TESE DE

DOUTORADO

ALGUNS ASPECTOS RELATIVOS À DIMENSIONALIDADE EM MODELOS SUPERSIMÉTRICOS

LUIZ PAULO COLATTO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, JUNHO DE 1994

Dedicatória

Aos meus pais *Octavino Colatto* (in memorian) e *Clarice Zugno Colatto* (in memorian), cujos ensinamentos, suas lutas, generosidade, compreensão, amor serão sempre seguidos e lembrados como um grande exemplo e lição de vida.

Aos meus nonos *Pedro Zugno* (in memorian) e *Antonia Bonatto Zugno* (in memorian).

Aos meus avós *José Colatto* (in memorian) e *Adelaide Zen Colatto.*

A *Regina*

Agradecimentos

A *José Abdallah Helayël-Neto* pela sua orientação, amizade, prestimosas ajudas e incentivo, sem os quais este trabalho não seria possível.

Ao Prof. Olivier Piguet, pela inestimável ajuda e incentivo.

A José Luiz Matheus-Valle, pela valorosa colaboração e grande amizade.

A Marco Aurélio do Rêgo Monteiro, pelas discussões.

Ao meu grande amigo e irmão Gerson Bazo Costamilan e ao meu irmão e grande amigo Pedro José Colatto, que sem os seus apoios, discussões, amizade e incentivo, este trabalho, também não teria sido possível.

A Sebastião A. Dias (Tião), Oswaldo M. Del Cima, Marco A. De Andrade (Marquinho), pela amizade e pelas várias discussões (e várias noitadas) que sempre enriqueceram este trabalho.

A todo pessoal que contribuiu para que este período fosse muito agradável e proveitoso: Armando, Patricio, Barto, Mauricio, Sonia, Mioco, Macellão e Anna, Marcelinho, Marcello (cabeludo), Ricardo (Prof. Chumbinho), Álvaros, Luis Claudio, Claudio Sasaki (Cindy, Schwazz, ...), Daniel (Madonna, Rambo, ...), Cambraia, Flavio, Zilda (Zildinha), Edgardo, Henrique, Soares, Gentil, Luis Alberto (mala), Fernandos, Silvio, Anibal e Suzana (Carides), ...

A grande colaboração e amizade: Rosângela, Miriam, Denise, Vera, Fátima, Beth.

A todo pessoal, pesquisadores e funcionários, do Departamento de Campos e Partículas (DCP),

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, por ter dado esta oportunidade e pelos vários anos de bons relacionamentos.

Ao CNPq e a FAPERJ, pelos apoios financeiros.

Resumo

Nessa tese, são feitas correções a "1–loop" dos campos componentes para calcular campos de matéria nos modelos de gauge com supersimetria $(1,0)$ e $(1,1)$. Os resultados obtidos são discutidos em conexão com cálculos da carga central.

Mostra-se que modelos com supersimetria N=1 com configurações de campo com topologia não–trivial desenvolvem uma carga central na álgebra de supersimetria. Este resultado é, também, discutido na presença de um termo de Chern–Simons, mantendo a supersimetria não–estendida.

Baseado na idéia dos grupos quânticos e variáveis de paragrassmann, apresentamos uma generalização da mecânica clássica supersimétrica com um paraâmetro de deformação $q = \exp \frac{2\pi i}{k}$ e trabalhamos com o caso $k = 3$. As coordenadas do q-superespaço são: um parâmetro comutante t e uma variável de paragrassmann θ, onde $\theta^3 = 0$. O gerador e a derivada covariante são obtidos e, também, a ação para alguns superacampos.

Summary

In this thesis, component-field one-loop corrections are perfomed to integrate out matter fields in $(1,0)$- and $(1,1)$-supersymmetric gauge models. The results obtained are discussed in connection with central charge calculations.

One shows that 3-dimensional $N=1$-supersymmetric models with non-trivial topological field configurations develop a central charge in the supersymmetry algebra. This result is also discussed in the presence of a Chern-Simons term, keeping supersymmetry non-extended.

Based on the idea of quantum groups and paragrassmann variables, we present a generalisation of supersymmetric classical mechanics with a deformation parameter $q = \exp\frac{2\pi i}{k}$ and we work with the $k = 3$ case. The coordinates of the q-superspace are a commuting parameter t and a paragrassmann variable θ, where $\theta^3 = 0$. The generator and covariant derivative are obtained, as well as the action for some possible superfields.

Índice

Introdução

O estudo de teorias de campos em dimensões inferiores a quatro vem trazendo contribuições importantes a uma melhor compreensão das teorias em $D = 4$. Além disso, sua manipulação é significativamente mais simples, podendo até apresentar solução exata, sem a necessidade de recorrer a métodos perturbativos. Assim, em alguns casos, é possível fazer, de uma forma quase imediata, a generalização para 4 dimensões, ou até mesmo encontrar resultados que independam da dimensão.

Em duas dimensões, podemos assinalar notáveis propriedades dos modelos-σ não–lineares e sua conexão com teorias não-Abelianas em $D = 4$. Devido à conjectura de Polyakov, mostra-se, por intermédio de argumentos de Grupo de Renormalização, que os modelos-σ apresentam liberdade assintótica e que o mecanismo de confinamento é viável em $D = 2$ [1]. Mais recentemente, o interesse no estudo de teorias de gauge em $D = 2$ foi renovado com a conexão entre a QCD_2 e outras teorias (inclusive "strings") [2, 3]. Neste caso, uma teoria de gauge pura, apesar de ser localmente trivial em $D = 2$, ao ser considerada sobre uma 2-variedade, ou introduzindo-se fontes externas de loop de Wilson, passa a apresentar um caráter não-trivial. Estas teorias fornecem um modelo simplificado interessante para estudar certas propriedades de teorias de gauge em qualquer dimensão [4]. Também, recentemente, foi mostrado que um modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) baseado numa extensão central do grupo Euclideano em $D = 2$ tem uma carga central igual àquela do caso $D = 4$ [5].

O estudo de teorias de campos em $D = 3$ apresenta vários aspectos interessantes das dimensões ímpares. No caso de 3 dimensões, modelos a temperatura nula apresentam propriedades semelhantes aos modelos em $D = 4$ a temperatura finita [6], e termos invariantes de gauge topologicamente não-triviais geram massa para os campos de gauge [7]. Outro aspecto interessante é que as partículas em $D = 3$ podem possuir spin real, pois o "little group" associado ao spin é Abeliano, ou seja, as partículas obedecem a uma estatísticas arbitrária: aparecem os chamados *anyons* [8]. Estes têm um papel importante no entendimento do efeito Hall quântico fracionário [9]. Foi, também, proposto por Laughlin [10] que um sistema planar de partículas obedecendo a uma estatística fracionária apresenta características de um supercondutor [11], apesar de fenomenologicamente violar as simetrias P e T. Um aspecto teórico importante no estudo dos anyons é que estes podem ser descritos como bósons ou férmions, com interação mediada por um campo de gauge de Chern-Simons [12]. Recentemente, mostrou-se que em uma teoria Abeliana de Chern-Simons-Maxwell (CSM) acoplada a campos de matéria, os modos de massa nula do campo de gauge são completamente eliminados do espaço de Hilbert, e que uma interação não-local (de natureza estatística) entre os campos de matéria (férmions ou bósons) torna-se dominante. Verificou-se, também, ser esta interação não-local a responsável pela alteração da estatística obedecida pelos campos de matéria [13]. Um outro resultado interessante das 3 dimensões, para o caso de CSM, é a relação entre o spin, s, e o parâmetro de massa, m : $s = \frac{m}{|m|}$, a qual evidencia a existência de dois possíveis estados de spin : $s = 1$ $(m > 0)$ e $s = -1$ $(m < 0)$ [14]. Esta análise leva–nos a concluir que o fóton descreve apenas 1 grau de liberdade físico em 3 dimensões espaço-temporais. Este resultado persiste também no caso do campo de CSM. Mais recentemente, a busca do entendimento do fenômeno da supercondutividade a altas temperaturas sem quebra de simetria de paridade levou a uma série de trabalhos que foram realizados por Dorey e Mavromatos [15, 16].

Com o advento da supersimetria [17], esta se mostrou uma ferramenta importante para a Teoria Quântica de Campos (TQC) em sua formulação Lagrangeana, principalmente na eliminação completa ou parcial de alguns problemas técnicos e conceituais como: colocar num mesmo multipleto bósons e férmions [18]; hierarquia de gauge [19] e, significativamente, a possibilidade de se construir modelos completamente livres de divergências no limite ultravioleta (Super-Yang-Mills com supersimetria estendida [20] e modelos-σ não-lineares em $D = 2$ [21]). O aparecimento das teorias de strings e a correspondente física na "world-sheet" (onde introduzindo campos de gauge, podemos classificar, usando os modelos de Schwinger [22], novas teorias de "strings" [23]) despertou a necessidade de supersimetrizar modelos de campos com dimensões menores que quatro($D < 4$), onde modelos como os σ não-lineares supersimétricos com $N = \frac{1}{2}$ [25] são vistos como configurações de campo de fundo [26] para a "string" heterótica; e quando introduzimos um potencial neste modelo-σ com supersimetria (p,q) sem torção, significa que estamos introduzindo um regulador infravermelho em modelos não-massivos[27]. Já, recentemente, está sendo investigada a conexão entre estes modelos com supersimetria $(2,2)$ e formulações de Landau-Ginsburg [28]. Nesta direção, Witten retoma a correspondência Calabi-Yau $\leftrightarrow$ Landau-Ginsburg [29], usando argumentos não baseados em invariância conforme e apresentando uma extensão da correspondência desta com uma "world-sheet" com supersimetria $(0,2)$ (que tem relação com modelos grande unificados) [30]. Outro fato relevante é que, a partir de soluções de vórtice [31] em uma teoria supersimétrica de Chern-Simons [32] com potencial de Higgs de sexta ordem que satisfaz equações tipo Bogomolny [33], surge naturalmente um modelo de gauge supersimétrico estendido do tipo $N{=}2$ [34].

O esquema de apresentação desta tese é como segue: no Capítulo 1, vamos ter em mente o modelo de Schwinger ($D = 2$) como base para os argumentos do aparecimento da anomalia de fatorização holomórfica [23], o que indica ser a massa do fóton imprescindível para uma teoria na "world-sheet". A contribuição deste capítulo consiste na investigação do comportamento de campos de gauge com supersimetrias $(1,0)$ e $(1,1)$ possuindo simetria conforme no regime quântico, e as suas relações com a carga central dos modelos conformes. O que se constata são indícios de uma correspondência entre os valores, c, desta carga central e a presença (no caso $(1,0)$) ou não (no caso $(1,1)$) de uma anomalia de fatorização [24].

No capítulo 2, dentro da visão de se trabalhar com soluções tipo vórtice em um modelo de Higgs Abeliano supersimétrico com termo de Chern-Simons [35], verificamos que, para uma (única) supersimetria $N = 1$ o estudo da álgebra de supercargas levam–nos a distingüir que: os termos toplógicos (tipo "kink" e "anti-kink") vêm do modelo auto-interagente e, diferentemente de outros autores, as soluções tipo fluxo magnético aparecem sem o termo de Chern-Simons [36].

Com o aparecimento de partículas de estatística arbitrária em $D = 3$, os anyons, houve a necessidade de se aprimorar a noção de estatística e de partículas indistingüíveis [37]. Uma generalização direta vem da deformação da álgebra de Lie [38], que tem como fundamento matemático a álgebra de Hopf quase-triangular [39]. Com esta generalização, podemos admitir um spin fracionário independente do número de dimensões. Dentro desta visão, o desenvolvimento das variáveis de paragrassmann [40] aparece como uma generalização das variáveis de Grassmann, o que nos leva diretamente a introduzir esta questão em modelos supersimétricos. Apesar destes modelos serem de cunho puramente teórico (e até matemático), verificamos que, em casos especiais, apresentam estreita relação com a geometria não-comutativa [41], a qual aparece como uma alternativa álgebrica para modelos como o de Weinberg-Glashow-Salam, com bons resultados fenomenológicos [42, 43].

Então, dentro da perspectiva de podermos acomodar num mesmo multipleto partículas escalares e partículas com spin fracionário, no Capítulo 3 devemos construir modelos clássicos supersimétricos (com um só parâmetro t) introduzindo como variáveis do setor "fermiônico" as variáveis de paragrassmann ($\theta^k = 0$ com $k = 3$), implicando que as transformações de supersimetria são raízes cúbicas das translações espaço-temporais, ou seja, a Hamiltoniana, H, é proporcional ao cubo dos geradores de supersimetria Q ($H \sim Q^3$). Estas variáveis de paragrassmann impõem–nos várias alterações nos conceitos de: derivada covariante de supersimetria, de regra de Leibnitz e expansão de Taylor em θ, as quais são desenvolvidas no texto. Dentro deste cenário, observamos que é possível construir ações que descrevam a dinâmica da partícula livre e oscilador harmônico, de maneira semelhante à supersimetria usual.

Seguem-se as Conclusões Gerais e Perspectivas Futuras, onde apresentaremos os resultados mais relevantes sobre os modelos aqui estudados, bem como daremos perspectivas de proseguimento dos trabalhos aqui abordados. Finalizando, seguem-se 3 Apêndices. No Apêndice A, apresentaremos as integrais a $1 - loop$ dos modelos dados no Capítulo 1; no Apêndice B, as relações de anticomutação para encontar a álgebra das supercargas dos modelos do Capítulo 2; no Apêndice C, são fornecidas, de forma generalizada, todas as expressões algébricas utilizadas no Capítulo 3.

Capítulo 1

Aspectos de Supersimetria Bidimensional Euclideana

Tendo em mente a consideração com supersimetrias (SUSY) de tipo (p, q), abordaremos aqui aqueles valores para p e q de maior relevância na análise das supersimetrias definidas na "world-sheet" das cordas, a saber: $(1,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$. Neste último caso, alguns resultados de interesse são apresentados na ref. [44]. Concentrar-nos-emos nos dois primeiros, quando estudaremos campos de gauge de fundo com simetria $U(1)$ [23] e efetuaremos cálculos a $1 - loop$ que, no caso de duas dimensões, é a única ordem que dá contribuições significativas; verificaremos se a Álgebra de Virasoro, via "operator product expansion" (OPE) dos tensores energia-momento, é satisfeita; também observaremos as cargas centrais e sua relação com propriedades de natureza diâmica [24].

1.1 Teoria Bidimensional Euclideana

Nesta seção, serão fornecidos os elementos fundamentais para a construção de modelos bidimensionais em termos da coordenadas holomórfica e anti-holomórfica, tendo como propósito a posterior formulação de modelos supersimétricos construídos em superespaços parametrizados por tais coordenadas.

1.1.1 O Grupo de Lorentz e Espinores de Majorana em 2 Dimensões Euclideanas

Em duas dimensões Euclideanas, pode-se fazer a seguinte transformação de coordenadas, levando em conta o grupo de simetria vigente:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \tag{1.1}$$

Com isto, definindo as coordenadas Euclideanas:

$$z = x_1 + ix_2 \quad \text{e} \quad \bar{z} = x_1 - ix_2 , \tag{1.2}$$

tem-se a seguinte atribuição de pesos de Lorentz:

$$\begin{aligned} z' = e^{-i\alpha} z \Rightarrow z \,, \partial_{\bar{z}} \quad &\longrightarrow \quad -1 \,, \\ \bar{z}' = e^{i\alpha} \bar{z} \Rightarrow \bar{z} \,, \partial_z \quad &\longrightarrow \quad 1 \,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

O elemento de "volume" e o tensor métrico resultam:

$$dx_1 \wedge dx_2 = \frac{i}{2} dz \, d\bar{z} , \tag{1.4}$$

e

$$\eta_{z\bar{z}} = \eta_{\bar{z}z} = \frac{1}{2} \text{ ou } \eta^{z\bar{z}} = \eta^{\bar{z}z} = 2 . \tag{1.5}$$

Os espinores de Dirac e Majorana possuem 2 componentes:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} . \tag{1.6}$$

A matrizes-γ em termos das coordenadas $(z,\bar{z})$ são:

$$\gamma^z \equiv \gamma^1 + i\gamma^2 \quad \text{e} \quad \gamma^{\bar{z}} \equiv \gamma^1 - i\gamma^2 \,, \tag{1.7}$$

onde

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.8}$$

Escolhendo a representação de Weyl, onde o operador que define a quiralidade é diagonal, encontramos

$$\gamma^3 = -i\gamma^1\gamma^2 = \tfrac{1}{4}(\gamma^z\gamma^{\bar{z}} - \gamma^{\bar{z}}\gamma^z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$
$$(\gamma^3)^\dagger = \gamma^3 \,, \tag{1.9}$$

Devemos verificar, para este caso, a conjugação de carga, a partir das equações de Dirac. Impondo-se a condição de Majorana, encontra-se que

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \Psi = (\Psi^*)^T , \tag{1.10}$$

onde o índice T significa transposto, λ e λ^* sendo, respectivamente, as componentes de quiralidade $(+1)$ e (-1) do espinor Ψ_M. Com isto, podemos construir a ação para este campo de Majorana, a partir da equação de Dirac sem massa:

$$S_{ferm.} = \int dz\, d\bar{z}\, i(\lambda^*\, \partial_z\, \lambda^* + \lambda\, \partial_{\bar{z}}\, \lambda) \,, \tag{1.11}$$

onde os pesos de Lorentz são $(+\frac{1}{2})$ para o campo componente λ e $(-\frac{1}{2})$ para a componente λ^*. As equações de movimento indicam que, "on-shell", estes campos são holomórfico e antiholomórfico, respectivamente.

1.1.2 Campo Escalar

Para a construção de uma ação, partimos de uma teoria de campos escalares reais. Para isto, usamos a ação de Klein–Gordon não-massiva,

$$S_{esc.} = -\int dz\, d\bar{z}\, (\partial_z \phi)(\partial_{\bar{z}} \phi) \,. \tag{1.12}$$

Veremos que é possível construir campos dentro de um espaço ampliado, os chamados supercampos, cuja versão em campos componentes readquirirá a forma usual, como uma soma de ações dos campos acima descritos. Esta ação livre supersimétrica de matéria deverá aparecer sob a forma da soma das expressões (1.11) e (1.12), ou seja,

$$S_{mat.} = \int dz\, d\bar{z}\, [-(\partial_z \phi)(\partial_{\bar{z}} \phi) + i\lambda^* \partial_z \lambda^* + i\lambda\, \partial_{\bar{z}} \lambda] \,. \tag{1.13}$$

1.2 Supersimetria

A partir das dimensões canônicas e dos pesos de Lorentz, vamos encontrar as transformações de simetria dos campos, as quais deixam a ação invariante, para o caso do modelo estar fora da camada de massa ("off-shell"). Por cálculo direto, verificaremos que, se fizermos as transformações,

$$\begin{aligned}
\delta\phi(z,\bar{z}) &= \epsilon\,\lambda(z,\bar{z}) - \bar{\epsilon}\,\lambda(z,\bar{z})\,, \qquad (1.14)\\
\delta\lambda(z,\bar{z}) &= -i\epsilon\, \partial_z \phi(z,\bar{z})\,,\\
\delta\lambda^*(z,\bar{z}) &= i\bar{\epsilon}\, \partial_{\bar{z}} \phi(z,\bar{z})\,,
\end{aligned}$$

com $[\epsilon] = [\bar{\epsilon}] = -1/2$, $[\phi] = 0$, $[\lambda] = [\lambda^*] = 1/2$ ($[..]$ indica a dimensão canônica), e pesos de Lorentz: para $\epsilon = -1/2$ e para $\bar{\epsilon} = -1/2$. Usando que $(\epsilon\,\lambda)^* = -\bar{\epsilon}\,\lambda^*$, a transformação da ação lê-se:

$$\delta S_{mat.} = \int dz\, d\bar{z}\, [-\epsilon\partial_z(\lambda\partial_{\bar{z}}\phi) + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}}(\lambda^*\partial_z\phi)]\,, \tag{1.15}$$

que é simplesmente uma derivada total. Procede-se agora a uma formulação que estende o conceito de espaço-tempo bidimensional: o superespaço.

1.2.1 Parametrização do Superespaço – Derivada Covariante

Para parametrizar o superespaço, necessitamos inserir coordenadas Grassmannianas. Elas são definidas pela sua propriedade de anticomutação (que está ligado ao princípio de exclusão de Pauli), implicando na sua nilpotência, ou seja,

$$\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0\,, \tag{1.16}$$

onde $\bar{\theta}$ só é definida se o superespaço é complexo nas variáveis de Grassmann. Logo, as coordenadas no superespaço são definidas como:

$$Z = (z, \bar{z}; \theta, \bar{\theta})\,, \tag{1.17}$$

com os pesos de Lorentz de $\theta = 1/2$ e $\bar{\theta} = -1/2$. Para os casos que deveremos considerar aqui, a saber, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, implementa-se a supersimetria no correspondente superespaço através das transformações abaixo:

$$(1,0) \Rightarrow \begin{cases} z' = z + i\epsilon\theta \\ \bar{z}' = \bar{z} \\ \theta' = \theta + \epsilon \end{cases} ,\ (0,1) \Rightarrow \begin{cases} z' = z \\ \bar{z}' = \bar{z} + i\bar{\epsilon}\bar{\theta} \\ \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\epsilon} \end{cases} , \tag{1.18}$$

e

$$(1,1) \Rightarrow \begin{cases} z' = z + i\epsilon\theta \\ \bar{z}' = \bar{z} + i\bar{\epsilon}\bar{\theta} \\ \theta' = \theta + \epsilon \\ \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\epsilon} \end{cases} . \tag{1.19}$$

Para encontrar os geradores destas transformações, usamos a expansão em série de Taylor para as derivadas no setor fermiônico (variáveis θ). É facilmente verificado, devido a

(1.16), que

$$f(z;\theta) \;=\; f(z;0) \,+\, \theta \,\left.\tfrac{\partial f(z;\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} \,, \tag{1.20}$$

para $f(z;\theta)$ uma função qualquer em z e θ. Isto define a atuação da derivada em relação à variável θ como abaixo:

$$\frac{\partial(\theta\, f(z))}{\partial\,\theta} \;\equiv\; \partial_\theta\,(\theta\, f(z)) \;=\; 1.f(z)\;. \tag{1.21}$$

A atuação da integral nesta variável (integral Bereziniana) [53] resulta:

$$\int d\theta\,\theta \;\Rightarrow\; \partial_\theta\,\theta \;=\; 1\;. \tag{1.22}$$

Com estas ferramentas, encontramos os geradores Q e $\bar{Q}$ das translações no superespaço, que serão importantes para definirmos as derivadas covariantes de SUSY. Exponenciando-se estes geradores, e trabalhando-se com transformações finitas, estes podem ser representados em termos de operadores diferenciais no superespaço. Com isto, para o caso $(1,0)$ e com θ real, temos que

$$e^{i\,\epsilon\,Q}\,\Phi(z,\bar{z};\theta)\,e^{-i\,\epsilon\,Q} \;=\; \Phi(z',\bar{z}';\theta') \;\Rightarrow\; [Q\;\Phi] \;=\; -i(\partial_\theta \,+\, i\theta\partial_z)\,\Phi\;; \tag{1.23.a}$$

para o caso $(0,1)$ (com $\bar{\theta}$ real):

$$\bar{Q} \;=\; -i\,(\partial_{\bar{\theta}} \,+\, i\bar{\theta}\partial_{\bar{z}})\;. \tag{1.23.b}$$

A partir das expressões acima, podemos encontrar as derivadas covariantes de supersimetria, D_θ e $D_{\bar{\theta}}$, usando que

$$\{Q\,,\,D_\theta\} \;=\; \{Q\,,\,D_{\bar{\theta}}\} \;=\; 0\;, \tag{1.24}$$

o que sugere as seguintes representações para as derivadas covariantes:

$$D_\theta \;=\; \partial_\theta \,-\, i\theta\partial_z \quad \text{e} \quad D_{\bar{\theta}} \;=\; \partial_{\bar{\theta}} \,-\, i\bar{\theta}\partial_{\bar{z}}\;. \tag{1.25}$$

Estes serão os geradores e derivadas covariantes que iremos utilizar, tanto para o caso $(1,0)$ (e $(0,1)$), como para o caso $(1,1)$. A seguir serão discutidos em detalhe os modelos em que estamos interessados.

