TESE DE

DOUTORADO

FORMULAÇÃO INTEGRO-DIFERENCIAL PARA A GRAVITAÇÃO

Sergio Luiz Schubert Duque

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO DE 1994

Agradecimentos

A Mario Novello por sua orientação desde o trabalho de iniciação científica.

Aos amigos estudantes, funcionários e pesquisadores do CBPF, que com sua ajuda me possibilitaram realizar este trabalho.

Ao Cnpq pela ajuda financeira.

Resumo

Formulação integro-diferencial para a gravitação

Analisamos aqui algumas das consequências de considerarmos a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ como fundamental na descrição da interação gravitacional. Esta quantidade age como um potencial para a variável usual de dois índices $h_{\mu\nu}$. Com base na teoria de B.Podolsky para o eletromagnetismo, desenvolvemos um modelo para a gravitação nesta nova representação e estudamos a interação com a matéria. Como resultado, obtemos para a representação usual, uma estrutura mais abrangente que não só contém teorias já conhecidas construídas com fonte não-local conservada, mas admite também a introdução natural de termos não-lineares no campo que representam sua auto-interação.

Abstract

Integro-differential formulation of gravity

We analyse here some of the consequences of considering the variable $A_{\alpha\beta\mu}$ as the fundamental one in the description of the gravitational interaction. This quantity acts as a potential for the standard variable $h_{\mu\nu}$. Based on B.Podolsky's theory for electrodynamics, we develop a model for gravitation in this new representation, and study the interaction with matter. As a result, we obtain in the standard representation a broader scheme which contains not only already known theories built with non-local conserved sources, but also admits the natural introduction of non-linear terms in the field which represents its self-interaction.

Índice

Agradecimentos 1

Resumo 1

Abstract 3

Índice 4

Introdução 6

1 Formulação geométrica **10**

1.1 Equações de campo 10

1.2 Energia gravitacional 12

1.3 Teoria bimétrica 18

2 Gravitação como uma teoria de campo **22**

3 Gravitação sem auto-interação **36**

4 A variável $A_{\alpha\beta\mu}$ **43**

4.1 Propriedades 43

4.2 Teoria tipo Maxwell para $A_{\alpha\beta\mu}$ 46

4.3 Interação com a matéria 54

4.4 Formalismo tipo Maxwell com interação 57

4.5 Teoria tipo Podolsky para $A_{\alpha\beta\mu}$ 65

4.6 Auto-Interação 71

Conclusão 76

introdução

Neste trabalho damos sequência ao desenvolvimento de uma teoria para o campo de spin-2 baseada nas variáveis de três índices $A_{\alpha\beta\mu}$. Em estudos anteriores a teoria linear para a gravitação expressa nesta nova representação, foi formulada em suas versões clássica [19, 20] e quântica [22] e um exemplo particular de uma teoria não-linear foi construído [23]. Estes trabalhos no entanto, se restringiram ao comportamento do campo livre. Aqui nos propomos a analisar alguns modelos em interação com a matéria, estabelecidos através de analogia com a eletrodinâmica e discutir detalhadamente sua passagem para a representação usual do campo gravitacional através das variáveis simétricas de dois índices. Estas podem ser obtidas a partir de uma combinação particular de derivadas da variável fundamental $A_{\alpha\beta\mu}$.

Iniciamos no capítulo 1.1 apresentando alguns aspectos da teoria da relatividade geral, que como bem sabemos descreve adequadamente os fenômenos de natureza gravitacional observados. A dificuldade em compatibilizar o esquema geométrico através do qual esta teoria se estrutura com as outras interações já conhecidas, tem levado diversos autores a considerar abordagens alternativas para descrever a interação gravitacional.

Um dos aspectos que motiva a procura por novas teorias é a impossibilidade de definirmos neste contexto geométrico um verdadeiro tensor momentum-energia para o campo gravitacional, fato que gera dificuldades por exemplo, no estabelecimento do conceito de localizabilidade para a energia gravitacional.

Uma das primeiras tentativas de solucionar este problema é apresentada na seção 1.3 [6] onde a utilização de um espaço de fundo plano auxiliar é introduzido adequadamente ao esquema da relatividade geral, trazendo como principal consequência a atribuição de propriedade tensorial à alguns objetos da teoria (entre elas o pseudo tensor energia-momentum do campo gravitacional) e à equações que originalmente não a possuíam.

No capítulo 2 afastamo-nos definitivamente da abordagem geométrica introduzida pelos modelos anteriores para apresentar o tratamento convencional dado aos demais campos relativísticos aplicado à interação gravitacional descrita por um campo de spin-2. Partindo da equação linear de Fierz-Pauli para o campo $h_{\mu\nu}$ apresentamos o procedimento desenvolvido por Feynman [9] que consiste em complementar esta equação com termos de auto-interação de diferentes ordens de modo a obtermos uma teoria não-linear equivalente à relatividade geral. Descrevemos ainda outros tratamentos para este mesmo problema [14, 15] onde algumas das ferramentas introduzidas pela teoria bimétrica descrita em 1.3 se mostram decisivas para o estabelecimento de uma teoria lagrangeana para o campo de spin-2, que resulta ser completamente equivalente à teoria da relatividade geral.

No capítulo 3 apresentamos a teoria desenvolvida por S.Deser e B.E.Laurent onde a gravitação é descrita como um campo de spin-2 sem auto-interação, em analogia com a eletrodinâmica onde o fóton não é carregado. A obtenção da fonte conservada, para a situação em que a matéria interage com o campo gravitacional, é feita através da aplicação de projetores não-locais sobre o tensor momentum-energia, resultando em uma teoria que reproduz o limite newtoniano e fornece as mesmas previsões para os testes experimentais que a teoria da relatividade geral, apesar de diferirem em aspectos fundamentais, tais como a inexistência de auto-interação.

Chegamos então ao capítulo 4 onde apresentamos primeiramente as principais propriedades de $A_{\alpha\beta\mu}$, que consideramos como a variável fundamental para descrever a gravitação, assim como a expressão que nos permite passar desta representação para a representação usual das variáveis simétricas de dois índices $h_{\mu\nu}$. Nos referindo a trabalhos anteriores, mostramos que esta variável contém dois campos de spin-2 e apresentamos o vínculo a ser utilizado para eliminarmos um destes campos. O estudo da dinâmica é iniciado através da apresentação das equações de movimento que decorrem da lagrangeana estabelecida através de uma analogia com a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo. Seguimos com o estudo da interação do campo gravitacional com a matéria, representada aqui, por questão de simplicidade, por um campo escalar. Mostramos que para o tipo de interação que estamos considerando, o efeito resultante pode ser descrito como uma alteração da métrica de fundo plana descrita por $\gamma^{\mu\nu}$ para uma geometria efetiva arbitrária representada pela métrica riemanniana $g^{\mu\nu}$, gerada por uma combinação particular de derivadas de $A_{\alpha\beta\mu}$. Passamos em seguida à apresentação destas equações reescritas na representação das variáveis simétricas de dois índices. Uma análise deste novo sistema nos mostra que a exigência de que a equação de Fierz-Pauli seja a equação de movimento nesta representação tem como consequência o fato de que a matéria fica sujeita aos efeitos de uma métrica efetiva que é uma função não-local do campo $A_{\alpha\beta\mu}$. Na sequência desenvolvemos um modelo semelhante àquele proposto por B.Podolsky para a eletrodinâmica [24], e apresentamos as equações de movimento nas duas representações. Temos então que as equações de campo para as variáveis $h_{\mu\nu}$ podem ser feitas idênticas às equações integro-diferenciais resultantes do modelo sem auto-interação proposto por Deser e Laurent descrito no capítulo 3.

A possibilidade de complementar a lagrangeana linear 'tipo Podolsky' descrita acima, com termos não-lineares na variável $A_{\alpha\beta\mu}$, ou mesmo com funcionais da métrica efetiva $g^{\mu\nu}$ (que como vimos desempenha um papel importante no processo de interação com a matéria), tem como consequência a introdução de termos não-lineares de auto-interação nas equações de campo para a representação de dois índices $h_{\mu\nu}$. A análise das consequências da adoção destes termos complementares é o objeto de estudo da última seção deste trabalho.

Capítulo 1

Formulação geométrica

1.1 Equações de campo

A teoria da relatividade geral desenvolvida por A.Einstein no início deste século, é considerada hoje por uma grande parte dos físicos como um dos mais importantes trabalhos feitos em física teórica. Fruto da genialidade de seu autor, esta teoria descreve adequadamente os fenômenos gravitacionais através de um esquema de natureza geométrica, onde o potencial gravitacional é representado pelo tensor métrico de um espaço-tempo riemanniano.

As equações de campo

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - 1/2Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

relacionam um dado conteúdo material do sistema em estudo, representado pelo tensor momentum-energia, com a geometria do espaço-tempo a ser determinada. Uma situação completamente nova era então introduzida na física : a geometria, representada aqui pelo tensor metrico $g_{\mu\nu}$, deixava de ser uma estrutura dada 'a priori' na qual os fenômenos físicos se desenvolvem, passando a ser um objeto dinâmico determinado pela sua fonte $T^{\mu\nu}$. A matéria por sua vez tem a sua evolução definida nesta geometria que ela própria. quando pensada como fonte originou.

Estas equações, trazendo a idéia de que a geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria no universo, incorporam o princípio de Mach que desempenhou um papel importante no desenvolvimento das idéias de A.Einstein que resultaram nesta teoria.

As equações de campo podem ser obtidas por meio do princípio de mínima ação através da variação da soma das ações do campo gravitacional e da matéria que age como fonte. A densidade escalar mais simples a ser escolhida para lagrangeana do campo gravitacional livre é construída com derivadas de segunda ordem do potencial gravitacional (representado pela métrica $g_{\mu\nu}$), podendo ser escrita como :

$$\mathcal{L}_{(g)} = \sqrt{-g}\, R \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

É fácil mostrar [1] que $\mathcal{L}_{(g)}$ pode ser colocada na forma

$$\mathcal{L}_{(g)} = \mathcal{L}'_{(g)} + \mathcal{D}^{\alpha}{}_{,\alpha},$$

onde

$$\mathcal{D}^{\alpha} = -\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu} \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} + \sqrt{-g}\, g^{\lambda\alpha} \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\mu}$$

e

$$\mathcal{L}'_{(g)} = \sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu} \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha} \right). \tag{1.3}$$

Como $\mathcal{D}^{\alpha}{}_{,\alpha}$ não contribui para as equações de campo, utilizaremos $\mathcal{L}'_{(g)}$ para representar o campo gravitacional livre. A lagrangeana de matéria será representada genéricamente por

$$\mathcal{L}_{(m)} = \sqrt{-g}\, L_{(m)}. \tag{1.4}$$

Ao efetuarmos a variação da ação total em relação à métrica $g^{\mu\nu}$, obtemos fácilmente as equações de campo

$$\sqrt{-g}\ (R_{\mu\nu} - 1/2Rg_{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}\, T_{\mu\nu} \equiv \mathcal{T}_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

onde usamos a definição

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{(m)}}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

1.2 Energia gravitacional

No contexto geométrico brevemente descrito acima, as questões de definição e da localizabilidade da energia do campo gravitacional são até hoje objetos de frequentes debates e de novos desenvolvimentos na teoria.

Sabemos que na teoria da relatividade especial, a lei de conservação de energia e momentum é representada pela expressão

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \tag{1.6}$$

quando utilizamos um sistema de coordenadas inercial onde a métrica assume a forma $\gamma^{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1)$. A integração de 1.6 em um volume limitado por uma hipersuperfície tipo-tempo, junto com a hipótese de que nosso sistema material possui uma extensão tridimensional finita, nos leva após a aplicação do teorema de Gauss à conservação de um vetor que denotaremos P_λ . Este vetor representa a energia e o momentum total do sistema material. Temos portanto:

$$\frac{dP_\lambda}{dx^0} = 0,$$

onde

$$P_\lambda = \int\int\int_V d^3x\, T^0_\lambda(x).$$

É fato conhecido da geometria riemanniana que o tensor $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - 1/2Rg^{\mu\nu}$ possui divergência covariante nula, isto é :

$$G^{\mu\nu}{}_{||\nu} \equiv 0. \quad (1.7)$$

Como consequência, temos através das equações de campo 1.5

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu{}_{||\nu} = 0, \quad (1.8)$$

ou a sua forma expandida, lembrando que $\mathcal{T}^\nu_\mu = \sqrt{-g}\, T^\nu_\mu$,

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} - \mathcal{T}^\nu_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

Vemos desta expressão que o tensor momentum-energia da matéria não é conservado isoladamente. Procedemos então em analogia à mecânica clássica onde a lei de conservação é restaurada através da identificação de uma nova forma de energia, supostamente armazenada no campo gravitacional (energia potencial), que não está incluida no tensor momentum-energia da matéria $T^{\mu\nu}$. Vamos denotar por $t^{\mu\nu}$ a energia potencial, momentum e 'stress' relativos ao campo gravitacional. Se conseguirmos expressar o segundo termo da equação 1.9 como a divergência de uma quantidade que envolva apenas o potencial gravitacional e suas derivadas, poderemos identificar esta grandeza à $t^{\mu\nu}$ de modo a obtermos uma lei de conservação para a soma $\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu} + t_{\mu}{}^{\nu}$, a saber:

$$(\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu} + t_{\mu}{}^{\nu})_{,\nu} = 0. \tag{1.10}$$

Para mostrar que isto é possível [2], supomos a validade da equação 1.10 reescrita agora da seguinte maneira :

$$t_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = -\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}. \tag{1.11}$$

É fácil mostrar usando a equação 1.9, que generaliza a operação de divergência, que o lado direito desta equação pode ser escrito como :

$$-\mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = -1/2\mathcal{T}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu}. \tag{1.12}$$

O próximo passo é eliminar $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ através das equações de campo de modo que $t_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}$ seja expresso em termos do potencial gravitacional e suas derivadas. Para isto consideramos a expressão:

$$d(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\,(dg^{\mu\nu} + 1/2 g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}).$$

Multiplicando os dois lados por $R_{\mu\nu}$ temos :

$$R_{\mu\nu}\, d(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = -(R^{\mu\nu} - 1/2 R g^{\mu\nu})\sqrt{-g}\, dg_{\mu\nu}.$$

Fazendo uso das equações de campo 1.5 obtemos :

$$R_{\mu\nu}\, d(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = T^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}.$$

Segue portanto que

$$T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = R_{\alpha\beta}\,(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta})_{,\mu}. \tag{1.13}$$

Lembrando que estamos usando $\mathcal{L}'_{(g)}$ dada por 1.3 como lagrangeana para o campo gravitacional, temos

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'_{(g)}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'_{(g)}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \tag{1.14}$$

onde

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{1.15}$$

A equação 1.13 pode agora ser escrita como :

$$-1/2 T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = -1/2 \left[\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}'_{(g)}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'_{(g)}}{\partial x^{\mu}} \right].$$

Segue finalmente das equações 1.11 e 1.12 o resultado

$$t_{\mu\ ,\nu}^{\ \nu} = -1/2 \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}'_{(g)}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\nu}} - \delta^{\nu}_{\mu} \mathcal{L}'_{(g)} \right),$$

que nos fornece de imediato a seguinte expressão para $t_{\mu}^{\ \nu}$:

$$t_{\mu}^{\ \nu} = 1/2 \left(\delta^{\nu}_{\mu} \mathcal{L}'_{(g)} - \tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}'_{(g)}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{\ ,\nu}} \right). \tag{1.16}$$

