

TESE DE
MESTRADO

**TEORIA DE PERTURBAÇÕES
VETORIAIS E TENSORIAIS
NO UNIVERSO DE
FRIEDMAN**

Renato Klippert Barcellos

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, 02 DE SETEMBRO DE 1994**

Dedicatória

Gostaria de dedicar este trabalho a todos os amigos que aqui encontrei, por servirem de estímulo para a própria vida.

Agradecimentos

- A Mario Novello, pela orientação do presente trabalho, pelas valiosas discussões sobre qualquer assunto e, sobretudo, pelo grande amigo que sempre se mostrou até hoje;
- A Eliane Cappelletto, pela compreensão e amor, tão necessários à realização deste trabalho;
- A Maria Luiza Klippert, Luiz Klippert Barcellos e Marina Martins Barcellos, por todo o apoio que me deram, permitindo-me estar aqui hoje;
- A Denise Coutinho de Alcântara Costa, Vitorio Alberto De Lorenci e José Arnaldo Redinz, meus amigos mais íntimos na Cidade Maravilhosa, o mais carinhoso abraço que o coração permite;
- A Sérgio Eduardo de Carvalho Eyres Jorás e Filipe de Moraes Paiva, pelos infindáveis auxílios computacionais;
- A José Martins Salim, Martha Christina Motta da Silva e Sérgio Jorás, colegas com quem pude trocar muitas idéias no decorrer deste trabalho;
- A Myriam Simões Coutinho, uma mãe carinhosa dos alunos e pesquisadores do CBPF;
- A Cláudio Schneider e Victoria Herscowitz, co-responsáveis por mais um estudante nesse maravilhoso mundo da Cosmologia;

- A todos aqueles que um dia vieram a contribuir para a minha presença aqui hoje;
- Ao Centro de Computação do Instituto de Física da UFRGS, onde o presente trabalho foi parcialmente redigido;
- Ao CNPq pelo financiamento deste trabalho.

Resumo

Teoria de Perturbações Vetoriais e Tensoriais no Universo de Friedman

A teoria de perturbação, em sua formulação usual ([1]), foi aplicada para estudar o problema de dois Universos descritos por métricas que diferem por um parâmetro pequeno. Esta análise, entretanto, não considera as possíveis mudanças infinitesimais de coordenadas, cujas contribuições podem simular uma aparente perturbação: “o problema de gauge”.

Embora esse problema tenha sido já solucionado com a introdução das chamadas “Variáveis de Bardeen” ([2]), sua solução é pouco útil do ponto de vista geométrico: não dá um significado claro às variáveis fundamentais do formalismo resultante.

O presente trabalho utiliza um formalismo baseado nas Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação para obter uma solução geometricamente significativa e livre do problema de gauge. Em adição um formalismo Hamiltoniano é obtido, permitindo assim estudar o problema de quantização das perturbações de uma solução clássica das equações de Einstein.

Summary

Vector and Tensor Perturbation Theory in the Friedman Universe

The Theory of Perturbations, in its usual formulation ([1]), was applied to study the problem of two Universes described by metrics which differ by a small parameter. This analysis, however, do not consider the possible contributions of infinitesimal coordinate transformations, whose contributions may simulate an apparent perturbation: “the gauge problem”.

Despite this problem has been yet solved by the introduction of the so called “Bardeen’s Variables” ([2]), its solution is rather unusefull from the geometrical point of view: do not give a clear meanning to the fundamental variables of the resultant formalism.

The present work makes use of a formalism based on the Quasi-Maxwellian Equations of Gravity to get a solution both geometrically meaningfull and free of the gauge problem. In addition an Hamiltonian formalism is obtained, which opens the possibility of study the problem of quantization of perturbations of a classical solution of the Einstein’s equations.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Notação e convenções	vii
Introdução	1
1 O Universo de Friedman-Robertson-Walker	4
2 A Teoria das Perturbações	10
3 Perturbações Escalares	18
4 Perturbações Vetoriais	21
O Sistema Não-Autônomo	26
Uma Tentativa a 4 Dimensões	32
O Formalismo Vinculado	35
5 Perturbações Tensoriais	39
Conclusões	45
Apêndice — As Equações Quasi-Maxwellianas	46
Referências	52

Notação e convenções

1. Índices

(a) gregos minúsculos

$(\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3)$ são utilizados em componentes de tensores em base de coordenadas;

(b) latinos minúsculos

$(i, j \dots = 1, 2, 3)$ são utilizados em componentes espaciais de tensores em base de coordenadas;

2. Simetrização e anti-simetrização

(a) Parêntesis (“(”, “)”) indicam simetrização.

(b) Colchetes (“[”, “]”) indicam anti-simetrização.

(c) O fator $1/n!$ está sempre incluído, onde n é o número de índices,

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T_{ij} + T_{ji}).$$

3. Por simplicidade a presente análise está restrita ao caso de $n = 4$ dimensões, visto que a generalização para n arbitrário é direta.

4. Todo Universo considerado nesse trabalho é suposto descrito por uma métrica (Teoria da Relatividade Geral) simétrica, não degenerada, de assinatura definida negativa (-2) .

5. Derivadas

- (a) A derivada simples (parcial) é usualmente denotada pelo símbolo “,”.
- (b) As derivações covariantes relativas ao espaço perturbado e de background são ambas denotadas pelo símbolo “;”.
- (c) A derivada covariante projetada de um objeto na direção da velocidade V^μ é denotada por um ponto (“.”) sobre o objeto.
- (d) a derivada covariante relativa ao espaço tridimensional do background são denotadas por “||”.

6. Nos Capítulos 3, 4 e 5 utilizamos símbolos como $\hat{\rho}$ e outras derivadas de quantidades do background. Esses objetos não devem ser encarados como dinâmicos, mas tão somente como uma abreviação dada pelas respectivas equações de movimento do background (ver Cap. 1).

Introdução

A Teoria de Perturbações, quando aplicada à Teoria de Einstein da Relatividade Geral (RG) (ver [3, 4]), foi bastante influenciada pelo trabalho de Lifshitz ([1]. Ver também [5, 6, 7, 8]), cujo objeto fundamental é o tensor métrico. Assim ele considera pequenas variações $\delta g_{\mu\nu}$ de quantidades não observáveis. Muitos resultados foram pesquisados desde então seguindo essa linha, e até hoje é freqüente, quando analisando um trabalho desta área, perguntar-nos: “E quais são as perturbações em $\delta g_{\mu\nu}$?”. O problema fundamental dessa linha é que a questão acima não tem uma resposta única, mas depende do particular sistema de coordenadas utilizado para descrever o espaço-tempo considerado. Assim, pela análise do tensor métrico não é simples distinguir o que caracteriza-se como uma “verdadeira perturbação” e o que é apenas uma mudança infinitesimal de coordenadas. É exatamente nesta descrição em termos de coordenadas arbitrárias que reside o que ficou conhecido como “O Problema de Gauge (Restrito) da Relatividade Geral”.

O problema pode ser parcialmente resolvido no formalismo de Debever ([9]), analisando o problema de perturbação em termos de objetos escalares da RG, tal como o Escalar de Curvatura Riemanniana R . Apesar desses objetos serem independentes do sistema de coordenadas utilizado para parametrizar o espaço-tempo, é conhecido ([10]) que os Invariantes de Debever não são suficientes para descrever completamente o Espaço-tempo da RG. Seriam ainda necessários escalares adicionais obtidos por derivações sucessivas do tensor de Riemann (os Escalares de Cartan).

Além disso, temos ainda o problema da caracterização das perturbações: não basta tratar apenas com objetos escalares; de acordo com Stewart ([11]) mesmo um objeto

escalar pode ter seu valor alterado no espaço perturbado, devido a uma mudança no mapeamento arbitrário que fazemos entre ele e o Background. Nesse trabalho Stewart mostra que somente objetos constantes (ou nulos) no Background são independentes de tal mapeamento. Este é o “problema de gauge estendido”.

Também a solução deste problema foi obtida por vários autores (segundo [2]; veja também, por exemplo, [11, 12, 13, 14]) na forma de combinações de termos envolvendo a métrica e suas derivadas de uma forma Gauge-Independente¹ (GI). Embora esta solução não apresente falhas do ponto de vista conceitual, é bastante difícil de entender seu significado geométrico².

Essa dificuldade conduziu Hawking [16] (ver também [17, 18]) à noção de ‘bons invariantes’, referindo-se a escalares que são nulos no Background — este conceito será melhor descrito no Capítulo 2. Este formalismo foi desenvolvido por Salim [19] (ver [18, 20, 21]), que serviu de modelo para o presente trabalho. Assim sendo, todo o trabalho aqui desenvolvido tem como bibliografia fundamental o trabalho de Salim (1982). Esta referência apresenta várias soluções explícitas da teoria de perturbações, e não vamos repeti-las aqui. Assim, quando referi-mo-nos às soluções na presente dissertação estamos subentendendo tratar-se da obtenção explícita de um sistema dinâmico Hamiltoniano.

¹Deste ponto em diante a palavra “gauge” será utilizada somente no sentido de “gauge estendido”, definido acima.

²Em [15] uma tentativa de obter esta interpretação é desenvolvida em termos de uma nova aproximação.

A estrutura geral da presente Dissertação é a seguinte:

- Cap. 1 – O Universo de Friedman-Robertson-Walker** descreve as características fundamentais do estágio atual do chamado “Modelo Padrão” (FRW).
- Cap. 2 – A Teoria das Perturbações** descreve o formalismo de perturbações a ser utilizado neste trabalho, introduzindo suas convenções e notação, algo distintas das de [19, 22].
- Cap. 3 – Perturbações Escalares** aplica³ o formalismo de perturbação acima para o caso escalar⁴.
- Cap. 4 – Perturbações Vetoriais** aplica a técnica de perturbações acima para o caso vetorial, no qual uma solução de interesse é obtida explicitamente no caso particular livre de fluxos de energia: o formalismo Hamiltoniano associado é obtido.
- Cap. 5 – Perturbações Tensoriais** descreve a aplicação do método acima para o caso de perturbações tensoriais; novamente obtém-se um formalismo Hamiltoniano.
- Cap. 6 – Conclusões** sumariza os resultados dos capítulos 4 e 5, e fornece as principais conclusões e possíveis ampliações do presente trabalho.
- Apêndice – As Equações Quasi-Maxwellianas** apresenta um sumário das Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação, bem como sua relação com as Equações de Einstein.

³Este Capítulo não faz parte do presente trabalho, mas é apenas uma compilação de resultados de [23], e foi incluído apenas por questão de completude. Uma extensão desse capítulo está em andamento em [24].

⁴a noção de ‘escalar’, ‘vetorial’ e ‘tensorial’ neste caso não corresponde exatamente àquela do cálculo tensorial usual, e está descrita em detalhes no Capítulo 2

Capítulo 1

O Universo de

Friedman-Robertson-Walker

O Universo de Friedman-Robertson-Walker (daqui por diante denotaremos este Universo por FRW, por simplicidade de notação) é usualmente conhecido como o “Modelo Padrão” da Cosmologia ([25, 26, 27, 28]), e é usualmente caracterizado, no sistema de coordenadas esférico-polares Gaussianas, por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ cujo elemento de linha associado é:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dS^2, \quad (1.1)$$

$$dS^2 \equiv dr^2 + r^2[d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2], \quad (1.2)$$

onde $A(t)$ é uma função arbitrária do tempo e dS é o elemento de linha de um espaço tri-dimensional com métrica (dita espacial) γ_{ij} . Neste sistema de coordenadas as conexões associadas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\alpha}^0 &= 0 \\ \Gamma_{ij}^0 &= -\frac{\dot{A}}{A}\gamma_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{A}}{A}\delta^i_j \\ \Gamma_{jk}^i &= \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ é o Símbolo de Christoffel de segunda espécie associado à métrica espacial γ_{ij} .

O Tensor de Weyl deste espaço é identicamente nulo ($W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$), donde dizemos que Friedman é **Conformalmente Plano**. O Escalar de Curvatura Riemanniana é

$$R = \frac{6K}{A^2} \quad (1.4)$$

onde K é o escalar de curvatura do sub-espaço tridimensional de homogeneidade do Universo FRW. O tensor de Riemann deste sub-espaço é

$$R^i{}_{jkl} = K\gamma^i{}_{jkl}, \quad K = \begin{cases} -1 & \text{aberto} \\ 0 & \text{plano} \\ +1 & \text{fechado} \end{cases} \quad (1.5)$$

Podemos construir, a partir das Equações de Einstein, um Tensor Energia-Momentum típico de um fluido perfeito com densidade de energia ρ e pressão p . Assim diz-se que o Universo FRW tem como fonte um fluido perfeito. Lembrando da decomposição geral de um tensor arbitrário S de rank 2 em suas partes irredutíveis em relação a um vetor V_μ ,

$$S_{\mu\nu} = rV_\mu V_\nu + sh_{\mu\nu} + q_{1\mu}V_\nu + q_{2\nu}V_\mu + h_\mu^\alpha h_\nu^\beta [\hat{S}_{\alpha\beta} + \tilde{S}_{\alpha\beta}],$$

onde $\hat{S}_{\alpha\beta} \equiv S_{(\alpha\beta)} - \frac{2}{3}h_{\alpha\beta}$ e $\tilde{S}_{\alpha\beta} \equiv S_{[\alpha\beta]}$, e aplicando-a para o tensor $V_{\alpha;\beta}$ temos

$$V_{\alpha;\beta} = \frac{\theta}{3}h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + a_\alpha V_\beta \quad (1.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= V^\alpha{}_{;\alpha} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= h_{(\alpha}^\mu h_{\beta)}^\nu (V_{\mu;\nu} - \frac{\theta}{3}h_{\mu\nu}) \\ \omega_{\alpha\beta} &= h_{[\alpha}^\mu h_{\beta]}^\nu V_{\mu;\nu} \\ a_\alpha &= V_{\alpha;\beta}V^\beta \end{aligned} \quad (1.7)$$

são os Parâmetros Cinemáticos de Expansão, Deformação (Shear), Rotação, e Aceleração respectivamente, associados ao 'observador' V^μ .