1.3 Modelo (1,0)

Para desenvolvermos este modelo, iniciamos construindo o seu correspondente superespaço: são adotadas as coordenadas (1.2), a parametrização relativa ao caso $(1,0)$ e a derivada covariante D_θ.

Como vamos elaborar uma teoria de campos vetoriais de gauge, os campos de matéria serão carregados. Portanto, são tomados complexos:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \quad \text{e} \quad \phi^* = \phi_1 - i\phi_2 \ , \tag{1.26}$$

com ϕ_1 e ϕ_2 campos escalares reais, e com

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \quad \text{e} \quad \lambda^* = \lambda_1 - i\lambda_2 \ , \tag{1.27}$$

com λ_1 e λ_2 campos espinoriais reais. Usando a expansão (1.20), podemos encontrar a expressão para os supercampos complexos Φ e Φ^*:

$$\Phi(z,\bar{z};\theta) = \phi(z,\bar{z}) + \theta\lambda(z,\bar{z}) \quad \text{e} \quad \Phi^*(z,\bar{z};\theta) = \phi^*(z,\bar{z}) - \theta\lambda^*(z,\bar{z}) \ . \tag{1.28}$$

A simetria-$U(1)$ introduzida é dada por:

$$\Phi = e^{iq\,\Lambda}\,\Phi \ , \tag{1.29}$$

onde q é o fator que indica o valor da carga $U(1)$ e Λ é o parâmetro de simetria. Como no caso usual, fazendo Λ ser um parâmetro local, ou seja

$$\Lambda = \Lambda(z, \bar{z}; \theta) , \tag{1.30}$$

temos que, para a teoria ficar homogênea, é necessário redefinir as derivadas do supercampo Φ em relação a todas as coordenadas do superespaço, de maneira a termos a mesma variação que (1.29). Assim, construímos as chamadas derivadas covariantes de gauge (e de SUSY), ficando

$$\nabla_\theta = D_\theta - i\, g\, q\, \Gamma_\theta , \tag{1.31.a}$$

e

$$\nabla_z = \partial_z - i\, g\, q \Gamma_z \quad \text{e} \quad \nabla_{\bar{z}} = \partial - i\, g\, q\, \Gamma_{\bar{z}} , \tag{1.31.b}$$

onde g é a constante de acoplamento e os campos Γ são as superconexões de gauge com as expressões:

$$\Gamma_\theta = \gamma + \theta V_z \qquad , \qquad \delta_{gauge} \Gamma_\theta = \frac{1}{g}\, D_\theta \Lambda . \tag{1.32.a}$$

Através do chamado vínculo convencional $\Gamma_z = i D_\theta \Gamma_\theta$ [53], temos:

$$\Gamma_z = i\, V_z + \theta\, \partial_z\, \gamma \qquad , \qquad \delta_{gauge}\, \Gamma_z = \frac{1}{g} \partial_z\, \Lambda , \tag{1.32.b}$$

e, independentemente,

$$\Gamma_{\bar{z}} = i\, V_{\bar{z}} + \theta\, (\eta^* + \partial_{\bar{z}}\, \gamma) . \tag{1.32.c}$$

As derivadas covariantes (1.3) devem obedecer à álgebra graduada de SUSY, ou

$$\begin{aligned} \{\nabla_\theta\,,\,\nabla_\theta\} &= -2\,i\,\nabla_z \quad , \quad [\nabla_\theta\,,\,\nabla_{\bar z}] = -i\,g\,q\,W_{\bar\theta}\,, \\ \{\nabla_\theta\,,\,\nabla_z\} &= -i\,g\,q\,w_{z\theta} \quad , \quad [\nabla_z\,,\,\nabla_{\bar z}] = -i\,g\,q\,\Omega_{z\,\bar z}\,, \end{aligned} \tag{1.33}$$

onde $W_{\bar\theta}$, $w_{z\theta}$ e $\Omega_{z\,\bar z}$, são os tensores cujos pesos de Lorentz estão explícitos nos (sub)índices. Para completar a álgebra com as identidades de Jacobi graduadas $[\nabla_\alpha\,,\,[\nabla_\beta\,,\,\nabla_\gamma\}\}$ + cíclicos $=0$, temos para as diversas combinações que

$$\begin{aligned} 3[\nabla_\theta\,,\,\{\nabla_\theta\,,\,\nabla_\theta\}] = 0 \;\Rightarrow\; 3[\nabla_\theta\,,\,-i2\nabla_z] &= -6\,g\,q\,w_{z\theta} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\; w_{z\theta} &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned} [\nabla_{\bar z}\,,\,\{\nabla_\theta\,,\,\nabla_\theta\}] - \{\nabla_\theta\,,\,[\nabla_z\,,\,\nabla_\theta]\} + \{\nabla_\theta\,,\,\{\nabla_\theta\,,\,\nabla_z\}\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2i\,[\nabla_z\,,\,\nabla_{\bar z}] - (i\,g\,q)\{\nabla_\theta\,,\,W_{\bar\theta}\} + (-i\,g\,q)\{\nabla_\theta\,,\,W_{\bar\theta}\} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\,g\,q\,\Omega_{z\,\bar z} - 2\,i\,g\,q\,D_\theta\,W_{\bar\theta} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega_{z\,\bar z} = i\,D_\theta\,W_{\bar\theta}\,, \end{aligned} \tag{1.35}$$

onde, fazendo cálculos explícitos para encontrar os tensores, chega-se a:

$$\begin{aligned} \Omega_{z\,\bar z} &= \partial_z\,\Gamma_{\bar z} - \partial_{\bar z}\,\Gamma_z\,, \\ W_{\bar\theta} &= \eta^* + \bar\theta\,(\partial_z\,V_{\bar z} - \partial_{\bar z}\,V_z)\,. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Agora, podemos construir uma superação que seja um escalar de Lorentz (observado o peso de cada termo) e com dimensão canônica nula. Como estaremos interessados em desenvolver um modelo de duas dimensões na "world–sheet" das cordas, vamos utilizar a normalização destas, de maneira que a superação (real) tome a forma:

$$S = \frac{i}{4\pi}\int dz\,d\bar z\,d\theta\;\left[(\nabla_{\bar z}\Phi^*)(\nabla_\theta\Phi) + (\nabla_{\bar z}\Phi)(\nabla_\theta\Phi^*)\right]\,. \tag{1.37}$$

Quando da formulação em campos componentes, (1.37) lê-se:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4\pi}\int dz\, d\bar{z}\, \{[(\partial_{\bar{z}}\varphi^*)(\partial_z\varphi) + (\partial_{\bar{z}}\varphi)(\partial_z\varphi^*) + i(\lambda\partial_{\bar{z}}\lambda^* + \lambda^*\partial_{\bar{z}}\lambda)] + \\
&+ gq[-2i\lambda V_{\bar{z}}\lambda^* - i\lambda\eta\varphi^* - i\lambda^*\eta\varphi + \\
&+ (\partial_{\bar{z}}\varphi^*)V_z\varphi - V_{\bar{z}}\varphi^*(\partial_z\varphi) - (\partial_{\bar{z}}\varphi)V_z\varphi^* + V_{\bar{z}}\varphi(\partial_z\varphi^*)] + \\
&- 2g^2q^2V_{\bar{z}}\varphi^*V_z\varphi\}\,. \qquad (1.38)
\end{aligned}$$

Com isto, estamos em posição de encontrar as contibuições quânticas para o modelo.

1.3.1 Contribuições a 1–loop

São usados os propagadores no espaço dos momenta:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(z_a)\varphi^*(z_b)\rangle &= \langle\varphi^*(z_a)\varphi(z_b)\rangle = \frac{-2\pi\,\delta^2(z_a - z_b)}{k^2}\,, \\
\langle\lambda(z_a)\lambda^*(z_b)\rangle &= (-\langle\lambda^*(z_a)\lambda(z_b)\rangle) = \frac{-2\pi\,k_z\,\delta^2(z_a - z_b)}{k^2}\,. \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Com estes, podemos calcular, a partir dos vértices extraídos da ação (1.38), as contribuições a $1-loop$ para este modelo. Os vértices são:

$$\begin{aligned}
Vert. &= \frac{g\,q}{4\,\pi}\,\{(\partial_{\bar{z}}\varphi^*)\,V_z\varphi - V_{\bar{z}}\,\varphi^*\,(\partial_z\varphi) - (\partial_{\bar{z}}\varphi)\,V_z\,\varphi^* + V_{\bar{z}}\,\varphi\,(\partial_z\,\varphi^*) + \\
&+ 2\,i\,\lambda\,V_{\bar{z}}\,\lambda^* + i\,\eta^*\,\varphi^*\lambda + i\,\eta^*\,\varphi\,\lambda^*\} - \frac{g^2\,q^2}{2\,\pi}V_{\bar{z}}\,\varphi^*\,V_z\,\phi\,, \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

onde o procedimento geral para este cálculo está indicado no Apêndice A. Seguindo, verificamos que a soma total das contribuições a $1 - loop$ leva–nos à ação efetiva

$$S_{eff.} = \frac{g^2\,q^2}{8\,\pi}\int dz\,d\bar{z}\left[V_{\bar{z}}\,V_z + V_{\bar{z}}\,\frac{\partial_z\,\partial_z}{\Box}\,V_{\bar{z}} + \frac{1}{2}\eta^*\,\frac{\partial_{\bar{z}}}{\Box}\,\eta^*\right]\,, \qquad (1.41)$$

onde observamos que as contribuições infinitas se cancelam. O primeiro termo do segundo membro, apesar de semelhante a um termo de massa, representa de fato uma anomalia (de fatorização) da teoria [45]. Tal termo é, entretanto, crucial para a simetria de gauge do modelo.

O que vamos calcular agora é o valor da carga central referente à simetria conforme, e qual a sua relação com o termo de anomalia acima mencionado. Para isto, reconsidera-se a ação (1.38) e se analisa a carga conforme do setor holomórfico, usando a formulação padrão para as "strings" para o cálculo do tensor energia-momento, via acoplamento com a gravitação, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2\pi}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\pi}{e}\frac{\delta S'}{\delta e_{a'}{}^{(\mu}} e_{\nu)\,a'}\,, \tag{1.42.a}$$

onde

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}{}^{a'}\, e_{\nu}{}^{b'}\, \eta_{a'b'}\,, \tag{1.42.b}$$

com $g_{\mu\nu}$ sendo o tensor métrico do sistema de coordenadas "curvilíneas", $\eta_{a'b'}$ sendo o tensor métrico do sistema ortonormal do espaço tangente, $e \equiv det(e_{\mu}{}^{a'})$, onde $e_{\mu}{}^{a'}$ é a "vielbein" e os parênteses na eq. (1.42.a) representam a simetria entre os índices. O fator 2π na expressão acima, apesar de não ser convencional em teoria de campos, é padrão em teoria de "strings". Com isto, encontramos, observando os termos que não dependem da métrica, o seguinte tensor energia-momento:

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{2}\left\{(\partial_z\varphi^*)(\partial_z\varphi) + g\,q\left[(\partial_z\varphi^*)V_z\varphi - (\partial_z\varphi)V_z\varphi^*\right]\right\}\,. \tag{1.43}$$

Usando o teorema de Wick e lembrando que neste caso a função de correlação é

$$\langle\varphi(z)\,\varphi^*(w)\rangle = -2\,ln(z-w)\,, \tag{1.44}$$

chega-se a

$$\langle\, T(z)\, T(w)\, \rangle \;=\; \frac{1}{(z\,-\,w)^4} \tag{1.45.a}$$

ou

$$c \;=\; 2\,, \tag{1.45.b}$$

onde se usou que o campo de gauge é de fundo. Esta é a carga central do modelo $(0,1)$. Ressaltamos que este resultado tem um papel importante na classificação dos modelos de strings [23, 46].

1.4 Modelo (1,1)

Este modelo apresenta, contrariamente ao caso anterior, campos com as duas possíveis quiralidades. Isto está representado pela presença do parâmetro $\bar{\theta}$ e, da mesma forma que no caso anterior, construiremos os supercampos carregados a partir da complexificação de supercampos reais. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\Phi(z,\bar{z};\theta,\bar{\theta}) &= \varphi(z,\bar{z}) + \theta\,\lambda(z,\bar{z}) - \bar{\theta}\,\eta^*(z,\bar{z}) + \theta\,\bar{\theta}\,h(z,\bar{z})\,, \\
\Phi^*(z,\bar{z};\theta,\bar{\theta}) &= \varphi^*(z,\bar{z}) + \theta\,\eta(z,\bar{z}) - \bar{\theta}\,\lambda^*(z,\bar{z}) + \theta\,\bar{\theta}\,h^*(z,\bar{z}),
\end{aligned} \tag{1.46}$$

onde $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2$, $\lambda = \lambda_1 + i\,\lambda_2$, $\eta = \lambda_1^* + i\,\lambda_2^*$, $h = h_1 + i\,h_2$ com a mesma simetria de fase (1.29). As superconexões espinoriais de gauge são

$$\begin{aligned}
\Gamma_\theta(z,\bar{z};\theta,\bar{\theta}) &= \gamma + \theta\,V_z - \bar{\theta}\,f - \theta\,\bar{\theta}\,\rho\,, \\
\Gamma_{\bar{\theta}}(z,\bar{z};\theta,\bar{\theta}) &= \gamma^* + \bar{\theta}\,V_{\bar{z}} + \theta\,f^* - \theta\,\bar{\theta}\,\rho^*\,,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

onde, para completar a álgebra de supersimetria, as superconexões de gauge vetoriais (usando o vínculo convencional) são

$$\Gamma_z = i\, D_\theta\, \Gamma_\theta \qquad \text{e} \qquad \Gamma_{\bar z} = i\, D_{\bar\theta}\, \Gamma_{\bar\theta}\,. \tag{1.48}$$

Observe que, neste caso, os supercampos de gauge, Γ_z e $\Gamma_{\bar z}$, não são independentes. A superação deste modelo fica:

$$S = \frac{1}{4\pi}\int dz\, d\bar z\, d\theta\, d\bar\theta\, (\nabla_{\bar\theta}\Phi^*)(\nabla_\theta\Phi)\,, \tag{1.49}$$

onde as derivadas covariantes são definidas por

$$\nabla_\theta = D_\theta - i\, g\, q\, \Gamma_\theta \qquad \text{e} \qquad \nabla_{\bar\theta} = D_{\bar\theta} - i\, g\, q\, \Gamma_{\bar\theta}\,. \tag{1.50}$$

q tem a mesma definição que a dada em (1.29). Para os cálculos dos campos componentes, os comutadores não-nulos da álgebra de supersimetria são

$$\begin{aligned} [\nabla_\theta\,,\, \nabla_{\bar z}] &= -i\, g\, q\, W_{\bar\theta} \quad , \quad & [\nabla_{\bar\theta}, \nabla_z] &= -i\, g\, q\, W_\theta\,, \\ [\nabla_z\,,\, \nabla_{\bar z}] &= -i\, g\, q\, \Omega_{z\bar z} \quad , \quad & \{\nabla_\theta\,,\, \nabla_{\bar\theta}\} &= -i\, g\, q\, w_{\theta\bar\theta}\,, \end{aligned} \tag{1.51}$$

e, tendo-se que ∇_θ $(\nabla_{\bar\theta})$ comuta com ∇_z $(\nabla_{\bar z})$, e as expressões para os tensores são:

$$\begin{aligned} W_\theta &= \rho - \bar\theta\, F_{z\bar z} - \theta\,\partial_z f - i\theta\bar\theta\,\partial_z\,\rho^*\,, \\ W_{\bar\theta} &= \rho^* + \theta\, F_{z\bar z} - \bar\theta\,\partial_{\bar z} f + i\theta\bar\theta\,\partial_{\bar z}\,\rho\,, \\ \Omega_{z\bar z} &= i\, F_{z\bar z} + \theta\,\partial_z\,\rho^* - \bar\theta\,\partial_{\bar z}\,\rho - \theta\bar\theta\,\partial_z\,\partial_{\bar z}\, f\,. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Com isto, (1.49) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi}\int dz d\bar z\, \{\, (\partial_{\bar z}\varphi^*)(\partial_z\varphi) - i\lambda\partial_{\bar z}\eta - i\eta\partial_{\bar z}\lambda + i\lambda^*\partial_z\eta^* + i\eta^*\partial_z\lambda^* + h^*h + \\ &+ gq\,[-V_{\bar z}\varphi^*(\partial_z\varphi) + (\partial_{\bar z}\varphi^*)V_z\varphi - (\partial_{\bar z}\varphi)V_z\varphi^* + V_{\bar z}\varphi(\partial_z\varphi^*) + i2\lambda V_{\bar z}\eta + i2\lambda^* V_z\eta^* + \end{aligned}$$

$$- \quad \rho^*\varphi^*\lambda + \rho^*\varphi\eta - \lambda^*\rho\varphi + \eta^*\rho\varphi^*] - 2g^2q^2\left[V_{\bar{z}}\varphi^* V_z\varphi\right]\Big\}\,, \tag{1.53}$$

onde o papel de fotino é feito por ρ (e ρ^*).

1.4.1 Contribuições a 1-loop

De maneira análoga, os propagadores relevantes são equivalentes aos dados em (1.39), ou seja:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(z_a)\,\varphi^*(z_b)\rangle = \langle\varphi^*(z_a)\,\varphi(z_b)\rangle &= \frac{-\,2\,\pi\,\delta^2(z_a\,-\,z_b)}{k^2}\,,\\
\langle\lambda(z_a)\,\eta(z_b)\rangle &= \frac{-\,2\,\pi\,k_z\,\delta^2(z_a\,-\,z_b)}{k^2}\,,\\
\langle\lambda^*(z_a)\,\eta^*(z_b)\rangle &= \frac{2\,\pi\,k_{\bar{z}}\,\delta^2(z_a\,-\,z_b)}{k^2}\,.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Então, adotando o esquema da teoria de perturbação, usaremos os vértices:

$$\begin{aligned}
Vert. \;&=\; \frac{g\,q}{4\,\pi}\,\{(\partial_{\bar{z}}\varphi^*)\,V_z\varphi\,-\,V_{\bar{z}}\,\varphi^*\,(\partial_z\varphi)\,-\,(\partial_{\bar{z}}\varphi)\,V_z\,\varphi^*\,+\,V_{\bar{z}}\,\phi\,(\partial_z\,\varphi^*)\,+\\
&+\;\; 2\,i\,\lambda\,V_{\bar{z}}\,\eta\,+\,2\,i\,\lambda^*\,V_z\,\eta^*\,-\,\rho^*\,\varphi^*\lambda\,+\,\rho^*\,\varphi\,\eta\,-\,\lambda^*\,\rho\,\varphi\,+\,\eta^*\,\rho\,\varphi^*\}\,+\\
&-\;\; \frac{g^2\,q^2}{2\,\pi}\,V_{\bar{z}}\,\varphi^*\,V_z\,\phi\,,
\end{aligned} \tag{1.55}$$

A resposta final para os contribuições a "$1-loop$" é dada pela ação efetiva

$$S_{eff} = \frac{q^2\,g^2}{8\,\pi}\int dz\,d\bar{z}\left\{V_{\bar{z}}\,V_z\,+\,V_z\frac{\partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}}{\Box}V_z\,+\,V_{\bar{z}}\frac{\partial_z\,\partial_z}{\Box}V_{\bar{z}}\,-\,\frac{1}{2}\,\rho\frac{\partial_{\bar{z}}}{\Box}\rho\,+\,\frac{1}{2}\,\rho^*\frac{\partial_z}{\Box}\rho^*\right\}\,. \tag{1.56}$$

Observe que o primeiro termo em (1.56) é o termo de massa gerado dinamicamente, como acontece no modelo de Schwinger [47, 48]. Agora, como se procedeu na seção 1.3, obtém-se

$$T(z)\,\equiv\,T_{zz}(z)\,=\,-\,\frac{1}{2}\,\{(\partial_z\,\varphi^*)\,(\partial_z\,\varphi)\,-\,2\,i\,\eta\,\partial_z\,\lambda\,+\,g\,q\,[(\partial_z\,\varphi^*)\,V_z\,\varphi\,-\,(\partial_z\,\varphi)\,V_z\,\varphi*]\}\,, \tag{1.57}$$

cuja álgebra tensorial é dada por

$$\langle T(z)\, T(w) \rangle = 0\,, \tag{1.58.a}$$

do que segue

$$c = 0. \tag{1.58.b}$$

O desaparecimento da carga central, corresponderia, à primeira vista, a uma teoria trivial, sem estados físicos, no sentido de representações da álgebra de Virasoro, se a supersimetria $(1,1)$ da teoria clássica não fosse quebrada, a nível quântico, através do termo tipo-massa da expressão (1.56), que é gerado dinamicamente.