A indicação de que este objeto pode representar a energia, momentum e 'stress' do campo gravitacional é fornecida através da analogia com o campo eletromagnético: $t^{\mu\nu}$ é quadrático e homogêneo nas derivadas de primeira ordem do potencial, fato igualmente observado no tensor momentum-energia para o eletromagnetismo. No entanto, uma diferença fundamental separa as duas teorias: $t^{\mu\nu}$ não é uma verdadeira densidade tensorial uma vez que pode ser anulado em um ponto qualquer da variedade através de uma escolha adequada de um sistema de coordenadas neste ponto. Segue portanto que a lei de conservação 1.10 envolvendo $t^{\mu\nu}$, que denominaremos pseudo-tensor energia-momentum do campo gravitacional, não mais se constitui em uma equação tensorial. Este fato despertou de imediato dúvidas em alguns autores à respeito da validade da aplicação do princípio de conservação em sua forma tradicional à teoria da gravitação (Eddington [2] por exemplo, não reconhece t^{00} como o objeto que representa a energia do campo gravitacional) . Outros autores (Tolman [3], por exemplo) consideram que o critério para que as equações tenham um significado fundamental, não é o de que elas sejam escritas na forma tensorial, mas o de que elas sejam covariantes (válidas em qualquer sistema de coordenadas), uma vez que toda equação tensorial é covariante mas existem equações, como a que estamos nos referindo, que são covariantes mas não tem caráter tensorial. No entanto, a existência do vetor conservado P_λ associado à lei de consevação 1.10, parece estar condicionada ao uso de um sistema especial de coordenadas (sistemas de coordenadas quasi-galileanos [3]) que coincide com o sistema cartesiano a grandes distâncias da fonte em consideração. De fato, para sistemas estáticos e limitados espacialmente, a integração de 1.10 em um volume, seguido da aplicação do teorema de Gauss nos fornece :

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V d^3x(T_\mu{}^0 + t_\mu{}^0) \equiv \frac{dP_\mu}{dt} = -\int\int_S d^2x(T_\mu{}^i + t_\mu{}^i)\, n_i.$$

A hipótese de que o sistema é limitado espacialmente juntamente com a escolha da superfície de integração S a grande distância do fonte, nos dá :

$$\frac{dP_\mu}{dt} = \int\int_{S\rightarrow\infty} d^2x \, t_\mu^{\ i} \, n_i \, .$$

Uma análise cuidadosa desta expressão [1] nos mostra que apenas o uso do sistema de coordenadas quasi-galileanas é capaz de anular o lado direito desta equação fornecendo o vetor conservado P_μ . Se nos restringirmos a este sistema de coordenadas é possível mostrar ([4] por exemplo) que a energia total (P_0) de um sistema fechado com massa de repouso m_0 é dada por $P_0 = m_0 c^2$, um resultado satisfatório do ponto de vista físico . O mesmo não acontece se efetuarmos o cálculo para determinar P_0 utilizando um sistema de coordenadas curvilíneas.

O papel diferenciado desempenhado por alguns sistemas de coordenadas é também verificado nas questões relativas à localizabilidade da energia do campo gravitacional. Alguns estudos [5], [4] mostram que a simples introdução de um sistema de coordenadas polares é capaz de fazer surgir componentes não nulas para $t^{\mu\nu}$ mesmo em um espaço plano onde o campo gravitacional está ausente. Este resultado indica claramente que se $t^{\mu\nu}$ representa a energia do campo gravitacional, então não podemos falar de uma maneira precisa sôbre a localização desta energia no espaço-tempo. Este comportamento, visto como problemático por vários autores, motivou a procura por outras expressões capazes de representar a energia do campo gravitacional [4] . O problema no entanto, continua longe de estar completamente resolvido e constitui área de intensa atividade de pesquisa e debate .

1.3 Teoria bimétrica

Partindo da teoria da relatividade geral, um desenvolvimento do formalismo foi obtido [6], [7] através da consideração de que em cada ponto da variedade, juntamente com a métrica $g^{\mu\nu}$, existe uma outra métrica riemanniana correspondente a um espaço-tempo plano escrita em um sistema de coordenadas arbitrário. A introdução desta métrica que denotaremos por $\gamma^{\mu\nu}(x)$ pode ser interpretada como a representação do espaço-tempo quando o campo gravitacional é removido . Sua presença gera algumas modificações na estrutura formal da teoria da relatividade geral, que discutiremos a seguir.

Uma delas é a possibilidade de definirmos a operação de derivação covariante associada à métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}(x)$ denotada aqui por (;) . Esta métrica satisfaz à condição

$$\gamma_{\mu\nu;\rho} = 0, \tag{1.17}$$

definindo assim a conexão simétrica (símbolo de Christoffel) deste espaço que denotaremos por $\Upsilon^{\alpha}_{\mu\nu}(x)$.

É fácil mostrar que se definirmos o tensor $K^{\alpha}_{\mu\nu}(x)$ através da expressão

$$K^{\lambda}_{\mu\nu} = 1/2 g^{\lambda\alpha}\left(g_{\mu\alpha;\nu} + g_{\nu\alpha;\mu} - g_{\mu\nu;\alpha}\right), \tag{1.18}$$

a seguinte relação será válida em cada ponto do espaço-tempo :

$$K^{\lambda}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x) - \Upsilon^{\lambda}_{\mu\nu}(x). \tag{1.19}$$

Lembrando que o espaço-tempo de fundo plano com métrica $\gamma^{\mu\nu}(x)$ tem tensor de curvatura nulo, podemos expressar o tensor de Ricci de um espaço-tempo riemanniano da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = -K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} + K^{\alpha}_{\alpha\mu;\nu} - K^{\alpha}_{\alpha\beta}K^{\beta}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\beta\mu}K^{\beta}_{\alpha\nu}. \tag{1.20}$$

Comparando esta expressão com a forma usual de escrevê-la em termos dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, vemos que estes foram substituídos pelo tensor $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ e que a derivada simples $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ deu lugar à derivada covariante relativa à métrica de fundo denotada aqui por (;). De uma maneira geral todas as equações da teoria da relatividade geral são válidas neste formalismo, desde que reescritas com as alterações mencionadas acima somadas à substituição de $\sqrt{-g}$ por $\chi = \sqrt{g/\gamma}$ e do elemento de volume d^4x por $\sqrt{-\gamma}\, d^4x$ nas integrações .

Segue então que se considerarmos 1.3 como lagrangeana para o campo gravitacional livre, agora reescrita segundo as regras citadas acima como

$$\tilde{\mathcal{L}} = \chi g^{\mu\nu}\left(K^{\alpha}_{\beta\mu}K^{\beta}_{\alpha\nu} - K^{\alpha}_{\beta\alpha}K^{\beta}_{\mu\nu}\right) \tag{1.21}$$

e 1.4 como lagrangeana para matéria, obteremos ao efetuarmos a variação da ação total em relação à $g^{\mu\nu}$ a equação de movimento

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - 1/2Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu},$$

onde $R_{\mu\nu}$ é agora dado pela expressão 1.20 e R obtido através de sua contração .

Um resultado que torna este esquema interessante é obtido ao analisarmos a questão da definição da energia gravitacional. Aqui, através de um procedimento semelhante ao utilizado na seção anterior obtemos não mais um pseudo-tensor mas sim um verdadeiro tensor para representar o conteúdo energético do campo gravitacional [6] . Este tensor tem por expressão

$$\bar{\theta}_{\mu}{}^{\nu} \equiv \chi\theta_{\mu}{}^{\nu} = 1/2\left(\bar{\mathcal{L}}\delta^{\nu}_{\mu} - \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial g_{\alpha\beta;\nu}} g_{\alpha\beta;\mu}\right) \tag{1.22}$$

e satisfaz à lei de conservação tensorial

$$(\bar{T}_{\mu}{}^{\nu} + \bar{\theta}_{\mu}{}^{\nu})_{;\nu} = 0. \tag{1.23}$$

Em um sistema de coordenadas cartesianas onde $\Upsilon^{\alpha}_{\mu\nu}(x) \equiv 0$ esta expressão pode ser escrita como :

$$(\bar{T}_{\mu}{}^{\nu} + \bar{\theta}_{\mu}{}^{\nu})_{,\nu} = 0. \tag{1.24}$$

Vemos portanto que uma das consequências da introdução da métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$ é a atribuição de propriedade tensorial à grandezas e equações que originalmente não a possuiam.

Este formalismo deve ainda ser complementado por um conjunto de condições que estabelecem a relação entre os dois tensores métricos. Como para um dado tensor $g^{\mu\nu}$ a métrica $\gamma^{\mu\nu}$ pode ser escolhida arbitráriamente, segue que por representar um espaço plano, a métrica de fundo estará definida à menos de uma transformação de coordenadas que envolve um conjunto de quatro funções arbitrárias. A imposição de um conjunto de quatro condições entre os dois tensores na forma de equações covariantes [8] é suficiente para fixar a relação entre eles. A arbitrariedade de definição destas condições auxiliares é refletida no tensor momentum-energia $\bar{\theta}_{\mu}{}^{\nu}$ que passa a depender da escolha das mesmas. Este fato torna em um certo sentido ilusória a vantagem deste formalismo, em relação à teoria da relatividade geral, em fornecer um verdadeiro tensor momentum-energia para o campo gravitacional, pois mesmo que o conceito de localizabilidade da energia gravitacional esteja agora bem estabelecido um certo grau de arbitrariedade se faz presente em sua definição .

Apesar de diferir da teoria da relatividade geral em aspectos essenciais, veremos no próximo capítulo que este esquema formal aqui revisto é capaz de fornecer elementos importantes para formularmos uma teoria relativística convencional para o campo gravitacional e estabelecermos sua equivalência com a teoria da relatividade geral.

Capítulo 2

Gravitação como uma teoria de campo

Visto como um campo relativístico evoluindo no espaço-tempo de fundo que assumiremos plano, o campo gravitacional pode ser descrito através de um campo tensorial de dois índices (spin-2) não massivo e simétrico $h^{\mu\nu}(x)$ [9, 10, 11]. Um procedimento direto para exibirmos a lagrangeana que descreve este campo e consequentemente suas equações de movimento, foi desenvolvido por Feynman em sua tentativa (bem sucedida) de mostrar ser possível chegar às equações da teoria da relatividade geral únicamente através de argumentos pertinentes à teoria relativística de campos.

Assim, através de uma analogia com a já bem estabelecida teoria do campo eletromagnético partimos de uma lagrangeana formada com todos os produtos quadráticos distintos possíveis das derivadas de primeira ordem do campo tensorial $h^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}^{(2)} = a_1(h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\nu,\sigma}) + a_2(h_{\mu\nu,\sigma}h^{\nu\sigma,\mu}) + a_3(h_{\mu\nu}{}^{,\nu}h^{,\mu}) + a_4(h^{,\mu}h_{,\mu}). \tag{2.1}$$

Para o termo de interação com a matéria consideramos a lagrangeana dada por :

$$\mathcal{L}_{(i)} = 1/2 h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Se em uma primeira etapa da construção da teoria nos restringirmos à sua parte linear desprezando a auto-interação do campo gravitacional, podemos determinar uma relação entre as constantes presentes na lagrangeana acima através da consideração de que o tensor $T^{\mu\nu}$ é conservado isoladamente, isto é :

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{2.3}$$

Desta forma obtemos a bem conhecida lagrangeana de Fierz-Pauli, quadrática nas derivadas de primeira ordem do campo $h^{\mu\nu}$ [12].

$$\mathcal{L}^{(2)} = 1/2(h_{\mu\nu,\sigma} h^{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\nu} h^{,\mu}) + 1/4(h^{,\mu} h_{,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\nu,\sigma}) \quad . \tag{2.4}$$

Esta lagrangeana, invariante sob transformações no campo $h^{\mu\nu}$ do tipo

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}, \tag{2.5}$$

nos leva à conhecida equação de Fierz-Pauli para o campo de spin-2:

$$\begin{aligned} G^{(L)}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\ h_{\alpha\beta} \equiv [(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta})\Box + \gamma_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta} + \gamma^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \delta^{\beta}_{\mu}\partial^{\alpha}\partial_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\nu}\partial^{\beta}\partial_{\mu}]h_{\alpha\beta} \equiv \\ \equiv \ \Box h_{\mu\nu} - h_{(\mu\sigma,}{}^{\sigma}{}_{,\nu)} + h_{,\mu,\nu} + \gamma_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha,\beta} - \Box h) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A variação de forma desta equação para

$$\Box h'_{\mu\nu} - h'_{(\mu\sigma,}{}^{\sigma}{}_{,\nu)} + c_1\, h'_{,\mu,\nu} + c_2\, h'_{\alpha\beta}{}^{,\alpha,\beta}\gamma_{\mu\nu} + c_3\, \Box h'\gamma_{\mu\nu} = 0, \tag{2.7}$$

está associada à transformações no campo do tipo :

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + ch\gamma_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Sabemos no entanto, que o procedimento de anular a divergência do tensor momentum-energia da matéria não pode ser considerado correto uma vez que desta forma estamos ignorando o fato de que a própria energia do campo gravitacional deve também agir como fonte, fazendo com que no processo de interação da matéria com a gravitação tenhamos a soma das energias gravitacional e da matéria conservada. Portanto, o próximo passo a ser dado na direção de construirmos uma teoria exata para para o campo gravitacional é considerarmos esta energia correspondente à auto-interação que foi desprezada numa primeira abordagem.

Seguindo uma vez mais o procedimento proposto por Feynman, procuramos pelo objeto $\tau_{\mu\nu}$, que vai representar a auto-energia do campo gravitacional, exigindo que a sua soma com o tensor momentum-energia da matéria tenha divergência nula, isto é:

$$(T^{\mu\nu} + \tau^{(2)\mu\nu})_{,\nu} = 0\,. \tag{2.9}$$

Para determinarmos $\tau^{(2)\mu\nu}$ partimos do fato que em uma primeira aproximação esta auto-energia deve ser escrita através do quadrado das derivadas de primeira ordem do potencial $h^{\mu\nu}$. Termos deste tipo na equação de movimento tem origem em um termo da lagrangeana que é de terceira ordem no campo $h^{\mu\nu}$, denotado aqui por $\mathcal{L}^{(3)}$, uma vez que ao ser submetido à variação gera o termo $\tau^{\mu\nu}$ de segunda ordem (aqui denotado por $\tau^{(2)\mu\nu}$) procurado:

$$\frac{\delta\mathcal{L}^{(3)}}{\delta h_{\mu\nu}} = \tau^{(2)\mu\nu}.$$

$\mathcal{L}^{(3)}$ deve ser constituído portanto, por todos os produtos distintos da forma $c(h\partial h\partial h)$ submetidos ao vínculo

$$\left(T^{\mu\nu} + \tau^{(2)\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0 \ ,$$

que nos levará à determinação das constantes.

Uma outra forma de obtermos $\mathcal{L}^{(3)}$ é através do procedimento usual [13] de efetuarmos a variação da lagrangeana quadrática de Fierz-Pauli em relação à métrica de fundo (Minkowski por simplicidade) de modo a determinarmos o tensor momentum-energia associado $\tau^{(2)\mu\nu}$, que deve agir como fonte para a equação linear 2.6. O termo cúbico $\mathcal{L}^{(3)}$ presente na lagrangeana que gera esta nova equação não-linear deve portanto ter a forma genérica de um produto de $\tau^{(2)\mu\nu}$ com $h_{\mu\nu}$. Desta forma chegamos a um estágio da teoria em que os efeitos de segunda ordem da auto-energia do campo gravitacional estão sendo considerados .

