TESE DE
MESTRADO

Rumo a uma teoria unitária alternativa para a Gravitação : novas interações e semelhanças com a teoria de Einstein-Hilbert

VITOR EMANUEL RODINO LEMES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, JULHO 1993

Agradecimentos

- Ao Prof Nelson Pinto Neto, pelo tema desta tese e principalmente pela camaradagem que teve;
- Ao Prof Mario Novello, pela introdução do tema, pelo interesse neste, e principalmente por aceitar um aluno flutuante entre dois departamentos;
- À Luciane Rangel, por servir de "bandeirante" neste caminho com tantos índices;
- Ao Prof José Abdalla Helayël, por variados motivos, dentre os quais ter me ensinado e assistido sempre que se fez necessário;
- Aos meus colegas de sala, por tanto entusiasmo demonstrado na tese, bem como por gostarem de minhas piadas;
- Aos amigos que fiz no DCP e em outros departamentos, por suas idéias e ideais;
- À "galera lá de casa" por me aturarem, bem como as minhas estranhas manias;
- À Mirian (secretária dos Alunos) pelo especial carinho com que tratava dos assuntos (melhor seria dizer favores) que lhe pedia;
- À Tânia Gláucia Dargam, por fazer do que eu costumava chamar de vida realmente uma VIDA (ao qual possamos vivê-la juntos durante muito tempo);
- À Capes, pelo financiamento (esporádico) deste trabalho;

Resumo

Com base em uma representação para o spin-2, diferente da usual, desenvolvemos uma Lagrangeana e estudamos suas conseqüências. Mostramos que a teoria é unitária e propaga dois graus de liberdade, tal qual a teoria de Einstein-Hilbert. Desenvolvemos uma forma de auto-interação, bem como de interação com campos de diferentes spins. Finalmente, analisamos a teoria em três dimensões e comparamos com os resultados obtidos para Einstein-Hilbert.

Índice

1 Introdução **2**

2 O Spin-2 no $SL(2,C)$, suas formas e Estudo de Unitariedade **4**

2.1 A equação de Bargmann-Wigner para o Spin-2 4

2.2 As Variáveis de Fierz e sua Dinâmica 7

3 Interações , Spins - $\frac{1}{2}$ - 1 e Autointeração **16**

3.1 Introduzindo não - linearidade 16

3.2 A auto-interação do ponto de vista quântico 20

3.3 Interação com Campos Fermiônicos de Dirac 30

3.4 Uma Equação Para Spin $-$ Zero 33

3.5 Os Campos Fantasmas Associados 34

3.5.1 Análise do Propagador Fantasma livre 38

4 A Propagação Livre em Três Dimensões **42**

4.1 A propagação livre em três dimensões 42

4.2 O termo de Chern-Simons para o campo $A_{\alpha\beta\mu}$ 47

5 Conclusão **54**

5.1 Conclusão 54

5.2 Unitariedade, Causalidade e Resíduos 56

5.3 Analogia de integrais com Faddeev-Popov 61

5.4 Projetores de Barnes-Rivers 63

Convenções

As Convenções adotadas são :

- **Assinatura da m'etrica em quatro D**: (+ , - , - , -)
- **Assinatura da m'etrica em três D**: (+ , - , -)
- **Indices Gregos**: $\alpha = 0 , 1 , 2 , 3.$
- **Indices latinos**: i = 1 , 2 , 3.
- **Variáveis de Fierz usuais**: $h_{\mu,\nu} = h_{\nu,\mu}$
- **Variáveis de Fierz,Ashtekar**: $A_{\alpha,\beta,\mu} + A_{\mu,\alpha,\beta} + A_{\beta,\mu,\alpha} = 0.$
- **Tensor de Levi-Civita em três D**:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu} = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{para permutações pares de (0 , 1 , 2)} \\ -1 & \text{para permutações ímpares de (0 , 1 , 2)} \\ 0 & \text{para índices repetidos} \end{array} \right\}$$

- **Propagador Livre do campo de Fierz-Ashtekar**: $< T[0](A_{\alpha\beta\mu}(x)A_{\gamma\sigma\epsilon}(y) >$
- **Propagador Livre para Férmions**:$< T[0](\bar{\Psi}(x)\Psi(y)) >$

$$< T[0](\bar{\Psi}(x)\Psi(y) >= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip^{\mu}(x-y)_{\mu}} < T[0](\bar{\Psi}(-p)\Psi(p)) >$$

$$< T[0](\bar{\Psi}(-p)\Psi(p)) >= \frac{(p_{\nu}\gamma^{\nu})}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- **Matrizes Gamma de Dirac:** γ^μ segundo convenção do Bjorken-Drell.

- **Derivada funcional do campo** $A_{\alpha\beta\mu}$: $\frac{\delta}{\delta J^{\alpha\beta\mu}}$

"*Mais la mervelle qu'il trova Dont maintes fos s'espoventa Ne doit nul hom conter ne dire Ciil ki le dist en a grant ire, Car c'est li singnes del Grall S'en puet avoir et paine et mal Cil ki s'entremet del conter Fors ensi com il doit aler.* "

"[*Do milagre que lá achou e que tanto o assustou ninguém deve falar. Quem disser algo sobre isso poderá arranjar para si muita aflição . Porqque esse é o sinal do Graal. Quem contar algo diferente da verdade causará por isso mal a si próprio.*] "

(Le morte d'Arthur , T.Malory)

Capítulo 1

Introdução

Desde o final da década de 60, uma das grandes áreas de interesse da Física Teórica tem sido o problema da quantização da teoria de Einstein - Hilbert, que foi estudada em profundidade por Veltman, Deser, Zumino e outros.

A Gravitação de Einstein-Hilbert demonstrou ser nao renormalizável a ordens perturbativas superiores a 1 loop embora unitária a *tree-level* . Teorias alternativas como a Supergravidade , os *Strings* e *Superstrings* foram propostas justamente justamente para tentar contornar este problema , sendo que cada uma veio a sofrer de outro problema particular que acaba , em termos gerais , sendo relacionado com a série perturbativa .

Ao invés de partir para teorias de corpos extendidos , variáveis anticomutantes ou uma mistura de ambas tentaremos uma proposta simples baseada nas simetrias apresentadas pelas variáveis de Fierz-Ashtekar [6] [7] [5], bem como uma proposta de introdução de termos não lineares .

As variáveis de Fierz-Ashtekar foram introduzidas na literatura visando a facilitar o estudo dos vínculos existentes na gravitação [8][13], permitindo uma quantização cujo tratamento de vínculos fosse preciso e rigoroso.

Ainda segundo o próprio Ashtekar em um trabalho em conjunto com Balachandran estas variáveis são apresentadas no sentido de se formalizar uma analogia entre a liberdade de se perfazer uma rotação interna nas tétrades e a liberdade de transformações de gauge locais na teoria de Yang-Mills.

Ainda segundo o mesmo trabalho esta reformulação de variáveis é feita para permitir a análise do problema de CP da gravitação tal qual é feito no caso de Yang-Mills[37].

Esta formulação tem ainda a vantagem adicional de permitir o estudo da quantização da gravitação de forma não perturbatiiva no campo, na gravitação de Einstein [18] o campo $g_{\mu\nu}$ é aproximado em uma série perturbativa $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} + o(\kappa^2)$.

Ainda segundo Ashtekar tal formulação tem a vantagem de evidenciar problemas de quebra de simetria que a gravitação apresenta e permanecem mascarados na formulação em termos de $g_{\mu\nu}$.

Baseando-se nisto desenvolvemos uma teoria com auto-interação e estudamos alguns aspectos relevantes.

Provaremos a Unitáriedade do propagador a *tree-level* em 4 dimensões simultaneamente obtendo o número de graus de liberdade envolvidos e provando a necessidade de um termo tipo Chern-Simons em 3D [21] que também será analisado.

Por fim analisarei o propagador do setor de *ghost* da teoria , sua interação com o campo de Fierz e o que ocorre ao se interagir outros campos por este método , bem como conclusões .

Capítulo 2

O Spin-2 no $SL(2, C)$, suas formas e Estudo de Unitariedade

2.1 A equação de Bargmann-Wigner para o Spin-2

O grupo de Poincaré comporta uma descrição dinâmica, através das equações de Bargmann-Wigner[3], para campos de spin genérico[32], ao qual iremos nos referir como spin s; tal equação nada mais é do que a generalização da equação de Dirac [4] de forma a poder descrever os possíveis campos massivos, ou não, de spins genéricos (s):

$$\begin{array}{l} (\gamma^{\mu}\partial_{\mu})_a^b\, \Psi_b = im\Psi_a \text{ (spin } \tfrac{1}{2}) \\ (\gamma^{\mu}\partial_{\mu})_a^b\, \Psi_{bc} = im\Psi_{ac} \text{ (spin 1)} \\ (\gamma^{\mu}\partial_{\mu})_{a_1}^b\, \Psi_{ba_2\ldots a_{2s}} = im\Psi_{a_1\ldots a_{2s}} \text{ (spin s)}\ , \end{array} \tag{2.1}$$

onde o spinor [1] de rank 2s é completamente simétrico em seus índices spinoriais e, quando a massa é nula, faz-se necessário acrecentar a esta equação a condição suplementar

$$\left(\gamma^5\right)_{a_1}^b \Psi_{ba_2\ldots a_{2s}} = \Psi_{a_1\ldots a_{2s}} \tag{2.2}$$

Como queremos um spinor que descreva o spin-2 e satisfaça a equação de Bargmann-Wigner com restrição de massa nula, vamos nos utilizar da matriz conjugação de carga de forma a escrever o spinor [2] em termos de um tensor:

$$\Psi_{bcde} = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu}C)_{bc}\Psi_{\mu\nu\sigma\lambda}(\gamma^{\sigma\lambda}C)_{de} \quad , \tag{2.3}$$

onde a ausência de termos do tipo $\gamma^{\mu}C$ se deve às propriedades da matriz γ^5.

O tensor $\Psi_{\mu\nu\sigma\lambda}$ pode ser escrito em termos de Ψ_{bcde} facilmente por meio de simples inversão da definição, de forma que:

$$\begin{array}{l} \Psi_{bcde}(C^{-1}\gamma^{\alpha\beta})^{de} = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu}C)_{bc}\Psi_{\mu\nu\sigma\lambda}(\gamma^{\sigma\lambda}C)_{de}(C^{-1}\gamma^{\alpha\beta})^{de} \\ ((C^{-1})\gamma^{\varrho\epsilon})\,\Psi_{bcde}(C^{-1}\gamma^{\alpha\beta})^{de} = \frac{1}{4}(C^{-1}\gamma^{\varrho\epsilon})^{bc}(\gamma^{\mu\nu}C)_{bc}\Psi_{\mu\nu\sigma\lambda}(\gamma^{\sigma\lambda}C)_{de}(C^{-1}\gamma^{\alpha\beta})^{de} \\ \Psi_{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{1}{16}(C^{-1}\gamma_{\mu\nu})^{ab}\Psi_{abcd}(C^{-1}\gamma_{\sigma\lambda})^{cd} \end{array} \tag{2.4}$$

Fica, portanto, claro que o tensor possui as seguintes simetrias explícitas:

$$\begin{array}{l} \Psi_{\mu\nu\sigma\lambda} = \Psi_{\sigma\lambda\mu\nu} = -\Psi_{\nu\mu\sigma\lambda} \\ \Psi_{\mu\nu\sigma\lambda} = \Psi_{\overline{\mu\nu}\sigma\lambda} = \Psi_{\mu\nu\overline{\sigma\lambda}} = \Psi_{\overline{\mu\nu}\overline{\sigma\lambda}} \\ \Psi^{\mu}_{\ \nu\sigma\mu} = 0, \end{array} \tag{2.5}$$

onde a barra indica que o dual está sendo tomado.

Em virtude da auto-dualidade e da propriedade de traço nulo, temos que um tal tensor obedece à relação cíclica:

$$\Psi_{\mu\nu\sigma\lambda} + \Psi_{\mu\lambda\nu\sigma} + \Psi_{\mu\sigma\lambda\nu} = 0 \tag{2.6}$$

Ao utilizarmos o spinor escrito em termos deste tensor na equação de Bargmann-Wigner, temos como equação de movimento

$$\Psi^{\mu\nu\sigma\lambda}{}_{,\mu} = 0 \tag{2.7}$$

Introduzindo um tensor real (F) de forma que Ψ possa ser escrito em termos deste tensor e de seu dual , obtemos:

$$
\begin{array}{l}
F_{\mu\nu\sigma\lambda} + F_{\mu\lambda\nu\sigma} + F_{\mu\sigma\lambda\nu} = 0 \\
F^{\mu}_{\ \nu\sigma\mu} = 0 \\
F^{\mu\nu\sigma\lambda}_{\ \ ,\mu} = 0 \\
F_{\lambda\nu\varrho\sigma\,,\mu} + F_{\nu\mu\varrho\sigma\,,}{}^{\lambda} + F_{\mu\lambda\varrho\sigma\,,\nu} = 0
\end{array}
\tag{2.8}
$$

Devido às simetrias apresentadas, podemos exprimir o tensor de curvatura como sendo formado por derivadas de um tensor simétrico em seu segundo e terceiro índices ($B_{\mu[\nu\lambda]} = 0$). Porém, se quisermos escrever o tensor B em termos do tensor de Fierz, devemos fazer a seguinte identificação

$$A_{\varrho\sigma\lambda} = B_{\varrho\sigma\lambda} - B_{\sigma\varrho\lambda} \tag{2.9}$$

A simetria cíclica na curvatura [17] passa a ser escrita como:

$$A_{\varrho\sigma\lambda,\nu} + A_{\sigma\nu\lambda,\varrho} + A_{\nu\varrho\lambda,\sigma} = 0 \tag{2.10}$$

Usando estas substituições na definição da curvatura F[16], podemos reescrevê-la como:

$$F_{\alpha\beta\mu\nu} = A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} \tag{2.11}$$

Embora o que tradicionalmente seja feito para obter a equação de Einstein linearizada neste contexto seja realizar a substituição da variável de Fierz, A, em termos de derivadas de tensores simétricos e utilizar a propriedade de traço nulo de F,

$$\begin{aligned}&A_{\alpha\beta\mu} \rightarrow h_{\mu[\alpha,\beta]}\\&h_{[\mu\nu]} = 0\\&F_{\beta\nu} = 0 = 2 * (\Box h_{\beta\nu} + h^{\mu}_{\mu}, \beta, \nu - h^{\mu}_{(\beta,\nu)}, \mu) \quad ,\end{aligned} \tag{2.12}$$

tomaremos um caminho mais semelhante ao Eletromagnetismo[10] [14], e utilizaremos como variável fundamental a própria variável de Fierz, bem como a equação de movimento, que será dada em termos da derivada da curvatura F

$$F^{\alpha\beta\mu\nu}, \nu = 0 \ , \tag{2.13}$$

sendo esta tomada como equação de movimento no caso de não existir interação.

2.2 As Variáveis de Fierz e sua Dinâmica

Tal como demonstrado por N. P. Neto [15] [25] [28] as simetrias da variável de Fierz podem vir a gerar uma Lagrangeana que descreve, em princípio[9], 10 graus de liberdade, tal qual a equação de Einstein seja escrita em termos de $g_{\mu\nu}$, desde que utilizemos como Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{8} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{2.14}$$

onde a curvatura $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ é dada por:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} \\ &+ \frac{1}{2}(A_{(\alpha\nu)}\eta_{\beta\mu} - A_{(\alpha\mu)}\eta_{\beta\nu} \\ &+ A_{(\beta\mu)}\eta_{\alpha\nu} - A_{(\beta\nu)}\eta_{\alpha\mu}) \\ &+ \frac{2}{3} A^{\sigma\lambda}_{\sigma,\lambda}(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\mu\beta}) \end{aligned}$$

$$+ \quad A_{\mu\nu} = -A^{\epsilon}_{\mu\nu,\epsilon} + A^{\epsilon}_{\mu,\nu} \tag{2.15}$$

Como as simetrias de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ impõem uma ciclicidade [19] (idêntica à do tensor de Weyl), temos que, além das simetrias

$$A_{(\alpha\beta)\mu} = A^{*\alpha\beta}_{\beta} = 0 \tag{2.16}$$

$$A^{*}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\varrho\sigma} A_{\varrho\sigma\mu} \quad , \tag{2.17}$$

uma simetria [26] que envolve uma ciclicidade das derivadas da variável de Fierz é:

$$A^{*\alpha\beta\mu}{}_{,\beta} = 0 \tag{2.18}$$

Reaplicando estas simetrias na Lagrangeana[10][11], e expressando-a em termos do campo e suas derivadas, podemos reescrevê-la como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta\mu}(\Box A^{\alpha\beta\mu} - \frac{3}{2}A^{\alpha\beta\nu,\mu}_{,\ \ \nu} - \eta^{\beta\mu}(\Box A^{\alpha\lambda}_{\lambda} + \frac{1}{2}A^{\lambda\sigma}{}_{\sigma,\lambda})) \tag{2.19}$$

Tal Lagrangeana nos sugere como escolha mais simples de gauge [20] um termo "tipo" $\frac{1}{2\alpha}A_{\alpha\beta\mu}(A^{\alpha\beta\nu,\mu}_{\ \ \nu} - \eta^{\beta\mu}A^{\nu\lambda\ ,\alpha}_{\ \ \lambda,\nu})$, que pode ser escrito como:

$$\frac{-1}{4\alpha}\mathcal{G}_{\alpha\beta}[A]\mathcal{G}^{\alpha\beta}[A] \tag{2.20}$$

Sendo $\mathcal{G}_{\alpha\beta}[A]$ definido por:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}[A] = \sqrt{3}A_{\alpha\beta\mu}^{\ \ \ ,\mu} + A_{\lambda\sigma}^{\ \ \sigma,\lambda}\eta_{\alpha\beta} \quad , \tag{2.21}$$

ficando livre apenas o parâmetro α.