1.5 Conclusão

Serão feitos a seguir alguns comentários sobre os cálculos que foram apresentados. De acordo com as discussões da ref. [23], a dinâmica de campos de gauge tem um papel importante no esquema de classificação dos modelos de "strings" e, possivelmente, na questão da quebra de supersimetria nas "superstrings". Portanto, faz-se necessário um melhor entendimento das propriedades quânticas dos modelos que envolvem campos de gauge bidimensionais acoplados a campos de matéria através da supersimetria. Foram propostas teorias de gauge Abelianas com supersimetrias $(1,0)$ (ou $(0,1)$) e $(1,1)$. Os resultados encontrados mostram que, em tais modelos supersimétricos, aparece uma anomalia na fatorização holomórfica da parte da ação referente ao campo de gauge no caso do modelo $(1,0)$ (ou $(0,1)$). A eq. (1.41) apresenta o contratermo de Quillen, necessário para reforçar a invariância de gauge da ação efetiva quando da quebra da fatorização. Por outro lado, calculamos a carga central do modelo $(1,0)$ (ou $(0,1)$) e verificamos, usando a eq. (1.45.a), que $c \neq 0$. A carga central sinaliza a presença de uma anomalia (contratermo de

Quillen quando $c = 2$ para o modelo $(1, 0)$ (ou $(0, 1)$)) ou geração dinâmica de massa [44] (modelo tipo Schwinger, com $c = 0$ para o modelo $(1, 1)$) no contexto da supersimetria bidimensional Euclideana. Isto é relevante para cálculos exatos de funções de partição sobre superfícies de Riemann. Resta a ser analisada a generalização dos valores de c para outros relevantes modelos de gauge com supersimetria (p, q).

Capítulo 2

Cargas Centrais e Supersimetria Simples em (2+1) Dimensões

A álgebra da SUSY simples em (2+1) dimensões é gerada por uma carga espinorial real de duas componentes, Q_a, com relações operatoriais expressas por

$$\{Q_a\,,\,Q_b\} \;=\; 2\gamma^{\mu}{}_{ab}\,P_{\mu} \tag{2.1.a}$$

e

$$[Q_a\,,\,P_{ab}] \;=\; 0\,, \tag{2.1.b}$$

onde P_{ab} é o gerador das translações. O propósito central deste capítulo é mostrar, através de modelos Lagrangeanos explícitos, que a presença em tais modelos de configurações de campo com topologia não-trivial induz um termo de carga central na relação operatorial (2.1.a). Este resultado (conf. [36]) é uma contribuição original ao assunto e se constitui na versão 3-dimensional dos resultados encontrados por Olive e Witten no trabalho da ref. [49].

Para reconhecer se um modelo quântico de campos é consistente com supersimetria, é necessário expressar os geradores das transformações supersimétricas (supercargas) como funcionais dos campos envolvidos para, então, calcular as relações de comutação e anticomutação destas supercargas. Deste ponto-de-vista, vamos analisar passo-a-passo, como contribuem para a álgebra de correntes a tempos iguais, os vários termos consistentes com as simetrias internas e espaço-temporais que podem aparecer num modelo de SUSY em $(2+1)$ dimensões. Através desta álgebra de correntes, que tem a importante propriedade de revelar características locais do modelo específico em consideração, detecta-se a presença de eventuais termos de Schwinger [50], fundamentais no processo de quantização.

Apesar de não ser o procedimento aqui adotado, vale a pena ressaltar que, para verificar a consistência de um modelo quântico com a supersimetria, pode-se, alternativamente, proceder a uma análise das identidades de Ward decorrentes desta invariância.

Antes de passarmos aos modelos supersimétricos específicos, serão dados alguns detalhes concernentes à álgebra espinorial. Como necessitamos de matrizes simétricas para fazer o mapeamento de vetores com um índice Lorentz em vetores com dois índices espinoriais, temos que construir matrizes obtidas a partir das matrizes-γ consistentes com a métrica $\eta^{\mu\nu} = (-;+,+)$. Estas são:

$$(\Gamma^0)^{ab} = (\gamma^0)^{ad} E_d{}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$(\Gamma^1)^{ab} = (\gamma^1)^{ad} E_d{}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^2)^{ab} = (\gamma^2)^{ad} E_d{}^b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

com $E_d{}^b = (\gamma^0)_d{}^b$, que obedecem à álgebra

$$(\Gamma^\mu)^{ab}(\Gamma^\nu)_{ab} = \eta^{\mu\nu} \quad ,$$
$$(\Gamma^\mu)^{ab}(\Gamma^\nu)_{bd} = \eta^{\mu\nu}\delta^a{}_d - i\,\epsilon^{\mu\nu}{}_\rho(\Gamma^\rho)^a{}_d \quad . \tag{2.3}$$

Agora, utilizando a matriz de conjugação de carga, C_{ab}, a qual funciona como um tensor métrico espinorial:

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$C_{ab} = -C_{ba} = C^{ab}$ e $C_{ab}C^{cd} = \delta^c{}_{[a}\delta^d{}_{b]}$, podemos escrever as matrizes-Γ com um índice superior (ou inferior). Estas são

$$(\Gamma^0)^{ab}C_{bc} = (\Gamma^0)^a{}_c = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$(\Gamma^1)^{ab}C_{bc} = (\Gamma^1)^a{}_c = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \; (\Gamma^2)^{ab}C_{bc} = (\Gamma^2)^a{}_c = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} , \tag{2.5}$$

para as quais são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (\Gamma^\mu)_a{}^b(\Gamma^\nu)^a{}_b &= -\eta^{\mu\nu} , \\ (\Gamma^\mu)_{ab}(\Gamma^\nu)^b{}_d &= -\eta^{\mu\nu}C_{da} - i\,\epsilon^{\mu\nu\rho}(\Gamma_\rho)_{ad} , \\ (\Gamma^\mu)_a{}^b(\Gamma^\nu)_b{}^d(\Gamma^\rho)_d{}^a &= -i\,\epsilon^{\mu\nu\rho} , \\ (\Gamma^\mu)_{ab}(\Gamma^\nu)^b{}_c(\Gamma^\rho)^c{}_d &= i\,\epsilon^{\mu\nu\rho}C_{da} + \eta^{\rho\nu}(\Gamma^\mu)_{da} - \eta^{\rho\mu}(\Gamma^\nu)_{da} - \eta^{\mu\nu}(\Gamma^\rho)_{da} . \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.1 Modelo Escalar Auto-Interagente com SUSY-N=1

A parametrização do supercampo escalar através da expansão em série de Taylor na variável espinorial anti-comutante θ_a lê-se:

$$\Phi(x,\theta) = A(x) + \theta^a\psi_a(x) - \theta^2 F(x) ; \tag{2.7}$$

$A(x)$ é um campo escalar físico, $\psi_a(x)$ representa um campo fermiônico e $F(x)$ é um campo auxiliar.

A derivada covariante de supersimetria que utilizaremos é dada por[1]:

$$D_a = \partial_a + i\,\theta^b\,\partial_{ab} , \tag{2.8.a}$$

[1] As notações seguidas aqui são dadas na ref. [53]

$$\{D_a\,,\,D_b\} \;=\; 2P_{ab}\,. \tag{2.8.b}$$

A ação renormalizável com supersimetria-N=1 e matéria em auto-interação pode ser escrita no superespaço como

$$S_{escalar} \;=\; \int d^3x\, d^2\theta \left\{ -\frac{1}{2}\,(D_a\,\Phi)^2 \,+ \frac{1}{2}\,m\,\Phi^2 \,+\, \frac{\lambda}{8}\,\Phi^4 \right\}\,, \tag{2.9}$$

onde m é um parâmetro de massa e λ uma constante de acoplamento adimensional.

Usando a definição da integral de Berezin ($\int d^2\theta \;=\; D^2|_{\theta=0}$), encontramos a ação em componentes:

$$\begin{aligned} S_{escalar} \;&=\; \int d^3x \,\Big\{\; \tfrac{1}{2}\,\left[\tfrac{1}{2}(\partial_{ab}\,A)(\partial^{ab}\,A) \,+\, \psi^a\,i\,\partial_a{}^b\,\psi_b \,+\, F^2\right] \;+ \\ &+\; m\,(\psi^2\,+A\,F) \,+\, \tfrac{\lambda}{2}\,(3\,\psi^2\,A^2\,+\,A^3\,F)\;\Big\}\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde as transformações de supersimetria dos campos envolvidos são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta\,A \;&=\; -\epsilon^a\,\psi_a\,, \\ \delta\,\psi_a \;&=\; -\epsilon^b\,(C_{ab}\,F\,+\,i\partial_{ab}A)\,, \\ \delta\,F \;&=\; -\epsilon^b\,i\,\partial_b{}^a\,\psi_a\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como queremos trabalhar com um modelo com dinâmica na camada de massa ("on shell"), ou seja, valendo as equações de movimento para o campo auxiliar, temos

$$\frac{\partial\,L}{\partial\,F} \;=\; F + m\,A + \frac{\lambda}{2}\,A^3 \;=\; 0 \longrightarrow F \;=\; -\left[m\,A\,+\,\frac{\lambda}{2}\,A^3\right]\,, \tag{2.12}$$

que, substituindo na ação (2.10), leva a

$$\begin{aligned} S_{escalar} \;&=\; \int d^3x \,\Big\{\; \tfrac{1}{2}\,\left[\tfrac{1}{2}(\partial_{ab}\,A)(\partial^{ab}\,A) \,+\, \psi^a\,i\,\partial_a{}^b\,\psi_b\right] \,+\, m\,\psi^2 \,+\, \tfrac{3}{2}\,\lambda\,\psi^2\,A^2 \;+ \\ &-\; \tfrac{1}{2}\,m^2\,A^2 \,-\, \tfrac{1}{2}\,m\,\lambda\,A^4 \,-\, \tfrac{1}{8}\,\lambda^2\,A^6\;\Big\}\,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

a qual é, agora, invariante sob as transformações:

$$\begin{aligned}
\delta A &= -\epsilon^a \psi_a , \\
\delta \psi_a &= -\epsilon^b \left[C_{ab} \left(-m A - \frac{1}{2} \lambda A^3 \right) + i \partial_{ab} A \right] ,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

sendo que a última expressão em (2.11) torna-se a equação de movimento para o campo ψ^a, ou seja,

$$i \partial^{ab} \psi_b + m \psi^a + \frac{3}{2} \lambda \psi^a A^2 = 0 . \tag{2.15}$$

De posse deste modelo com supersimetria, deseja-se passar agora ao cálculo da corrente de Noether em termos dos campos componentes. Do fato de que a supersimetria é uma invariância da ação, e não da Lagrangeana, tem-se que encontrar duas contribuições à corrente: um termo provém do resultado que expressa a variação da ação como uma derivada total; o outro termo é a usual contribuição à corrente advindo das variações individuais dos campos.

2.1.1 Termo Devido à Invariância da Ação

Este é o termo que está relacionado com a invariância de SUSY da própria ação:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^3x \, d^2\theta \, \delta L = \epsilon^c \int d^3x \left[- \partial_{ab} (\delta_c{}^a D^b L) \right] \Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \; \Xi_c{}^{ab} &= - i \, \delta_c{}^a D^b L|_{\theta=0} .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

A partir deste momento, ao colocarmos uma barra vertical no final das expressões, significa que estamos tomando o valor destas para $\theta = 0$. Podemos, então, encontrar a primeira contribuição à corrente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} D^b \left[\Phi D^2 \Phi \right] | &= \frac{1}{2} \left[(D^b \Phi)(D^2 \Phi) + \Phi D^b D^2 \Phi \right] | = \frac{1}{2} \left[\psi^b F + i A \partial^{ab} \psi_a \right] = \\
&= -\frac{1}{2} m A \psi^b - \frac{\lambda}{4} A^3 \psi^b + \frac{i}{2} A \partial^{ab} \psi_a , \\
\frac{1}{2} m D^b \Phi^2 | &= m A \psi^b ,
\end{aligned}$$

$$\frac{\lambda}{8}\, D^b\, \Phi^4 \,| \quad = \quad \frac{\lambda}{2}\, A^3\, \psi^b \,, \tag{2.17}$$

do que resulta

$$\Xi^{ab}{}_c = \frac{i}{2}\, \delta^a{}_c \left\{ iA\, \partial^{bd}\, \psi_d \,+\, m\, A\, \psi^b \,+\, \frac{\lambda}{2}\, A^3\, \psi^b \right\} . \tag{2.18}$$

2.1.2 Termo Devido à Variação dos Campos Componentes

Para encontrarmos este termo, faremos a variação total da Lagrangeana e usaremos as tranformações de supersimetria dos campos componentes. Como vamos fazer os cálculos "on shell", usaremos as equações de movimento:

$$\begin{aligned}
\partial^t{}_p \left(\frac{\partial\, L}{\partial\, \partial^t{}_p X}\, \delta X \right) \;&=\; \partial^t{}_p \left\{ \frac{1}{2} \left[i\, \frac{\partial\, (\psi^a\, \partial_a{}^b\, \psi_b)}{\partial\, \partial^t{}_p\, \psi_c} \right] \delta\, \psi_c \,+\, \frac{1}{4} \left[\frac{\partial\, (\partial_{ab}\, A)(\partial^{ab}\, A)}{\partial\, \partial^t{}_p\, A} \right] \delta\, A \right\} = \\
&=\; \partial^t{}_p \left\{ \frac{i}{2}\, (\psi^a\, \delta^p{}_a\, \delta^b{}_t\, \delta^c{}_b)\, \delta\, \psi_c \,-\, \frac{1}{2}\, (\delta^p{}_a\, \delta^b{}_t)\, (\partial^a{}_b\, A)\, \delta\, A \right\} = \\
&=\; \partial^t{}_p \left\{ \frac{i}{2}\, \psi^p \left[-\epsilon^b \left(C_{tb} \left\{ -\, m\, A \,-\, \tfrac{\lambda}{2}\, A^3 \right\} \,+\, i\, \partial_{tb}\, A \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. -\; \tfrac{1}{2}\, (\partial^p{}_t\, A)(-\epsilon^a\, \psi_a) \right\} = \\
&=\; \partial^t{}_p \left\{ \frac{1}{2}\, \epsilon^b \left[-i\, \psi^p \left(C_{tb} \left\{ m\, A \,+\, \tfrac{\lambda}{2}\, A^3 \right\} \,+\, i\, \partial_{tb}\, A \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. -\; \tfrac{1}{2}\, (\partial^p{}_t\, A)\, \psi_b) \right\} ,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde X denota um campo genérico do modelo. Encontra-se:

$$\xi^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}\, \partial^a{}_c\, \psi^b \left(m\, A + \frac{\lambda}{2}\, A^3 \right) \,+\, \frac{1}{2}\, \psi^b\, \partial^a{}_c\, A \,+\, \frac{1}{2}\, \psi_c\, \partial^{ab}\, A \,, \tag{2.20}$$

2.1.3 Corrente Total de Noether

A corrente total de Noether nada mais é que a diferença entre os termos (2.20) e (2.18):

$$\begin{aligned}
\xi^{ab}{}_c \,-\, \Xi^{ab}{}_c \;&=\; -\, i\, \partial^a{}_c\, \psi^b \left(m\, A + \frac{\lambda}{2}\, A^3 \right) \,+\, \frac{1}{2}\, \psi^b\, \partial^a{}_c\, A \,+\, \frac{1}{2}\, \psi_c\, \partial^{ab}\, A \,+ \\
&\quad +\, \frac{1}{2}\, \delta^a{}_c\, (A\, \partial^{bd}\, \psi_d) \,\equiv\, J_S^{ab}{}_c \,.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Esta corrente pode ser reescrita em notação vetorial, ou seja:

$$\begin{aligned}
(\Gamma^\mu)_{ab}\, J^{ab}{}_c &= -i\,(\Gamma^\mu)_{cb}\,\psi^b\left(m\,A + \frac{\lambda}{2}\,A^3\right) + \frac{1}{2}\,(\Gamma^\mu)_{ab}\,(\Gamma^\nu)^a{}_c\psi^b\,\partial_\nu\,A\, + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,(\Gamma^\mu)_{ab}\,(\Gamma^\nu)^{ab}\psi_c\,\partial_\nu\,A + \frac{1}{2}\,(\Gamma^\mu)_{cb}\,(\Gamma^\nu)^{bd}\,(A\,\partial_\nu\,\psi_d) = \\
&\equiv J^\mu{}_c\,.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Usando relações entre as matrizes-Γ dadas em (2.6), podemos representar a corrente em sua forma vetorial:

$$\begin{aligned}
J^\mu{}_c &= -i\,\psi^a\,(\Gamma^\mu)_{ac}\left(m\,A + \frac{\lambda}{2}\,A^3\right) - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\,\nu\,\rho}\,\psi^b\,(\Gamma_\rho)_{bc}\,\partial_\nu\,A\, + \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\psi_c\,\partial^\mu\,A + \frac{1}{2}\,A\,\partial^\mu\,\psi_c - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\,\nu\,\rho}\,A\,\partial_\nu\,\psi^a\,(\Gamma_\rho)_{ac}\,.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Note que, para fazermos este cálculo, usamos que $\epsilon^c\,\partial_{ab}\,\psi^b\,\partial^a{}_c\,A = \epsilon^c\,\partial_{ac}\,\psi^b\,\partial^a{}_b\,A$, ou seja, que este termo é simétrico nos índices b e c. Para encontrarmos a carga de supersimetria, tomamos a integral espacial da componente-0 da supercorrente dada em (2.23), isto é,

$$\begin{aligned}
Q_c &= \int d^2\vec{x} J^0{}_c \\
&= \int d^2\vec{x}\left\{-i\,\psi^a\,(\Gamma^0)_{ac}\left(m\,A + \frac{\lambda}{2}\,A^3\right) + \frac{1}{2}\,\psi_c\,\partial^0\,A + \frac{1}{2}\,A\,\partial^0\,\psi_c\, + \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{0\,\nu\,\rho}\,\psi^a\,(\Gamma_\rho)_{ac}\,\partial_\nu\,A + \frac{i}{2}\,\varepsilon^{0\,\nu\,\rho}\,A\,\partial_\nu\,\psi^a\,(\Gamma_\rho)_{ac}\right\}\,.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Outras expressões que serão importantes para o cálculo do anticomutador das cargas de supersimetria são as relativas aos momenta conjugados aos campos e as suas relações de comutação graduadas, que são:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\psi_a} &= \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{\psi}_a} = \frac{i}{2}\,\frac{\partial\,\psi^d\,(\Gamma^\mu)_d{}^b\,\partial_\mu\,\psi_b}{\partial\,\partial_0\,\psi_a} = \frac{i}{2}\,\psi^b\,(\Gamma^0)_b{}^a\,, \\
\Pi_A &= \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{A}} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial\,(\partial^\mu\,A)(\partial_\mu\,A)}{\partial\,\partial_0\,A} = \frac{1}{2}\,\partial^0\,A\,.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Com isto, podemos encontrar as regras de comutação e anticomutação para os campos e os momenta, partindo-se dos parênteses de Poisson, onde podemos obter as regras de quantização para os campos [51], $\{X(x)\,,\,\Pi_X(y)\} = \delta^2(\vec{x} - \vec{y})$. Para o campo espinorial temos:

$$
\begin{aligned}
\left\{\psi_a(x)\,,\,\frac{i}{2}\,\psi^c(y)\,(\Gamma^0)_c{}^a\right\}_{x^0=y^0} &= \frac{i}{2}\,\{\psi_a(x)\,,\,\psi^c(y)\}_{x^0=y^0}\,(\Gamma^0)_c{}^a = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \{\psi_a(x)\,,\,\psi^c(y)\}_{x^0=y^0} &= 2\,i\,(\Gamma^0)_a{}^c\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\,. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

E para o campo escalar, temos:

$$
\frac{1}{2}\,[A(x)\,,\,\partial^0\,A(y)]_{x^0=y^0} = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow [A(x)\,,\,\partial^0\,A(y)]_{x^0=y^0} = 2\,\delta^2(\vec{x} - \vec{y})\,. \qquad (2.27)
$$

2.1.4 Álgebra das Supercargas

Dispondo dos elementos necessários ao cĺaculo da álgebra de correntes, mostra-se que

$$
\{Q_a(x)\,,\,Q_b(y)\}_{x^0=y^0} = 2\,i\,P^\mu\,(\Gamma_\mu)_{ab} + 2\,i\varepsilon^{ij}\int d^2\vec{x}\,\left(m\,A + \frac{1}{2}\,\lambda\,A^3\right)\,\partial_i\,A\,(\Gamma_j)_{ab}\,, \qquad (2.28)
$$

onde P^μ é a componente-0 μ do tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, cujo cálculo via acoplamento à gravitação é apresentado no Apêndice. Note que os termos de massa e de auto-interação $\lambda\,\phi^4$ contribuem para uma "esperada" carga central da álgebra das supercargas, na sua representação de Majorana de duas componentes. De fato, quando observamos a quiralidade das cargas, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
\{Q^+\,,\,Q^+\} &= 2\,i\,(P^0 - P^1) - 2\int d^2\vec{x}\,\left(mA + \frac{\lambda}{2}A^3\right)\partial_2 A\,, \\
\{Q^-\,,\,Q^-\} &= 2\,i\,(P^0 + P^1) - 2\int d^2\vec{x}\,\left(mA + \frac{\lambda}{2}A^3\right)\partial_2 A\,, \\
\{Q^+\,,\,Q^-\} &= 2\,i\,P^2 - 2\int d^2\vec{x}\,\left(mA + \frac{\lambda}{2}A^3\right)\partial_1 A\,, \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

onde se observa o caráter topológico dos termos de carga central provenientes da massa e da auto-interação da matéria escalar. Tendo visto este resultado preliminar para a matéria em auto-interação, consideraremos em seguida a introdução do setor de gauge Abeliano com supersimetria-N=1. A incorporação do setor de gauge é também imprescindível, a fim de estabilizar as soluções tipo-sóliton sob a forma de vórtices magnéticos com energia finita [52].