A procura por efeitos de ordem superior é feita de maneira análoga. O termo cúbico $\mathcal{L}^{(3)}$ agora presente na lagrangeana contribui através do processo de variação descrito com um tensor momentum-energia $\tau^{(3)\mu\nu}$ de teceira ordem em $h^{\mu\nu}$. A nova equação não-linear de movimento deve portanto ter sua origem em uma nova lagrangeana onde um termo de quarta ordem $\mathcal{L}^{(4)}$ se faz presente. Desta forma somos levados a considerar uma série infinita se quisermos computar o efeito da auto-interação em todas as ordens. Podemos portanto escrever que

$$\frac{\delta}{\delta h_{\mu\nu}}(\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(4)} + \ldots) = T^{\mu\nu},$$

ou,

$$G^{(L)\mu\nu} + (\tau^{(2)\mu\nu} + \tau^{(3)\mu\nu} + \ldots) = T^{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

A série anterior quando adequadamente somada nos leva às equações não-lineares de Einstein da teoria da relatividade geral que tão bem descrevem o comportamento do campo gravitacional.

Feynman no entanto mostrou ser possível construir um funcional, que denotaremos por $\mathcal{L}^{(\Sigma)}$, envolvendo derivadas no máximo de segunda ordem do objeto $g_{\mu\nu}(x)$ definido por

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \tag{2.11}$$

de tal forma que ele desempenhe o papel da soma de toda a série infinita referida anteriormente [9]. Isto significa que quando submetido à variação com relação à $g_{\mu\nu}$, este funcional deve fornecer através da equação de movimento

$$\frac{\delta\mathcal{L}^{(\Sigma)}}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

tomada em conjunto com o vínculo

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}^{(\Sigma)}}{\delta g_{\sigma\nu}}\right)_{,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\left(\frac{\delta\mathcal{L}^{(\Sigma)}}{\delta g_{\alpha\beta}}\right) = 0 \tag{2.13}$$

(que tem sua origem na expressão 2.9), as equações não-lineares completas de Einstein.

O funcional proposto

$$\mathcal{L}^{(\Sigma)} = \sqrt{-g}R,$$

obtido por Feynman através de um processo construtivo descrito em [9], satisfaz à estes requisitos, gerando através de 2.12 as equações referidas. De fato, temos de 2.12 que

$$\frac{\delta \mathcal{L}^{(\Sigma)}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\,,$$

ou

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - 1/2Rg^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}.$$

O vínculo 2.13 pode também ser escrito como:

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0.$$

Vemos portanto que as equações de Einstein obtidas na teoria da relatividade geral em um contexto geométrico são também as equações 'naturais' para um campo de spin-2 quando abordamos o problema com as ferramentas usuais da teoria relativística de campos.

Uma outra forma de passarmos da teoria linear do campo de spin-2 para as equações não-lineares completas de Einstein, sem lidarmos diretamente com a série infinita presente, foi desenvolvida por Deser [14]. Através da linearização da lagrangeana de Einstein

$$\sqrt{-g}R \equiv \mathcal{R}\ ,$$

consideramos apenas a parte quadrática nas variáveis $h^{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, tomadas como independentes, através da qual construimos a ação

$$S=\int d^4x\mathcal{R}=\int d^4x\left[h^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\nu}\right)+\gamma^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\right)\right]. \tag{2.14}$$

Esta ação que podemos mostrar ser equivalente à ação construída com a lagrangeana de Fierz-Pauli 2.4 [12] , representa como já vimos a teoria do campo gravitacional livre não massivo de spin-2 em sua aproximação linear. Ao efetuarmos a variação das grandezas $h^{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ independentemente (formalismo de primeira ordem) obtemos as equações de campo

$$2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-\delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\rho}-\gamma^{\alpha}_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}=h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}-h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu}-h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu}-1/2\gamma_{\mu\nu}h^{,\alpha},$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}-1/2\Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\nu}-1/2\Gamma^{\rho}_{\nu\rho,\mu}=0,$$

que quando combinadas nos fornecem a equação 2.6 referida anteriormente por equação de Fierz-Pauli. A inclusão da não-linearidade nesta equação é feita de maneira análoga à descrita anteriormente; primeiramente computamos o tensor momentum-energia simétrico através da variação da lagrangeana quadrática inicial em relação à métrica $\gamma^{\mu\nu}$ de um espaço de fundo plano com coordenadas arbitrárias. Para isto devemos reescrever a ação 2.14 segundo as regras estabelecidas em 1.3 a saber: as derivadas simples em relação às coordenadas devem ser substituídas por derivadas covariantes em relação à métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$ e as conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ pelos objetos de natureza tensorial $K^{\alpha}_{\mu\nu}$. A ação 2.14 pode então ser escrita como :

$$S=\int d^4x\left[\tilde{h}^{\mu\nu}\left(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha}-K^{\rho}_{\mu\rho;\nu}\right)+\tilde{\gamma}^{\mu\nu}\left(K^{\alpha}_{\mu\nu}K^{\rho}_{\alpha\rho}-K^{\alpha}_{\beta\mu}K^{\beta}_{\alpha\nu}\right)\right] \tag{2.15}$$

onde

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} h^{\mu\nu},$$

$$K^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Upsilon^{\alpha}_{\mu\nu}$$

e

$$K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} = K^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Upsilon^{\alpha}_{\sigma\alpha} K^{\sigma}_{\mu\nu} - \Upsilon^{\sigma}_{\mu\alpha} K^{\alpha}_{\sigma\nu} - \Upsilon^{\sigma}_{\nu\alpha} K^{\alpha}_{\mu\sigma}.$$

O cálculo do tensor momentum-energia nos fornece então

$$\tau^{(2)}_{\mu\nu} = \left(K^{\alpha}_{\mu\nu} K^{\rho}_{\alpha\rho} - K^{\alpha}_{\beta\mu} K^{\beta}_{\alpha\nu} - \sigma_{\mu\nu} \right),$$

onde $\sigma_{\mu\nu}$ é um termo complexo envolvendo a derivada covariante (;) de termos do tipo produto (hK). Adicionamos então à ação 2.15 o termo

$$S = \int \tilde{h}^{\mu\nu} \left(K^{\alpha}_{\mu\nu} K^{\rho}_{\alpha\rho} - K^{\alpha}_{\beta\mu} K^{\beta}_{\alpha\nu} \right), \tag{2.16}$$

que representa apenas uma parte da contribuição de $\tau^{(2)}_{\mu\nu}$ para a nova ação que nos dará as equações não-lineares de movimento. Por independer de $\gamma^{\mu\nu}$ o termo cúbico 2.16 adicionado à ação 2.15 não irá contribuir para o cálculo de $\tau^{(3)}_{\mu\nu}$ fazendo com que o processo interativo de introdução da não-linearidade seja interrompido já neste primeiro passo. Para nos certificarmos que este procedimento foi suficiente para gerar a ação completa que nos leva às equações de Einstein, somamos à ação 2.15 o seguinte termo que é equivalente à uma integral de superfície:

$$S = \int d^4x \tilde{\gamma}^{\mu\nu} \left(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K^{\rho}_{\mu\rho;\nu} \right). \tag{2.17}$$

A ação resultante pode então ser escrita como:

$$S = \int d^4x(\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}) \left[K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K^{\rho}_{\mu\rho;\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}K^{\rho}_{\alpha\rho} - K^{\alpha}_{\beta\mu}K^{\beta}_{\alpha\nu}\right]. \tag{2.18}$$

Se identificarmos agora as variáveis

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) \equiv \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu} \tag{2.19}$$

e nos lembrarmos que o termo entre colchetes da expressão 2.18 representa o tensor de Ricci associado à métrica riemanniana $g^{\mu\nu}$ conforme visto em 1.20, vemos que a ação 2.18 nada mais é do que a ação geométrica

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{2.20}$$

que como já sabemos nos fornece as equações não-lineares completas para o campo gravitacional que denominamos de equações de Einstein.

De posse destes resultados fica agora fácil rearranjá-los de forma a exibirmos uma teoria lagrangeana para o campo gravitacional de spin-2, formulada em um espaço-tempo de fundo plano com coordenadas arbitrárias, completamente equivalente à teoria da relatividade geral. Cabe aqui salientar que a restrição à um espaço de fundo plano é feita aqui apenas por questão de simplicidade, estando os casos mais gerais contidos nos trabalhos originais de seus autores [14, 15].

Vamos considerar então a seguinte lagrangeana [15] para os campos tensoriais independentes $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{(g)} = \tilde{h}^{\mu\nu}(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K^{\rho}_{\mu\rho;\nu}) + (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})(K^{\alpha}_{\mu\nu}K^{\rho}_{\alpha\rho} - K^{\alpha}_{\mu\beta}K^{\beta}_{\nu\alpha}). \tag{2.21}$$

À partir desta lagrangeana, construímos a ação :

$$S_{(g)} = -1/2\int d^4x\mathcal{L}_{(g)}. \tag{2.22}$$

A variação de 2.22 com relação às variáveis citadas nos fornece as seguintes equações de primeira ordem:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{(g)}}{\delta\tilde{h}^{\mu\nu}} = K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - 1/2K^{\rho}_{\mu\rho;\nu} - 1/2K^{\rho}_{\nu\rho;\mu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}K^{\rho}_{\alpha\rho} - K^{\alpha}_{\mu\beta}K^{\beta}_{\nu\alpha} = 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{(g)}}{\delta K^{\rho}_{\alpha\beta}} = -\tilde{h}^{\alpha\beta}_{;\rho} + (\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta})K^{\epsilon}_{\rho\epsilon} - (\tilde{\gamma}^{\alpha\mu} + \tilde{h}^{\alpha\mu})K^{\beta}_{\mu\rho} - (\tilde{\gamma}^{\beta\mu} + \tilde{h}^{\beta\mu})K^{\alpha}_{\mu\rho} = 0\ . \tag{2.24}$$

Estas equações quando combinadas nos fornecem uma equação de segunda ordem para $h^{\mu\nu}$:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -(KK)_{\mu\nu} + 1/2\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}{}_{\alpha} + Q^{\tau}{}_{\mu\nu;\tau} \tag{2.25}$$

onde

$$2G^{(L)}_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} - h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{;\mu;\alpha} - h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu;\alpha}, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} 2Q^{\tau}{}_{\mu\nu} &= -\gamma_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}K^{\tau}_{\alpha\beta} + h_{\mu\nu}K^{\tau} - h_{\mu}{}^{\tau}K_{\nu} - h_{\nu}{}^{\tau}K_{\mu} + h^{\beta\tau}(K^{\alpha}_{\mu\beta}\gamma_{\alpha\nu} + K^{\alpha}_{\nu\beta}\gamma_{\alpha\mu}) + \\ &+ \ h_{\mu}{}^{\beta}(K^{\tau}_{\nu\beta} - K^{\alpha}_{\beta\rho}\gamma^{\rho\tau}\gamma_{\alpha\nu}) + h_{\nu}{}^{\beta}(K^{\tau}_{\mu\beta} - K^{\alpha}_{\rho\beta}\gamma^{\rho\tau}\gamma_{\alpha\mu}) \end{aligned} \tag{2.27}$$

e

$$(KK)_{\mu\nu} = K^{\alpha}_{\mu\nu} K_{\alpha} - K^{\alpha}_{\mu\beta} K^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{2.28}$$

$$K_{\alpha} = K^{\rho}_{\alpha\rho}.$$

É fácil mostrar que o lado direito da equação 2.25 pode também ser obtido através da expressão

$$\frac{-1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta \mathcal{L}_{(g)}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \equiv \tau_{\mu\nu} \ ,$$

que define o tensor momentum-energia $\tau_{\mu\nu}$ para o campo $h^{\mu\nu}$. Desta forma, podemos reescrever a equação 2.25 como

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} \ , \tag{2.29}$$

onde

$$\tau_{\mu\nu} = -(KK)_{\mu\nu} + 1/2\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}{}_{\alpha} + Q^{\tau}{}_{\mu\nu;\tau} \ , \tag{2.30}$$

o que indica a consistência de nossa teoria não linear.

A equivalência com a teoria da relatividade geral é estabelecida fácilmente; a adição do termo 2.17 (que não altera as equações de campo) à ação 2.22 nos leva à ação 2.18 que como já visto é equivalente à ação geométrica de Einstein 2.20 se a identificação das variáveis

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) \ ,$$

for efetuada.

Em termos desta nova variável $\tilde{g}^{\mu\nu}$ as equações

2.23 e 2.24 podem ser reescritas respectivamente como:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.31}$$

e

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}{}_{\|\rho} = 0. \tag{2.32}$$

Estas equações são precisamente as equações que resultam da aplicação do formalismo de primeira ordem à ação de Einstein 2.20, fato que estabelece a equivalência entre as duas formulações.

A introdução de campos físicos, denotados aqui por $\varphi^{(A)}$, interagindo com o campo gravitacional $h^{\mu\nu}$ é feito através da consideração de lagrangeanas da forma

$$\mathcal{L}_{(m)} = \mathcal{L}_{(m)}\left[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\mu\nu}{}_{,\alpha}, h^{\mu\nu}, h^{\mu\nu}{}_{,\alpha}, \varphi^{(A)}, \varphi^{(A)}{}_{,\alpha}\right]. \tag{2.33}$$

A ação total

$$S_{(T)} = S_{(g)} + S_{(m)},$$

quando submetida à variação fornece novamente a equação 2.24, enquanto que a equação 2.23 dá lugar à seguinte expressão:

$$K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - 1/2K^{\rho}_{\mu\rho;\nu} - 1/2K^{\rho}_{\nu\rho;\mu} + (KK)_{\mu\nu} = 2\frac{\delta\mathcal{L}_{(m)}}{\delta\tilde{h}^{\mu\nu}}. \tag{2.34}$$

Quando combinada com 2.24 a equação 2.34 gera a nova equação de segunda ordem para $h^{\mu\nu}$:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = \left(\tau_{\mu\nu} + \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta\mathcal{L}_{(m)}}{\delta h^{\mu\nu}}\right). \tag{2.35}$$

Sabemos no entanto, que por definição o tensor momentum-energia total associado à lagrangeana

$$\mathcal{L}_{(T)} = \mathcal{L}_{(g)} + \mathcal{L}_{(m)} \, ,$$

é dado por

$$T^{(T)}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta \mathcal{L}_{(T)}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta \mathcal{L}_{(g)}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} + \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta \mathcal{L}_{(m)}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} = \tau_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}. \tag{2.36}$$

Uma vez que, como já vimos anteriormente, a fonte correta para $G^{(L)}_{\mu\nu}$ deve ser a energia total $T^{(T)}_{\mu\nu}$, segue que por compatibilidade entre as equações 2.35 e 2.36, a seguinte expressão deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \tilde{h}^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \tilde{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}} \right)_{,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \tilde{\gamma}^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \tilde{\gamma}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}} \right)_{,\alpha} . \tag{2.37}$$

A condição suficiente para que isto ocorra é que a lagrangeana de matéria tenha sua dependência funcional restrita à forma

$$\mathcal{L}_{(m)} = \mathcal{L}_{(m)} \left[\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}, (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})_{,\alpha}, \varphi^{(A)}, \varphi^{(A)}{}_{,\alpha} \right] , \tag{2.38}$$

condição que simboliza o acoplamento universal do campo gravitacional com os outros campos físicos.

