

TESE DE
MESTRADO

ASPECTOS QUÂNTICOS
DE GRAVITAÇÃO TOPOLOGICAMENTE
MASSIVA EM $D=(1+2)$

Gentil Oliveira Pires.

DEPARTAMENTO DE CAMPOS E PARTÍCULAS,
CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS.

Rio de Janeiro, Junho de 1993.

À Adriana.

QUEM DUVIDARÁ DAS MÁΣ CONSEQUÊNCIAS QUE ADIVIRÃO DO FATO : DE INTELIGÊNCIAS CRIADAS LIVRES POR DEUS SEREM OBRIGADAS A SE SUBMETEREM SERVILMENTE A UMA VONTADE EXTERNA? DE SERMOS ENSINADOS A RENEGAR NOSSAS INTUIÇÕES E SUBMETÊ-LAS AO CAPRICO DE OUTROS? DE PESSOAS SEM COMPETÊNCIA SEREM ARVORADAS EM JUÍZES DE COMPETENTES E TEREM AUTORIDADE ASSEGURADA PARA TRATÁ-LAS A SEU ARBÍTRIO? ESTAS SIM, SÃO INOVAÇÕES CAPAZES DE ARRUINAR COMUNIDADES E SUBVERTER O ESTADO.

Galileo Galilei.

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. José Abdalla Helayël-Neto, por toda a dedicação, com sua consciente e dinâmica orientação, amizade, como ser humano ímpar, e estímulo, no que tange à este trabalho e ao meu futuro profissional. Seus ensinamentos, tanto de Física, como de vida, sempre farão parte de minhas lembranças e procurarei seguir seu exemplo de trabalho didático e acadêmico sempre que não for impossível.

À Adriana J. Simonato que, como se não bastasse o seu amor nestes últimos quatro anos, e toda a sua dedicação, sempre me motivando para o trabalho e principalmente para a vida, ainda teve o cuidado e o carinho de desenhar as figuras desta tese, como talentosa arquiteta que é, mesmo sem os instrumentos mais adequados. A ela, que é minha inspiração, eu dedico todo o meu amor !

Agradeço à minha família, Gentil R. Pires, meu pai, Lúcia da C. O. Pires, minha mãe, Luiz Fernando O. Pires, meu irmão, Luiz Augusto Pires, meu avô, Isabel de C. P. Pires, minha avó (in memorian), meus tios, primos, sôgros, cunhadas, enfim todos os meus parentes por todas as horas de paciência e compreensão dedicadas a mim nestes dois últimos anos. Em especial, gostaria de expressar, a meu pai, minha mãe e meu irmão, todo o amor e carinho que dedico a eles.

Ao meu amigo e companheiro de trabalho Carlos Pinheiro por todas as discussões empolgadas sobre este trabalho, por mais tantas sobre gravitação e cosmologia e por sua sensibilidade em todas as conversas a respeito da vida de cada um de nós.

Agradeço ao Grupo de Física Teórica da Universidade Católica de Petrópolis, Prof. Renato Dória, Prof José A. Helayël-Neto, Fernando A. B. Rabelo de Carvalho, Jorge, Flávio, Alexandre, Eliane, e todos os outros que sempre me

proporcionaram todas as facilidades tanto em seus cursos de Pós-graduação quanto do uso das facilidades computacionais únicas para quem trabalha com Física de Altas Energias.

Agradeço, também, aos colegas do Departamento de Campos e Partículas do CBPF, Sebastião A. Dias, José Luiz M. Valle, Marco A. Andrade, Marcelo Carvalho, Luiz P. Colato, Maria Natália, Oswaldo M. Del Cima, Álvaro Nogueira, Marcello Barbosa, Júlio, Renan e Olivier Stora por todas as discussões, seminários e principalmente pela amizade de cada um.

Gostaria de expressar minha gratidão aos Prof's João Barcelos Neto e Takeshi Kodama, âmbos da UFRJ, por todos os ensinamentos de Física que me proporcionaram em seus cursos.