2.2 Modelo com Campo de Gauge Abeliano Minimamente Acoplado

Para construirmos um modelo supersimétrico com acoplamento mínimo a um campo de gauge, devemos complexificar os campos escalares presentes na eq. (2.9). É sabido que, quando complexificamos um modelo com campos escalares, tem-se uma simetria de fase (gauge), cujo parâmetro, uma vez local, representará uma simetria de gauge. Para termos uma homogeneidade nas transformações dos campos e de suas derivadas sob esta simetria, necessitamos de uma nova derivada, chamada covariante de gauge. Observe, que, na verdade, temos duas derivadas:

1) Com caráter espinorial (Majorana), com um índice latino, ou

$$\nabla_a \equiv D_a \mp i\Gamma_a \,, \tag{2.30}$$

onde Γ_a é a superconexão de gauge com superhelicidade $h = \frac{1}{2}$, e os sinais $-$ e $+$ indicam se a derivada está atuando nos supercampos (escalares) Φ ou $\bar{\Phi}$, respectivamente ($\bar{\Phi}$ é o complexo conjugado de Φ). Γ_a é representado pela expansão em série de Taylor em relação a θ_a:

$$\Gamma_a = \chi_a + \theta^b(C_{ab}B + iV_{ab}) + \theta^2(2\lambda_a - i\partial_a{}^b\chi_b) \,, \tag{2.31}$$

onde λ_a é o campo espinorial (gaugino), V_{ab} é o campo de gauge usual, sendo B um campo escalar e χ_a um campo espinorial. Estes dois últimos são, na verdade, campos compensadores. Com isto, temos que

$$(\nabla_a \Phi)' = e^{i\kappa}\, \nabla_a \Phi \,, \tag{2.32}$$

com o parâmetro local κ sendo um supercampo definido por

$$\kappa = \omega + \theta^a \sigma_a + \theta^2 \tau \,. \tag{2.33}$$

Agora, usando o método das projeções, observamos que

$$\begin{aligned} \Gamma_a| &= \chi_a \quad , \quad \frac{1}{2} D^a \Gamma_a \Big| = B \,, \\ -\frac{i}{2} D_{(a} \Gamma_{b)} \Big| &= V_{ab} \quad , \quad \frac{1}{2} D^b D_a \Gamma_b \Big| = \lambda_a \,, \end{aligned} \tag{2.34}$$

tendo, então

$$\begin{aligned} \delta\chi_a &= \sigma_a \quad , \quad \delta B = \tau \,, \\ \delta V_{ab} &= \partial_{ab}\omega \quad , \quad \delta\lambda_a = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Observe que χ_a e B sofrem variações algébricas de gauge, logo estes podem ser anulados, bastando para isto escolher um gauge adequado, chamado *gauge de Wess–Zumino*, que quebra manifestamente a supersimetria, mas indica o conteúdo físico do multipleto Γ_a.

Esta escolha de gauge leva–nos a escrever o supercampo Γ_a como sendo

$$\Gamma_a = i\, \theta^b V_{ab} - 2\, \theta^2\, \lambda_a \,, \tag{2.36}$$

com as transformações de "supersimetria"

$$\begin{aligned} \delta V_{ab} &= i\, \epsilon_{(a}\, \lambda_{b)} \,, \\ \delta\lambda_a &= \tfrac{1}{2}\, \epsilon^c\, \partial^b{}_{(a}\, V_{c)b} \,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

2) Uma segunda derivada covariante com caráter vetorial (derivada usual):

$$\nabla_{ab} = D_{ab} \mp i\Gamma_{ab} , \tag{2.38}$$

onde Γ_{ab} é a (super)conexão de gauge vetorial, para a qual, usando a álgebra de SUSY, temos

$$\{\nabla_a , \nabla_b\} = 2\, i\, \nabla_{ab} + F_{ab} . \tag{2.39}$$

Com o chamado *vínculo convencional* ($F_{ab} = 0$), que é necessário para nos levar a representações irredutíveis de supersimetria com um mínimo de graus de liberdade, chega-se a

$$\Gamma_{ab} = -\frac{i}{2}\, D_{(a}\Gamma_{b)} , \tag{2.40}$$

implicando que, no *gauge de Wess-Zumino*, tem-se a seguinte expansão em θ_a:

$$\Gamma_{ab} = V_{ab} + i\,\theta_{(a}\,\lambda_{b)} - \frac{i}{2}\,\theta^2\,\partial_{c(a}\,V_{b)}{}^{c} . \tag{2.41}$$

Com a identidade de Bianchi graduada, encontramos que $F_{a,bc} = i\, C_{a(b}\, W_{c)}$, o que nos leva a um novo supercampo:

$$W_a = \frac{1}{2}\, D^b D_a \Gamma_b , \tag{2.42}$$

com o vínculo $D^a W_a = 0$ ($D^a D_b D_a = 0$), implicando que só uma componente de Lorentz de W_a é independente. Pelo método das projeções, obtemos as componentes

$$W_a| = \lambda_a \quad , \quad D_a W_b| = \frac{1}{2}\,(\partial_{ca}\, V_b{}^c + \partial_{cb}\, V_a{}^c) \equiv f_{ab} , \tag{2.43}$$

com f_{ab} sendo o tensor intensidade de campo de gauge usual. Outras relações que são calculadas diretamente utilizando a álgebra das derivadas covariantes, e que serão importantes, são as seguintes (ref. ([53])):

$$\nabla_a\, \nabla^2 = i\, \nabla_a{}^b\, \nabla_b \pm i\, W_a \quad \text{e} \quad (\nabla^2)^2 = \Box \mp i\, W^a\, \nabla_a , \tag{2.44}$$

onde $\Box$ é o D'Alembertiano covariante de gauge. Com isto, dispomos dos elementos necessários ao estudo de um modelo de gauge Abeliano com supersimetria-N=1.

2.2.1 Super–ação Escalar com Campo de Gauge de Fundo

A ação que acopla os campos de matéria ao setor de gauge lê-se, no superespaço, conforme a expressão abaixo:

$$S_{escalar} = -\frac{1}{2}\int d^3x\, d^2\theta \left\{(\nabla^a \bar{\Phi})(\nabla_a \Phi)\right\} . \tag{2.45}$$

Como veremos, este não é o único termo para a ação que pode ser construído. Utilizando, agora, o procedimento das projeções, são definidos os campos componentes:

$$\begin{aligned}
\Phi| = A \quad &, \quad \bar{\Phi}| = \bar{A}\,, \\
\nabla_a\Phi| = \psi_a \quad &, \quad \nabla_a\bar{\Phi}| = \bar{\psi}_a\,, \\
\nabla^2\Phi| = F \quad &, \quad \nabla\bar{\Phi}| = \bar{F}\,.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Observe que estes campos correspondem, na verdade, redefinições dos campos componentes que já tínhamos anteriormente, sem as derivadas covariantes de gauge (eq. (2.27)). Abrindo-se a ação (2.45) em componentes, verificamos que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int d^3x\, \nabla^2 \left[\bar{\Phi}\nabla^2\Phi + \Phi\nabla^2\bar{\Phi}\right]\Big| = \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x \left[2(\nabla^2\bar{\Phi})(\nabla^2\Phi) + (\nabla^a\bar{\Phi})(\nabla_a\nabla^2\Phi) + (\nabla^a\Phi)(\nabla_a\nabla^2\bar{\Phi}) + \Phi(\nabla^2)^2\bar{\Phi} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\Phi}(\nabla^2)^2\Phi\right]\Big| = \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x \left[2\bar{F}F + \bar{\psi}^a(i\nabla_a{}^b\nabla_b + iW_a)\Phi + \psi^a(i\nabla_a{}^b\nabla_b - iW_a)\bar{\Phi} + \right. \\
&\quad \left. + A(\Box + iW^a\nabla_a)\bar{\Phi} + \bar{A}(\Box - iW^a\nabla_a)\Phi\right]\Big| = \\
S &= \frac{1}{2}\int d^3x \left[2\bar{F}F + \bar{\psi}^a(i\partial_a{}^b + V_a{}^b)\psi_b + \psi^a(i\partial_a{}^b - V_a{}^b)\bar{\psi}_b + 2i(\bar{\psi}^a\lambda_a A - \psi^a\lambda_a\bar{A}) + \right. \\
&\quad \left. + A(\partial_{ab} + iV_{ab})^2\bar{A} + \bar{A}(\partial_{ab} - iV_{ab})^2 A\right] .
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Esta é a ação em componentes, que apresenta não somente os termos já conhecidos do caso clássico, mas também termos (de campos) auxiliares que preservam a supersimetria fora da camada de massa ("off shell"). O que vamos estudar é o caso na camada de massa ("on shell"); isto significa que usaremos as equações de movimento para os campos F, $\bar{F}$ e λ_a:

$$F = \bar{F} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\psi}^a A - \psi^a \bar{A} = 0\,, \tag{2.48}$$

e também vamos usar o *gauge de Wess-Zumino* ($B = \chi = 0$). Então, a ação "on shell" fica:

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \bar{\psi}^a\, i\, D_a{}^b\, \psi_b + \psi^a\, i\, D_a{}^b\, \bar{\psi}_b + A \,\Box\, \bar{A} + \bar{A}\,\Box A \right\}\,, \tag{2.49}$$

com as transformações de supersimetria:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi}^a &= \epsilon_b\, i\, D^{ab} \bar{A} \quad , \quad & \delta\psi_b &= -\epsilon^c\, i\, D_{bc} A\,, \\ \delta A &= -\epsilon^a\, \psi_a \quad , \quad & \delta\bar{A} &= -\epsilon^a\, \bar{\psi}_a\,, \end{aligned} \tag{2.50}$$

e as equações de movimento:

$$D^{ab}\psi_a = 0 \quad \text{e} \quad D^{ab}\bar{\psi}_a = 0\,, \tag{2.51}$$

para os espinores de matéria. Com isto, podemos calcular as correntes de Noether da supersimetria.

2.2.2 Corrente de Noether

Termo Devido à Invariância da Ação

Analogamente ao caso anterior, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^3x d^2\theta\, \delta L = -\int d^3 d^2\theta\, \epsilon^a Q_a L = -\int d^3x\, D^2 \epsilon^a Q_a L\Big| = \\ &= -i\epsilon^a \int d^3x\, D^2 D_a L\Big| = \epsilon^c \int d^3x\, \partial_{ab} \left[-i\delta_c{}^a \nabla^b L \right]\Big| = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Xi_c^{ab} = -i\, \delta_c{}^a \, \nabla^b L\Big|_{\theta=0} \, . \tag{2.52}$$

Efetuando os cálculos

$$\begin{aligned}
\nabla^b \left[\bar{\Phi}\nabla^2\Phi + \Phi\nabla^2\bar{\Phi}\right]\Big| &= \frac{1}{2}\left[(\nabla^b\bar{\Phi})(\nabla^2\Phi) + \bar{\Phi}(\nabla^b\nabla^2\Phi) + (\nabla^b\Phi)(\nabla^2\bar{\Phi}) + \right.\\
+\, \Phi(\nabla^b\nabla^2\bar{\Phi})\Big]\Big| &= \frac{1}{2}\left[(\nabla^b\bar{\Phi})(\nabla^2\Phi) + \bar{\Phi}(i\nabla^{ab}\nabla_a + iW^b)\Phi) + (\nabla^b\Phi)(\nabla^2\bar{\Phi}) + \right.\\
+\Phi(i\nabla^{ab}\nabla_a - iW^b)\bar{\Phi})\Big]\Big| &= \frac{1}{2}\left[\psi^b F + \bar{A}iD^{ab}\psi_a + i\bar{A}\lambda^b A + \psi^b\bar{F} + AiD^{ba}\bar{\psi}_a - \right.\\
\left. -iA\lambda^b\bar{A}\right] &= \frac{1}{2}\left[\psi^b F + \bar{A}iD^{ab}\psi_a + \psi^b\bar{F} + AiD^{ba}\bar{\psi}_a\right] .
\end{aligned} \tag{2.53}$$

do que, reinserindo na expressão (2.52), obtém-se

$$\Xi_c^{ab} \;=\; \frac{1}{2}\,\delta_c{}^a\,\left\{\bar{A}\,D^{db}\,\psi_d \;+\; A\,D^{db}\,\bar{\psi}_d\right\} \, . \tag{2.54}$$

Termo Devido à Variação dos Campos Componentes

Fazendo a variação dos supercampos na Lagrangeana, temos

$$\begin{aligned}
&\partial^t{}_p \left(\frac{\partial L}{\partial\, \partial^t{}_p\, \Phi}\, \delta\Phi \right) \;= \\
=\;& -\partial^t{}_p \left\{ \frac{1}{2}\left[i\left(\frac{\partial\,(\bar{\psi}^a\,\partial_a{}^b\,\psi_b)}{\partial\,\partial^t{}_p\,\psi_c} \right)\delta\psi_c + i\,\left(\frac{\partial\,(\psi^a\,\partial_a{}^b\,\bar{\psi}_b)}{\partial\,\partial^t{}_p\,\bar{\psi}_c} \right)\delta\,\bar{\psi}_c \;+\; \left(\frac{\partial\,(\partial_a{}^b\,A)(\partial^a{}_b\,\bar{A})}{\partial\,\partial^t{}_p\,A} \right)\delta A \right.\right.\\
&+ \left(\frac{\partial\,(\partial_a{}^b\,A)(\partial^a{}_b\,\bar{A})}{\partial\,\partial^t{}_p\,\bar{A}} \right)\delta\,\bar{A} + \left(\frac{\partial\,(\partial_a{}^b\,A)(-iV^a{}_b\,\bar{A})}{\partial\,\partial^t{}_p\,A} \right)\delta\,A \;+ \\
&\left.\left. + \left(\frac{\partial\,(iV_a{}^b\,A)(\partial^a{}_b\,\bar{A})}{\partial\,\partial^t{}_p\,\bar{A}} \right)\delta\,\bar{A} \right]\right\} \;=\; 0\,,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

do que resulta

$$\partial_a{}^b \left\{ -\frac{1}{2}\left[i\bar{\psi}^a\delta\psi_b + \psi^a\delta\bar{\psi}_b + (D^a{}_b\bar{A})\delta A + (D^a{}_b A)\delta\bar{A} \right] \right\} \, , \tag{2.56}$$

onde, substituindo as variações, temos

$$\partial_a{}^b \left\{ -\frac{1}{2} \left[i\bar{\psi}^a(-\epsilon^c i D_{bc} A) + \psi^a(\epsilon_b i D^a{}_b \bar{A}) + (D^a{}_b \bar{A})(-\epsilon^d \psi_d) + (D^a{}_b A)(-\epsilon^d \bar{\psi}_d) \right] \right\} =$$
$$= \quad -\epsilon^c \partial_{ab} \left\{ \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}^a D^b{}_c A + \psi^a D^b{}_c \bar{A} + (D^{ab} \bar{A}) \psi_c + (D^{ab} A) \bar{\psi}_c \right] \right\} . \qquad (2.57)$$

Deste termo, lê-se a contribuição

$$\xi^{ab}_c = -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}^a D^b{}_c A + \psi^a D^b{}_c \bar{A} + \psi_c (D^{ab} \bar{A}) + \bar{\psi}_c (D^{ab} A) \right] . \qquad (2.58)$$

Corrente Total de Noether

A corrente total é calculada como a subtração de (2.54) do termo (2.58), ou seja,

$$\begin{aligned} \xi^{ab}_c - \Xi^{ab}_c &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi}^a D^b{}_c A + \psi^a D^b{}_c \bar{A} + \delta_c{}^a \{ \bar{A} D^{db} \psi_d + A D^{db} \bar{\psi}_d \} + \right. \\ & \quad \left. + \psi_c (D^{ab} \bar{A}) + \bar{\psi}_c (D^{ab} A) \right] = \\ &\equiv J^{ab}_{S\ c} . \end{aligned} \qquad (2.59)$$

Em notação vetorial, a corrente é reescrita como

$$\begin{aligned} (\Gamma^\mu)_{ab} J^{ab}_{S\ c} = & - \frac{1}{2} (\Gamma^\mu)_{ab} (\Gamma^\nu)^b{}_c (\bar{\psi}^a \partial_\nu A + \psi^a \partial_\nu \bar{A}) + \\ & - \frac{1}{2} (\Gamma^\mu)_{cb} (\Gamma^\nu)^{bd} (\bar{A} \partial_\nu \psi_d + A \partial_\nu \bar{\psi}_d) \\ & - \frac{1}{2} (\Gamma^\mu)_{ab} (\Gamma^\nu)^{ab} (\psi_c \partial_\nu \bar{A} + \bar{\psi}_c \partial_\nu A) = \\ \equiv & \quad J^\mu{}_c . \end{aligned} \qquad (2.60)$$

Observe que, novamente, o termo simétrico em μ, ν da primeira linha da expressão acima é nulo, logo

$$\begin{aligned} J^\mu{}_c \quad = & \quad \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} [\bar{\psi}^a (\Gamma_\rho)_{ac} \partial_\nu A + \psi^a (\Gamma_\rho)_{ac} \partial_\nu \bar{A}] + \\ - & \quad \frac{1}{2} (\psi_c \partial^\mu \bar{A} + \bar{\psi}_c \partial^\mu A) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{1}{2}(\bar{A}\,\partial^{\mu}\,\psi_c + A\,\partial^{\mu}\,\bar{\psi}_c) + \\
+ & \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\,\nu\,\rho}\,(\bar{A}\,\partial_{\nu}\,\psi^a + A\,\partial_{\nu}\,\bar{\psi}^a)(\Gamma_{\rho})_{ac}\,,
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

do que resulta

$$
\begin{aligned}
Q_c &= \int d^2x J^0{}_c = \\
&= \int d^2x\frac{1}{2}\Big\{-(\psi_c\,\partial^0\,\bar{A} + \bar{\psi}_c\,\partial^0\,A) + i\,\varepsilon^{0\,i\,j}\,[\bar{\psi}^a\,(\Gamma_j)_{ac}\,\partial_i\,A + \psi^a\,(\Gamma_j)_{ac}\,\partial_i\,\bar{A}] + \\
&- (\bar{A}\,\partial^0\,\psi_c + A\,\partial^0\,\bar{\psi}_c) + i\,\varepsilon^{0\,i\,j}\,(\bar{A}\,\partial_i\,\psi^a + A\,\partial_i\,\bar{\psi}^a)(\Gamma_j)_{ac}\Big\}\,.
\end{aligned} \tag{2.62}
$$

Os momenta conjugados, necessários para a álgebra de supercargas são:

- Para o campo ψ_d

$$
\Pi_{\psi_d} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_d} = -i\bar{\psi}^a(\Gamma^{\mu})_a{}^b\,\frac{\partial\,\partial_{\mu}\psi_b}{\partial\,\partial_0\psi_d} = -i\bar{\psi}^a(\Gamma^0)_a{}^d\,; \tag{2.63}
$$

- Para o campo $\bar{\psi}_d$

$$
\Pi_{\bar{\psi}_d} = -\,i\psi^a(\Gamma^0)_a{}^d\,; \tag{2.64}
$$

- Para o campo A

$$
\Pi_A = \frac{\partial L}{\partial\dot{A}} = (D^{\mu}\bar{A})\,\frac{\partial\,\partial_{\mu}A}{\partial\,\partial_0 A} = (D^0\bar{A})\,; \tag{2.65}
$$

- Para o campo $\bar{A}$

$$
\Pi_{\bar{A}} = (D^0 A)\,. \tag{2.66}
$$

Com isto, podemos encontrar a representação canônica para a álgebra dos campos, que é:

- Para os campos espinoriais ψ_d e $\bar{\psi}_d$

$$
\{\bar{\psi}^d\,,\,\psi^a\} = i\,(\Gamma^0)^{a\,d}\,\delta^2(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{2.67}
$$

- Para os campos escalares A e $\bar{A}$

$$[\bar{A}\,,\,D^0 A] = \delta^2(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{2.68}$$

2.2.3 Álgebra das Supercargas

Para calcular a álgebra das supercargas, devemos recorrer às relações algébricas dadas para as matrizes-Γ e às relações de comutação e anti-comutação para os campos componentes. Obtém-se que

$$\{Q_a\,,\,Q_b\} = -2\,i\,P^\mu(\Gamma_\mu)_{ab}\,, \tag{2.69}$$

onde P^μ é operador de momentum que inclui, agora, contribuições advindas do setor de gauge minimamente acoplado à matéria. É interessante observar que não é gerada qualquer contribuição, presente nas eq. (2.29) à carga central.

2.3 Modelo Escalar de Gauge Supersimétrico com Termo de Chern–Simons

Para estudarmos este modelo, acrescentaremos à ação estudada na seção precedente o termo de Chern–Simons (CS) supersimétrico, e verificaremos como este afeta a álgebra de supercargas. Para isto, partimos da expressão do termo de CS no superespaço:

$$S_{CS} = \frac{M}{g^2}\int d^3x\,d^2\theta\;\Gamma^a\,W_a\,, \tag{2.70}$$

onde M é um parâmetro de massa e g é a constante de acoplamento do campo de gauge. Esta expressão, em componentes, e no *gauge de Wess–Zumino* (WZ) fornece:

$$\begin{aligned} S_{CS} &= \frac{M}{2g^2}\int d^3x\,D^2\left[\Gamma^a\,D^b\,D_a\,\Gamma_b\right]\Big| = \frac{M}{2g^2}\int d^3x\,D^2\left[(D^b\,\Gamma^a)\,(D_a\,\Gamma_b)\right]\Big| = \\ &= \frac{M}{g^2}\int d^3x\left[i\,V^{ab}\,(\partial_{ac}\,V^c{}_b) + 4\,\lambda^2\right]\,, \end{aligned} \tag{2.71}$$

onde o primeiro termo do lado direito é o usual termo de Chern–Simons. Então, incluindo o termo (2.70) na ação (2.10), implica que em componentes estamos incluindo a ação (2.71) em (2.47), resultando em

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int d^3x\Big\{ \Big[2\bar{F}F + \bar{\psi}^a(i\partial_a{}^b + V_a{}^b)\psi_b + \psi^a(i\partial_a{}^b - V_a{}^b)\bar{\psi}_b + 2i(\bar{\psi}^a\lambda_a A - \psi^a\lambda_a\bar{A}) + \\ &+ A(\partial_{ab} + iV_{ab})^2\bar{A} + \bar{A}(\partial_{ab} - iV_{ab})^2 A\Big] + \frac{M}{g^2}\Big[iV^{ab}\partial_{ac}V^c{}_b + 4\lambda^2\Big]\Big\} . \end{aligned} \tag{2.72}$$

As equações de movimento para F e $\bar{F}$ não são afetadas pela pela presença do termo de Chern–Simons, mas a equação para λ_a, agora, fica

$$\begin{aligned} \lambda^d &: \partial_m{}^c \frac{\partial L}{\partial\,\partial_m{}^c\lambda_d} - \frac{\partial L}{\partial\lambda_d} = 0 \\ &: -\frac{i}{2g^2}(\partial_m{}^c\lambda^a)\left(\frac{\partial\,\partial_a{}^b\lambda_b}{\partial\,\partial_m{}^c\lambda_d}\right) + i\left(\bar{\psi}^a\frac{\partial\lambda_a}{\partial\lambda_d}A + \psi^a\frac{\partial\lambda_a}{\partial\lambda_d}\bar{A}\right) + \\ &\quad + \frac{2M}{g^2}\left(\frac{\partial\lambda_a}{\partial\lambda_d}\lambda^a + \lambda^a\frac{\partial\lambda_a}{\partial\lambda_d}\right) + \frac{i}{2g^2}\frac{\partial\lambda_a}{\partial\lambda_d}\partial^{ab}\lambda_b = 0 \\ &: -\frac{i}{g^2}\partial_a{}^d\lambda^a + i(\bar{\psi}^d A - \psi^d\bar{A}) + \frac{4M}{g^2}\lambda^d = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \partial_a{}^d\lambda^a = 0\,, \\ \lambda^d = \frac{ig^2}{4M}(\psi^d\bar{A} - \bar{\psi}^d A)\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.73}$$

Com isto, a Lagrangeana em termos dos campos dinâmicos lê-se:

$$\begin{aligned} L_{din} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}^a\partial_a{}^b\psi_b + \frac{i}{2}\psi^a\partial_a{}^b\bar{\psi}_b - \frac{1}{2}(\partial^{ab}\bar{A})(\partial_{ab}A) + \frac{i}{2}(\partial^{ab}\bar{A})V_{ab}A - \frac{i}{2}V^{ab}\bar{A}(\partial_{ab}A) + \\ &+ \frac{iM}{g^2}V^{ab}\partial_{ac}V^c{}_b\,, \end{aligned} \tag{2.74}$$

ou, em notação vetorial, usando a álgebra das matrizes Γ_μ:

$$\begin{aligned} L_{din} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}^a(\Gamma^\mu)_a{}^b\partial_\mu\psi_b + \frac{i}{2}\psi^a(\Gamma^\mu)_a{}^b\partial_\mu\bar{\psi}_b - \frac{1}{2}(\partial^\mu\bar{A})(\partial_\mu A) + \frac{i}{2}(\partial^\mu\bar{A})V_\mu A + \\ &- \frac{i}{2}V^\mu\bar{A}(\partial_\mu A) + \frac{iM}{g^2}\epsilon^{\mu\nu\rho}V_\mu\partial_\nu V_\rho\,, \end{aligned} \tag{2.75}$$

com as transformações de supersimetria "on–shell":

$$
\begin{aligned}
\delta\bar{\psi}^a &= i\epsilon_b D^{ab}\bar{A} \quad , \quad & \delta\psi_b &= -i\epsilon^c D_{bc}A\,, \\
\delta A &= -\epsilon^a\psi_a \quad , \quad & \delta\bar{A} &= -\epsilon^a\bar{\psi}_a\,, \\
\delta V_{ab} &= i\epsilon_{(a}\lambda_{b)}\,. & &
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

Observe que as equações de movimento para ψ^a e $\bar{\psi}^a$ não se alteram, e λ_b está definido na eq. (2.730

2.3.1 Corrente

Obteremos, a seguir, as contribuições à corrente de Noether advindas da ação de Chern-Simons (2.71).