Com esta escolha de gauge, e fazendo $\alpha = 1$, obtemos para a expressão do propagador [20]no espaço dos momenta

$$\begin{aligned} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(-k)A^{\gamma\sigma\epsilon}(k)) > \ &= \ \frac{-i}{k^2}(\frac{1}{6}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu} \\ &- \ \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} \\ &+ \ \eta^{\beta\sigma}\eta^{\alpha(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} \\ &- \ \eta^{\beta\gamma}\eta^{\alpha(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu}) \\ &+ \ \frac{1}{4}(\eta^{\alpha[\gamma}\eta^{\sigma]\epsilon}\eta^{\beta\mu} \\ -\eta^{\beta[\gamma}\eta^{\sigma]\epsilon}\eta^{\alpha\mu})) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Convém resaltar que as simetrias das variáveis de Fierz e a simetria sob a troca de índices no propagador estão naturalmente presentes no segundo membro da expressão aciima. Se observarmos bem, veremos que o termo $\frac{1}{6}$ seguido do conteúdo dentro do parêntese, nada mais é do que a unidade para tensores com as simetrias de Fierz[30]:

$$\frac{1}{6}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu} - \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} + \eta^{\beta\sigma}\eta^{\alpha(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} - \eta^{\beta\gamma}\eta^{\alpha(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu} = (1)^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon} \tag{2.23}$$

De posse do propagador, é necessário o seu acoplamento com correntes para verificação da unitariedade a $tree - level$; para tanto, definiremos 4 vetores linearmente independentes e escreveremos as correntes em termos destes.:

A forma mais geral pela qual a corrente pode ser escrita em termos destes [35] vetores é dada por :

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\beta\mu}(k) &= a(k)(k_\alpha k_{(\beta}\tilde{k}_{\mu)} - k_\beta k_{(\alpha}\tilde{k}_{\mu)} \\
&+ b(k)(k_\alpha \tilde{k}_{(\beta}\tilde{k}_{\mu)} - k_\beta \tilde{k}_{(\alpha}\tilde{k}_{\mu)}) \\
&+ c_i(k)(k_\alpha k_{(\beta}\epsilon^i_{\mu)} - k_\beta k_{(\alpha}\epsilon^i_{\mu)}) \\
&+ d_{i,j}(k)(k_\alpha \epsilon^i_{(\beta}\epsilon^j_{\mu)} - k_\beta \epsilon^i_{(\alpha}\epsilon^j_{\mu)}) \\
&+ e_i(k)(\tilde{k}_\alpha \tilde{k}_{(\beta}\epsilon^i_{\mu)} - \tilde{k}_\beta \tilde{k}_{(\alpha}\epsilon^i_{\mu)}) \\
&+ f_{i,j}(k)(\tilde{k}_\alpha \epsilon^i_{(\beta}\epsilon^j_{\mu)} - \tilde{k}_\beta \epsilon^i_{(\alpha}\epsilon^j_{\mu)}) \\
&+ m_{i,j,l}(\epsilon^i_\alpha \epsilon^j_{(\beta}\epsilon^l_{\mu)} \\
&- \epsilon^i_\beta \epsilon^j_{(\alpha}\epsilon^l_{\mu)})
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

A condição de gauge fixa que a derivada da corrente seja igual a zero [33][35], e como já temos a corrente escrita em termos dos vetores de base, no espaço de momento, basta fazer a identificação :

$$
J^{\alpha\beta\mu}_{\ \ \ \ ,\mu}(x) = 0 \longrightarrow J^{\alpha\beta\mu}(k)k^\mu = 0 \tag{2.25}
$$

Como o pólo do propagador é em $k^2 = 0$, devemos proceder esta análise tomando sempre as contraçãoes $k^2, \epsilon^\mu_i k_\mu, \epsilon^\mu_i \tilde{k}_\mu$ iguais a zero quando necessário.

$$
J_{\alpha\beta\mu}(k)k^\mu = 0 = b(2k_\alpha\tilde{k}_\beta - 2k_\beta\tilde{k}_\alpha)\tilde{k}_\mu k^\mu + e_i(\tilde{k}_\alpha\epsilon^i_\beta - \tilde{k}_\beta\epsilon^i_\alpha)\tilde{k}_\mu k^\mu \tag{2.26}
$$

Contraindo com ϵ_l^α temos:

$$- e_i \tilde{k}_\beta \epsilon_\alpha^i \epsilon_l^\alpha = 0 \tag{2.27}$$

Da condição acima determinamos que os coeficientes e_i e b são iguais a zero.

Partindo para o cálculo explícito da unitariedade devemos saturar o propagador com as correntes, visto que este produto é proporcional à matriz Amplitude de Espalhamento [35] escrita no espaço dos momenta :

$$\begin{array}{l} AE = J^*_{\alpha\beta\mu}(k) < T(A^{\alpha\beta\mu}(-k)A^{\gamma\sigma\epsilon}) > J_{\gamma\sigma\epsilon}(k) \\ AE = -\frac{i}{k^2}(J^*_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} - J^{\mu *}_{\alpha\mu}J^{\alpha\beta}_\beta) \end{array} \tag{2.28}$$

No acoplamento entre as duas correntes, os únicos termos que sobrevivem são os termos $m_{i,j,l}$, ou seja, no pólo $k^2 = 0$, todos os outros coeficientes que aparecem na expansão da corrente não irão contribuir no cálculo da matriz dos resíduos.

$$\begin{array}{l} J^*_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} = -9m^*_{i,j,l}m^{i,j,l} \\ J^{*\ \mu}_{\alpha\mu}J^{\alpha\beta}_\beta = -9m^{*\ j}_{i,j}m^l_{i,l} \end{array} \tag{2.29}$$

Tendo em mãos a matriz de espalhamento, é necessário determinar a positividade, ou não, do termo imaginário do resíduo no pólo $k^2 = 0$. Caso $ImRes > 0$, a unitariedade está garantida, porém se o $ImRes < 0$, a teoria é não-unitária e, portanto, contém ghosts e a matriz de espalhamento permitirá probabilidades negativas para ocorrências (eventos) .

$$\begin{array}{l} Res(k^2 = 0) = -i(j^*_{\alpha\beta\mu}(k)J^{\alpha\beta\mu}(k) - J^{*\ \mu}_{\alpha\mu}(k)J^{\alpha\beta}_\beta(k)) \\ ImRes(k^2 = 0) = 9(m^*_{i,j,l}m^{i,j,l} - m^{*\ j}_{i,j}m^{i,l}_l) \end{array} \tag{2.30}$$

lembrando que $m_{i,j,l}$ possui as mesmas simetrias que o tensor de Fierz - com a ressalva de que os índices tomam apenas os valores 1 ou 2.

$$\begin{array}{l} ImRes(k^2 = 0) = 18(\mid m_{2,1,1} \mid^2 + \mid m1,2,2 \mid^2) \\ A = m_{2,1,1} B = m_{1,2,2} \\ ImRes(k^2 = 0) = 18(A^* A + B^* B) \end{array} \tag{2.31}$$

Este resultado garante que temos tão somente 2 graus de polarização[35], como seria esperado para uma boa teoria sem massa.

Todo este estudo sobre a unitariedade foi feito desde o início baseando-se no fato de que nos encontramos em 4 dimensões. Seria interessante estudar o comportamento desta teoria para dimensões menores, bem como comparar com com os resultados da Gravitação linearizada (suficiente para que se possa estudar o pólo e o residuo do propagador de Hilbert-Einstein). Se, quando abrimos a Lagrangeana proposta por N. P. Neto[15][14], tivéssemos deixado aberto a dimensão em que estamos trabalhando, encontraríamos após fixar o gauge a Lagrangeana escrita da forma:

$$\frac{1}{2} A_{\alpha\beta\mu} \Box (A^{\alpha\beta\mu} - \frac{2}{d-2} \eta^{\beta\mu} A^{\alpha\lambda}{}_{\lambda}) \tag{2.32}$$

Em primeira análise, é óbvio que a teoria não é definida em 2 dimensões devido à fração $\frac{2}{d-2}$ que diverge.É porem necessário estudar a matriz de espalhamento no caso de 3 dimensões [24][31] para verificar se existe ou não algum estado de polarização que esteja sendo propagado. Esperamos, em analogia com o caso da Gravitação de Einstein-Hilbert, que não existam graus de liberdade propagados na teoria pura.

$$
\begin{aligned}
AE &= J^*_{\alpha\beta\mu}(k) < T(A^{\alpha\beta\mu}(-k)A^{\gamma\sigma\epsilon}(k)) > J_{\gamma\sigma\epsilon}(k) \\
&= -\tfrac{i}{k^2}(J^*_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} - \tfrac{2}{d-2}J^{*\ \sigma}_{\alpha\sigma}J^{\alpha\lambda}_{\ \ \lambda})
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Logo o resíduo da matriz de espalhamento também dependerá da dimensão em que se esta calculando.

$$
\begin{aligned}
&ImRes(k^2 = 0) = 9(m^*_{i,j,l}m^{i,j,l} - \tfrac{2}{d-2}m^{*\ j}_{i,j}m^{i,l}_{\ \ l}) \\
&ImRes(k^2 = 0) = 9(\mid m_{2,1,1} \mid^2 (1 - \tfrac{1}{d-2}) + \mid m_{1,2,2} \mid^2 (1 - \tfrac{1}{d-2}) \\
&f(d) = 1 - \tfrac{1}{d-2} \\
&d = 4 f(d) = \tfrac{1}{2} \\
&d = 3 f(d) = 0
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Por meio deste cálculo mostramos que a teoria apresentada é unitária [35] e possui 2 estados de polarização em 4 dimensões e não é definida em 2 dimensões, bem como não tem nenhum grau de liberdade em $d = 3$. Em capítulo posterior mostraremos como introduzir dinâmica em 3-D, por meio de um termo topológico [31][24][23][27] (Chern - Simmons).

Façamos agora um breve estudo da equação linearizada de Einstein em 4-D[18], que nos permita comparar como os dois propagadores se comportam.

A Lagrangeana linearizada de Einstein se escreve:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}h^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu\,\kappa\lambda}h^{\kappa\lambda} \\
&\varphi_{\mu\nu,\kappa\lambda} = (\tfrac{\Box}{4}\eta_{\mu(\kappa}\eta\lambda)\nu + \tfrac{\Box}{2}\eta_{\mu\nu}\eta\kappa\lambda + \eta_{\kappa\lambda}\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\nu\lambda}\partial_\kappa\partial_\mu)
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Novamente, por questão de simplicidade, restringiremos nosso estudo do propagador a um gauge específico, neste caso o gauge de De Donder, que é dado por.

$$
\mathcal{L}gf = \frac{-1}{2\alpha}g_\nu[h]g^\nu[h] \tag{2.36}
$$

Onde $g_\nu[h] = h_{\lambda\nu}{}^{,\lambda} - h^{\lambda}_{\lambda\,,\nu}$.

Acrescentando-se este termo na Lagrangeana de Einstein, o operador diferencial [33] a ser invertido passa a ser:

$$\varphi_{\mu\nu,\kappa\lambda} = (\frac{\square}{4}\eta_{\mu(\kappa}\eta_{\lambda\nu} + (1 - \frac{1}{2\alpha})\frac{\square}{2}\eta_{\mu\nu}\eta\kappa\lambda + (1 - \frac{1}{2\alpha}\eta_{\lambda[\kappa}\partial_{\nu]}\partial_\mu) \tag{2.37}$$

ao qual, novamente por simplicidade (porém sem perda de generalidade), ao invertermos, tomaremos o parâmetro $\alpha = 1$ para obtermos o propagador da forma mais curta possível. Como este propagador já foi exaustivamente invertido e estudado na literatura, tendo inclusive sido estendido o conceito de projetores para campos de 2 índices (Projetores de Barnes-Rivers), fornecenos diretamente o resultado [33]:

$$< T(h_{\mu\nu}(-k)h_{\kappa\lambda}(k)) >= \frac{i}{k^2}(\eta_{\mu(\kappa}\eta_{\lambda)\nu} - 2\eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}) \tag{2.38}$$

Quanto à corrente, é dada por :

$$j_{\mu\nu} = ak_{(\mu}k_{\nu)} + d_i\varepsilon^i_{(\mu}k_{\nu)} + f_{i,j}\varepsilon^i_{(\mu}\varepsilon^j_{\nu)} \tag{2.39}$$

O propagador saturado com as correntes fornecerá um resíduo no pólo $\kappa^2 = 0$ que não envolve nenhuma projeção de spin-1 do campo; ao invés disto, temos uma projeção de spin-zero que servirá para garantir a unitariedade deste propagador:

$$Res(k^2 = 0) = 2i(j^*_{\mu\nu}j^{\mu\nu} - j^\mu_\mu j^\nu_\nu), \tag{2.40}$$

que fornece a parte imaginária do resíduo, dada por:

$$ImRes(k^2 = 0) = i(f^*_{i,j} f^{i,j} - f^{*i}_i f^j_j) \tag{2.41}$$

Tem-se Im$Res(k^2 = 0) > 0$ e resultam apenas 2 autovalores para a matriz de resíduo. De posse destes dados, podemos dizer que, do ponto de vista da unitariedade, as teorias são equivalentes a *tree − level* , não possuem táquions e propagam 2 estados de polarização em $D = 4$.

Capítulo 3

Interações , Spins - $\frac{1}{2}$ - 1 e Autointeração

3.1 Introduzindo não - linearidade

De posse do propagador dado pelo termo bilinear da Lagrangeana, e tendo provado que este é unitário a *tree-level* e descreve realmente um spin - 2, passa a ser necessário desenvolver um método que permita a introdução de termos não-lineares na Lagrangeana, de forma a mimetizar [12] a não-linearidade apresentada pela equação de Einstein-Hilbert.

Como modelo para introduzir os termos não-lineares, lembramos que as simetrias das variáveis de Ashtekar são as mesmas que as apresentadas pelo tensor de Lanczos. Na forma sugerida por Lanczos [17] para as grandezas relevantes na Gravitação , descrevemos a curvatura $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ como:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = L_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + L_{\mu\nu[\alpha;\beta]} \tag{3.1}$$

sendo que a derivada covariante (denotada por;) é dada em termo destes potenciais. Utilizando uma estrutura equivalente que, de certa forma, lembra a estrutura de não

-linearidade das teorias com simetria tipo SU(n), descreveremos uma não -linearidade à la Lanczos.

Ao invés de introduzir um termo extra em uma derivada (ex : $\partial_\mu \to \partial_\mu + gT^a A_{a\mu}$, SU(N)), com simetria cíclica, tentaremos descrever a derivada parcial comum de 1 índice de espaço-tempo em termos de algo que possua 3 índices, de forma a ter as simetrias apresentadas pela variável de Ashtekar.

