Bruni, *Phys. Rev. D* 40, 6 (1989) 1804.
- [16] J. Hwang e E. T. Vishniac, *Astrophys. J.* 35 (1990) 1.
- [17] II School of Cosmology and Gravitation, Ed. M. Novello.
- [18] J. M. Salim, Tese de Doutorado, CBPF/CNPq—1982.
- [19] J. M. Stewart, *Class. Quantum Grav.* 7 (1990) 1169.
- [20] *Prog. Theo. Phys. Supp.* 78 (1984) 1.
- [21] A. H. Guth, *Proceedings of the National Academy of Sciences Colloquium on Physical Cosmology*, Irvine, CA, March 27-28, 1992, ed. David N. Schramm.
- [22] S. W. Goode, *Phys. Rev. D* 39 10 (1989) 2882.
- [23] E. R. Harrison, *Rev. Mod. Phys.* 39, 4 (1967) 862. Há um erro de impressão na equação após a eq.(189). Pode-se verificar que a relação correta, que leva à eq.(190), é: $\Psi = \Pi \operatorname{sen}^{-1/2} \alpha$.
- [24] E. Butkov, *Física Matemática* Ed. Guanabara (1988), p. 341.

“PERTURBAÇÕES ESCALARES NO UNIVERSO DE FRIEDMAN-ROBERTSON”

SÉRGIO EDUARDO DE CARVALHO EYER JORÁS

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Mario Novello/CBPF

Regina Célia Arcuri/UFRJ

Ívano Damião Soares/CBPF

José Martins Salin/CBPF