Sou grato à amizade de todos os colegas de Pós-graduação do CBPF, Flávio, Celina, Antônio, Moysés, Wagner, Filipe, André, Ladário, Javier e outros que contribuíram para este trabalho de forma indireta; em especial à Liana Macedo e Claudio Sasaki, dois grandes amigos.

Ainda agradeço aos membros do CBPF, Prof. João Carlos dos Anjos, diretor adjunto, Prof. J.J. Giambiagi, Rosângela, secretária do DCP, Luiz Reis, Dona Agostinha, e aos membros do CAT.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Sumário

1	Estendendo os Operadores de Barnes-Rivers para a Gravitação Topológica em $D=3$.	8
2	Análise a 1-Loop da Auto-Energia do Fóton Acoplado à Gravitação 3D.	20
3	Cálculos Explícitos da correção a 1-Loop da Auto-Energia do Fóton Acoplado à Gravitação 3D.	29
3.1	Integrais Independentes no Gráfico da Fig.(2.b):	30
3.2	Integrais Independentes do Gráfico da Fig.(2.a):	31
3.2.1	Soluções das Integrais I_1 a $I_{20,h}$:	35
3.2.2	Teste de transversalidade dos gráficos da Fig.(2.a) e (2.b):	42
3.2.3	Busca dos termos que geram massa dinamicamente para o fóton:	43
	Apêndice A	45

Introdução

Atualmente, o estado satisfatório de compreensão das interações fundamentais da Natureza propiciada pela formulação com base nas teorias de gauge constitui um forte apelo ao programa de quantização do campo gravitacional. Isto porque o programa de gauge tem-se mostrado altamente eficiente na descrição das interações eletromagnéticas, nuclear forte e nuclear fraca. Por outro lado, a busca de uma teoria grande-unificada para as 4 interações só fará completo sentido a partir do momento em que o programa de quantização da interação gravitacional tiver atingido o mesmo status de compreensão e consistência como no caso das demais forças.

No início dos anos '30, Heisenberg e outros já indicavam que a dimensionalidade da constante de Planck, definida como a constante de acoplamento gravitacional, levaria a problemas de divergências ultravioleta no tratamento quântico. Os trabalhos iniciais apareceram no final da década de '30 com Rosenfeld, Fierz e Pauli, que trataram a gravitação como uma teoria de gauge descrevendo um campo de spin-2, não-massivo, como o limite de campo fraco da teoria de Einstein.

Neste contexto, interpretações confusas quanto ao significado de se quantizar a geometria e sobre o que um operador métrico guardaria de significado geométrico perdem sentido, pois a geometria clássica somente é efetivamente válida quando estabelecida no limite a baixas energias, da teoria perturbativa.

O moderno programa da gravitação quântica, nascido nos anos '70, teve grande im-

pulso a partir dos trabalhos de Deser, 't Hooft, Veltman, Isham, van Nieuwenhuizen, Ferrara e outros [1, 2]. Além de se demonstrar a equivalência, a baixas energias, do modelo perturbativo à Relatividade de Einstein, verificou-se explicitamente a casual finitude on-shell a 1-loop da gravitação pura (ausência de matéria) e a perda de preditibilidade explícita a 2-loops, pela geração de contra-termos não-triviais de ordem superior. A finitude on-shell de uma teoria maximamente supersimétrica de gravitação foi verificada explicitamente a 2-loops e à ordem \hbar^7 , inclusive, por power-counting. A finitude on-shell a 3-loops da supergravidade é esperada, apesar de não ter sido verificada por cálculos explícitos.

Na tentativa de sanar a não-renormalizabilidade da gravitação em 4 dimensões, foram propostos alguns modelos com termos de derivadas superiores; tais modelos mostraram-se não-unitários, apesar de renormalizáveis.

Neste panorama 4-dimensional, a gravitação de Einstein, ou qualquer outra teoria a ela equivalente, não supera um dos requisitos fundamentais de uma teoria quântica de campos consistente, qual seja, a renormalizabilidade. Por esta razão, com base na experiência adquirida no entendimento da formulação quântica para a interação fraca, o ponto-de-vista que se adota é considerar a gravitação de Einstein quantizada como uma teoria efetiva, válida numa região limitada por um cutoff da ordem da massa de Planck, acima do qual passa a vigorar uma teoria mais completa. Esta, acredita-se hoje, deve ser uma teoria formulada não para objetos pontuais, mas sim para entidades unidimensionais: as chamadas strings [3] e a sua versão mais completa, as superstrings [4].