Vale notar que o único parâmetro não identicamente nulo no Universo FRW é a expansão θ .

Fazendo uma decomposição análoga para o tensor momentum-energia,

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu + p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu},$$

onde ρ é a densidade de energia observada pelo observador V^μ , p a pressão, q_μ o fluxo de energia (eventualmente calor) e $\Pi_{\mu\nu}$ o tensor de pressões anisotrópicas. O modelo padrão tem como fonte um fluido perfeito, donde os dois ultimos termos acima são identicamente nulos em FRW. Além disso supõe-se existir uma equação de estado termodinâmica para o fluido de fonte, da forma

$$p = \lambda\rho,$$

onde λ é uma constante cujo valor pertence ao intervalo $(-1, +1)$.

Escolhendo $V^\mu = \delta_0^\mu$ (Observador **Síncrono**) obtemos $\theta = 3\frac{\dot{A}}{A}$, donde podemos escrever a derivada covariante, projetada na direção da Velocidade V^α , de um objeto arbitrário X de rank (m, n) como

$$\dot{X}_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} := X_{\beta_1 \dots \beta_n; \alpha}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} V^\alpha = \frac{\partial X_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}}{\partial t} + (m - n) \frac{\theta}{3} X_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \quad (1.8)$$

fazendo uso explícito das Eqs. (1.3) e da escolha síncrona de observador.

Além da expressão acima, será útil (nos Capítulos 3, 4 e 5) referir-se a quantidades ditas “do Background”. Em particular, o presente trabalho visa uma formulação Hamiltoniana da Teoria de Perturbações, donde uma formulação Hamiltoniana para o Background FRW será também interessante no intuito de compor um problema Hamiltoniano de perturbação.

Para tanto, consideremos as variáveis ρ, θ . Sua evolução é regida pelo sistema dinâmico não-linear

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0$$

$$\dot{\theta} + \frac{1}{2}(\rho + 3p) + \frac{\theta^2}{3} = 0 \quad (1.9)$$

Desta forma procedemos a uma mudança de variáveis da forma

$$\begin{aligned} Q_F &:= \rho^r \\ \mathcal{P}_F &:= \theta^s \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde r, s são constantes. Em termos das novas variáveis as Eqs. (1.9) se escrevem na forma

$$\begin{aligned} \dot{Q}_F + r(1 + \lambda)Q_F\mathcal{P}_F^{1/s} &= 0 \\ \dot{\mathcal{P}}_F + s\mathcal{P}_F \left[\frac{1}{3}\mathcal{P}_F^{1/s} + \frac{1}{2}(1 + \lambda)Q_F^{1/r}\mathcal{P}_F^{-1/s} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para que o conjunto Q_F, \mathcal{P}_F seja efetivamente um par de variáveis canonicamente conjugadas é preciso satisfazer ao vínculo Hamiltoniano (que decorre da definição própria da Hamiltoniana)

$$\frac{\partial \dot{Q}_F}{\partial Q_F} + \frac{\partial \dot{\mathcal{P}}_F}{\partial \mathcal{P}_F} = 0 \quad (1.12)$$

Substituindo Eq. (1.11) na relação acima, obtemos

$$r(1 + \lambda)\mathcal{P}_F^{1/s} + s \left[\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{s}\right)\mathcal{P}_F^{1/s} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)(1 + 3\lambda)Q_F^{1/r}\mathcal{P}_F^{-1/s} \right] = 0 \quad (1.13)$$

cuja solução é dada por

$$r = -\frac{2}{3} \frac{1}{1 + \lambda}, \quad s = 1$$

Com esse resultado, válido para $1 + \lambda \neq 0$, as Eqs. (1.11) se escrevem simplesmente

$$\begin{aligned} \dot{Q}_F &= \frac{2}{3}Q_F\mathcal{P}_F \\ \dot{\mathcal{P}}_F &= -\frac{1}{3}\mathcal{P}_F^2 - \frac{1}{2}(1 + 3\lambda)Q_F^{-\frac{3}{2}(1+\lambda)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

e este sistema é descrito pela Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_F(Q_F, P_F) = \frac{1}{3} Q_F P_F^2 - Q_F^{-\frac{1}{2}(1+3\lambda)} \quad (1.15)$$

Observamos diretamente que a Hamiltoniana acima não depende explicitamente do tempo,

$$\frac{\partial \mathcal{H}_F}{\partial t} = 0$$

donde conclui-se (como seria de se esperar) que o Universo FRW admite uma dinâmica autônoma (ou seja, conserva a energia total) na forma

$$\frac{d\mathcal{H}_F}{dt} = 0$$

Embora a Hamiltoniana acima não tenha muita transparência do ponto de vista construtivista nem seja válida para o Universo de de Sitter, poderíamos obter formas alternativas por meio de transformações canônicas. Uma outra forma possível seria obtida, por exemplo, usando

$$\begin{aligned} Q &:= A \\ \mathcal{P} &:= \dot{A} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sabendo que

$$\ddot{A} = -\frac{1+3\lambda}{6} A \rho, \quad \rho = \rho_0 A^{-3(1+\lambda)}$$

com $\rho_0 = \text{const.}$ obtem-se

$$\begin{aligned} Q: &= \rho_0^{-\frac{2}{3} \frac{1}{1+\lambda}} Q_F^2 \\ \mathcal{P}: &= 3 \frac{Q_F}{P_F} \end{aligned} \quad (1.17)$$

uma Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Q, \mathcal{P}) &= \frac{1}{2}\mathcal{P}^2 - \frac{\rho_o}{6}Q^{-(1+3\lambda)} \\ &= 6\rho_o^{-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\lambda}}\mathcal{H}_F(Q_F, \mathcal{P}_F)\end{aligned}\tag{1.18}$$

Embora a relação entre as variáveis seja singular, a Hamiltoniana obtida na Eq. (1.18) permanece legítima para o caso de de Sitter (FRW com $\lambda = -1$). Dado que $\rho_o \geq 0$ a expressão obtida acima mostra, em particular, que o Universo de de Sitter é descrito por um Oscilador Harmônico instável (devido à sua massa negativa).

Capítulo 2

A Teoria das Perturbações

O formalismo fundamental das perturbações está baseado na idéia de vizinhança de uma solução conhecida de um certo conjunto de equações (usualmente diferenciais), onde novas soluções (ditas aproximações de primeira ordem) são procuradas.

Embora esse conceito seja assaz claro na sua formulação usual (dentro dos contextos de Mecânica Clássica, Quântica ou Estatística por exemplo), sua aplicação à Relatividade Geral e à Cosmologia requerem um certo cuidado especial¹: são teorias que admitem transformações ditas ‘de Gauge’. É fácil verificar que quantidades dependentes de gauge (assim como o vetor potencial do Eletromagnetismo) não apresentam uma interpretação clara para suas perturbações, dado que mudanças infinitesimais de gauge podem simulá-las em vários aspectos (o problema de gauge restrito, descrito no Capítulo 1).

Vamos adotar diretamente a formulação proposta por Hawking [16] e adotada por Salim [19], e considerar os “bons objetos” de perturbação como aqueles que são nulos no Espaço de Fundo (Background ou solução exata). A linearidade da teoria garante então que, se tal objeto for não-nulo no espaço perturbado, isto se deve à existência de uma perturbação real (no sentido que não existe transformação de gauge capaz de simulá-la). *Strictu Sensu* deveríamos aplicar esse método tão somente para objetos escalares, tais como os 14 Escalares de Debever [9]. No entanto, é fácil mostrar que, pelo menos para

¹Ver [29] sobre a validade da decomposição em Harmônicos, e [4] para a existência própria de soluções perturbativas para geometrias FRW.

estes escalares, não é possível utilizar o método perturbativo em 1ª ordem utilizando como Background o Espaço FRW. Além disso, já é conhecido (Ver [10]) que os Escalares de Debever não são suficientes para caracterizar inequivocamente o espaço. Assim sendo, o presente trabalho utiliza-se de uma formulação dependente de coordenadas (no espaço perturbado) mas não de gauge (mapeamento entre os pontos do background e do espaço perturbado), evitando o problema de unicidade de limites em RG evidenciado por Gerch [30].

A Teoria das Perturbações, no sentido que aqui damos ao termo, refere-se à validade das decomposições

$$f(x) = \sum_m f^{(m)}(t)Q^{(m)}(\vec{x}) \quad (2.1)$$

$$w^i(x) = \sum_m [w_0^{(m)}(t)Q^{(m)\parallel i}(\vec{x}) + w_1^{(m)}(t)P^{(m)i}(\vec{x})] \quad (2.2)$$

$$s^{ij}(x) = \sum_m [s_0^{(m)}(t)Q^{(m)\parallel ij}(\vec{x}) + s_1^{(m)}(t)P^{(m)i\parallel j}(\vec{x}) + s_2^{(m)}(t)U^{(m)ij}(\vec{x})] \quad (2.3)$$

definidas no subespaço do Background ortogonal a um campo de velocidades V^μ (o observador comóvel com o Fluido Cosmológico). O vetor w^i e o tensor s^{ij} são igualmente pertencentes a esse subespaço, mas exceto isso f , w e s são totalmente arbitrários. Dora-vante omitiremos o índice m por simplicidade de notação².

Os elementos das bases escalar $Q(\vec{x})$, vetorial $P^i(\vec{x})$ e tensorial $U^{ij}(\vec{x})$ satisfazem às seguintes relações [1, 21, 22]:

²O presente trabalho restringe-se à teoria linear, donde todas as equações são válidas para todo m , visto que não há acoplamento de modos.

1. Base Escalar:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q(\vec{x})}{\partial t} &= 0 \\
 \nabla^2 Q(\vec{x}) &:= \gamma^{kl} Q_{||kl}(\vec{x}) = mQ(\vec{x}), \\
 m &= \begin{cases} -q^2 - 1, & 0 < q < \infty, & K = -1 \text{ (aberto)} \\ -q, & 0 < q < \infty, & K = 0 \text{ (plano)} \\ -n^2 + 1, & n = 1, 2, \dots, & K = +1 \text{ (fechado)} \end{cases} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

2. Base Vetorial:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P^i(\vec{x})}{\partial t} &= 0 \\
 P^j_{||j} &:= \gamma^{ij} P_{i||j} = 0 \\
 \nabla^2 P_i(\vec{x}) &:= \gamma^{kl} P_{i||kl}(\vec{x}) = mP_i(\vec{x}), \\
 m &= \begin{cases} -q^2 - 2, & 0 < q < \infty, & K = -1 \text{ (aberto)} \\ -q, & 0 < q < \infty, & K = 0 \text{ (plano)} \\ -n^2 + 2, & n = 2, 3, \dots, & K = +1 \text{ (fechado)} \end{cases} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

3. Base Tensorial:

$$\begin{aligned}
 U_{[ij]} &= 0 \\
 \frac{\partial U^{ij}(\vec{x})}{\partial t} &= 0 \\
 U^{ij}_{||j}(\vec{x}) &= 0 \\
 \nabla^2 U_{ij}(\vec{x}) &:= \gamma^{kl} U_{ij||kl}(\vec{x}) = mU_{ij}(\vec{x}), \\
 m &= \begin{cases} -q^2 - 3, & 0 < q < \infty, & K = -1 \text{ (aberto)} \\ -q, & 0 < q < \infty, & K = 0 \text{ (plano)} \\ -n^2 + 3, & n = 3, 4, \dots, & K = +1 \text{ (fechado)} \end{cases} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

e seus derivados

1. Base Escalar:

$$\begin{aligned}
 Q_i(\vec{x}) &:= Q_{||i}(\vec{x}) \\
 Q_{ij}(\vec{x}) &:= Q_{||ij}(\vec{x}) \\
 \hat{Q}_{ij}(\vec{x}) &:= Q_{ij} - \frac{m}{3} Q \gamma_{ij}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

2. Base Vetorial:

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(\vec{x}) &:= P_{i||j}(\vec{x}) \\
 \hat{P}_{ij}(\vec{x}) &:= P_{(ij)}(\vec{x}) \\
 \tilde{P}_{ij}(\vec{x}) &:= P_{[ij]}(\vec{x}) \\
 P^{*i}(\vec{x}, t) &:= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} P_{j||k} \\
 P_{ij}^*(\vec{x}, t) &:= P_{i||j}^* \\
 \hat{P}_{ij}^*(\vec{x}, t) &:= P_{(ij)}^*
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Base Tensorial:

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^*(\vec{x}, t) &:= \frac{1}{2} \gamma_i^k \epsilon_j^{lm} U_{kl||m} \\
 \hat{U}_{ij}^*(\vec{x}, t) &:= U_{(ij)}^*
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Vale notar que, embora os objetos fundamentais da base não dependam do tempo, aqueles da base dual (P^{*i} , U_{ij}^* por exemplo) apresentam dependência explícita no tempo. Este fato é responsável pela quebra de simetria das equações em relação à rotação dual

$$\begin{aligned}
 E_{\mu\nu} &\rightarrow \cos \varphi E_{\mu\nu} - \text{sen } \varphi H_{\mu\nu} \\
 H_{\mu\nu} &\rightarrow \text{sen } \varphi E_{\mu\nu} + \cos \varphi H_{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

A partir das relações acima e da Eq. (1.8), serão obtidas as equações que seguem, cuja dedução, embora simples, está aqui apresentada para maior clareza:

1. Base Vettori:

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_i &:= P_{i;\mu} V^\mu = -\frac{\theta}{3} P_i \\
 \dot{P}_{ij} &= -2\frac{\theta}{3} P_{ij} \\
 \dot{P}^*{}^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \dot{P}_{j||k} = -2\frac{\theta}{3} P^*{}^i \\
 \dot{P}_{ij}^* &= \left(\gamma_{ik} P^{*k}{}_{||j} \right)^\bullet = -5\frac{\theta}{3} P_{ij}^* \\
 P^{*i}{}_{;i} &= P^{*i}{}_{||i} = \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} P_{jk} \right)_{||i} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} P_{j||k||i} \\
 &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}R_{j\ ki} P_m = 0 \\
 \nabla^2 P^{*i} &= \gamma^{mn} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} P_{jk} \right)_{||m||n} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \gamma^{mn} \left[P_{j||k||m} \right]_{||n} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \gamma^{mn} \left[P_{j||m||k} + {}^{(3)}R_{j\ km}{}^l P_l \right]_{||n} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \gamma^{mn} \left[\left(P_{jm} \right)_{||k||n} + K \gamma_{j\ km}{}^l P_{l||n} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \gamma^{mn} \left[\left(P_{jm||nk} + {}^{(3)}R_{j\ kn}{}^l P_{lm} + {}^{(3)}R_m{}^l{}_{kn} P_{jl} \right) + K \gamma_{j\ kn}{}^l P_{l||m} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\gamma^{mn} P_{j||mn} \right)_{||k} + K \gamma^{mn} \left(2\gamma_{j\ kn}{}^l P_{lm} + \gamma_m{}^l{}_{kn} P_{jl} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\nabla^2 P_j \right)_{||k} + K \left(2(\gamma^{jk} \gamma^{lm} - \gamma_j{}^m \gamma_k{}^l) P_{lm} + (\gamma^{mk} \gamma^{lm} - \gamma_m{}^k \gamma_l{}^m) P_{jl} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(m P_j \right)_{||k} - 2K(P_{kj} + P_{jk}) \right] = m \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} P_{jk} \right) \\
 &= m P^{*i}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij;k}\gamma^{jk} &= P_{ij||k}\gamma^{jk} = \nabla^2 P_i = m P_i \\
P_{ji;k}\gamma^{jk} &= P_{ji||k}\gamma^{jk} = P_{j||ik}\gamma^{jk} = \gamma^{jk} \left(P_{j||ki} + {}^{(3)}R_{j^l ik} P_l \right) \\
&= \left(\gamma^{jk} P_{j||k} \right)_{||i} + K \gamma^{kl} P_l = -2K P_i \\
\hat{P}_{ij;k}\gamma^{jk} &= \frac{1}{2}(m - 2K)P_i \\
\hat{P}_{ij;k}^*\gamma^{jk} &= \frac{1}{2}(m - 2K)P_i^* \\
\tilde{P}_{ij;k}\gamma^{jk} &= \frac{1}{2}(m + 2K)P_i \\
\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{P}_{mk;l} &= \gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{P}_{mk||l} = \gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \frac{1}{2} \left[P_{m||kl} + P_{k||ml} \right] \\
&= \gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} {}^{(3)}R_{m^n kl} P_n + \left(P_{k||lm} + {}^{(3)}R_{k^n ml} P_n \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \left[P_{k||m} + K \left(\frac{3}{2} \gamma_{mk} P_l - \frac{1}{2} \gamma_{ml} P_k - \gamma_{kl} P_m \right) \right] \\
&= \gamma_{(i}^m \left[\frac{1}{2} \epsilon_j \right]^{kl} P_{kl} \Big|_{||m} = \gamma_{(i}^m P_{j)||m}^* = P_{j||i}^* = \hat{P}_{ij}^* \\
\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \tilde{P}_{mk;l} &= -P_{j||i}^* \\
\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{P}_{mk;l}^* &= \dots = \frac{1}{2} \gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{P}_{kl||m}^* = \frac{1}{2} \gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{krs} P_{rs} \right) \Big|_{||m} \\
&= -A^{-6} \frac{1}{4} \gamma_{(i}^m \left(+\gamma_j \right) \Big|^{rs} P_{rs} \Big|_{||m} \\
&= -A^{-6} \frac{1}{4} \gamma_{(i}^m \left[\gamma_j^r \gamma_l^s - \gamma_j^s \gamma_l^r \right] P_{r||s} \Big|_{||m} \\
&= -A^{-6} \frac{1}{4} \gamma_{(i}^m \left[P_j \right] \Big|_{||l} \Big|_{||l} - \gamma_j^s \gamma^{rl} \left(P_{r||l||s} + {}^{(3)}R_{r^n sl} P_n \right) \Big|_{||m} \\
&= -A^{-6} \frac{1}{4} \gamma_{(i}^m \left[\nabla^2 P_j \right] - \gamma_j^s \left((\gamma^{rl} P_{rl})_{||s} + K \gamma^{ln} P_n \right) \Big|_{||m} \\
&= -A^{-6} \frac{1}{4} \gamma_{(i}^m \left[(m + 2K) P_j \right] \Big|_{||m} = -A^{-6} \frac{1}{4} (m + 2K) P_{(j||i)} \\
&= -\frac{1}{A^6} \frac{1}{2} (m + 2K) \hat{P}_{ij}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

2. Base Tensorial:

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{ij} &= -2 \frac{\theta}{3} U_{ij} \\
 \hat{U}_{ij}^* &= \frac{1}{2} \epsilon^{mkl} (U_{ik||l} \gamma_{mj})^* = -5 \frac{\theta}{3} U_{ij}^* \\
 \gamma_i^m \epsilon_j^{kl} U_{mk;l}^* &= \gamma_i^m \epsilon_j^{kl} U_{mk||l}^* = \gamma_i^m \epsilon_j^{kl} \left(\frac{1}{2} \epsilon_k^{rs} U_{mr||s} \right) ||l \\
 &= \gamma_i^m \epsilon_{jkl} \epsilon^{krs} U_{mr||s} ||l = \frac{1}{2} \gamma_i^m \left(-A^{-6} \gamma^{rs}_{jl} \right) U_{mr||s} ||l \\
 &= -A^{-6} \frac{1}{2} \gamma_i^m \left(\gamma_j^r \gamma^{sl} - \gamma_j^s \gamma^{rl} \right) U_{mr||s} ||l = -A^{-6} \frac{1}{2} \left(\nabla^2 U_{ij} - U_{il||j||l} \right) \\
 &= -A^{-6} \frac{1}{2} \left[m U_{ij} - \left(U_{il} ||l ||j + {}^{(3)}R_i^n{}_j{}^l U_{nl} + {}^{(3)}R_l^n{}_j{}^l U_{in} \right) \right] \\
 &= -A^{-6} \frac{1}{2} \left[m \left((0-1) + (1-3) \right) K \right] U_{ij} = -\frac{1}{A^6} \frac{1}{2} (m + 3K) U_{ij} \\
 \gamma_i^m \epsilon_j^{kl} U_{km;l}^* &= \gamma_i^m \epsilon_j^{kl} U_{km||l}^* = \epsilon_j^{kl} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{irs} U_k{}^r ||s \right) ||l \\
 &= \frac{1}{2} \left(\gamma_{jm} \epsilon^{mkl} \epsilon_{irs} \right) U_k{}^r ||s ||l = A^{-6} \frac{1}{2} (3!) \left(\gamma_{jm} \gamma_i^{[m} \gamma_r^k \gamma_s^{n]} \right) U_k{}^r ||s ||l \\
 &= A^{-6} \frac{1}{2} \gamma_{mj} \left[\gamma_r^k \gamma^{ml}{}_{is} + \gamma_i^k \gamma^{lm}{}_{rs} + \gamma_s^k \gamma^{lm}{}_{ir} \right] U_k{}^r ||s ||l \\
 &= A^{-6} \frac{1}{2} \left[-U_{ij} ||l ||l + U_{il} ||j ||l \right] \\
 &= -A^{-6} \frac{1}{2} \left[\nabla^2 U_{ij} - \left((U_{il} ||l ||j + {}^{(3)}R_i^m{}_j{}^l U_{ml} + {}^{(3)}R_l^m{}_j{}^l U_{im} \right) \right] \\
 &= -A^{-6} \frac{1}{2} \left[m - \left((0-1) + (1-3) \right) K \right] U_{ij} = -\frac{1}{A^6} \frac{1}{2} (m + 3K) U_{ij} \\
 \gamma_i^m \epsilon_j^{kl} \hat{U}_{km;l}^* &= -\frac{1}{A^6} \frac{1}{2} (m + 3K) U_{ij}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Apenas para facilitar a referência, segue um sumário das equações acima obtidas, que serão úteis nos Capítulos 3, 4 e 5:

$$\dot{P}_i = -\frac{\theta}{3} P_i \quad (2.13)$$

$$\dot{P}_{ij} = -2\frac{\theta}{3} P_{ij} \quad (2.14)$$

$$\dot{P}^{*i} = -2\frac{\theta}{3} P^{*i} \quad (2.15)$$

$$\dot{\hat{P}}_{ij}^* = -5\frac{\theta}{3} \hat{P}_{ij}^* \quad (2.16)$$

$$P^{*i}{}_{||i} = 0 \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 P^{*i} = m P^{*i} \quad (2.18)$$

$$\hat{P}_{ij;k} \gamma^{jk} = \frac{1}{2}(m - 2K) P_i \quad (2.19)$$

$$\hat{P}_{ji;k}^* \gamma^{jk} = \frac{1}{2}(m - 2K) P_i^* \quad (2.20)$$

$$\tilde{P}_{ij;k} \gamma^{jk} = \frac{1}{2}(m + 2K) P_i \quad (2.21)$$

$$\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{P}_{mk;l} = \hat{P}_{ij}^* \quad (2.22)$$

$$\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \tilde{P}_{mk;l} = -\hat{P}_{ij}^* \quad (2.23)$$

$$\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{P}_{mk;l}^* = -\frac{1}{A^6} \frac{1}{4}(m + 2K) \hat{P}_{ij} \quad (2.24)$$

$$\dot{U}_{ij} = -2\frac{\theta}{3} U_{ij} \quad (2.25)$$

$$\dot{U}^*_{ij} = -5\frac{\theta}{3} U^*_{ij} \quad (2.26)$$

$$\gamma_{(i}^m \epsilon_j)^{kl} \hat{U}^*_{mk;l} = -\frac{1}{A^6} \frac{1}{2}(m + 3K) U_{ij} \quad (2.27)$$

Capítulo 3

Perturbações Escalares

Conforme já explicado, o presente capítulo não pertence ao escopo do trabalho aqui apresentado, mas consiste apenas em uma sumária compilação (com leve mudança de notação) de alguns resultados obtidos por Novello *et. al.* [23], num trabalho desenvolvido no período em que a presente dissertação tomou forma e foi por ele influenciada. A componente escalar da teoria de perturbações é de longe a mais estudada na literatura¹. Vamos decompor as perturbações δX das variáveis X em termos dos Harmônicos Escalares, desprezando as contribuições provenientes dos termos Vetorial e Tensorial. Além disso, apenas por simplicidade de notação (introduzida no Cap. 2), omitiremos neste Capítulo o índice 0 dessas componentes, que caracteriza a ordem escalar da perturbação, bem como o índice m dos elementos da base, que caracterizam o comprimento característico da perturbação. Dessa forma escrevemos

$$\begin{array}{lll} \delta\lambda = 0 & \delta\omega^i = 0 & \delta H_{ij} = 0 \\ \delta\rho = N(t)Q & \delta q_i = 0 & \delta E_{ij} = E(t)\hat{Q}_{ij} \\ \delta p = \lambda\delta\rho & \delta a_i = \Psi(t)Q_i & \delta\Pi_{ij} = \Pi(t)\hat{Q}_{ij} \\ \delta\theta = H(t) & \delta V_i = V(t)Q_i & \delta\sigma_{ij} = \Sigma(t)\hat{Q}_{ij} \end{array} \quad (3.1)$$

¹Veja, por exemplo, [17, 12, 31, 32].

Além da preservação da equação de estado $p = \lambda\rho$ pela perturbação, ($\delta\lambda = 0$), vamos supor ainda que o fluido perturbado apresenta uma equação de estado

$$\delta\Pi_{\alpha\beta} = \xi \delta\sigma_{\alpha\beta} \quad (3.2)$$

Substituindo a decomposição acima nas Equações Quasi-Maxwellianas (dadas no Apêndice) e usando a independência dos Harmônicos, obtem-se as equações para as perturbações na forma

$$\dot{\Sigma} = -E - \frac{1}{2}\xi\Sigma + m\Psi \quad (3.3)$$

$$\dot{E} = -\frac{1}{2}(\rho + p)\Sigma - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2}\right)E - \frac{\xi}{2}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3}\right)\Sigma + \frac{1}{2}m\xi\Psi \quad (3.4)$$

$$(\rho + p)\Psi = \lambda[N - \dot{\rho}V] + \frac{2\xi}{A^2}\frac{1}{3}(m - 3K)\Sigma \quad (3.5)$$

$$N - \dot{\rho}V = (m - 3K)\frac{\xi}{A^2}\Sigma - (m - 3K)\frac{2}{A^2}E \quad (3.6)$$

As duas últimas expressões acima permitem obter

$$\Psi = \Psi(E, \Sigma)$$

- exceto para o caso de vácuo $(\rho + p) = 0$, que também foi analisado em [23] - na forma

$$\Psi = \frac{2}{A^2(\rho + p)}(m - 3K)\left\{-\lambda E + \frac{1}{2}\lambda\xi\Sigma + \frac{1}{3}\xi\Sigma\right\} \quad (3.7)$$

Resulta então que as variáveis (Σ, E) constituem naturalmente um sistema dinâmico não-autônomo².