Concluímos assim que por interagirem de uma maneira universal com o campo gravitacional, todos os campos materiais ficam sujeitos à influência de uma métrica riemanniana efetiva dada pela expressão 2.19. A inexistência de matéria neutra em relação à interação gravitacional torna portanto impossível a observação da geometria de fundo, aqui utilizada como um instrumento auxiliar na construção desta teoria. Observamos também que mesmo no caso em que as fontes materiais estão ausentes não é possível detectarmos a presença da métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$, observando por exemplo a propagação de ondas gravitacionais previstas pela teoria. Isto pode ser constatado fácilmente através da estrutura da equação não-linear 2.29 que descreve a evolução do campo gravitacional. A presença de termos contendo derivadas de segunda ordem no campo do tipo $h^{\alpha\beta}h_{\mu\nu;\alpha;\beta}$ no tensor $\tau_{\mu\nu}$ que descreve a auto-interação do campo gravitacional, faz com que as curvas características associadas ao operador $G^{(L)}_{\mu\nu}$ (geodésicas no espaço-tempo de Minkowski) [16] sejam alteradas impossibilitando a observação desta geometria de fundo.

Finalizamos este capítulo observando que neste formalismo o objeto $\tau_{\mu\nu}$ que representa o conteúdo energético do campo gravitacional, dado pela expressão 2.30 é um verdadeiro tensor, fato que nos levaria a pensar que esta abordagem alternativa para a teoria da relatividade geral solucionaria em definitivo os problemas relacionados à definição e localizibilidade da energia gravitacional mencionados no capítulo inicial. No entanto, assim como na teoria bimétrica brevemente resumida em 1.3, isto não ocorre pelo fato de que apesar de $\tau_{\mu\nu}$ ser um tensor, ele não é invariante sob as transformações de gauge do tipo 2.5, que mantém as equações de campo invariantes, fazendo com que o seu valor não seja único. Entretanto este fato não interfere nas previsões experimentais da teoria que estão em perfeito acordo com a teoria da relatividade geral [11, 17].

Capítulo 3

Gravitação sem auto-interação

Neste capítulo resumiremos uma formulação alternativa para o campo gravitacional desenvolvida por S.Deser e B.E.Laurent [18], que conceitualmente está bem afastada das abordagens descritas até agora neste trabalho. O objetivo é descrever a gravitação através de um campo de spin-2 linear, isto é, sem considerar a sua auto-interação. Para isto. tomamos por equação de evolução para o campo livre a equação usual de Fierz-Pauli 2.6 que reescreveremos como:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\,\phi_{\alpha\beta} = \Box\phi_{\mu\nu} - \phi_{(\mu\ ;\alpha;\nu)}^{\alpha} + \phi_{,\mu;\nu} - \gamma_{\mu\nu}(\Box\phi - \phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta}) = 0. \qquad (3.1)$$

Como já sabemos esta equação é invariante sob transformações do tipo

$$\phi_{\mu\nu} \rightarrow \phi'_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \qquad (3.2)$$

e possui divergência idênticamente nula, isto é,

$$G^{(L)\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0. \qquad (3.3)$$

Na presença de fonte devemos considerar a equação

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = -J_{\mu\nu}, \tag{3.4}$$

onde $J_{\mu\nu}$, por compatibilidade com a equação 3.3, deve também possuir divergência nula. Vemos portanto que $J_{\mu\nu}$ não pode ser simplesmente o tensor momentum-energia da matéria pois o mesmo só possui divergência nula na situação idealizada em que não interage com o campo gravitacional. Uma vez que estamos procurando uma teoria sem auto-interação o procedimento empregado por Feynman descrito no capítulo 2 não é o adequado para construir a fonte correta (com divergência nula) para esta teoria.

A proposta sugerida é a de gerar uma fonte com divergência nula através da aplicação de projetores não-locais da forma

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box}\partial_\mu\partial_\nu \tag{3.5}$$

sôbre o tensor $T^{\mu\nu}$, que como veremos adiante representa a soma da energia e momentum da matéria e de sua interação com a gravitação.

A fonte mais geral que pode ser construída através deste procedimento pode ser escrita como

$$J_{\mu\nu} = (\mathcal{P}_{\mu\alpha}\mathcal{P}_{\nu\beta} + p\mathcal{P}_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta} + q\mathcal{P}_{\mu\nu}\mathcal{P}_{\alpha\beta})\, T^{\alpha\beta}, \tag{3.6}$$

onde p e q são constantes.

A equação 3.4 pode ser obtida através da variação da soma das lagrangeanas do campo gravitacional com a de interação. Temos:

$$\mathcal{L}_{(T)} = \mathcal{L}_{(g)} + \mathcal{L}_{(i)} \tag{3.7}$$

onde

$$\mathcal{L}_{(g)} = -1/2\,\phi^{\mu\nu}\,G^{(L)}_{\mu\nu} \tag{3.8}$$

e

$$\mathcal{L}_{(i)} = 1/2\,\phi^{\mu\nu}\,J_{\mu\nu}. \tag{3.9}$$

A lagrangeana de interação pode ser escrita de maneira equivalente como

$$\mathcal{L}_{(i)} = 1/2\psi_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \tag{3.10}$$

se definirmos o campo não-local $\psi^{\mu\nu}$ através da expressão :

$$\psi_{\mu\nu} = (\mathcal{P}_{\mu\alpha}\mathcal{P}_{\nu\beta} + p\mathcal{P}_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta} + q\mathcal{P}_{\mu\nu}\mathcal{P}_{\alpha\beta})\,\phi^{\alpha\beta}. \tag{3.11}$$

Apesar de conceitualmente estar bem distante da teoria da relatividade geral, ao investigarmos a solução estática, esféricamente simétrica da equação de campo 3.4 com fonte pontual dada por 3.6, obtemos que para uma escolha adequada das constantes p e q esta teoria nos fornece o limite newtoniano correto, assim como os valores observados para os outros testes clássicos que a teoria da relatividade geral satisfaz. Os valores das constantes citadas para os quais a afirmação anterior é verdadeira são :

$$p = -1$$

$$q = 1. \tag{3.12}$$

Para referência futura, apresentaremos aqui a forma da fonte $J_{\mu\nu}$ dada em 3.6 para o conjunto de valores 3.12 que reproduz os resultados da teoria da relatividade geral para os testes clássicos e limite newtoniano da teoria . A forma geral para a fonte 3.6 ao explicitarmos os operadores de projeção é dada por:

$$J_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + (p+q)\gamma_{\mu\nu}T - \frac{1}{\Box}T_{(\mu\beta}{}^{;\beta}{}_{;\nu)} - q\frac{1}{\Box}\gamma_{\mu\nu}T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} - \frac{1}{\Box}(p+q)T_{,\mu;\nu} + \tag{3.13}$$
$$+(1+q)\frac{1}{\Box}\frac{1}{\Box}T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta;\mu;\nu}.$$

O uso dos valores 3.12, reduz esta expressão para:

$$J_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box}T_{(\mu\beta}{}^{;\beta}{}_{;\nu)} - \frac{1}{\Box}\gamma_{\mu\nu}T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} + 2\frac{1}{\Box}\frac{1}{\Box}T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta;\mu;\nu}. \tag{3.14}$$

Para o conjunto de valores 3.12 é possível mostrar também que o campo $\phi_{\mu\nu}$ pode ser identificado ao campo não-local $\psi_{\mu\nu}$ definido em 3.11 através de uma escolha adequada do vetor ξ_μ que define a transformação de gauge 3.2. De fato, a substituição de 3.12 na equação de definição de $\psi_{\mu\nu}$ 3.11 nos fornece:

$$\psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Box}\phi_{(\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha;\nu)} - \frac{1}{\Box}\left(\phi^{\alpha}{}_{\alpha;\mu;\nu} - \frac{2}{\Box}\phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta;\mu;\nu}\right). \tag{3.15}$$

Esta equação pode ser pensada como uma transformação de gauge do tipo 3.2 onde ξ_μ é dado pela expressão :

$$\xi_\mu = -\frac{1}{\Box}\phi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha} - 1/2\frac{1}{\Box}\phi_{,\mu} + \frac{1}{\Box}\frac{1}{\Box}\phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta;\mu}. \tag{3.16}$$

A condição pretendida

$$\phi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$$

é então obtida desde que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\phi_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha} + 1/2\phi_{,\alpha} - \frac{1}{\Box}\phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta;\mu} = 0. \tag{3.17}$$

Este resultado nos permite estabelecer uma forma local para a teoria, uma vez que se utilizarmos a condição de gauge descrita por 3.17, através da qual os campos são identificados, podemos fazer a substituição de $\phi_{\mu\nu}$ por $\psi_{\mu\nu}$ em 3.8 , gerando a seguinte lagrangeana total

$$\mathcal{L}_{(T)} = \mathcal{L}_{(g)} + \mathcal{L}_{(i)} + \mathcal{L}_{(V)}, \tag{3.18}$$

onde

$$\mathcal{L}_{(g)} = -1/2\,\psi^{\mu\nu}\,G^{(L)}_{\mu\nu}[\psi], \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}_{(i)} = 1/2\,\psi^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{3.20}$$

e

$$\mathcal{L}_{(V)} = -a\,\psi^{\alpha}_{\ \alpha} + 2b\,(\psi_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha} - \chi_{,\mu}). \tag{3.21}$$

A lagrangeana 3.21 introduz através dos multiplicadores de Lagrange a e b os vínculos a serem impostos na variação de $\psi_{\mu\nu}$ decorrentes de suas propriedades, obtidas fácilmente de 3.11 .

No que se refere à interação com a matéria a simples análise de partículas interagindo com o campo gravitacional já é suficiente para chegarmos ao resultado conhecido do capítulo anterior, que a matéria fica sujeita aos efeitos de uma métrica riemanniana efetiva dada pela expressão :

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu}). \tag{3.22}$$

No entanto, um esquema padrão de interação que possa ser empregado para qualquer qualquer campo material se faz necessário. A fim de mantermos válido o princípio de equivalência, adotamos o procedimento de substituir a métrica de Minkowski pela métrica riemanniana 3.22 na ação usual da matéria para obter novamente a ação para a matéria livre somada à ação de interação conforme indica o esquema abaixo:

$$\begin{aligned} S_{(m)}[\gamma] &\rightarrow S_{(m)}[g] \equiv \\ &\equiv S_{(m)}[\gamma + \psi] = S_{(m)}[\gamma] + S_{(i)}[\psi]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Desta forma temos que o tensor momentum-energia presente no lado direito das equações de campo 3.4 é definido por :

$$\delta S_{(m+i)} = \int d^4x T_{\mu\nu}[g]\, \delta g^{\mu\nu} = 1/2 \int d^4x T_{\mu\nu}[\gamma + \psi]\, \delta\psi^{\mu\nu} = 1/2 \int d^4x J_{\mu\nu}[\psi]\, \delta\phi^{\mu\nu}. \tag{3.24}$$

Por outro lado, da definição usual do tensor momentum- energia simétrico $\Theta_{\mu\nu}$ através da variação da ação em relação à métrica de fundo temos:

$$\delta S = 1/2 \int d^4x \sqrt{-\gamma}\, \Theta_{\mu\nu}\, \delta\gamma^{\mu\nu}. \tag{3.25}$$

A aplicação desta expressão para o cálculo do tensor momentum-energia simétrico associado à matéria e sua interação com o campo gravitacional nos fornece:

$$\delta S_{(m+i)} = 1/2 \int d^4x \sqrt{-\gamma}\, \Theta^{(m+i)}_{\mu\nu}\, \delta\gamma^{\mu\nu}. \tag{3.26}$$

Devemos portanto ter:

$$\Theta^{(m+i)}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \tag{3.27}$$

Este resultado indica que, como citado no início deste capítulo, o tensor momentum-energia presente na fonte $J_{\mu\nu}$ contém também a contribuição de energia proveniente da interação da matéria com o campo gravitacional.

Para concluir observamos que por termos eliminado a auto-interação da teoria, que como vimos no capítulo anterior é responsável pela inclusão de termos na equação de movimento capazes de alterar a estrutura dos cones de propagação do espaço de Minkowski. os grávitons não são sensíveis à métrica efetiva riemanniana 3.22 .Por consequência a evolução da radiação gravitacional ocorre no espaço de fundo plano e pode ser em princípio utilizada para a construção de um sistema de referência global mesmo na presença do campo gravitacional, fato que evidencia a grande diferença desta teoria em relação à teoria da relatividade geral.

Capítulo 4

A variável $A_{\alpha\beta\mu}$

4.1 Propriedades

A partir desta seção iremos considerar $A_{\alpha\beta\mu}$ a variável fundamental para descrever a interação gravitacional. Por definição este tensor de terceira ordem é anti-simétrico no primeiro par de índices,

$$A_{\alpha\beta\mu} = -A_{\beta\alpha\mu} \tag{4.1}$$

e possui o traço de seu auto-dual nulo:

$$\overset{*}{A}_{\alpha\lambda}{}^{\lambda} = 0. \tag{4.2}$$

Usamos aqui que

$$\overset{*}{A}_{\alpha\beta}{}^{\mu} = \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} A^{\rho\sigma\mu}.$$

Assim definida a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ possui vinte graus de liberdade . Como foi mostrado em [19, 20], (ver comentários nesta seção) esta variável contém dois campos de spin-2 independentes.

O contato com a representação usual dos tensores simétricos de dois índices utilizada nos capítulos precedentes, é estabelecida através da definição das relações

$$\phi_{\mu\nu} = A_{(\mu \ \ \nu);\epsilon}^{\ \ \epsilon} + \eta A_{(\mu;\nu)} + \xi A^{\rho}{}_{;\rho}\gamma_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

$$\psi_{\mu\nu} = \overset{*}{A}_{(\mu\rho\nu)}{}^{;\rho}, \tag{4.4}$$

onde $A_\mu = A_{\mu\ \rho}^{\ \rho}$. O traço da equação 4.3 nos fornece:

$$\phi = 2(2\xi + \eta - 1)A^{\mu}{}_{;\mu}. \tag{4.5}$$

É conveniente definirmos agora para uso posterior o tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ como:

$$h_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - 1/2\,\phi\,\gamma_{\mu\nu}. \tag{4.6}$$

Com o auxílio das definições anteriores, $h_{\mu\nu}$ pode ser relacionado à variável $A_{\alpha\beta\mu}$ através da expressão:

$$h_{\mu\nu} = A_{(\mu \ \ \nu);\epsilon}^{\ \ \epsilon} + \eta A_{(\mu;\nu)} + (1 - \eta - \xi)A^{\lambda}{}_{;\lambda}\gamma_{\mu\nu}. \tag{4.7}$$

Neste trabalho estaremos considerando apenas um dentre os dois campos de spin-2 presentes na variável $A_{\alpha\beta\mu}$. Se optarmos por eliminar o pseudo-tensor definido em 4.4, o seguinte vínculo deverá ser considerado ao longo do desenvolvimento da teoria:

$$\psi_{\mu\nu} = \overset{*}{A}_{(\mu\rho\nu)}{}^{;\rho} = 0. \tag{4.8}$$

Se multiplicarmos esta equação pelo símbolo de Levi-Civita obteremos após alguns cálculos a seguinte expressão:

$$2(A_{\lambda\alpha}{}^{\nu}{}_{;\beta} + A_{\alpha\beta}{}^{\nu}{}_{;\lambda} + A_{\beta\lambda}{}^{\nu}{}_{;\alpha}) = \delta^{\nu}_{\alpha} A_{[\beta\lambda]} + \delta^{\nu}_{\beta} A_{[\lambda\alpha]} + \delta^{\nu}_{\lambda} A_{[\alpha\beta]}. \tag{4.9}$$

Aqui temos:

$$A_{\lambda\alpha} = A_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\alpha;\rho} - A_{\lambda;\alpha}.$$

Podemos agora mostrar com o auxílio de 4.9 que a imposição do vínculo 4.8 implica na redução de $A_{\alpha\beta\mu}$ à representação usual através dos tensores simétricos de segunda ordem, isto é, na existência de um tensor simétrico $\chi_{\mu\nu}$ tal que a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ pode ser escrita como

$$A_{\mu\epsilon\nu} = \chi_{\nu[\mu;\epsilon]} + r\,\chi_{[\mu}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}\gamma_{\epsilon]\nu} + s\,\chi_{,[\mu}\gamma_{\epsilon]\nu}, \tag{4.10}$$

onde r e s são constantes.