O acentuado interesse pela física de campos em dimensões mais baixas encontra sua justificativa na sempre exigida, e tantas vezes necessária, simplificação dos modelos teóricos. Seja em Mecânica Quântica, onde modelos unidimensionais serviram de base para o conhecimento da estrutura quântica da matéria, ou em Mecânica Estatística, onde

modelos bidimensionais de Ising se mostraram completamente solúveis, a física de campos foi buscar nos modelos em 2 e 3 dimensões conhecimentos teóricos formais para a construção de teorias de campos que pudessem esclarecer os diversos problemas surgidos em 4 dimensões.

Em especial, os modelos em 3 dimensões Euclidianas são motivados por sua conexão com o comportamento à temperatura finita [5] das teorias 4-dimensionais e pela possibilidade de descrever fenômenos planares [6]. Ainda, o surgimento de massa para campos vetoriais e tensoriais, preservando as simetrias de gauge através da introdução de termos topologicamente não-triviais, proporcionais à 2ª classe característica de Chern-Simons [7], sem o pré-requisito da quebra espontânea de simetria, surge como uma interessante alternativa aos modelos de Higgs.

Nestes modelos (3-dimensionais), comportamentos peculiares são observados, devido à diferente caracterização do spin pelo grupo de Poincarè ¹. Os modelos vetoriais de Maxwell-Chern-Simons possuem um modo de excitação massivo de spin-1 ² em contraste com um modo não-massivo de spin-0 na teoria de Maxwell pura, e um par de spins-1 no modelo de Proca. Similarmente, com campos tensoriais simétricos de rank-2, o termo de massa topológica leva a um modo de spin-2, enquanto o termo de massa não-invariante de gauge descreve um dublete de spin-2.

No passado, a gravitação em 3 dimensões atraiu pouco interesse devido, talvez, à sua trivialidade na ausência de matéria (O tensor de Einstein apresenta o mesmo n^o de componentes que o tensor de Riemann; satisfazem, essencialmente, a uma relação de dualidade). O modelo de Einstein puro não apresenta graus-de-liberdade dinâmicos e, correspondentemente, nenhum gráviton se propaga, pois em D dimensões espaço-temporais, as excitações

¹Em 3 dimensões, o grupo de Poincarè é modificado [8] de modo que o spin resulta proporcional à massa do campo: $S \sim \frac{m}{|m|}$.

²Estes modelos, em princípio, violam a simetria de paridade, mas modelos sem violação de paridade foram propostos por Dorey e Mavromatos [9].

on-shell de uma teoria de gauge tensorial simétrica são descritas por $\frac{D(D-3)}{2}$ graus-de- liberdade. Entretanto, a ausência de dinâmica na teoria não significa, necessariamente, que este modelo não deve ser considerado, como foi mostrado com teorias de Yang-Mills em 2 dimensões [10], pois interessantes efeitos globais não-triviais e topológicos podem ser trabalhados em consequência de o grupo de gauge ser o grupo dos difeomorfismos. Ainda, a gravitação de Einstein pura em 3 dimensões pode ser quantizada, com o uso de variáveis de campo adequadas, e a mesma resulta finita; seu acoplamento à matéria quantizada apresenta propriedades não-usuais.

A solução para uma teoria de gravitação em 3 dimensões que seja dinâmica e auto-interagente foi proposta com a adição, ao setor de Einstein, de um setor topológico de Chern-Simons,

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{\mu} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\varphi}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\varphi}), \quad (0.1)$$

obtido da densidade de Hirzebruch-Pontryagin,

$$*\mathcal{R}\mathcal{R} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{R}_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} = \partial_{\mu} X^{\mu}, \quad (0.2)$$

integrando sobre X^3 e omitindo toda a dependência em x^3 .