Assim, definimos:

$$S_{\alpha\beta\mu} = \eta_{\mu\beta}\partial_\alpha - \eta_{\mu\alpha}\partial_\beta \tag{3.2}$$

Para nos utilizarmos deste tensor a fim de obtermos uma derivada com um índice, usaremos apenas a constante de estrutura do Grupo de Lorentz [29]. Sendo assim, a escolha lógica seria $\partial_\mu \to \Sigma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta\mu}$, a qual apllicada a um vetor forneceria:

$$\begin{aligned} &V_{\alpha/\mu} = c(\Sigma^{\sigma\lambda})^{\epsilon}_{\mu} S_{\sigma\lambda\alpha} V_\varepsilon \\ &2c(V^{\epsilon}_{,\varepsilon}\eta_{\mu\alpha} - V_{\alpha,\mu}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ou seja, obtemos novamente a derivada de V_α em relação a μ e um termo "tipo traço", desagradável por acrescentar um escalar construído a partir do vetor V_α. Além disto, devemos verificar se tal "derivada" satisfaz a regra de Leibnitz, ou seja:

$$\begin{aligned} &(V_\alpha V_\beta)_{/\mu} = V_{\alpha/\mu} V_\beta + V_\alpha V_{\beta/\mu} \\ &(V_\alpha V_\beta)_{/\mu} \equiv c(((\Sigma^{\sigma\lambda})^{\epsilon}_{\mu} S_{\sigma\lambda\alpha} V_\varepsilon) V_\beta + v_\alpha((\Sigma^{\sigma\lambda})^{\epsilon}_{\mu} S_{\sigma\lambda\beta} V_\varepsilon)) \\ &\equiv V_{\alpha/\mu} V_\beta + V_\alpha V_{\beta/\mu} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Desta forma, a regra de Leibnitz está garantida, embora tenhamos também escalares para cada vetor e uma constante multiplicativa que ,aparentemente, não influencia campos vetoriais, devido à forma da curvatura para tais campos ser dada em termos de um tensor de 2 índices antissimétrico. Tal constante deve ser determinada para o caso fermiônico (equação de Dirac,spin-$\frac{1}{2}$) de forma a garantir que esta equação continue obedecendo ao limite $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$ dado pela eq de Klein-Gordon:

$$\begin{array}{l} \tilde{\Psi}(ic\gamma^\mu(\Sigma^{\sigma\lambda}S_{\sigma\lambda\mu}\Psi) - m\Psi) \\ \Sigma^{\sigma\lambda} = \frac{i}{4}[\gamma^\sigma, \gamma^\lambda] \\ = \tilde{\Psi}(3c\gamma^\sigma\Psi_{,\sigma} - m\Psi) \end{array} \tag{3.5}$$

De onde concluímos que, com $c = \frac{i}{3}$, reobtemos a Lagrangeana de Dirac $\tilde{\Psi}(i\gamma^\sigma\Psi_{,\sigma} - m\Psi)$.

A generalização desta derivada de forma a conter o campo $A_{\alpha\beta\mu}$ é feita simplesmente acrescentando-se este ao tensor $S_{\alpha\beta\mu}$ da forma $S_{\alpha\beta\mu} \Rightarrow S_{\alpha\beta\mu} + gA_{\alpha\beta\mu}$. Desta generalização, torna-se claro o porquê de se definir um tensor $S_{\alpha\beta\mu}$ que possui as simetrias da variável de Ashtekar[7]. Definimos, então, um tensor $T_{\alpha\beta\mu} = S_{\alpha\beta\mu} + gA_{\alpha\beta\mu}$ que possui as simetrias anteriormente citadas para a variável de Ashtekar. De posse desta derivada generalizada, devemos aplicá-la no lugar das derivadas comuns que tínhamos na Lagrangeana da forma:

$$A_{\alpha\beta\mu;\nu} = \frac{i}{3}(\Sigma^{\sigma\lambda})^\varrho_\nu(T_{\sigma\lambda\alpha}A_{\varrho\beta\mu} + T_{\sigma\lambda\beta}A_{\alpha\varrho\mu} + T_{\sigma\lambda\mu}A_{\alpha\beta\varrho}) \tag{3.6}$$

Embora nesta definição de derivadas existam termos que são derivadas da variável de Ashtekar multiplicadas pela métrica plana iremos abandoná-los, pois o termo utilizado como curvatura ($C_{\alpha\beta\mu\nu}$) possui traço nulo, eliminando completamente todos os termos que correspondem a produtos de derivadas por *etas*. Explicitaremos apenas o termo cinético e de interação.

$$A_{\alpha\beta\mu;\nu} = 2i(-A_{\alpha\beta\mu,\nu} + \frac{g}{3}A^{\varrho}_{\ \nu\alpha}A_{\varrho\beta\mu} - \frac{g}{3}A^{\varrho}_{\ \nu\beta}A_{\varrho\alpha\mu} + \frac{g}{3}A^{\varrho}_{\ \nu\mu}A_{\alpha\beta\varrho} \tag{3.7}$$

Utilizando este resultado, podemos escrever :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha;\beta]} &= -2i(A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} \\ &+ 2\frac{g}{3}A_{\varrho\nu[\alpha}A^{\varrho}_{\ \beta]\mu} \\ &+ 2\frac{g}{3}A_{\varrho\mu[\beta}A^{\varrho}_{\ \alpha]\nu} \\ &+ 2\frac{g}{3}A_{\mu\nu\varrho}A_{\alpha\beta}^{\varrho}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Daí, obtemos o tensor que será utilizado como uma curvatura $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ escrita em termos de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ (parte linear), acrescentado dos termos de interação [30] da forma:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu} &= C_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &+ 2\frac{g}{3}(A_{\varrho\nu[\alpha}A^{\varrho}_{\ \beta]\mu} \\ &+ A_{\varrho\mu[\beta}A^{\varrho}_{\ \alpha]\nu} + A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho}A_{\alpha\beta\varrho}) \\ &+ \frac{g}{3}(A^{\varrho\sigma}_{\ \ \beta}A^{\varrho}_{\ \sigma\mu} + A^{\varrho\ \sigma}A_{\varrho\mu\sigma} - A_{\varrho}A^{\varrho}_{\ (\beta\mu)} + A_{\mu\sigma}^{\ \ \varrho}A^{\sigma}_{\ \alpha\ \varrho})\eta_{\alpha\nu} \\ &+ \frac{g}{3}(A^{\varrho\sigma}_{\ \ \alpha}A^{\varrho}_{\ \sigma\nu} + A^{\varrho\ \sigma}_{\ \alpha}A_{\varrho\nu\sigma} - A_{\varrho}A^{\varrho}_{\ (\alpha\nu)} + A_{\nu\sigma}^{\ \ \varrho}A^{\sigma}_{\ \alpha\ \varrho})\eta_{\beta\mu} \\ &- \frac{g}{3}(A^{\varrho\sigma}_{\ \ \beta}A^{\varrho}_{\ \sigma\nu} + A^{\varrho\ \sigma}_{\ \beta}A_{\varrho\nu\sigma} - A_{\varrho}A^{\varrho}_{\ (\beta\nu)} + A_{\nu\sigma}^{\ \ \varrho}A^{\sigma}_{\ \alpha\ \varrho})\eta_{\alpha\mu} \\ &- \frac{g}{3}(A^{\varrho\sigma}_{\ \ \alpha}A^{\varrho}_{\ \sigma\mu} + A^{\varrho\ \sigma}_{\ \alpha}A_{\varrho\mu\sigma} - A_{\varrho}A^{\varrho}_{\ (\beta\nu)} + A_{\nu\sigma}^{\ \ \varrho}A^{\sigma}_{\ \alpha\ \varrho})\eta_{\beta\nu} \\ &+ \frac{g}{3}(3A^{\sigma\lambda\varrho}A_{\sigma\lambda\varrho} - 2A_{\varrho}A^{\varrho})(\eta_{\alpha[\mu}\eta_{\nu]\beta}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Desta forma, obtemos que uma Lagrangeana [25][14] escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.10}$$

possui termos de auto-interação de ordem g e g^2, sendo os termos de ordem g dados por interação de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ com os duplos da variável A. Um termo de ordem g típico é $C^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho} A_{\alpha\beta\varrho}$; os termos de auto-interação de ordem g^2 são na realidade produtos de 4 campos (ex $A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho} A_{\alpha\beta\varrho} A^{\mu\nu\lambda} A^{\alpha\beta}_{\ \ \lambda}$). Resta-nos entender, agora, como se processa a auto-interação quântica para uma dada ordem de g.

3.2 A auto-interação do ponto de vista quântico

Em primeiro lugar, é necessário separar os termos de ordem g na Lagrangeana. Isto é feito lembrando que tanto o tensor $W_{\alpha\beta\mu\nu}$, quanto o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, possuem o traço nulo. Desta forma, os termos de ordem g são dados por:

$$2\frac{g}{3} C^{\alpha\beta\mu\nu} (A_{\varrho\nu[\alpha} A^{\varrho}_{\ \beta]\mu} + A_{\varrho\mu[\beta} A^{\varrho}_{\ \alpha]\nu} + A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho} A_{\alpha\beta\varrho}) \tag{3.11}$$

Utilizando a propriedade de anti-simetria do tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ no par $\mu\nu$ e no par $\alpha\beta$, podemos reescrever o termo de interação como :

$$\mathcal{L}i(g) = 8\frac{g}{3} C^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\varrho\nu\alpha} A^{\varrho}_{\ \beta\mu} + 2\frac{g}{3} C^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho} A_{\alpha\beta\varrho} \tag{3.12}$$

Esta forma ainda não é interessante para desenvolvermos a série perturbativa na integral de caminho, pois devemos explicitar o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ em termos dos campos e suas derivadas. Fazendo isto, as contrações se reduzem, em sua forma mais simples, aos termos abaixo:

$$
\begin{aligned}
- & \frac{g}{3} A^{\alpha\beta[\mu,\nu]} (16 A_{\varrho\alpha\mu} A^{\varrho}_{\ \nu\beta} \\
+ & 4 A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho} A_{\alpha\, b\varrho}) + 4\frac{g}{3} A^{(\alpha\nu)} (A_{\sigma\nu}^{\ \ \varrho} A^{\sigma}_{\ \alpha\,\varrho} \\
+ & 2 A_{\varrho\nu\alpha} A^{\varrho\,\sigma}_{\ \ \sigma} - A_{\varrho\sigma\alpha} A^{\varrho\sigma}_{\ \ \nu} \\
- & A_{\nu\varrho\sigma} A^{\varrho\sigma}_{\ \ \alpha}) + 8\frac{g}{3} A^{\sigma\lambda}_{\ \ \sigma,\lambda} (A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho} A^{\mu\nu}_{\ \ \varrho} \\
+ & 2 A_{\varrho\nu\alpha} A^{\varrho\nu\alpha} - 2 A_{\varrho\nu\alpha} A^{\varrho\alpha\nu})
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

De posse dos termos de interação de ordem g na Lagrangeana, passemos à obtenção do funcional gerador em sua aproximação de primeira ordem.

O funcional gerador em ordem zero [20][35] é dado por :

$$
\mathcal{Z}_0[j] = expi \int d^4(x;y) j_{abc}(x) < T[0](A^{abc}(x) A^{def}) > j_{def}(y) \tag{3.14}
$$

Para procedermos à obtenção do funcional gerador em primeira ordem é necessário substituir os campos de interação por derivadas funcionais[34], de forma que o funcional gerador é dado pela aplicação da Lagrangeana de interação (escrita em termos das derivadas funcionais) sobre o funcional de ordem zero. Para isto procedemos à identificação :

$$
A_{\alpha\beta\mu}(x) \Rightarrow \quad \times \quad \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j^{\alpha\beta\mu}(x)} \mathcal{Z}_1[j]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{L}I(-i\frac{\delta}{\delta J})\mathcal{Z}_0[j] \\
&- \frac{16g}{3}A^{\alpha\alpha\mu\,\nu}(z)A_{\varrho\alpha\mu}(z)A^{\varrho}_{\ \nu\beta}(z) \Rightarrow \\
&- 16\frac{g}{3}\partial^{\nu}_{(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\alpha\beta\mu}(u)} \\
&\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\varrho\alpha\mu}(z)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\varrho}^{\ \nu\beta}(z)}lim(u) \to z \\
&- 4\frac{g}{3}A^{\alpha\beta\mu,\nu}(z)A_{\mu\nu}^{\ \ \varrho}(z)A_{\alpha\beta\varrho}(z) \Rightarrow \\
&- 4\frac{g}{3}\partial^{\nu}_{(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\alpha\beta\mu}(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\mu\nu}_{\ \ \varrho}(z)} \\
&\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\alpha\beta\varrho}(z)}lim(u) \to z \\
&\times 40\frac{g}{3}A^{\sigma\lambda}_{\ \ \sigma,\lambda}(z)A_{\mu\nu\varrho}(z)A^{\mu\nu\varrho}(z) \Rightarrow 40\frac{g}{3}\partial_{\lambda(u)} \\
&\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\ \sigma}_{\sigma\lambda}(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\mu\nu\varrho}(z)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\mu\nu\varrho}(z)}lim(u) \to z \\
&- 16\frac{g}{9}A^{\sigma\lambda}_{\ \ \sigma,\lambda}(z)A_{\varrho\nu\alpha}(z)A^{\varrho\alpha\nu}(z) \Rightarrow \\
&- 16\frac{g}{9}\partial^{(u)}_{\lambda}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\sigma}_{\sigma\lambda}(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\varrho\nu\alpha}(z)} \\
&\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\varrho\alpha\nu}(z)}lim(u) \to z \\
&\times 8\frac{g}{3}A^{\alpha\epsilon\nu}_{\ \ \ \ \epsilon}(z)A_{\varrho\nu\alpha}(z)A^{\varrho\sigma}_{\ \ \sigma}(z) \Rightarrow \\
&\times 8\frac{g}{3}\partial^{(u)}_{\epsilon}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\alpha\epsilon\nu}(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\varrho\nu\alpha}(z)} \\
&\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\varrho\sigma}^{\ \ \sigma}(z)}lim(u) \to z \\
&- 8\frac{g}{3}A^{\alpha\epsilon\ ,\nu}_{\ \ \ \epsilon}(z)A_{\varrho\nu\alpha}(z)A^{\varrho\sigma}_{\ \ \sigma}(z) \Rightarrow \\
&- 8\frac{g}{3}\partial^{\nu}_{(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\alpha\epsilon}^{\ \ \epsilon}(u)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{\varrho\nu\alpha}(z)} \\
&\times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_{\varrho\sigma}^{\ \ \sigma}(z)}lim(u) \to z
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

Fazendo esta aplicação, obtemos o primeiro termo ($\mathcal{Z}_1[j]$) da expansão do funcional gerador em série perturbativa. São fornecidos os termos $\mathcal{Z}_1[j]$ relativos a cada um dos termos em separado, devido ao extremo tamanho de cada termo.

