ESTUDO NUMÉRICO DA ESTABILIDADE DA IMPLEMENTAÇÃO, PELO MÉTODO DE GALERKIN, DE FORMULAÇÕES (u,p) DAS EQUAÇÕES DA ELASTICIDADE, PARA MATERIAIS COMPRESSÍVEIS

OLIVIER STORA

TESE DE MESTRADO

CBPF

AGOSTO 1993

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer a todas as pessoas que ajudaram a realização deste trabalho.

Leopoldo Franca, José Helayel-Neto, Renato Dória, renderam possível a minha vinda para o Brasil.

Os estudantes, professores, e pessoal do CBPF e mas particularmente do DCP sempre me acolheram com muita gentileza e simplesmente.

Fred Valentin nunca hesitou em me ajudar, entre outras coisas para a utilização das Sun Stations.

Agradeço a banca examinadora que aceitou de se reunir e ler meus trabalhos tão rapidamente: os professores José Helayel-Neto, Sebastião Alves Dias, Sergio Frey, Marco Antonio Monteiro Silva Ramos.

Enfim, sem a ajuda de todos os meus amigos, eu nunca teria conseguido acabar esse trabalho nesse prazo.

A parte financial foi garantida pelo MAE da França e o CNPq.

RESUMO

O método de Galerkin se revela estável na resolução das equações da elasticidade dos materiais compressíveis, usando o elemento de Taylor-Hood: Q2 para os deslocamentos e Q1 para a pressão.

Depois de apresentar os princípios da implementação deste problema a partir de uma formulação variacional simples, em (**u**,p), destas equações, nós propomos uma formulação mais geral, incluindo a primeira.

Esta segunda formulação permite de resolver o problema para a pressão hidrostática, assim que para o parâmetro de pressão definido na primeira.

Os testes numéricos mostram que, porém tenha um problema de definição das formulações variacionais (para certos valores de parâmetros dos quais elas dependem), o método empregado converge para os casos fisicamente possíveis.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O problema de Stokes já foi bastante estudado na literatura (cf. ref. (7) por ex.).

Todavia, este problema impõe uma restrição: o material estudado é incompressível. É interessante, portanto, introduzir uma formulação dependendo de um parâmetro λ de compressibilidade. Claramente, ela tem que coincidir com o problema de Stokes para corpos incompressíveis. Uma tal formulação já foi apresentada na literatura (ref. (1) p. ex.).

Depois de sua apresentação detalhada, nós desenvolvemos o seu princípio variacional que pode ser escrito da forma:

achar $(u,p) \in V \times W$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = f(\mathbf{v}) & \forall v \in V \\ b(\mathbf{u},q) + c(p,q) = 0 & \forall q \in W \end{cases}$$

A diferença entre esta formulação e o problema de Stokes já conhecido vem do termo c (p,q). Ele nos impede de usar o teorema de Brezzi para verificar a existência de uma solução (u,p) única.

Nós empregamos então o teorema mais geral de Lax-Milgram que revela que não podemos afirmar que esta solução existe, nem que ela é única, para materiais muito compressíveis ou, de maneira equivalente, quando λ tende em direção de zero.

Todavia, a implementação desta formulação pelo método de Galerkin conduz a resultados numéricos estáveis para as interpolações de **u** e p, usando o elemento de Taylor-Hood, Q2-Q1, com $0 < \lambda < +\infty$.

Esta formulação não nos permite resolver o problema para $\lambda = 0$. Nós propomos, portanto, uma formulação variacional alternativa do mesmo problema. Ela é baseada na separação do tensor de tensões, e introduz um novo parâmetro β. Para $\beta = 1$, as duas formulações são iguais. Para $\beta = 0$, as variáveis da segunda são os deslocamentos e a pressão hidrostática, p_{hid}.

Os resultados numéricos da implementação pelo método de Galerkin dessa formulação dão interpolações estáveis de **u** e p_{hid}, o novo parâmetro de pressão, com o elemento Q2-Q1.

2. 1ª FORMULAÇÃO FORTE DO PROBLEMA

2.1. Formulação Forte (ref. (1), (2), (3))

Consideramos um sólido homogêneo, isotrópico, linearmente elástico. Ele ocupa a região Ω, de fronteira Γ, do espaço $R^{n_{sd}}$, $n_{sd} \geq 2$ ($n_{sd} = 2$ ou 3) sendo o número de dimensões do espaço. Esse corpo é submetido a um campo estático de forças de volume **f**.

Vamos supor (por simplicidade) que os deslocamentos são prescritos iguais a zero sobre Γ (problema homogêneo de Dirichlet).

Sejam:

$\mathbf{u} \equiv u_i$, $i = 1, \ldots, n_{sd}$, o campo dos deslocamentos;

$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$, $i,j = 1, \ldots, n_{sd}$, o tensor das deformações;

$\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$, $i,j = 1, \ldots, n_{sd}$, o tensor das tensões;

p, o parâmetro de pressão.

os dados do problema incluem:

$\mathbf{f} = f_i$, $i = 1, \ldots, n_{sd}$,em Ω,o campo de forças de volume

$\mathbf{u} = 0$ sobre Γ, as condições de contorno.

Temos então as seguintes relações entre os diferentes campos:

• as equações deslocação-deformação:

$$\varepsilon\,(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} + \nabla^T\,\mathbf{u}) \qquad \text{para pequenas deformações}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij}\,(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \text{em } \Omega$$

• as equações constitutivas (lei de Hooke generalizada): (ref. (4))

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1.1}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad \text{em } \Omega$$

onde $\mathbf{E} = (E_{ijkl})$ é o tensor dos coeficientes elásticos.

Ele verifica as propriedades de simetria:

$$_{ijkl} = E_{klij} \qquad \text{simetria maior}$$

$$\left.\begin{array}{l} _{ijkl} = E_{jikl} \\ _{ijkl} = E_{ijlk} \end{array}\right\} \text{simetrias menores}$$

E é positivo-definido:

$$E_{ijkl}\,(\mathbf{x})\,\psi_{ij}\,\psi_{kl} \geq 0$$

$$E_{ijkl}\,(\mathbf{x})\,\psi_{ij}\,\psi_{kl} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{ij} = 0$$

$$\forall\,\mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \qquad \forall\,\psi_{ij} = \psi_{ji}.$$

No caso presente de corpo isotrópico homogêneo, temos:

$$E_{ijkl}\,(\mathbf{x}) = E_{ijkl} = \mu\,(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}) + \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}$$

(2.1.1) é então equivalente a:

$$\sigma = 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \,.\, \mathbf{1} \tag{2.1.2}$$

λ e μ sendo os coeficientes de Lamé (constantes dependendo do material).

μ é chamado modulo de rigidez.

- as equações de equilíbrio:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \tag{2.1.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma_{ij,j} + \mathbf{f}_i = 0$$

- as equações constitutivas para a pressão

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{p}{\lambda} = 0 \tag{2.1.4}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad \text{em } \Omega$$

Nota: Nas fórmulas precedentes, os índices vão de 1 a n_{sd}, e a convenção de somação de Einstein é usada.

(2.1.2) e (2.1.4) dão:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p.\mathbf{1}$$

que combinada com (2.1.3) dá:

$$-\operatorname{div}(2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \operatorname{div}(p.\mathbf{1}) = \mathbf{f}$$

Finalmente, nossa **1ª formulação forte do problema** é:

(F1)

Dada $\mathbf{f}: \ \Omega \to R^{n_{sd}}$

achar $\mathbf{u}: \ \overline{\Omega} \to R^{n_{sd}}$

$\quad\quad\ \ p: \ \overline{\Omega} \to IR$

tais que:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu\,\varepsilon(\mathbf{u})) + \operatorname{div}(p.\mathbf{1}) = \mathbf{f} & (2.1.5) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} + \dfrac{1}{\lambda} p = 0 & (2.1.6) \end{cases}$$

e

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \Gamma \qquad (2.1.7)$$

Notas:

- Nessa formulação, **u** e p são as duas variáveis dependentes, λ e μ dois parâmetros.
- Com as nossas condições de contorno (correspondentes ao problema de Dirichlet homogêneo), a pressão é determinada a menos de uma constante aditiva.

2.2. Argumentação Sobre os Valores dos Parâmetros (ref. (4), (5))

Considerações termodinâmicas sobre a positividade da energia livre de um corpo deformado conduzem à positividade de μ, módulo de rigidez, e de κ, módulo de compressão (ref. (5)). Ou seja,

$\mu > 0$

$\kappa > 0$

A relação entre κ e os coeficientes de Lamé é dada por:

$$\kappa = \lambda + \frac{2\,\mu}{n_{sd}}$$

Temos então

$$\lambda \geq - \frac{2\,\mu}{n_{sd}}$$

Por outro lado, o estudo da extensão simples de uma barra nos leva à relação seguinte para o módulo de Young E (ref. 4):

$$E = \frac{9\,\kappa\,\mu}{(3\,\kappa + \mu)}$$

Evidentemente, $E > 0$

Temos também:

$$\lambda = \frac{E\,.\,\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\,\upsilon)} =$$

υ sendo o coeficiente de Poisson, tal que:

$$-1 \leq \upsilon \leq \frac{1}{2}$$

Portanto, λ e υ tem o mesmo sinal.

Mas, um sólido com um coeficiente de Poisson negativo se expandiria transversalmente quando estirado longitudinalmente. Portanto $\upsilon \geq 0$ e em conclusão:

$$\lambda \geq 0$$

ou seja, $\lambda \in [\,0, +\infty[$.

Nós já vimos que $\mu > 0$. De fato, é possível, para qualquer valor de $\mu \in\,]\,0, \infty[$, de levar o estudo do nosso problema (parametrisado por μ e λ) ao estudo do problema normalizado a $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}$:

Com efeito, definindo:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu} = 1$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\mu}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{\mu}$$

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{\mu}{\lambda}$$

(F1) é equivalente a:

achar $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{p}$ tais que:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\bar{\mu}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}})) + \operatorname{div}(\bar{p}.\mathbf{I}) = \bar{\mathbf{f}} \\ \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}} + \dfrac{1}{\bar{\lambda}}\bar{p} = 0 \end{cases}$$

e

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Gamma$$

formulação cujo parâmetro relevante é

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{\mu}{\lambda}$$

Nota: Atenção, esta normalização não é adimensional.

Em seguida, vamos portanto considerar o parâmetro μ fixo, e mais particularmente, $\mu = 1$.

Assim, nossa formulação (F1) é válida tão bem para um comportamento compressível do corpo em questão quanto incompressível:

Quando temos

$$\begin{aligned} &\upsilon = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \lambda \to \infty \\ &\Rightarrow \kappa \to \infty \end{aligned}$$

(2.1.6) se torna a condição cinemática de incompressibilidade.

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

e nossa pressão, $p = -\lambda \operatorname{div} u$, é igual à pressão hidrostática

$$\begin{aligned} p_{hid} &= -\frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{n_{sd}} \\ &= -\left(\lambda + \frac{2\mu}{n_{sd}}\right) \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned}$$

O nosso problema torna-se então o problema de Stokes.

Quando $\nu < \frac{1}{2}$, ou seja, λ é finito, p e p_{hid} são diferentes, de um termo $-\frac{2\mu}{n_{sd}}$. div **u**.

O máximo de compressibilidade ocorre quando $\upsilon = 0$, $\lambda = 0$. Mas, claramente, a formulação (F1) do nosso problema não é então definida.

3. FORMULAÇÃO VARIACIONAL CORRESPONDENTE A (F1)

3.1. Teorema de Brezzi, Teorema de Lax-Milgram

Lembramos primeiro o resultado seguinte bem conhecido (ref. (6), (7)):

Seja a formulação mista seguinte:

Dada $f \in V^*$ e $g \in W^*$, achar $(\mathbf{u},p) \in V\mathrm{x}W$ tal que:

$$(M) \begin{cases} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = f(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u},q) = g(q) & \forall q \in W \end{cases}$$

com:

V, W: espaços de Hilbert reais

V^*, W^*: os duais deles

$\left.\begin{array}{l} a: V\mathrm{x}V \to \mathrm{IR} \\ b: V\mathrm{x}W \to \mathrm{IR} \end{array}\right\}$ formas bilineares contínuas

f, g: funcionais lineares dadas dos duais de V e W, respectivamente

$\|\cdot\|_V$:norma em V

$\|\cdot\|_W$:norma em W

Então, temos o teorema de Brezzi sobre a existência e unicidade de uma solução de M: (ref. (7))

Teorema de Brezzi:

Se

B-1 (Continuidade de a e b)

$\exists \; 0 < C_1, C_2 < \infty$ tais que

$$|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \qquad \forall \, \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$$
$$|b(\mathbf{u},q)| \leq C_2 \|\mathbf{u}\|_V \|q\|_W \qquad \forall \, \mathbf{u} \in V \quad \forall \, q \in W$$

e as condições de estabilidade:

B-2 (K - elipticidade de a)

$\exists \alpha > 0$ tal que

$$|a(\mathbf{v},\mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 \qquad \forall \, \mathbf{v} \in K$$

com

$$= \{\mathbf{v} \in V \, / \, b(\mathbf{v},q) = 0 \quad \forall \, q \in W\}$$

B-3 (Condição de Babuška-Brezzi)

$\exists \beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V} \frac{|b(\mathbf{v},q)|}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|q\|_W \qquad \forall \, q \in W$$

Então (M) tem uma solução única $(\mathbf{u},p) \in V x W$

Este teorema é uma conseqüência do teorema mais geral: (ref. (6))

Teorema generalizado de Lax-Milgram:

Sejam H e G espaços de Hilbert reais e seja B(.,.) uma forma bilinear sobre HxG verificando as propriedades seguintes:

L-1
(.,.) é contínua:
$\exists M>0$ tal que $|B(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq M\|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_G$
$\forall\, \mathbf{u} \in H, \quad \forall\, \mathbf{v} \in G$

com $\|.\|_H, \|.\|_G$ as normas sobre H e G respectivamente.

L-2
(.,.) é coerciva:
$\exists \alpha>0$ tal que $\inf\limits_{\substack{u\in H\\ \|u\|_H=1}} \sup\limits_{\substack{v\in G\\ \|v\|_G=1}} |B(\mathbf{u},\mathbf{v})| \geq \alpha > 0$

L-3
$\forall\, v \neq 0 \quad \in G,$
$\sup\limits_{u\in H} |B(\mathbf{u},\mathbf{v})| > 0$

Então:

$\exists!\ \mathbf{u}^* \in H$ tal que $B(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in G$

Notas:

- Se H = G e B(.,.) é simétrica, as condições L-2 e L-3 podem ser substituídas por:

L-2'
$\exists \alpha>0$ tal que $B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_H^2$

- Nós chamaremos esse último teorema de L.M.

A conexão entre os dois teoremas se faz da seguinte maneira:

- Introduzindo a forma bilinear B(.,.):

$$
\begin{aligned}
&:(V x W)\, x\,(V x W) \rightarrow IR \\
&((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)) \equiv a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) + b(\mathbf{u},q
\end{aligned}
$$

e a forma linear:

$$
\begin{aligned}
&: V x W \rightarrow IR \\
&(\mathbf{v},q) \equiv f(\mathbf{v}) + g(q)
\end{aligned}
$$

então, (M) escreve-se:

$$
\begin{aligned}
&\text{Achar } (\mathbf{u},p) \in V x W \quad \text{tal que} \\
&((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)) = F(\mathbf{v},q) \qquad \forall (\mathbf{v},q) \in V x W
\end{aligned}
$$

- A norma sobre VxW é dada por:

$$
\left\| (\mathbf{v}, q) \right\|_{VxW} := \left\| \mathbf{v} \right\|_V + \left\| q \right\|_W
$$

Aplicando o teorema de L.M. a essa formulação, e B(.,.) sendo simétrica, as condições L-2 e L-3 reduzem-se à condição L-2 que nesse caso formula-se: (ref. 6)

$$
\begin{aligned}
&\exists \alpha > 0 \quad \text{tal que} \\
&\sup_{\substack{(\mathbf{v},q) \in VxW \\ (\mathbf{v},q) \neq 0}} \frac{\left| a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) + b(\mathbf{u},q) \right|}{\left\| \mathbf{v} \right\|_V + \left\| q \right\|_W} \geq \alpha \left(\left\| \mathbf{u} \right\|_V + \left\| p \right\|_W \right) \qquad (3.1.1) \\
&\forall (\mathbf{u},p) \in VxW
\end{aligned}
$$

Assim, o teorema de Brezzi pode ser mostrado a partir do teorema de Lax-Milgram.

Em particular, a(.,.) e b(.,.) sendo contínuas, temos a desigualdade (3.1.1) se elas satisfaçam as condições B-2 e B-3 do teorema de Brezzi.

3.2. Formulação Variacional e Funções Admissíveis

Voltamos agora ao nosso problema.