O termo de Chern-Simons gravitacional, puro, também não apresenta dinâmica, pois sua contribuição à equação de movimento é o análogo 3-dimensional do tensor de Weyl (chamado tensor de Cotton),

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha} \left(\mathcal{R}_{\beta}{}^{\nu} - \frac{1}{4} g_{\beta}{}^{\nu} \mathcal{R} \right), \quad (0.3)$$

que é conservado, simétrico, de traço nulo e invariante sob transformações locais conformes da métrica e, portanto, nulo quando o espaço é conformalmente plano, $g^{\mu\nu}(x) = \Phi(x)\eta^{\mu\nu}$.

O novo modelo de Einstein-Chern-Simons 3-dimensional, é dinâmico, causal e livre de ghosts; com um modo de excitação de spin-2 massivo. É interessante notar que, neste modelo, não há qualquer controle sobre o sinal da constante de acoplamento do setor topológico, pois o modelo conjugado ($\mu \rightarrow -\mu$) leva ao aparecimento da mesma massa para o gráviton.

A já-comentada não-renormalizabilidade da gravitação de Einstein em 4D está diretamente ligada à dimensionalidade da constante de Planck. Modelos com derivadas de ordem superior, propostos de modo a solucionar este problema são, entretanto, não-unitários. Tentativas paralelas de se buscar somar, adequadamente, contribuições à matriz-S, de modo a salvar a predictibilidade dos modelos propostos, resultaram ineficientes. Modelos de teorias de campos não-perturbativas em 4D ainda são desconhecidos. Desta forma, o modelo da gravitação topologicamente massiva em 3 dimensões é apresentado como o único candidato possível para a quantização do campo gravitacional.

Devido ao princípio de equivalência, todas as teorias geométricas de gravitação têm o comportamento comum de que, quando linearizadas, apresentam propagadores e vértices com potências recíprocas: tais modelos são homogêneos a uma dada ordem em suas derivadas quando expandidos em qualquer dimensão do espaço-tempo. Considerando, então, que os propagadores se comportam como $g \sim k^{-p}$ e os vértices como $V \sim k^p$, o grau superficial de divergência ultravioleta a 1-loop é proporcional a

$$\int^{\Lambda} (gV)^r d^n k \sim \Lambda^n ; \quad (0.4)$$

a despeito do comportamento de g e V ou do n° r de vértices de interação. A cada ordem superior em teoria de perturbação, adiciona-se, essencialmente, três propagadores e dois vértices (devido a inserção de uma linha de propagação conectando dois vértices) e uma nova integração sobre os estados virtuais, $d^n k'$, de tal forma que o comportamento será

proporcional a

$$\int^{\Lambda} g (gV)^2 d^n k' = \Lambda^{n-p}; \quad (0.5)$$

do que resulta um comportamento efetivo geometricamente divergente à razão Λ^{n-p} . Portanto, somente se $p \geq n$ a teoria poderá ser renormalizável, evitando o infinito aparecimento de contratermos, além daqueles necessários para curar as divergências a 1-loop. Como $p \geq 4$ representa teorias que não preservam a unitariedade e em $n = 2$ não existe uma teoria de gravitação no sentido geométrico usual, resta-nos $n = p = 3$ para caracterizar um modelo viável. Mas isto só não bastaria para assegurar a viabilidade das teorias de gravitação em $D=3$, se não fosse a estrutura topológica especial do modelo de Einstein-Chern-Simons, cuja constante de acoplamento, κ , somente aparece no denominador na expansão perturbativa, o que o torna super-renormalizável. A altas frequências no momento integrado, o propagador comporta-se como k^{-3} , o que garante a renormalizabilidade no ultravioleta enquanto a baixas frequências, o pólo $k^2 = M_{gr}^2$ surge como um cutoff infravermelho.