É fácil mostrar usando 4.10 que

$$A_{[\mu\nu]} = -2r(\chi_{[\mu}{}^{\lambda}{}_{;\lambda;\nu]}). \tag{4.11}$$

A substituição de 4.11 no lado direito da igualdade 4.9 juntamente com o uso adequado de 4.11 em seu lado esquerdo nos leva a uma identidade. Os tensores $\phi_{\mu\nu}$ e $\chi_{\mu\nu}$ podem então ser relacionados usando as expressões 4.3 e 4.10 :

$$\begin{aligned} \phi_{\mu\nu} &= 2\Box\chi_{\mu\nu} + [r - 1 + \eta(1+3r)]\chi_{(\mu}{}^{\epsilon}{}_{;\nu);\epsilon} + \\ &+ 2[s - \eta(1-3s)]\chi_{,\mu;\nu} + [-2r + \xi(1+3r)]\chi^{\rho\lambda}{}_{;\rho;\lambda} + \qquad (4.12) \\ &- [2s + \xi(1-3s)]\Box\chi\gamma_{\mu\nu}. \qquad (4.13) \end{aligned}$$

Se escolhermos a seguinte relação particular entre as constantes

$$r = -s = -\frac{(1+\eta)}{(1+3\eta)} = \frac{(\xi-2)}{(2-3\xi)}\ , \tag{4.14}$$

ficamos com uma expressão simplificada ligando os dois tensores de segunda ordem em questão

$$\phi_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\chi_{\alpha\beta}, \tag{4.15}$$

onde $\mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ é o operador de Fierz-Pauli de divergência nula definido em 2.6:

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = (\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\Box - \delta^{\beta}_{\mu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\nabla^{\beta}\nabla_{\mu} + \gamma_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta} - \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\Box). \tag{4.16}$$

4.2 Teoria tipo Maxwell para $A_{\alpha\beta\mu}$

Com o objetivo de estabelecer uma dinâmica para o campo gravitacional descrito através das variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$, construiremos o campo tensorial $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ à partir de derivadas do 'potencial' $A_{\alpha\beta\mu}$:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= F_{\alpha\beta\mu\nu} + 1/2A_{(\alpha\nu)}\gamma_{\beta\mu} + 1/2A_{(\beta\mu)}\gamma_{\alpha\nu} - 1/2A_{(\beta\nu)}\gamma_{\alpha\mu} - 1/2A_{(\alpha\mu)}\gamma_{\beta\nu} + \\ &+ 2/3A^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda}\gamma_{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nesta expressão temos:

$$F_{\alpha\beta\mu\nu} = A_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha;\beta]} \tag{4.18}$$

$$A_{\alpha\nu} = A_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\nu;\lambda} - A_{\alpha}{}^{\epsilon}{}_{\epsilon;\nu} \tag{4.19}$$

$$\gamma_{\alpha\beta\mu\nu} = \gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu} - \gamma_{\alpha\nu}\gamma_{\beta\mu}. \tag{4.20}$$

De posse deste objeto podemos definir uma lagrangeana para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ com forma semelhante à utilizada para descrição da interação eletromagnética [19, 20, 22, 21]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\gamma}\, 1/8 C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{4.21}$$

A equação de movimento associada pode ser então escrita como

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{4.22}$$

ou explícitamente em termos das variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ pela expressão:

$$\begin{aligned} \Box A^{\alpha\beta\mu} - A^{\alpha\beta\epsilon}{}_{;\epsilon} + 1/2 A^{[\alpha\epsilon\nu}{}_{;\epsilon;\nu}\gamma^{\beta]\mu} + 1/2 A^{[\alpha\mu\epsilon}{}_{;\epsilon}{}^{;\beta]} \quad + \\ +1/2\Box A^{[\beta}\gamma^{\alpha]\mu} + 1/2 A^{\nu}{}_{;\nu}{}^{;[\beta}\gamma^{\alpha]\mu} + 1/2 A^{[\alpha;\mu;\beta]} - 2/3 A^{\sigma}{}_{;\sigma;\nu}\gamma^{\alpha\beta\mu\nu} \; = \; 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

A invariância do tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ sob transformações do tipo

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\mu} \quad \rightarrow \quad & A'_{\alpha\beta\mu} = A_{\alpha\beta\mu} + W_{\alpha\beta;\mu} - 1/2 W_{\mu[\alpha;\beta]} + \\ + \quad & 1/2\gamma_{[\mu} W_{\beta]}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde $W_{\alpha\beta}$ é um tensor anti-simétrico arbitrário , juntamente com a hipótese que $A_{\alpha\beta\mu}$ não possui traço, possibilita a simplificação da equação de movimento 4.23 para a forma:

$$\Box A'_{\alpha\beta\mu} = 0. \tag{4.25}$$

Uma detalhada análise dos vínculos da teoria no contexto do formalismo hamiltoniano foi então efetuada [20], gerando os resultados que resumiremos a seguir.

A aplicação da decomposição convencional espaço-temporal (3 + 1) ao tensor $A_{\alpha\beta\mu}$, nos possibilita definir suas partes irredutíveis como:

$$\begin{aligned} \phi &= A^l{}_{0l} && (4.26) \\ \xi_i &= A^0{}_{i0} && (4.27) \\ \gamma_i &= A^l{}_{il} && (4.28) \\ \beta_{ij} &= A_{ij0} && (4.29) \\ \alpha_{ij} &= A_{(i}{}^0{}_{j)} && (4.30) \\ \Delta_{ij} &= \Delta_{ab(i}\varepsilon_{j)}{}^{ab}, && (4.31) \end{aligned}$$

onde

$$\Delta_{ijk} = A_{ijk} + 1/2\ \gamma_{k[i}A^0{}_{i]0}.$$

À partir destas variáveis podemos dar sequência ao estudo da estrutura de vínculos e estabelecer a hamiltoniana para o sistema. Como resultado desta elaborada análise [20] obtemos que a hamiltoniana contém a dinâmica de dois campos de spin-2, fato que pode ser constatado através do procedimento que segue [21]. A fixação de gauge,

$$\begin{aligned} \xi_i &= 0 && (4.32) \\ \beta_{ij} &= 0 && (4.33) \\ \alpha^{ij}{}_{,j} &= 0 && (4.34) \\ \Delta^{ij}{}_{,j} &= 0, && (4.35) \end{aligned}$$

nos leva a escrever as equações de movimento 4.25 na forma:

$$\Box\alpha_{ij} = 0 \tag{4.36}$$

$$\Box\Delta_{ij} = 0. \tag{4.37}$$

Se expandirmos as variáveis α_{ij} e Δ_{ij} em ondas planas através das expressões

$$\alpha_{ij} = Q_{ij}\exp -ik_\mu x^\mu + Q^*_{ij}\exp ik_\mu x^\mu \tag{4.38}$$

$$\Delta_{ij} = R_{ij}\exp -ik_\mu x^\mu + R^*_{ij}\exp ik_\mu x^\mu \tag{4.39}$$

$$\tag{4.40}$$

e considerarmos a propagação das frentes de onda ao longo de uma dada direção espacial, é possível decompor a onda em suas partes irredutíveis

$$Q_{\pm} = Q_{11} \mp i\,Q_{21}$$

$$R_{\pm} = R_{11} \mp i\,R_{21},$$

cada uma contendo helicidade $\pm$ 2.

A análise quântica desta teoria [21] confirma o resultado que de fato estamos na presença de dois campos de spin-2 com energia de sinal oposto. A eliminação de um destes campos como já comentamos anteriormente é possível através da imposição de um vínculo adicional à variável $A_{\alpha\beta\mu}$ [20]:

$$A^*_{\alpha\beta\mu}{}^{;\beta} = 0\ . \tag{4.41}$$

Este vínculo de caráter mais restritivo que o apresentado em 4.8 reduz-se a ele no caso em que

$$A^{\alpha\rho}{}_{\rho} = 0$$

e

$$A^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu}.$$

Como foi mostrado em [20], a introdução deste vínculo de maneira adequada à lagrangeana 4.21, reduz o número de graus de liberdade da teoria a dois que é o resultado esperado para um campo não massivo.

Convém ainda destacar a possibilidade de contrução de uma teoria do tipo Fermi-Gupta-Bleuler para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ [21]. A consideração de uma lagrangeana do tipo

$$\mathcal{L} = 1/8 C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} + 3/4 (A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\mu})^2, \tag{4.42}$$

em estreita analogia ao caso eletromagnético, nos fornece através de análise de sua estrutura quântica resultado idêntico ao obtido através da abordagem maxwelliana.

Na representação dos tensores simétricos de dois índices, a equação 4.23 pode ser reescrita com o auxílio da relação existente entre as duas variáveis definida pelas equações 4.3 e 4.4. Supondo agora que $\psi_{\mu\nu} = 0$, o uso de 4.3 após derivarmos e simetrizarmos adequadamente a equação 4.23 nos fornece:

$$\Box\phi^{\alpha\mu} - \phi^{(\alpha\epsilon}{}_{;\epsilon}{}^{;\mu)} + \frac{3\eta + 3\xi - 1}{3(2\xi + \eta - 1)} \phi^{,\alpha;\mu} + \frac{-3\xi + 2}{6(2\xi + \eta - 1)} \Box\phi\gamma^{\alpha\mu} = 0. \tag{4.43}$$

Tomando o traço desta equação obtemos:

$$\Box\phi - \frac{2(2\xi + \eta - 1)}{2\eta} + \xi\, \phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} = 0. \tag{4.44}$$

A relação 4.3 quando tratada adequadamente nos fornece uma equação idêntica à 4.44 indicando que o traço da equação 4.43 é nulo. Como o próximo passo no desenvolvimento da teoria é a introdução da interação do campo gravitacional com a matéria, o resultado citado impõe uma restrição (traço nulo) à fonte a ser usada para a equação 4.43. Este fato está relacionado ao uso do tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, que possui traço nulo, na lagrangeana 4.21 que define a dinâmica da teoria.

Somos levados portanto a considerar a seguinte lagrangeana construída à partir de objetos que possuem traço não nulo para descrever uma teoria linear para a variável $A_{\alpha\beta\mu}$:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\gamma}\,(-1/16 F_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\sigma}{2}F^2), \tag{4.45}$$

onde

$$F^{\alpha\beta\mu\nu} = A^{\alpha\beta[\mu;\nu]} + A^{\mu\nu[\alpha;\beta]} \tag{4.46}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv A^{(\mu\nu)} = A^{(\mu\rho\nu)}{}_{;\rho} - A^{(\mu;\nu)} \tag{4.47}$$

$$F = -4A^{\lambda}{}_{;\lambda}. \tag{4.48}$$

Da definição apresentada acima para o tensor $F^{\alpha\beta\mu\nu}$, temos que as seguintes propriedades de simetria

$$F_{\alpha\beta\mu\nu} = -F_{\beta\alpha\mu\nu} = -F_{\alpha\beta\nu\mu} = F_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.49}$$

juntamente com a propriedade cíclica

$$F^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + F^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} + F^{\alpha}{}_{\nu\beta\mu} = 0, \tag{4.50}$$

são satisfeitas.

Com o objetivo de verificar se uma identidade tipo Bianchi é satisfeita, efetuamos a derivação cíclica nos dois últimos índices de $F^{\alpha\beta\mu\nu}$ obtendo:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu;\lambda} + F^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda;\mu} + F^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu;\nu} &= (A_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{;\lambda} + A_{\nu\lambda}{}^{\alpha}{}_{;\mu} + A_{\lambda\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu})^{;\beta} - \\ &- (A_{\mu\nu}{}^{\beta}{}_{;\lambda} + A_{\nu\lambda}{}^{\beta}{}_{;\mu} + A_{\lambda\mu}{}^{\beta}{}_{;\nu})^{;\alpha}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Segue portanto que a identidade em questão é verificada se tivermos,

$$A_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{;\lambda} + A_{\nu\lambda}{}^{\alpha}{}_{;\mu} + A_{\lambda\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu} = 0, \tag{4.52}$$

que como fácilmente pode-se mostrar é uma forma alternativa de expressarmos o vínculo 4.41.

No que se refere à simetria interna do campo $F^{\alpha\beta\mu\nu}$devemos observar que ao efetuarmos uma transformação em $A_{\alpha\beta\mu}$ do tipo

$$A_{\alpha\beta\mu}(x) \rightarrow A'_{\alpha\beta\mu}(x) = A_{\alpha\beta\mu}(x) + \gamma_{\beta\mu}Z_{\alpha} - \gamma_{\alpha\mu}Z_{\beta}, \tag{4.53}$$

o tensor $F^{\alpha\beta\mu\nu}$ se transforma como:

$$F_{\alpha\beta\mu\nu}(x) \rightarrow \; F'_{\alpha\beta\mu\nu}(x) = F_{\alpha\beta\mu\nu}(x) - \gamma_{\alpha\mu}Z_{(\beta;\nu)} + \gamma_{\beta\mu}Z_{(\alpha;\nu)} + \gamma_{\alpha\nu}Z_{(\beta;\mu)} - \gamma_{\beta\nu}Z_{(\mu;\alpha)}. \tag{4.54}$$

Para que esta transformação seja uma simetria de $F_{\alpha\beta\mu\nu}$ o vetor Z_μ deve satisfazer a equação

$$Z_{\mu;\nu} + Z_{\nu;\mu} = 0, \tag{4.55}$$

que imediatamente reconhecemos como a condição que caracteriza Z_μ como um vetor de Killing da geometria de fundo que supusemos minkowskiana.

Vamos agora estabelecer as equações de campo que decorrem da lagrangeana 4.45. Para isto consideramos a ação:

$$S = \int d^4x\sqrt{-\gamma}\,(-1/16 F_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\sigma}{2}F^2). \tag{4.56}$$

Sua variação pode ser escrita como:

$$\delta S = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,(-1/4 F_{\alpha\beta\mu\nu}\delta F^{\alpha\beta\mu\nu} + 2\lambda F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + 2\sigma F\delta F). \tag{4.57}$$

Utilizando as equações de definição 4.46, 4.47 e 4.48 expressamos 4.56 em termos da variação da grandeza fundamental $A_{\alpha\beta\mu}$

$$\delta S = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,\Omega_{\alpha\beta\mu}\delta A^{\alpha\beta\mu}. \tag{4.58}$$

onde temos

$$\Omega_{\alpha\beta\mu} = F_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{;\nu} - 2\lambda(F_{\alpha\mu;\beta} - F_{\beta\mu;\alpha} + F_{\beta\epsilon}{}^{;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu} - F_{\alpha\epsilon}{}^{;\epsilon}\gamma_{\beta\mu}) + \tag{4.59}$$
$$-4\sigma(F_{,\beta}\gamma_{\alpha\mu} - F_{,\alpha}\gamma_{\beta\mu}).$$

A equação de campo é então obtida através da condição de extremo que resulta em

$$\Omega_{\alpha\beta\mu} = 0. \tag{4.60}$$

Expressa em termos das variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ temos:

$$\Box A_{\alpha\beta\mu} - A_{\alpha\beta\nu}{}^{;\nu}{}_{;\mu} + A_{\mu\nu[\alpha}{}^{;\nu}{}_{;\beta]} - 2\lambda(A_{[\alpha\sigma\mu}{}^{;\sigma}{}_{;\beta]} + A_{\mu\sigma[\alpha}{}^{;\sigma}{}_{;\beta]} - A_{(\alpha;\mu);\beta} + A_{(\beta;\mu);\alpha} + \tag{4.61}$$
$$+ A_{[\alpha\sigma\epsilon}{}^{;\sigma;\epsilon}\gamma_{\beta]\mu} + A_{\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;[\alpha}\gamma_{\beta]\mu} + \Box A_{[\alpha}\gamma_{\beta]\mu}) + 16\sigma(A^{\lambda}{}_{;\lambda;\alpha}\gamma_{\beta\mu} - A^{\lambda}{}_{;\lambda;\beta}\gamma_{\alpha\mu}) = 0.$$

É fácil verificar que a divergência '$;\mu$' desta última equação se anula idênticamente.