Termo Devido à Invariância da Ação

Analogamente ao caso anterior, e a partir da expressão (2.52), o termo de Chern–Simons fica:

$$
\begin{aligned}
(\Xi_{CS})_c^{ab} &= -i\,\delta^a{}_c\nabla^b L_{CS}\Big| = -i\,\delta^a{}_c\frac{M}{4\,g^2}D^b\,\Gamma^e W_e\Big| = \\
&= -i\,\delta^a{}_c\left[\frac{M}{8\,g^2}D^b(D^d\Gamma^e)(D_e\Gamma_d)\right]\Big| = \\
&= -\frac{M}{8\,g^2}\delta^a{}_c\left[(D^bD^d\Gamma^e)(D_e\Gamma_d) + (D_d\Gamma_e)(D^bD^e\Gamma^d)\right]\Big| = \\
&= -\frac{i\,M}{8\,g^2}\left[(-2C^{bd}\lambda^e)(iV_{ed}) + (iV_{de})(-2C^{be}\lambda^d)\right] = \\
(J_{CS})_c^{ab} &= -\frac{M}{2\,g^2}\delta^a{}_c(\lambda^d V_d{}^b)\,.
\end{aligned} \tag{2.77}
$$

Usando as equações de movimento para λ_a, chega-se a:

$$
(\Xi_{CS})_c^{ab} = \frac{i}{2}\delta^a{}_c(\psi^d\bar{A} - \bar{\psi}^d A)V^b{}_d\,. \tag{2.78}
$$

Termo Devido à Variação dos Campos Componentes

Como já foi visto anteriormente, usando a mesma técnica, obtemos

$$\partial_p{}^t \frac{\partial L_{CS}}{\partial \partial_p{}^t \Phi} \delta \Phi = \partial_p{}^t \left[\frac{i\,M}{g^2} V^a{}_b \frac{\partial \partial_a{}^c V_c^b}{\partial \partial_p{}^t V_d^e} \delta V_d{}^e \right] = \frac{i\,M}{g^2} \partial_p{}^t (V^p{}_c \, \delta V_t{}^c) \,. \tag{2.79}$$

Usando a variação (2.37), a equação (2.73) resulta :

$$\begin{aligned}
& \partial_a{}^b \left\{ -\frac{i\,M}{g^2} V^{ac} \left[i \frac{i\,g^2}{4\,M} \epsilon_{(b} \left(\psi_{c)} \bar{A} - \bar{\psi}_{c)} A \right) \right] \right\} = \\
= \; & \frac{i}{4} \partial_a{}^b \left[V^{ac} \epsilon_{(b} \left(\psi_{c)} \bar{A} - \bar{\psi}_{c)} A \right) \right] = \frac{i}{4} \epsilon_b \partial_a{}^b \left[V^{ac} \left(\psi_c \bar{A} - \bar{\psi}_c A \right) \right] + \\
& + \frac{i}{4} \epsilon_c \partial_a{}^b \left[V^{ac} \left(\psi_b \bar{A} - \bar{\psi}_b A \right) \right] = \\
= \; & \frac{i}{4} \epsilon^c \partial_{ab} \left[V^a{}_c \left(\psi^b \bar{A} - \bar{\psi}^b A \right) - \delta^b{}_c V^{ad} \left(\psi_d \bar{A} - \bar{\psi}_d A \right) \right] = \\
\Rightarrow \; & (\xi_{CS})^{ab}_c = \frac{i}{4} \left[V^a{}_c \left(\psi^b \bar{A} - \bar{\psi}^b A \right) - \delta^b{}_c V^{ad} \left(\psi_d \bar{A} - \bar{\psi}_d A \right) \right] .
\end{aligned} \tag{2.80}$$

2.3.2 Termo de Chern–Simons para a Supercarga

Em função das expressões (2.78) e (2.80) mostra-se que a contribuição do termo de Chern-Simons à corrente de Noether da supersimetria é dada por

$$J^\mu_{SCS\,c} = \frac{i}{2} V^\mu (\psi_c \bar{A} - \bar{\psi}_c A) \,, \tag{2.81}$$

do que se obtém:

$$(Q_{SCS})_c = \int d^2x (J_{SCS})^0_c = \int d^2x \left\{ \frac{i}{2} V^0 \left(\psi_c \bar{A} - \bar{\psi}_c A \right) \right\} , \tag{2.82}$$

o qual, acrescentado à supercarga (2.62), leva–nos à álgebra das supercargas:

$$\{Q_a \,, Q_b\}_{CS} = 2\,i\,P^\mu (V^0) (\Gamma_\mu)_{ab} \,, \tag{2.83}$$

de onde não se lê qualquer contribuição à carga central.

2.4 Conclusão

No trabalho de Haag, Lopusanski e Sohnius [54], é formulado um teorema que diz que o aparecimento de uma carga central em modelos supersimétricos em 4 dimensões só é possível no caso de supersimetrias estendidas. Já em duas dimensões, soluções com topologia não-trivial são as que fornecem uma carga central para a álgebra [49]. Neste capítulo, apresentamos alguns resultados da álgebra de supercargas para um modelo escalar e para um modelo de gauge Abeliano em $D=(1+2)$. Estes resultados informam–nos que as conclusões referentes ao caso de duas dimensões persistem em 3 dimensões, isto é, a presença de configurações tipo-sóliton com fluxo magnético pode ser a fonte para a carga central em uma álgebra de supersimetria simples. Também, verifica-se que o termo de Chern-Simons $N=1$-supersimétrico não influencia na carga central. Este resultado é diferente do encontrado no trabalho de Lee, Lee e Weinberg [34], no qual os autores usam um modelo $N=2$-supersimétrico com potencial tipo $\lambda\phi^6$ e concluem que a solução com topologia não-trivial que contribui para a carga central é gerada pelo termo de Chern-Simons.

Capítulo 3

Formulação da Mecânica Clássica q-Supersimétrica

Nestes últimos anos, Álgebras de Hopf Quase-Triangulares ou Grupos Quânticos [55, 56, 57] têm atraído muito a atenção dos físicos, onde uma das características mais interessantes é que tais estruturas podem ser relacionadas a simetrias subjacentes de espaços onde as coordenadas são não-comutativas [58].

Recentemente, foi mostrado que os operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico q-deformado [59]

$$a\,a^{\dagger} - q a^{\dagger}\,a = q^{-N}, \tag{3.1}$$

possui um limite clássico onde estes operadores podem ser entendidos como coordenadas obedecendo [38] a

$$\theta^{k} = 0, \tag{3.2}$$

onde k é um inteiro, e o fator q da deformação é uma raiz da unidade, $q^{k} = 1$. Em geral, as propriedades destas coordenadas são generalizações de alguma propriedade associada a variáveis de Grassmann. Promovendo estas coordenadas a funções (campos) de um parâmetro (não-deformado) t, foi mostrado que é possível escrever uma ação, a qual somada à ação de campos comutantes, tem uma simetria que "lembra" a supersimetria

[60]. Também foi mostrado como fazer integração funcional sobre uma teoria quântica de campos heterótica [61]. Neste capítulo, exploraremos as tranformações de tais campos, e as invariâncias da ação, como resultado de uma formulação de superespaço de um modelo de mecânica clássica, onde suas coordenadas são variáveis de Paragrassmann (um q–superespaço), e os multipletos q-supersimétricos são compostos de (em geral) campos não–comutantes [43].

Na próxima seção, apresentaremos uma breve revisão sobre variáveis de Paragrassmann e também mostraremos como se pode construir coordenadas a partir destas. Na seção 3, construiremos o q–superespaço, as transformações entre suas coordenadas, e as transformações induzidas sobre os q–supercampos definidos neste espaço. Ações invariantes serão construídas na seção 4, em particular para uma partícula livre e o oscilador harmônico.

3.1 Variáveis de Paragrassmann e Coordenadas Quermiônicas

Começamos por introduzir uma variável de Paragrassmann, θ, e sua derivada, $\frac{\partial}{\partial\theta} \equiv \partial_\theta$, que obedece [40] a

$$\theta^k = 0, \qquad {\partial_\theta}^k = 0, \tag{3.3}$$

com k um inteiro positivo. Se quisermos que a atuação de ∂_θ sobre θ^n seja proporcional a θ^{n-1}, é necessário modificar a regra de Leibnitz para ser

$$\partial_\theta(a\,b) = (\partial_\theta a)b + g(a)(\partial_\theta b), \tag{3.4}$$

onde a, b são polinômios arbitrários em θ, e $g(a)$ é um automorfismo da álgebra, satisfazendo a

$$g(\alpha\, a + \beta\, b) \;=\; \alpha\, g(a) + \beta\, g(b),$$

$$g(a\,b) \;=\; g(a)\,g(b), \tag{3.5}$$

onde α, β são "c-numbers".

Escolhendo $a = \theta$ em (3.4), vemos que ∂_θ e θ deve obedecer a uma relação de comutação q-deformada (quomutação),

$$[\partial_\theta, \theta]_q \equiv \partial_\theta \theta - q\theta\partial_\theta = 1, \tag{3.6}$$

implicando no automorfismo para θ

$$g(\theta) = q\,\theta. \tag{3.7}$$

Esta derivada, entretanto, não é única. De fato, podemos mudar o expoente 1 de q na eq.(3.6) por qualquer outro inteiro, portanto para qualquer valor de k pode-se definir $(k-1)$ derivadas diferentes. Para o caso específico $k = 3$, pode-se também definir outra derivada δ_θ [62] que quomuta com θ como

$$[\delta_\theta, \theta]_q \equiv \delta_\theta \theta - q^2\theta\delta_\theta = 1, \tag{3.8}$$

e sua regra de Leibnitz difere da eq.(3.4) pela troca de $g(a)$ por $g(g(a))$.

Integração de uma variável de paragrassmann é definida de tal maneira que

$$\int d\theta\,\theta^n\,\alpha\,\delta_{n,k-1}\,. \tag{3.9}$$

É interessante notar que a eq.(3.1), para $k = 2$ implicando em $q = -1$, torna-se o anticomutador usual, o qual é consistente com as eqs.(3.3) e (3.6), que definem variáveis de Grassmann. Tomando $k \to \infty$, a eq.(3.1) torna-se o comutador usual. O significado deste limite na eq.(3.3) é que, se expandirmos em série de Taylor as funções destas variáveis, ela se tornará uma série ordinária (obviamente, se $\theta^k = 0$, k finito, uma expansão em Taylor será um polinômio de grau $(k-1)$).

As variáveis de Paragrassmann podem ser promovidas a coordenadas se as tomarmos como funções de um parâmetro (comutante) t. Retornando ao caso das variáveis de Grassmann, lembramo-nos que temos duas diferentes coordenadas: uma que se comporta como θ (uma coordenada fermiônica), e outra que se comporta como θ^0(uma coordenada (comutante) bosônica). No caso de Paragrassmann, teremos k diferentes tipos de coordenadas, cada uma correspondendo a uma potência de θ, e novamente θ^0 sendo uma coordenada comutante. Chamamos de $\psi^{(i)}(t)$ as generalizações fermiônicas das coordenadas (q-férmions) ou, simplesmente coordenadas quermiônicas e o seu índice (i) indicará o setor(potência de θ).

Tomaremos dois quérmions de diferentes setores obedecendo às relações de quomutação (q-comutação)

$$\psi^{(i)}\psi^{(j)} = q_{(i,j)}\psi^{(j)}\psi^{(i)}, \tag{3.10}$$

onde os parâmetros $q_{(i,j)}$ são potências de $q^k = 1$.

Vamos tomar, agora, o caso particular $k = 3$, e construir uma ação, a qual estende o conceito de partícula pontual supersimétrica através do uso destes campos generalizados [60]. Esta partícula generalizada é descrita pelas coordenadas $(x(t), \psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t))$, da mesma maneira que uma partícula puntual supersimétrica é descrita ter as coordenadas $(x(t), \psi(t))$. A ação envolvendo os quérmions é dada por

$$S = \int dt(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - qC^{(s)^2}\dot{\psi}^{(2)}\psi^{(1)}), \tag{3.11}$$

onde escolhemos a dimensão da massa igual a um. Escolhemos o segundo termo em (3.11) de tal maneira que "lembre" a equação de movimento clássica supersimétrica para o férmion. O fator tipo–cociclo $C^{(s)^2}$ é necessário quando da multiplicação de dois objetos de setores diferentes, $A^{(r)}B^{(s)}$, este deve se comportar como um objeto do setor $(r+s) \bmod 3$. Entretanto, se este fator não é inserido, este produto não quomutaria corretamente com $A^{(r)}$ ou $B^{(s)}$. O que está por baixo deste ponto é o fato que, aqui, diferentemente do caso fermiônico campos iguais em pontos iguais comutam.

Este fator tipo cociclo $C^{(s)}$, neste caso, pode se comportar como um contador de setores, ou seja

$$C^{(s)}A^{(i)} = q^i A^{(i)}C^{(s)}. \tag{3.12}$$

Finalmente, com a escolha $[\psi^{(1)}, \psi^{(2)}]_q = 0$, tomando todos os campos como reais, o segundo termo na ação, eq. (3.11), se torna real e é um representante do setor zero.

Fazendo a transformação

$$\begin{aligned}
\delta x &= q\, C^{(s)}\, \epsilon^{(1)}\, \psi^{(2)}\,, \\
\delta \psi^{(1)} &= q^2\, C^{(s)^2}\, \epsilon^{(1)}\, \dot{x}\,, \\
\delta \psi^{(2)} &= \pm q\, \epsilon^{(1)}\, \psi^{(1)}\,,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

na ação (3.11) temos

$$\delta S = \pm \int dt \frac{d}{dt}(\epsilon^{(1)}\psi^{(1)^2}), \tag{3.14}$$

onde usamos $[\epsilon^{(1)}, \psi^{(1)}]_q = [\psi^{(2)}, \epsilon^{(1)}]_q = 0$. Tal transformação é similar à transformação supersimétrica usual: o parâmetro $\epsilon^{(1)}$ é não–comutante, a ação transforma como uma derivada total e um dos campos, $\psi^{(1)}$,também se transforma com uma derivada total, o que pode ser considerado como indicador que $\psi^{(1)}$ é o mais alto termo na expansão em θ de algum supercampo. Poder-se-ia, também, escrever as transformações entre os campos com um parâmetro pertencente ao setor dois. Entretanto, pode ser mostrado que esta transformação não é uma simetria da ação (3.11).

3.2 O q-Superspaço e os q-Supercampos

Vamos, agora, construir uma formulação do q-superespaço que recobrirá os resultados relativos às coordenadas quermiônicas presentes na última seção. Como foi previamente estabelecido, consideraremos em detalhe somente o caso $k = 3$. Algumas das idéias discutidas aqui e na próxima seção também foram abordadas na ref. [63], sendo que nesta última, o autor não se preocupou com a homogeneidade das relações obtidas, com isto chegando a conclusões diferentes.

As coordenadas do q-superespaço são $(t;\theta)$, onde t é um "c-number" que identifica o tempo e θ uma variável paragrassmanniana que obedece a $\theta^3 = 0$, sendo tomadas ambas como parâmetros reais.

Vamos introduzir transformações entre estas coordenadas que são translações no q-superespaço. Tais transformações são escritas como:

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta + q^2 C^{(0)} \varepsilon, \\ t' &= t + q\, C^{(0)} \theta^2 \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde ε é uma constante infinitesimal que, por homogeneidade, está no mesmo setor que θ. O fator tipo-cociclo $C^{(0)}$ é necessário porque as coordenadas transformadas (t',θ') devem se comportar sob as relações de comutação da mesma maneira que (t,θ). A translação no q-superespaço fixa a dimensão massa de θ e de ε serem $-\frac{1}{3}$.

Tendo como base a eq. (3.6), propomos a definição para o comutador de duas grandezas A e B:

$$[A,B]_q \equiv A\,B - q\,B\,A; \tag{3.16}$$

a partir desta, escolhemos

$$[\theta,\varepsilon]_{q^2} = 0, \tag{3.17}$$

onde, por homogeneidade e realidade, fixamos

$$[C^{(0)},\theta]_{q^2} = [C^{(0)},\varepsilon]_{q^2} = 0. \tag{3.18}$$

De fato, só depois de determinar estas relações de quomutação é que estabelecemos os fatores q em (3.15) a fim de preservar a condição de realidade para as coordenadas. Observe que podemos escolher q ao invés de q^2 em (3.17) (i. e., podemos tomar $[\varepsilon,\theta]_q = 0$). Com esta escolha, necessariamente temos que mudar $q \leftrightarrow q^2$ nas eqs. (3.15) e (3.18). Mas, de fato, não existe diferença significativa entre estes dois casos. No Apêndice C, indicamos os quomutadores numa maneira geral, sem especificar *a priori* os fatores q.

Depois de introduzir o q-superespaço (t, θ), nosso próximo passo é escrever uma função destas variáveis. Como no caso supersimétrico, vamos expandir esta função em série de Taylor em θ, e esta expansão será um polinômio de grau 2 (para o caso genérico $\theta^k = 0$, o polinômio será de ordem $(k-1)$). Ou seja,

$$X(t;\theta) = x(t) + q^2\,\theta\, C^{(2)}\,\psi^{(2)}(t) + q^2\,\theta^2\, C^{(1)}\,\psi^{(1)}(t)\,. \tag{3.19}$$

A coordenada $x(t)$ é uma função comutante; então, por homogeneidade $X(t,\theta)$ também tem esta propriedade, fazendo o mesmo papel que o de um campo escalar. Os $\psi^{(i)}(t)$ são os companheiros q-supersimétricos das coordenadas $x(t)$, e suas dimensões são $[\psi^{(j)}] = -\frac{j}{3}$. Tomamos os quomutadores correspondentes na eq. (3.19):

$$\begin{aligned}
[\psi^{(1)}, \psi^{(2)}]_{q^2} = 0 \quad &, \quad [C^{(1)}, C^{(2)}]_{q^2} = 0\,,\\
[\theta, \psi^{(j)}]_{q^{2j}} = 0 \quad &, \quad [\varepsilon, \psi^{(j)}]_{q^j} = 0\,,\\
[\psi^{(1)}, C^{(1)}]_q = 0, \quad &, \quad [\psi^{(1)}, C^{(2)}] = 0\\
[\psi^{(2)}, C^{(1)}]_q = 0 \quad &, \quad [\psi^{(2)}, C^{(2)}]_q = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Com esta escolha , garantimos que X é de fato o campo do setor zero e é real, ou seja, homogêneo.

As transformações infinitesimais de coordenadas (3.15) induzem uma variação sobre o q-supercampo $X(\theta, t)$ na forma

$$X(\theta', t') - X(\theta, t) = \Delta\, X = q^2\; C^{(0)}\;\varepsilon\; Q\, X. \tag{3.21}$$

Podemos obter a realização operatorial do gerador de transformações q-supersimétricas Q, por expansão de Taylor do l.r.s. desta equação. Entretanto, devemos tomar cuidado em definir uma expansão de Taylor, já que temos duas derivadas com respeito a θ. Para isto, escolhemos os fatores de tal maneira que mantenham a condição de realidade, o que resulta em

$$X(\theta', t') = X(\theta, t) + \Delta\theta \left(q^2 \frac{\partial X}{\partial \theta} + q \frac{\delta X}{\delta\, \theta} \right) + \Delta t \, \frac{\partial X}{\partial t}. \tag{3.22}$$

Com esta expansão, e usando a eq.(3.15), Q pode ser lido como

$$Q = \theta^2 \, \partial_t + q^2 \partial_\theta + q \, \delta_\theta \, , \tag{3.23}$$

onde notamos que o gerador está no setor θ^2, e sua dimensão canônica é $[Q] = \frac{2}{3}$.

Por um cálculo direto, mostra-se que

$$Q^3 = -\partial_t. \tag{3.24}$$

Isto significa que as transformações de q-supersimetria são raízes cúbicas das translações temporais.

A variação dos campos componentes de X podem ser lidos da eq.(3.21), comparando as potências em θ temos

$$\begin{aligned} \Delta x &= -q \, C^{(0)} \, C^{(2)} \, \varepsilon \, \psi^{(2)} \, , \\ \Delta\psi^{(1)} &= {C^{(1)}}^2 \, C^{(0)} \, \varepsilon \, \dot{x} \, , \\ \Delta\psi^{(2)} &= q^2 \, {C^{(2)}}^2 \, C^{(0)} \, C^{(1)} \, \varepsilon \, \psi^{(1)} \, . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Como no caso supersimétrico usual, estas são transformações cíclicas entre os campos. Observe que estas transformações são equivalentes às da eq. (3.13), no caso anterior, onde não tínhamos construído o superespaço.