O estudo das teorias topologicamente massivas de Yang-Mills e de gravitação tornou-se grande objeto de atenção após o clássico trabalho de Deser, Jackiw e Templeton [11], onde a possibilidade de construir uma teoria de gauge para o campo gravitacional consistente com a Mecânica Quântica, mostrou-se possível em 3 dimensões espaço-temporais. Resultados relevantes, tais como a renormalizabilidade da gravitação em 3D [12, 13] e a finitude das teorias de Chern-Simons no gauge de Landau [14], têm contribuído significativamente em uma série de aspectos de teorias de campos em $D=3$.

O propósito deste trabalho é o de tentar contribuir com resultados originais em alguns aspectos quânticos desta área de pesquisa. Para tanto, reconsideramos, no Capítulo 1, o conjunto dos operadores de projeção de spin de Barnes-Rivers [15, 16] no contexto da

gravitação topologicamente massiva [17]. Estes mostraram-se bastante relevantes na descrição da gravitação em 4 dimensões. Portanto, será o propósito deste capítulo apresentar um conjunto de operadores que estende a proposta original de Barnes-Rivers para incluir a gravitação massiva e não-massiva em D dimensões assim como a gravitação 3-dimensional com massa topológica. Os propagadores do gráviton serão apresentados e a unitariedade a tree-level será discutida em termos dos resíduos dos propagadores nos seus pólos ³.

Como uma consequência natural desta primeira investigação, apresentamos, no Capítulo 2, cálculos perturbativos da gravitação de Chern-Simons guardando a usual expansão do campo métrico. Faz-se o acoplamento mínimo de um campo de Maxwell-Chern-Simons com a gravitação de Einstein-Chern-Simons e analisa-se a possibilidade de geração dinâmica de massa topológica para o campo de gauge Abelian a 1-loop [18].

Cálculos explícitos, tais como a solução de integrais de loop geradas, algumas análises computacionais sobre a transversalidade dos gráficos de Feynman e a busca de contribuições para a geração dinâmica de massa, são apresentados no Capítulo 3.

Segue-se um Apêndice, onde se encontra a tabela multiplicativa dos projetores apresentados no Capítulo 1, tomados em D dimensões e estendidos para incluir o caso de Chern-Simons em 3D.

³O método pelo qual verificaremos a existência ou não de ghosts e tachyons, será o de exigir que o propagador tenha somente pólos de primeira ordem com massas reais e resíduos positivos.

Capítulo 1

Estendendo os Operadores de Barnes-Rivers para a Gravitação Topológica em $D=3$.

Resumo

Os operadores de projeção de spin para os tensores simétricos de rank-2 são reconsiderados em conexão com a questão da gravitação topologicamente massiva. A proposta original de Barnes e Rivers é generalizada para a gravitação de Einstein em D dimensões e para a gravitação massiva de Chern-Simons em $3D$. A unitariedade destas teorias é discutida a tree-level.

⁴Publicado em *Phys. Lett.* **B 301** (1993) 339.

O propósito deste capítulo é reconsiderar o conjunto dos operadores de spin de Barnes-Rivers [15, 16] no contexto da gravitação topologicamente massiva. Estes mostraram-se bastante relevantes na descrição da gravitação 4D [2, 19]. Será o objetivo deste capítulo a apresentação de um conjunto de operadores que estenda a proposta original dos projetores de Barnes-Rivers para incluir a gravitação D-dimensional não-massiva, assim como a gravitação 3-dimensional com massa topológica. Os propagadores do gráviton serão apresentados e a unitariedade a tree-level será discutida em termos dos resíduos dos propagadores nos seus pólos.

Os projetores de spin de Barnes-Rivers, como introduzidos em [15, 16], formam um conjunto completo de projetores de spin no espaço dos tensores de rank-2 definidos sobre o espaço-tempo de Minkowski em 4 dimensões. Para o caso simétrico, estes são dados por :

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(\Theta_{\mu\kappa}\Theta_{\nu\lambda} + \Theta_{\mu\lambda}\Theta_{\nu\kappa}) - \frac{1}{3}\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\kappa\lambda}, \quad (1.a)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} \equiv \frac{1}{2}(\Theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \Theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \Theta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + \Theta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa}), \quad (1.b)$$

$$P_s^{(0)}{}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \equiv \frac{1}{3}\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\kappa\lambda}, \quad (1.c)$$

$$P_w^{(0)}{}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \equiv \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (1.d)$$

$$P_{sw}^{(0)}{}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\Theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (1.e)$$

$$P_{ws}^{(0)}{}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\Theta_{\kappa\lambda}, \quad (1.f)$$

onde $\Theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são os usuais projetores transverso e longitudinal no espaço de vetores. Os operadores (1.a) e (1.b) são respectivamente os projetores de spin-2 e -1. Os restantes projetam componentes de spin-0 de tensores simétricos de rank-2.