É possível, ainda, mostrar que esse sistema admite uma representação Hamiltoniana

²Veremos no próximo capítulo que o mesmo não ocorre para o caso das perturbações vetoriais.

da forma

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = -\frac{1}{2A} \left[1 + \frac{2m\lambda}{A^2(\rho+p)}(m-3K) \right] \mathcal{P}^2 + \frac{A(\rho+p)}{4} \mathcal{Q}^2 \quad (3.8)$$

onde as variáveis canônicas $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ são definidas por

$$\mathcal{Q} = \Sigma \quad (3.9)$$

$$\mathcal{P} = AE \quad (3.10)$$

Capítulo 4

Perturbações Vetoriais

De acordo com os fundamentos da teoria de perturbação apresentados no Capítulo 2 vamos decompor as perturbações δX das variáveis X em termos dos Harmônicos Vetoriais, desprezando as contribuições provenientes dos termos Escalar e Tensorial. Além disso, apenas por simplicidade de notação, omitiremos nesse Capítulo o índice 1 dessas componentes, que caracteriza a ordem vetorial da perturbação, bem como o índice m dos elementos da base, que caracterizam o comprimento característico da perturbação.

Assim sendo, escrevemos

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= 0 & \delta\omega^i &= \Omega(t)P^{**i} & \delta H_{ij} &= H(t)\hat{P}_{ij}^* \\ \delta\rho &= 0 & \delta q_i &= q(t)P_i & \delta E_{ij} &= E(t)\hat{P}_{ij} \\ \delta p &= 0 & \delta a_i &= \Psi(t)P_i & \delta \Pi_{ij} &= \Pi(t)\hat{P}_{ij} \\ \delta\theta &= 0 & \delta V_i &= V(t)P_i & \delta\sigma_{ij} &= \Sigma(t)\hat{P}_{ij} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Vale notar que será importante referir-se à quantidade

$$S(t) := E(t) - \frac{1}{2}\Pi(t), \quad (4.2)$$

uma vez que é para essa variável que surge uma dinâmica natural.

Vamos agora proceder à obtenção das equações de perturbação do caso vetorial. Es-

crevemos as equações perturbadas gerais¹ como

$$h_\epsilon^\alpha (\delta E_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} h_\epsilon^\alpha (\delta\rho)_{;\alpha} - \frac{1}{3} \rho_{;\alpha} \delta(V^\alpha V_\epsilon) + \frac{1}{3} \theta \delta q_\epsilon + \frac{1}{2} h_\epsilon^\alpha (\delta\Pi_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

$$h_\epsilon^\alpha (\delta H_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\mu\nu} = (\rho + p) \delta\omega_\epsilon - \frac{1}{2} \eta_\epsilon^{\lambda\alpha\beta} V_\lambda (\delta q_\alpha)_{;\beta} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (\delta E_{\mu\nu})^\bullet + \theta \delta E_{\alpha\beta} + h_{(\alpha}^\mu \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_\tau (\delta H_{\mu\nu})_{;\lambda} = & - \frac{1}{2} (\rho + p) \delta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (\delta\Pi_{\mu\nu})^\bullet \\ & + \frac{\theta}{6} \delta\Pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{(\alpha}^\mu h_{\beta)}^\nu (\delta q_\mu)_{;\nu} \\ & + \frac{1}{6} h_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} (\delta q_\mu)_{;\nu} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (\delta H_{\mu\nu})^\bullet + \theta \delta H_{\alpha\beta} - h_{(\alpha}^\mu \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_\tau (\delta E_{\mu\nu})_{;\lambda} = \frac{1}{2} h_{(\alpha}^\mu \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_\tau (\delta\Pi_{\mu\nu})_{;\lambda} \quad (4.6)$$

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\delta\sigma_{\alpha\beta})^\bullet + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} (\delta a_\alpha)_{;\beta} - h_{(\mu}^\alpha h_{\nu)}^\beta (\delta a_\alpha)_{;\beta} + \frac{2}{3} \theta \delta\sigma_{\mu\nu} = -\delta E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta\Pi_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\delta\omega_{\mu\nu})^\bullet + \frac{2}{3} \theta \delta\omega - h_{[\alpha}^\epsilon h_{\beta]}^\lambda (\delta a_\epsilon)_{;\lambda} = 0 \quad (4.8)$$

$$h_\mu^\alpha h^{\beta\epsilon} (\delta\sigma_{\alpha\beta} - \delta\omega_{\alpha\beta})_{;\epsilon} - \frac{2}{3} \delta(h_\mu^\alpha \theta_{;\alpha}) = \delta q_\mu \quad (4.9)$$

$$\delta H_{\alpha\beta} = -h_{(\alpha}^\mu \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_\tau (\delta\sigma_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu})_{;\lambda} \quad (4.10)$$

$$h_\alpha^\mu (\delta q_\mu)^\bullet + \frac{4}{3} \theta \delta q_\alpha + h_{\alpha\beta} (\delta\Pi^{\beta\lambda})_{;\lambda} - \delta(h_\alpha^\beta p_{;\beta}) + (\rho + p) \delta a_\alpha = 0 \quad (4.11)$$

Além das equações acima, faremos uso de duas outras: uma delas é uma equação de estado² do fluido cosmológico que constitui a perturbação,

$$\delta\Pi_{\alpha\beta} = \xi \delta\sigma_{\alpha\beta} \quad (4.12)$$

¹Ver Apêndice para um sumário das Equações Quasi-Maxwellianas, extraído de [19, 23] (veja [16]). Não cabe aqui apresentar as equações escalares, visto que são identicamente satisfeitas.

²A equação a seguir é apenas uma aproximação da equação termodinâmica $\tau \dot{\Pi}_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} = \xi \sigma_{\alpha\beta}$ (ver [33]) no limite adiabático em que o tempo de relaxação τ é desprezível e o coeficiente de viscosidade ξ é constante.

e a outra decorre da própria definição da vorticidade,

$$\begin{aligned}\Omega P^{*k} &= \delta \omega^k = \epsilon^{ijk} \delta \omega_{ij} = \epsilon^{ijk} \delta(V_{i;j}) = \epsilon^{ijk} \delta(V_{i,j}) = \\ &= \epsilon^{ijk} (\delta V_i)_{,j} = \epsilon^{ijk} (V P_i)_{,j} = V \epsilon^{ijk} P_{j,k} = V P^{*k}\end{aligned}\quad (4.13)$$

como parte da derivada covariante da velocidade.

Introduzindo as relações (4.1)-(4.2) e as propriedades da base Vetorial P_i dadas pelas eqs. (2.13)-(2.24) em (4.3)-(4.11), estas últimas equações, juntamente com as Eqs. (4.12), (4.13), se escrevem na forma:

$$\left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{m}{2} - K \right) S + \frac{\theta}{3} [(\rho + p)V + q] \right\} P_i = 0 \quad (4.14)$$

$$\left\{ -\frac{1}{A^2} \left(\frac{m}{2} - K \right) H + A^2 [(\rho + p)\Omega + q] \right\} P_i^* = 0 \quad (4.15)$$

$$\left\{ \dot{S} + \frac{\theta}{3} S + \frac{\theta}{3} \Pi - \frac{1}{2} \frac{1}{A^4} \left(\frac{m}{2} + K \right) H + \frac{1}{2} (\rho + p)\Sigma + \frac{1}{2} q \right\} \hat{P}_{ij} = 0 \quad (4.16)$$

$$\left\{ \dot{H} - 2\frac{\theta}{3} H - A^2(S + \Pi) \right\} \hat{P}_{ij}^* = 0 \quad (4.17)$$

$$\{ \dot{\Sigma} + S + \Pi - \Psi \} \hat{P}_{ij} = 0 \quad (4.18)$$

$$\{ \dot{\Omega} - \Psi \} \tilde{P}_{ij} = 0 \quad (4.19)$$

$$\left\{ \frac{1}{A^2} \left(\frac{m}{2} - K \right) \Sigma - \frac{1}{A^2} \left(\frac{m}{2} + K \right) \Omega - 2\frac{\theta}{3} V + q \right\} P_i = 0 \quad (4.20)$$

$$\{ H + A^2[\Sigma - \Omega] \} \hat{P}_{ij}^* = 0 \quad (4.21)$$

$$\left\{ \dot{q} + \theta q - \frac{1}{A^2} \left(\frac{m}{2} - K \right) \Pi + (\rho + p)\Psi + \dot{p}V \right\} P_i = 0 \quad (4.22)$$

$$\{ \Pi - \xi \Sigma \} \hat{P}_{ij} = 0 \quad (4.23)$$

$$\{ V - \Omega \} \tilde{P}_{ij} = 0 \quad (4.24)$$

Fazendo uso da independência linear dos elementos da base vetorial, temos que os termos entre chaves nas equações acima são todos nulos. Inserindo nas demais equações as relações que surgem de (4.23), (4.24) (ou seja, eliminando as variáveis V e Π) obtêm-se finalmente

$$\tilde{\chi}_1 := \dot{S} + \frac{\theta}{3}S + \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] \Sigma - \frac{1}{2}x_+ \tilde{H} + \frac{1}{2}q = 0 \quad (4.25)$$

$$\tilde{\chi}_2 := \dot{\Sigma} + S + \xi \Sigma - \Psi = 0 \quad (4.26)$$

$$\tilde{\chi}_3 := \dot{\Omega} - \Psi = 0 \quad (4.27)$$

$$\tilde{\chi}_4 := \dot{\tilde{H}} - S - \xi \Sigma = 0 \quad (4.28)$$

$$\tilde{\chi}_5 := \dot{q} - x_- \xi \Sigma + \dot{p} \Omega + \theta q + (\rho + p) \Psi = 0 \quad (4.29)$$

$$\tilde{\Phi}_1 := \Sigma - \Omega + \tilde{H} = 0 \quad (4.30)$$

$$\tilde{\Phi}_2 := x_- S + \frac{\theta}{3} [(\rho + p) \Omega + q] = 0 \quad (4.31)$$

$$\tilde{\Phi}_3 := x_- \tilde{H} - [(\rho + p) \Omega + q] = 0 \quad (4.32)$$

$$\tilde{\Phi}_4 := x_- \Sigma - \left[2 \frac{\dot{\theta}}{3} + x_+ \right] \Omega + q = 0 \quad (4.33)$$

onde definimos $x_{\pm} := \frac{1}{A^2}(\frac{m}{2} \pm K)$ e $\tilde{H} := \frac{1}{A^2}H$ apenas para simplificar a forma das equações. É fácil verificar que o vínculo $\tilde{\Phi}_4$ não é essencial,

$$\tilde{\Phi}_4 \equiv x_- \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_3 - \frac{2}{3} \left[\rho + \frac{3K}{A^2} - 3 \left(\frac{\theta}{3} \right)^2 \right] \Omega = x_- \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_3$$

Observamos ainda que podemos simplificar os vínculos acima,

$$\tilde{\Phi}_2 + \frac{\theta}{3} \tilde{\Phi}_3 = x_- \left\{ S + \frac{\theta}{3} \tilde{H} \right\} = 0$$

obtendo em definitiva o seguinte sistema:

$$\chi_1 := \dot{S} + \frac{\theta}{3}S + \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] \Sigma - \frac{1}{2}x_+ \tilde{H} + \frac{1}{2}q = 0 \quad (4.34)$$

$$\chi_2 := \dot{\Sigma} + S + \xi\Sigma - \Psi = 0 \quad (4.35)$$

$$\chi_3 := \dot{\Omega} - \Psi = 0 \quad (4.36)$$

$$\chi_4 := \dot{\tilde{H}} - S - \xi\Sigma = 0 \quad (4.37)$$

$$\chi_5 := \dot{q} - x_- \xi\Sigma + \dot{p}\Omega + \theta q + (\rho + p)\Psi = 0 \quad (4.38)$$

$$\Phi_1 := \Sigma - \Omega + \tilde{H} = 0 \quad (4.39)$$

$$\Phi_2 := S + \frac{\theta}{3}\tilde{H} = 0 \quad (4.40)$$

$$\Phi_3 := (\rho + p)\Omega - x_- \tilde{H} + q = 0 \quad (4.41)$$

Por questão de consistência, apresentamos abaixo as equações de evolução dos vínculos, na forma:

$$\dot{\Phi}_1 = \chi_2 - \chi_3 + \chi_4 \quad (4.42)$$

$$\dot{\Phi}_2 = \chi_1 + \frac{\theta}{3}\chi_4 - \frac{1}{2}(\rho + p)\Phi_1 - \frac{1}{2}\Phi_3 \quad (4.43)$$

$$\dot{\Phi}_3 = (\rho + p)\chi_3 - x_- \chi_4 + \chi_5 - x_- \Phi_2 - \theta\Phi_3 \quad (4.44)$$

Essas últimas equações mostram que os vínculos são preservados pela dinâmica do sistema (não temos vínculos de segunda classe³). Este resultado é consistente com a hipótese inicial de que as equações iniciais são essencialmente as Identidades de Bianchi escritas numa notação conveniente.

Em tempo, é usual eliminar a variável Ψ por meio da relação de definição $a^\alpha = \dot{V}^\alpha$. No nosso sistema de coordenadas essa equação fornece

$$\Psi P_\alpha = \left[\dot{V} - 2\frac{\theta}{3}V \right] P_\alpha - \delta\Gamma_{\alpha 0}^0, \quad (4.45)$$

que é claramente dependente de gauge. Desta forma não consideraremos esta equação em nossa análise.

³Terminologia do formalismo de Dirac de sistemas vinculados. Ver [34] para discussão e notação.

Sec. 4.1 – O Sistema Não-Autônomo

Como se apresenta acima, o sistema (4.34)–(4.38) é um Sistema Dinâmico Aberto: a variável Ψ não possui equação de evolução nem pode ser eliminada diretamente do sistema, mas constitui-se num grau de liberdade a ser externamente fixado.