4.3 Interação com a matéria

Se escolhermos um termo do tipo

$$S_{(i)} = -\int d^4x\sqrt{-\gamma}\, J_{\alpha\beta\mu}A^{\alpha\beta\mu}, \tag{4.62}$$

para representar a interação do campo gravitacional descrito pela variável $A_{\alpha\beta\mu}$ com a matéria, vemos de imediato que a fonte deve possuir as mesmas simetrias do campo. O tensor $J_{\alpha\beta\mu}$ será construído através de uma combinação adequada de derivadas de um tensor de segunda ordem $S_{\mu\nu}$, cuja relação com o tensor momentum-energia da matéria $T_{\mu\nu}$ será estabelecida a seguir. Deverá também possuir divergência nula, por questão de compatibilidade com as equações lineares de movimento 4.61:

$$J^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} = 0. \tag{4.63}$$

A expressão mais simples para a corrente que satisfaz estas condições é dada por:

$$2J_{\mu\epsilon\nu} = S_{\nu[\mu;\epsilon]} - S^{\lambda}{}_{[\mu;\lambda}\gamma_{\epsilon]\nu} + 1/2\xi S_{,[\mu}\gamma_{\epsilon]\nu}. \tag{4.64}$$

A substituição de 4.64 em 4.62 nos fornece:

$$S_{(i)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,(S_{\nu[\mu;\epsilon]} - S^{\lambda}{}_{[\mu;\lambda}\gamma_{\epsilon]\nu} + 1/2\xi S_{,[\mu}\gamma_{\epsilon]\nu})A^{\mu\epsilon\nu}. \tag{4.65}$$

Se passarmos as derivadas que atuam no tensor $S_{\mu\nu}$ para o tensor $A_{\alpha\beta\mu}$ desprezando os termos de superfície obteremos:

$$S_{(i)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,S^{\rho\sigma}(A_{(\sigma\nu\rho)}{}^{;\nu} - A_{(\sigma;\rho)} + \xi A^{\lambda}{}_{;\lambda}\gamma_{\sigma\rho}). \tag{4.66}$$

Através de 4.3 identificamos o termo entre parênteses como sendo o campo $\phi_{\mu\nu}$, apenas com a restrição $\eta = -1$, necessária para que a lei de conservação 4.63 seja válida.

A identificação de $S_{\mu\nu}$ diretamente ao tensor momentum-energia da matéria $T_{\mu\nu}$, isto é,

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}, \tag{4.67}$$

tem por consequência que o termo de interação resultante

$$S_{(i)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,\phi_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,(h_{\mu\nu} - 1/2h\gamma_{\mu\nu})T^{\mu\nu}, \tag{4.68}$$

nada mais é do que o acoplamento convencional da matéria com a variável simétrica de dois índices usada para representar o campo gravitacional.

O exemplo da interação com o campo escalar é adequado para ilustrar as idéias apresentadas. Suponhamos um campo escalar φ com lagrangeana dada pela expressão

$$\mathcal{L}_{(\varphi)} = 1/2\sqrt{-\gamma}\,\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\gamma^{\mu\nu}, \tag{4.69}$$

através da qual estabelecemos a ação :

$$S_{(\varphi)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,\varphi_{,\mu}\varphi_{.\nu}\gamma^{\mu\nu}. \tag{4.70}$$

Da definição do tensor momentum-energia

$$\delta S = 1/2\int d^4x\Theta_{\mu\nu}\delta\gamma^{\mu\nu}, \tag{4.71}$$

aplicada à ação 4.70 temos:

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - 1/2\varphi_{,\lambda}\varphi_{,\epsilon}\gamma^{\lambda\epsilon}\gamma_{\mu\nu}. \tag{4.72}$$

A ação de interação do campo escalar com o campo gravitacional na representação dos tensores simétricos de dois índices é dada por 4.68 de modo que a ação total pode ser escrita como:

$$S = S_{(\varphi)} + S_{(i)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\gamma^{\mu\nu} + 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,(h_{\mu\nu} - 1/2h\gamma_{\mu\nu})T^{\mu\nu}. \tag{4.73}$$

Mostra-se fácilmente que o termo de interação 4.68 pode ser colocado na forma:

$$S_{(i)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,h^{\mu\nu}(T_{\mu\nu} - 1/2T\gamma_{\mu\nu}). \tag{4.74}$$

O uso de 4.72 nesta expressão nos leva ao resultado final para a soma da ação do campo escalar com a ação de interação:

$$S = S_{(\varphi)} + S_{(i)} = 1/2 \int d^4x \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\ \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\ . \tag{4.75}$$

Se efetuarmos agora a identificação

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}), \tag{4.76}$$

podemos interpretar o processo de interação com a matéria, representada aqui pelo campo escalar, como uma alteração da métrica de fundo considerada aqui como sendo a métrica de Minkowski. A matéria representada pela ação

$$S = 1/2 \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\ , \tag{4.77}$$

está sujeita à presença de uma métrica riemanniana efetiva $g^{\mu\nu}$, caracterizada pela métrica de fundo e pelo campo gravitacional através da expressão 4.76.

4.4 Formalismo tipo Maxwell com interação

De posse do termo de interação 4.62 escrevemos finalmente a ação total que gera a teoria linear para o campo gravitacional na representação da variável de três índices $A_{\alpha\beta\mu}$:

$$\begin{aligned} S = S_{(g)} + S_{(i)} = 1/2 \int d^4x \sqrt{-\gamma}\,(-1/8F_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sigma F^2) + \\ - \int d^4x \sqrt{-\gamma}\, J_{\alpha\beta\mu}A^{\alpha\beta\mu}. \end{aligned} \tag{4.78}$$

A variação desta ação nos fornece a equação de movimento,

$$1/2\Omega_{\alpha\beta\mu} = J_{\alpha\beta\mu}, \tag{4.79}$$

onde $\Omega_{\alpha\beta\mu}$ é dado pela equação 4.61 e a fonte $J_{\alpha\beta\mu}$ pela definição 4.64.

Nosso objetivo agora é analisar esta equação na representação usual dos tensores simétricos de dois índices.Para isto usamos novamente a equação 4.7, que estabelece a ligação entre as duas representações em cada um dos termos da equação seguinte que é o resultado da derivação e simetrização adequadas da equação 4.79:

$$\Omega_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta} = 2J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta}. \tag{4.80}$$

O termo $F^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu}$ presente em 4.59 após longa manipulação algébrica, adquire a seguinte forma na nova representação:

$$\begin{aligned} F_{(\alpha\beta\mu)\nu}{}^{;\nu;\beta} &= \Box h_{\alpha\mu} - h_{(\alpha\nu}{}^{;\nu}{}_{;\mu)} - \\ &- \frac{1-\xi-\eta}{2(1-\eta-2\xi)}\gamma_{\alpha\mu}\Box h + \frac{1-\xi}{1-\eta-2\xi}h_{,\alpha;\mu} = 0. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Para o termo em λ da equação 4.59 obtemos:

$$\begin{aligned} &- 2\lambda(F_{\alpha\mu;\beta} - F_{\beta\mu;\alpha} + F_{\beta\epsilon}{}^{;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu} - F_{\alpha\epsilon}{}^{;\epsilon}\gamma_{\beta\mu})^{;\beta} = \\ &= 2\lambda(-\Box h_{\alpha\mu} + h_{(\mu\epsilon}{}^{\ \ ;\epsilon}{}_{;\alpha)} - \frac{\xi+\eta-3}{2(1-\eta-2\xi)}\Box h\gamma_{\alpha\mu} - \frac{2-\xi}{1-\eta-2\xi}h_{,\mu;\alpha}). \end{aligned} \tag{4.82}$$

Finalmente, do termo em σ segue a seguinte expressão:

$$- 4\,\sigma\,(F_{,\beta}\gamma_{\alpha\mu} - F_{,\alpha}\gamma_{\beta\mu})^{;\beta} = -\frac{8\sigma}{1-\eta-2\xi}\,(h_{,\alpha;\mu} - \Box h\gamma_{\alpha\mu})\,. \tag{4.83}$$

Coletando estes resultados a equação 4.80 pode finalmente ser escrita como:

$$\Box h_{\alpha\mu} - h_{(\alpha\beta;\mu)}{}^{;\beta} + M h_{,\alpha;\mu} + N\Box h\gamma_{\alpha\mu} = \frac{2}{1-2\lambda} J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta}. \tag{4.84}$$

onde

$$M = \frac{\xi - 1 + 4\lambda + 8\sigma - 2\lambda\xi}{(1-\eta-2\xi)(2\lambda-1)} \tag{4.85}$$

$$N = \frac{1 - \xi - \eta - 6\lambda + 2\lambda\xi + 2\lambda\eta - 16\sigma}{2(1-\eta-2\xi)(2\lambda-1)}\,. \tag{4.86}$$

Na ausência de matéria, o traço desta equação deve ser compatível com o valor

$$h^{\lambda\epsilon}{}_{;\lambda;\epsilon} = \frac{1-\eta-\xi}{2(1-\eta-2\xi)}\Box h, \tag{4.87}$$

obtido à partir da relação 4.7 que faz a ligação entre as duas formulações. Mostra-se fácilmente que isto é verdadeiro se os parâmetros presentes nas constantes M e N satisfizerem a seguinte relação :

$$24\sigma + 8\lambda - 1 = 0. \tag{4.88}$$

Se tivermos por objetivo identificar a equação 4.84 à já citada equação de Fierz-Pauli 2.6 usualmente empregada para representar o campo de spin-2, então seu lado direito que representa a fonte deve ser o tensor momentum-energia da matéria conforme definido em

4.71 . Devemos portanto ter:

$$\frac{2}{1-2\lambda} J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta} = -2T_{\alpha\mu}. \tag{4.89}$$

Uma vez que consideramos $J_{\alpha\beta\mu}$ como dado pela expressão 4.64, existe uma relação entre os tensores $T_{\alpha\mu}$ e $S_{\alpha\mu}$ expressa por

$$T^{\alpha\mu} = -\frac{2}{1-2\lambda}\, \hat{\mathcal{G}}^{\alpha\mu}_{\rho\sigma}\, S^{\rho\sigma}, \tag{4.90}$$

onde o operador $\hat{\mathcal{G}}$ é dado pela expressão:

$$\hat{\mathcal{G}}^{\alpha\mu}_{\rho\sigma} = [\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}\Box + \frac{\eta-1}{2}\delta^{(\mu}_{\sigma}\nabla^{\alpha)}\nabla_{\rho} - \eta\,\gamma^{\alpha\mu}\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma} + \xi\gamma_{\rho\sigma}(\nabla^{\alpha}\nabla^{\mu} - \gamma^{\alpha\mu}\Box)]. \tag{4.91}$$

Lembrando que a ação de interação com a matéria é dada por

$$S_{(i)} = -\int d^4x\sqrt{-\gamma}\, J_{\alpha\beta\mu}A^{\alpha\beta\mu},$$

a substituição de 4.64 nesta equação resulta em

$$S_{(i)} = \int d^4x\sqrt{-\gamma}\, S^{\alpha\mu}\phi_{\alpha\mu}, \tag{4.92}$$

ou

$$S_{(i)} = \int d^4x\sqrt{-\gamma}\,(1-2\lambda)(\hat{\mathcal{G}}^{\alpha\mu}_{\rho\sigma})^{-1}\, T^{\rho\sigma}\phi_{\alpha\mu}, \tag{4.93}$$

se utilizarmos a relação 4.90. O símbolo $(\hat{\mathcal{G}})^{-1}$ deve ser entendido como a função de Green associada ao operador $\hat{\mathcal{G}}$. Esta última expressão pode também ser escrita como,

$$S_{(i)} = \int d^4x \sqrt{-\gamma}\, T^{\rho\sigma} m_{\rho\sigma}, \tag{4.94}$$

se definirmos o tensor simétrico $m_{\alpha\beta}$ através de:

$$m_{\rho\sigma} = -(1-2\lambda)(\hat{\mathcal{G}}^{\alpha\mu}_{\rho\sigma})^{-1} \phi_{\alpha\mu}. \tag{4.95}$$

Como visto anteriormente, o efeito da interação do campo gravitacional com a matéria é o aparecimento de uma geometria riemanniana efetiva $g^{\mu\nu}$ dada por 4.76 que para a situação física que acabamos de descrever é dada por:

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + m^{\mu\nu}). \tag{4.96}$$

Vemos portanto que a teoria linear para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ em interação com a matéria, gerada à partir de uma analogia ao esquema de Maxwell para o eletromagnetismo através da ação 4.1, resulta em uma teoria não-local quando analisada na representação usual das variáveis simétricas de dois índices. Esta não-localidade se manifesta na geometria que efetivamente é percebida pela matéria que interage com o campo gravitacional conforme indicam as equações 4.95 e 4.96. No entanto, existe a possibilidade de reformularmos a teoria de modo a eliminarmos o caráter não-local da métrica efetiva 4.96 através do procedimento que detalharemos a seguir.