A formulação variacional de (F1) é obtida multiplicando (2.1.5) por uma função peso **v** tal que $\mathbf{v} \equiv 0 \,\text{sobre}\, \Gamma$ e integrando por partes sobre Ω, e, da mesma maneira, multiplicando (2.1.6) por uma função peso q e integrando sobre Ω :

$$\int_\Omega (2.1.5)\,\mathbf{v}\, d\Omega:$$

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(2\mu\, \varepsilon(\mathbf{u}))\,.\mathbf{v}\, d\Omega + \int_\Omega \operatorname{div}(p.\mathbf{1})\,.\mathbf{v}\, d\Omega = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\, d\Omega$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega 2\mu\, \varepsilon(\mathbf{u})\,.\varepsilon(\mathbf{v})\, d\Omega - \int_\Omega p\,.\operatorname{div}\mathbf{v}\, d\Omega = \int_\Omega \mathbf{f}\,.\mathbf{v}\, d\Omega \qquad (3.2.1)$$

$$\int_\Omega (2.1.6)\,.q\, d\Omega:$$

$$-\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\,.q\, d\Omega - (1/\lambda)\int_\Omega p\,.q\, d\Omega = 0 \qquad (3.2.2)$$

- Espaços de funções admissíveis: (ref. (6))

Observando os integrantes das equações (3.2.1) e (3.2.2), e lembrando-se as condições de contorno (2.1.7), os espaços de funções admissíveis são os seguintes:

$p, q \in W = L_2(\Omega)/IR$ (pressão definida a menos uma constante aditiva).

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V = \left\{ \mathbf{v} \in \left(H^1(\Omega)\right)^{n_{sd}} / \mathbf{v} = 0 \quad \text{sobre}\, \Gamma \right\}$$

$$:= \left(H_0^1(\Omega)\right)^{n_{sd}}$$

com

$L_2(\Omega)$: espaço das funções de quadrado integrável definidas em Ω..

$H^1(\Omega)$: espaço de Sobolev das funções de valores e derivadas de quadrado - integrável, em Ω.

$^1(\Omega)$: espaço de Sobolev das funções iguais a zero sobre Γ.

Assim, a formulação variacional correspondente a (F1) é:

(V1)

achar $(\mathbf{u}, p) \in V \mathrm{x} W$ tal que

$$\begin{cases} 2\mu\,(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) - (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall\, \mathbf{v} \in V \\ -(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, q) - \dfrac{1}{\lambda}(p, q) = 0 & \forall\, q \in W \end{cases}$$

$(.,.)$ sendo usado para o apropriado L_2 - produto escalar.

Notas:

- $\left(\varepsilon(u),\varepsilon(v)\right)=\int_{\Omega} tr\left[\varepsilon^{T}(u).\varepsilon(v)\right]d\Omega$

- A formulação (V1) é simétrica.

3.3. Análise da Formulação Variacional

Usando as notações seguintes:

$$\begin{aligned}
&2\mu\,(\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})) &&= a(\mathbf{u},\mathbf{v})\\
&-(\operatorname{div}\mathbf{v},p) &&= b(\mathbf{v},p)\\
&(\mathbf{f},\mathbf{v}) &&= f(\mathbf{v})\\
&-\frac{1}{\lambda}(p,q) &&= c(p,q)
\end{aligned}$$

(V1) escreve-se:

achar $(\mathbf{u},p)\in VxW$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)=f(\mathbf{v}) & \forall\,\mathbf{v}\in V\\ b(\mathbf{u},q)+c(p,q)=0 & \forall\,q\in W\end{cases}$$

Nota: Claramente, a diferença entre este problema e o problema (M) mencionado no parágrafo 3.1 vem do termo c(p,q).

Introduzimos a forma bilinear, B(.,.):

$$\begin{aligned}
&:(VxW)\,x(VxW)\rightarrow IR\\
&((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q))\equiv a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)+b(\mathbf{u},q)+c(p,q)
\end{aligned}$$

e a forma linear F(.):

$F : V \to IR$

$F(\mathbf{v}) \equiv f(\mathbf{v})$

(V1) escreve-se:

Achar $(\mathbf{u},p) \in VxW$ tal que

$$B((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)) = F(\mathbf{v}) \qquad \forall\ (\mathbf{v},q) \in VxW$$

Assim, a condição L-2 do teorema de L.M. é:

$\exists \alpha > 0$ talque

$$\sup_{\substack{(v,q)\in VxW\\(v,q)\neq 0}} \frac{\left|a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)+b(\mathbf{u},q)+c(p,q)\right|}{\|\mathbf{v}\|_V+\|q\|_W} \geq \alpha\left(\|\mathbf{u}\|_V+\|p\|_W\right) \qquad (3.3.2)$$

$\forall\,(\mathbf{u},p)\in VxW$

Já sabemos que se a(.,.) e b(.,.) satisfazem as condições (B-2) e (B-3) do teorema de Brezzi, temos (3.1.1).

Ora,

$$\sup_{\substack{(v,q)\in VxW\\(v,q)\neq 0}} \frac{\left|a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)+b(\mathbf{u},q)+c(p,q)\right|}{\|\mathbf{v}\|_V+\|q\|_W}$$

$$\geq \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(v,q)\in VxW\\(v,q)\neq 0}} \dfrac{\left|a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)+b(\mathbf{u},q)\right|}{\|\mathbf{v}\|_V+\|q\|_W} \geq \alpha\left(\|\mathbf{u}\|_V+\|p\|_W\right) \\ \sup\limits_{q\in W-\{0\}} \dfrac{\left|c(p,q)\right|}{\|q\|_W} \end{cases}$$

Uma condição sobre c(.,.) para ter (3.3.2) é portanto:

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{tal que} \quad \sup_{q \in W - \{0\}} \frac{|c(p,q)|}{\|q\|_W} \geq \gamma \|p\|_W \qquad \forall p \in W$$

Nesse caso:

$$\sup_{\substack{(\mathbf{v},q) \in V x W \\ (\mathbf{v},q) \neq 0}} \frac{|a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) + b(\mathbf{u},q) + c(p,q)|}{\|\mathbf{v}\|_V + \|q\|_W} \geq \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(\|\mathbf{u}\|_V + \|p\|_W\right) + \gamma\|p\|_W\right\}$$

e (3.3.2) é verificada.

Podemos agora fazer uma lista das condições que têm que verificar as formas a(.,.), b(.,.), c(.,.) e B(.,.) de nosso problema para poder aplicar o teorema de L.M. e assim argumentar sobre a existência de uma única solução:

C-1 continuidade de B(.,.):

$$\exists M \text{ tal que } |B((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q))| \leq M\left\{\|\mathbf{u}\| + \|p\|\right\}.\left\{\|\mathbf{v}\| + \|q\|\right\}$$
$$\forall (\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q) \in VxW$$

C-2 K - elipticidade de a(.,.):

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tal que} \quad |a(\mathbf{v},\mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 \qquad \forall \mathbf{v} \in K$$

$$= \left\{\mathbf{v} \in V \,/\, b(\mathbf{v},q) = 0 \qquad \forall q \in W\right\}$$

C-3 condição de Babuška-Brezzi:

$\exists \beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V} \frac{|b(\mathbf{v},q)|}{\|\mathbf{v}\|_v} \geq \beta \|q\|_w \qquad \forall\, q \in W$$

C-4 condição sobre c(.,.):

$\exists \gamma > 0$ tal que

$$\sup_{q \in W-\{0\}} \frac{|c(p,q)|}{\|q\|} \geq \gamma \|p\|_w \qquad \forall\, p \in W$$

Vamos, portanto, verificar estas propriedades.

1) Temos as desigualdades seguintes: (ref. (7))

a) $|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| = |2\mu\,(\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v}))| \leq 2\mu \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_W$

b) $|b(\mathbf{v},p)| = |(\operatorname{div}\mathbf{v},p)| \leq \sqrt{n_{sd}}\, \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{p}\|_w$

c) $|c(p,q)| = \left|\frac{1}{\lambda}(p,q)\right| \leq \frac{1}{\lambda} \|p\| \|q\|$

Portanto,

$$\left|B(\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)\right| \le \left|a(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| + \left|b(\mathbf{v},p)\right| + \left|b(\mathbf{u},q)\right| + \left|c(p,q)\right|$$

$$\le 2\mu\left\|\mathbf{u}\right\|\left\|\mathbf{v}\right\| + \sqrt{n_{sd}}\left\|\mathbf{v}\right\|\left\|p\right\| + \sqrt{n_{sd}}\left\|\mathbf{u}\right\|\left\|q\right\| + \frac{1}{\lambda}\left\|p\right\|.\left\|q\right\|$$

$$\le \max\left(2\mu,\sqrt{n_{sd}},\frac{1}{\lambda}\right).\left(\left\|\mathbf{v}\right\| + \left\|q\right\|\right).\left(\left\|\mathbf{u}\right\| + \left\|p\right\|\right)$$

$$\le M\left\|(\mathbf{v},q)\right\|_{V\times W}\left\|(\mathbf{u},p)\right\|_{V\times W}$$

com

$$= \max\left(2\mu,\sqrt{n_{sd}},\frac{1}{\lambda}\right)$$

2) Desigualdade de Korn: (ref. 7)

$$\exists\, C(\Omega) \text{ tal que } \left\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\right\| \ge C(\Omega).\left\|\mathbf{v}\right\|_{V}$$

$$\Rightarrow \exists\, C(\Omega) \text{ tal que } \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\right) \ge C^2(\Omega).\left\|\mathbf{v}\right\|_{H^1}^2 \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V$$

que prova C-2 com $\alpha = 2\mu\, C^2(\Omega)$ $\forall$ $\mathbf{v} \in V$ e portanto $\forall$ $\mathbf{v} \in K$.

3) Para provar a condição de Babuska-Brezzi, vamos fazer a hipótese seguinte: (ref. (7))

$$\begin{cases} \forall\, q \in L_2(\Omega)/\mathrm{IR}, \exists\, \bar{\mathbf{v}} \in V \quad \text{tal que} \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = q \\ \left\|\bar{\mathbf{v}}\right\|_{H^1} \le C.\left\|q\right\| \end{cases}$$

então,

$$\sup_{v \in V} \frac{|b(v,q)|}{\|v\|_V} \geq \frac{|(\operatorname{div}\bar{v}, q)|}{\|\bar{v}\|_{H^1}} = \frac{\|q\|^2}{\|\bar{v}\|_{H^1}} \geq \frac{1}{C}\|q\|$$

$\forall\, q \in L_2(\Omega)\,/\,IR$

que implica C-3 com $\beta = \frac{1}{C}$.

4)

$$\sup_{q \in W-\{0\}} \frac{|c(p,q)|}{\|q\|} = \sup_{q \in W-\{0\}} \frac{1}{\lambda}\frac{|(p,q)|}{\|q\|}$$

$$= \sup_{q \in W-\{0\}} \frac{1}{\lambda}\left|\left(p, \frac{q}{\|q\|}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left|\left(p, \frac{p}{\|p\|}\right)\right| = \frac{1}{\lambda}\|p\| \qquad \forall\, p \in W$$

Vemos então que as constantes das inigualdades pedidas C-1 e C-2 dependem de λ em $\frac{1}{\lambda}$. Claramente, $\lambda \to 0^+ \Rightarrow M, \gamma \to +\infty$.

Em particular, a condição sobre a continuidade de B(.,.), coloca em evidência o problema de estabilidade que pode ocorrer nesse caso.

4. FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

4.1. Formulação de Galerkin

O primeiro passo da formulação em elementos finitos do nosso problema variacional contínuo é discretizar os espaços de funções V e W (de dimensão infinita) em espaços de dimensão finita: $V_h \subset V$ e $W_h \subset W$.

Assim, a **formulação de Galerkin** do nosso problema escreve-se

(G1)
ada $\mathbf{f}$, achar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h x W_h$ tal que:

$$\begin{cases} 2\mu\,(\varepsilon(\mathbf{u}_h), \varepsilon(\mathbf{v}_h)) - (\operatorname{div}\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) & \forall\, \mathbf{v}_h \in V_h \\ -(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, q_h) - \dfrac{1}{\lambda}(p_h, q_h) = 0 & \forall\, q_h \in W_h \end{cases}$$

ou ainda:

Dada **f**, achar $(u_h, p_h) \in V_h x W_h$ tal que:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_h) & \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) + c(p_h, q_h) = 0 & \forall\, q_h \in \mathbf{W}_h \end{cases}$$

com as mesmas notações do capítulo anterior.

Esta nova formulação tem que ser vista como dando uma solução aproximada (u_h, p_h) do nosso problema variacional.

Vamos estender agora a nossa condição de contorno $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sobre Γ à condição mais geral $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sobre Γ (condição de Dirichlet não homogênea).

Assim, supomos que os elementos $\mathbf{v}_h$ de V_h satisfazem aproximativamente $\mathbf{v}_h = 0$ sobre Γ e que portanto os deslocamentos u_h, que estamos procurando, podem ser escritos como $\mathbf{u}_h = \mathbf{w}_h + \mathbf{g}_h$ com $\mathbf{w}_h \in V_h$ e g_h resultando da aproximação da condição de contorno $u = \mathbf{g}$ sobre Γ.

(G1) se torna então

dadas $f : \Omega \rightarrow IR^{n_{sd}}$

$\mathbf{g} : \Gamma \rightarrow IR^{n_{sd}}$

achar

$u_h = \mathbf{w}_h + \mathbf{g}_h,\ \mathbf{w}_h \in V_h$

$p_h \in W_h$

tais que:

$$a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = f(\mathbf{v}_h) - a(\mathbf{g}_h, \mathbf{v}_h) \qquad \forall\ \mathbf{v}_h \in V_h$$

$$b(\mathbf{w}_h, q_h) + c(p_h, q_h) = - b(\mathbf{g}_h, q_h) \qquad \forall\ q_h \in W_h$$

Nota: Claramente, as funções u_h procuradas agora tem que satisfazer as mesmas condições de integrabilidade que precedentemente.

4.2. Discretização de Ω; Nós

Precisamos, para continuar, definir mais explicitamente os conjuntos V_h e W_h: dividimos primeiro o nosso domínio Ω em n_{el} elementos Ω^e , $e = 1, \ldots, n_{el}$, não se sobrepondo.

No caso bi-dimensional, esse elementos podem ser triângulos e quadriláteros, e para $n_{sd} > 2$, suas generalizações.

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \overline{\Omega}^e$$

$$\varnothing = \bigcap_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e$$

Figura 4.2.1

As funções formando as bases dos espaços finitos V_h e W_h são construidas à partir de "nós". Esses nós podem existir em qualquer lugar do domínio Ω, mas aparecem mais freqüentemente nos vértices dos elementos e nas fronteiras interelemento.

Assim, temos dois conjuntos finitos de nós:

- O conjunto dos nós de pressão, a partir do qual nós vamos construir W_h. Chamamos o conjunto dos números globais associados aos nós $\tilde{\eta} = \{1,2,\ldots,\tilde{n}_{np}\}$, $\tilde{n}_{np}$ sendo o número dos nós para a pressão.
- O conjunto dos nós dos deslocamentos, a partir do qual V_h vai ser formado.

- $\eta = \{1,2,\ldots,n_{np}\}$ é o conjunto dos números globais desses nós, e n_{np} o seu número. Entre esses nós, podemos distingüir particularmente aqueles submetidos à condição de contorno $u^h = \mathbf{g}$. Os seus números formam o conjunto η_g, e o complemento de η_g em η, anotado $\eta - \eta_g$, é então o conjunto dos números associados aos nós aos quais temos que determinar u^h.

Notas:

- Nenhuma condição é prescrita em relação à pressão. Ou seja, p^h tem que ser determinada para todos os nós cujos números pertencem a η.
- O termo de número global de um nó tem que ser entendido em respeito à numeração dos nós sobre Ω, o domínio inteiro.
- Praticamente, um nó de pressão pode ser também um nó de deslocação, mas não necessariamente, e, de qualquer maneira, eles seriam tratados nesse caso como dois nós diferentes, um cujo número pertence a $\tilde{\eta}$ e o outro a η.

4.3. Forma Matricial do Problema, Ponto de Vista Global

Podemos agora definir com precisão os nossos espaços V_h e W_h:

- W_h é o espaço de todas as combinações lineares de funções dadas, $\tilde{N}_{\tilde{A}} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathrm{IR}$, $\tilde{A} \in \tilde{\eta}$.

  Assim, $p_h \in W_h \Rightarrow \exists\ p_{\tilde{A}}$, $\tilde{A} \in \tilde{\eta}$ tais que

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{\tilde{A} \in \tilde{\eta}} \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \cdot p_{\tilde{A}} \qquad \forall\ x \in \bar{\Omega}$$

p_h $(\mathbf{x})$ é a interpolação da pressão. $\tilde{N}_{\tilde{A}}$ é a função de Interpolação da pressão associada ao nó de pressão número $\tilde{A}$.