É Possível resolver o sistema admitindo que a variável Ψ seja dada por uma função arbitrária do Background ($\Psi = \Psi(t)$). Nesse caso é mais conveniente do ponto de vista prático tomar como variáveis fundamentais o par (\tilde{H}, Ω) . Os vínculos (4.39)–(4.41) servem, então, para definir as variáveis (S, Σ, q) como funções do par escolhido acima. Como não há vínculos de segunda classe podemos ignorar as equações de evolução dessas quantidades. Com isso obtemos o sistema acima na forma

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{H}} &= -\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right)\tilde{H} + \xi\Omega \\ \dot{\Omega} &= \Psi\end{aligned}\tag{4.46}$$

Podemos integrar diretamente o sistema (4.46),

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= A^{-1}e^{-\xi t} \left[\alpha + \xi \int dt' A(t')e^{\xi t'} \left(\beta + \int dt'' \Psi(t'') \right) \right] \\ \Omega &= \beta + \int dt' \Psi(t')\end{aligned}\tag{4.47}$$

onde $\alpha, \beta = const.$ A forma mais elegante de obter a solução do problema, no entanto, é procurar por sua formulação Hamiltoniana. É fácil mostrar que podemos obtê-la de forma simples com uma única função do Background FRW,

$$\begin{aligned}Q &= a\tilde{H} \\ \mathcal{P} &= \Omega\end{aligned}\tag{4.48}$$

Derivando Eqs. (4.48) e substituindo Eqs. (4.46), (4.48) no resultado temos

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \left[\frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) \right] Q + \xi a \mathcal{P} \\ \dot{P} &= \Psi\end{aligned}\tag{4.49}$$

A condição de existência da Hamiltoniana fornece

$$\frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) = 0$$

cuja solução é $a(t) = Ae^{\xi t}$. Com isso as variáveis tornam-se

$$Q = Ae^{\xi t} \tilde{H} \qquad \mathcal{P} = \Omega\tag{4.50}$$

Sua evolução é dada por

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \xi Ae^{\xi t} \mathcal{P} \\ \dot{P} &= \Psi\end{aligned}\tag{4.51}$$

e corresponde a uma Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(Q, P) = \frac{1}{2} \xi Ae^{\xi t} P^2 - \Psi Q\tag{4.52}$$

Vale notar que a solução explícita das eqs. (4.51) é

$$\begin{aligned}Q(t) &= \beta + \xi \int^t dt' A(t') e^{\xi t'} \left[\alpha + \int^{t'} dt'' \Psi(t'') \right] \\ P(t) &= \alpha + \int^t dt' \Psi(t')\end{aligned}\tag{4.53}$$

onde $\alpha, \beta = const.$ Substituindo este resultado em (4.48) e lembrando das definições intermediárias obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{\theta}{3}A^{-1}e^{-\xi t}Q(t) \\
 \Sigma &= -A^{-1}e^{-\xi t}Q(t) + \mathcal{P}(t) \\
 \Omega &= \mathcal{P}(t) \\
 H &= Ae^{-\xi t}Q(t) \\
 q &= x_-A^{-1}e^{-\xi t}Q(t) - (\rho + p)\mathcal{P}(t)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

É possível generalizar a solução acima supondo que a aceleração seja dada por uma função linear arbitrária das coordenadas canônicas⁴:

$$\Psi = y(t)Q + z(t)\mathcal{P} + g(t), \quad y(t) := \frac{\partial \Psi}{\partial Q}, \quad z(t) := \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{P}} \tag{4.55}$$

e escrever os vínculos (4.39)-(4.41) para eliminar as variáveis \tilde{H} , S , q :

$$\begin{aligned}
 \tilde{H} &= -\Sigma + \Omega \\
 S &= \frac{\theta}{3}\Sigma - \frac{\theta}{3}\Omega \\
 q &= -x_- \Sigma + x_- \Omega
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

O sistema dinâmico (4.34)-(4.38) sujeito a (4.55), (4.56) reduz-se então a

$$\begin{aligned}
 \dot{\Sigma} &= -\left(\frac{\theta}{3} = \xi\right)\Sigma + \frac{\theta}{3}\Omega + \Psi \\
 \dot{\Omega} &= \Psi
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Introduz-se as variáveis Hamiltonianas

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

⁴A linearidade é necessária para preservar o caráter da ordem perturbativa do nosso método; para alguns exemplos de situações de interesse físico em que essas relações lineares surgem, ver o parágrafo que segue a Eq. (4.68).

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Derivando (4.58) e substituindo (4.57), (4.58) no resultado obtemos

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \left\{ \dot{a} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) a \right\} \Sigma + \left\{ \dot{b} + \frac{\theta}{3} a \right\} \Omega + [a + b] \Psi \\ \dot{P} &= \left\{ \dot{c} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) c \right\} \Sigma + \left\{ \dot{d} + \frac{\theta}{3} c \right\} \Omega + [c + d] \Psi \end{aligned} \quad (4.59)$$

Escrevemos o vínculo Hamiltoniano como

$$\begin{aligned} \Phi &:= \Delta \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \right) \\ &= \left\{ \dot{a} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) a \right\} \bar{a} + \left\{ \dot{b} + \frac{\theta}{3} a \right\} \bar{b} + \Delta [a + b] y + \\ &+ \left\{ \dot{c} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) c \right\} \bar{c} + \left\{ \dot{d} + \frac{\theta}{3} c \right\} \bar{d} + \Delta [c + d] z \\ &= [\dot{a}\bar{a} + \dot{b}\bar{b} + \dot{c}\bar{c} + \dot{d}\bar{d}] - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) [a\bar{a} + c\bar{c}] + \frac{\theta}{3} [a\bar{b} + c\bar{d}] + \Delta [(a + b)y + (c + d)z] \\ &= \dot{\Delta} - \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) \Delta + [(a + b)y + (c + d)z] \Delta \end{aligned} \quad (4.60)$$

e escolhemos a solução de $\Phi = 0$ (ver Eq. (1.12)) na forma

$$\Delta = \frac{A}{A_0} e^{\xi t}, \quad a = d = \Delta^{1/2} \quad (4.61)$$

Por consistência devemos ter $(a + b)y + (c + d)z = 0$, cuja solução requer a análise de três casos distintos:

$$\begin{aligned} i) \quad y \neq 0, \forall z &\rightarrow f \equiv \frac{z}{y}, \quad b = -a(1 + f), \quad c = 0; \\ ii) \quad y = 0, z \neq 0 &\rightarrow \quad b = 0, \quad c = -a; \\ iii) \quad y = 0, z = 0 &\rightarrow \quad b = 0, \quad c = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Para o primeiro caso acima a dinâmica do sistema fica

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right) + az\right]Q - \left[f + \left(\frac{\theta}{3} + \xi + az\right)f + \xi\right]\mathcal{P} - afg \\ \dot{\mathcal{P}} &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right) + az\right]\mathcal{P} + ayQ + ag\end{aligned}\quad (4.63)$$

descrita pela Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Q, \mathcal{P}) &= -\frac{1}{2}\left[f + \left(\frac{\theta}{3} + \xi + az\right)f + \xi\right]\mathcal{P}^2 - \frac{1}{2}ayQ^2 + \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right) + az\right]\mathcal{P}Q - ag\{Q + f\mathcal{P}\}\end{aligned}\quad (4.64)$$

O segundo caso apresenta a dinâmica

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} - \xi\right)Q + \left(\frac{\theta}{3} + az\right)\mathcal{P} + ag \\ \dot{\mathcal{P}} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} - \xi\right)\mathcal{P} + \xi Q\end{aligned}\quad (4.65)$$

associada à Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(Q, \mathcal{P}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + az\right)\mathcal{P}^2 - \frac{1}{2}\xi Q^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right)\mathcal{P}Q + ag\mathcal{P}\quad (4.66)$$

O terceiro caso é equivalente à situação descrita pelo sistema (4.46), e escreve-se na forma

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right)Q + \frac{\theta}{3}\mathcal{P} + ag \\ \dot{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right)\mathcal{P} + ag\end{aligned}\quad (4.67)$$

com Hamiltoniana dada por

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \frac{\theta}{3} \mathcal{P}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{3} + \xi \right) \mathcal{P} \mathcal{Q} + ag\{\mathcal{P} - \mathcal{Q}\} \quad (4.68)$$

A solução apresentada acima é, sem dúvida, a mais formalmente simples. Todavia, é pouco significativo do ponto de vista físico impor *ad hoc* o valor de Ψ , associado ao observador $V^\mu + \delta V^\mu$. Assim optamos por resolver o sistema acima somente em certas situações particulares de interesse físico. Surgem aqui três situações particulares simples:

1. **Caso Isotrópico:** $\Sigma = 0$, $\Psi = S = E$.
2. **Caso Causal:** $\Omega = 0$, $\Psi = 0$.
3. **Caso de Stokes:** $q = 0$, $\Psi = \frac{1}{\rho+p} [\xi x_{-\Sigma} - \dot{p}\Omega]$, $(\rho + p) \neq 0$.

Usualmente os textos que tratam do tema de Perturbações Vetoriais não se ocupam dos dois primeiros casos, e é mesmo comum encontrar a denominação “*Perturbações Rotacionais*” como sinônimo de Perturbações Vetoriais. Usando o formalismo de Bardeen [2] Goode [13] mostrou que não existem perturbações vetoriais não-triviais se $\delta\sigma_{\alpha\beta} = 0$ ou $\delta\omega_{\alpha\beta} = 0$. O sistema obtido acima permite verificar que, para a decomposição adotada no presente trabalho, essa prova é matematicamente correta, mas de pouco interesse físico por limitar-se ao caso de perturbações materiais do tipo **fluido perfeito**. Quando essa hipótese é relaxada é possível violar aquele resultado. De fato, para o primeiro caso temos

$$\dot{\Omega} = -\frac{\theta}{3}\Omega$$

(com solução imediata) e o sistema torna-se

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{A}{A_0} \right)^{-1} \\ \dot{H} &= \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\theta}{3}\Omega \\ q &= [x_- - (\rho + p)]\Omega \end{aligned} \tag{4.69}$$

onde $A_o = const.$ Para o segundo caso resulta

$$\dot{\Sigma} = -\left(\frac{\theta}{3} + \xi\right)\Sigma$$

uma solução também simples

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left(\frac{A}{A_o}\right)^{-1} e^{-\xi t} \\ \tilde{H} &= -\Sigma \\ S &= \frac{\theta}{3}\Sigma \\ q &= -x_- \Sigma \end{aligned} \tag{4.70}$$

Embora a solução trivial seja possível em ambos os casos, ela não é em absoluto única.

Para o terceiro caso obtemos finalmente um Sistema Dinâmico Fechado Vinculado

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\frac{\theta}{3}S - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi\frac{\theta}{3}\right]\Sigma + \frac{1}{2}x_+\tilde{H} \\ \dot{\Sigma} &= -S - \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p}\right]\xi\Sigma + \lambda\theta\Omega \\ \dot{\Omega} &= \frac{x_-}{\rho + p}\xi\Sigma + \lambda\theta\Omega \\ \dot{\tilde{H}} &= S + \xi\Sigma \end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1: &= \Sigma - \Omega + \tilde{H} = 0 \\ \Phi_2: &= S + \frac{\theta}{3}\tilde{H} = 0 \\ \Phi_3: &= (\rho + p)\Omega - x_-\tilde{H} = 0 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Sec. 4.2 – Uma Tentativa a 4 Dimensões

Vamos procurar a solução do sistema (4.71)-(4.72) na forma Hamiltoniana. Assim, passemos a um novo conjunto de variáveis mais apropriado. Dado que estamos trabalhando com uma Teoria de Perturbações linear, é interessante manter a linearidade das variáveis, e tomaremos inicialmente a mudança da forma

$$\begin{aligned}
 Q &:= \begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix}, & X &:= \begin{pmatrix} S \\ \Sigma \\ \Omega \\ \tilde{H} \end{pmatrix} \\
 M &:= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & l & m \\ r & s & t & u \end{pmatrix}, & \bar{M} &:= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{e} & \bar{f} & \bar{g} & \bar{h} \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{l} & \bar{m} \\ \bar{r} & \bar{s} & \bar{t} & \bar{u} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

onde

$$\Delta := \det M, \quad M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \bar{M}, \quad Q = MX, \quad X = \frac{1}{\Delta} \bar{M}Q$$

Substituindo no sistema (4.71) as definições (4.73) a dinâmica dessas variáveis resulta da forma



$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= \left\{ \dot{a} - \frac{\theta}{3}a - b \right\} S + \left\{ \dot{b} - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] a - \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p} \right] b + \frac{x_-}{\rho + p} \xi c + \xi d \right\} \Sigma + \\
 &+ \left\{ \dot{c} + \lambda \theta b + \lambda \theta c \right\} \Omega + \left\{ \dot{d} + \frac{1}{2}x_{+a} \right\} \tilde{H} \\
 \dot{P}_1 &= \left\{ \dot{e} - \frac{\theta}{3}e - f \right\} S + \left\{ \dot{f} - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] e - \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p} \right] f + \frac{x_-}{\rho + p} \xi g + \xi h \right\} \Sigma + \\
 &+ \left\{ \dot{g} + \lambda \theta f + \lambda \theta g \right\} \Omega + \left\{ \dot{h} + \frac{1}{2}x_{+e} \right\} \tilde{H} \\
 \dot{Q}_2 &= \left\{ \dot{i} - \frac{\theta}{3}i - j \right\} S + \left\{ \dot{j} - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] i - \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p} \right] j + \frac{x_-}{\rho + p} \xi l + \xi m \right\} \Sigma + \\
 &+ \left\{ \dot{l} + \lambda \theta j + \lambda \theta l \right\} \Omega + \left\{ \dot{m} + \frac{1}{2}x_{+i} \right\} \tilde{H} \\
 \dot{P}_2 &= \left\{ \dot{r} - \frac{\theta}{3}r - s \right\} S + \left\{ \dot{s} - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] r - \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p} \right] s + \frac{x_-}{\rho + p} \xi t + \xi u \right\} \Sigma + \\
 &+ \left\{ \dot{t} + \lambda \theta s + \lambda \theta t \right\} \Omega + \left\{ \dot{u} + \frac{1}{2}x_{+r} \right\} \tilde{H} \tag{4.74}
 \end{aligned}$$