Conforme observado no início deste capítulo estamos considerando apenas um dentre os dois campos de spin-2 disponíveis na formulação que considera a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ como fundamental. Este fato se traduz matemáticamente na consideração do vínculo 4.8, que como já vimos tem por consequência direta a possibilidade de expressarmos via equação 4.10 a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ através de uma combinação adequada de derivadas do tensor $\chi_{\mu\nu}$. Vimos que este tensor está relacionado à variável $\phi_{\mu\nu}$ definida em 4.3 através da expressão 4.12 que reescreveremos na forma

$$\phi_{\mu\nu} = 2\,\tilde{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\;\chi_{\alpha\beta}, \tag{4.97}$$

onde o operador $\tilde{\mathcal{G}}$ é dado pela expressão:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} &= \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\Box + \frac{p-1+\eta(1+3p)}{2}\delta^{(\alpha}_{\mu}\nabla^{\beta)}\nabla_{\nu} + \\ &+ \frac{2q-2\eta(1-3q)}{2}\gamma^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{nu} + \frac{-2p+\xi(1+3p)}{2}\gamma_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta} + \\ &- \frac{2q+\xi(1-3q)}{2}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}\Box.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Temos também que da equação 4.95 segue que a relação entre os tensores $\phi_{\mu\nu}$ e $m_{\alpha\beta}$ pode ser expressa como

$$\phi_{\mu\nu} = -\frac{1}{1-2\lambda}\,\hat{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\;m_{\alpha\beta}, \tag{4.99}$$

onde $\hat{\mathcal{G}}$ é dado pela expressão 4.91. É possível portanto estabelecermos a igualdade entre os operadores $\hat{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ se fixarmos o conjunto de parâmetros (r, s, η, ξ). Como resultado obtemos que para os seguintes valores dos parâmetros,

$$\begin{aligned}\eta &= -1 \\ \xi &= 4 \\ r &= 0 \\ s &= -1/2\end{aligned} \tag{4.100}$$

temos a igualdade:

$$\hat{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \tilde{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\Box - \delta^{(\alpha}_{\mu}\nabla^{\beta)}\nabla_{\nu} + 4\gamma^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} + \gamma_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta} - 4\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}\Box. \tag{4.101}$$

Este fato traz como consequência imediata a identificação das variáveis $\chi_{\alpha\beta}$ e $m_{\alpha\beta}$ através da expressão:

$$m_{\alpha\beta} = -2(1-2\lambda)\chi_{\alpha\beta}. \tag{4.102}$$

Por outro lado, a equação de movimento 4.84 pode ser reescrita para a variável $\phi_{\mu\nu}$ com o auxílio da expressão 4.6 como

$$\Box\phi_{\alpha\mu} - \phi_{(\alpha\beta;\mu)}{}^{;\beta} + (1-M)\phi_{,\alpha;\mu} - (1/2+N)\Box\phi\gamma_{\alpha\mu} = \frac{2}{1-2\lambda}J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta}, \tag{4.103}$$

ou

$$\bar{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\ \phi_{\alpha\beta} = \frac{2}{1+2\lambda}J_{(\mu\lambda\nu)}{}^{;\lambda}, \tag{4.104}$$

onde

$$\bar{\mathcal{G}}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\Box - \delta^{(\alpha}_{\mu}\nabla^{\beta)}\nabla_{\nu} + (1-M)\gamma^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - (1/2+N)\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}\Box. \tag{4.105}$$

Para o conjunto de valores dos parâmetros dados em 4.100 os coeficientes M e N presentes em 4.103 e definidos pelas equações 4.85 e 4.86 são escritos como:

$$M = \frac{8\sigma + 4\lambda - 2\lambda\xi + 3}{6(1-2\lambda)} \tag{4.106}$$

$$N = \frac{-16\sigma + 4\lambda - 2\lambda\sigma + 3}{12(1-2\lambda)}\ . \tag{4.107}$$

Lembramos ainda que exigimos que na representação das variáveis simétricas de dois índices a equação 4.103 seja a equação usual de Fierz-Pauli para o campo de spin-2, fato que se concretizou com a identificação da fonte $\frac{2}{1-2\lambda} J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta}$ ao tensor momentum-energia da matéria $T_{\alpha\mu}$ através da equação 4.89. A consequência imediata desta escolha, como já visto, é o termo de interação 4.94 envolvendo o campo não-local $m_{\alpha\beta}$.

Formalmente a situação se apresenta semelhante à discutida no capítulo 3 onde uma escolha de gauge adequada possibilitou a formulação local para aquela teoria. Aqui utilizaremos não uma relação de gauge, mas sim a relação existente entre os campos $\phi_{\mu\nu}$ e $m_{\mu\nu}$ construída através das equações 4.97, 4.99, 4.101 e 4.102 que nos possibilita reescrever a equação 4.104 da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\rho\sigma}_{\alpha\mu}\ \tilde{\mathcal{G}}^{\gamma\delta}_{\rho\sigma}\ m_{\gamma\delta} = -2T_{\alpha\mu}. \tag{4.108}$$

A matéria continua sujeita aos efeitos da presença da métrica efetiva

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + m^{\mu\nu}),$$

que agora devido à reestruturação efetuada na teoria, assume um caráter local e é perfeitamente determinada pela solução da equação 4.108.

É importante observar que a fonte $J_{\alpha\beta\mu}$ desta teoria tipo Maxwell para $A_{\alpha\beta\mu}$ é uma função não-local do tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$, como fácilmente podemos ver se usarmos a expressão 4.90 reescrita como

$$S^{\rho\sigma} = -(1-2\lambda)(\hat{\mathcal{G}}^{\rho\sigma}_{\alpha\mu})^{-1}T_{\alpha\mu}, \tag{4.109}$$

na expressão 4.64 que define a fonte $J_{\alpha\beta\mu}$. Este fato é uma consequência direta de exigirmos que $T^{\mu\nu}$ seja a fonte da equação de movimento na representação usual das variáveis simétricas de dois índices (equação 4.103 para $\phi_{\mu\nu}$ ou alternativamente equação 4.108 para $m_{\mu\nu}$).

4.5 Teoria tipo Podolsky para $A_{\alpha\beta\mu}$

Na seção anterior vimos que a teoria formulada para as variáveis de três índices $A_{\alpha\beta\mu}$, em analogia à teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, possui como fonte uma função não-local do tensor momentum-energia da matéria. Este resultado pode ser considerado como uma consequência direta de exigirmos que a equação de Fierz-Pauli 2.6, com fonte dada por $T_{\mu\nu}$, seja a equação de movimento na representação usual das variáveis de dois índices. Nesta seção ao contrário, ao abrirmos mão de considerar a equação de Fierz-Pauli citada como a equação de evolução na representação de dois índices e exigirmos que a teoria na representação de $A_{\alpha\beta\mu}$ seja local, obteremos como resultado um 'cenário' capaz de generalizar a teoria proposta por S.Deser e B.E.Laurent que resumimos no capítulo 3.

O princípio que irá nortear o nosso desenvolvimento nesta seção é o de que a teoria em termos da variável fundamental $A_{\alpha\beta\mu}$ deverá ter caráter local. Assim, dado que a ação de interação tem por expressão

$$S_{(i)} = -\int d^4x\sqrt{-\gamma}\, J_{\alpha\beta\mu}A^{\alpha\beta\mu},$$

iremos supor que o tensor $J_{\alpha\beta\mu}$ é uma função local do tensor momentum-energia da matéria. Como já visto, a expressão mais simples que possui divergência nula e as simetrias do campo é dada por:

$$2J_{\mu\epsilon\nu} = T_{\nu[\mu;\epsilon]} - T^{\lambda}_{\ [\mu;\lambda}\gamma_{\epsilon]\nu} + 1/2\xi T_{,[\mu}\gamma_{\epsilon]\nu}. \tag{4.110}$$

Como lagrangeana para o campo gravitacional livre vamos considerar a expressão

$$\mathcal{L}_{(g)} = \sqrt{-\gamma}(-1/16F_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda}F^{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + \frac{\lambda}{2}F_{\mu\nu;\lambda}F^{\mu\nu;\lambda} + \frac{\sigma}{2}F_{,\lambda}F^{,\lambda}), \tag{4.111}$$

que representa uma generalização da lagrangeana tipo Maxwell dada em 4.45, que passa a possuir derivadas do tensor $F^{\alpha\beta\mu\nu}$.

Uma generalização deste tipo para a eletrodinâmica foi desenvolvida por B. Podolsky [24] resultando em uma teoria com equações de campo de quarta ordem que se apresentou satisfatória no tratamento de problemas ligados à divergências no eletromagnetismo.

Neste trabalho não entraremos nas discussões usualmente associadas à estas teorias, que por possuírem derivadas de ordem superior tem sua validade questionada [25]. Como já dito, limitaremo-nos a apresentar um esquema coherente que generaliza a formulação apresentada no capítulo 3.

Para isto construímos a ação para o campo gravitacional com o auxílio da lagrangeana 4.111:

$$S_{(g)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}(-1/8F_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda}F^{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + \lambda F_{\mu\nu;\lambda}F^{\mu\nu;\lambda} + \sigma F_{,\lambda}F^{,\lambda}). \tag{4.112}$$

A variação com relação à variável $A_{\alpha\beta\mu}$ desta ação somada à ação de interação 4.62 nos fornece:

$$\delta S_{(g)} = 1/2\int d^4x\sqrt{-\gamma}(\Box\tilde{\Omega}_{\alpha\beta\mu} - J_{\alpha\beta\mu})\delta A^{\alpha\beta\mu}, \tag{4.113}$$

onde

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta\mu} = -F_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{;\nu} + 2\lambda(F_{\alpha\mu;\beta} - F_{\beta\mu;\alpha} + F_{\beta\epsilon}{}^{;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu} - F_{\alpha\epsilon}{}^{;\epsilon}\gamma_{\beta\mu}) + \tag{4.114}$$

$$+4\sigma(F_{,\beta}\gamma_{\alpha\mu} - F_{,\alpha}\gamma_{\beta\mu}).$$

Se comparado ao resultado da variação total 4.79 para a teoria tipo Maxwell que desenvolvemos na última seção observamos que a alteração decorrente da utilização da lagrangeana generalizada 4.111 é a presença extra do operador d'alembertiano atuando sobre a expressão 4.59 que sofreu uma mudança de sinal em todos os seus termos.

Procedemos agora da mesma maneira que na seção 4.2; estabelecida a equação de movimento para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ através de 4.113 partimos para a análise da mesma na representação das variáveis usuais $h_{\mu\nu}$ com o auxílio da relação 4.7.

O primeiro passo é explicitar a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ na equação de movimento que decorre de 4.113:

$$-\Box[\Box A_{\alpha\beta\mu} - A_{\alpha\beta\nu}{}^{;\nu}{}_{;\mu} + A_{\mu\nu[\alpha}{}^{;\nu}{}_{;\beta]} - 2\lambda(A_{[\alpha\sigma\mu}{}^{;\sigma}{}_{;\beta]} + A_{\mu\sigma[\alpha}{}^{;\sigma}{}_{;\beta]} +$$

$$- A_{(\alpha;\mu);\beta} + A_{(\beta;\mu);\alpha} + A_{[\alpha\sigma\epsilon}{}^{;\sigma;\epsilon}\gamma_{\beta]\mu} + A_{\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;[\alpha}\gamma_{\beta]\mu} + \Box A_{[\alpha}\gamma_{\beta]\mu}) \tag{4.115}$$

$$+ 16\sigma(A^{\lambda}{}_{;\lambda;\alpha}\gamma_{\beta\mu} - A^{\lambda}{}_{;\lambda;\beta}\gamma_{\alpha\mu}] = J_{\alpha\beta\mu}.$$

A utilização da relação 4.7 em cada um dos termos acima nos leva finalmente à equação de movimento para a variável $h_{\alpha\beta}$:

$$\Box(\Box h_{\alpha\mu} - h_{(\alpha\beta;\mu)}{}^{;\beta} + M h_{,\alpha;\mu} + N\Box h\gamma_{\alpha\mu}) = \frac{2}{2\lambda - 1} J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta}. \tag{4.116}$$

As constantes M e N são as mesmas presentes na equação 4.84 e são dadas pelas expressões 4.85 e 4.86 respectivamente. É conveniente reescrevermos a equação 4.116 da seguinte maneira:

$$\Box h_{\alpha\mu} - h_{(\alpha\beta;\mu)}{}^{;\beta} + Mh_{,\alpha;\mu} + N\Box h\gamma_{\alpha\mu} = \frac{1}{\Box}(\frac{2}{2\lambda - 1}J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta}). \tag{4.117}$$

Uma vez que a fonte $J_{\alpha\beta\mu}$ é dada pela expressão 4.62, o lado direito desta equação pode ser escrito como:

$$J_{\alpha\beta} \equiv \frac{2}{2\lambda - 1}\frac{1}{\Box}J_{(\alpha\beta\mu)}{}^{;\beta} \tag{4.118}$$

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\lambda - 1}\frac{1}{\Box}(T_{\mu\alpha;\lambda}{}^{;\lambda} - T_{\mu\lambda;\alpha}{}^{;\lambda} + \eta T^{\lambda}{}_{\alpha;\lambda;\mu} - \eta T_{\lambda\epsilon}{}^{;\lambda;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu} + \xi T_{,\alpha;\mu} - \xi T_{,\lambda}{}^{;\lambda}\gamma_{\alpha\mu}). \tag{4.119}$$

Para os valores , $\eta = -1$, $\xi = 0$ e $\lambda = 1$ esta expressão assume a forma

$$J_{\alpha\mu} = \frac{1}{\Box}(\Box T_{\alpha\mu} - T_{(\alpha\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\mu)} + T_{\lambda\epsilon}{}^{;\lambda;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu}), \tag{4.120}$$

ou ainda,

$$J_{\alpha\mu} = T_{\alpha\mu} - \frac{1}{\Box}T_{(\alpha\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\mu)} + \frac{1}{\Box}T_{\lambda\epsilon}{}^{;\lambda;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu}. \tag{4.121}$$

Com a fonte dada por esta expressão a equação de movimento para o campo gravitacional 4.117 se escreve como:

$$\Box h_{\alpha\mu} - h_{(\alpha\beta;\mu)}{}^{;\beta} + Mh_{,\alpha;\mu} + N\Box h\gamma_{\alpha\mu} = T_{\alpha\mu} - \frac{1}{\Box}T_{(\alpha\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\mu)} + \frac{1}{\Box}T_{\lambda\epsilon}{}^{;\lambda;\epsilon}\gamma_{\alpha\mu}. \tag{4.122}$$

Recordando a teoria resumida no capítulo 3 [18], tínhamos que a fonte mais geral que possui divergência nula é dada pela expressão 3.13:

$$J_{\alpha\mu} = T_{\alpha\mu} + (p+q)\gamma_{\alpha\mu}T - \frac{1}{\Box}T_{(\alpha\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\mu)} +$$

$$+(1+q)\frac{1}{\square}\frac{1}{\square}T^{\lambda\epsilon}{}_{;\lambda;\epsilon;\alpha;\mu} - q\frac{1}{\square}\gamma_{\alpha\mu}T_{\lambda\epsilon}{}^{;\lambda;\epsilon} - \frac{1}{\square}(p+q)T_{,\alpha;\mu}. \qquad (4.123)$$

Ao compararmos esta expressão à fonte 4.121 obtida acima, verificamos que são coincidentes para a seguinte escolha dos parâmetros p e q:

$$\begin{aligned} p &= 1 \\ q &= -1\,. \end{aligned} \qquad (4.124)$$

Este conjunto de valores difere do conjunto 3.12 utilizado para reproduzir adequadamente os testes clássicos. No entanto, é possível mostrar que para o conjunto acima, os resultados fornecidos pela teoria referentes ao limite newtoniano, desvio dos raios luminosos e valor do 'red shift' se mantém idênticos aos que coincidem com os valores da teoria da relatividade geral, havendo apenas uma diferença quanto ao valor da precessão do periélio.

Vemos portanto, que ao formularmos uma teoria linear e local para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ através de uma lagrangeana inspirada no formalismo de Podolsky para a eletrodinâmica, obtemos na representação usual de dois índices uma teoria não-local semelhante à apresentada em 3. Lá mostramos que pela escolha do termo de interação o tensor momentum-energia empregado na fonte de caráter não-local, possui não só a contribuição energética da matéria, mas também da parte relativa à sua interação com o campo gravitacional. Por este motivo a equação de movimento 4.122 considerada em conjunto com a equação de movimento para a matéria constituem-se num sistema não-linear acoplado. É importante enfatizar a inexistência da auto-interação gravitacional nesta equação.

Podemos então distinguir dois tipos de contribuição presentes na fonte do campo gravitacional dada pela expressão 4.121. A primeira, expressa por $T_{\mu\nu}$ é uma contribuição local que representa a influência em um ponto arbitrário P da energia e momentum da matéria e sua interação com o campo gravitacional presentes neste mesmo ponto. A segunda, expressa através dos termos não-locais, representa a influência neste ponto, da matéria e sua interação presentes nas regiões causalmente conectadas ao mesmo. Desta forma podemos dizer que a presença de qualquer tipo de matéria- energia no universo, é responsável nesta teoria pelo caráter não-linear das equações de movimento que regem o campo gravitacional. A esta não-linearidade induzida, que não se constitui em uma propriedade fundamental da gravitação mas uma conseqência da existência de matéria em algum lugar do espaço-tempo, denominaremos de não-linearidade 'machiana'.