Tendo escrito as transformações do q-superespaço e as variações dos q-supercampos, vamos construir uma derivada q-covariante D, que é um operador diferencial que obedece a

$$
\begin{gathered}
[D\,,\,Q]_q = 0 \\
D\,(\Delta X) = \Delta\,(DX)
\end{gathered}
\tag{3.26}
$$

Por analogia ao caso supersimétrico, escolhemos D de tal modo a pertencer ao mesmo setor que Q; estes serão proporcionais, ou escrevendo

$$
D = qC^{(0)^2}\left(\theta^2\,\partial_t + q^2\partial_\theta + q\,\delta_\theta\right)\,,
\tag{3.27}
$$

onde o cociclo fará um papel importante, como veremos mais adiante.

Como no caso supersimétrico, os campos componentes, aqui, podem ser definidos por projeções do supercampo em diferentes setores, usando as derivadas covariantes em $\theta = 0$:

$$
\begin{aligned}
X|_{\theta=0} &= x \\
DX|_{\theta=0} &= -q\,C^{(0)^2}\,C^{(2)}\psi^{(2)} \\
D^2X|_{\theta=0} &= -q^2\,C^{(0)}\,C^{(1)}\,\psi^{(1)}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Daqui para adiante, desprezaremos o subescritos $\theta = 0$.

Escrevemos também algumas relações entre potências de D e de Q, as quais serão úteis mais tarde

$$
\begin{aligned}
D\,.\,| &= q^2\,C^{(0)^2}\,Q\,.\,| \\
D^2\,.\,| &= q^2\,C^{(0)}\,Q^2\,.\,| \\
D^3\,.\,| &= -\,\partial_t\,.\,|
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Além dos supercampos definidos acima, também podemos construir supercampos nos setores um e dois. Suas expansões em θ podem ser tomadas como

$$\Lambda^{(1)} = \lambda^{(1)} + q^2\theta M^{(1)}A + q\theta^2 M^{(2)}\lambda^{(2)} \tag{3.30}$$

e

$$\Xi^{(2)}(t) = \xi^{(2)} + \theta L^{(1)}\xi^{(1)} + q^2\theta^2 L^{(2)}F\ , \tag{3.31}$$

onde os superescritos indicam os setores aos quais os campos pertencem, e A e F são campos bosônicos. A dimensão do q-supercampo $\Xi^{(2)}$ é tomada como $\frac{2}{3}$, sua componente F não tem dimensão e, como veremos mais adiante, comporta–se como um campo auxiliar. Entretanto, não podemos tomar a dimensão do q-supercampo $\Lambda^{(1)}$ como $\frac{1}{3}$, pois isto implicaria numa dimensão negativa para a componente mais alta $\lambda^{(2)}$. Logo, tomamos sua dimensão como $\frac{4}{3}$. Isto, entretanto, leva a equações de movimento diferentes para suas componentes quermiônicas, como veremos na próxima seção.

Admitimos que os campos $\xi^{(j)}$ têm o mesmo comportamento que $\psi^{(j)}$ com respeito às relações de quomutação entre eles, com θ e com ε. As relações com os cociclos são, então, fixadas segundo as expressões:

$$\begin{aligned} [\xi^{(j)}, L^{(i)}]_{q^{j\delta_{i,j}}} &= 0, \\ [L^{(1)}, L^{(2)}]_q &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Atuando com a derivada covariante num produto de dois supercampos , vemos que a componente θ^2 obedece à regra de Leibnitz

$$D(AB) = (DA)\,B + h(A)\,(DB) + 3\,\theta\,h^2(A_1)\,B_1, \tag{3.33}$$

onde A_1 e B_1 são os coeficientes do termo linear na expansão em θ de q-supercampos genéricos. Notamos que, por causa da regra de integração (3.9), este último termo não contribuirá na integração da variável de paragrassmann, logo a integração por partes é possível de ser efetuada ordinariamente. O fator $h(A)$ é simplesmente um automorfismo com $g(A)$, que é obtido pela regra

$$C^{(0)^2}\,\theta^2 A = h(A)\, C^{(0)^2}\,\theta^2\,, \tag{3.34}$$

ou seja, $h(A) = q^i A$ com $i = 0, 1, 2$.

3.3 Superações

Nesta seção, faremos uma discussão geral sobre ações que são funções dos q-supercampos introduzidos na última seção.

Em geral, uma ação para um supercampo qualquer Φ deve ser da forma

$$S = \int dt d\theta\, \mathcal{P}(\Phi, \dot{\Phi}, D\Phi, D^2\Phi) \tag{3.35}$$

onde $\mathcal{P}$ é um polinômio em Φ e suas derivadas covariantes, o qual deve se comportar, sob relações de quomutação, como θ^2, pertencente ao setor dois (já que $\int d\theta = {\partial_\theta}^2$, e S é escalar),e já que a medida tem dimensão de massa $-\frac{1}{3}$ e S é sem dimensão, a dimensão de $\mathcal{P}$ deve ser $\frac{1}{3}$.

Comparando a expressão para a derivada covariante e a integração em θ, verificamos a relação

$$\int d\theta = q^2 C^{(0)^2} D^2|. \tag{3.36}$$

Vamos, agora, efetuar a transformação sobre a ação

$$\Delta S = \int dt d\theta\, \Delta\mathcal{P}(\Phi, \dot{\Phi}, D\Phi, D^2\Phi), \tag{3.37}$$

sabendo que o Jacobiano é trivial. Usando a eq.(3.36), chegamos à conclusão de que S transforma–se com uma derivada total

$$\Delta S = -\,q\, C^{(0)}\, \varepsilon \int dt\, \partial_t \mathcal{P}, \tag{3.38}$$

e as transformações da eq.(3.15) induzem simetrias sobre a ação.

Vamos agora escrever uma ação para os q-supercampos X e $\Xi^{(2)}$ definidos na seção 3, e usamos as formulas acima para encontrar suas equações de movimento e cargas conservadas.

Partimos do q-supercampo X. Sua ação quadrática é

$$S_X = -\frac{m}{2}\int dtd\theta\, C^{(0)}(D^2X)(D^2X)\,, \tag{3.39}$$

onde m é o parâmetro comutante de massa. Através de cálculos explícitos de sua integral em θ, ou por uso da eq.(3.36), esta ação pode ser mostrada em suas componentes como

$$S_X = m\int dt\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + q^2C^{(2)}C^{(1)}\dot{\psi}^{(2)}\psi^{(1)}\right)\,. \tag{3.40}$$

A equação de movimento relativa à equação acima é

$$D\dot{X} = 0, \tag{3.41}$$

a qual em componentes fica $\ddot{x} = \dot{\psi}^{(j)} = 0$ $(j = 1, 2)$, e então vemos que o supercampo X representa uma partícula livre e seus parceiros supersimétricos. A sua variação supersimétrica é obtida:

$$\Delta S_X = qC^{(0)}\epsilon\int dt\partial_t(C^{(1)^2}\psi^{(1)^2}). \tag{3.42}$$

A ação quadrática para o q-supercampo $\Lambda^{(1)}$ é

$$S_\Lambda = -\frac{m}{2}\int dtd\theta\, M^{(1)}\,(\dot{\Lambda}^{(1)})^2. \tag{3.43}$$

Por conveniência, o parâmetro de massa é tomado ser o mesmo que na ação para X. Em componentes, a ação torna-se

$$S_\Lambda = \frac{m}{2}\int dt\,(\dot{A}^2 + 2q^2M^{(1)}M^{(2)}\dot{\lambda}^{(2)}\lambda^{(1)})\,, \tag{3.44}$$

onde é interessante notar que a equação de movimento para $\Lambda^{(1)}$,

$$\ddot{\Lambda}^{(1)} = 0, \tag{3.45}$$

apresenta–nos em componentes $\ddot{A} = \ddot{\lambda}^{(i)} = 0$. Então, este q-supercampo também representa uma partícula livre, mas seus parceiros quermiônicos obedecem a uma equação de movimento que é de segunda ordem na derivada temporal, enquanto no caso do q-supercampo X é de primeira ordem. A variação q-supersimétrica de S_Λ é

$$\Delta S_\Lambda = \varepsilon\, C^{(0)}\, M^{(1)} \int dt \partial_t (\dot{\Lambda}^{(1)})^2 \,. \tag{3.46}$$

Consideramos agora a ação quadrática para o q-supercampo $\Xi^{(2)}$. Este é

$$S_\Xi = m \int dt d\theta\; L^{(2)} {C^{(0)}}^2\, (D\Xi^{(2)})^2 \,. \tag{3.47}$$

Em campos componentes, a ação fica

$$S_\Xi = m \int dt\, [-2\, L^{(2)} L^{(1)} \dot{\xi}^{(2)} \xi^{(1)} + F^2]. \tag{3.48}$$

A equação de movimento para $\Xi^{(2)}$ é

$$D^2 \Xi^{(2)} = 0, \tag{3.49}$$

resultando que $F = \dot{\xi}^{(j)} = 0$, o que significa, como foi antecipado, qua a coordenada bosônica F é auxiliar. A variação de S_Ξ é

$$\Delta S_\Xi = -C^{(0)} \epsilon L^{(2)} {L^{(1)}}^2 \int dt\, \partial_t\, {\xi^{(1)}}^2 \,. \tag{3.50}$$

Os supercampos X e $\Xi^{(2)}$ podem ter uma ação quadrática com um termo misto

$$S_{X\Xi} = m\omega \int dtd\theta q^2 {L^{(2)}}^2\, X\Xi^{(2)}\,, \tag{3.51}$$

onde ω tem dimensão de massa^{-1}, que em componentes é

$$S_{X\Xi} = m\omega \int dt\, Fx. \tag{3.52}$$

Somando às ações (3.39), (3.47) e (3.51), temos

$$S_{HO} = S_X + S_\Xi + S_{X\Xi}, \tag{3.53}$$

onde vemos que sua parte bosônica é

$$S_{HO} = \int dt\, m(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}F^2 + \omega F x). \tag{3.54}$$

Calculando a equação de movimento do campo auxiliar F, e reintroduzindo-o na ação, temos

$$S_x = \int dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega x\right] \tag{3.55}$$

que é a ação para o oscilador harmônico.

3.4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos uma generalização da mecânica clássica supersimétrica baseada num parâmetro de deformação q, onde a coordenada não-comutante é nilpotente de ordem 3. Translações no q-superespaço induzem transformações nos campos, e foram construídas ações destes campos que são, a menos de derivadas totais, invariantes sob tais transformações.

Portanto, existe um grande paralelismo entre o caso supersimétrico usual e a formulação que discutimos aqui. Existem, também, algumas diferenças. A mais importante é a necessidade de se introduzir fatores tipo cociclo para corrigir o comportamento estatístico dos campos. Apesar do fato de não sermos capazes de encontrar alguma realização para os cociclos, esperamos que estes devam ser alguma função dos campos, que não participaria na dinâmica. Poder-se-ia conjecturar que a necessidade de introduzir-se tais fatores está relacionada ao fato que o operador identidade de uma álgebra deve, também, ser deformado. Por exemplo, o fator q^{-N} que aparece no r.h.s. da eq. (3.1) pode ser visto como o parâmetro de deformação do operador identidade da álgebra de Heisenberg. Tais fatores são , também, importantes para as condições de consistência para a álgebra, como a condição de associatividade [64]. Então, poder-se-ia procurar por fatores na forma de q elevado a algum operador como possíveis soluções para fatores tipo-cociclo.

Uma outra possibilidade seria tomar os parâmetros que aparecem nas fórmulas acima como comutantes, mas obedecendo a algumas relações de quomutação com os operadores. Isto encontra-se feito, por exemplo, na ref. [65], onde o parâmetro de massa foi tomado como não-comutante para assegurar a unitariedade do operador de evolução temporal.

Conclusões Gerais e Perspectivas Futuras

No Capítulo 1, tendo em mente o método de Schwinger para a descrição do comportamento quântico de modelos bidimensionais Euclideanos, foram analisados os modelos de gauge Abelianos $(1,0)$- e $(1,1)$- supersimétricos. Esta análise foi baseada no trabalho da ref. [23], onde foram calculadas contribuições a "1-loop" para a ação efetiva. Foi encontrado que o modelo $(1,0)$ apresenta uma contribuição tipo contratermo de "Quillen", o que garante a invariância de gauge do modelo; já o modelo $(1,1)$ apresenta geração dinâmica de massa para o bóson de gauge. Estes resultados são conseqüências naturais do estudo efetuado na ref. [23]. O interesse maior foi verificar a relação dos termos mencionados com a carga central conforme dos modelos: os resultados encontrados foram c=2 e c=0, respectivamente. Para o caso $(1,0)$, o valor não-nulo da carga central indica a presença de uma anomalia (de fatorização) necessária para a ação do modelo ser invariante de gauge. Já no modelo $(1,1)$, a carga central nula assinala um mecanismo de geração dinâmica de massa à la Schwinger.

No Capítulo 2, chama-se em causa o clássico trabalho de Haag, Lopusanski e Sohnius [54], no qual é apresentado um teorema que estabelece que uma carga central num modelo supersimétrico em 4D pode aparecer somente se a supersimetria for estendida. Em 2D, Olive e Witten [49] mostraram como configurações com topologia não-trivial (chamadas "kinks") poderiam ser fontes para um operador de carga central no caso de uma supersimetria simples. A partir desta constatação, apresentamos alguns resultados sobre a álgebra de supercargas para um modelo de matéria auto-interagente e para um modelo Abeliano de gauge em D=(1+2). Nossos resultados indicam que a conclusão estabelecida para o caso bidimensional persiste para o caso tridimensional, ou seja, modelos em 3D com configurações de campo não-triviais no infinito apresentam uma carga central na álgebra dos geradores de uma supersimetria simples. De fato, a carga central aparece como uma integral espacial que mede o comportamento dos campos no infinito. Enfatizamos que os resultados encontrados aqui são diferentes das conclusões estabelecidas na ref. [34], onde os autores adotam um modelo Abeliano com supersimetria N=2, potencial ϕ^6 de auto-interação e um termo de Chern-Simons para o potencial de gauge. Neste trabalho, eles concluem que a contribuição com topologia não-trivial para a carga central provém do fluxo magnético associado ao campo estatístico.

No Capítulo 3, partimos do conceito de Grupos Quânticos direcionados a considerar que o parâmetro de deformação, q, seja uma raiz da unidade [38], o que implica na possibilidade de obter variáveis que tenham sua regra de (anti-)comutação deformada; as chamadas variáveis de paragrassmann [40]. Analisamos a possibilidade de se obter uma formulação num superespaço q-deformado para alguns sistemas clássicos. Utilizando a linguagem de Teoria Quântica de Campos, foram encontradas ações em (q-)supercampo para os casos da partícula supersimétrica livre e para o oscilador harmônico supersimétrico. Estes resultados diferem dos que se encontram na ref. [63], onde não se associa a homogeneidade em relação às regras de q-comutação dos supercampos para a consistência da álgebra.

Observamos que, dentro das linhas aqui expostas, no que se refere ao Capítulo 1, para se ter resultados mais conclusivos, seria necessário utilizar o mesmo procedimento para modelos de gauge com supersimetria (p, q) diferentes daqueles estudados. Isto nos daria uma visão mais clara sobre a relação entre os valores da carga central conforme e a presença de anomalia, ou mecanismo de geração dinâmica de massa. No Capítulo 3, para uma análise mais profunda da possibilidade de se construir uma formulação de superespaço q-deformado com supercampos homogêneos, seria necessário desenvolver em mais detalhes a formulação Lagrangeana e a análise funcional dos modelos, bem como encontrar uma realização para os fatores tipo-cociclo que aparecem como base para a consistência da construção.

As perspectivas para futuros trabalhos relacionadas aos pontos citados nesta tese são:

–Dentro da linha estudada no Capítulo 1, além das continuações já citadas para o aprofundamento do tema acima, seria interessante analisar as conseqüências de nossas conclusões sobre um modelo que possuísse supersimetria local, já que este seria o caso que realmente interessa para o cálculo no âmbito das "strings". Uma quebra da fatorização no setor gravitacional constituiria uma observação notável no processo de resolução das funções partição para teorias definidas sobre superfícies de Riemann.

–No que diz respeito ao assunto abordado no Capítulo 2, uma sugestão interessante seria analisar a eventual presença de cargas supersimétricas das teorias de gauge supercondutoras em $D{=}(1{+}2)$ propostas por Dorey e Mavromatos [15]. Tais teorias parecem oferecer também o cenário natural para a formulação de supersimetrias estendidas, devido à presença de termos mistos nos campos estatístico e do fóton.

–Na linha do Capítulo 3, além do desenvolvimento da formulação em superespaço q-deformado citada acima, seria interessante estudar tal formulação do ponto-de-vista de dimensões mais elevadas, em particular no caso de $(2+1)$-dimensões. Também, poderíamos investigar se tais campos são representações de alguma álgebra q-deformada, tanto q-Poincaré como q-Clifford.

Apêndice A

Integrais de "Loops" em D=2

A.1 Caso (1,0)

A partir dos vértices extraídos da ação (1.38), as contribuições a1-*loop* para este modelo. Estes vértices são:

$$\begin{aligned} Vert. &= \frac{g\,q}{4\,\pi}\left\{\underbrace{(\partial_{\bar z}\phi^*)\,V_z\phi}_{1} \underbrace{-\,V_{\bar z}\,\phi^*\,(\partial_z\phi)}_{2} \underbrace{-\,(\partial_{\bar z}\phi)\,V_z\,\phi^*}_{3} + \underbrace{V_{\bar z}\,\phi\,(\partial_z\,\phi^*)}_{4} + \right. \\ &+ \left. \underbrace{2\,i\,\lambda\,V_{\bar z}\,\lambda^*}_{5} + \underbrace{i\,\eta\,\phi^*\lambda}_{6} + \underbrace{i\,\eta\,\phi\,\lambda^*}_{7}\right\} + \frac{g^2\,q^2}{2\,\pi}\underbrace{-V_{\bar z}\,\phi^*\,V_z\,\phi}_{8}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde o número sob os termos irão indicar como iremos fazer a combinação dos vértices para formar os *loops*. onde, para simplificar notação usamos a e b para diferirmos os pontos a ser realizada a integral. Levando-se em conta os vértices acima e usando os procedimentos e cálculos descritos em [52] para efetuar as integrais. Vemos que poderíamos construir diagramas à 1-*loop*, somente com os vértices 3, 4, 5, 6 e 7, mas sabendo que

$$\int d^2k\,\frac{k_z}{k^2} = 0 \tag{A.2}$$

isto implica que estas contribuições são nulas, por isto, relacionaremos, e resolveremos, somente as que são relevantes para este caso. Como segue, usando o cálculo indicado no no texto, temos:

$$
\begin{aligned}
1.1 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z}\phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\ (\partial_{\bar z}\phi^*(b))\, V_z(b)\, \phi(b)\ , \\
= \quad & -\frac{g^2\, q^2}{32\pi} \int dz\, d\bar z\, V_z(z,\bar z)\, \frac{\partial_{\bar z}\,\partial_{\bar z}}{\Box}\, V_z(z,\bar z)\ , \qquad\qquad (A.3)
\end{aligned}
$$

verificamos que o *loop* 1.1 é igual ao 3.3. E analogamente

$$
\begin{aligned}
2.2 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2}\, \frac{p_z\, p_z}{p^2}\, V_{\bar z}(-p)\, V_{\bar z}(p) = \\
= \quad & -\frac{g^2\, q^2}{32\,\pi} \int V_{\bar z}(z,\bar z)\, \frac{\partial_z\,\partial_z}{\Box}\, V_{\bar z}(z,\bar z)\ , \qquad\qquad (A.4)
\end{aligned}
$$

com 2.2 igual a 4.4. Continuando

$$
\begin{aligned}
1.2 \quad \Rightarrow \quad & \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z}\phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\ \ V_{\bar z}(b)\, \phi^*(b)(\partial_z\phi(b))\ , \\
= \quad & \frac{-g^2\, q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + ln\left(\frac{a\,\pi\mu^2}{a^2}\right)\right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\ , \qquad (A.5)
\end{aligned}
$$

o parâmetro ε tende a zero, γ_E é a constante de Euler e no argumento do logaritmo, μ é um parâmetro de massa que vem da regularização. Como vemos este diagrama nos dá uma contribuição infinita, a qual se cancelará na soma final das contribuições. Seguindo:

$$
\begin{aligned}
1.3 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z}\phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\ (\partial_{\bar z}\phi(b))\, V_z(b)\, \phi^*(b)\ , \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\pi} \int dz\, d\bar z\, V_z(z,\bar z)\, \frac{\partial_{\bar z}\,\partial_{\bar z}}{\Box}\, V_z(z,\bar z)\ , \qquad\qquad (A.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1.4 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z}\phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\ \ V_{\bar z}(b)\, \phi(b)(\partial_z\phi^*(b))\ , \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2}\, V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\ + \\
- \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + ln\left(\frac{a\,\pi\mu^2}{a^2}\right)\right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\ , \qquad (A.7)
\end{aligned}
$$

$$2.3 \quad \Rightarrow \quad \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, V_{\bar z}(a)\, \phi^*(a)\, (\partial_z \phi(a))\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b)\, (\partial_z \phi^*(b))\;,$$

$$= \frac{g^2\, q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2}\, V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\; +$$

$$- \frac{g^2\, q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + ln\left(\frac{a\,\pi\mu^2}{a^2}\right)\right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p) \tag{A.8}$$

$$2.4 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, V_{\bar z}(a)\, \phi^*(a)\, (\partial_z \phi(a))\;\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b) (\partial_z \phi^*(b))\;,$$

$$= \frac{g^2\, q^2}{16\pi} \int dz\, d\bar z\, V_{\bar z}(z, \bar z)\, \frac{\partial_z\, \partial_z}{\Box}\, V_{\bar z}(z, \bar z)\;, \tag{A.9}$$

$$3.4 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z} \phi(a))\, V_z(a)\, \phi^*(a)\;\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b) (\partial_z \phi^*(b))\;,$$

$$= \frac{-g^2\, q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + ln\left(\frac{a\,\pi\mu^2}{a^2}\right)\right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\;, \tag{A.10}$$

$$8 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{2\,\pi} \int dz_a\, dz_b\, V_{\bar z}(a) \phi^*(a)\, V_{\bar z}(a) \phi^*(a) \; =$$

$$= \frac{g^2\, q^2}{4\,\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + ln\left(\frac{a\,\pi\mu^2}{a^2}\right)\right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\;, \tag{A.11}$$

$$5.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{8\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, \lambda^*(a)\, V_{\bar z}(a)\, \lambda(a)\;\; \lambda^*(b)\, V_{\bar z}(b)\, \lambda(b)\;,$$

$$= \frac{g^2\, q^2}{8\pi} \int dz\, d\bar z\, V_z(z, \bar z)\, \frac{\partial_{\bar z}\, \partial_{\bar z}}{\Box}\, V_z(z, \bar z)\;, \tag{A.12}$$

$$6.7 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, \eta(a)\, \phi^*(a)\, \lambda(a)\;\; \eta(b)\, \phi(b) \lambda^*(b)\;\;,$$

$$= \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi} \int dz\, d\bar z\, \eta(z, \bar z)\, \frac{\partial_z}{\Box}\, \eta(z, \bar z)\;. \tag{A.13}$$