Da mesma maneira, a função peso da pressão pode ser escrita:

$$q^h(\mathbf{x}) = \sum_{\tilde{A}\in\tilde{\eta}} \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \cdot q_{\tilde{A}}$$

- Similarmente, podemos escrever que V_h é gerado pelas funções $N_A : \overline{\Omega} \rightarrow \mathrm{IR},\ A \in \eta - \eta_g$:

$$\mathbf{w}_h \in V_h \Rightarrow \exists\ \mathbf{d}_A \quad A \in \eta - \eta_g \text{ tais que}$$
$$\mathbf{w}_h = \sum_{A\in\eta-\eta_g} N_A\, \mathbf{d}_A$$

e

$$\mathbf{v}_h = \sum_{A\in\eta-\eta_g} N_A\, \mathbf{c}_A$$

- g_h sendo definida como a interpolação nodal da função dada $\mathbf{g}$ a partir das funções de interpolação de deslocamento associadas aos nós situados sobre Γ, pode ser expressa:

$$g_h = \sum_{A\in\eta_g} N_A\, g_A$$
$$g_A = g(x_A) = g_A^i\, e_i$$

Notas:

- as incógnitas são:

  $p_{\tilde{A}},\ \tilde{A} \in \tilde{\eta}$ (a pressão ao nó $\tilde{A}$)

  $\mathbf{d}_A,\ A \in \eta - \eta_g$ (o deslocamento ao nó A aonde ela não é prescrita).

- $\mathbf{g}_h$ é somente uma aproximação de $\mathbf{g}$.

Definimos a base canônica do espaço euclideano no qual estamos trabalhando:

$$\{e_i,\ i = 1, \ldots, n_{sd}\}$$

assim,

$$\mathbf{w}_h = w_h^i\ \mathbf{e}_i \quad \text{(com a convenção de somação sobre os índices i)}$$

$$w_h^i = \sum_{A \in \eta - \eta_g} N_A\ d_A^i$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}_h = \sum_{A \in \eta - \eta_g} N_A\ d_A^i\ \mathbf{e}_i$$

da mesma maneira:

$$\mathbf{v}_h = \sum_{A \in \eta - \eta_g} N_A\ c_A^i\ \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{f} = f^i\ \mathbf{e}_i$$

Substituindo essas igualdades nas expressões envolvidas em (G-1):

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^{n_{sd}} \left(\sum_{A \in \eta - \eta_g} \partial_i N_A \right) c_A^i$$

$$a(\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h) = 2\mu\left(\varepsilon(\mathbf{w}_h),\varepsilon(\mathbf{v}_h)\right)$$

$$= 2\mu \sum_{i,j=1}^{n_{sd}} \sum_{A,B\in\eta-\eta_g} \left(\varepsilon(N_A\,\mathbf{e}_i),\varepsilon(N_B\,\mathbf{e}_j)\right).d_A^i\,.c_B^j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n_{sd}} \sum_{A,B\in\eta-\eta_g} a(N_A\,\mathbf{e}_i,N_B\,\mathbf{e}_j).d_A^i\,.c_B^j$$

$$b(\mathbf{v}_h,p_h) = -(\operatorname{div}\mathbf{v}_h,p_h)$$
$$= -\sum_{i=1}^{n_{sd}} \sum_{A,B\in\eta-\eta_g} \sum_{\tilde{A}\in\tilde{\eta}} (\partial_i N_A,\tilde{N}_{\tilde{A}})\,c_A^i\,.p_{\tilde{A}}$$

$$f(\mathbf{v}_h) = (\mathbf{f},\mathbf{v}_h) = \sum_{i,j=1}^{n_{sd}} \sum_{A\in\eta-\eta_g} (f^i\,\mathbf{e}_i,N_A\mathbf{e}_j)\,c_A^j$$
$$-a(\mathbf{g}_h,\mathbf{v}_h) = -2\mu\left(\varepsilon(\mathbf{g}_h),\varepsilon(\mathbf{v}_h)\right)$$
$$= -2\mu\sum_{i,j=1}^{n_{sd}} \sum_{A\in\eta_g} \sum_{B\in\eta-\eta_g} \left(\varepsilon(N_A\,\mathbf{e}_i),\varepsilon(N_B\,\mathbf{e}_j)\right).\,g_A^i\,.c_B^j$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{n_{sd}} \sum_{A\in\eta_g} \sum_{B\in\eta-\eta_g} a(N_A\mathbf{e}_i,N_B\mathbf{e}_j)\,.g_A^i\,c_B^j$$

$$b(\mathbf{w}_h,q_h) = -(\operatorname{div}\mathbf{w}_h,q_h)$$
$$= -\sum_{i=1}^{n_{sd}} \sum_{A\in\eta-\eta_g} \sum_{\tilde{A}\in\tilde{\eta}} (\partial_i N_A,\tilde{N}_{\tilde{A}})\,d_A^i\,.q_{\tilde{A}}$$

$$c(p_h,q_h) = -\frac{1}{\lambda}(p_h,q_h) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{\tilde{A},\tilde{B}\in\tilde{\eta}} (\tilde{N}_{\tilde{A}},\tilde{N}_{\tilde{B}})\,p_{\tilde{A}}\,q_{\tilde{B}}$$

$$-b(\mathbf{g}_h,q_h) = (\operatorname{div}\mathbf{g}_h,q_h)$$
$$= \sum_{i=1}^{n_{sd}} \sum_{A\in\eta_g} \sum_{\tilde{A}\in\tilde{\eta}} (\partial_i N_A,\tilde{N}_{\tilde{A}})\,g_A^i\,.q_{\tilde{A}}$$

Assim, o sistema de equações (G-1) é equivalente a:

(lembrando-se que a primeira equação é válida para qualquer $\mathbf{V}_h$ e a segunda para qualquer q_h)

$$\sum_{j=1}^{n_{sd}} \sum_{B\in\eta-\eta_g} a(N_A e_i, N_B e_j)\, d_B^j - \sum_{\tilde{B}\in\tilde{\eta}} (\partial_i N_A, \tilde{N}_{\tilde{B}})\, p_{\tilde{B}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_{sd}} (f^j e_j, N_A e_i) - \sum_{j=1}^{n_{sd}} \sum_{B\in\eta_g} a(N_A e_i, N_B e_j)\, g_B^j$$

$A \in \eta - \eta_g$

$i = 1, \ldots, n_{sd}$

$$\sum_{j=1}^{n_{sd}} \sum_{B\in\eta-\eta_g} (\partial_j N_B, \tilde{N}_{\tilde{A}})\, d_B^j - \sum_{\tilde{B}\in\tilde{\eta}} (\tilde{N}_{\tilde{A}}, \tilde{N}_{\tilde{B}})\, p_{\tilde{B}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_{sd}} \sum_{B\in\eta_g} (\partial_j N_B, \tilde{N}_{\tilde{A}})\, g_B^j$$

$\tilde{A} \in \tilde{\eta}$

Claramente, esse sistema é linear nas incógnitas $d_B^j, p_{\tilde{B}}, B \in \eta - \eta_g, j = 1, \ldots, n_{sd}, \tilde{B} \in \tilde{\eta}$.

Ele pode ser escrito da seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} K & G \\ G^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

K vem do termo a $(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)$ em (G-1)

G vem do termo - (div $\mathbf{v}_h, p_h$) em (G-1)

G^T vem do termo - (div $\mathbf{w}_h, q_h$) em (G-1)

M vem do termo - $\frac{1}{\lambda}$ (p_h, q_h) em (G-1)

F vem do termo $(f_h, \mathbf{v}_h)$ - a $(\mathbf{g}_h, \mathbf{v}_h)$ em (G-1)

H vem do termo - (div $\mathbf{g}_h, q_h$) em (G-1)

Introduzindo o esquema seguinte para a numeração global das equações para as deslocações:

$$D(i,A) = \begin{cases} P & \text{se} \quad A \in \eta - \eta_g \\ 0 & \text{se} \quad A \in \eta_g \end{cases}$$

onde

i é o número de grau de liberdade (no nosso caso, o número da componente)

A o número global do nó de deslocação

P o número global da equação para as deslocações

podemos escrever com

$$= ID(i,A)$$
$$Q = ID(j,B)$$

$$= (K_{PQ})$$
$$_{PQ} = a(N_A e_i, N_B e_j)$$
$$G = (G_{P\tilde{B}})$$
$$G_{P\tilde{B}} = -(\partial_i N_A, \tilde{N}_{\tilde{B}})$$
$$d = (d_Q)$$
$$d_Q = d_B^j$$
$$= (F_P)$$
$$_P = (f, N_A e_i) - \sum_{B \in \eta_g} \sum_{j=1}^{n_{sd}} a(N_A e_i, N_B e_j)\, g_B^j$$
$$G^T = (G_{\tilde{A}Q})$$
$$= (M_{\tilde{A}\tilde{B}})$$
$$_{\tilde{A}\tilde{B}} = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{N}_{\tilde{A}}, \tilde{N}_{\tilde{B}})$$
$$p = (p_{\tilde{B}})$$
$$= (H_{\tilde{A}})$$
$$_{\tilde{A}} = \sum_{B \in \eta_g} \sum_{j=1}^{n_{sd}} (\partial_j N_B, \tilde{N}_{\tilde{A}})\, g_B^j$$

Notas:

- K é simétrica, definida positiva, assim é M, exceto para $\lambda \to \infty$ ($M \equiv 0$).

  Portanto, a formulação matricial também é simétrica.

- $K_{PQ} = a\,(N_A e_i,\, N_B e_i)$

$$= \int_\Omega \varepsilon^T (N\, e_i)\, D\, \varepsilon(N_B e_j)\, d\Omega$$

$$= e_i^T \left[\int_\Omega B_A^T D\, B_B\, d\Omega \right] e_i$$

com, para $n_{sd} = 2$:

$$= \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_A = \begin{bmatrix} N_{A,1} & 0 \\ 0 & N_{A,1} \\ N_{A,2} & N_{A,1} \end{bmatrix}$$

e para $n_{sd} = 3$:

$$= \mu \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{A} = \begin{pmatrix} N_{A,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{A,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{A,3} \\ 0 & N_{A,3} & N_{A,2} \\ N_{A,3} & 0 & N_{A,1} \\ N_{A,2} & N_{A,1} & 0 \end{pmatrix}$$

4.4. Ponto de Vista do Elemento

As matrizes globais - K, G, M, **F**, **H** - apresentada na seção precedente são definidas, a partir do produto escalar, como integrações sobre Ω de certas funções.

Assim, podemos decompor essas integrais em integrais sobre cada elemento:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} d\Omega$$

onde n_{el} é o numero de elementos e Ω^e o domínio de cada elemento e.

Assim, por exemplo:

$$= \sum_{e=1}^{n_{el}} M^e \ , M^e = (M^e_{\tilde{A}\tilde{B}})$$

com

$$ {}^{e}_{\tilde{A}\tilde{B}} = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{N}_{\tilde{A}}, \tilde{N}_{\tilde{B}})^{e} = \int_{\Omega^e} \tilde{N}_{\tilde{A}}\tilde{N}_{\tilde{B}}\, d\Omega $$

Ora, veremos no capítulo seguinte que as funções de interpolação são construídas de maneira que elas sejam diferentes de zero só nos elementos contendo o nó associado à função considerada.

Portanto, por exemplo ${}^{e}_{\tilde{A}\tilde{B}}$ só vai ser diferente de zero se $\tilde{A}$ e $\tilde{}$ pertençam ao elemento número e.

Assim, de um ponto de vista numérico, é particularmente interessante de construir as matrizes globais a partir de matrizes elementares, de ordem menor, e cujos elementos são em geral diferentes de zero.

Nós notamos esta construção de maneira seguinte:

$$ = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{el}} (k^e) \ , \ G = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{el}} (g^e) \ , \ M = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{el}} (m^e) $$

$$ F = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{el}} (f^e) \ , \ H = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_{el}} (h^e) $$

A sendo o "operador de montagem" que soma elemento por elemento as contribuições elementares nas locações apropriadas das matrizes globais.

$$ k^e = (k^e_{pq}) \ , \ g^e = (g^e_{p\tilde{b}}) \ , \ m^e = (m^e_{\tilde{a}\tilde{b}}) \ , \ \mathbf{f}^e = (f^e_p) \ , \ h^e = (h^e_{\tilde{a}}) $$

$$ k^e_{pq} = \mathbf{e}_i^T \left[\int_{\Omega^e} B_a^{eT} D B_b^e \, d\Omega \right] \mathbf{e}_j $$

$$ g^e_{p\tilde{b}} = -\int_{\Omega^e} N^e_{a,i} \tilde{N}^e_{\tilde{b}} \, d\Omega $$

$$ m^e_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega^e} \tilde{N}^e_{\tilde{a}} \tilde{N}^e_{\tilde{b}} \, d\Omega $$

$$f_p^e = \int_{\Omega^e} f^i N_a^e \, d\Omega - \sum_{q=1}^{n_{ee}} k_{pq} \, g_q^e$$

$$h_{\tilde{a}}^e = \sum_{q=1}^{n_{ee}} g_{q\tilde{a}} \, g_q^e$$

$$\leq p, q \leq n_{ee} = n_{en} . n_{sd} \; ; \; p = n_{sd} (a-1) + i \; ; \; q = n_{sd} \; (b-1) + j$$

$$\leq i, j \leq n_{sd} \; ; \; 1 \leq a, b \leq n_{en} \; ; \; 1 \leq \tilde{a}, \tilde{b} \leq \tilde{n}_{en}$$

n_{en} = número de nós de deslocamento num elemento.

$\tilde{n}_{en}$ = número de nós de pressão num elemento.

p,q = números locais de equação de deslocamento.

a,b = números locais de nó de deslocamento.

$\tilde{a}, \tilde{b}$ = números de nó (e de equação) de pressão.

N_a = função de interpolação associada ao nó de deslocamento número a, do elemento e.

$\tilde{N}_{\tilde{a}}$ = função de interpolação associada ao nó de pressão número ã, do elemento e.

5. 2ª FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

5.1. Separação de σ, Formulação Forte

Apresentamos agora uma formulação alternativa do nosso problema (2.1.F1), introduzindo um novo parâmetro β permitindo, em particular, de resolver o problema para $\lambda = 0$.

Esta formulação se baseia na **separação de σ** em duas partes. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\, \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda\, \mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ &= 2\mu\, \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \Pi\, \mathbf{1}\end{aligned}$$

com

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}) + \frac{(\beta - 1)}{n_{sd}}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,.\mathbf{1} = \mathrm{D}\,(\mathbf{u}) + \frac{\beta}{n_{sd}}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{1}$$

e

$$\Pi = -\left\{\frac{2\mu\,(1-\beta) + \lambda\, n_{sd}}{n_{sd}}\right\}\mathrm{div}\,\mathbf{u}$$

$\beta \geq 0$ sendo um parâmetro.

$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}) - \dfrac{1}{n_{sd}}\,div\,\mathbf{u},\mathbf{1}$ é o tensor das deformações de traço zero:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= \mathrm{tr}\,(\varepsilon(\mathbf{u})) - \frac{1}{n_{sd}}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\;\mathrm{tr}\,(\mathbf{1}) \\ &= \mathrm{tr}\,(\varepsilon(\mathbf{u})) - \mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ &= \mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notas:

1)

$\beta = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathrm{u}) = \mathbf{D}(\mathrm{u})$

e

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{(2\mu + n_{sd})}{n_{sd}}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ &= -K\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ &= p_{hid} \end{aligned}$$

p_{hid} sendo a pressão hidrostática.

2)

$\beta = 1 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u})$ e $\Pi = -\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$.

e voltamos ao problema inicial (2.1.F1)

Claramente, esta separação é so somar

$$\frac{\beta}{n_{sd}}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{1} \quad \text{a} \quad \mathbf{D}(\mathbf{u})$$

e subtrair esse mesmo termo a p_{hid} (que é equivalente a somar pela convenção de signo da pressão):

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \frac{\beta}{n_{sd}} \operatorname{div}\mathbf{u}$$

$$\Pi = p_{hid} + \frac{\beta}{n_{sd}} \operatorname{div}\mathbf{u}$$

Aliás, pegando o traço de cada parte da decomposição de $\boldsymbol{\sigma}$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} &= \operatorname{tr}\left\{2\mu\, \mathbf{A}(\mathbf{u})\right\} + \operatorname{tr}\left\{-\Pi\, \mathbf{1}\right\} \\ &= 2\mu\,\beta \operatorname{div}\mathbf{u} + \left(2\mu\,(1-\beta) + \lambda\, n_{sd}\right) \operatorname{div}\mathbf{u} \\ &= (2\mu + \lambda\, n_{sd}) \,.\operatorname{div}\mathbf{u} \\ &= n_{sd}\, K \operatorname{div}\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{n_{sd}} = -K \operatorname{div}\mathbf{u} = p_{hid}$$

a definição bem conhecida da pressão hidrostática.

$$\Pi = -\left\{K - \frac{2\mu\,\beta}{n_{sd}}\right\} \operatorname{div}\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{n_{sd}}{K\, n_{sd} - 2\mu\,\beta}\right\} \Pi + \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\sigma} = 2\mu\, \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \Pi\, \mathbf{1} \end{array}\right\} \Rightarrow -\operatorname{div}(2\mu\, \mathbf{A}(\mathbf{u})) + \nabla\Pi = \mathrm{f}$$

Assim, com essas decomposições, podemos substituir a formulação forte (2.1.F1) do nosso problema por:

(F2)

Dada $\mathbf{f}:\Omega \rightarrow IR^{n_{sd}}$

achar

$\mathbf{u}:\overline{\Omega} \rightarrow IR^{n_{su}}$

$\Pi:\overline{\Omega} \rightarrow IR$

tais que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu\,\mathbf{A}(\mathbf{u})) + \nabla\,\Pi = \mathbf{f} & (5.1.1) \\ \left\{\dfrac{n_{sd}}{K\,n_{sd} - 2\mu\,\beta}\right\}\Pi + \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & (5.1.2) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \Gamma \end{cases}$$

$\mathbf{u}$ e Π são as duas variáveis e essa nova formulação depende dos três parâmetros μ, κ, β.