$$
\begin{aligned}
- & \quad 16\frac{g}{3}A^{\alpha\beta[\mu,\nu]}A_{\varrho\alpha\mu}A^{\varrho}_{\ \nu\beta} \Rightarrow \mathcal{Z}_1 \\
= & \quad limw \to z - 16\frac{g}{3}i\int d^4z[-i < T[0](A^{\varrho}_{\ \nu\beta}(z)A_{\varrho\alpha\mu}(z)) > \\
\times & \quad \int d^4x j_{abc}(x)(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{abc}(x)A^{\alpha\beta\mu}(w)) > \\
- & \quad \partial^{\mu}_{(w)} < T[0](A^{abc}(x)A^{\alpha\beta\nu}(w)) >) \\
- & \quad i(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(w)A_{\varrho\alpha\mu}(z)) > \\
- & \quad \partial^{\mu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\nu}(w)A_{\varrho\alpha\mu}(z)) > \\
\times & \quad \int d^4y < T[0](A^{\varrho}_{\ \nu\beta}(z)A^{def}(y)) > j_{def}(y) \\
- & \quad i(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\varrho}_{\ \nu\beta}A^{\alpha\beta\mu}(w)) > \\
- & \quad \partial^{\mu}_{(w)} < T[0](A^{\varrho}_{\ \nu\beta}A^{\alpha\beta\nu}(w)) >) \\
\times & \quad \int d^4x j_{abc}(x) < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho\alpha\mu}(z)) > \\
+ & \quad \int d^4x j_{abc}(x) < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho\alpha\mu}(z)) > \int d^4y < T[0](A^{\varrho}_{\ \nu\beta}A^{def}(y)) > \\
\times & \quad j_{def}(y) \times \int d^4v \\
\times & \quad (\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(w)A^{def}(v)) > \\
- & \quad \partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\nu}(w)A^{def}(v)) > j_{def}(v)]\mathcal{Z}_0[j]
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
- & \quad 16\frac{g}{3}A^{\alpha\beta[\mu,\nu]}A_{\mu\nu\varrho}A^{\ \varrho}_{\alpha\beta} \Rightarrow \mathcal{Z}_1 \\
= & \quad limw \to z - 4\frac{g}{3}i\int d^4z[-i < T[0](A^{\ \varrho}_{\alpha\beta}(z)A_{\mu\nu\varrho}(z)) >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int d^4x j_{abc}(x)(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{abc}(x)A^{\alpha\beta\mu}(w)) > \\
&- \partial^{\mu}_{(w)} < T[0](A^{abc}(x)A^{\alpha\beta\nu}(w)) >) \\
&- i(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(w)A_{\mu\nu\varrho}(z)) > \\
&- \partial^{\mu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\nu}(w)A_{\mu\nu\varrho}(z)) > \\
&\times \int d^4y < T[0](A_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}(z)A^{def}(y)) > j_{def}(y) \\
&- i(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}(z)A^{\alpha\beta\mu}(w)) > \\
&- \partial^{\mu}_{(w)} < T[0](A_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}A^{\alpha\beta\nu}(w)) >) \\
&\times \int d^4x j_{abc}(x) < T[0](A^{abc}(x)A_{\mu\nu\varrho}(z)) > \\
&+ \int d^4x j_{abc}(x) < T[0](A^{abc}(x)A_{\mu\nu\varrho}(z)) > \\
&\times \int d^4y < T[0](A_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}A^{def}(y)) > j_{def}(y) \\
&\times \int d^4v(\partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(w)A^{def}(v)) > \\
&- \partial^{\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha\beta\nu}(w)A^{def}(v)) >)j_{def}(v)]\mathcal{Z}_0[j] \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 4\frac{g}{3}A^{(\alpha\nu)}A_{\varrho\sigma\alpha}A^{\varrho\sigma}_{\ \ \nu} \\
&= 4\frac{g}{3}A^{\epsilon(\alpha\nu)}_{,\epsilon}A_{\varrho\sigma\alpha}A^{\varrho\sigma}_{\ \ \nu} \\
&+ 4\frac{g}{3}A^{(\alpha\epsilon,\nu}_{\epsilon}A_{\varrho\sigma\alpha}A^{\varrho\sigma}_{\ \ \nu} \Rightarrow \mathcal{Z}_1 \\
&= lim w \rightarrow z 4\frac{g}{3}i\int d^4z[\\
&- i < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\ \ \nu}(z)A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
&\times \int d^4x j_{abc}(x)(\partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{abc}(x)A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w)) > \\
&- i\partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w)A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\times & \int d^4x < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu} A^{def}(x)) > j_{def}(x) \\
- & i\int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w) > \\
\times & \int d^4x j_{abc}(x) < T[0](A^{abc}(x) A_{\varrho\lambda\alpha} \\
\times & \int d^4y < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A^{def}(y) > J_{def}(y) \\
\times & \int d^4v \partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w) A^{ghi}(v)) > j_{ghi}(v) \\
- & i < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \int d^4x j_{abc}(x) \partial^{(\alpha}_{(w)} < T[0](A^{\nu)\epsilon}_{\epsilon}(w) A^{abc}(x)) > \\
- & i\partial^{(\alpha}_{(w)} < T[0](A^{\nu)\epsilon}_{\epsilon}(w) A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \int d^4x < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A^{def}(x)) > j_{def}(x) \\
- & i\int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \partial^{(\nu}_{(w)} < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A^{\alpha)\epsilon}_{\epsilon}(w)) > \\
- & i\int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \partial^{(\alpha}_{(w)} < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A^{\nu)\epsilon}_{\epsilon}(w)) > \\
\times & \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \int d^4y < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z) A^{def}(y)) > j_{def}(y) \\
\times & \int d^4v \partial^{(\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha)\epsilon}_{\epsilon}(w) A^{ghi}(v)) > j_{ghi}(v)] \mathcal{Z}_0[j]
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
- & 8\frac{g}{3} A^{\epsilon(\alpha\nu)}_{,\epsilon} A_{\varrho(\nu\alpha)} \\
\times & A^{\varrho\sigma}_{\sigma} - 8\frac{g}{3} A^{(\alpha\epsilon,\nu}_{\epsilon} \\
\times & A_{\varrho(\nu\alpha)} A^{\varrho\sigma}_{\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad & \mathcal{Z}_1 = lim w \to z \\
- \quad & 8\frac{g}{3} i \int d^4z[-i < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times \quad & \int d^4x j_{abc}(x) \partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{abc}(x) A^{(\alpha\nu}_{\epsilon}(w)) > \\
- \quad & i\partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times \quad & \int d^4x < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma} A^{def}(x)) > j_{def}(x) \\
- \quad & i \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \partial^{\epsilon}_{(w)} \\
\times \quad & < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w) > \\
- \quad & i \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times \quad & \partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w)) > \\
+ \quad & \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times \quad & \int d^4y < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A^{def}(y)) > j_{def}(y) \\
\times \quad & \int d^4v \partial^{\epsilon}_{(w)} < T[0](A^{(\alpha\nu)}_{\epsilon}(w) A^{ghi}(v)) > j_{ghi}(v) \\
- \quad & i < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times \quad & \int d^4x j_{abc}(x) \partial^{(\alpha}_{(w)} < T[0](A^{\nu)\epsilon}_{\epsilon}(w) A^{abc}(x)) > \\
- \quad & i\partial^{(\alpha}_{(w)} < T[0](A^{\nu)\epsilon}_{\epsilon}(w) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times \quad & \int d^4x < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A^{def}(x)) > j_{def}(x) \\
- \quad & i \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \partial^{(\nu}_{(w)} < T[0](A^{\alpha)\sigma}_{\sigma}(z) A^{\varrho\sigma)}_{\sigma}(w) > \\
- \quad & i \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \partial^{(\alpha}_{(w)} < T[0](A^{\nu)\sigma}_{\sigma}(z) A^{\varrho\sigma)}_{\sigma}(w) > \\
+ \quad & \int d^4y j_{abc}(y) < T[0](A^{abc}(y) A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \int d^4y < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z) A^{def}(y)) > j_{def}(y) \\
\times \quad & \int d^4v \partial^{(\nu}_{(w)} < T[0](A^{(\alpha)\epsilon)}_{\epsilon}(w) A^{ghi}(v)) > j_{ghi}(v)] \mathcal{Z}_0[j] \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

De posse do funcional gerador $\mathcal{Z}[j]$, em aproximação de primeira ordem, bastaria, para obtermos os propagadores relativos à interação de ordem g, que fizéssemos uso das derivadas funcionais atuando sobre $\mathcal{Z}[j]$ e tomássemos as fontes iguais a zero.

$$< T(A_{\alpha\beta\mu}(x)A_{\nu\varrho\sigma}(y)A_{\lambda\pi\epsilon}(z)) >=_{j\to 0} lim\frac{1}{i^3}\frac{1}{\mathcal{Z}[j]}\frac{\delta}{\delta j^{\alpha\beta\mu}(x)}\frac{\delta}{\delta j^{\nu\varrho\sigma}(y)}\frac{\delta}{\delta j^{\lambda\pi\epsilon}(z)}\mathcal{Z}[j] \quad (3.20)$$

Para evitar o aparecimento de gráficos desconexos na série perturbativa, convém passsar ao gerador W [20][34], $\mathcal{W}[j] = \frac{1}{i}ln\mathcal{Z}[j]$, das funções de Green conexas. Tal fato é fácil de entender pelo cálculo abaixo.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{W}}{\delta J}\,|_{J=0} &= \frac{-i}{Z[0]}\frac{\delta Z}{\delta J}\,|_{J=0}\;\frac{\delta^2\mathcal{W}}{\delta J(x)\delta J(y)} = \\
&- i\frac{\delta}{\delta J(x)}(\frac{1}{\mathcal{Z}[j]}\frac{\delta Z}{\delta J(y)}\,|_{J=0}= \\
&- i(\frac{-1}{Z^2[0]}\frac{\delta Z}{\delta J(x)}\,|\,\frac{\delta Z}{\delta J(y)}\,| \\
&+ \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(y)}\,|^{J=0}) \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Assim procedendo, podemos obter propagadores conexos relativos á interação de ordem g como por exemplo :

$$\begin{aligned}
< T(A_{abc}(x)A_{def}(y)A_{ghi}(z)) > &= i\frac{\delta^3\mathcal{W}[j]}{\delta j^{abc}(x)\delta j^{def}(y)\delta j^{ghi}(w)} = \\
&+ \int d^4z(\frac{16g}{3} < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho\alpha\mu}(z)) > \\
&\times\; < T[0](A^{\varrho}_{\ \nu\beta}(z)A^{def}(y)) >
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\times & \quad (\partial_z^{\nu} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(z)A^{ghi}(w)) > \\
- & \quad \partial_z^{\mu} < T[0](A^{\alpha\beta\nu}(z)A^{ghi}(w)) >) \\
+ & \quad \int d^4z(\frac{4g}{3} < T[0](A^{abc}(x)A_{\mu\nu\varrho}(z)) > \\
\times & \quad < T[0](A_{\alpha\beta}^{\varrho}(z)A^{def}(y)) > \\
\times & \quad (\partial_z^{\nu} < T[0](A^{\alpha\beta\mu}(z)A^{ghi}(w)) > \\
- & \quad \partial_z^{\mu} < T[0](A^{\alpha\beta\nu}(z)A^{ghi}(w)) >) \\
- & \quad \int d^4z(\frac{4g}{3} < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \quad < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z)A^{def}(y)) > \\
\times & \quad \partial_z^{\epsilon} < T[0](A_{\epsilon}^{(\alpha\nu)}(z)A^{ghi}(w)) > \\
- & \quad \int d^4z(\frac{4g}{3} < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho\lambda\alpha}(z)) > \\
\times & \quad < T[0](A^{\varrho\lambda}_{\nu}(z)A^{def}(y)) > \\
\times & \quad \partial_z^{\nu} < T[0](A^{\alpha\epsilon}_{\epsilon}(z)A^{ghi}(w)) > \\
+ & \quad \int d^4z(\frac{8g}{3} < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times & \quad < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z)A^{def}(y)) > \\
\times & \quad \partial_z^{\epsilon} < T[0](A_{\epsilon}^{(\alpha\nu)}(z)A^{ghi}(w)) > \\
+ & \quad \int d^4z(\frac{8g}{3} < T[0](A^{abc}(x)A_{\varrho(\nu\alpha)}(z)) > \\
\times & \quad < T[0](A^{\varrho\sigma}_{\sigma}(z)A^{def}(y)) > \\
\times & \quad \partial_z^{(\nu} < T[0](A^{\alpha)\epsilon}_{\epsilon}(z)A^{ghi}(w)) >
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Com o cuidado de fazer as permutações nos índices livres, ou seja :

$$
\begin{aligned}
\Delta^1_{abc}\Delta^2_{def} &\times \Delta^3_{ghi} \Rightarrow \frac{1}{6}(\Delta^1_{abc} \\
&\times \Delta^2_{def}\Delta^3_{ghi} \\
&+ \Delta^1_{abc}\Delta^2_{ghi}\Delta^3_{def}) + \frac{1}{6}(\Delta^1_{def} \\
&\times \Delta^2_{abc}\Delta^3_{ghi} \\
&+ \Delta^1_{def}\Delta^2_{ghi}\Delta^2_{abc}) + \frac{1}{6}(\Delta^1_{ghi} \\
&\times \Delta^2_{abc}\Delta^3_{def} \\
&+ \Delta^1_{ghi}\Delta^2_{def}\Delta^2_{abc})
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Apenas por este gráfico já é visível a dificuldade de se manipular uma tal quantidade de termos, por este motivo não sera apresentado o funcional gerador para a interação de ordem g^2. Apenas a título de demonstração do número de termos a serem calculados, são listadas a seguir as interações de ordem g^2.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(g^2)}_{int} &= 4g^2 A_{\sigma\beta[\mu} A^{\sigma\alpha}_{\ \ \nu]} A^{\lambda\beta[\mu} A_{\lambda\alpha}^{\ \ \nu]} \\
&+ 2g^2 A_{\sigma\beta[\alpha} A^{\sigma\alpha}_{\ \ \nu]} \\
&\times (A^{\lambda\beta[\epsilon} A_{\lambda\epsilon}^{\ \ \nu]} \\
&+ A^{\lambda\nu\beta} A_{\lambda\epsilon}^{\ \ \epsilon} - A^{\lambda\nu\epsilon} A_{\lambda\epsilon}^{\ \ \beta}) \\
&+ 6g^2 A_{\sigma\nu[\beta} A^{\sigma\alpha}_{\ \ \alpha]} (A^{\lambda\beta[\epsilon} A_{\lambda\epsilon}^{\ \ \nu]} \\
&+ A^{\lambda\nu\beta} A_{\lambda\epsilon}^{\ \ \epsilon} - A^{\lambda\nu\epsilon} A_{\lambda\epsilon}^{\ \ \beta}) \\
&+ 2g^2 (A_{\sigma\alpha[\epsilon} A^{\sigma\epsilon}_{\ \ \mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad A_{\sigma\mu\alpha}A^{\sigma\epsilon}_{\ \ \epsilon} - A_{\sigma\mu\epsilon} \\
&\times \quad A^{\sigma\epsilon}_{\ \ \alpha})(A^{\lambda\alpha[\delta}A_{\lambda\delta}^{\ \ \mu]} \\
&+ \quad A^{\lambda\mu\alpha}A_{\lambda\delta}^{\ \ \delta} - A^{\lambda\mu\delta}A_{\lambda\delta}^{\ \ \alpha}) \\
&+ \quad g^2(A_{\sigma\ [\epsilon}^{\ \nu}A^{\sigma\epsilon}_{\nu]} + A_{\sigma\nu}^{\ \ \nu}A^{\sigma\epsilon}_{\ \ \epsilon} \\
&- \quad A_{\sigma\nu\epsilon}A^{\sigma\epsilon\nu}) \\
&\times \quad (A^{\lambda\ [\delta}_{\ \mu}A^{\mu]}_{\lambda\delta} \\
&+ \quad A^{\lambda\mu}_{\ \ \mu}A_{\lambda\delta}^{\ \ \delta} - A^{\lambda\mu\delta}A_{\lambda\delta\mu})
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

3.3 Interação com Campos Fermiônicos de Dirac

Como já foi calculado anteriormente o fator multiplicativo da derivada que permite manter o termo cinético da eq de Dirac[32], devemos obter agora o termo de interação para calcularmos o funcional gerador. O termo de interação é dado por :

$$
\bar{\Psi}i\frac{i}{3}\gamma^{\mu}\frac{i}{4}[\gamma^{\sigma},\gamma^{\lambda}]gA_{\sigma\lambda\mu}\Psi \tag{3.25}
$$

O funcional gerador $\mathcal{Z}_0[j]$ livre que contém também os termos do propagador livre devido ao campo fermiônico [20][36] é :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0[j] &= expi\int d^4(x,y)(j_{a,b,c}(x) < T(A^{a,b,c}(x)A^{d,e,f}(y)) > j_{d,e,f}(y) \\
&+ \quad \bar{\sigma}(x) < T(\bar{\Psi}(x)\Psi(y)) > \sigma(y))
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

O termo de perturbação em primeira ordem do funcional gerador $\mathcal{Z}_1$[j] é dado por :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1[j] &= i\int d^4z(-\frac{ig}{6}\frac{\delta}{i\delta\sigma(z)}\gamma^{\mu} \\
&\times \gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda}\frac{\delta}{i\delta j^{\sigma\lambda\mu}(z)} \\
&\times \frac{\delta}{i\delta\bar{\sigma}(z)})\mathcal{Z}_0[j] \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

É necessário lembrar que, como se trata de integração funcional em variáveis de Grassmann [35][36], as derivadas funcionais também devem ser feitas com cuidado. As derivadas em relação à corrente fermiônica barrada ($\bar{\sigma}$) têm os seus resultados tomados à direita e a derivada em relação a σ tem resultados tomados à esquerda. Tomados estes cuidados, o primeiro termo da expansão do funcional gerador W[j] fornece:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_1[j] &= -\frac{ig}{6}\int d^4z(\int d^4(x,y,w) < T(\bar{\Psi}(z)\Psi(y)) > \sigma(y)\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda} \\
&\times < T(A_{\sigma\lambda\mu}(z)A^{abc}(x)) > j_{abc}(x)\bar{\sigma}(w) < T(\bar{\Psi}(w)\Psi(z)) > \\
&+ \int d^4(x,y) < T(\bar{\Psi}(z)\Psi(z)) > \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda} \\
&\times \int d^4x < T(A_{\sigma\lambda\mu}(z)A^{abc}(x)) > j_{abc}(x) \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Se calcularmos o propagador que fornece a regra de Feynman da interação entre dois férmions (de spin-$\frac{1}{2}$) por meio de uma partícula de spin-2 obtemos:

$$
\begin{aligned}
< T(\bar{\Psi}(x)A^{abc}(y)\Psi(z)) > &= i\frac{\delta^3\mathcal{W}_1}{\delta\sigma(x)\delta A_{abc}(y)\delta\bar{\sigma}(z)} = \\
&- i\frac{g}{6}\int d^4w < T(\bar{\Psi}(w)\Psi(x)) > \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda} \\
&\times < T(A_{\sigma\lambda\mu}(w)A^{abc}(y)) >< T(\bar{\Psi}(z)\Psi(w)) > \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Ou, se colocarmos as matrizes gamma na mesma ordem dos índices do propagador de spin 2,

$$
\begin{aligned}
&= -i\frac{g}{6}\int d^4w < T(\bar{\Psi}(w)\Psi(x)) > (\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\mu \\
&\times < T(A_{\sigma\lambda\mu}(w)A^{abc}(y)) > \\
&- 4\gamma^\sigma < T(A_{\sigma\lambda}^{\lambda}(w)A^{abc}(y)) >) \\
&\times < T(\bar{\Psi}(z)\Psi(w)) > \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Deste propagador, obtemos uma regra de Feynmann para a interação por troca de partículas de spin-2,a qual possui estreita semelhança com a interação entre férmions por troca de fótons, inclusive o traço aparecido para fornecer uma interação do mesmo tipo que a do Eletromagnetismo na componente de spin-1.