Observe que

$$1.1 + 3.3 + 1.3 + 5.5 \;=\; 5.5\,, \tag{A.14}$$

$$
\begin{aligned}
2.2 + 4.4 + 2.4 &= 0\,, \\
1.2 + 1.4 + 3.4 + 2.3 + 8 &= \frac{g^2 q^2}{8\pi} \int dz\, d\bar{z}\, V_{\bar{z}} V_z\,.
\end{aligned}
$$

A.2 Caso (1,1)

A partir dos vértices dados em (1.55), ou

$$
\begin{aligned}
Vert. &= \frac{g\,q}{4\pi} \left\{ \underbrace{(\partial_{\bar{z}}\phi^*)\, V_z \phi}_{1} \underbrace{- V_{\bar{z}}\, \phi^*\, (\partial_z \phi)}_{2} \underbrace{- (\partial_{\bar{z}}\phi)\, V_z\, \phi^*}_{3} + \underbrace{V_{\bar{z}}\, \phi\, (\partial_z\, \phi^*)}_{4} + \right. \\
&+ \left. \underbrace{2\, i\, \lambda\, V_{\bar{z}}\, \eta}_{5} + \underbrace{2\, i\, \lambda^*\, V_z\, \eta^*}_{6} \underbrace{- \rho^*\, \phi^* \lambda}_{7} + \underbrace{\rho^*\, \phi\, \eta}_{8} \underbrace{- \lambda^*\, \rho\, \phi}_{9} + \underbrace{\eta^*\, \rho\, \phi^*}_{10} \right\} + \\
&+ \frac{g^2 q^2}{2\pi} \underbrace{- V_{\bar{z}}\, \phi^*\, V_z\, \phi}_{11}\,, \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

e de modo análogo ao caso anterior, efetuamos o cálculo das contribuições a $1 - loop$. As quais são:

$$
\begin{aligned}
1.1 \;\Rightarrow\; & \frac{g^2 q^2}{16\, \pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar{z}}\phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\; (\partial_{\bar{z}}\phi^*(b))\, V_z(b)\, \phi(b)\,, \\
= & -\frac{g^2 q^2}{32\pi} \int dz\, d\bar{z}\, V_z(z,\bar{z})\, \frac{\partial_{\bar{z}}\, \partial_{\bar{z}}}{\Box}\, V_z(z,\bar{z})\,, \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}
$$

verificamos que o *loop* 1.1 é igual ao 3.3. E analogamente

$$
\begin{aligned}
2.2 \;\Rightarrow\; & \frac{g^2 q^2}{16\,\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2}\, \frac{p_z\, p_z}{p^2}\, V_{\bar{z}}(-p)\, V_{\bar{z}}(p) = \\
= & -\frac{g^2 q^2}{32\,\pi} \int V_{\bar{z}}(z,\bar{z})\, \frac{\partial_z\, \partial_z}{\Box}\, V_{\bar{z}}(z,\bar{z})\,, \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

com 2.2 igual a 4.4. Continuando

$$
\begin{aligned}
1.2 \;\Rightarrow\; & \frac{-g^2 q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar{z}}\phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\;\; V_{\bar{z}}(b)\, \phi^*(b) (\partial_z \phi(b))\,, \\
= & \frac{-g^2 q^2}{16\pi} \int \frac{d^2p}{(2\,\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + ln\left(\frac{a\, \pi \mu^2}{a^2} \right) \right] V_z(-p)\, V_{\bar{z}}(p)\,, \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}
$$

Seguindo:

$$
\begin{aligned}
1.3 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\, \pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z} \phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\; (\partial_{\bar z} \phi(b))\, V_z(b)\, \phi^*(b)\;, \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{16 \pi} \int dz\, d\bar z\, V_z(z, \bar z)\, \frac{\partial_{\bar z}\, \partial_{\bar z}}{\Box}\, V_z(z, \bar z)\;, \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1.4 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\, \pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z} \phi^*(a))\, V_z(a)\, \phi(a)\;\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b) (\partial_z \phi^*(b))\;, \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{16 \pi} \int \frac{d^2 p}{(2\, \pi)^2}\, V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\; + \\
- \quad & \frac{g^2\, q^2}{16 \pi} \int \frac{d^2 p}{(2\, \pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \, - \, \gamma_E \, + \, ln \left(\frac{a\, \pi \mu^2}{a^2} \right) \right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\;, \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.3 \quad \Rightarrow \quad & \frac{g^2\, q^2}{16\, \pi^2} \int dz_a\, dz_b\, V_{\bar z}(a)\, \phi^*(a)\, (\partial_z \phi(a))\;\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b)\; (\partial_z \phi^*(b))\;, \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{16 \pi} \int \frac{d^2 p}{(2\, \pi)^2}\, V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\; + \\
- \quad & \frac{g^2\, q^2}{16 \pi} \int \frac{d^2 p}{(2\, \pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \, - \, \gamma_E \, + \, ln \left(\frac{a\, \pi \mu^2}{a^2} \right) \right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p) \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.4 \quad \Rightarrow \quad & \frac{-g^2\, q^2}{16\, \pi^2} \int dz_a\, dz_b\, V_{\bar z}(a)\, \phi^*(a)\, (\partial_z \phi(a))\;\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b) (\partial_z \phi^*(b))\;, \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{16 \pi} \int dz\, d\bar z\, V_{\bar z}(z, \bar z)\, \frac{\partial_z\, \partial_z}{\Box}\, V_{\bar z}(z, \bar z)\;, \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.4 \quad \Rightarrow \quad & \frac{-g^2\, q^2}{16\, \pi^2} \int dz_a\, dz_b\, (\partial_{\bar z} \phi(a))\, V_z(a)\, \phi^*(a)\;\; V_{\bar z}(b)\, \phi(b) (\partial_z \phi^*(b))\;, \\
= \quad & \frac{-g^2\, q^2}{16 \pi} \int \frac{d^2 p}{(2\, \pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \, - \, \gamma_E \, + \, ln \left(\frac{a\, \pi \mu^2}{a^2} \right) \right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\;, \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11 \quad \Rightarrow \quad & \frac{-g^2\, q^2}{2\, \pi} \int dz_a\, dz_b\, V_{\bar z}(a) \phi^*(a)\, V_{\bar z}(a) \phi^*(a) \; = \\
= \quad & \frac{g^2\, q^2}{4\, \pi} \int \frac{d^2 p}{(2\, \pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \, - \, \gamma_E \, + \, ln \left(\frac{a\, \pi \mu^2}{a^2} \right) \right] V_z(-p)\, V_{\bar z}(p)\;, \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

$$5.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{8\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, \lambda(a)\, V_{\bar{z}}(a)\, \eta(a)\ \lambda(b)\, V_{\bar{z}}(b)\, \eta(b)\ ,$$
$$= \quad \frac{g^2\, q^2}{8\pi} \int dz\, d\bar{z}\, V_{\bar{z}}(z,\bar{z})\, \frac{\partial_z\, \partial_z}{\Box}\, V_{\bar{z}}(z,\bar{z})\ , \tag{A.25}$$

$$6.6 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{8\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, \lambda^*(a)\, V_z(a)\, \eta^*(a)\ \lambda^*(b)\, V_z(b)\, \eta^*(b)\ ,$$
$$= \quad \frac{g^2\, q^2}{8\pi} \int dz\, d\bar{z}\, V_z(z,\bar{z})\, \frac{\partial_{\bar{z}}\, \partial_{\bar{z}}}{\Box}\, V_z(z,\bar{z})\ , \tag{A.26}$$

$$7.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, \rho^*(a)\, \phi^*(a)\, \lambda(a)\ \rho^*(b)\, \phi(b) \eta(b)\ ,$$
$$= \quad \frac{g^2\, q^2}{16\,\pi} \int dz\, d\bar{z}\, \rho^*(z,\bar{z})\, \frac{\partial_z}{\Box}\, \rho^*(z,\bar{z})\ , \tag{A.27}$$

$$9.10 \quad \Rightarrow \quad \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi^2} \int dz_a\, dz_b\, \lambda^*(a)\, \rho(a)\, \phi(a)\quad \eta^*(b)\, \rho(b)\, \phi^*(b)\ ,$$
$$= \quad \frac{-g^2\, q^2}{16\,\pi} \int dz\, d\bar{z}\, \rho(z,\bar{z})\, \frac{\partial_{\bar{z}}}{\Box}\, \rho(z,\bar{z})\ . \tag{A.28}$$

Observe que

$$\begin{aligned} 1.1 + 3.3 + 1.3 + 6.6 \quad &= \quad 6.6\,, \\ 2.2 + 4.4 + 2.4 + 5.5 \quad &= \quad 5.5\,, \\ 1.2 + 1.4 + 2.3 + 3.4 + 11 \quad &= \quad \frac{q^2\, g^2}{8\,\pi} \int dz, d\bar{z}\, V_{\bar{z}}\, V_z\,. \end{aligned} \tag{A.29}$$

Apêndice B

Cálculo das Supercargas

B.1 Modelo Escalar Auto-Interagente

Para encontrarmos a carga de supersimetria, tomamos a integral espacial do elemento 0 da supercorrente dada em (2.23), isto é,

$$\begin{aligned} Q_c &= \int d^2x J^0{}_c \\ &= \int d^2x \left\{ \underbrace{-i\,\psi^a\,(\Gamma^0)_{ac}\left(m\,A + \frac{\lambda}{2}A^3\right)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\psi_c\,\partial^0\,A}_{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\,A\,\partial^0\,\psi_c}_{3} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{-\frac{i}{2}\varepsilon^{0\,\nu\,\rho}\,\psi^a\,(\Gamma_\rho)_{ac}\,\partial_\nu\,A}_{4} + \underbrace{\frac{i}{2}\varepsilon^{0\,\nu\,\rho}\,A\,\partial_\nu\,\psi^a\,(\Gamma_\rho)_{ac}}_{5} \right\}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

Antes de calcularmos a relação de anticomutação das cargas, vamos citar uma identidade a qual pode ser verificada diretamente. Para quaisquer dois campos: ψ espinorial e X escalar (ou vetorial) e seus momentos conjugados Π_ψ e Π_X, com regras de comutação graduadas $\{\psi\,,\,\Pi_\psi\} = [X\,,\,\Pi_X] = \delta^2(x-y)$, nós podemos escrever a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \{\psi(x)\,X(x)\,,\,\Pi_\psi(y)\,\Pi_X(y)\} &= \{\psi(x)\,,\,\Pi_\psi(y)\}\,X(x)\,\Pi_X(y)\;+ \\ &- \;\Pi_\psi(y)\,\psi(x)[X(x)\,,\,\Pi_X(y)]\,, \end{aligned} \tag{B.2}$$

Com estas relações gerais podemos calcular a anticomutação das cargas de Supersimetria. Da expressão (2.24), como na álgebra de operadores, fazendo duas operações, encontramos esta álgebra para o modelo o qual estamos trabalhando. Onde, para efetuar as anticomutações nós utilizamos as expressões (B.2), a álgebra das matrizes Γ, (2.26) e (2.27), conduzindo ao seguinte resultado parcial (já efetuada a integração com a função delta de Dirac $\delta^2(x-y)$):

$$
\begin{aligned}
&\{Q_a(x)\,,\,Q_b(y)\} = \int d^2x \times \\
(1.1)\quad & -2i\left(\frac{1}{2}m^2A^2+\frac{1}{2}m\lambda A^4+\frac{1}{4}\lambda^2A^6\right)(\Gamma^0)_{ab}+ \\
(1.2)\quad & +\left(mA+\frac{1}{2}\lambda A^3\right)\partial^0 C_{ba}+i\psi_b\psi^c\left(m+\frac{3}{2}\lambda A^2\right)(\Gamma^0)_{ab}+ \\
(1.4)\quad & +i\varepsilon^{ij}\left(mA+\frac{1}{2}\lambda A^3\right)\partial_i A\,(\Gamma_j)_{ab}+ \\
(2.1)\quad & +\left(mA+\frac{1}{2}\lambda A^3\right)\partial^0 C_{ab}-i\psi^c\psi_a\left(m+\frac{3}{2}A^2\right)(\Gamma^0)_{ca}+ \\
(2.2)\quad & -\frac{i}{2}(\partial^0A)(\partial^0A)(\Gamma^0)_{ab}+ \\
(2.3)\quad & +\frac{1}{2}(\partial^0\psi_b)\psi_a+ \\
(2.4)\quad & -\frac{i}{2}(\partial^0A)(\partial^iA)(\Gamma_i)_{ab}+ \\
(2.5)\quad & +\frac{i}{2}\varepsilon^{ij}(\partial_i\psi^c)\psi_a(\Gamma_j)_{cb}+ \\
(3.2)\quad & -\frac{1}{2}\psi^b\partial^0\psi_a+ \\
(4.1)\quad & +i\varepsilon^{ij}\left(mA+\frac{1}{2}\lambda A^3\right)\partial_i A\,(\Gamma_j)_{ab}+ \\
(4.2)\quad & -\frac{i}{2}(\partial^0A)(\partial^iA)(\Gamma_i)_{ab}+ \\
(4.4)\quad & +\frac{i}{2}(\partial_iA)(\partial^iA)(\Gamma^0)_{ab}+ \\
(5.2)\quad & -\frac{i}{2}\varepsilon^{ij}\psi_b(\partial_i\psi^c)(\Gamma_j)_{ac}\,,
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

Onde os demais termos são nulos, e como nós observamos as seguintes manipulações para o cálculo:

$$\psi_a\psi_b = \frac{1}{2}C_{ba}\psi^c\psi_c = C_{ba}\psi^2\,, \tag{B.4.a}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\psi_b\,\partial^0\,\psi_a\,+\,\psi_a\,\partial^0\,\psi_b\right) \;=\; -\psi_c\,(\Gamma^0)^c{}_d\,\partial^0\,\psi^d\,(\Gamma^0)_{ab}\,+$$
$$+\;\psi_c\,(\Gamma^i)^c{}_d\,\partial^0\,\psi^d\,(\Gamma^i)_{ab}\,, \qquad \text{(B.4.b)}$$

$$-\frac{i}{2}\left(\varepsilon^{ij}\,\psi_a\,\partial_i\,\psi^c\,(\Gamma_j)_{cb}\,-\,\varepsilon^{ij}\,\psi_b\,\partial_i\,\psi^c\,(\Gamma_j)_{ca}\right) \;=\; \psi_c\,(\Gamma^0)^c{}_d\,\partial^i\,\psi^d\,(\Gamma^i)_{ab}\,+$$
$$-\;\psi_c\,(\Gamma^i)^c{}_d\,\partial^i\,\psi^d\,(\Gamma^0)_{ab}\,, \qquad \text{(B.4.c)}$$

$$1.2)\,+\,2.1)\,=\,2\,i\,\psi^2\left(m\,+\,\tfrac{3}{2}\,\lambda\,A^2\right)\,(\Gamma^0)_{ab}\,, \qquad \text{(B.4.d)}$$

$$\begin{aligned}
\{Q_c(x)\,,\,Q_d(y)\} \;=\; &\int d^2x\,\times \\
-2\,i\,\Big\{\frac{1}{4}\Big[\;&2\,i\,\psi^a\,(\Gamma^0)_a{}^b\,\partial^0\,\psi_b\,+\,(\partial^0\,A)(\partial^0\,A)\,+\,2\,i\,\psi^a\,(\Gamma^i)_a{}^b\,\partial^i\,\psi_b\,+(\partial^i\,A)(\partial^i\,A)+ \\
-\quad &\psi^2\left(m\,+\,\tfrac{3}{2}\,\lambda\,A^2\right)\,+\,\left(\tfrac{1}{2}\,m^2\,A^2\,+\,\tfrac{1}{2}\,m\,\lambda\,A^4\,+\,\tfrac{1}{4}\,\lambda^2\,A^6\right)\;\Big]\;\Big\}\,(\Gamma^0)_{cd}\,+ \\
-2\,i\,\Big\{\frac{1}{4}\;\;&2\,i\,\psi^a\,(\Gamma^{(0})_a{}^b\,\partial^{i)}\,\psi_b\,+\,(\partial^{(0}\,A)\,(\partial^{i)}\,A)\;\Big\}\,(\Gamma_i)_{cd}\,+ \qquad \text{(B.5)}\\
+2\,i\varepsilon^{ij}\,&\left(m\,A\,+\,\frac{1}{2}\,\lambda\,A^3\right)\,\partial_i\,A\,(\Gamma_j)_{cd}\,.
\end{aligned}$$

Agora a título de comparação necessitamos da expressão do momento, como componente do tensor energia-momento, que obtemos via gravitação, como foi utlizado no Capítulo 1 (só que para o caso de teoria de campos, isto é, sem o fator π na expressão) (1.42.a) aplicado a ação (2.10). Este resultado é encontrado por cálculo direto como sendo:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} \;=\;& \frac{1}{2}\left\{\psi^a(\Gamma^{(\mu})_a{}^b\,i\,\partial^{\nu)}\psi_b\,-\,\frac{1}{2}(\,\partial^{(\mu}A)(\,\partial^{\nu)}A)\right\}\,+ \\
+\;\;& \eta^{\mu\nu}\left\{-\frac{i}{2}\psi^a(\Gamma^{(\alpha})_a{}^b\,i\,\partial_{\alpha)}\psi_b\,+\,\frac{1}{4}(\partial^\alpha A)(\partial_\alpha A)\,+\right. \\
+\;\;& \left. m\psi^2\,+\,\frac{3}{2}\lambda\,\psi^2\,A^2\,-\,\frac{1}{2}m^2\,A^2\,-\,\frac{1}{2}m\,\lambda\,A^4\,-\,\frac{1}{4}\lambda^2\,A^6\right\} \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

Com as componentes

$$\int d^2x\, T^{0i} \equiv P^i = \int d^2x\, \frac{1}{2}\left\{ i\,\psi^a(\Gamma^{(0})_a{}^b i\,\partial^{i)}\psi_b - \frac{1}{2}(\partial^{(0}A)(\partial^{i)}A)\right\}, \tag{B.7}$$

e

$$\begin{aligned} \int d^2x\, T^{00} \equiv P^0 &= \int d^2x\, \frac{1}{2}\Big\{ i\,\psi^a(\Gamma^0)_a{}^b i\,\partial^0\psi_b + \psi^a(\Gamma^i)_a{}^b i\,\partial^i\psi_b + \\ &- \frac{1}{4}\Big[(\partial^0 A)(\partial^0 A) + (\partial^i A)(\partial^i A)\Big] - m\psi^2 - \frac{3}{2}\lambda\,\psi^2 A^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m^2 A^2 + \frac{1}{2}m\,\lambda\, A^4 + \frac{1}{4}\lambda^2 A^6\Big\}\,. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Ou seja,

$$\{Q_a(x)\,,\, Q_b(y)\} = 2\,i\,P^\mu\,(\Gamma_\mu)_{ab} + 2\,i\varepsilon^{ij}\int d^2x\,\left(m\,A + \frac{1}{2}\,\lambda\,A^3\right)\,\partial_i\,A\,(\Gamma_j)_{ab} \tag{B.9}$$

B.2 Modelo de Gauge Abeliano

$$\begin{aligned} Q_c &= \int d^2x J^0{}_c = \\ &= \int d^2x \frac{1}{2}\Bigg\{ \underbrace{-\,(\psi_c\,\partial^0\,\bar{A} + \bar{\psi}_c\,\partial^0\,A)}_{1} + \underbrace{i\,\varepsilon^{0\,i\,j}\,[\bar{\psi}^a\,(\Gamma_j)_{ac}\,\partial_i\,A + \psi^a\,(\Gamma_j)_{ac}\,\partial_i\,\bar{A}]}_{2} + \\ &\qquad \underbrace{-\,(\bar{A}\,\partial^0\,\psi_c + A\,\partial^0\,\bar{\psi}_c)}_{3} + \underbrace{i\,\varepsilon^{0\,i\,j}\,(\bar{A}\,\partial_i\,\psi^a + A\,\partial_i\,\bar{\psi}^a)(\Gamma_j)_{ac}}_{4}\Bigg\} \end{aligned} \tag{B.10}$$

Para calcular a álgebra das supercargas, utilizamos as expressões da álgebra de Clifford das matrizes Γ, (2.26) e (2.27). Resultando

$$\{Q_a(x)\,,\, Q_b(y)\} = \frac{1}{4}\int d^2x\, \times$$

$$(1.1)\ 8\,i\,(D^0 A)(D^0 \bar{A})(\Gamma^0)_{ab} +$$

$$(1.2)\ 4\,i\Big[(D^0 A)(D^i \bar{A}) + (D^0 \bar{A})(D^i A)\Big]\,(\Gamma_i)_{ab} +$$

$$(1.3)\ -4\,(\bar{\psi}_a D^0 \psi_b + \psi_a D^0 \bar{\psi}_b) +$$

$$(1.4)\ 4\,i\,\epsilon^{ij}\left[\bar{\psi}_a D_i \psi_c + \psi_a D_i \bar{\psi}_c\right](\Gamma_j)^c{}_b +$$

$$(2.1)\ 4\,i\left[(D^0 A)(D^i \bar{A}) + (D^0 \bar{A})(D^i A)\right](\Gamma_i)_{ab} +$$

$$(2.2)\ 8\,i\left[(D^i A)(D_i \bar{A})\right](\Gamma^0)_{ab} +$$

$$(3.1)\ -4\,(\bar{\psi}_b D^0 \psi_a + \psi_b D^0 \bar{\psi}_a) +$$

$$(4.1)\ 4\,i\,\epsilon^{ij}\left[\bar{\psi}_b D_i \psi_c + \psi_b D_i \bar{\psi}_c\right](\Gamma_j)^c{}_a\,, \tag{B.11}$$

os demais são nulos. Fazendo as manipulações:

$$\begin{aligned}(1.3)+(3.1) &= -4\left[\bar{\psi}_a (\Gamma^0)^a{}_b D^0 \psi^b + \psi_a (\Gamma^0)^a{}_b D^0 \bar{\psi}_b\right](\Gamma^0)_{ab} + \\ &\quad +4\left[\bar{\psi}_a (\Gamma^i)^a{}_b D^0 \psi^b + \psi_a (\Gamma^i)^a{}_b D^0 \bar{\psi}_b\right](\Gamma^i)_{ab}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.4)+(4.1) &= -4\left[\bar{\psi}_a (\Gamma^0)^a{}_b D^i \psi^b + \psi_a (\Gamma^0)^a{}_b D^i \bar{\psi}_b\right](\Gamma^i)_{ab} + \\ &\quad +4\left[\bar{\psi}_a (\Gamma^i)^a{}_b D_i \psi^b + \psi_a (\Gamma^i)^a{}_b D_i \bar{\psi}_b\right](\Gamma^0)_{ab}\,,\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, vamos fazer uma comparação com o tensor energia-momento calculado diretamente usando a expressão (1.42.a), para o caso de teoria de campos, aplicada a ação (2.47), o que implica em