5.2. Formulação Variacional

A nova formulação variacional é obtida de maneira totalmente análoga à primeira. Assim, multiplicando (5.1.2) por uma função peso q e integrando sobre Ω, nós obtemos:

$$-(\operatorname{div}\mathbf{u}, q) - \left\{\frac{n_{sd}}{K\,n_{sd} - 2\mu\,\beta}\right\}(\Pi, q) = 0$$

E, multiplicando (5.1.1) por uma função peso $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} \equiv 0$ sobre Γ e integrando sobre Ω:

$$2\mu\left\{\left(\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{v})\right)+\frac{\beta-1}{n_{sd}}(\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v})\right\} - (\Pi,\operatorname{div}\mathbf{v}) = (\mathbf{f},\mathbf{v})$$

A obtenção dos termos (**f**, **v**) e (Π, div **v**) dessa última igualdade é trivial. Detalhamos aquela dos primeiros termos do lado esquerdo:

$$\mathbf{v}.\left\{-\operatorname{div}\left(2\mu\,\mathbf{A}(\mathbf{u})\right)\right\} = 2\mu\left\{-\mathbf{v}\operatorname{div}\left(\varepsilon(\mathbf{u})\right) + \frac{\beta-1}{n_{sd}}.(-\mathbf{v}).\operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{u}\,.\,\mathbf{I})\right\}$$

integrando sobre Ω, o primeiro termo dá:

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \mathbf{v}\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{u}))\,d\Omega &= -\int_\Omega v_i\varepsilon_{ij,j}\,d\Omega \\ &= \int_\Omega v_{i,l}\,\varepsilon_{ij}\,d\Omega \qquad \text{(por integração por partes)} \\ &= \int_\Omega v_{(i,j)}\,\varepsilon_{ij}\,d\Omega \qquad \text{(por utilização do Lema 1 abaixo)} \\ &= \left(\varepsilon(\mathbf{v}),\varepsilon(\mathbf{u})\right)\end{aligned}$$

onde i,j = 1, ..., n_{sd}.

A convenção de Einstein foi usada, e o lema seguinte foi empregado:

Lema 1:

Seja (t_{ij}) um tensor não simétrico e (s_{ij}) um tensor simétrico. Então $t_{ij}\,s_{ij} = t_{(ij)}\,s_{ij}$, $t_{(ij)}$, sendo a parte simétrica de (t_{ij}):

$$t_{(ij)} = \frac{t_{ij}+t_{ji}}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\mathbf{v}\,.\operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{u}\,.\,\mathbf{I})\,d\Omega &= \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u}\,d\Omega \\ &= (\operatorname{div}\mathbf{v},\operatorname{div}\mathbf{u}) \qquad \text{(por partes)}\end{aligned}$$

Esse sistema é da mesma forma que aquele da formulação (V1), λ sendo substituído por K e $\boldsymbol{\varepsilon}$ por $\mathbf{D}$.

Adotando as notações:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= 2\mu\big(\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{D}(\mathbf{v})\big)\\
b(p,\mathbf{v}) &= -(p,\mathrm{div}\,\mathbf{v})\\
f(\mathbf{v}) &= (\mathbf{f},\mathbf{v})\\
c(p,q) &= -\frac{1}{K}(p,q)
\end{aligned}$$

As equações (5.3.1), (5.3.2) escrevem-se:

$$\begin{cases}
a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(p_{hid},\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})\\
b(q,\mathbf{u})+c(p_{hid},q) = 0
\end{cases}$$

Além do problema que poderia ocorrer para K muito pequeno (todavia, $K\neq 0$ conforme capítulo 2.2) uma nova dificuldade aparece nesse último caso:

a(.,.) não é mais K-elíptica.

Com efeito:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u})-\frac{1}{n_{sd}}\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{1}$$

$$\Rightarrow\big(\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{D}(\mathbf{u})\big) = \big(\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{u})\big)+\frac{1}{n_{sd}^2}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{1},\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{1})-\frac{2}{n_{sd}}\big(\varepsilon(\mathbf{u}),\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathbf{1}\big)$$

$$= \big(\varepsilon(\mathbf{u}),\varepsilon(\mathbf{u})\big)-\frac{1}{n_{sd}^2}\left\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right\|^2$$

Ora, pela inigualdade de Friedrich: (ref. (9))

$$\exists c>0 / \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) \quad \|\mathbf{u}\| \leq c\,\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 \leq (c+1)\,\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2$$
$$\Rightarrow \exists c'>0 / \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) \quad -\frac{1}{n_{sd}}\,\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\| \leq -c'\,\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2$$

Portanto, a presença do termo $-\dfrac{1}{n_{sd}}\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2$ em $\left(\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{D}(\mathbf{u})\right)$ nos impede de concluir à K-elipticidade de a(.,.).

Nota:

$\|.\|_{H^1}$ é a norma sobre $H^1(\Omega)$ e $\|.\|$ é a norma sobre $L_2(\Omega)$

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1} = \|\mathbf{v}\| + \|\mathrm{div}\,\mathbf{v}\| \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$$

5.4. Formulação em Elementos Finitos

A discretização de Ω, V e W já foi explicada anteriormente.

Assim, a formulação de Galerkin desta 2ª formulação é:

dada f, achar $(u_h, \Pi_h) \in V_h x W_h$ tal que

$$\begin{cases} 2\mu\left((\varepsilon(\mathbf{u}_h),\varepsilon(\mathbf{v}_h))\right) + \dfrac{\beta-1}{n_{sd}}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_h) \\ \qquad\qquad -(\mathrm{div}\,\mathbf{v}_h,\Pi_h) = (\mathbf{f},\mathbf{v}_h) & \forall\, \mathbf{v}_h \in V_h \\ -(\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h,q_h) - \dfrac{n_{sd}}{K\,n_{sd} - 2\mu\beta}(\Pi_h,q_h) = 0 & \forall\, q_h \in W_h \end{cases}$$

A forma matricial escreve-se, para o problema de Dirichlet:

$$\begin{pmatrix} K+R & G \\ G^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{\Pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

vem do termo: $2\mu\big((\varepsilon(\mathbf{u}_h), \varepsilon(\mathbf{v}_h)\big)$

$$: 2\mu\left(\frac{\beta-1}{n_{sd}}\right)(\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h, \mathrm{div}\,\mathbf{v}_h)$$

G $\quad : -(\mathrm{div}\,\mathbf{v}_h, \Pi_h)$

G^T $\quad : -(\mathrm{div}\,\mathbf{u}_h, q_h)$

$$: \frac{-n_{sd}}{K\,n_{sd} - 2\mu\beta}(\Pi_h, q_h)$$

F $\quad : (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$

d é o vetor dos graus de liberdade nodais, incógnitos, dos deslocamentos; e $\mathbf{\Pi}$ o vetor de graus de liberdade nodais de pressão.

As definições das matrizes são:

$$= \mathop{A}_{e=1}^{n_{el}} (k^e) \qquad G = \mathop{A}_{e=1}^{n_{el}} (g^e)$$

$$= \mathop{A}_{e=1}^{n_{el}} (r^e) \qquad M = \mathop{A}_{e=1}^{n_{el}} (m^e)$$

$$F = \mathop{A}_{e=1}^{n_{el}} (f^e)$$

A sendo o operador que soma as contribuições elementares nos lugares certos das matrizes globais.

$$k^e = \left[k^e_{pq}\right], \quad g^e = \left[g^e_{p\tilde{b}}\right], \quad r^e = \left[r^e_{pq}\right], \quad m^e = \left[m^e_{\tilde{a}\tilde{b}}\right], \quad f^e = \left[f^e_p\right]$$

$$k^e_{pq} = e_i^T \left[\int_{\Omega^e} B_a^{e^T} D B_b^e \, d\Omega \right] e_j$$

$$g^e_{p\tilde{b}} = - \int_{\Omega^e} N^e_{a,i} \tilde{N}^e_{\tilde{b}} \, d\Omega$$

$$r^e_{pq} = 2\mu \left(\frac{\beta - 1}{n_{sd}} \right) \int_{\Omega^e} N_{a,i} N_{b,j} \, d\Omega$$

$$m^e_{\tilde{a}\tilde{b}} = \left(\frac{-n_{sd}}{K n_{sd} - 2\mu\beta} \right) \int_{\Omega^e} \tilde{N}^e_{\tilde{a}} \tilde{N}^e_{\tilde{b}} \, d\Omega$$

$$f^e_p = \int_{\Omega^e} f^i N^e_a \, d\Omega$$

$$\leq p, q \leq n_{ee} = n_{en} . n_{sd}$$
$$p = n_{sd}(a-1) + i$$
$$q = n_{sd}(b-1) + j$$
$$\leq i, j \leq n_{sd}$$
$$\leq a, b \leq n_{en}$$
$$\leq \tilde{a}, \tilde{b} \leq \tilde{n}_{en}$$

Nota: Como já mencionado, a principal diferença desta formulação com a primeira é o termo

$$\frac{\beta - 1}{n_{sd}} \left(\operatorname{div} \mathbf{u}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right)$$

que traz, na formulação matricial, a matriz R.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1. Funções de Interpolação e Elementos: (ref. (8))

Vamos agora caracterizar com precisão as funções de interpolação e o tipo de elementos empregados nesse estudo.

As funções de interpolação, que sejam para a pressão ou para os deslocamentos, são tipicamente polinómios. N_A , respectivamente $\tilde{N}_{\tilde{A}}$, é diferente de zero só nos elementos que contém o nó número A, respectivamente $\tilde{A}$. Assim, como já mencionado no capítulo precedente, as matrizes globais podem ser construídas a partir de matrizes elementares, cada elemento tendo uma contribuição "localizada" na tabela representando a matriz global.

Ainda mais, nós pedimos que as funções de interpolação satisfaçam:

$$\begin{cases} N_A(\mathbf{x}_B) = \delta_{AB} \\ \tilde{N}_{\tilde{A}}(\mathbf{x}_{\tilde{B}}) = \delta_{\tilde{A}\tilde{B}} \end{cases} \qquad (6.1.1)$$

Neste estudo, nós consideramos interpolações contínuas da pressão e dos deslocamentos, ou seja, as funções de interpolação são contínuas nas fronteiras interelementos. Assim, o salto das suas derivadas às fronteiras é finito, e elas pertencem a $H^1(\Omega)$.

O nosso estudo numérico se limita ao tipo de interpolações seguintes, para $n_{sd} = 2$: (cf. ref. 1 e 8)

- para a pressão : interpolação bilinear

$$ {}_{A}(x^1, x^2) = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^1 x^2 $$

(x^1, x^2) sendo as coordenadas de $\mathbf{x} \in \Omega$, α_i, $i = 0, 1, 2, 3$, sendo constantes reais.

O elemento representativo é o quadrilátero definido pelos quatro nós-vértices.

Em outros termos, a interpolação para a pressão é de tipo Q1.

- para os deslocamentos: interpolação biquadrática

$$ \begin{aligned} {}_{A}(x^1, x^2) = {} & \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^1 x^2 + \alpha_4 (x^1)^2 x^2 \\ & + \alpha_5 x^1 (x^2)^2 + \alpha_6 (x^1)^2 (x^2)^2 \end{aligned} $$

O elemento correspondente é o nove-nós elemento, e a interpolação e do tipo Q2.

quadro-nós (Q1) - elemento bilinear

nove-nós (Q2) - elemento biquadrático

Fig. 6.1.1.

Notas:

- os α_i são determinados a partir das condições (6.1.1);
- as funções de interpolação são, de fato, produtos de polinómios de Lagrange.

6.2. 1ª Formulação

Os testes numéricos foram efetuados considerando o problema *ramp cavity*:

Ω é um quadrado unitário (definido pelos pontos (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) de IR^2). As condições de contorno para os deslocamentos são $u^1 = 1$, $u^2 = 0$ para $x^2 = 1$ $(0 < x^1 < 1)$ e $\mathbf{u} = 0$ sobre as outras fronteiras ($x^1 = 0$ e $x^1 = 1$, $0 \leq x^2 \leq 1$; $x^2 = 0$, $0 \leq x^1 \leq 1$). Essas condições são descontínuas nos pontos. Os detalhes de como é tratada esta descontinuidade são mostrados na figura 6.2.1.

Fig. 6.2.1.

O nosso quadrado unitário é dividido numa malha uniforme de 8x8 elementos quadrados.

Cada elemento tem 4 nós de pressão e 9 do deslocamento como descrito na figura 6.2.2.

• nó de deslocação

o nó de pressão

Fig. 6.2.2

As interpolações, como já mencionado no capítulo precedente, são:

Q1 para a pressão

Q2 para os deslocamentos.

Este elemento Q2-Q1 é chamado de elemento de Taylor-Hood. Temos então um total de 289 nós para os deslocamentos e 81 para a pressão.

μ é fixado: $\mu = 1{,}00$ (cf. Cap. 2.2).

Variando os valores de λ, podemos observar os resultados seguintes:

Como esperado, quando $\lambda = 0$ o programa não dá nenhum resultado (ele não consegue calcular).

O método fica estável para um grande número de valores de $\lambda > 0$, de λ muito pequeno a λ muito grande: 10^{-20}; 10^{-10}; 2.10^{-8}; 10^{-7}; 10^{-5}; 10^{-4}; 2.10^{-3}; 10^{-2}; 2.10^{-2}; 4.10^{-2}; 5.10^{-2}; 10^{-1}; 1; 5; 10; 20; 50; 100; 2.10^{8}.

Para esses valores, o método dá resultados "estáveis" para as interpolações de u^1, u^2 e p.

Nota: Testes foram também realizados para valores de λ negativos e mostraram resultados instáveis para $-1{,}0 \leq \lambda \leq -0{,}5$, para a interpolação de u^2, enquanto as interpolações de u^1 e p convergiam para todos os testes efetuados.

Alguns testes são ilustrados em anexo, assim como exemplo de instabilidade.

6.3. Segunda Formulação

Para $\beta = 1$, a 2ª formulação é igual à primeira e portanto não pode resolver o problema para (**u**, p) com $\lambda = 0$. O interesse desta formulação é então:

a) botar $\beta = 0$ e estudar a estabilidade da formulação para (**u**, p_{hid}) em $\lambda = 0$;

b) botar $\lambda = 0$ e estudar a estabilidade da formulação para (**u**, p) na vizinhança de $\beta = 1$ (mas com $\beta \neq 1$).

Os testes numéricos foram realizados com o problema descrito no parágrafo 6.2 (*ramp- cavity*, Q2-Q1, 64 elementos).

O método fica perfeitamente estável para $\lambda = 0$, $\beta = 0$. Este resultado é ilustrado em anexo. Assim, a implementação de Galerkin da formulação variacional em (**u**, p_{hid}) das equações da elasticidade é estável. Na vizinhança de $\beta = 1$, para $\lambda = 0$, o método fica estável com $\beta = 0{,}999$ e $\beta = 1{,}001$. Para $\beta > 1$, podemos observar uma mudança do signo da interpolação da pressão (em respeito a $\beta < 1$): vem da mudança do signo de $\dfrac{n_{sd}}{K n_{sd} - 2\mu\beta}$ em $\beta = 1$ (com $n_{sd} = 2$ e $\mu = 1$) (cf. 5.1.2)

Nota: O computador utilizado para os testes numéricos é um "Sparc Station 1+" servido por um "Sparc Server 390."

7. CONCLUSÃO

Uma formulação variacional das equações da elasticidade dependendo de dois parâmetros λ e β foi apresentada nesse trabalho. λ é o parâmetro de Lamé diretamente ligado à compressibilidade do corpo estudado. Quando $\beta=1$ os deslocamentos **u** e a pressão p são as variáveis do problema. Com $\beta=0$, as incógnitas são **u** e a pressão hidrostática. A introdução desse parâmetro β permite resolver nosso problema para $\lambda \in [0,\infty[$, com a pressão hydrostática quando $\beta=0$, e o parâmetro de pressão p com $\beta=1$. A implementação desta formulação pelo método Galerkin, para um elemento Q2-Q1 deu resultados numéricos estáveis.

O fato que o método de Galerkin desse uma resolução aceitável é interessante. Com efeito é o método mais fácil de implementar e analisar, em respeito a métodos envolvendo vários termos de estabilidade e parâmetros.