O vínculo Hamiltoniano, generalização da eq. (1.12) para o caso de um sistema dinâmico a 4 dimensões, é dado pelo sistema

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{Q}_1}{\partial Q_1} + \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial P_1} &= 0, & \frac{\partial \dot{Q}_2}{\partial Q_2} + \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial P_2} &= 0 \\
 \frac{\partial \dot{Q}_1}{\partial P_2} - \frac{\partial \dot{Q}_2}{\partial P_1} &= 0, & \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial Q_2} - \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial Q_1} &= 0 \\
 \frac{\partial \dot{Q}_1}{\partial Q_2} + \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial P_1} &= 0, & \frac{\partial \dot{Q}_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial P_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Inserindo as Eqs. (4.74) nas equações acima resulta

$$0 = \frac{\partial \dot{Q}_1}{\partial Q_1} + \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial P_1} + \frac{\partial \dot{Q}_2}{\partial Q_2} + \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial P_2} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \dot{\Delta} - \frac{\theta}{3} \Delta - \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p} \right] \Delta + \lambda \theta \Delta \right\} \tag{4.76}$$

que o determinante Δ da transformação (4.73) é dado por

$$\Delta_{Stokes} = \Delta_0 A^{(1-3\lambda)} \int A^{-(1-3\lambda)} \left[1 - \frac{x_-}{\rho + p} \right] dt' \tag{4.77}$$

onde $\Delta_0 = \text{const.}$ Procurou-se, a partir desse dado, uma solução de (4.74) que satisfizesse os vínculos (4.75) na forma de Hamilton-Jacobi (Hamiltoniana nula, onde todos os termos entre chaves em (4.74) são nulos e os vínculos são identicamente satisfeitos. Não foi possível, no entanto, encontrar uma solução para o sistema de 4 equações diferenciais lineares acopladas que resultam desse procedimento. Desta forma optou-se por obter uma dinâmica vinculada **bidimensional**; este parece ser o método mais simples de resolver o sistema (4.74).

Sec. 4.3 – O Formalismo Vinculado

Como já exposto acima, é mais conveniente escolher como variáveis de interesse o conjunto (Σ, Ω) . Assim sendo, visto que os vínculos são conservados, vamos substituí-los diretamente no sistema dinâmico; com isso escrevemos

$$\begin{aligned}\tilde{H} &\equiv \Omega - \Sigma \\ S &\equiv -\frac{\theta}{3}\tilde{H} \\ q &\equiv -(\rho + p)\Omega + x_- \tilde{H}\end{aligned}\tag{4.78}$$

Substituindo essas expressões nas relações (4.71) obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma} &= -\left[\xi\left(1 - \frac{x_-}{\rho + p}\right) - \frac{\theta}{3}\right]\Sigma + \left(\lambda\theta + \frac{\theta}{3}\right)\Omega \\ \dot{\Omega} &= \xi\frac{x_-}{\rho + p}\Sigma + \lambda\theta\Omega\end{aligned}\tag{4.79}$$

sujeito ao vínculo de ausência do fluxo de calor (ou seja, perturbações sem gradiente de temperatura)

$$\Sigma = \left[1 - \frac{\rho + p}{x_-}\right]\Omega\tag{4.80}$$

Novamente podemos procurar por um formalismo Hamiltoniano para o sistema (4.79), definindo

$$\begin{pmatrix} Q \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Omega \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

onde $\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv ad - bc$. A dinâmica desse sistema é obtida diferenciando Q, \mathcal{P} por (4.81) e substituindo as Eqs. (4.71), donde

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \left\{ \dot{a} - \left[\frac{\theta}{3} + \xi \left(1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right) \right] a + \left[\xi \frac{x_-}{\rho+p} \right] b \right\} \frac{1}{\Delta} \{ \bar{a}Q + \bar{c}\mathcal{P} \} + \\ &+ \left\{ \dot{b} + (1+3\lambda)\frac{\theta}{3}a - \lambda\theta b \right\} \frac{1}{\Delta} \{ \bar{b}Q + \bar{d}\mathcal{P} \} \\ \dot{\mathcal{P}} &= \left\{ \dot{c} - \left[\frac{\theta}{3} + \xi \left(1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right) \right] c + \left[\xi \frac{x_-}{\rho+p} \right] d \right\} \frac{1}{\Delta} \{ \bar{a}Q + \bar{c}\mathcal{P} \} + \\ &+ \left\{ \dot{d} + (1+3\lambda)\frac{\theta}{3}c - \lambda\theta d \right\} \frac{1}{\Delta} \{ \bar{b}Q + \bar{d}\mathcal{P} \} \end{aligned} \quad (4.82)$$

A consistência do formalismo Hamiltoniano dá

$$\Phi := \Delta \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} + \frac{\partial \dot{\mathcal{P}}}{\partial \mathcal{P}} \right) = \dot{\Delta} - \left[\frac{\theta}{3} + \xi \left(1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right) \right] \Delta - \lambda\theta\Delta = 0 \quad (4.83)$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} \Delta &= A^{(1+3\lambda)} e^{\xi \int dt' \left[1 - \frac{x_-(t')}{(1+\lambda)\rho(t')} \right]} \\ a = d &= \Delta^{1/2} = \bar{a} = \bar{d} \\ b = c &= 0 = \bar{b} = \bar{c} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Substituindo Eq. (4.84) em (4.82), (4.80) obtemos finalmente uma Dinâmica Hamiltoniana Vinculada

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\frac{1}{2} \left[(1-3\lambda) \frac{\theta}{3} + \xi \left(1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right) \right] Q + \left[(1+3\lambda) \frac{\theta}{3} \right] \mathcal{P} \\ \dot{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2} \left[(1-3\lambda) \frac{\theta}{3} + \xi \left(1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right) \right] \mathcal{P} + \left[\xi \frac{x_-}{\rho+p} \right] Q\end{aligned}\tag{4.85}$$

$$Q = \left[1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right] \mathcal{P}\tag{4.86}$$

cuja Hamiltoniana tem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Q, \mathcal{P}) &= \frac{1}{2} \left[(1+3\lambda) \frac{\theta}{3} \right] \mathcal{P}^2 - \frac{1}{2} \left[\xi \frac{x_-}{\rho+p} \right] Q^2 + \\ &- \frac{1}{2} \left[(1-3\lambda) \frac{\theta}{3} + \xi \left(1 - \frac{x_-}{\rho+p} \right) \right] \mathcal{P} Q\end{aligned}\tag{4.87}$$

Como exemplo de solução explícita, vamos integrar o sistema (4.85) substituindo o vínculo na equação de evolução de \mathcal{P} , que resulta da forma

$$\dot{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \left[(1+3\lambda) \frac{\theta}{3} \right] \mathcal{P}\tag{4.88}$$

Esta equação pode ser integrada diretamente, e encontramos

$$Q = \alpha \left[1 - \frac{\rho+p}{x_-} \right] A^{\frac{1}{2}(1+3\lambda)}, \quad Q = \alpha A^{\frac{1}{2}(1+3\lambda)}\tag{4.89}$$

onde α é uma constante de integração. Substituindo Eq. (4.89), (4.84) na definição de \mathcal{P} pelas Eqs. (4.81) resulta, em particular,

$$\Omega = \Delta^{-1/2} \mathcal{P} = \alpha e^{-\frac{1}{2} \xi \int dt' \left[1 - \frac{x_-(t')}{(1+\lambda)\rho(t')} \right]}\tag{4.90}$$

que a perturbação na vorticidade parece crescer rapidamente com o tempo para compri-

mentos de onda da perturbação tais que $x_- > (1 + \lambda)\rho$, ou seja

$$m > 2K + 2(1 + \lambda)A^2\rho \geq 2K, \quad (4.91)$$

onde a última igualdade a esquerda vale para o limite assintótico $t \rightarrow \infty$ com $\lambda < 1/3$. Da Eq. (2.5), no entanto, obtemos que $m < 2K$. Assim a Eq. (4.91) jamais é satisfeita, e o sistema não apresenta instabilidade exponencial. Este fato era já esperado por razões de conservação de energia e momentum angular do sistema total — as perturbações não podem crescer indefinidamente sem extrair energia e/ou momentum de outro lugar. Este argumento é discutível no que tange à energia, pois o background FRW não é um sistema isolado nem estático, donde poderia ceder energia para as perturbações; sendo FRW irrotacional, no entanto, a objeção da conservação do momentum angular permanece válida.

Capítulo 5

Perturbações Tensoriais

A componente tensorial da teoria de perturbação tem uma extensa bibliografia (ver, por exemplo, [7, 14, 35, 36, 37]). Ainda em acordo com os fundamentos da teoria de perturbação apresentados no Capítulo 2 vamos decompor as perturbações δX das variáveis X em termos dos Harmônicos Tensoriais, desprezando as contribuições provenientes dos termos Escalar e Vetorial. Além disso, apenas por simplicidade de notação, omitiremos nesse Capítulo o índice 2 dessas componentes, que caracteriza a ordem tensorial da perturbação, bem como o índice m dos elementos da base, que caracterizam o comprimento característico da perturbação.

As equações de definição das quantidades tensoriais são dadas por

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= 0 & \delta\omega^i &= 0 & \delta H_{ij} &= H(t)U_{ij}^* \\ \delta\rho &= 0 & \delta q_i &= 0 & \delta E_{ij} &= E(t)U_{ij} \\ \delta p &= 0 & \delta a_i &= 0 & \delta \Pi_{ij} &= \Pi(t)U_{ij} \\ \delta\theta &= 0 & \delta V_i &= 0 & \delta\sigma_{ij} &= \Sigma(t)U_{ij} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Novamente, será importante referir-se à quantidade

$$S(t) := E(t) - \frac{1}{2}\Pi(t). \tag{5.2}$$

Vamos agora proceder à obtenção das equações de perturbação do caso tensorial. Escrevemos as equações gerais para o caso tensorial¹ como

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (\delta E_{\mu\nu})^{\bullet} + \theta \delta E_{\alpha\beta} + h_{(\alpha}^{\mu} \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_{\tau} (\delta H_{\mu\nu})_{;\lambda} = & - \frac{1}{2} (\rho + p) \delta \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (\delta \Pi_{\mu\nu})^{\bullet} \\ & + \frac{\theta}{6} \delta \Pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} h_{\beta)}^{\nu} (\delta q_{\mu})_{;\nu} \\ & + \frac{1}{6} h_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} (\delta q_{\mu})_{;\nu} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (\delta H_{\mu\nu})^{\bullet} + \theta \delta H_{\alpha\beta} - h_{(\alpha}^{\mu} \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_{\tau} (\delta E_{\mu\nu})_{;\lambda} = \frac{1}{2} h_{(\alpha}^{\mu} \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_{\tau} (\delta \Pi_{\mu\nu})_{;\lambda} \quad (5.4)$$

$$h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} (\delta \sigma_{\alpha\beta})^{\bullet} + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} (\delta a_{\alpha})_{;\beta} - h_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)}^{\beta} (\delta a_{\alpha})_{;\beta} + \frac{2}{3} \theta \delta \sigma_{\mu\nu} = -\delta E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta \Pi_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

$$\delta H_{\alpha\beta} = -h_{(\alpha}^{\mu} \eta_{\beta)}^{\nu\lambda\tau} V_{\tau} (\delta \sigma_{\mu\nu} + \delta \omega_{\mu\nu})_{;\lambda} \quad (5.6)$$

Além das equações acima, conforme a nota no capítulo anterior, faremos uso da equação de estado do fluido cosmológico que constitui a perturbação,

$$\delta \Pi_{\alpha\beta} = \xi \delta \sigma_{\alpha\beta} \quad (5.7)$$

Introduzindo as relações (5.1)-(5.2) e as propriedades da base Tensorial $U_{\alpha\beta}$ dadas pelas Eqs. (2.25)-(2.27) no sistema (5.3)-(5.6), obtemos essas últimas, juntamente com a Eq. (5.7), na forma:

$$\left\{ \dot{S} + \frac{\theta}{3} S + \frac{\theta}{3} \Pi + \frac{1}{2} (\rho + p) \Sigma + \frac{1}{2} \frac{1}{A^2} (m + 3K) H \right\} U_{ij} = 0 \quad (5.8)$$

$$\left\{ \dot{H} - 2 \frac{\theta}{3} H - A^2 (S + \Pi) \right\} U_{ij}^* = 0 \quad (5.9)$$

$$\left\{ \dot{\Sigma} + S + \Pi \right\} U_{ij} = 0 \quad (5.10)$$

$$\left\{ A^2 \Sigma + H \right\} U_{ij}^* = 0 \quad (5.11)$$

$$\left\{ \Pi - \xi \Sigma \right\} U_{ij} = 0 \quad (5.12)$$

¹Ver Apêndice.