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\left\{\bar{\psi}^a (\Gamma^{(\mu})_a{}^b i D^{\nu)} \psi_b + \psi^a (\Gamma^{(\mu})_a{}^b i D^{\nu)} \bar{\psi}_b\right\} - (D^{(\mu} \bar{A})(D^{\nu)} A) + \\ &+ \eta^{\mu\nu}\left\{-\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}^a (\Gamma^{(\alpha})_a{}^b i D_{\alpha)} \psi_b + \psi^a (\Gamma^{(\alpha})_a{}^b i D_{\alpha)} \bar{\psi}_b\right] + (D^\alpha \bar{A})(D_\alpha A)\right\}\end{aligned} \tag{B.12}$$

Com as componentes

$$T^{0i} \equiv P^i = \frac{i}{2}\left\{\bar{\psi}^a (\Gamma^{(0})_a{}^b i D^{i)} \psi_b + \psi^a (\Gamma^{(0})_a{}^b i D^{i)} \bar{\psi}_b\right\} - (D^{(0} \bar{A})(D^{i)} A)\,, \tag{B.13}$$

$$
\begin{aligned}
T^{00} \equiv P^0 \; &= \; \frac{i}{2}\Big\{\bar{\psi}^a(\Gamma^0)_a{}^b iD^0\psi_b \,+\, \psi^a(\Gamma^0)_a{}^b iD^0\bar{\psi}_b \,+\, \bar{\psi}^a(\Gamma^i)_a{}^b iD^i\psi_b + \\
&+ \; \psi^a(\Gamma^i)_a{}^b iD^i\bar{\psi}_b\Big\} \,-\, \Big\{(D^0\bar{A})(D^0A) \,+\, (D^i\bar{A})(D^iA)\Big\}\,. \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}
$$

Logo, observando as expressões acima, chegamos

$$
\{Q_a(x)\,,\,Q_b(y)\} = -2\,i\,P^\mu(\Gamma_\mu)_{ab}\,. \qquad \text{(B.15)}
$$

B.3 Termo de Chern-Simons

A partir do termo para a carga gerado pelo termo de Chern-Simons, ou seja,

$$
(Q_{SCS})_c \,=\, \int d^2x(J_{SCS})^0_c \,=\, \int d^2x\left\{\underbrace{\frac{i}{2}V^0\left(\psi_c\bar{A} - \bar{\psi}_cA\right)}_{5}\right\}\,, \qquad \text{(B.16)}
$$

o qual vamos adicionar à álgebra de supercargas já calculada anteriormente os termos da formulação canônica que faltam, em relação à carga referente ao termo de Chern–Simons, isto é:

$$
\begin{aligned}
& \{Q_a(x)\,,\,Q_b(y)\}_{CS} = \frac{1}{4}\int d^2x\,\times \\
(1.5)\quad & -4\,i\,V^0(\psi_b\bar{\psi}_a - \bar{\psi}_b\psi_a) + 4\,V^0\,(\bar{A}D^0A - AD^0\bar{A})(\Gamma^0)_{ab} + \\
(2.5)\quad & 4\,V^0(\bar{A}D^iA - AD^i\bar{A})(\Gamma_i)_{ab} + \\
(5.1)\quad & 4\,i\,V^0(\bar{\psi}_b\psi_a - \psi_b\bar{\psi}_a) + 4\,V^0(\bar{A}D^0A - AD^0\bar{A})(\Gamma^0)_{ab} + \\
(5.2)\quad & 4\,V^0(\bar{A}D^iA - AD^i\bar{A})(\Gamma_i)_{ab} + \\
(5.5)\quad & 8\,i\,(V^0)^2\bar{A}A(\Gamma^0)_{ab} \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

sendo os demais termos nulos. O que podemos escrever simbolicamente:

$$
\{Q_a\,,Q_b\}_{CS} \,=\, 2\,i\,P^\mu(V^0)(\Gamma_\mu)_{ab}\,, \qquad \text{(B.18)}
$$

onde $P^{\mu}(V^0)$ significa uma função que só depende da componente V^0 do campo de gauge.

Apêndice C

Expressões Generalizadas

Neste apêndice apresentaremos uma coleção de expressões com fatores quomutantes genéricos. Enfatizamos que as relações de quomutação são fixadas pela homogeneidade da estatística, e então, os expoentes são fixados por realidade. Além do mais, sabe-se que os únicos valores significativos são 1 e 2, e a escolha é arbitrária. O que nós usamos no texto é $\alpha = 1, A_1 = A_2 = 2, B_1 = C_2 = 1, B_2 = C_1 = 2$ and $n = 2$.

–Translações no parâmetro do q-superespaço:

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta + q^{A_1}\, C^{(0)}\, \varepsilon\,, \\ t' &= t + q^{2A_1} C^{(0)} \theta^2 \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{C.1}$$

– quomutadores fixados:

$$\begin{aligned} [\theta, \varepsilon]_{q^{A_1}} &= 0\,, \\ [C^{(0)}, \theta]_{q^{A_1}} &= 0\,, \\ [C^{(0)}, \varepsilon]_{q^{A_1}}\,. &= 0 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Existem duas derivadas paragrassmannianas que obedecem

$$\partial_\theta \theta = 1 + q^{\alpha}\, \theta\, \partial_\theta\,, \tag{C.3}$$

$$\delta_\theta \theta = 1 + q^{2\alpha}\, \theta\delta_\theta \,, \tag{C.4}$$

e então a derivada covariante pode ser escrita como

$$D = q^{nA_1} C^{(0)^n} [\theta^2 \partial_t + q^{2\alpha}\partial_\theta + q^\alpha \delta_\theta] \,, \tag{C.5}$$

onde podemos, também, o valor de n entre 1 e 2.

– O q-supercampo escalar:

$$X(t;\theta) = x(t) + q^{2B_2}\, \theta\, C^{(2)}\psi^{(2)}(t) + q^{B_1}\, \theta^2\, C^{(1)}\psi^{(1)}(t) \,. \tag{C.6}$$

– Os quommutadores fixados:

$$\begin{aligned} [\psi^{(1)}, \psi^{(2)}]_{q^{A_2}} &= 0 \,, \\ [\theta, \psi^{(i)}]_{q^{B_i}} &= 0 \,, \\ [\varepsilon, \psi^{(i)}]_{q^{C_i}} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{C.7}$$

– E, então,os outros quomutadores:

$$\begin{aligned} \theta\, C^{(1)} &= q^{2B_1}\, C^{(1)}\, \theta \quad &,& \quad \theta\, C^{(2)} = q^{2B_2}\, C^{(2)}\, \theta \,, \\ \varepsilon\, C^{(1)} &= q^{2A_1+2C_1}\, C^{(1)}\, \varepsilon \quad &,& \quad \varepsilon\, C^{(2)} = q^{A_1+2C_2}\, C^{(2)}\, \varepsilon \,, \\ \psi^{(1)}\, C^{(1)} &= q^{B_1}\, C^{(1)}\, \psi^{(1)} \quad &,& \quad \psi^{(1)}\, C^{(2)} = q^{B_1+2A_2}\, C^{(2)}\, \psi^{(1)} \,, \\ \psi^{(2)}\, C^{(1)} &= q^{2B_2+A_2}\, C^{(1)}\, \psi^{(2)} \quad &,& \quad \psi^{(2)}\, C^{(2)} = q^{B_2}\, C^{(2)}\psi^{(2)} \,, \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$[C^{(1)}, C^{(2)}]_{q^{A_2+2B_1+2B_2}} = 0 \,. \tag{C.9}$$

– A variação de um campo Φ qualquer:

$$\Delta\Phi = q^{A_1}\, C^{(0)}\, \varepsilon\, Q\, \Phi \,. \tag{C.10}$$

– Fixando:

$$\psi^{(1)}\, C^{(0)} = q^{C_1+2B_1}\; C^{(0)}\, \psi^{(1)}\,,$$

$$\psi^{(2)}\, C^{(0)} = q^{2B_2+C_2}\; C^{(0)}\, \psi^{(2)}\,,$$

$$C^{(1)}\, C^{(0)} = q^{2A_1+B_1+2C_1}\; C^{(0)}\, C^{(1)}\,,$$

$$C^{(2)}\, C^{(0)} = q^{A_1+B_2+2C_2}\; C^{(0)}\, C^{(2)}\,. \tag{C.11}$$

– O q-supercampo espinorial (2º setor) $\Xi^{(2)}$

$$\Xi^{(2)}(t) = \xi^{(2)} + q^{B_2+2B_1+2A_2}\theta L^{(1)}\xi^{(1)} + q^{2B_2}\theta^2 L^{(2)} F\,, \tag{C.12}$$

– as relações de q-comutação:

$$\begin{aligned}
\theta\, L^{(1)} &= q^{2B_1+B_2}\; L^{(1)}\,\theta \quad &;\quad \theta\, L^{(2)} &= q^{B_2}\; L^{(2)}\,\theta\,,\\
\varepsilon\, L^{(1)} &= q^{A_1+2C_1+C_2}\; L^{(1)}\,\varepsilon \quad &;\quad \varepsilon\, L^{(2)} &= q^{2A_1+C_2}\; L^{(2)}\,\varepsilon\,,\\
\xi^{(1)}\, L^{(1)} &= q^{B_1+A_2}\; L^{(1)}\,\xi^{(1)} \quad &;\quad \xi^{(1)}\, L^{(2)} &= q^{2B_1+A_2}\; L^{(2)}\,\xi^{(1)}\,,\\
\xi^{(2)}\, L^{(1)} &= q^{B_2+A_2}\; L^{(1)}\,\xi^{(2)} \quad &;\quad \xi^{(2)}\, L^{(2)} &= q^{2B_2}\; L^{(2)}\,\xi^{(2)}\,,\\
C^{(0)}\, L^{(1)} &= q^{P}\; L^{(1)}\,C^{(0)} \quad &;\quad C^{(0)}\, L^{(2)} &= q^{M}\; L^{(2)}\,C^{(0)}\,,
\end{aligned} \tag{C.13}$$

onde P é $2A_1 + C_1 + 2B_1 + C_2 + 2B_2$, e M, $A_1 + B_2 + 2C_2$.

$$L^{(1)}\, L^{(2)} = q^{B_2+B_1+2A_2}\; L^{(2)}\, L^{(1)}\,. \tag{C.14}$$

As expressões generalizadas das ações são as seguintes:

– Para o supercampo X

$$S_X = \int dt d\theta\, [-\,C^{(0)}\,(D^2\, X)(D^2\, X)]\,, \tag{C.15}$$

que em componentes é

$$S_X = \int dt[\dot{x}^2 + 2q^{B_2+B_1+A_2}\, C^{(2)}\, C^{(1)}\, \dot{\psi}^{(2)}\, \psi^{(1)}] \,. \tag{C.16}$$

– Para o supercampo $\Xi^{(2)}$

$$S_\Xi = q^{B_2+C_2} \int dtd\theta\, L^{(2)} {C^{(0)}}^2 (D\Xi^{(2)})^2 \,, \tag{C.17}$$

que em componentes fica

$$S_\Xi = \int dt\, [-2q^{2B_2+2B_1}\, L^{(2)} L^{(1)} \dot{\xi}^{(2)} \xi^{(1)} + F^2] \,. \tag{C.18}$$

– Para a ação de interação com o termo $X\Xi^{(2)}$

$$S_{X\Xi} = q^{2B_2} \int dtd\theta\, {L^{(2)}}^2 X\Xi^{(2)} \,, \tag{C.19}$$

com os termos componentes

$$\begin{aligned} S_{X\Xi} = \int dt\, [Fx + q^{2B_2+2B_1} {L^{(2)}}^2 C^{(2)} L^{(1)} \psi^{(2)} \xi^{(1)} + \\ + q^{B_1+B_2} {L^{(2)}}^2 C^{(1)} \psi^{(1)} \xi^{(2)}] \,. \end{aligned} \tag{C.20}$$

Referências

[1] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.***B59** (1975) 79 ;

[2] M. R. Douglas, *Conformal Field Theory Techniques for Large N Group Theory*, preprint RU-93-13, NSF-ITP-93-39, hep-th/9303159 ;
J. A. Minahan e A. P. Polychronakos, *Equivalence of Two Dimensional QCD and the $c = 1$ matrix model* preprint CERN-TH-6843/93, UVA-HET-93-02, hep-th/9303153; *Interacting Fermion Systems from Two Dimensional QCD* preprint CERN-TH-6994/93, UVA-HET-93-11, hep-th/9309044 ;

[3] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Hamiltonian Systems of Calogero Type and Two Dimensional Yang-Mills Theory*, preprint UUITP-6/93, hep-th/9304047 ;
M. Caselle, A. D' Adda, L. Magnea e S. Panzeri, *Two Dimensional QCD is a One Dimensional Kazakov-Migdal Model*, preprint DFTT 15/93, hep-th/9304015 ;

[4] D. J. Gross e W. Taylor, *Two-Dimensional QCD and Strings* preprint MIT-CTP-2250/93, hep-th/9311072;

[5] C. R. Nappi e E. Witten , preprint IASSNS-HEP-93/61,
D. I. Olive, E. Rabinovici e A. Schwimmer, preprint SWA/93-94/15, WIS-93/1-CS, RI-93/69 e hep-th/9311081;

[6] A. Linde, *Rep. Progr. Phys.* **42** (1979) 389,
S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975 ,
S. Deser, *Three Topics in Three Dimensions* , in the proceedings of the Trieste Con-

ference on Supermenbranes and Physics in 2+1 Dimensions, eds. M.J. Duef *et al.*, World Scientific (Singapore, July 1989);

[7] J. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157;

[8] D. Finkelstein e J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1762, J. M. Leinaas e J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37B** (1977) 1;

[9] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395;

[10] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2677;

[11] A. L. Fetter, C. B. Hanna e R. B. Laughlin, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 9679 , Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten e B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B3** (1989) 1001;

[12] R. Iengo e K. Lechner, *Phys. Reports* **213C** (1992) 179;

[13] K.-H. Cho e C. Rim, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 381;

[14] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372;

[15] N. Dorey e N. E. Mavromatos, *Nuc. Phys.* **B38** (1992) 614;

[16] N. E. Mavromatos, *Superconducting Gauge Theories in (2+1)-Dimensions*, CERN preprint, CERN-TH.6331/91 (1991);

[17] P. Ramond, *Phys. Rev.* **D39** (1971) 2145 ;

[18] H. P. Nilles, *Phys. Rep.* **110** (1984) 1 ;

[19] E. Gildener, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1667;

[20] J. A. Helayël-Neto, *Supersymmetric Theories and Finiteness*, X Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu, 1989 ;

[21] B. Zumino, *Phys. Lett.* **B87** (1979) 203 ;

[22] J. Schwinger, *Phys. Lett.* **128** (1962) 2425 ;

[23] M. Porrati e E. T. Tomboulis, *Nucl. Phys.* **B315** (1989) 615,
E. T. Tomboulis, *Phys. Lett.* **B198** (1987) 165,
J. Quackenbush, *Phys. Lett.* **B234** (1990) 285;

[24] L. P. Colatto, *On World–Sheet Gauge Fields in* $(1,0)$- *and* $(1,1)$-*Supersymmetric Gauge Theories* CBPF–NF–029/92, *Com. Theor. Phys.* aceito para publicação;

[25] M. Sakamoto, *Phys. Lett.* **B151** (1985) 115;

[26] D. J. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, *Nuc. Phys.* **B256** (1985) 253,
A. Sen, preprint do Fermilab, PUB-85/77-T (1985);

[27] L. Alvarez-Gaumé e D. Z. Freedman, *Com. Math. Phys.* **91** (1983) 87;

[28] P. Fendley, W. Lerche, S. D. Mathur e N. P. Warner, *Phys Lett.* **B243** (1990) 257;

[29] E. Martinec, *Catastrophes and Compactifications*, Physics and Mathematics of Strings, ed. L. Brink, D. Friedan e A. M. Polyakov World Scientific, Singapore, (1990),
C. Vafa e N. Warner, *Phys. Lett.* **B218** (1989) 51,
B. Greene, C. Vafa e N. Warner, *Nuc. Phys.* **B324** (1989) 371;

[30] E. Witten, *Nuc. Phys.* **B403** (1993) 159;

[31] S. Deser e Z. Yang, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 2123;

[32] R. Jackiw, E. J. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2234,
Y. Kim, J. Hong e P. Y. Pac, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2230;

[33] E. B. Bogomolny, *Sov. J. Nuc. Phys.* **24** (1976) 449;

[34] C. Lee, K. Lee e E. Weinberg, *Phys. Lett.* **B243** (1990) 105;

[35] S. Paul e A. Khare, *Phys. Lett.* **B174** (1986) 420; **B182** (1986) 414,
H. De Vega e F. Schaposnik, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 2564,
L. Jacobs, A. Khare, C. Kumar e S. Paul, preprint MIT CTP-1829 (1990);

[36] L. P. Colatto, *Some Remarks on Algebra of Supercharges in D=(1+2)*, a aparecer na *Helv. Phys. Acta* 67 (1994),
L. P. Colatto, *On the Central Charge in 3D-Supersymmetry*, CBPF-NF- 010/94, submetido para publicação;

[37] A. Lerda e S. Sciuto, *Nuc. Phys.* **B401** (1993) 613;

[38] L. Baulieu e E. Floratos, Phys. Lett. **B258** (1991) 271;

[39] S. Majid, Int. Jour. Mod. Phys. A **5** (1990) 1;

[40] A.T. Filipov, A.P. Isaev e A.B. Kurdikov, *Mod. Phys. Lett.* 7, (1992) 2129;

[41] A. Connes, *Non-Commutative Geometry*, Interscience, (1990);

[42] M. Dubois-Voilette, J. Madore e R. Kerner, *Phys. Lett.* **B217** (1989) 485,
M. Dubois-Voilette, R. Kerner e J. Madore, *Jour. Math. Phys.* **31** (1990) 316
R. Kerner, L. Nikolova e V. Rizov, *Lett. Math. Phys.* **14** (1987) 333;

[43] L. P. Colatto e J. L. Matheus-Valle, *On q-Deformed Supersymmetric Classical Mechanics Models*, CBPF-NF-008/94, submetido para publicação;

[44] C. A. S. Almeida e M. Werneck de Oliveira, *Class. Quan. Grav.* **10** (1993) 1681;

[45] L. Alvarez-Gaume, G. Moore e C. Vafa, *Comm. Math. Phys.* (1986) 151,
C. A. Linhares, H. J. Rothe e K. D. Rothe *Phys. Rev.* **D35** (1987) 2501;

[46] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*,;
Les Houches Elsevier Science Publishers (1989), edited by E. Brézin and Zinn-Justin,
A. A. Belavin, A. M. Polyakov e A. B. Zamolodchikov *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333;

[47] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **125** (1962) 397,

W. Siegel, *Phys. Rev.* **D84** (1979) 193,

W. Siegel, *Phys. Rev.* **D94** (1980) 37;

K. Harada, H. Kubota e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B173** (1986) 77,

K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B183** (1987) 311;

[48] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1219,

A. Das, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2126,

S. Xue, *Phys. Lett.* **B224** (1989) 309;

[49] E. Witten e D. Olive, *Phys. Lett.* **B78** (1978) 97,

P. Di Vecchia e S. Ferrar, *Nuc. Phys.* **B130** (1977) 93,

A. D'Adda e P. Di Vecchia, *Phys. Lett.* **B73** (1978) 162;

[50] R. Jackiw, *Field Theoretic Investigation in Current Algebra, Current Algebra and Anomalies*, S. B. Treiman, R. Jackiw, B Zumino e E. Witten (eds.), World Scientific Publishing Co. (1985);

[51] P. A. M. Dirac, *Can. Jour. Math.* **2** (1950) 129;

[52] H. B. Nielsen e P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45,

Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* - Cap. 9, Cambridge University Press, 1985;

[53] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, *Superspace*, Benjamin/Cummings Publishing Company (1983);

[54] S. Coleman e J. Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251,

R. Haag, J. T. Lopuszanski e M. Sohnius, *Nuc. Phys.* **B88** (1975) 257;

[55] E.K. Sklyanin e L.D. Fadeev, Sov. Phys. Dokl. **23** (1978) 902;

[56] V.G. Drinfeld, Sov. Math. Dokl. **27** (1983) 68;

[57] S.L. Woronowicz, Comm. Math. Phys. **111** (1987) 613;

[58] J.Wess e B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, preprint CERN–TH–5697/90, LAPP–TH–284/90;

[59] A.J. Macfarlane, J. Phys. A Math. Gen.**22** (1989) 4581,
L.C. Biedernharn, J. Phys. **A22** (1989) L873;

[60] J.L. Matheus-Valle e Marco A.R. Monteiro, *Mod. Phys. Lett.* **A 7** (1992) 3023,

[61] J.L. Matheus-Valle e Marco A.R. Monteiro, *Phys. Lett.* **B300** (1993);

[62] C. Ahn, D. Bernard e A. LeClair, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 409;

[63] S. Durand, *Fractional Superspace Formulation of Generalized Mechanics*, preprint McGill/93-06;

[64] N. Aizawa e H. Sato, Phys. Lett. **B256** (1991) 185;

[65] J. Rembieliński e K. A. Smoliński, *Non-commutative Quantum Dynamics*, Preprint KFT–UL–3/93.

"ALGUNS ASPECTOS RELATIVOS À DIMENSIONALIDADE EM MODELOS SUPERSIMÉTRICOS"

LUIZ PAULO COLATTO

Tese de Doutorado apresentada ao Centr
Brasileiro de Pesquisas Físicas do Con-
selho Nacional de Desenvolvimento Cien-
tífico e Tecnológico, fazendo parte d
Banca Examinadora, os seguintes profes-
sores:

J. A. Helayël - Neto.
José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Edgardo Salomon Cheb Terrab

João Barcelos Neto

Sebastião Alves Dias
Sebastião Alves Dias

Silvio Paolo Sorella
Silvio Paolo Sorella

Rio de Janeiro, 26 de agosto de 1994