Todavia, esse trabalho só é um início: seria interessante, por exemplo, de um ponto de vista matemático, entender porque o método dá instabilidades para λ numa vizinhança de -1. Poderíamos, também, experimentar outras interpolações, de mesma ordem, por exemplo. Seria interessante, também, estudar o efeito da variação de β sobre as variáveis interpoladas: quando eu resolver o problema com $\beta = 1+\varepsilon$, posso dizer que a pressão interpolada é aproximativamente p?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) T.J.R. Hughes, *"The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis",* 1987, Prentice-Hall, Englewood Cliffs - New Jersey.

(2) L.P. Franca, *"Analysis and Finite Element Approximation of Compressible and Incompressible Linear Isotropic Elasticy Based Upon a Variational Principle",* 1989, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 76, p. 259-273.

(3) C.A. Felippa, *"Parametrized Variational Principles Encompassing Compressible and Incompressible Elasticity"*, 1992, *International Journal for Solids and Structures*, Vol. 29, nº 1, p. 57-68.

(4) Gérard Nadeau, *"Introduction to Elasticity",* 1964, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

(5) L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *"Theory of Elasticity",* 1959, Pergamon Press.

(6) J.T. Oden & G.F. Carey, *"Finite Elements, Mathematical Aspects, Volume IV",* 1983, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

(7) L.P. Franca, *"New Mixed Finite Elements Methods",* 1987, Stanford University, Ph. D. Thesis.

(8) G.F, Carey & J.T. Oden, *"Finite Elements, a second course, Volume II",* 1983, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.

(9) Curso de L.P. Franca, 1993.

ANEXO

RESULTADOS NUMÉRICOS

GRÁFICOS

PRIMEIRA FORMULAÇÃO

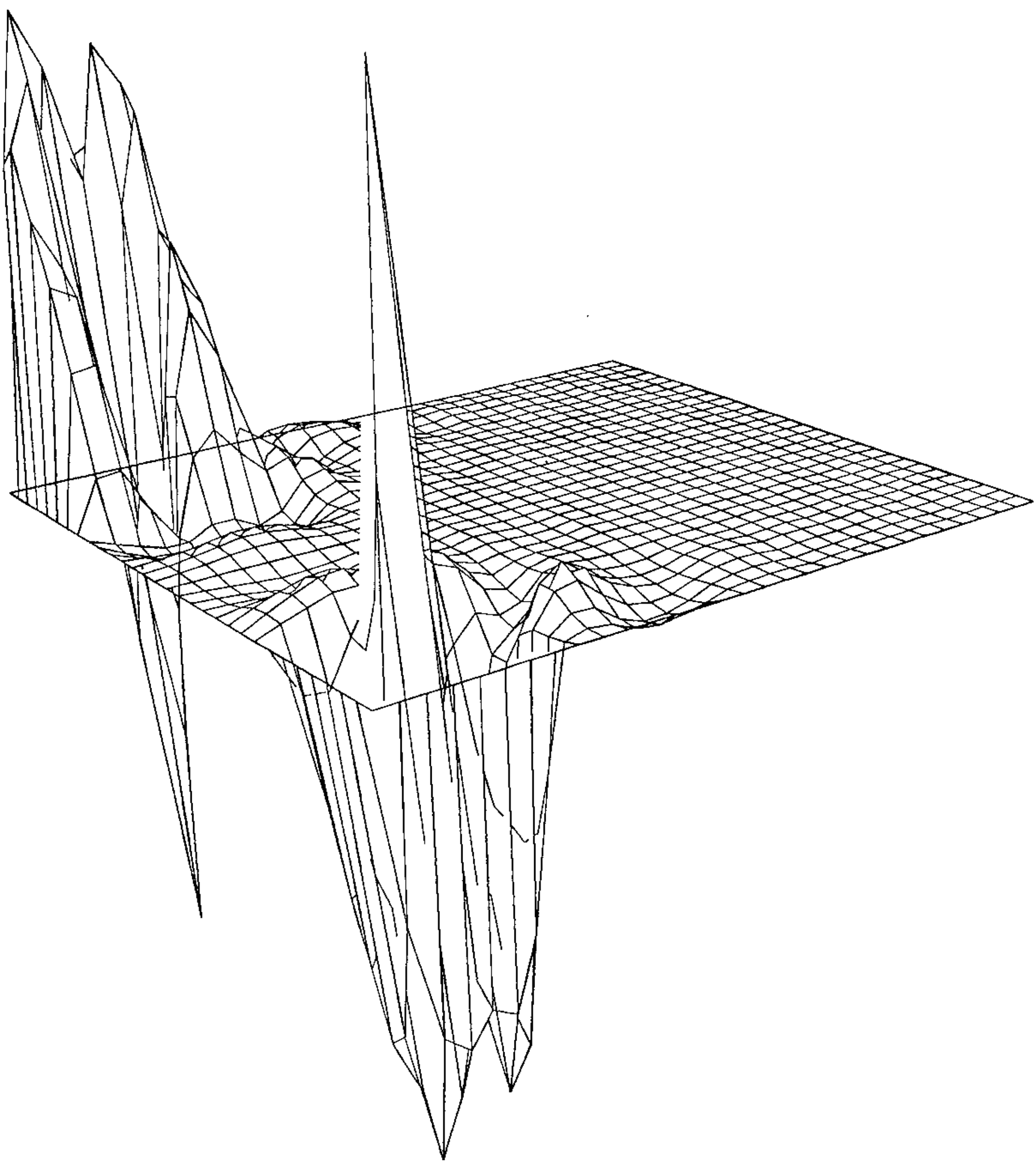
exemplo de instabilidade

elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de u_2

$\lambda = -1.0$

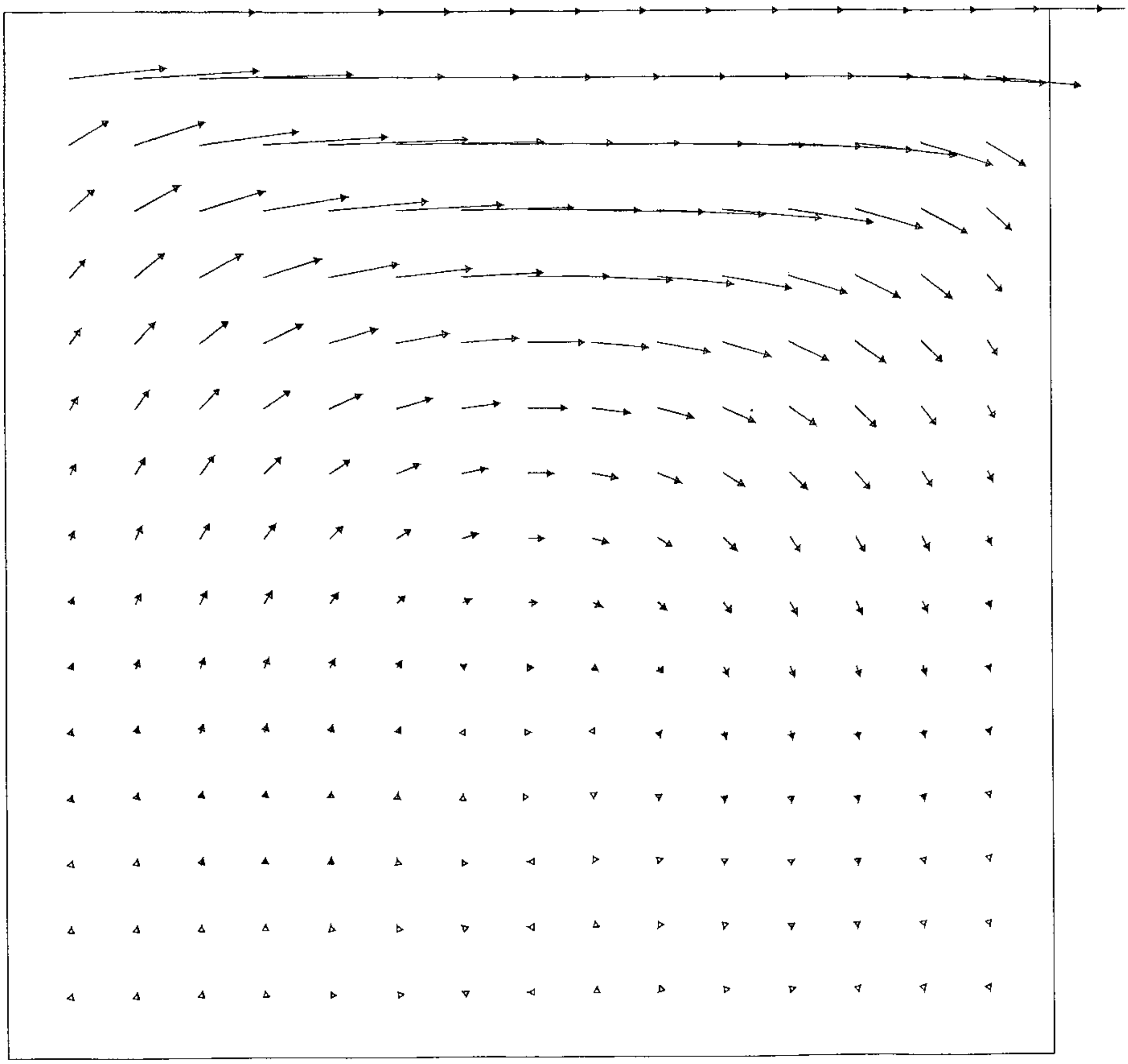
$-5.0\ 10^{-3} \leq u_2 \leq 5.0\ 10^{-3}$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

vetores deslocamento

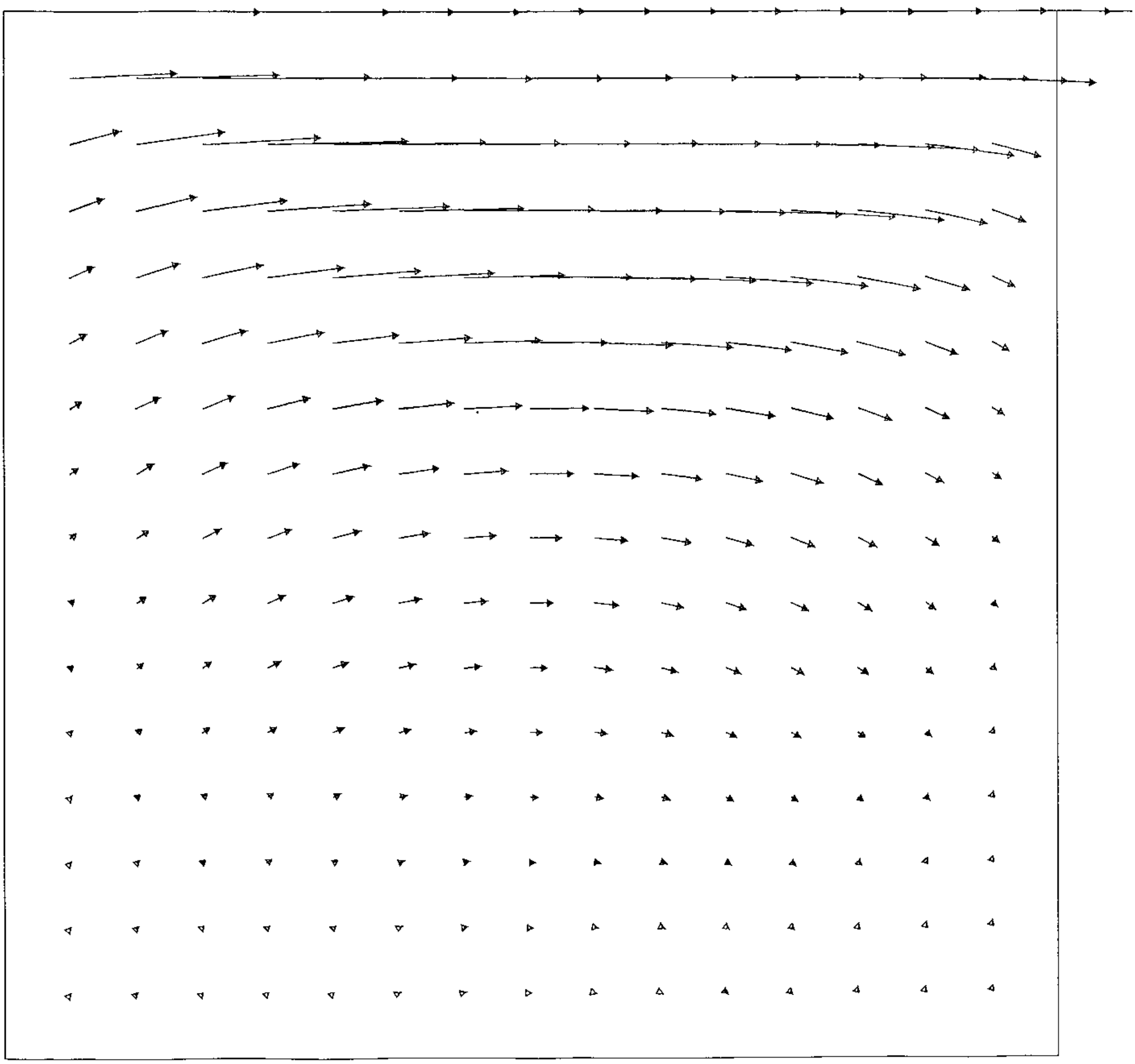
$\lambda = 1.0$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

vetores deslocamento

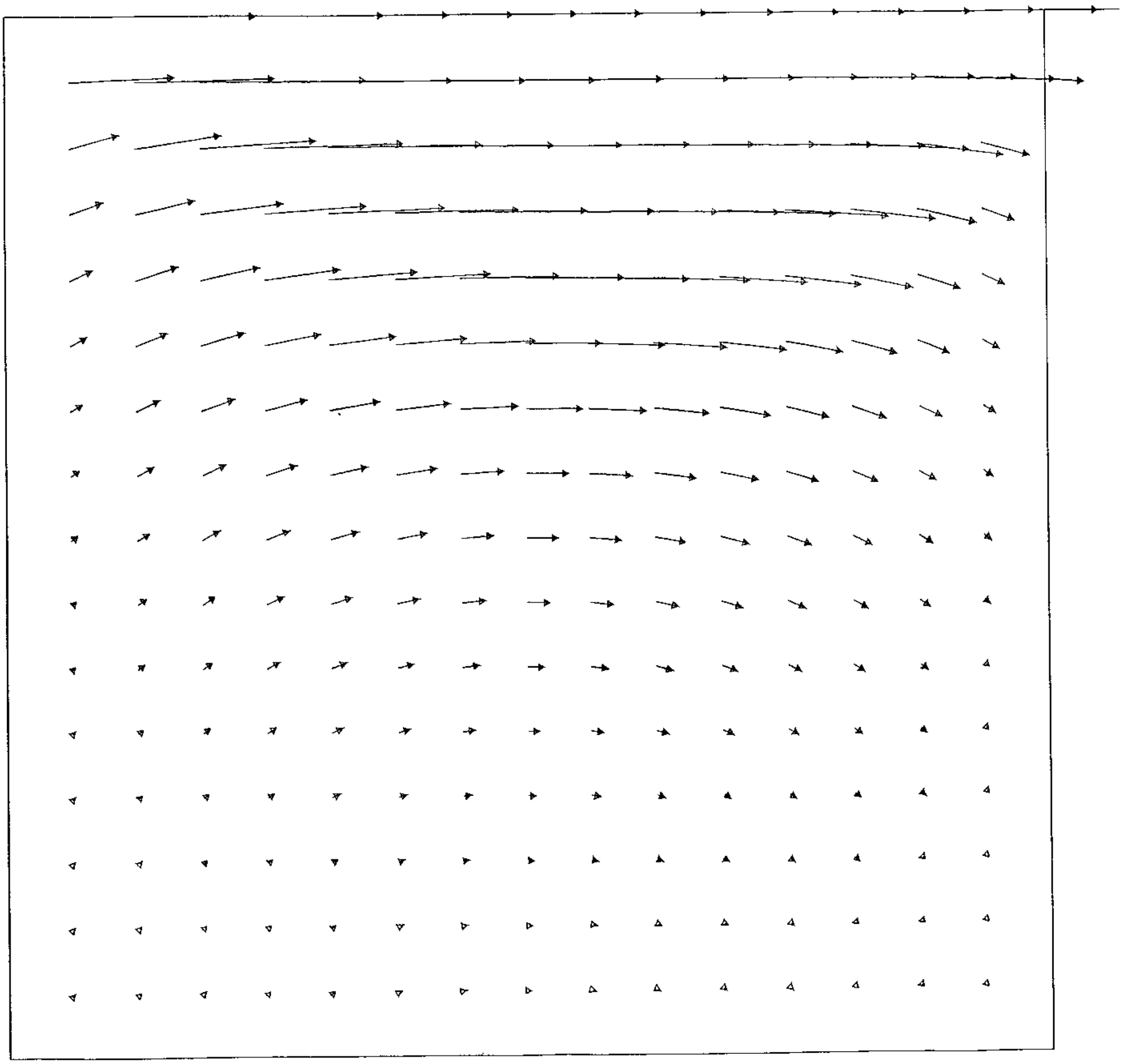
$\lambda = 1.0\ 10^{-2}$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