A regra de Feynmann difere da regra para o Eletromagnetismo [35] pelo propagador a ser colocado na linha de interação (linha interna) , bem como pelo fator a ser introduzido nos vértices. O fator de vértice no Eletromagnetismo é $(-ie\gamma^\mu)$ e, neste caso, o fator é mais complexo. A tabela abaixo compara a interação entre dois férmions massivos por meio de interação tipo fóton e por meio do campo de Ashtekar.

	Fóton	Ashtekar
Férmion in	$\frac{i}{\wp - m + i\varepsilon}$	$\frac{i}{\wp - m + i\varepsilon}$
Férmion out	$\frac{i}{-\wp - m + i\varepsilon}$	$\frac{i}{-\wp - m + i\varepsilon}$
interação	$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^\varrho k_\varrho + i\varepsilon}$	kernel no cap 1
Vértices	$-ie(\gamma_\mu)(2\pi)^4\delta(\Sigma^{pin})$	$\frac{-ig}{6}(\gamma^{3^{@}}\gamma^{1^{@}}\gamma^{2^{@}})(2\pi)^4\delta(\Sigma^{pin})$

Onde $\wp = p^\mu\gamma_\mu$, $p = momento$ e os índices nas matrizes γ se referem à ordem dos índices do campo acoplado.

Deste modo, já obtemos as regras para a auto-interação em primeira ordem e sabemos como ela ocorre na interação entre 3 campos quanticamente (como temos classicamente a interação entre 4 campos podemos montar o lego de Feynmann para esta interação). Obtemos, também, as regras da interação com férmions, que pela forma como ocorrem, é uma interação com o traço do tensor.

3.4 Uma Equação Para Spin – Zero

Como notado no ìtem de spin-$\frac{1}{2}$, a interação ocorre utilizando a constante de estrutura do grupo $SL(2,C)$ de forma que, ao tratarmos de campos desprovidos de caráter spinorial (escalares puros), não nos é possível um acoplamento " tipo mínimo ".

Existem, porém, outros meios de se descrever spin-zero, além de utilizar um puro escalar de forma que possamos realizar um acoplamento mínimo. Se nos utilizarmos de uma variável antissimétrica ($\varphi_{\mu\nu} = -\varphi_{\nu\mu}$) podemos escrever uma teoria de gauge baseada na invariância $\delta\varphi_{\mu\nu} = \xi_{[\mu,\nu]}$ que possua todos os requisitos desejados.

Definimos uma curvatura para esta variável de forma que :

$$F_{\mu\nu\varrho} = \varphi_{\nu\varrho,\mu} + \varphi_{\mu\nu,\varrho} + \varphi_{\varrho\mu,\nu} \tag{3.31}$$

De posse desta curvatura, escrevemos uma Lagrangeana para o spin-zero sem massa da forma $L(s=0) = \frac{-1}{4}F_{\mu\nu\varrho}F^{\mu\nu\varrho}$ que, ao ser aberta na forma " campo,operador diferencial,campo", é igual a :

$$= \quad \frac{3}{4}\varphi_{\mu\nu}(\Box\eta^{\alpha[\mu}\eta^{\nu]\beta} + \frac{1}{2}$$

$$\times \quad \eta^{\nu[\alpha}\partial^{\beta]}\partial^{\mu}$$

$$- \quad \frac{1}{2}\eta^{\mu[\alpha}\partial^{\beta]}\partial^{\nu})\varphi_{\alpha\beta} \qquad (3.32)$$

Como se pode ver, esta Lagrangeana para ter o operador diferencial invertido exige um gauge, logo não se pode simplesmente adicionar um termo de massa do tipo $m^2\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$, pois isto quebraria uma invariância explícita na qual esta Lagrangeana se baseia ($\delta\varphi_{\mu\nu} = k_{[\mu,\nu]}$) .Além disto, a substituição das derivadas pelas derivadas anteriormente definidas causa uma quebra explícita [22] da simetria desta Lagrangeana. Assim sendo, não temos um meio eficiente de introduzirmos uma interação com o spin-zero .

Em resumo, a interação com o spin-$\frac{1}{2}$ produz regras de Feynman que levam a dependências na seção de choque do mesmo tipo da que ocorre no Eletromagnetismo.

Não ocorrem auto-interações com o traço da variável $A^{\alpha}_{\mu}{}^{\mu}$, de forma que podemos supor que o Eletromagnetismo está embutido no campo $A_{\alpha\beta\mu}$.

3.5 Os Campos Fantasmas Associados

Quando fizemos a inversão do propagador associado ao campo $A^{\alpha\beta\mu}$, fez-se necessária uma escolha de gauge adequada que, no caso foi feita em analogia com a escolha do gauge unitária do Eletromagnetismo (a saber $\frac{1}{2\alpha}(B^{\mu}_{,\mu})^2$).

No caso do campo de Ashtekar $A_{\alpha\beta\mu}$, utilizamo-nos do gauge $-\frac{1}{4\alpha}G_{\alpha\beta}[A]G^{\alpha\beta}[A]$ onde $G_{\alpha\beta}[A] = 3^{\frac{1}{2}}\partial^{\mu}A_{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{\alpha}\eta_{\alpha\beta}\partial^{\sigma}A_{\sigma\lambda}^{\ \ \lambda}$, o qual nos permitiu não só inverter o operador diferencial como também demonstrar a unitariedade do propagador.

Porém, quando tratamos o problema de quantificação por meio de integral funcional, fica claro que a escolha de um gauge implica tambem na determinação de campos "fantasmas" associados. Estes *Ghosts* de Faddeev-Popov [38] podem se desacoplar, como no caso do Eletromagnetismo, ou podem se manter acoplados, como no caso das teorias de Yang-Mills [37].

Antes, porém, de tratar do determinante obtido através da invariância do campo $A_{\alpha\beta\mu}$, devemos verificar a própria invariância do campo. Se tomarmos apenas a Lagrangeana linearizada, podemos ver que a invariância é $\delta A_{\alpha\beta\mu} = c(w_{\alpha(\beta,\mu)} - w_{\beta(\alpha,\mu)})$ onde $w_{\alpha\beta} = -w_{\beta\alpha}$. É lícito supor que a generalização desta invariância para o caso de auto-interação é tomar, no lugar da derivada comum, a derivada covariante.

$$
\begin{aligned}
\delta A_{\alpha\beta\mu} &= w_{\alpha(\beta;\mu)} - w_{\beta(\alpha;\mu)} w_{\alpha\beta\mu} \\
&= \frac{i}{3}((\Sigma^{\sigma\lambda})^{\varrho}_{\mu} T_{\sigma\lambda\alpha} w_{\varrho\beta} \\
&+ ((\Sigma^{\sigma\lambda})^{\varrho}_{\mu} T_{\sigma\lambda\beta} w_{\alpha\varrho}) \\
&= -\frac{2i}{3}(2w_{\alpha\beta,\mu} + w_{\varrho[\beta}^{;\varrho}\eta_{\alpha]\mu} \\
&+ gA^{\varrho}_{\mu[\alpha} w_{\beta]\varrho})
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Logo a invariância do campo $A_{\alpha\beta\mu}$ no caso não linear é dada (a menos do fator $\frac{-2i}{3}$ global) por:

$$
\begin{aligned}
\delta A_{\alpha\beta\mu} &= 2(w_{\alpha(\beta;\mu)} - w_{\beta(\alpha;\mu)} \\
&+ w_{\varrho[\beta}^{;\varrho}\eta_{\alpha]\mu} \\
&+ gA^{\varrho}_{\mu[\alpha} w_{\beta]\varrho})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad gA^{\varrho}{}_{\beta[\alpha}w_{\mu]\varrho} \\
&- \quad gA^{\varrho}{}_{\alpha[\beta}w_{\mu]\varrho}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Podemos agora tratar mais profundamente do problema da fixação de gauge e do aparecimento dos campos fantasmas associados. Usaremos um funcional δ baseado no *gauge fixing* [38] já usado para inverter o propagador livre da forma :

$$
\begin{aligned}
\delta[\mathcal{G}_{\alpha\beta}] &= \delta[3^{\frac{1}{2}}\partial^{\mu}A_{\alpha\beta\mu} \\
&+ \eta_{\alpha\beta}\partial^{\lambda}A_{\lambda\sigma}^{\ \sigma} \\
&- G_{\alpha\beta}]
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Multiplicando o funcional gerador por :

$$
\int \Pi_{\mu\nu}\mathcal{D}\mathcal{G}_{\mu\nu}exp(\frac{-i}{4\alpha}\int d^4x\mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta}) \tag{3.36}
$$

- a menos de uma constante multiplicativa absorvida na constante de normalização do funcional-temos:

$$
\begin{aligned}
\int \Pi_{\mu\nu}\mathcal{D}\mathcal{G}_{\mu\nu}exp(\frac{-i}{4\alpha}\int d^4x\mathcal{G}_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta})\delta[\mathcal{G}_{\mu\nu}] &= exp(\frac{-i}{4\alpha}\int d^4x(3\partial^{\mu}A_{\alpha\beta\mu}\partial_{\nu}A^{\alpha\beta\nu} \\
&+ (\partial^{\lambda}A_{\lambda\sigma}^{\ \sigma})^2)
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Em consequência desta igualdade o funcional gerador se escreve como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[j] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}A_{\alpha\beta\mu} det(\frac{\delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x')}{\delta w_{\mu\nu}(x)})\delta[\mathcal{G}_{\mu\nu}]exp(i\int d^4x\mathcal{L} \\
&+ j_{\alpha\beta\mu}A^{\alpha\beta\mu})\mathcal{Z}[j] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}A_{\alpha\beta\mu} det(\frac{\delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x')}{\delta w_{\mu\nu}(x)})\delta[\mathcal{G}_{\mu\nu}]exp(i\int d^4x\mathcal{L} \\
&+ j_{\alpha\beta\mu}A^{\alpha\beta\mu}\frac{-i}{4\alpha}\int d^4x(3\partial^\mu A_{\alpha\beta\mu}\partial_\nu A^{\alpha\beta\nu} \\
&+ (\partial^\lambda A^{\ \sigma}_{\lambda\sigma})^2)
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Resta agora converter o determinante em um termo exponencial, de forma a poder ser tratado perturbativamente como qualquer campo. Devemos porém notar que $w_{\mu\nu}$ é antissimétrico e tal simetria deve ser mantida no cálculo deste determinante.

$$
det(\frac{\delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x')}{\delta w_{\mu\nu}(x)}) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\overline{w}_{\mu\nu}\mathcal{D}w_{\alpha\beta}exp - i(\int d^4x'd^4x\overline{w}_{\alpha\beta}(x')\frac{\delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x')}{\delta w_{\mu\nu}(x)}w_{\mu\nu}(x) \tag{3.39}
$$

Ao tomarmos conta da antissimetria em $w_{\mu\nu}$, obtemos contribuição apenas do termo $(3)^{\frac{1}{2}}\partial^\mu A_{\alpha\beta\mu}$, de forma que o cálculo de $\frac{\delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x)}{\delta w^{\sigma\lambda}(y)}$ se reduz a :

$$
\begin{aligned}
(3)^{\frac{1}{2}}\partial^\mu(\frac{\delta A_{\alpha\beta\mu}(x)}{\delta w^{\sigma\lambda}(y)}) &= (3)^{\frac{1}{2}}(2\eta_{\alpha[\sigma}\eta_{\lambda]\beta}\Box \\
&+ \eta_{\alpha[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_\beta \\
&- \eta_{\beta[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_\alpha) \\
&+ (3)^{\frac{1}{2}}\partial^\mu(g(A^{\varrho}_{\ \mu\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}A^{\varrho}_{\ \alpha\mu})\eta_{\beta[\lambda}\eta_{\sigma]\varrho} - g(A^{\varrho}_{\ \mu\beta} \\
&+ \frac{1}{2}A^{\varrho}_{\ \beta\mu})\eta_{\alpha[\lambda}\eta_{\sigma]\varrho} \\
&+ \frac{g}{2}A_{\alpha\beta}^{\ \ \varrho}\eta_{\mu[\lambda}\eta_{\sigma]\varrho})
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Estes cálculos nos levam a ter a seguinte integral funcional definida para o termo de *ghost* [38]:

$$
\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\overline{w}_{\mu\nu}\mathcal{D}w_{\mu\nu} exp(&- i\int d^4(x,y)(\overline{w}^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta,\sigma\lambda}w^{\sigma\lambda} - \partial^{\mu}\overline{w}^{\alpha\beta}(2gA_{\sigma\mu[\alpha}w^{\sigma}_{\ \beta]} \\
&+ gA_{\sigma\alpha\mu}w^{\sigma}_{\ \beta} \\
&- gA_{\sigma\beta\mu}w^{\sigma}_{\ \alpha} + gA_{\alpha\beta\sigma}w^{\sigma}_{\ \mu})))\varphi_{\alpha\beta,\sigma\lambda}
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\beta,\sigma\lambda} &= (2\eta_{\alpha[\sigma}\eta_{\lambda]\beta}\Box \\
&+ \eta_{\alpha[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_{\beta} - \eta_{\beta[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_{\alpha})
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

3.5.1 Análise do Propagador Fantasma livre

De posse do termo linear da Lagrangeana de campos fantasmas, resta inverter o operador diferencial de forma a obter o propagador livre entre os dois campos fantasmas. Para isso, utilizaremos os projetores de Barnes-Rivers, que nada mais são do que uma generalização dos projetores $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ para campos que possuem dois índices vetoriais ao invés de um:

$$
\begin{aligned}
\eta_{\alpha[\sigma}\eta_{\lambda]\beta}\Box &= 2(P^{(1)}b + P^{(1)}l)_{\alpha\beta,\sigma\lambda}\Box\eta_{\alpha[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_{\beta} \\
&= (\theta_{\alpha[\sigma} + \omega_{\alpha[\sigma})\omega_{\lambda]\beta}\Box \\
&- \eta_{\beta[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_{\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\theta_{\beta[\sigma} + \omega_{\beta[\sigma})\omega_{\lambda]\alpha}\Box\eta_{\alpha[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_{\beta} \\
&- \eta_{\beta[\sigma}\partial_{\lambda]}\partial_{\alpha} \\
&= (\theta_{\alpha[\sigma}\omega_{\lambda]\beta} - \theta_{\beta[\sigma}\omega_{\lambda]\alpha})\Box \\
&= 2(P^{(1)}l)_{\alpha\beta,\sigma\lambda} \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Logo $\varphi_{\alpha\beta,\sigma\lambda} = 4(P^{(1)}b + P^{(1)}l)_{\alpha\beta,\sigma\lambda} + 2(P^{(1)}l)_{\alpha\beta,\sigma\lambda}$.