Fazendo uso da independência linear dos elementos da base tensorial, temos que os termos entre chaves nas equações acima são todos nulos. Inserindo nas demais equações a relação obtida da Eq. (5.12) (ou seja, eliminando a variável Π) obtêm-se finalmente

$$\tilde{\chi}_1 := \dot{S} + \frac{\theta}{3}S + \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} \right] \Sigma - \frac{1}{2}(m + 3K)\tilde{H} = 0 \quad (5.13)$$

$$\tilde{\chi}_2 := \dot{\Sigma} + S + \xi\Sigma = 0 \quad (5.14)$$

$$\tilde{\chi}_3 := \dot{\tilde{H}} + S + \xi\Sigma = 0 \quad (5.15)$$

$$\tilde{\Phi}_1 := \Sigma - \tilde{H} = 0 \quad (5.16)$$

onde novamente definimos $\tilde{H} := -\frac{1}{A^2}H$ por conveniência. Substituindo no sistema (5.13)–(5.15) o vínculo $\tilde{\Phi}_1$ (Eq. (5.16)) obtemos em definitiva o sistema (*não-vinculado*):

$$\chi_1 := \dot{S} + \frac{\theta}{3}S + x\Sigma = 0 \quad (5.17)$$

$$\chi_2 := \dot{\Sigma} + S + \xi\Sigma = 0 \quad (5.18)$$

onde definimos

$$x := \frac{1}{2}(\rho + p) + \xi \frac{\theta}{3} - \frac{1}{2}(m + 3K) \quad (5.19)$$

É notável o fato que, à diferença do caso vetorial (ver seção 4.1), o modo tensorial não tem contribuição não-trivial se qualquer das duas variáveis (E, Σ) for nula, como o sistema acima mostra claramente.

Apenas por consistência, apresentamos abaixo a equação de evolução do vínculo $\tilde{\Phi}_1$:

$$\dot{\tilde{\Phi}}_1 = \tilde{\chi}_2 - \tilde{\chi}_3 \quad (5.20)$$

O sistema

$$\begin{cases} \chi_1 = 0 \\ \chi_2 = 0 \end{cases}$$

constitui um Sistema Dinâmico fechado a duas dimensões. Embora tal possa ser estudado

na forma acima, estamos interessados em obter sua descrição em termos do Formalismo Hamiltoniano. Assim vamos passar das coordenadas “naturais” S, Σ para coordenadas canonicamente conjugadas (Q, P) . Dado que a teoria em questão é uma teoria de perturbações linear, vamos nos restringir a transformações lineares de coordenadas, da forma

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \bar{M} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} S \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S \\ \Sigma \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \bar{M} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

onde $\Delta := \det M \neq \text{const.}$ A dinâmica (5.17), (5.18) desse sistema, em termos das variáveis hamiltonianas, se escreve na forma

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{a}S + \dot{b}\Sigma + a\dot{S} + b\dot{\Sigma} \\ &= \left[\dot{a} - \frac{\theta}{3}a - b \right] S + [\dot{b} - xa - \xi b] \Sigma \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\left(\dot{a} - \frac{\theta}{3}a - b \right) \bar{a} + (\dot{b} - xa - \xi b) \bar{c} \right] Q \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\dot{a} - \frac{\theta}{3}a - b \right) \bar{b} + (\dot{b} - xa - \xi b) \bar{d} \right] P \right\} \\ \dot{P} &= \dot{c}S + \dot{d}\Sigma + c\dot{S} + d\dot{\Sigma} \\ &= \left[\dot{c} - \frac{\theta}{3}c - d \right] S + [\dot{d} - xc - \xi d] \Sigma \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\left(\dot{c} - \frac{\theta}{3}c - d \right) \bar{c} + (\dot{d} - xc - \xi d) \bar{e} \right] Q \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\dot{c} - \frac{\theta}{3}c - d \right) \bar{d} + (\dot{d} - xc - \xi d) \bar{f} \right] P \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

A existência de uma Hamiltoniana para o problema em questão reduz-se à solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} = 0 \quad (5.23)$$

Usando as Eqs. (5.22) na relação acima resulta

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ \dot{\Delta} - \left(\xi + \frac{\theta}{3} \right) \Delta \right\} = 0 \quad (5.24)$$

Essa equação pode ser diretamente integrada, com solução

$$\Delta(t) = \frac{A(t)}{A_0} e^{\xi t}, \quad A_0 = \text{const.} \quad (5.25)$$

Escolhemos agora uma solução de Eq. (5.25) particularmente simples para a matriz M , da forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{1/2} e^{\frac{1}{2}\xi t} \quad (5.26)$$

onde tomamos $A_0 = 1$. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= A^{1/2} e^{\frac{1}{2}\xi t} S \\ \mathcal{P} &= A^{1/2} e^{\frac{1}{2}\xi t} \Sigma \end{aligned} \quad (5.27)$$

Com a particular escolha acima a dinâmica hamiltoniana (Eq. (5.22)) reduz-se a

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Q}} &= \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{\theta}{3} \right) \mathcal{Q} - x \mathcal{P} \\ \dot{\mathcal{P}} &= -\mathcal{Q} - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{\theta}{3} \right) \mathcal{P} \end{aligned} \quad (5.28)$$

e é descrita pela Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{Q}^2 - x \mathcal{P}^2 + \left(\xi - \frac{\theta}{3} \right) \mathcal{P} \mathcal{Q} \right] \quad (5.29)$$

É possível encontrar a evolução explícita desse sistema para o caso particular de de Sitter com $\xi = \theta/3$ e $(m + 3K) = 0$ — observe-se que, da Eq. (2.6), só podemos assumir essa equação no limite do espectro de m e para $K = -1, 0$. — Da eq. (5.19) temos

$x = \xi \theta/3 = \xi^2$, donde o sistema torna-se

$$\mathcal{H}(Q, P) = \frac{1}{2}Q^2 - \frac{x}{2}P^2 \quad (5.30)$$

autônomo (Hamiltoniana independente do tempo), e evolui com

$$\begin{aligned} Q &= \xi [C_1 e^{\xi t} + C_2 e^{-\xi t}] \\ P &= - [C_1 e^{\xi t} - C_2 e^{-\xi t}] \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde C_1, C_2 são constantes. A possibilidade de termos $C_1 \neq 0$ é interpretada como um indício da instabilidade do modelo considerado. Obseva-se ainda que a restrição $(m + 3K) = 0$ não é essencial na obtenção deste resultado.

Cap. 6 – Conclusões

A Teoria de Perturbações é uma das ferramentas matemáticas mais poderosas da física, e o presente trabalho obteve sua aplicação no contexto da Teoria da Relatividade Geral usando o método (já utilizado por Salim [19]) do Formalismo Quasi-Maxwelliano.

No Capítulo 4 – Perturbações Vetoriais obteve-se diversas soluções alternativas para a evolução do espectro de perturbações vetoriais. Em particular, a seção 1 apresenta situações em que as soluções são explicitamente não decrescentes, donde verificamos que os Modelos FRW não são estáveis. É notável que, na solução, surgem termos que assemelham-se a uma instabilidade exponencial, a qual é eliminada pelo espectro possível do comprimento de perturbação.

No Capítulo 5 – Perturbações Tensoriais obteve-se a solução Hamiltoniana para as Ondas Gravitacionais no Background FRW, e novamente verificamos a falta de estabilidade.

As funções Hamiltonianas obtidas constituem o ponto central do trabalho, por permitirem uma ponte entre a Teoria de Perturbações e o Formalismo de Hamilton da Mecânica Clássica. Esta conexão permite mesmo que o estudo seja realizado em um contexto semi-clássico²: é possível tomar as Hamiltonianas como operadores definidos no espaço de Hilbert das perturbações e quantizar estas perturbações em torno da solução clássica. Este projeto é a etapa seguinte desse trabalho.

²Ver [37, 38] para exemplos de quantização das perturbações.

Apêndice — As Equações Quasi-Maxwellianas

As equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação constituem um formalismo alternativo (mas equivalente) para as equações de Einstein³. Com efeito, usando as equações de Einstein e a definição do tensor de Weyl, podemos escrever as Identidades de Bianchi na forma

$$\begin{aligned}W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} &= R^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}R^{,\beta]} \\ &= -T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{3}g^{\mu[\alpha}T^{,\beta]}\end{aligned}\tag{5.32}$$

Decompondo o tensor de Weyl em função de suas partes elétrica

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu}V^{\mu}V^{\nu}$$

e magnética

$$H_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu}^*V^{\mu}V^{\nu}$$

³Ver [39, 19] para discussões mais amplas.

podemos projetar a divergência covariante do tensor de Weyl de 4 formas independentes

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} V_\beta V_\mu h_\alpha{}^\sigma$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} \eta^{\sigma\lambda}{}_{\alpha\beta} V_\mu V_\lambda$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda}{}_{\alpha\beta} V_\lambda$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} V_\beta h_{\mu(\tau} h_{\sigma)\alpha}$$

tais que sua forma assemelha-se às Equações de Maxwell do Eletromagnetismo Clássico. Assim as Equações Quasi-Maxwellianas não perturbadas se escrevem na forma

$$\begin{aligned} h^{\epsilon\alpha} h^{\lambda\gamma} E_{\alpha\lambda;\gamma} + \eta^\epsilon{}_{\beta\mu\nu} V^\beta H^{\nu\lambda} \sigma^\mu{}_\lambda + 3H^{\epsilon\nu} \omega_\nu \\ = \frac{1}{3} h^{\epsilon\alpha} \rho_{,\alpha} + \frac{\Theta}{3} q^\epsilon - \frac{1}{2} (\sigma^\epsilon{}_\nu - 3\omega^\epsilon{}_\nu) q^\nu \\ + \frac{1}{2} \pi^{\epsilon\mu} a_\mu + \frac{1}{2} h^{\epsilon\alpha} \pi_{\alpha}{}^\nu{}_{;\nu} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} h^{\epsilon\alpha} h^{\lambda\gamma} H_{\alpha\lambda;\gamma} - \eta^\epsilon{}_{\beta\mu\nu} V^\beta E^{\nu\lambda} \sigma^\mu{}_\lambda - 3E^{\epsilon\nu} \omega_\nu \\ = (\rho + p)\omega^\epsilon - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} V_\lambda q_{\alpha;\beta} \\ + \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda} (\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta}) \pi^\mu{}_\alpha V_\lambda \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} h_\mu{}^\epsilon h_\nu{}^\lambda \dot{H}^{\mu\nu} + \Theta H^{\epsilon\lambda} - H_\nu{}^{(\epsilon} h^{\lambda)}{}_\mu V^{\mu;\nu} \\ + \eta^{\lambda\nu\mu\gamma} \eta^{\epsilon\beta\tau\alpha} V_\mu V_\tau H_{\alpha\gamma} \Theta_{\nu\beta} \\ - 2a_\alpha E_\beta{}^{(\lambda} \eta^{\epsilon)\gamma\alpha\beta} V_\gamma \\ + E_\beta{}^\mu{}_{;\alpha} h_\mu{}^{(\epsilon} \eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta} V_\gamma \\ = -\frac{3}{2} q^{(\epsilon} \omega^{\lambda)} + \frac{1}{2} h^{\epsilon\lambda} q^\mu \omega_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sigma_{\beta}^{(\epsilon \eta^{\lambda}) \alpha \beta \mu} V_{\mu} q_{\alpha} \\
 & + \frac{1}{2} h^{\nu (\epsilon \eta^{\lambda}) \alpha \beta \mu} V_{\mu} \pi_{\nu \alpha ; \beta}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
 h_{\mu}^{\epsilon} h_{\nu}^{\lambda} \dot{E}^{\mu \nu} & + \Theta E^{\epsilon \lambda} - E_{\nu}^{(\epsilon} h^{\lambda)}_{\mu} V^{\mu ; \nu} \\
 & + \eta^{\lambda \nu \mu \gamma} \eta^{\epsilon \beta \tau \alpha} V_{\mu} V_{\tau} E_{\alpha \gamma} \Theta_{\nu \beta} + 2 a_{\alpha} H_{\beta}^{(\lambda} \eta^{\epsilon) \gamma \alpha \beta} V_{\gamma} \\
 & - H_{\beta}^{\mu}{}_{; \alpha} h_{\mu}^{(\epsilon} \eta^{\lambda) \tau \alpha \beta} V_{\gamma} \\
 & = \frac{1}{6} h^{\epsilon \lambda} (q^{\mu}{}_{; \mu} - q^{\mu} a_{\mu} - \pi^{\nu \mu} \sigma_{\mu \nu}) \\
 & - \frac{1}{2} (\rho + p) \sigma^{\epsilon \lambda} + q^{\epsilon} a^{\lambda} \\
 & - \frac{1}{2} h^{\mu (\epsilon} h^{\lambda) \alpha} q_{\mu ; \alpha} + \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\epsilon} h_{\mu}^{\lambda} \dot{\pi}^{\alpha \mu} \\
 & + \frac{1}{2} \pi_{\beta}^{(\epsilon} \sigma^{\lambda) \beta} - \frac{1}{2} \pi_{\beta}^{(\epsilon} \omega^{\lambda) \beta} + \frac{1}{6} \Theta \pi^{\epsilon \lambda}.
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

As Identidades de Bianchi contraídas, juntamente com as Equações de Einstein, fornecem a lei de conservação

$$T^{\mu \nu}{}_{; \nu} = 0.$$

Podemos projetar esta equação tanto na direção do observador V_{μ} quanto em seu espaço ortogonal, de onde obtemos

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \dot{q}^{\mu} V_{\mu} + q^{\alpha}{}_{; \alpha} - \pi^{\mu \nu} \Theta_{\mu \nu} = 0 \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho + p)a_{\alpha} & - p_{; \mu} h^{\mu}{}_{\alpha} + \dot{q}_{\mu} h^{\mu}{}_{\alpha} + \Theta q_{\alpha} \\
 & + q^{\nu} \Theta_{\alpha \nu} + q^{\nu} \omega_{\alpha \nu} + \pi_{\alpha}{}^{\nu}{}_{; \nu} + \pi^{\mu \nu} \Theta_{\mu \nu} V_{\alpha} = 0
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Da definição do tensor de curvatura de Riemann

$$V_{\mu ; \alpha ; \beta} - V_{\mu ; \beta ; \alpha} = R_{\mu \alpha \beta} V^{\epsilon}$$

temos a evolução das quantidades sinemáticas dadas por

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} + 2\sigma^2 + 2\omega^2 - a^\alpha{}_{;\alpha} = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} &+ \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}(-2\omega^2 - 2\sigma^2 + a^\lambda{}_{;\lambda}) + a_\alpha a_\beta \\ &- h_{(\alpha}{}^\mu h_{\beta)}{}^\nu a_{\mu;\nu} + \frac{2}{3}\Theta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu}\sigma^\mu{}_\beta + \omega_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\beta \\ &= R_{\alpha\varepsilon\beta\nu}V^\varepsilon V^\nu - \frac{1}{3}R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} &- h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\nu (a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3}\Theta\omega_{\alpha\beta} \\ &+ \sigma_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\beta - \sigma_{\beta\mu}\omega^\mu{}_\alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Além das relações acima, a definição de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ fornece 3 vínculos adicionais entre as quantidades cinemáticas:

$$\frac{2}{3}\Theta_{;\mu}h^\mu{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha}h^\gamma{}_\lambda - a^\nu(\sigma_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}) = R_{\mu\nu}V^\mu h^\nu{}_\lambda \quad (5.42)$$