vetores deslocamento

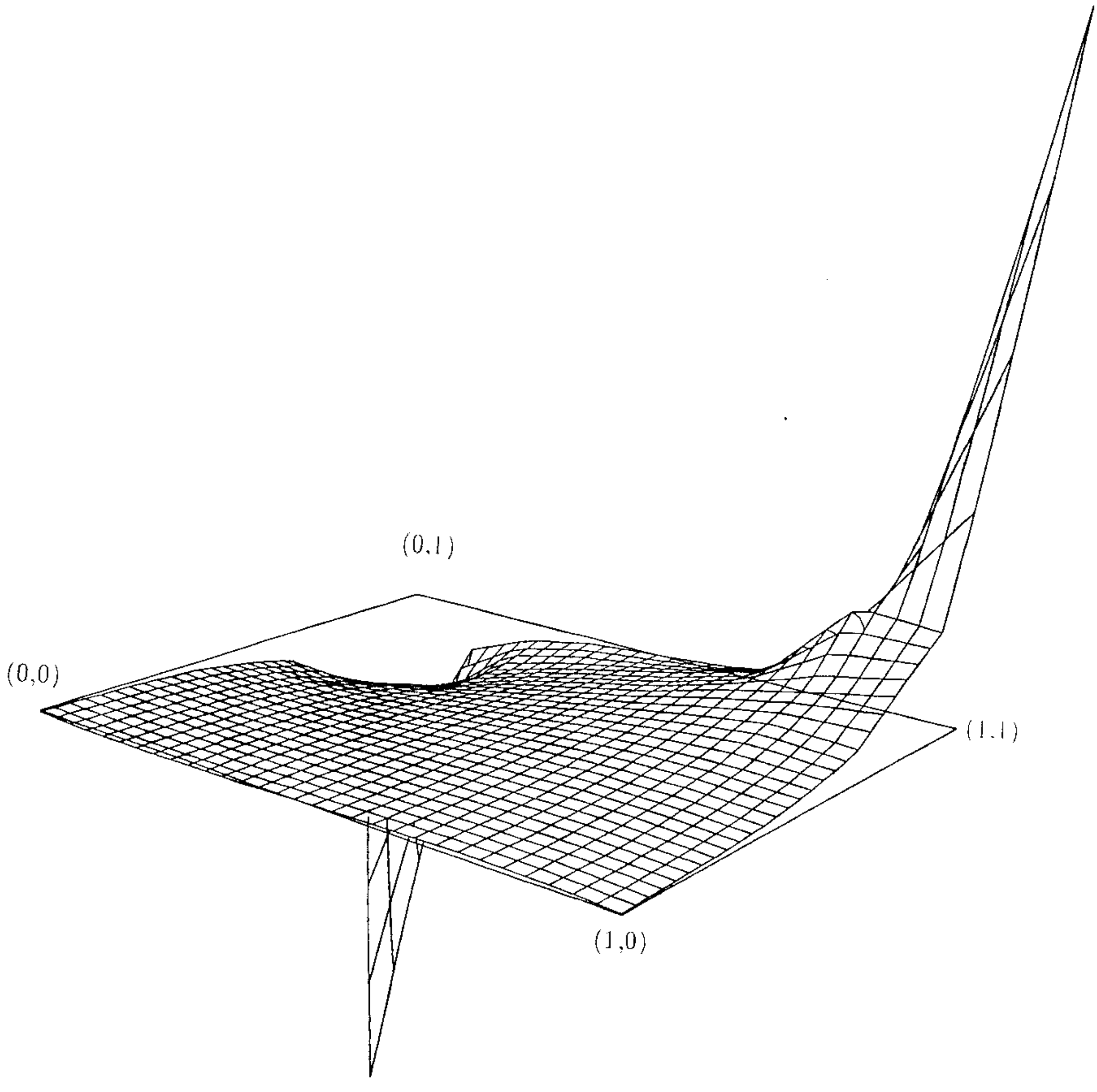
$\lambda = 1.0\ 10^{-20}$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de pressão

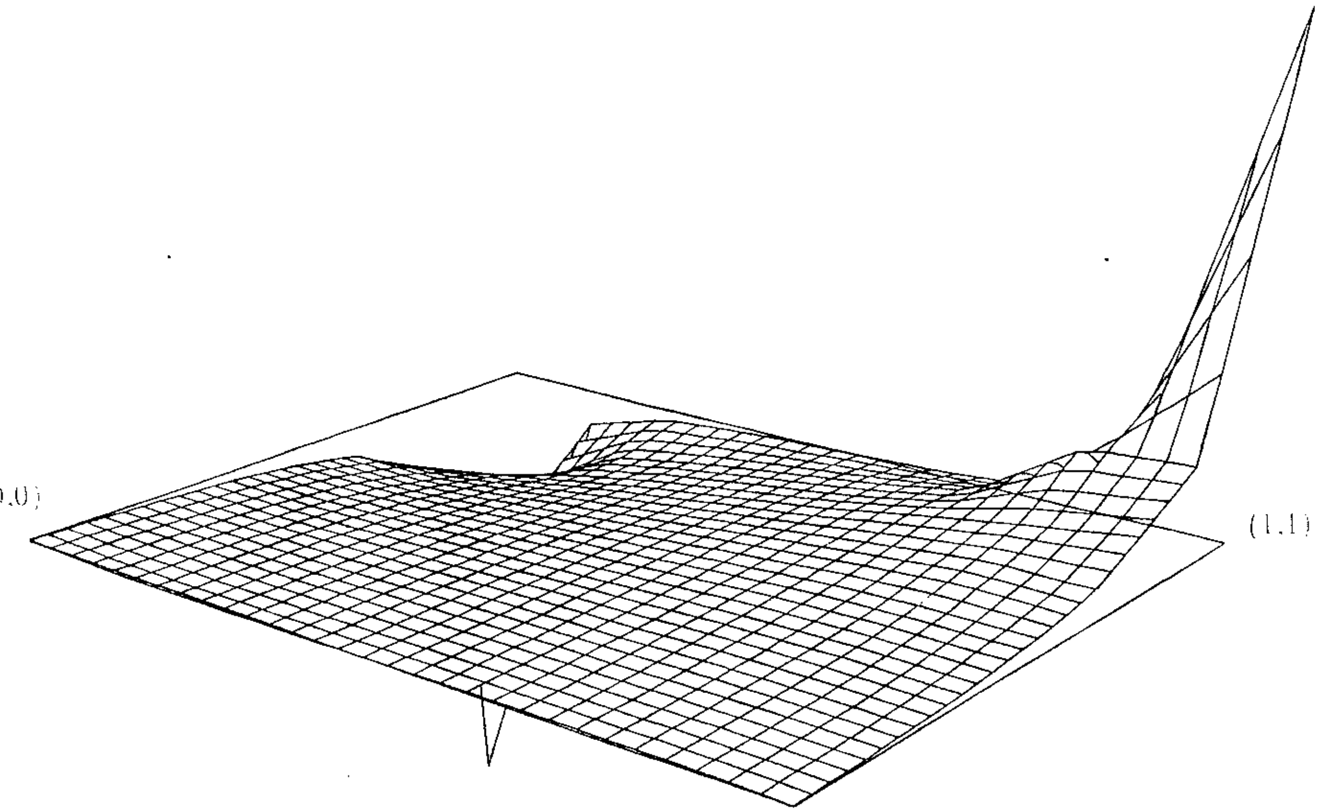
$\lambda = 1.0$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de pressão

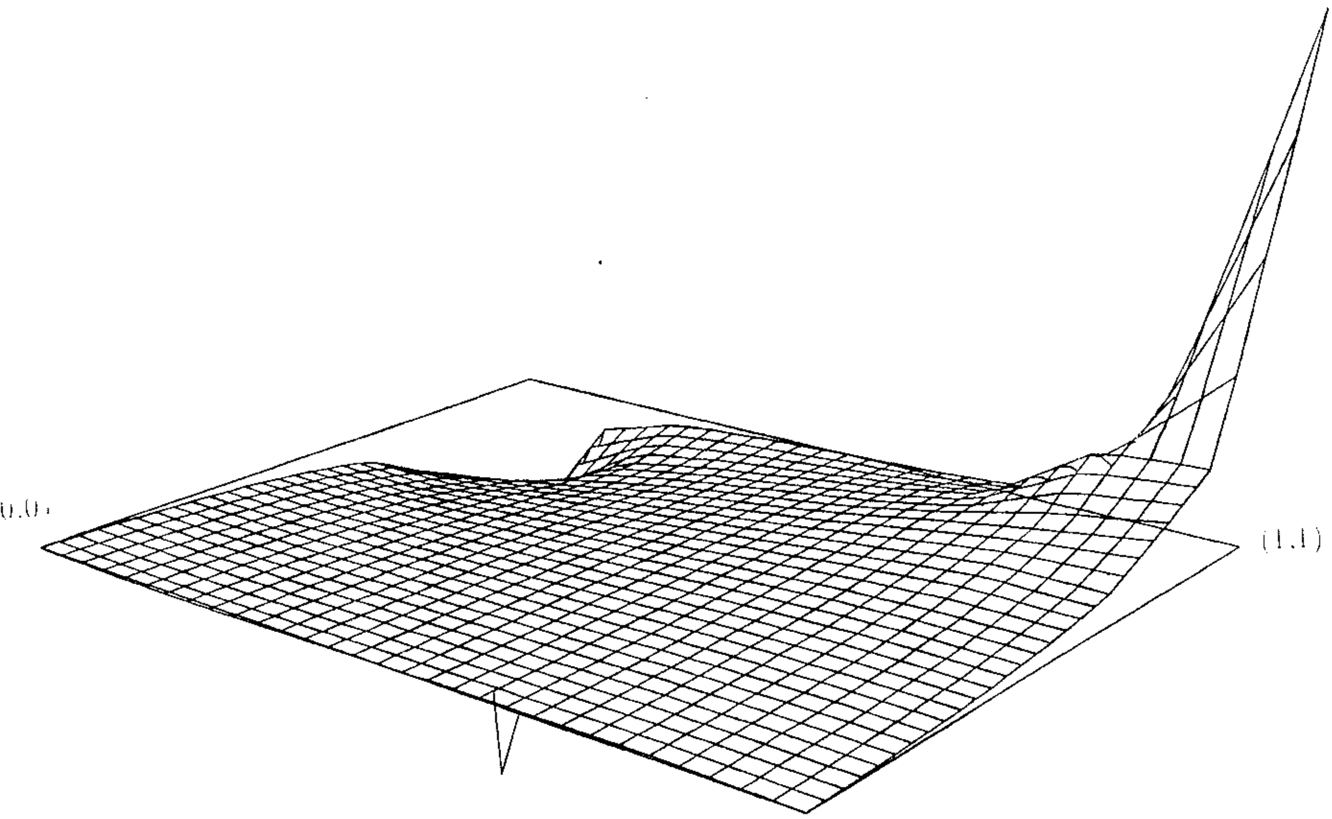
$\lambda = 1.0\ 10^{-2}$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de pressão

$\lambda = 1.0\ 10^{-20}$



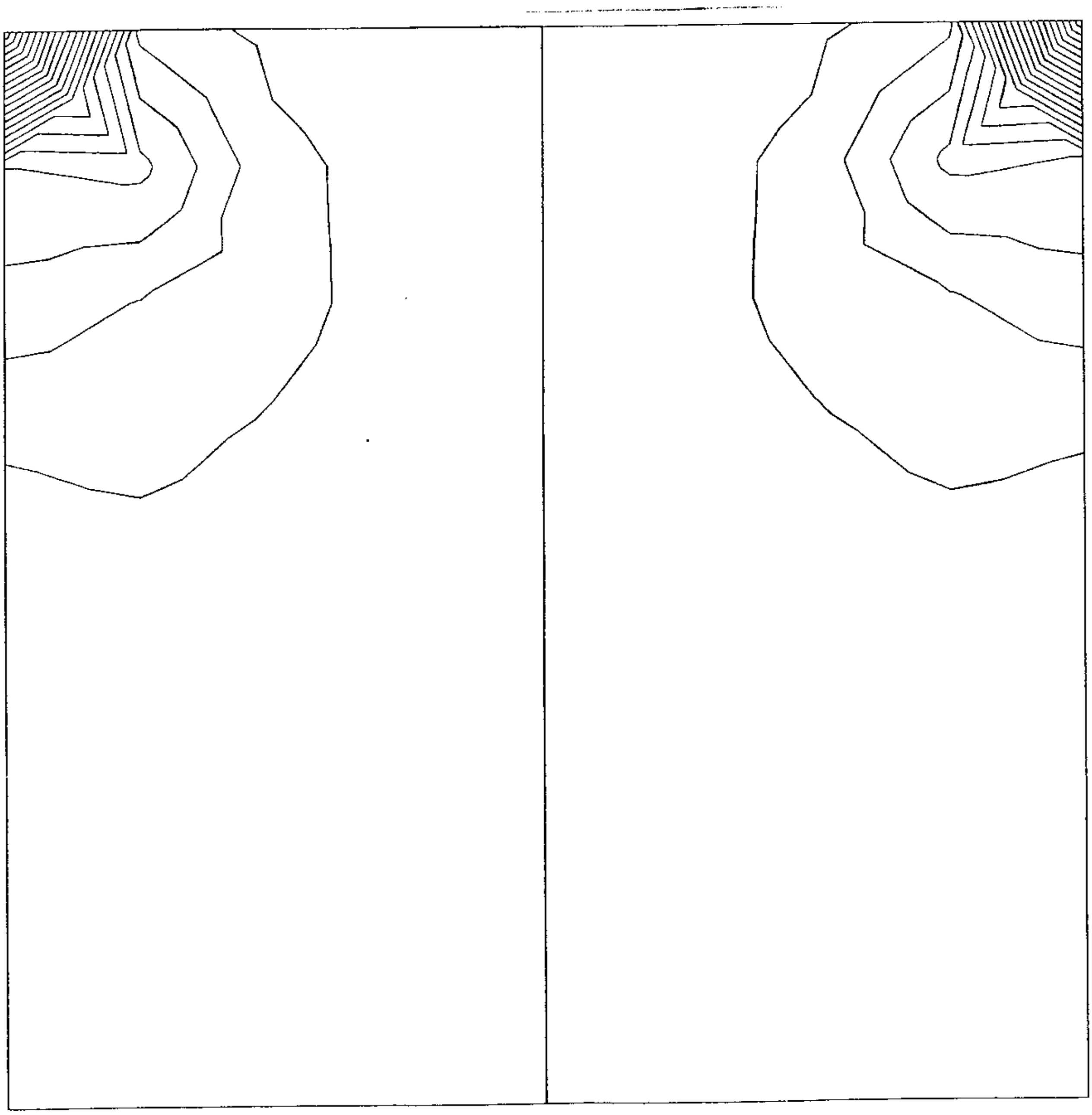
elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

contornos de pressão

$\lambda = 1.0$

MIN GLOBAL :	-10.486
MAX GLOBAL :	10.486
MIN LOCAL :	-10.486
MAX LOCAL :	10.486
MIN LOCAL[%] :	0.000
MAX LOCAL[%] :	100.000
PSI[0] :	-10.486
DELTA PSI :	0.477
# DE LIGNES :	45

(1,1)