Finalizamos esta seção observando que como já discutido no capítulo três a métrica de fundo não é observável uma vez que a matéria só é capaz de perceber a presença da métrica efetiva $g^{\mu\nu}$ dada por 4.76. Entretanto, uma vez que não estamos considerando a interação direta entre grávitons, as ondas gravitacionais não estão sujeitas aos efeitos do campo gravitacional e podem ser utilizadas em princípio para a construção de um sistema inercial global através de sua propagação no espaço de fundo plano. Este fato teria como consequência a quebra da covariância da teoria. Na próxima seção discutiremos a possibilidade de alterarmos esta situação através da consideração de uma estrutura teórica um pouco mais abrangente que se faz possível através da introdução neste formalismo de termos não-lineares no campo.

4.6 Auto-Interação

A teoria desenvolvida na seção anterior foi obtida tomando como ponto de partida uma teoria linear para o campo $A_{\alpha\beta\mu}$ descrita através da lagrangeana tipo Podolsky 4.111. No entanto, podemos supor que uma teoria não-linear nestas variáveis seja mais adequada para descrever a gravitação. Uma tentativa nesta direção foi efetuada [21, 23] através do desenvolvimento de uma teoria não-linear do tipo Born-Infeld para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$.

Podemos também considerar possível a utilização de termos extras locais não-lineares na lagrangeana para a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ (por exemplo no contexto do formalismo tipo Maxwell que desenvolvemos), com o objetivo de formularmos uma teoria que seja equivalente à teoria da relatividade geral. Para que isto seja possível,devemos ter que a contribuição dos novos termos não-lineares em A, quando levados à representação de dois índices, nos forneça exatamente o tensor $\tau_{\mu\nu}$ definido em 2.30, que carrega a parte da auto-interação gravitacional. Se lembrarmos que a ligação entre as duas representações é feita através da equação 4.3, vemos que a tarefa de encontrar uma lagrangeana para $A_{\alpha\beta\mu}$ onde isto ocorra é muito difícil. No entanto, conceitualmente a teoria se amplia no sentido de que mesmo não desempenhando o papel de estabelecer a equivalência entre as duas teorias, a presença dos termos extras adicionados à lagrangeana linear contribuem para que termos de auto-interação surjam na representação de dois índices.

Termos desta natureza podem também ser obtidos utilizando-se funcionais da métrica efetiva $g^{\mu\nu}$ que como já vimos desempenha um papel importante na compreensão do processo de interação. Isto é possível pois $g^{\mu\nu}$ é uma variável que depende da grandeza $A_{\alpha\beta\mu}$ (que é a que consideramos como fundamental na descrição da interação gravitacional), através da expressão:

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + A^{(\mu\lambda\nu)}{}_{;\lambda} - A^{(\mu;\nu)} + 2A^{\alpha}{}_{;\alpha}\gamma^{\mu\nu}). \tag{4.125}$$

De fato, suponhamos que a lagrangeana extra (a ser adicionada à lagrangeana linear) seja um funcional de $\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}$ onde,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{\mu\nu}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\, h^{\mu\nu}.$$

A ação é então dada por:

$$S_{(nl)} = \int d^4x f[\tilde{g}^{\mu\nu}]. \tag{4.126}$$

Como argumentamos, a variável a sofrer a variação é $A_{\alpha\beta\mu}$. Desta forma temos:

$$\delta S_{(nl)} = \int d^4x \frac{\delta f}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} = \int d^4x \frac{\delta f}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{h}^{\mu\nu} \tag{4.127}$$

$$\delta S_{(nl)} = \int d^4x \left[\left(\frac{\delta f}{\delta \tilde{g}^{\epsilon\nu}}\right)_{;\mu} - \left(\frac{\delta f}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}\right)_{;\epsilon} + 2\left(\frac{\delta f}{\delta \tilde{g}^{\mu\lambda}}\right)_{;\lambda} \gamma_{\epsilon\nu} - 2\left(\frac{\delta f}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}\right)_{;\mu} \gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\epsilon\nu}\right] \delta \tilde{A}^{\mu\epsilon\nu}, \tag{4.128}$$

onde usamos a expressão 4.7 para relacionar as variáveis h e A.

A título de exemplo, suponhamos que este funcional $f[\tilde{g}^{\mu\nu}]$ seja dado pela expressão simples

$$f[\tilde{g}^{\mu\nu}] = b\sqrt{-g}, \tag{4.129}$$

onde b é uma constante. Temos então que a variação de 4.126 pode ser escrita na forma:

$$\delta S_{(nl)} = \delta \int d^4 x b \sqrt{-g} = b \int d^4 x \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu}. \qquad (4.130)$$

Temos que:

$$\delta \sqrt{-g} = -1/2 \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \qquad (4.131)$$

Mostra-se fácilmente que

$$\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu}, \qquad (4.132)$$

de modo que 4.131 pode ser reescrita como:

$$\delta \sqrt{-g} = 1/2 g_{\mu\nu} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} = 1/2 \sqrt{-\gamma}\, g_{\mu\nu} \delta \tilde{h}^{\mu\nu}. \qquad (4.133)$$

Usando agora a relação 4.7 com $\xi = 0$ e $\eta = -1$ temos,

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\, g_{\mu\nu} \delta (A^{\mu\epsilon\nu}{}_{;\epsilon} - A^{\mu;\nu} + A^{\alpha}{}_{;\alpha} \gamma^{\mu\nu}), \qquad (4.134)$$

de modo que 4.130 se escreve como:

$$\delta S_{(nl)} = b \int d^4 x \sqrt{-\gamma}\, g_{\mu\nu} \delta (A^{\mu\epsilon\nu}{}_{;\epsilon} - A^{\mu;\nu} + A^{\alpha}{}_{;\alpha} \gamma^{\mu\nu}). \qquad (4.135)$$

Passando as derivadas para $g_{\mu\nu}$ e desprezando as integrais de superfície temos finalmente:

$$\begin{aligned} \delta S_{(nl)} &= b \int d^4 x \sqrt{-\gamma} [-1/2 (g_{\mu\nu;\epsilon} - g_{\epsilon\nu;\mu}) + 1/2 (g_{\mu\lambda}{}^{;\lambda} \gamma_{\epsilon\nu} - g_{\epsilon\lambda}{}^{;\lambda} \gamma_{\mu\nu}) + \\ & -1/2 (g_{\alpha\beta;\mu} \gamma_{\epsilon\nu} \gamma^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta;\epsilon} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta})] \delta A^{\mu\epsilon\nu} = \qquad (4.136) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-\gamma}\, b I_{\mu\epsilon\nu} \delta A^{\mu\epsilon\nu}. \end{aligned}$$

É importante agora observarmos que por $g_{\mu\nu}$ ter a forma

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}),$$

sua inversa, definida de maneira a satisfazer a equação

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}, \tag{4.137}$$

é uma série infinita para o campo h dada pela expressão abaixo:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} (\gamma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha} h^{\alpha}{}_{\rho} - h_{\mu\alpha} h^{\alpha}{}_{\rho} h^{\rho}{}_{\nu} + \ldots). \tag{4.138}$$

Desta maneira vemos que adicionando o termo extra 4.136 à dinâmica de $A_{\alpha\beta\mu}$ temos:

$$1/2\, \Box\, \tilde{\Omega}_{\alpha\beta\mu} = J_{\alpha\beta\mu} + b\, I_{\alpha\beta\mu}. \tag{4.139}$$

Em termos das variáveis de dois índices $h_{\mu\nu}$ a equação acima pode ser escrita como:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + b I_{\mu\nu}, \tag{4.140}$$

onde $G^{(L)}_{\mu\nu}$ que representa a parte linear da dinâmica e a fonte $J_{\mu\nu}$ já foram obtidas em 4.122 e $I_{\mu\nu}$ é definido como:

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{\Box} I_{(\mu\epsilon\nu)}{}^{;\epsilon}. \tag{4.141}$$

Por construção sabemos que a divergência de $I_{\mu\nu}$ é idênticamente nula.

Temos portanto que uma das consequências importantes da introdução do termo extra 4.129 à lagrangeana tipo Podolsky dada por 4.111, é obtermos na representação das variáveis de dois índices termos de auto interação capazes de tornar impossível a identificação do espaço de fundo plano, mesmo através da propagação de ondas gravitacionais. fato que reestabelece a covariância geral da teoria. Isto pode ser visto do fato que o termo $I_{\mu\nu}$ em 4.140 contribui com derivadas de segunda ordem da inversa $g_{\mu\nu}$ da métrica efetiva, que esconde uma série infinita no campo h . Desta forma a presença no lado direito de 4.140, de termos envolvendo derivadas de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, é capaz de alterar a estrutura característica de propagação associada ao operador linear $G^{(L)}_{\mu\nu}$ tornando o espaço de fundo com métrica $\gamma^{\mu\nu}$ não observável.

Conclusão

Analisamos neste trabalho algumas das consequências de adotarmos a variável $A_{\alpha\beta\mu}$ como a variável fundamental para descrever a gravitação. De maneira a estabelecer contato com a descrição usual da interação gravitacional através dos tensores simétricos de dois índices, apresentamos a expressão que relaciona as duas representações. Retomando trabalhos anteriores, onde em analogia com a eletrodinâmica um modelo equivalente à teoria de Maxwell foi desenvolvido, estudamos aqui a interação com a matéria. Como resultado, obtemos que para o tipo de interação que estamos considerando, a matéria fica sujeita aos efeitos de uma métrica riemanniana efetiva que é uma função não-local do campo gravitacional. Mostramos também que esta não-localidade pode ser eliminada através da consideração de uma equação de ordem superior cuja introdução se faz possível através da utilização do vínculo que elimina um dentre os dois campos de spin-2 presentes na variável $A_{\alpha\beta\mu}$.

Desenvolvemos também um modelo baseado na eletrodinâmica formulada por B.Podolsky, que quando analisado na representação das variáveis simétricas de dois índices reproduz como caso particular, as equações integro-diferenciais que decorrem da teoria proposta por S.Deser e B.E.Laurent (que descrevem a gravitação como uma teoria linear sem termos de auto-interação). Mostramos então que se a lagrangeana 'tipo Podolsky' que dá origem à estas equações for complementada por termos não-lineares em $A_{\alpha\beta\mu}$, ou mesmo por um funcional da métrica riemanniana efetiva $g^{\mu\nu}$, obtemos termos extra de auto-interação cuja consequência principal é restaurar a condição de não observabilidade da métrica de fundo plana $\gamma^{\mu\nu}$.

Concluímos portanto que a utilização das variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ fornece um esquema mais abrangente para o comportamento do campo gravitacional, quando analisado através dos tensores simétricos de dois índices. Fica definido portanto, um programa de investigação de modelos compatíveis com a observação que pode possibilitar o aparecimento de novos processos. Um passo nesta direção está sendo concluído por V.A.De Lorenci em sua dissertação de mestrado sob a orientação de M.Novello, onde as equações integro-diferenciais propostas por S.Deser e B.E.Laurent são complementadas por um tensor momentum-energia de segunda ordem representando a auto-interação do campo. As soluções esféricamente simétricas geradas por uma fonte pontual são obtidas e a compatibilidade com os resultados experimentais analisados.

Como perspectiva de futuro desenvolvimento da teoria em termos da nova representação, podemos pensar na análise das consequências de considerarmos a presença do segundo campo de spin-2 em $A_{\alpha\beta\mu}$, que neste trabalho foi eliminado através da relação 4.8. Com as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ desempenhando o papel de potencial, podemos construir, como um exemplo particular, um modelo semelhante à teoria de dois potenciais já desenvolvida para o eletromagnetismo. Estudos nesta direção já foram iniciados.

Referências

[1] A.Papapetrou, 'Lectures on general relativity', (D. Reidel Publishing Company).

[2] Eddington, 'The mathematical theory of relativity', (Cambridge, 1923).

[3] R.C.Tolman, 'On the use of the energy-momentum principle in general relativity', Phys. Rev. 35, 877 (1930).

[4] C.Møller, 'On the localization of the energy of a physical system in general relativity', Annals of Phys. 4, 347 (1958), 'Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity', Annals of Phys. 12, 118 (1961).

[5] H.Bauer, Physik. Zeits. 19, 163 (1918).

[6] N.Rosen, 'General relativity and flat space.I', Phys. Rev. 57, 150 (1940).

[7] A.Papapetrou, 'Einstein's theory of gravitation and flat space', Proc. Roy. Irish Acad. 52A, 11 (1948).

[8] N.Rosen, 'Flat-space metric in general relativity theory', Annals of Phys. 22, 1 (1963).

[9] R.P.Feynman, 'Lectures on gravitation', (California Institute of Technology, 1962), não publicado.

[10] W.E.Thirring, 'An alternative approach to the theory of relativity', Annals of Phys. 16, 96 (1961).

[11] Ya.B.Zel'dovich and L.P.Grishchuk, 'Gravitation, the general theory of relativity, and alternative theories', Sov. Phys. Usp. 29, 780 (1986).

[12] E.Alvarez, 'Quantum gravity: an introduction to some recent results', Rev. of Mod. Phys. 61, 561 (1989).

[13] L.Landau et E.Lifchitz, 'Théorie du champ', (Éditions Mir, 1966).

[14] S.Deser, 'Self-interaction and gauge invariance', G. R. G. 1, 9 (1970).

[15] L.P.Grishchuk, A.N.Petrov and A.D.Popova, 'Exact theory of the (Einstein) gravitational field in an arbitrary background space-time', Commun. Math. Phys. 94, 379 (1984).

[16] T.Taniuti, 'On wave propagation in non-linear fields'.

[17] Ya.B.Zel'dovich and L.P.Grishchuk, 'The general theory of relativity is correct!', Sov. Phys. Usp. 31, 666 (1988).

[18] S.Deser and B.E.Laurent, 'Gravitation without self interaction', Annals of Phys. 50, 76 (1968).

[19] M.Novello and N.P.Neto, 'Theory of gravity in Fierz variables (the linear case)', Fortschr. Phys. 40, 173 (1992).

[20] N.P.Neto, 'Teoria da gravitação em termos das variáveis de Fierz-Lanczos', Tese de Doutorado CBPF, 1989.

[21] Luciane R. de Freitas, 'Campos de spin dois, variáveis fundamentais: a proposta de Fierz', Tese de Doutorado CBPF, 1991.

[22] M.Novello, Luciane R. de Freitas, N.P.Neto and N.F.Svaiter, 'Quantization of spin-two field in terms of Fierz variables-The linear case', Fortschr. Phys. 40, 195 (1992).

[23] Luciane R. de Freitas, M.Novello and N.P.Neto, 'Non-linear theories of spin-2 fields in terms of Fierrz's variables', Journ. Math. Phys. 35, 2 (1994).

[24] B.Podolsky, 'A generalized electrodynamics part1- Non-quantum', Phys. Rev. 62, 68 (1942).

[25] A.M.Chervyakov and V.V.Nesterenko, 'Is it possible to assign physical meaning to field theory with higher derivatives?', Phys. Rev. D48, 5811 (1993).

[26] M.Novello and S.L.S.Duque, 'Non-local theory of gravity', a ser publicado em Int. Journ. of Mod. Phys. D.

"FORMULAÇÃO INTEGRO-DIFERENCIAL PARA A GRAVITAÇÃO"

Sérgio Luiz Schubert Duque

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Mário Novello - Presidente

Luciane Rangel de Freitas

Marcos Duarte Maia

Ívano Damião Soares

José Abdalla Helayël-Neto

Námi Fux Svaiter - Suplente

Rio de Janeiro, 19 de dezembro de 1994