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0 \quad (5.43)$$

$$-\frac{1}{2}h_\tau{}^\varepsilon h_\lambda{}^\alpha \eta_\varepsilon{}^{\beta\gamma\nu} V_\nu (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{;\gamma} + 2a_{(\tau} \omega_{\lambda)} = H_{\tau\lambda}. \quad (5.44)$$

São essas as 12 equações que constituem o Formalismo Quasi-Maxwelliano. Vamos utilizá-las para calcular a evolução de pequenas perturbações em torno de um Universo FRW. Escrevendo os objetos perturbados na forma

$$X_{(perturbado)} = X_{(background)} + \delta X$$

obtemos de (5.33)-(5.44) as expressões perturbadas de primeira ordem (que são o ponto

de partida dos capítulos 3, 4 e 5):

$$\begin{aligned}
 (\delta E^{\mu\nu})^\bullet h_\mu^\alpha h_\nu^\beta &+ \Theta (\delta E^{\alpha\beta}) - (\delta E_\nu^{(\alpha} h^{\beta)})_\mu V^{\mu;\nu} \\
 &+ \frac{\Theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_\mu V_\tau (\delta E_{\epsilon\lambda}) h_{\gamma\nu} \\
 &- (\delta H_\lambda^\mu)_{;\gamma} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\tau \\
 &= -\frac{1}{2}(\rho + p) (\delta\sigma^{\alpha\beta}) \\
 &+ \frac{1}{6} h^{\alpha\beta} (\delta q^\mu)_{;\mu} - \frac{1}{2} h^{\mu(\alpha} h^{\beta)\nu} (\delta q_\mu)_{;\nu} \\
 &+ h^{\mu(\alpha} h^{\beta)\nu} (\delta \Pi_{\mu\nu})^\bullet + \frac{1}{6} \Theta (\delta \Pi^{\alpha\beta})
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta H^{\mu\nu})^\bullet h_\mu^\alpha h_\nu^\beta &+ \Theta (\delta H^{\alpha\beta}) - (\delta H_\nu^{(\alpha} h^{\beta)})_\mu V^{\mu;\nu} \\
 &+ \frac{\Theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\epsilon} \eta^{\alpha\lambda\tau\gamma} V_\mu V_\tau (\delta H_{\epsilon\gamma}) h_{\lambda\nu} \\
 &- (\delta E_\lambda^\mu)_{;\tau} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\gamma \\
 &= \frac{1}{2} h^{\nu(\alpha} \eta^{\beta)\epsilon\tau\mu} V_\mu (\delta \Pi_{\nu\epsilon})_{;\tau}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$(\delta H_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} = (\rho + p) (\delta\omega^\epsilon) - \frac{1}{2} \eta^{\epsilon\alpha\beta\mu} V_\mu (\delta q_\alpha)_{;\beta} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta E_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\epsilon} h^{\mu\nu} &= \frac{1}{3} (\delta\rho)_{;\alpha} h^{\alpha\epsilon} - \frac{1}{3} \dot{\rho} (\delta V^\epsilon) \\
 &- \frac{1}{3} \dot{\rho} V_\alpha (\delta V^\alpha) V^\epsilon \\
 &+ \frac{1}{2} h^\epsilon_\alpha (\delta \Pi^{\alpha\mu})_{;\mu} + \frac{\Theta}{3} (\delta q^\epsilon)
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$(\delta\Theta)^\bullet + \frac{2}{3}\Theta (\delta\Theta) - (\delta a^\alpha)_{;\alpha} = -\frac{(1+3\lambda)}{2} (\delta\rho) \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta\sigma_{\mu\nu})^\bullet &+ \frac{1}{3} h_{\mu\nu} (\delta a^\alpha)_{;\alpha} - (\delta a_{(\alpha}{}_{;\beta)} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \\
 &+ \frac{2}{3}\Theta (\delta\sigma_{\mu\nu}) = -(\delta E_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\delta \Pi_{\mu\nu})
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

$$(\delta\omega^\mu)^* + \frac{2}{3}\Theta(\delta\omega^\mu) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu\beta\gamma}(\delta a_\beta)_{;\gamma} V_\alpha \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(\delta\Theta)_{;\lambda} h^\lambda{}_\mu - \frac{2}{3}\dot{\Theta}(\delta V_\mu) + \frac{2}{3}\dot{\Theta} V_\alpha(\delta V^\alpha) V_\mu \\ - (\delta\sigma^\alpha{}_\beta + \delta\omega^\alpha{}_\beta)_{;\alpha} h^\beta{}_\mu = -(\delta q_\mu) \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$(\delta\omega^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (5.53)$$

$$(\delta H_{\mu\nu}) = -h^\alpha{}_{(\mu} h^\beta{}_{\nu)}((\delta\sigma_{\alpha\gamma})_{;\lambda} + (\delta\omega_{\alpha\gamma})_{;\lambda}) \eta_\beta{}^{\epsilon\gamma\lambda} V_\epsilon \quad (5.54)$$

$$(\delta\rho)^* + \Theta(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)(\delta\Theta) + (\delta q^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}(\delta V_\mu) + \dot{p} V_\alpha(\delta V^\alpha) V_\mu - (\delta p)_{;\beta} h^\beta{}_\mu + (\rho + p)(\delta a_\mu) \\ + h_{\mu\alpha}(\delta q^\alpha)^* + \frac{4}{3}\Theta(\delta q_\mu) + h_{\mu\alpha}(\delta\pi^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Referências

- [1] Lifshitz, E.M. & Khalatnikov, I.N. (1963), "*Investigations in Relativistic Cosmology*", Adv. Phys. **12**; 185.
- [2] Bardeen, J. (1980) "*Gauge-Invariant Cosmological Perturbations*", Phys. Rev. D **22**, 8; 1882.
- [3] Sachs, R.K. & Wolfe, A.M. (1967), "*Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background*", App. J. **147**; 73.
- [4] D'Eath, P.D. (1976) "*On the Existence of Perturbed Robertson-Walker Universes*", Ann. Phys. **98**; 237.
- [5] Crittenden, R. & Bond, R. & Davis, R.L. & Efstathiou, G. & Steinhardt, P.J. (1993) "*Imprint of Gravitational Waves on the Cosmic Microwave Background*", Phys. Rev. Lett. **71**, 3; 324.
- [6] Davis, R.L. & Hodges, H.M. & Smoot, G.F. & Steinhardt, P.J. & Turner, M.S. (1992) "*Cosmic Microwave Background Probes Models for Inflation*", Phys. Rev. Lett. **69**, 13; 1856.
- [7] Atrio-Barandela, F. & Silk, J. (1994) "*Cosmic Microwave Background Temperature Fluctuations and Gravitational Waves*", Phys. Rev. D **49**, 2; 1126.
- [8] Pyne, T. & Birkinshaw, M. "*Null Geodesics in Perturbed Spacetimes*", Ap. J. **415**; 459.

- [9] Debever, R. (1964) "*Le Rayonnement Gravitationnel; Le Tenseur de Riemann en Relativité Générale*", Cahier de Physique 168; 303.
- [10] Paiva, F.M. (1993) "*Limites de Espaços-Tempos em Gravitação*", Tese de Doutorado do CBPF. Paiva, F.M. & Rebouças, M.J. & MacCallum, M.A.H. (1993), "*On Limits of Spacetimes - a Coordinate-Free Approach*" Class. Quantum Grav. A 126; 168.
- [11] Stewart, J.M. (1990) "*Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker Cosmological Models*", Class. Q. Grav. 7; 1169.
- [12] Brandenberger, R. H. & Khan, R. & Press, W. H. (1983) "*Cosmological Perturbations in the Early Universe*", Phys Rev. D 28, 8; 1809.
- [13] Goode, S.W. (1989) "*Analysis of Spatially Inhomogeneous Perturbations of the FRW Cosmologies*", Phys. Rev. D 39, 10; 2882.
- [14] Durrer, R. (1994) "*Light Deflection in Perturbed Friedmann Universes*", zu-th 3/94.
- [15] Dunsby, P.K.S. (1992) "*The Covariant Approach to Cosmological Density Perturbations*".
- [16] Hawking, S.W. (1966) "*Perturbations of an Expanding Universe*", Ap. J. 145; 544.
- [17] Olson, D.W. (1976) "*Density Perturbations in Cosmological Models*", Phys. Rev. D 14, 2; 327.
- [18] Hwang, J.C. & Vishniac, E.T. (1990) "*Analyzing Cosmological Perturbations Using the Covariant Approach*", Ap. J. 353; 1.
- [19] Salim, J.M. (1982), "*Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann*", Tese de Doutorado do CBPF.
- [20] Novello, M. & Salim, J.M. & Heintzmann, H. (1988), "*Perturbations of the Friedmann Universe*", in *José Leite Lopes Festschrift*, Ed. S.Joffily.

- [21] Novello, M. & Salim, J.M. (1983) "*Non Equilibrium Relativistic Cosmology*", *Fund. of Cosmic Phys.* **8**; 201.
- [22] Kodama, H. & Sasaki, M. (1984) "*Cosmological Perturbation Theory*", *Progr. Th. Phys. Supp.* **78**; 1.
- [23] Novello, M. & Salim, J.M. & Motta da Silva, M.C. & Jorás, S.E.C.E. & Klippert, R. (1994) "*Minimal Closed Set of Observables in the Theory of Cosmological Perturbations*", *Notas de Física do CBPF n° 009/94* (artigo submetido à *Phys. Rev. D*).
- [24] Jorás, S.E.C.E. (1994) "*Minimal Closed Set of Observables in the Theory of Cosmological Perturbations*", *Dissertação de Mestrado do CBPF*.
- [25] Frieman, J.A. (1994) "*The Standard Cosmology*", preprint CBPF n° 2077 (FERMILAB-Conf-94/090-A).
- [26] Kolb, E.W. (1993) "*Particle Physics and Cosmology*", *Proceedings of the 42nd Scottish Universities Summer School in Physics*. (a ser publicado).
- [27] Dodelson, S. & Knox, L. & Kolb, E.W. (1994) "*Testing Inflation With the Cosmic Microwave Background*", *astro-ph/9403004* (submetido à *Phys. Rev. Lett.*).
- [28] Salopek, D.S. (1992) "*Consequences of the COBE Satellite Results for the Inflationary Scenario*", **69**, 25; 3606
- [29] Stoeger, W.R. & Ellis, G.F.R. & Schmidt, B.G. (1991) "*Gauge-Invariant Variations in the Redshift and Cosmic Background Radiation Anisotropies*", *Gen. Rel. Grav.* **23**, 10; 1169.
- [30] Geroch, R. (1969) "*Limits of Spacetimes*", *Commun. Math. Phys.* **13**, 180.
- [31] Bruni, M. & Ellis, G.F.R. & Dunsby, P.K.S. (1992), "*Gauge-Invariant Perturbations in a Scalar Field Dominated Universe*", *Class. Q. Grav.* **9**; 921.

- [32] Lyth, D.H. & Stewart, E.D. (1990) "*The Evolution of Density Perturbations in the Universe*", Ap. J. **361**; 343.
- [33] Israel, W (1976) "*Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory*", Ann. Phys. **100**; 310.
- [34] Costa, M.E.V. (1988) "*Simetrias Locais no Formalismo Hamiltoniano*", Tese de Doutorado do Instituto de Física da UFRGS.
- [35] Krauss, L.M. & White, M. (1992) "*Grand Unification, Gravitational Waves, and the Cosmic Microwave Background Anisotropy*", Phys. Rev. Lett. **69**, 6; 869.
- [36] Houser, J.L. & Centrella, J.M. & Smith, S.C. (1994) "*Gravitational Radiation From Nonaxisymmetric Instability in a Rotating Star*", Phys. Rev. Lett. **72**, 9; 1314.
- [37] Grishchuck, L.P. (1994) "*Density Perturbations of Quantum Mechanical Origin and Anisotropy of the Microwave Background*", gr-qc-1 n^o 9405059.
- [38] Guth, A.H. & So-Young Pi (1982) "*Fluctuations in the New Inflationary Universe*", Phys. Rev. Lett. **49**, 15; 1110.
- [39] Ellis, G.F.R. (1971) "*General Relativity and Cosmology*", Proc. Int. School of Physics, Enrico Fermi Course XLVII, London Academic; 104.

“TEORIA DE PERTURBAÇÕES VETORIAIS E TENSORIAIS

NO UNIVERSO DE FRIEDMAN”

Renato Klippert Barcellos

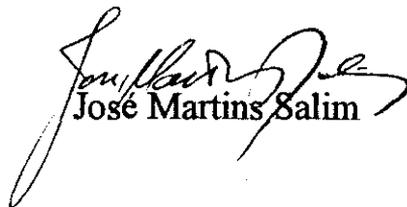
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Mário Novello - Presidente



Luciane Rangel de Freitas



José Martins Salim

Rio de Janeiro, 02 de setembro de 1994