A inversão do operador diferencial assim escrito é simples: Basta tomar o produto deste no propagador e igualar à unidade antissimétrica:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\alpha\beta,\sigma\lambda}\varphi^{-1\sigma\lambda}_{\ ,\varepsilon\varrho} &= (1)_{\alpha\beta,\varepsilon\varrho} \equiv (P^{(1)}b + P^{(1)}l)\varphi^{-1\sigma\lambda}_{\ ,\varepsilon\varrho} \\
&- \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P^{(1)}b + \frac{1}{3}P^{(1)}l)^{\sigma\lambda}_{\varepsilon\varrho}\frac{1}{\Box}\varphi^{-1}_{\alpha\beta,\sigma\lambda} \\
&= -\frac{1}{8}(\eta_{\alpha[\sigma}\eta_{\lambda]\beta} + \frac{1}{3}(\eta_{\alpha[\sigma}\frac{p_{\lambda]}p_{\beta}}{p^2} \\
&- \eta_{\beta[\sigma}\frac{p_{\lambda]}p_{\alpha}}{p^2}))\frac{1}{p^2} \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Pelo próprio método de inversão utilizado fica claro que o propagador livre transporta apenas spin-1. Deste resultado passamos a ter o funcional gerador na ordem zero (quando consideramos apenas o campo $A_{\alpha\beta\mu}$ e fantasma $w_{\mu\nu}$) descrito da forma:

$$
Z_0 = exp(i\int d^4(x,y)J^{\alpha\beta\mu}(x)\frac{D_{\alpha\beta\mu,\sigma\lambda\varepsilon}(x-y)}{2}J^{\sigma\lambda\varepsilon}(y) - i\int d^4(x,y)\overline{j}^{\mu\nu}(x)\varphi^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}j^{\alpha\beta}(y)) \tag{3.45}
$$

Os termos de interação entre fantasmas e campo $A_{\alpha\beta\mu}$ dados por $\partial^{\mu}\overline{w}^{\alpha\beta}$ $(2gA_{\sigma\mu[\alpha}w^{\sigma}_{\ \beta]}$ $+gA_{\sigma\alpha\mu}w^{\sigma}_{\ \beta}$ $-gA_{\sigma\beta\mu}w^{\sigma}_{\ \alpha}$ $+gA_{\alpha\beta\sigma}w^{\sigma}_{\ \mu})$ a interação em primeira ordem é tomada substituindo os campos por suas derivadas funcionais de corrente correspondentes e aplicando-se este termo assim escrito sobre o funcional gerador de ordem zero. Como queremos apenas os gráficos conexos, novamente utilizarei o funcional conexo $\mathcal{W}[j]$ que, na primeira aproximação , levando em conta apenas o que é obtido das interações campo fantasma, campo de Ashtekar fornece.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_1[j] &= g(\frac{\delta}{i\delta\bar{j}_{\alpha\beta}}(\frac{2\delta}{i\delta J^{\sigma[\mu\alpha}}\frac{\delta}{i\delta j_{\sigma}^{\beta]}} \\
&+ \frac{\delta}{i\delta J^{\sigma\alpha\mu}}\frac{\delta}{i\delta j_{\sigma}^{\beta}} \\
&- \frac{\delta}{i\delta J^{\sigma\beta\mu}}\frac{\delta}{i\delta j_{\sigma}^{\alpha}} \\
&+ \frac{\delta}{i\delta J^{\alpha\beta\sigma}}\frac{\delta}{i\delta j_{\sigma}^{\mu}}))
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}[j] &= \int d^4(z) g\, lim_{w\to z}\partial^{\mu}_{(w)}(-\int d^4(y)\varphi^{-1\alpha\beta,\varepsilon\varrho}(w-y) \\
&\times j_{\varepsilon\varrho}(y)(-2\int d^4(x)J^{abc}(x)D_{abc,\sigma\mu[\alpha}(x-z) \\
&\times \int d^4(r)\bar{j}^{\kappa\lambda}(r) \\
&\times \varphi^{-1}{}_{\kappa\lambda,\,\beta]}{}^{\sigma}(r-z) \\
&- \int d^4(x)J^{abc}(x)D_{abc,\sigma\alpha\mu}(x-z) \\
&\times \int d^4(r)\bar{j}^{\kappa\lambda}(r)\varphi^{-1}{}_{\kappa\lambda,\,\beta}{}^{\sigma}(r-z) \\
&+ \int d^4(x)J^{abc}(x)D_{abc,\sigma\beta\mu}(x-z) \\
&\times \int d^4(r)\bar{j}^{\kappa\lambda}(r)\varphi^{-1}{}_{\kappa\lambda,\,\alpha}{}^{\sigma}(r-z) \\
&- \int d^4(x)J^{abc}(x)D_{abc,\alpha\beta\sigma}(x-z)
\end{aligned}
$$

$$\times \int d^4(r)\overline{j}^{\kappa\lambda}(r)\varphi^{-1}{}_{\kappa\lambda,\,\mu}{}^{\sigma}(r-z))) \tag{3.47}$$

De posse do funcional gerador em aproximação de primeira ordem, vemos que o termo de interação possível de ser obtido é dado por:

$$\begin{aligned} < T(\overline{w}^{\varepsilon\varrho}(a)A^{\gamma\lambda\tau}(b)w^{\pi\theta}(c)) > &= \int d^4(z)g(\partial^{\mu}_{(z)}\varphi^{-1\alpha\beta,\varepsilon\varrho}(z-a) \\ &\times (2D^{\gamma\lambda\tau}{}_{\sigma\mu[\alpha}\varphi^{-1\pi\theta,\sigma}{}_{\beta]} \\ &+ D^{\gamma\lambda\tau}{}_{\sigma\alpha\mu}\varphi^{-1\pi\theta,\sigma}{}_{\beta} \\ &- D^{\gamma\lambda\tau}{}_{\sigma\beta\mu}\varphi^{-1\pi\theta,\sigma}{}_{\alpha} \\ &+ D^{\gamma\lambda\tau}{}_{\alpha\beta\sigma}\varphi^{-1\pi\theta,\sigma}{}_{\mu} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Com isto podemos dizer que possuímos todas as regras de Feynmann referentes a esta interação e portanto caso venhamos a estudar interações de ordem mais elevada, basta utilizar a regra de Feynmann daqui obtida como um lego.

Capítulo 4

A Propagação Livre em Três Dimensões

4.1 A propagação livre em três dimensões

Todos os cálculos feitos até o momento são relativos ao problema em quatro dimensões. Que diferença ocorre quando tratamos a questão em dimensões inferiores a quatro? No *Cap*.1, tratamos a Lagrangeana linearizada de forma a obter o propagador livre que, ao ser saturado com as correntes, forneceu-nos os graus de liberdade propagados pela teoria . Uma vez tendo o propagador saturado, comparamos com o análogo obtido da equação de Einstein-Hilbert. Existe um porém neste cálculo, devido à dimensão do sistema calculado a *priori*. Quando escrevemos o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ nós o definimos de forma a ter traço nulo, definição esta absolutamente dependente da dimensão em que o problema está sendo tratado. Então , analisamos o propagador obtido desta Lagrangeana ($\frac{-1}{8}C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$) para $d = 3$. Quantos graus de liberdade estamos propagando desta forma [27] [21] ?

A definição exata do tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ em um número não definido de dimensões é dada por:

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{d-2}(\eta_{\mu[\alpha}R_{\beta]\nu} \\
&- \eta_{\nu[\alpha}R_{\beta]\mu}) + \frac{1}{(d-2)(d-1)}R(\eta_{\alpha[\mu}\eta_{\nu]\beta}),
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

onde a curvatura $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é dada por $A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]}$.

De posse desta definição , antes mesmo de escrever a Lagrangeana, podemos ver que existem problemas quando a dimensão do problema é igual a dois. Sendo a Lagrangeana linearizada escrita na forma "campo operador campo" dada (após conveniente escolha de gauge), temos :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}A_{\alpha\beta\mu}\Box(A^{\alpha\beta\mu} \\
&- \frac{2}{(d-2)}\eta^{\beta\mu}(A^{\alpha\lambda}_{\lambda}))
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Para verificarmos o número de graus de liberdade propagados, simplesmente saturamos o propagador $< T(A^{\alpha\beta\mu}(-k)A^{\lambda\sigma\epsilon}(k)) >$ com as correntes, e estudamos o número de graus de liberdade propagados.

O propagador $< T(A^{\alpha\beta\mu}(-k), A^{\lambda\sigma\epsilon}(k)) >$ em dimensões arbitrárias é dado por:

$$
\begin{aligned}
\frac{-i}{\kappa^2}(\frac{1}{6}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu} &+ \eta^{\beta\gamma}\eta^{\alpha(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu} \\
&- \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} \\
&- \eta^{\beta\gamma}\eta^{\alpha(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu}) \\
&- \frac{1}{2(d-2)}(\eta^{\alpha[\gamma}\eta^{\sigma]\epsilon}\eta^{\beta\mu} \\
&- \eta^{\beta[\gamma}\eta^{\sigma]\epsilon}\eta^{\alpha\mu}))
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Ao acoplarmos este propagador com as correntes, da forma:

$$J_{\alpha\beta\mu}(k) < T(A^{\alpha\beta\mu}(-k), A^{\lambda\sigma\epsilon}(k)) > J_{\gamma\sigma\epsilon}(k) \tag{4.4}$$

obtemos como resposta um termo dependente da dimensão dado por:

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta\mu}(k) &\times < T(A^{\alpha\beta\mu}(-k), A^{\lambda\sigma\epsilon}(k)) > \\ &\times J_{\gamma\sigma\epsilon}(k) = \\ &- \frac{i}{\kappa^2}(J_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} \\ &- \frac{2}{d-2}J_{\alpha\sigma}^{\ \ \sigma}J^{\alpha\sigma}_{\ \ \sigma}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

No Cap um definimos os vetores de base que servem para a expanção das correntes e estes servem perfeitamente para o caso de dimensão $d > 2$; logo, ao analisarmos o imaginário do resíduo do propagador, trataremos de apresentá-lo já descrito em termos desta base definida:

$$Res(\kappa^2 = 0) = -i(J_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} - \frac{2}{d-2}J_{\alpha\sigma}^{\ \ \sigma}J^{\alpha\sigma}_{\ \ \sigma}) \tag{4.6}$$

$$ImRes(\kappa^2 = 0) = 9(m_{ijl}m^{ijl} - \frac{2}{(d-2)}m_{ij}^{\ \ j}m^{ij}_{\ \ j}) \tag{4.7}$$

Definindo $m_{211} = a$ e $m_{122} = b$, obtemos que o imaginário do resíduo é proporcional a:

$$(a, b)\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{d-2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{d-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Como o autovalor duplo, $1 - \frac{1}{d-2}$, depende explicitamente da dimensão , recuperamos o resultado já anteriormente obtido quando a dimensão $d = 4$. Não cabe a análise quando $d = 2$, pois pela definição de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, vemos que este tensor não faz sentido para as dimensões $d = 1$ e $d = 2$. Logo, o autovalor -∞ obtido quando $d = 2$ não descreve nenhum grau de liberdade físico. Esta análise é particularmente interessante para $d = 3$, pois, neste caso, obtemos que não há nenhum grau de liberdade físico propagado. Disto podemos dizer que, utilizando uma Lagrangeana simplesmente do tipo $\frac{-1}{8}C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$ ou $\frac{-1}{8}W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu}$, não iremos obter nenhum grau de liberdade propagado, e consequentemente, nenhuma interação em $d = 3$. No caso da Gravitação de Einstein-Hilbert, obtemos o mesmo efeito em $d = 3$ [31][24][23], que é contornado por meio da inclusão de um termo tipo Chern-Simons. Como a teoria foi construída de forma a ter uma estreita semelhança com o Eletromagnetismo, convém lembrar como ocorre o mecanismo de Chern-Simons para o Eletromagnetismo em três dimensões. Dada a Lagrangeana de Maxwell em $3D$, também se chega o problema de não existirem graus de liberdade propagados. Para corrigí-la, introduzimos um termo invariante que, apesar de conter apenas uma derivada, fornece um propagador de polo $\frac{1}{\kappa^2}$ [27] como veremos a seguir:

$$L = \frac{-1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_{\alpha} + j^{\nu}A_{\nu} \tag{4.9}$$

cuja equação de movimento é $F^{\mu\nu}_{\ \ ,\mu} + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = j^{\nu}$.

Definimos $F^{*\mu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ e reescrevemos a equação de movimento como:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha} F^{*}_{\alpha,\mu} + \mu F^{*\nu} = j^{\nu} \tag{4.10}$$

que multiplicada por $\partial^{\lambda}\epsilon_{\sigma\lambda\nu}$ fornece:

$$\begin{aligned} \partial^{\lambda}(F^{*}_{\sigma,\lambda} &- F^{*}_{\lambda,\sigma} + \mu F_{\sigma\lambda} \\ &= \epsilon_{\sigma\lambda\nu} j^{\nu}) \Rightarrow \partial^{\xi}\partial_{\xi} F^{*}_{\sigma} \\ &- F^{*\,;\lambda}_{\lambda,\sigma} + \mu F_{\sigma\lambda}^{\;;\lambda} \\ &= \epsilon_{\sigma\lambda\nu}\partial^{\lambda} j^{\nu} \end{aligned} \tag{4.11}$$

De posse desta equação , é conveniente lembrar que:

$$\partial_{\nu}(\epsilon^{\mu\nu\alpha} F^{*}_{\alpha,\mu} + \mu F^{*\nu} = j^{\nu}) \tag{4.12}$$

fornece simplesmente $\mu F^{*\nu}_{,\nu} = j^{\nu}_{,\nu}$. Usando as duas equações, obtemos naturalmente o resultado:

$$\begin{aligned} \Box F^{*}_{\sigma} &+ 2\mu^{2} F^{*}_{\sigma} \\ &= (\mu\eta_{\nu\sigma} - \epsilon_{\sigma\nu\lambda}\partial^{\lambda}) j^{\nu} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ao invertermos esta equação de forma a obter o dual de F como um propagador aplicado sobre a corrente, temos:

$$F^*_\sigma = \frac{\mu}{\Box + 2\mu^2}(\eta_{\nu\sigma} - \frac{\epsilon_{\sigma\nu\lambda}}{\mu}\partial^\lambda)j^\nu \tag{4.14}$$

Por meio deste exemplo simples, podemos ver que o termo de Chern-Simons, além de alterar o imaginário do resíduo, também torna o pólo do propagador massivo. O termo de Chern-Simons,conhecido também como termo topológico [21][23], aparece ainda no estudo de anomalias ligadas à matriz $\gamma^{(d+1)}$ como um fenômeno exato [39] (apesar de ter sido descoberto originalmente no contexto de teoria de perturbação), obtido da invariância da medida de integração funcional para férmions.

4.2 O termo de Chern-Simons para o campo $A_{\alpha\beta\mu}$

Da mesma forma que o termo de Chern-Simons para o Eletromagnetismo, a Gravitação de Einstein-Hilbert deve ser invariante perante a simetria apresentada pela Lagrangeana usual. Assim sendo, qualquer termo invariante pela simetria do campo $A_{\alpha\beta\mu}$, que tenha sua contração dada por um termo tipo $\epsilon_{\alpha\beta\mu}$, é, em princípio, um bom termo de Chern-Simons. Comparando ao termo utilizado no Eletromagnetismo [27], uma primeira possibilidade de escolha seria $A_{\alpha\beta\mu}\epsilon^{\alpha\beta}_{\sigma}R^{\sigma\mu}$. Este termo, porém, é não -invariante e deve ser acrescido por outro termo semelhante, de forma a obter um conjunto invariante segundo $\delta A_{\alpha\beta\mu} = w_{\alpha(\beta,\mu)} - w_{\beta(\alpha,\mu)}$ (como se pode notar pelo uso de derivadas comuns, queremos estudar apenas a contribuição para o propagador livre). Tendo em mente que a curvatura $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ e suas contrações são invariantes, a inclusão de termos tipo Chern-Simons necessita apenas de cuidados com a invariância do campo.

Iremos nos concentrar no termo:

$$A_{\alpha\beta\mu}(\epsilon_{\sigma\lambda}^{\ \ \mu}R^{\sigma\lambda\alpha\beta} - \epsilon_{\sigma\lambda}^{\ \ [\beta}R^{\alpha]\mu\sigma\lambda}) \tag{4.15}$$

A Lagrangeana original, $\frac{-1}{8}C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$, é obviamente quem define a dimensão do campo A. Sendo a ação dada pela integral d-dimensional da Lagrangeana, temos em $d = 3$ as seguintes unidades: $[L] = mass^3$ pois $[S] = 0$ $[d^3x] = mass^{-3}$ e a unidade do campo dada por $[A] = mass^{\frac{1}{2}}$.