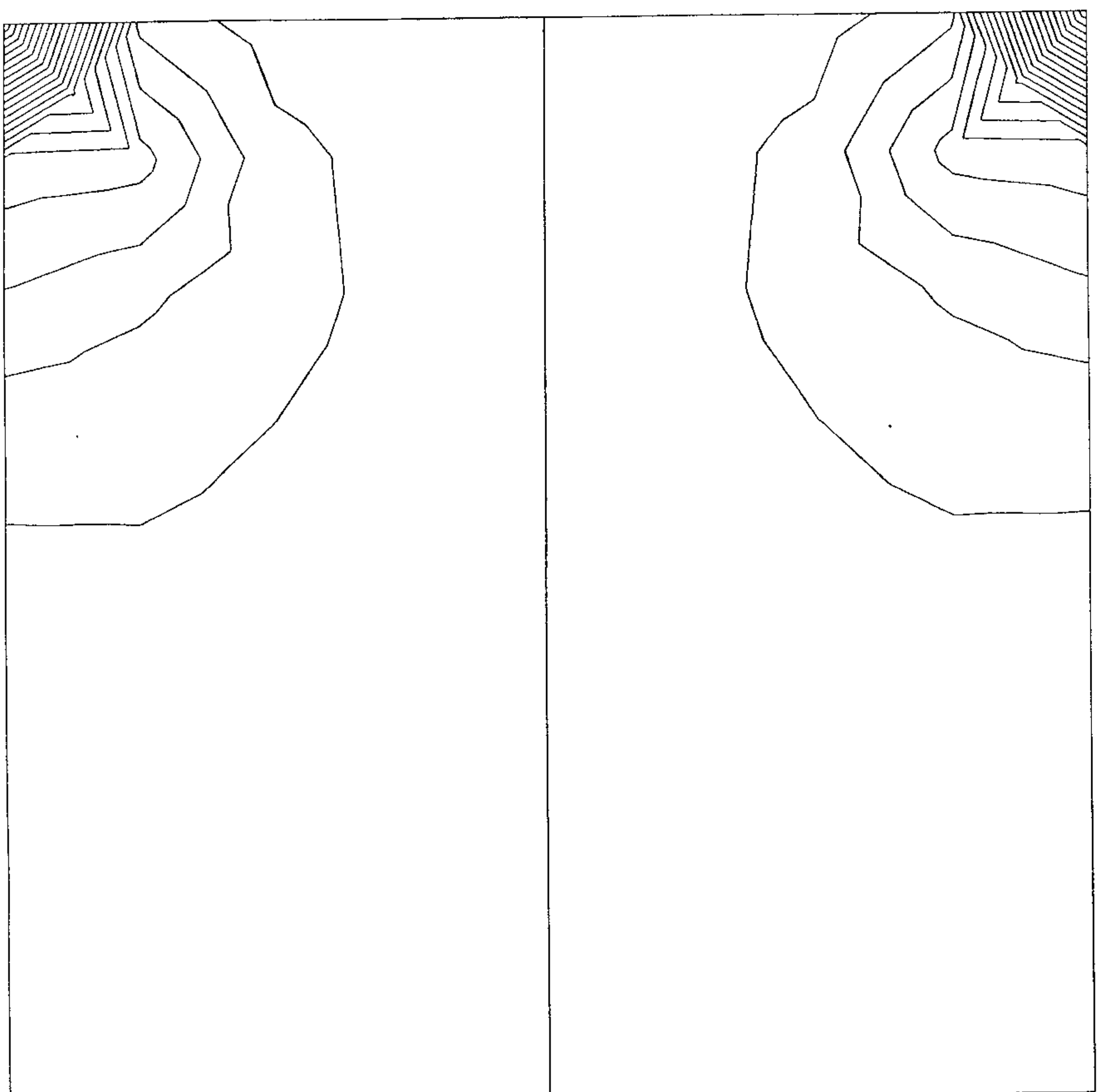
(0,0)

elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

contornos de pressão

$\lambda = 1.0\ 10^{-20}$

MIN GLOBAL :	-.121E-18
MAX GLOBAL :	0.121E-18
MIN LOCAL :	-.121E-18
MAX LOCAL :	0.121E-18
MIN LOCAL[%] :	0.000
MAX LOCAL[%] :	100.000
PSI[0] :	-.121E-18
DELTA PSI :	0.548E-20
# DE LIGNES :	45

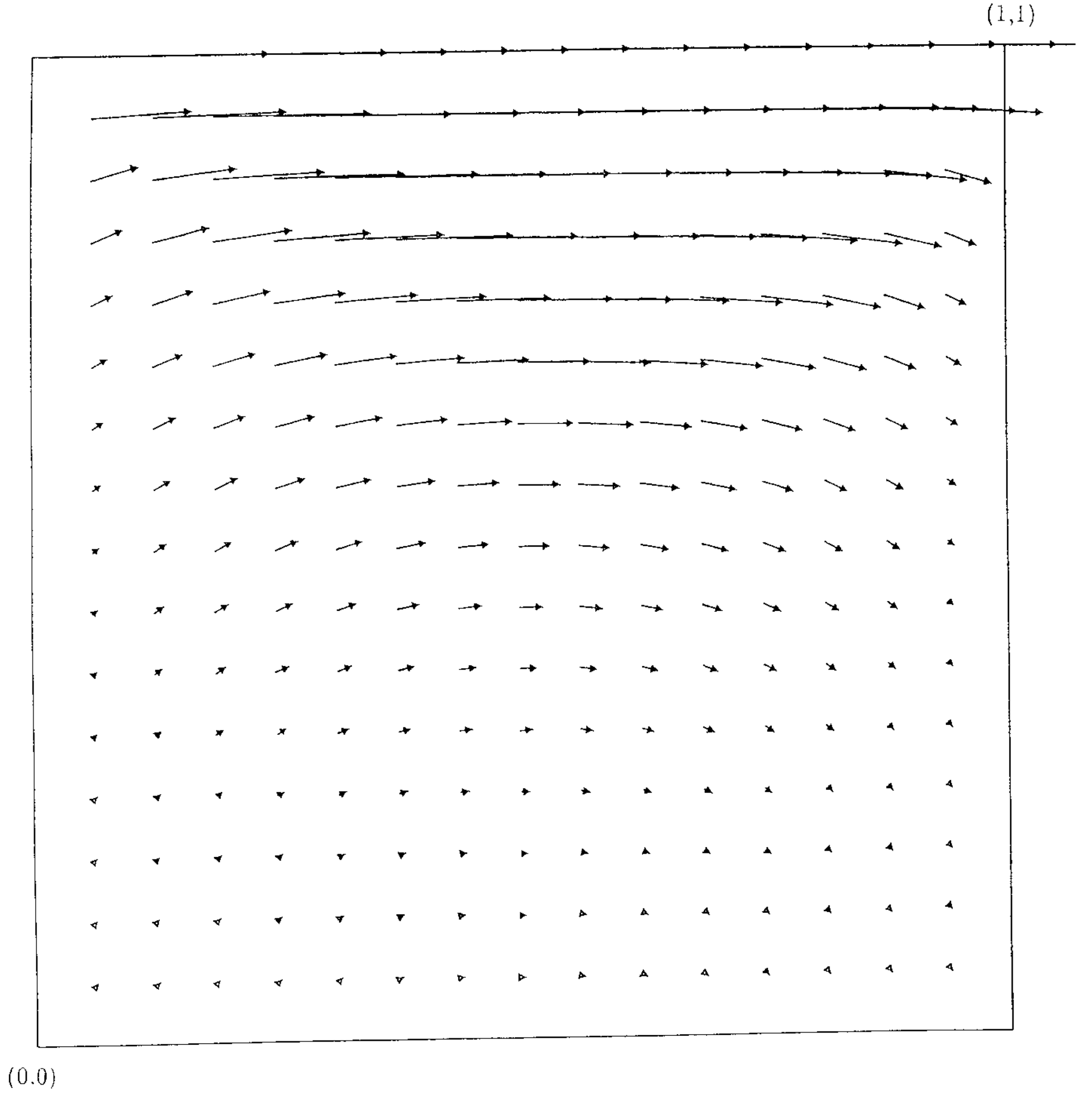


SEGUNDA FORMULAÇÃO

elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

vetores deslocamento

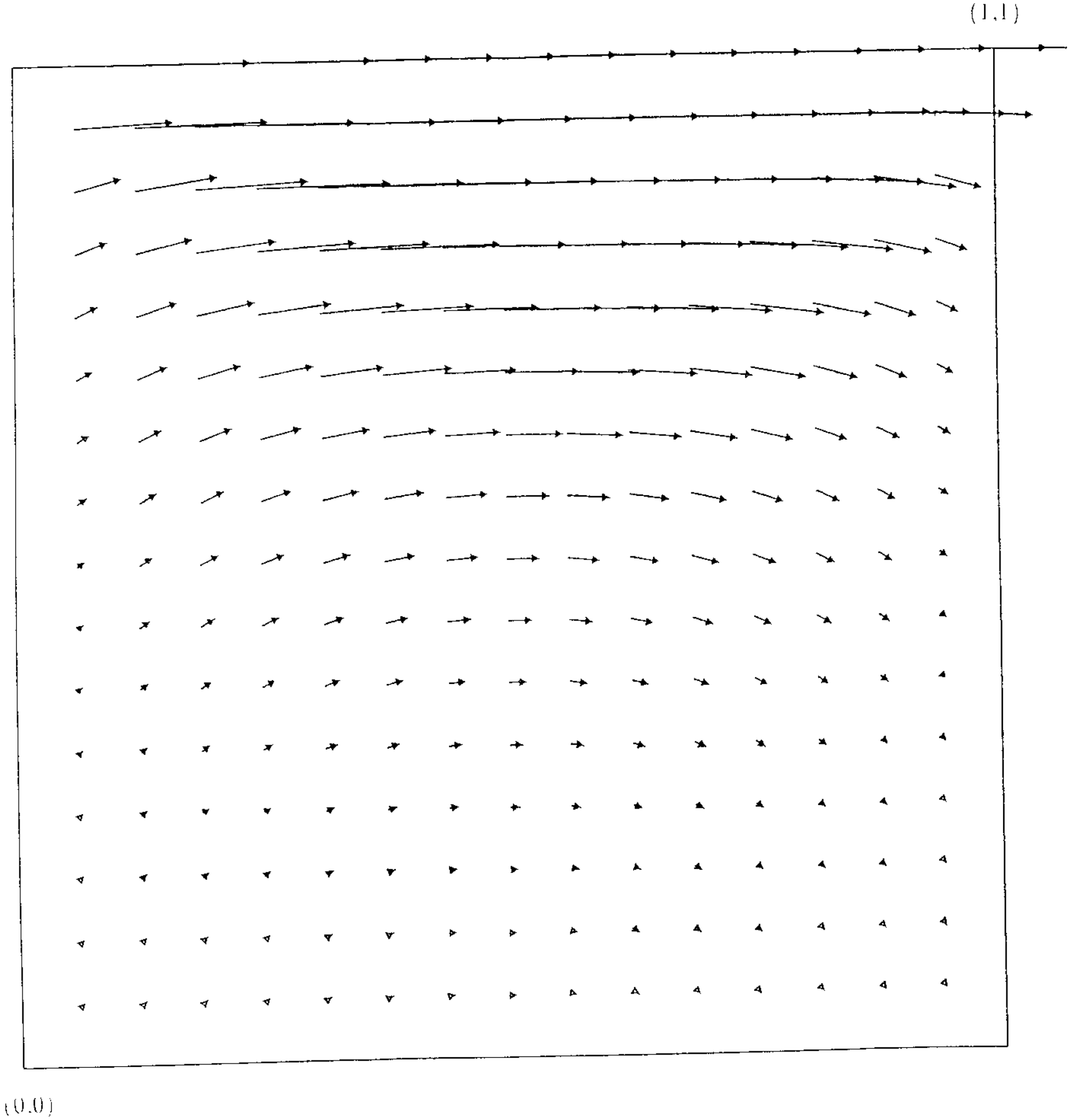
$\lambda = 0; \beta = 0$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

vetores deslocamento

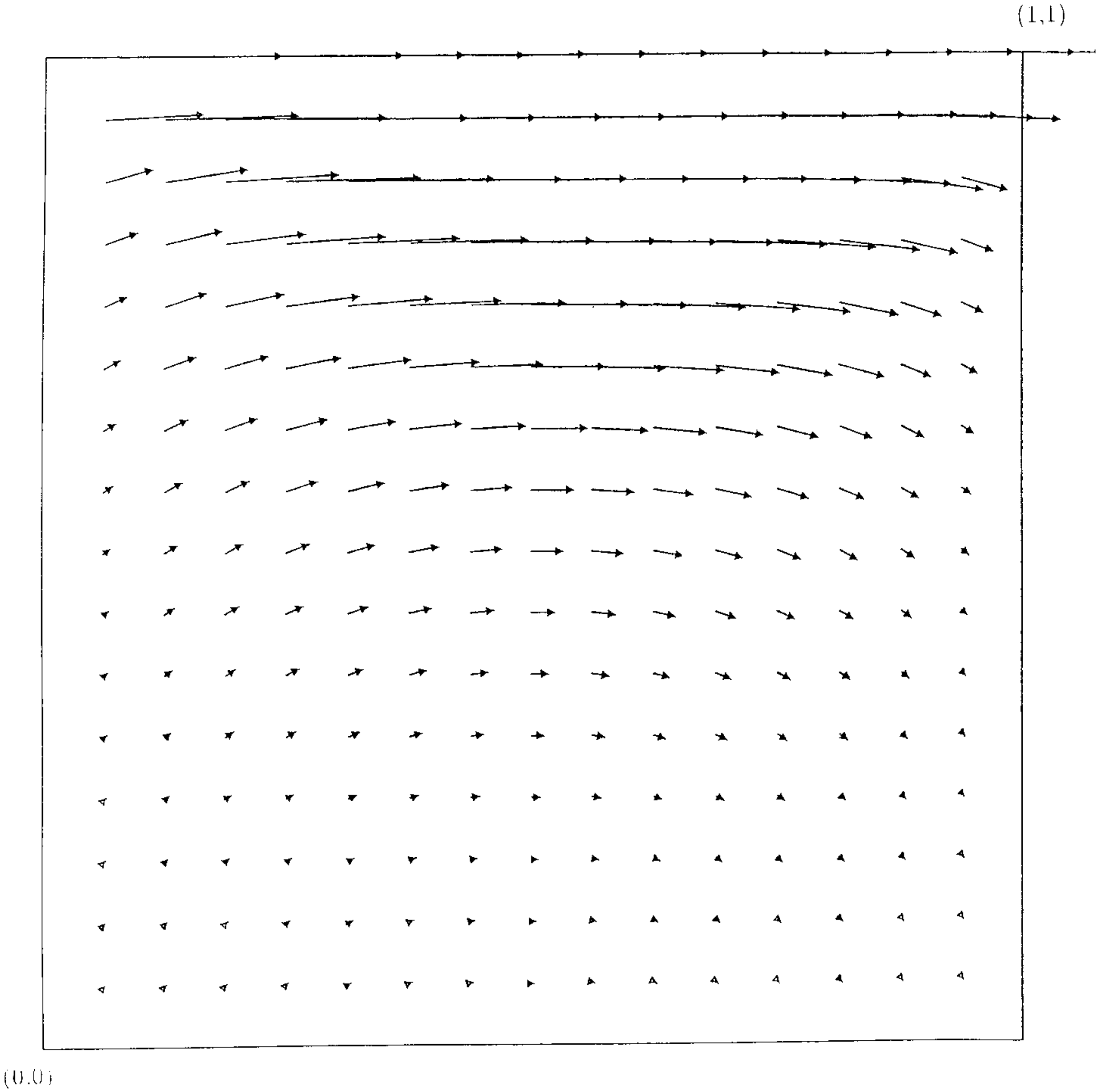
$\lambda = 0; \beta = 0.999$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

vetores deslocamento

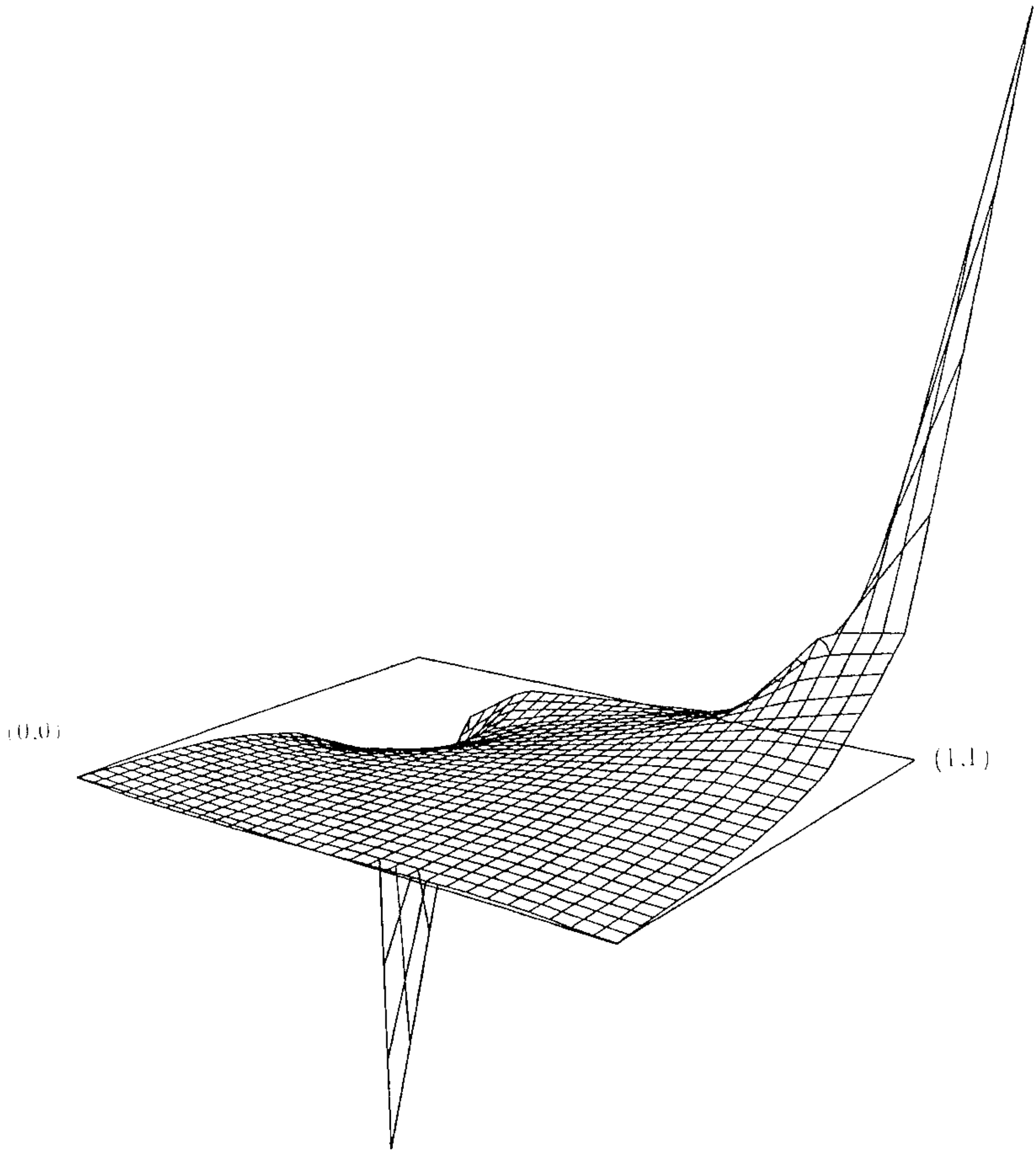
$\lambda = 0; \beta = 1.001$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de pressão