De posse destes dados, é possível determinar qual a constante que deve multiplicar o termo de Chern-Simons de forma a garantir a dimensionalidade correta para a Lagrangeana. Uma análise simples leva a:

$$[\epsilon] = 0, [A_{\alpha\beta\mu}] = mass^{\frac{1}{2}}, [R_{\alpha\beta\mu\nu}] = mass^{\frac{3}{2}} \tag{4.16}$$

Disto fica determinado que a corrente deve ter dimensão de massa, ficando o termo de Chern-Simons dado por:

$$\mathcal{L}_{cs} = \mu A_{\alpha\beta\mu}(\epsilon_{\sigma\lambda}^{\ \ \mu}R^{\sigma\lambda\alpha\beta} - \epsilon_{\sigma\lambda}^{\ \ [\beta}R^{\alpha]\mu\sigma\lambda}) \tag{4.17}$$

Reconduzindo (5.17) á forma quadrática no campo $A_{\alpha\beta\mu}$, chega-se a

$$\mathcal{L}_{cs}^{(2)} = 4\mu A_{\alpha\beta\mu}S^{\mu\epsilon}A^{\alpha\beta}_{\ \ \epsilon}, \tag{4.18}$$

onde $S^{\mu\epsilon} = \epsilon^{\mu\epsilon}_{\ \ \varrho}\partial^{\varrho}$.

Utilizando o $gauge-fixing$ adequado na Lagrangeana acrescida do termo de Chern-Simons obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}A_{\alpha\beta\mu}(\Box(A^{\alpha\beta\mu} \\
&- \frac{2}{d-2}\eta^{\beta\mu}(A^{\alpha\lambda}_{\ \ \lambda}))) \\
&+ 4\mu A_{\alpha\beta\mu}S^{\mu\epsilon}A^{\alpha\beta}_{\ \ \epsilon} \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Para exemplificar as simetrias contidas nesta Lagrangeana vale exemplificar as simetrias de forma a mostrar a identidade para os tensores de três índices que possuem a simetria cíclica. Os termos desta Lagrangeana podem ser escritos como:

$$
\begin{aligned}
A_{\alpha\beta\mu}\partial^{\mu}\partial_{\mu}A^{\alpha\beta\mu} &= A_{\alpha\beta\mu}\partial^{\mu}\partial_{\mu}\frac{1}{6}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu} \\
&- \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} \\
&+ \eta^{\beta\sigma}\eta^{\alpha(\gamma}\eta^{\epsilon)\mu} \\
&- \eta^{\beta\gamma}\eta^{\alpha(\sigma}\eta^{\epsilon)\mu})A_{\gamma\sigma\epsilon} \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

$$
A_{\alpha\beta\mu}\partial^{\mu}_{\mu}A^{\alpha\beta\mu} = A_{\alpha\beta\mu}\partial^{\mu}_{\mu}(1)^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon}A_{\gamma\sigma\epsilon} \qquad (4.21)
$$

$$
\begin{aligned}
A_{\alpha\sigma}^{\ \ \sigma}\frac{-2}{(d-2)}\Box A^{\alpha\sigma}_{\ \ \sigma} &= A_{\alpha\beta\mu}\Box(\frac{-2}{d-2})\frac{1}{4}(\eta^{\alpha[\gamma}\eta^{\sigma]\epsilon}\eta^{\beta\mu} \\
&- \eta^{\beta[\gamma}\eta^{\sigma]\epsilon}\eta^{\alpha\mu})A_{\gamma\sigma\epsilon} \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

$$
A_{\alpha\sigma}^{\ \ \sigma}\frac{-2}{(d-2)}\Box A^{\alpha\sigma}_{\ \ \sigma} = A_{\alpha\beta\mu}\Box(\frac{-2}{d-2})(T)^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon}A_{\gamma\sigma\epsilon} \qquad (4.23)
$$

O termo de Chern-Simons fornece como operador associado :

$$
\begin{aligned}
(CS)^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon} &= \frac{1}{8}(\eta^{\beta\gamma}\eta^{\alpha(\sigma}S^{\epsilon)\mu} \\
&- \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta(\sigma}S^{\epsilon)\mu} \\
&- \eta^{\beta\sigma}\eta^{\alpha(\gamma}S^{\epsilon)\mu} \\
&+ \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta(\gamma}S^{\epsilon)\mu})
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Assim, reescrevemos a Lagrangeana (já com o gauge fixado) na forma :

$$
A_{\alpha\beta\mu}(\Box((1) - \frac{2T}{d-2}) + \mu(CS))^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon}A_{\gamma\sigma\epsilon} \tag{4.25}
$$

Como, ao montarmos a Lagrangeana, retiramos o traço do tensor de curvatura, devemos tomar também uma unidade que leve em conta este fato. Tal unidade é dada em termos da anterior e do tensor T da forma $(1') = (1) - \frac{2T}{d-2}$.

De posse destes dados, lembrando que o projetor S é justamente o projetor de Chern-Simons para vetores, obtemos o propagador dado por:

$$
\begin{aligned}
(D^{-1})^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon} &= (\frac{1}{\Box + \frac{3}{8}\mu^2})(1') \\
&- \frac{\mu}{\Box}(CS))^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon}
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

Para que o pólo seja do tipo $\Box + m^2$, devemos redefinir a massa no termo de Chern-Simons da forma $\mu \rightarrow (\frac{8}{3})^{\frac{1}{2}}m$, e o propagador passa a ser escrito como:

$$(D^{-1})^{\alpha\beta\mu,\gamma\sigma\epsilon} = (\frac{1}{\Box + m^2})(1') - (\frac{8}{3})^{\frac{1}{2}}\frac{(CS)}{\Box}) \quad (4.27)$$

Acoplando-se as correntes ao propagador para procedermos à análise de unitariedade, obtemos :

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta\mu}(-k) < A^{\alpha\beta\mu}(-k), A^{\gamma\sigma\epsilon}(k) > J_{\gamma\sigma\epsilon}(k) &= \frac{-i}{\kappa^2 - m^2}(J_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} \\ &- \frac{2}{d-2}J_{\alpha\lambda}^{\ \lambda}J^{\alpha\sigma}_{\ \ \sigma} \\ &- 4(\frac{8}{3})^{\frac{1}{2}}J_{\alpha\beta\mu}\epsilon^{\mu}_{\ \sigma\lambda}\frac{k^\lambda}{\kappa^2}J^{\alpha\beta\sigma}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Isto irá fornecer um imaginário do resíduo, no polo $\kappa^2 = m^2$, dado por:

$$\begin{aligned} ImRes &= -J_{\alpha\beta\mu}J^{\alpha\beta\mu} \\ &+ \frac{2}{d-2}J_{\alpha\lambda}^{\ \lambda}J^{\alpha\sigma}_{\ \ \sigma} \\ &+ 4(\frac{8}{3})^{\frac{1}{2}}J_{\alpha\beta\mu}\epsilon^{\mu}_{\ \sigma\lambda}\frac{k^\lambda}{\kappa^2}J^{\alpha\beta\sigma} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Uma vez definido o termo de Chern-Simons no propagador, e obtido um pólo massivo, devemos rever os vetores de base utilizados para expandir as correntes. Apesar do polo ser massivo, esta massa não é uma massa no sentido de Poincaré. Sendo esta massa topológica os vetores de base devem possuir $k^\mu k_\mu = 0$ pois estes refletem apenas a invariância de Poincaré. Os vetores LI que podem satisfazer claramente esta base são :

$$k^\mu = (k^0, k^i) : \tilde{k}^\mu = (k^0, -k^i) : \epsilon^\mu = (0, \epsilon^i) : i = (1, 2) \quad (4.30)$$

$$\epsilon^\mu k_\mu = 0 : \epsilon^\mu \tilde{k}_\mu = 0 : k_\mu k^\mu = 0 : \tilde{k}_\mu \tilde{k}^\mu = 0 : \epsilon^\mu \epsilon_\mu = -1 \tag{4.31}$$

O tensor de corrente que obedece a todas as simetrias e ainda a invariância de gauge é dado por:

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta\mu}(k) &= e(k)(k_\alpha k_{(\beta}\epsilon_{\mu)} - (k_\beta k_{(\alpha}\epsilon_{\mu)}) \\ &+ f(k)(k_\alpha \epsilon_{(\beta}\epsilon_{\mu)} - (k_\beta \epsilon_{(\alpha}\epsilon_{\mu)}) \\ &+ g(k)(\tilde{k}_\alpha \tilde{k}_{(\beta}\epsilon_{\mu)} - (\tilde{k}_\beta \tilde{k}_{(\alpha}\epsilon_{\mu)}) \\ &+ h(k)(\tilde{k}_\alpha \epsilon_{(\beta}\epsilon_{\mu)} - (\tilde{k}_\beta \epsilon_{(\alpha}\epsilon_{\mu)}) \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$J_{\alpha\mu}^{\ \ \mu}(k) = f(k)(-2k_\alpha) + h(k)(-2\tilde{k}_\alpha) \tag{4.33}$$

Pode parecer estranho à primeira vista fazer $k^\mu k_\mu = 0$ nos vetores de base se o polo é $k^\mu k_\mu = m^2$ porém, esta massa é topológica e não advem do Grupo de Lorentz. O *shift* feito no polo se deve a uma quebra da invariância topológica que, embora afete o propagador quântico, não tem ligação direta com a massa como autovalor de Poincaré. O termo de traço da corrente fornece:

$$J_{\alpha\mu}^{\ \ \mu} J^{\alpha\nu}_{\ \ \nu} = -4(f(-k)h(k) + h(-k)f(k))\tilde{k}^\alpha k_\alpha \tag{4.34}$$

Já o termo de Chern-Simonss não contribui para a unitariedade. Como se pode ver, este resíduo pode ser escrito, devido à simetria, da forma:

$$ImRes = -\frac{8}{d-2} f(-k)h(k)\tilde{k}^{\alpha}k_{\alpha} \tag{4.35}$$

Este único autovalor define a ocorrência de apenas um grau de liberdade propagado, tal e qual a própria gravitação de Einstein-Hilbert acrescida do termo de Chern-Simons correspondente. Vemos então que o termo de Chern-Simons permite à teoria propagar um grau de liberdade em $d = 3$. Este estudo em dimensões inferiores à do espaço-tempo usual permite formar idéias para o estudo da teoria mesmo em $d = 4$. Por fim, um estudo sobre os termos topológicos pode ainda ser feito mediante a análise das anomalias ligadas à invariância da medida fermiônica em quaisquer dimensões, em $d = 4$, na teoria de Einstein-Hilbert para o spin 2 aparece o termo de Pontriaguin [39], que fornece então uma explicação para os termos topológicos em função da existência de neutrinos.

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Conclusão

Desenvolvemos uma teoria que, como demonstramos no cap 1, permite a propagação de uma partícula sem massa com dois graus de liberdade associados ao spin 2 propagado em 4 D. Utilizando o método de uma "derivada covariante generalizada", introduzimos uma forma de interação que demonstrou ser bastante interessante no caso de auto-interação , gerando termos semelhantes ao caso de Yang-Mills. Estas auto-interações fornecem um "Power-Counting" favorável á teoria, desde que não utilizemos este método para acoplamentos com outras Lagrangeanas que tenhão saído de um princípio de gauge. Verificamos que a interação com férmions dá-se através do traço do tensor $A_{\alpha\beta\mu}$, que representa a componente de spin 1 do campo, de forma que ao usarmos tal teoria para descrever a gravitação , seríamos incapazes de ao nos utilizarmos de um detector material distinguirmos as ondas gravitacionais de ondas eletromagnéticas fracas. Tal qual a interação eletromagnética, nesta teoria, os férmions são capazes apenas de observar a componente de spin-1 do campo, desta forma uma onda gravitacional seria indistinguivel dentro do ruído eletromagnético que um tal detetor capta-se de uma fonte qualquer. No caso da interação com o eletromagnetismo, a proposta de interação falha por introduzir uma quebra explícita da simetria apresentada pelo fóton, criando um termo equivalente a uma "massa dependente do campo $A_{\alpha\beta\mu}$". Tal problema poderia sugerir que estaa interação no caso do fóton se faz por recorrência, e deveria ser analisada mais a fundo antes de ser descartada. O mesmo caso ocorre para o campo de spin zero, onde se faz necessário introduzir um campo antissimétrico de gauge para descrever o spin zero. Novamente temos uma "massa dependente do campo" que quebra explícitamente a simetria de gauge. Finalizando demonstramos que um terma topológico éfacilmente introduzido para dar conta de propagação quando a teoria é definida em três dimensões. Encontramos a matriz de resíduos e vimos que tal qual a gravitação de Einstein Chern-Simmons, em 3 D, apenas um grau de liberdade é propagado, com a vantagem de termos desenvolvido um termo topológico mais simples que o da gravitação usual. Por fim, mesmo que esta tese não esgote o tema e, embora existam nela certos fatos normalmente discutíveis em teoria de campos, seus resultados são em geral bastante interessantes para a comologia e, principalmente, para a possibilidade de detecção de ondas gravitacionais.

Apêndice A
Unitariedade, Causalidade e Resíduo de Propagador

5.2 Unitariedade, Causalidade e Resíduos

A unitariedade da matriz S reflete o princípio fundamental da conservação de probabilidade. Apesar de introduzirmos em certas circuntâncias o dispositivo artificial de uma métrica indefinida no espaço de Hilbert, as quantidades físicas sempre se referem a estados com norma positiva, preservando a propagação normal no tempo. Desenvolvimentos formais não devem obscurecer este fato, refletido em um número de relações. O protótipo disto é o Teorema Ótico de Bohr, Peiers e Placzek. Sendo a matriz S dada por $S = 1 + iT$, onde T é a matriz de transição entre os estados final e inicial, devido à imposição de que o produto de matrizes S seja igual à unidade, temos:

$$S^{\dagger}S = 1 = 1 + i(T^{\dagger} - T) + T^{\dagger}T \tag{A.1}$$

De acordo com a transformação de Fourier que permite relacionar estados $|i, in>$ com estados $|p_1, p_2, in>$, temos:

$$|i, in> = \int \frac{d^3p_1}{2p_1^0(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{2p_2^0(2\pi)^3} f_1(p_1)f_2(p_2)|p_1, p_2, in> \quad (A.2)$$

E, além disto, tendo em vista que a transição de probabilidade é dada por:

$$W_{fi} = | < f, out|i, in > |^2 = | < f, out|S|i, in > |^2 \quad (A.3)$$

podemos escrever a matriz de transição como:

$$< f|T|i > = (2\pi)^4\delta^4(pf - pi) < f|\mathcal{T}|i > \quad (A.4)$$

O operador reduzido T atua sobre a camada de energia. Tomando a relação advinda da unitariedade de $S^\dagger S$, obtemos:

$$i(T - T^\dagger) = T^\dagger T \quad (A.5)$$

Usando as duas relações acima obtemos o Teorema Ótico, dado por:

$$(\mathcal{T}_{fi} - \mathcal{T}_{fi}^*) = i\Sigma_n(2\pi)^4\delta^4(pn - pi)\mathcal{T}_{nf}^*\mathcal{T}_{ni}s \quad (A.6)$$

$$\mathcal{T}_{ni} = < n|\mathcal{T}|i > \quad (A.7)$$

Envolvendo uma soma sobre todos os possiveis estados $|n>$ acoplados a $|i>$ e $|f>$. Em casos práticos o processo de espalhamento é iniciado por um estado de dois corpos. Concentremo-nos em um espalhamento elástico de dois corpos. Generalizando esta definição nós assumiremos que as partículas possuem numeros quânticos associados às suas leis de conservação , números quânticos estes discretos ou contínuos. Por simplicidade nós ignoraremos o caso de partículas idênticas. Faremos $|f>=|i>$ no Teorema Ótico, que corresponde ao *forward scattering*, com spin e variáveis internas iguais nas configurações final e inicial. Nós assumiremos a ausência de forças de longo alcance. O lado direito é relacionado com a seção de choque total $\sigma_{tot}(i)$ acrescida de um fator de fluxo contribuído do estado inicial. Para ser específico denotaremos por (ma,sa) e (mb,sb) as massas e spins das partículas iniciais. Da relação entre a seção de choque e a matriz T temos:

$$d\sigma = (2\pi)^4\delta(pf - \tilde{p_1} - \tilde{p_2})\frac{1}{4m_2|p_1|}| < f|\mathcal{T}|\tilde{p_1}, \tilde{p_2} > |^2 \tag{A.8}$$

Esta relação pode ser escrita absolutamente na base discreta como:

$$\sigma_{tot}(i) = \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s, ma^2, mb^2)}\Sigma_n(2\pi)^4\delta^4(pn - pi)\mathcal{T}^*_{ni}\mathcal{T}_{\ni} \tag{A.9}$$

$$\lambda(x1, x2, x3) = (\Sigma_{l=1}^3(x_l)^2) - 2\Sigma_{l=1}^3\epsilon_{lab}x_a x_b \tag{A.10}$$

Usando esta relação no Teorema Ótico obtemos a expressão :

$$Im\mathcal{T}_{ii} = \lambda^{\frac{1}{2}}(s, ma^2.mb^2)\sigma_{tot}(i) \tag{A.11}$$

Como neste caso discreto a substituição para uma base contínua de tipo usado em teoria quântica dos campos seria passar da base $|i>$ para a base $|\vec{k}>$, substituiríamos

ImT_{ii} por $ImRes < k|T|k >$ e $\sigma_{tot}(i)$ por $\sigma_{tot}(k)$.