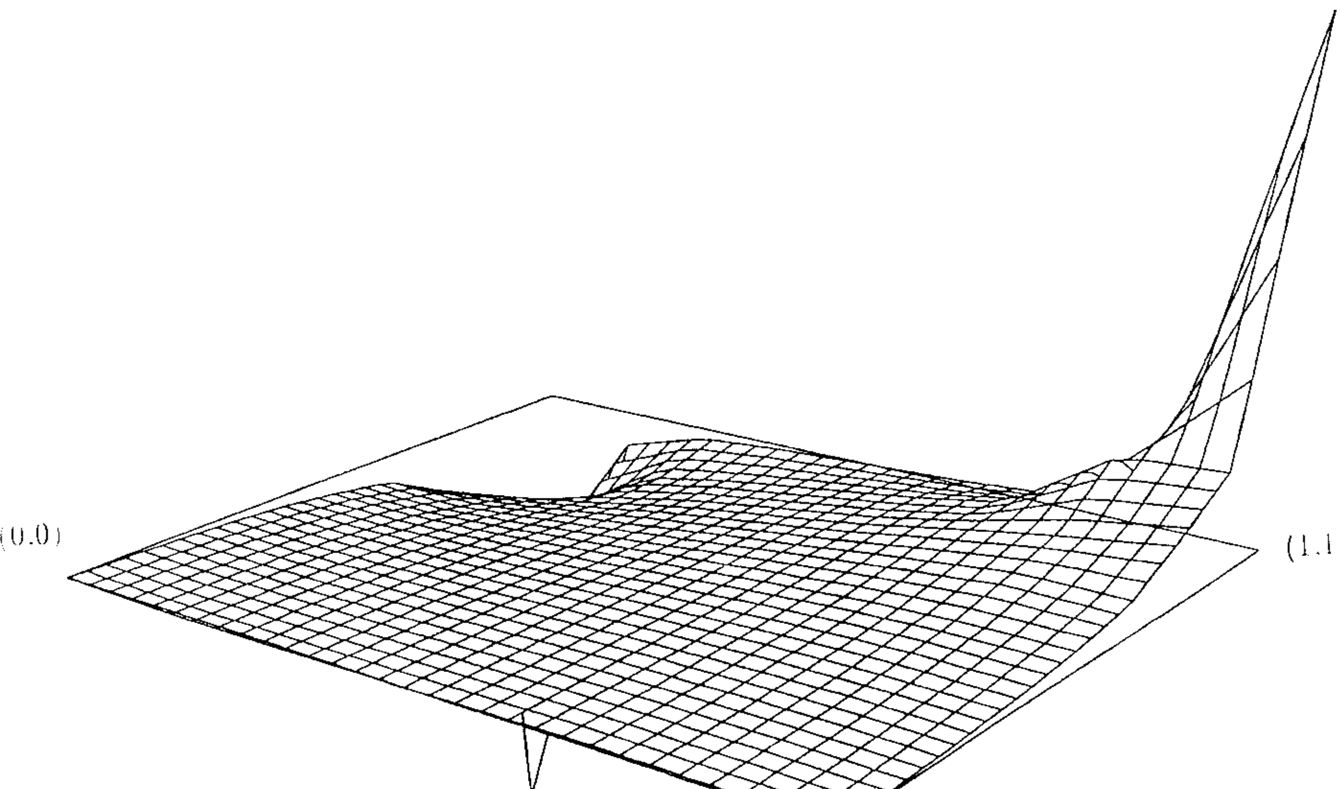
$\lambda = 0; \beta = 0$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de pressão

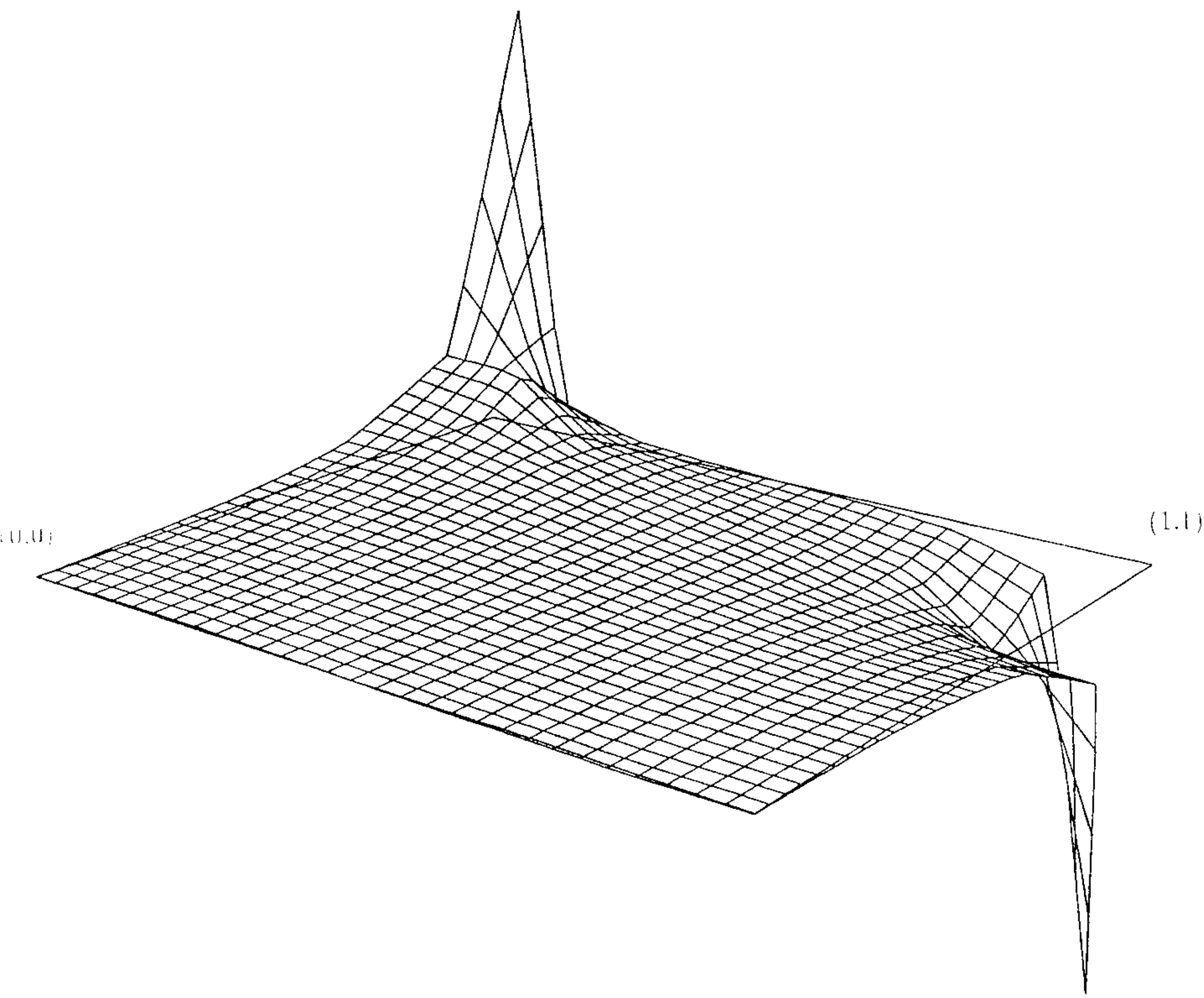
$\lambda = 0; \beta = 0.999$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

perfil de pressão

$\lambda = 0; \beta = 1.001$

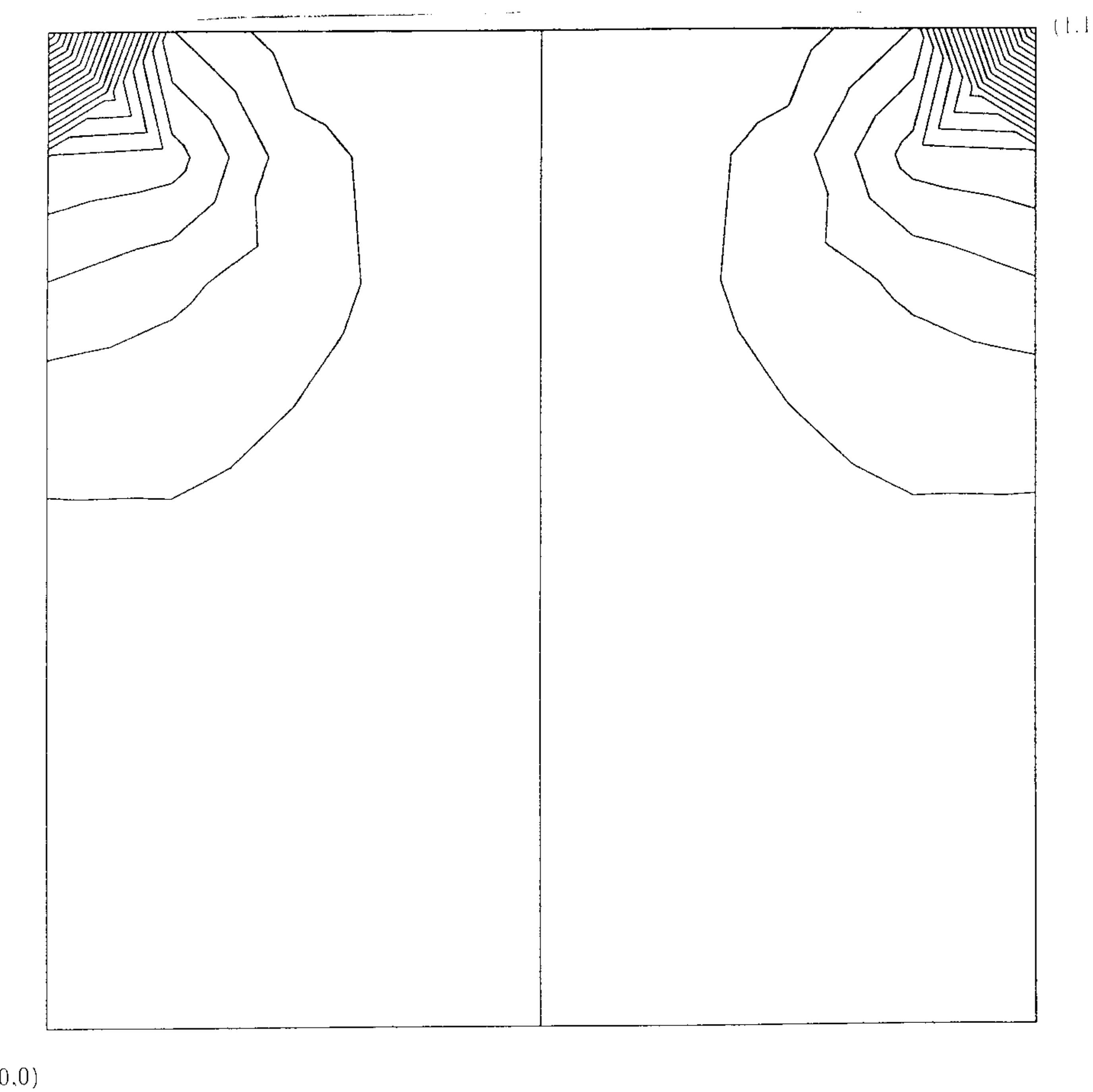


elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

contornos de pressão

$\lambda = 0; \beta = 0$

MIN GLOBAL :	-11.764
MAX GLOBAL :	11.764
MIN LOCAL :	-11.764
MAX LOCAL :	11.764
MIN LOCAL[%] :	0.000
MAX LOCAL[%] :	100.000
PSI[0] :	-11.764
DELTA PSI :	0.535
# DE LIGNES :	45

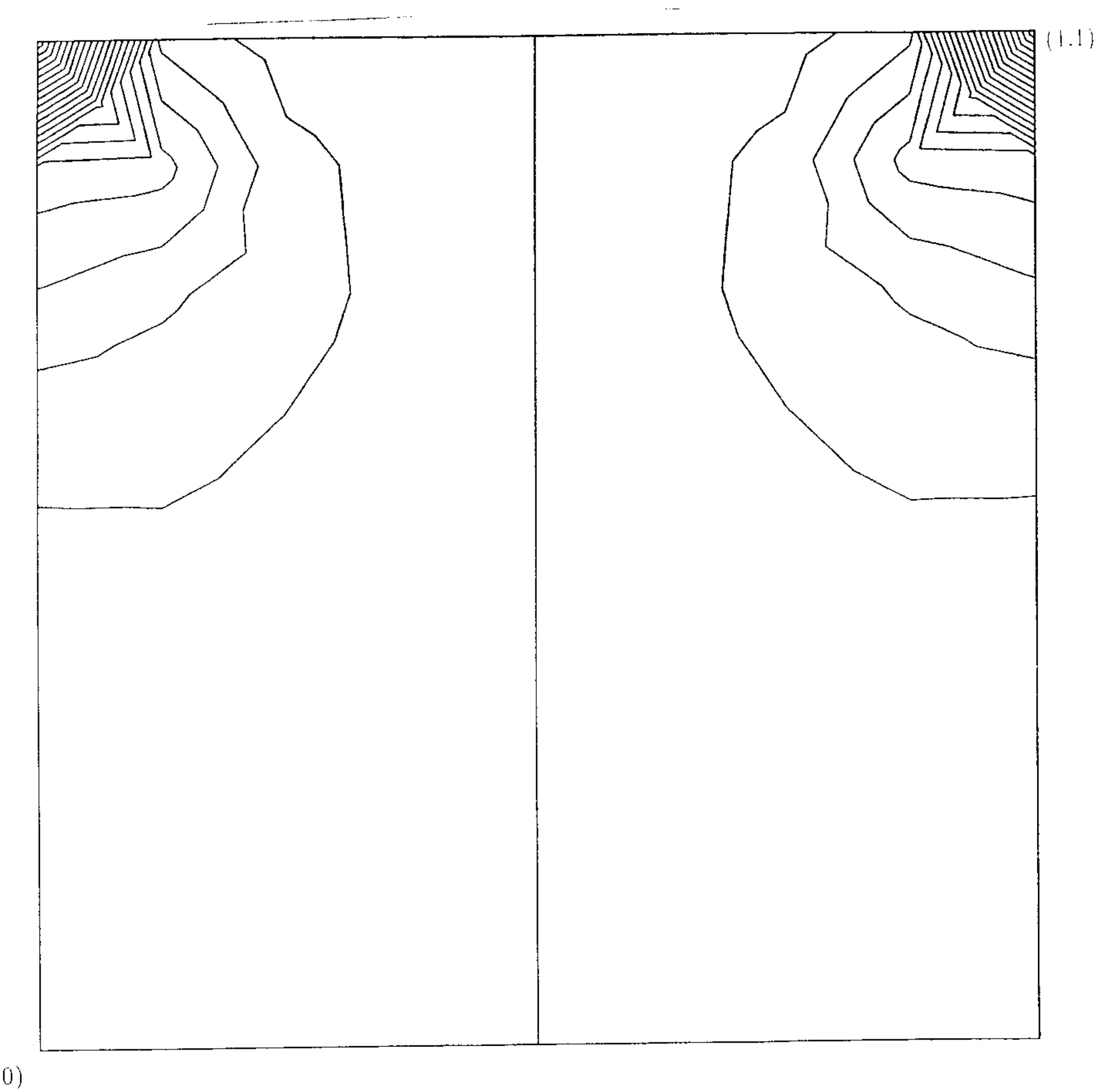


MIN GLOBAL :	-0.012
MAX GLOBAL :	0.012
MIN LOCAL :	-0.012
MAX LOCAL :	0.012
MIN LOCAL[%] :	0.000
MAX LOCAL[%] :	100.000
PSI[0] :	-0.012
DELTA PSI :	0.548E-03
# DE LIGNES :	45

elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

contornos de pressão

$\lambda = 0; \beta = 0.999$



elemento Q2/Q1, ramp cavity, malha regular, 8x8 elementos

contornos de pressão

$\lambda = 0; \beta = 1.001$

MIN GLOBAL :	-0.012
MAX GLOBAL :	0.012
MIN LOCAL :	-0.012
MAX LOCAL :	0.012
MIN LOCAL[%] :	0.000
MAX LOCAL[%] :	100.000
PSI[0] :	-0.012
DELTA PSI :	0.548E-03
# DE LIGNES :	45