Voltando ao caso discreto, assuiremos que as polarizações do estado inicial são invariantes sobre rotação sobre o momentum incidente. A seção de choque elástico deve ser integrada sobre o ângulo azimutal e expressa em termos do $momentumtransfer$ t, e do cosseno do ângulo de espalhamento. No processo $A + B \to A + B$ (definidos por $(pa, pb) \to (p\hat{a}, p\hat{b})$ respectivamente, o momento final e inicial) satisfazem a conservação de energia-momento ($pa + pb = p\hat{a} + p\hat{b}$).

As variáveis de Mandelstam são definidas por:

$$s = (pa + pb)^2 = (p\hat{a} + p\hat{b})^2 \tag{A.12}$$

$$t = (pa - p\hat{a})^2 = (pb - p\hat{b})^2 \tag{A.13}$$

$$u = (pa - p\hat{b})^2 = (pb - p\hat{a})^2 \tag{A.14}$$

$$s + t + u = 2(ma^2 + mb^2) \tag{A.15}$$

A seção de choque diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt}(s,t) = \frac{|\mathcal{T}(s,t)|^2}{16\pi\lambda(s, ma^2, mb^2)} \tag{A.16}$$

O $forward\ scattering$ é caracterizado por $t = 0$ e $\mathcal{T}(s, 0)$ consequentemente:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt}(s,0) = \frac{1}{16\pi}(\frac{(Re\mathcal{T})^2}{\lambda(s, ma^2, mb^2)} + \sigma_{tot}^2(i)) > \frac{\sigma_{tot}^2(i)}{16\pi} \tag{A.17}$$

Em colisões a altas energias o que ocorre é o domínio da parte imaginária do *forward scattering* sobre a parte real. Neste caso, a equação anterior serve para normalizar a seção de choque diferencial, assumindo que a seção de choque total seja bem conhecida.

Apêndice B
Analogia de integrais com Faddeev-Popov

5.3 Analogia de integrais com Faddeev-Popov

Suponha que S é dado como função de $m + n$ variáveis reais $x_i(i = 1, \rightarrow, m + n)$ porém S depende das variáveis finais $(x_1, \rightarrow x_m)$. As variáveis $(x_{m+1}, \rightarrow x_{m+n})$ modelam as componentes transversas do campo de gauge e as variáveis $(x_1, \rightarrow x_m)$ modelam os componentes longitudinais bem como S modula a ação .

$\mathcal{Z} = \int dx_1 \rightarrow \int dx_{m+n} e^{iS}$ modela o funcional gerador sem fontes e tornar-se-ia infinito porque S não depende de todas as variáveis de integração (as integrais são entendidas como sendo de - ∞ a + ∞).

Consideremos $\not{\mathcal{Z}} = \int dx_{m+1} \rightarrow \int dx_{m+n} e^{iS}$ que contém integrações somente nas variáveis das quais S depende e assumimos que esta integral é finita, após continuação no espaço de Euclides.

Fazendo $x_i = f_i(x_{m+1}, \rightarrow x_{m+n})$ $(i = 1, \rightarrow m)$ que define uma superfície arbitrária (dada acima como uma função igual a zero, $Fi(x_1, \rightarrow x_m, x_{m+1}, \rightarrow x_{m+n}) = 0$) temos:

$$\not{\mathcal{Z}} = \int \Pi_{i=1}^{n} dx_{m+i} \Pi_{j=1}^{m} dF_j e^{iS} \Pi_{k=1}^{m} \delta(F_k) \tag{B.18}$$

Trocando as variáveis $F_1, \rightarrow F_m$ por $x_1, \rightarrow x_m$ lembre-se que :

$$Fi(x_1, \rightarrow x_m, x_{m+1}, \rightarrow x_{m+n}) = 0 (i = 1, \rightarrow m) \tag{B.19}$$

Obtemos então :

$$\begin{aligned} \not{Z} &= \int \Pi_{i=1}^{m+n} dx_i e^{iS} det(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}) \\ &\times \Pi_{l=1}^{m} \delta(F_l) \end{aligned} \tag{B.20}$$

As deltas de Dirac nos forçam a avaliar o determinante somente sobre a superfície definida por $Fi(x_1, \rightarrow x_{m+n})$ igual a zero. A quantização de Faddeev-Popov [38] para campos de gauge é análoga à integral acima.

Apêndice C
Projetores de Barnes-Rivers

5.4 Projetores de Barnes-Rivers

Da mesma forma que usamos os projetores para campos de um índice ao inverter os operadores diferenciais do termo livre da Lagrangeana, também temos os projetores de campos de dois índices que são usados tanto para campos simétricos como antissimétricos. Descreveremos a obtenção do propagador por meio destes. Os projetores para campos de um índice [34] de espaço-tempo são :

$$\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{\Box} \tag{C.21}$$

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{\Box} \tag{C.22}$$

Estes projetores obedecem às seguintes relações:

$$\theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \tag{C.23}$$

$$\theta^{\mu\nu}\theta_{\nu\alpha} = \theta^{\mu}_{\alpha} \tag{C.24}$$

$$\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\alpha} = \omega^{\mu}_{\alpha} \tag{C.25}$$

Estes projetores são comumente usados para se obter os propagadores dos campos vetoriais de gauge. O projetor $\theta^{\mu\nu}$ é normalmente chamado de *projetor transverso* e $\omega^{\mu\nu}$ de *projetor longitudional*; é fácil ver que tal nomenclatura se deve à expansão do campo A^μ da forma:

$$A^\mu = (\theta_\mu^{\ \nu} + \omega_\mu^{\ \nu})A_\nu \tag{C.26}$$

E se reduz a:

$$\Box\theta^{\alpha\mu}\theta_\mu^{\ \nu}A_\nu = \Box\theta^{\alpha\nu}A_{nu} \tag{C.27}$$

Os projetores para campos de dois índices já existem em maior número e estão relacionados de forma a cobrir tanto a unidade simétrica quanto a antissimétrica. Estão divididos por spin (que se apresenta como o número superior entre parênteses) e por letras que representam as suas relações com os trivetores obtidos ao realizar derivações sobre estes campos.

A tabela multiplicativa destes projetores será tomada da forma $(P_j^{(i)})_{\mu\nu,\varrho\sigma}$:

$$P_{\mu\nu}^{\ \ \varrho\sigma}P_{\varrho\sigma,\kappa\lambda} \propto P_{\mu\nu,\kappa\lambda} \tag{C.28}$$

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
P^{(2)}P^{(2)} &=& P^{(2)} + \frac{(d-4)}{3}P_s^{(0)} & P_m^{(1)}P_m^{(1)} &=& P_m^{(1)} \\
P^{(2)}P_s^{(0)} &=& \frac{(d-4)}{3}P_s^{(0)} & P_s^{(0)}P^{(2)} &=& \frac{(d-4)}{3}P_s^{(0)} \\
P^{(2)}P_{sw}^{(0)} &=& \frac{(d-4)}{3}P_{sw}^{(0)} & P_{ws}^{(0)}P^{(2)} &=& \frac{(d-4)}{3}P_{ws}^{(0)} \\
P_s^{(0)}P_s^{(0)} &=& \frac{(d-1)}{3}P_s^{(0)} & P_w^{(0)}P_w^{(0)} &=& P_w^{(0)} \\
P_s^{(0)}P_{sw}^{(0)} &=& \frac{(d-1)}{3}P_{sw}^{(0)} & P_{ws}^{(0)}P_s^{(0)} &=& \frac{(d-1)}{3}P_{ws}^{(0)} \\
P_{sw}^{(0)}P_w^{(0)} &=& P_{sw}^{(0)} & P_w^{(0)}P_{ws}^{(0)} &=& P_{ws}^{(0)} \\
P_{sw}^{(0)}P_{ws}^{(0)} &=& P_s^{(0)} & P_{ws}^{(0)}P_{sw}^{(0)} &=& \frac{(d-1)}{3}P_w^{(0)}
\end{array} \tag{C.29}$$

$$P^{(2)}_{\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{mu\sigma}\theta_{nu\lambda} + \theta_{mu\lambda}\theta_{nu\sigma}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\sigma\lambda} \tag{C.30}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{mu\sigma}\omega_{nu\lambda} + \theta_{mu\lambda}\omega_{nu\sigma} + \theta_{nu\sigma}\omega_{mu\lambda} + \theta_{nu\lambda}\omega_{mu\sigma}) \tag{C.31}$$

$$P^{(0)}_{(s)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\sigma\lambda} \tag{C.32}$$

$$P^{(0)}_{(w)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \omega_{\mu\nu}\omega_{\sigma\lambda} \tag{C.33}$$

$$P^{(0)}_{(sw)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\sigma\lambda} \tag{C.34}$$

$$P^{(0)}_{(ws)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\sigma\lambda} \tag{C.35}$$

$$P^{(1)}_{(l)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{mu\sigma}\omega_{nu\lambda} - \theta_{mu\lambda}\omega_{nu\sigma} - \theta_{nu\sigma}\omega_{mu\lambda} + \theta_{nu\lambda}\omega_{mu\sigma}) \tag{C.36}$$

$$P^{(1)}_{(b)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{mu\sigma}\theta_{nu\lambda} - \theta_{mu\lambda}\theta_{nu\sigma}) \tag{C.37}$$

$$P^{(1)}_{(lm)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{mu\sigma}\omega_{nu\lambda} + \theta_{mu\lambda}\omega_{nu\sigma} - \theta_{nu\sigma}\omega_{mu\lambda} - \theta_{nu\lambda}\omega_{mu\sigma}) \tag{C.38}$$

$$P^{(1)}_{(ml)\mu\nu,\sigma\lambda} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{mu\sigma}\omega_{nu\lambda} - \theta_{mu\lambda}\omega_{nu\sigma} + \theta_{nu\sigma}\omega_{mu\lambda} - \theta_{nu\lambda}\omega_{mu\sigma}) \tag{C.39}$$

Referências

[1] Bade, W. L "*An Introduction to Spinors* . "Rev. Mod. Phys. **25** , 714 (1953).

[2] Corson, E. M. "*Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations.* "Zeitschrift für Physik **145** , 611 (1956).

[3] Bargmann, H. e Wigner, E. B. ". " Proc. Nat. Acad. Sci. **34(5)** , 211 (1946).

[4] Dirac, P. A. , Pauli, W. e Fierz , M. ". "Phys. Roy. Soc. A , **155** , 447 (1936).

[5] Fierz, M. ". "Helv. Phys. Acta. , **12** , 3 (1939).

[6] Fierz, M. e Pauli, W. ". "Proc. Roy. Soc. A , **173** , 211 (1939).

[7] Ashtekar, A. "*New Variables for Classical and Quantum Gravity* . " Phys. Rev. Lett , **57** , 2244 (1986).

[8] Ashtekar, A. "*New Hamiltonian Formulation of General Relativity.* " Phys. Rev. Lett. D , **36** , 1587 (1987).

[9] Samuel, J. "*A lagrangean Basis for Ashtekar's reformulation of Canonical Gravity.* " Pramãna J Phys. **28** , 429 (1987).

[10] Jacobson, T. , Smolin, L. "*Covariant Action for Ashtekar's form of Canonical Gravity.*" Class Quantum Grav. **5** , 583 (1988).

[11] Capovilla, R. ,Dell, J e Jacobson, T. "*General Relativity Without a Metric.*" Phys Rev. Lett , **63** , 2325 (1989).

[12] Capovilla, R. ,Dell, J e Jacobson, T. "*A pure Spin Connection Formulation of Gravity.*" Class Quantum Grav. **8** , 59 (1991).

[13] Peldán, Peter. "*Legendre Transformis in Ashtekar's Theory of Gravity.*" Class Quantum Grav. **8** , 1765 (1991).

[14] Novello, M. ,Neto, N.P. "*The Theory of Gravity in Fierz Variables (The Linear Case).*" Fortschr. Phys. 40 **8** , 173 (1992).

[15] Novello,M. ,Neto, N. P. "*Quantization of Spin-Two Field in Terms of Fierz Variables (the linear Case).*" Fortschr. Phys. 40 **3** , 195 (1992).

[16] Bampi, F. ,Caviglia, G. "*Third Order Tensor Potencials For The Riemann and Wey Tensors.*" General Reativity and Gravitation. 15 **4** , 375 (1983).

[17] Lanczos, C. "*The Splitting of the Riemann Tensor.*" Rev . Mod Phys **34** , 379 (1962).

[18] Nieuwenhuizen, P.V . "*On Ghost Free Lagrangians and Linearized Gravitation.*" Nuclear Phys B **60** , 478 (1973).

[19] Solloviev, O. "*How Canonical are Ashtekar's Variable's.*" Phys Letter B **292** , 30 (1992).

[20] Ramond, P. "*Field Theory A Modern Primer .*".

[21] Yang, Z. , Deser, S. "*Is Topologically Massive Gravity Renormalizable.*" Class Quantum Gravity **7** , 1603 (1990).

[22] Adler, S.L. "*Einstein Gravity as a Symmetry Breaking Effect in Quantum Field Theory.*" Review of Modern Physics 54 **3** , 729 (1982).

[23] Witten, E. "*Topological Quantum Field Theory.*" Commun Math Phys **117** , 353 (1988).

[24] Deser, S. "it Equivalence Principle Violation Antigravity and Anyons Induced by Gravitational Chern-Simmons Coupling. "Class Quantum Gravity **9** , 61 (1992).

[25] Neto, N . P. "*Teoria da Gravitação em termos das Variáveis de Fierz.* "Tese de Doutorado , CBPF (1988) .

[26] Rovelli C. "*Constraint Algebra in General Relativity.* "Nuovo Cimento B **331** 80 (1990).

[27] Deser Jackiw e Templeton "*Topologically Massive Gauge Theories.* "Annals of Phys **140** 372 (1982) .

[28] Luciane, R.F. "*Campos de Spin 2 , Variáveis Fundamentais, A Proposta de Fierz.* " Tese de Doutorado , CBPF (1991) .

[29] Fustero, X. "*Einstein Gravitation as a Gauge Theory of the Lorentz Group.* "Physical Reaview D , V 31 **12** 3144 .

[30] Eguchi, T. "*Gravitation, Gauge Theries and Differential Geometry.* "Physics Report 66 **6** 213 (1980).

[31] Deser, S. "*Gravitational Anyons.* "Physical Review Letters **64** 611 (1990) .

[32] Novozhilov "*Introduction to Elementary Particle Theory.* " Cap 3,4,5.

[33] Popov, V. N. "*Functional Integrals in Quantum Field Theory.* "

[34] Bailin, D. e Love, A. "*Introduction to Gauge Field Theory.* "

[35] Itzykson, C. e Zuber, J. B. "*Quantum Field Theory.* "

[36] Berezin, F. A. "*The Method of Second Quantization.* "

[37] Yang, C. N. e Mills, R. L. Phys Rev **96** 191 (1954).

[38] Faddev, L. D. e Popov, V. N. Phys Lett **25 B** 29 (1967).

[39] Fujikawa, K. "*Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories.* " Phys Rev Letter **42** 1195 (1979).

"RUMO A UMA TEORIA UNITÁRIA ALTERNATIVA PARA A GRAVITAÇÃO: NOVAS INTERAÇÕES E SEMELHANÇA COM A TEORIA DE EINSTEIN - HILBERT"

VITOR EMANUEL RODINO LEMES

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Maurício Ortiz Calvão

Mário Novello

Ívano Damião Soares - Suplente

Rio de Janeiro, 01 de julho de 1993