Vamos considerar a ação de Einstein-Hilbert para a gravitação e derivar seus propagadores por meio da álgebra dos operadores de Barnes-Rivers (vide Apêndice A), tomados, agora, num espaço-tempo D-dimensional :

$$\mathcal{L}_{HE} = \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \mathcal{R}. \quad (1.2)$$

Adotando o ponto-de-vista de uma expansão do campo métrico em torno de uma geometria de espaço plano ⁵,

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}(x), \quad (1.3)$$

onde $h^{\mu\nu}$ é a variável de campo que define a expansão, e levando em consideração somente o setor livre desta expansão, tem-se o seguinte Lagrangeano para o campo $h^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{HE}^{free} = \frac{1}{4} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \partial_\lambda h^\mu{}_\mu \partial^\lambda h^\nu{}_\nu + \frac{1}{2} \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial^\mu h^\nu{}_\nu - \frac{1}{2} \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}. \quad (1.4)$$

Para dar significado à medida de integração no funcional gerador das funções de Green, é necessário fixar a invariância de gauge

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \zeta_\nu(x) + \partial_\nu \zeta_\mu(x), \quad (1.5)$$

introduzindo o termo de gauge-fixing de De Donder :

⁵diag. $\eta^{\mu\nu} \equiv (+; -, \dots, -)$.

$$\mathcal{L}_{g.f.} = \frac{1}{2\alpha} F_\mu F^\mu, \quad (1.6.a)$$

onde

$$F_\mu[h_{\rho\sigma}] = \partial_\lambda (h^\lambda{}_\mu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda h^\nu{}_\nu). \quad (1.6.b)$$

O Lagrangeano de Einstein-Hilbert com gauge-fixing pode ser reescrito, após sucessivas simetrizações, em termos dos operadores (1.a)-(1.f) de acordo com :

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\kappa\lambda} h^{\kappa\lambda}, \quad (1.7)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \square \left(-\frac{1}{2} P^{(2)} - \frac{1}{2\alpha} P_m^{(1)} + \frac{(4\alpha - 3)}{4\alpha} P_s^{(0)} + \right. \\ \left. -\frac{1}{4\alpha} P_w^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{sw}^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{ws}^{(0)} \right)_{\mu\nu,\kappa\lambda}. \quad (1.8)$$

O propagador associado é obtido do funcional gerador

$$\mathcal{W}[\tau_{\rho\sigma}] = -\frac{1}{2} \int d^D x d^D y \tau^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{-1} \tau^{\kappa\lambda}, \quad (1.9)$$

de tal forma que

$$\langle T [h_{\mu\nu}(x) h_{\kappa\lambda}(y)] \rangle = i \mathcal{O}_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{-1} \delta^D(x - y). \quad (1.10)$$

A este ponto, usando identidades tensoriais do espaço tensorial simétrico de rank-2, o operador inverso pode ser obtido do problema algébrico a seguir:

$$\mathcal{O}_{\mu\nu, \rho\sigma}^{-1} \mathcal{O}_{\rho\sigma, \kappa\lambda} = \left(P^{(2)} + P_m^{(1)} + P_s^{(0)} + P_w^{(0)} \right)_{\mu\nu, \kappa\lambda}, \quad (1.11)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\mu\nu, \rho\sigma} = \left[AP^{(2)} + BP_m^{(1)} + CP_s^{(0)} + DP_w^{(0)} + EP_{sw}^{(0)} + FP_{ws}^{(0)} \right]_{\mu\nu, \rho\sigma} \quad (1.12)$$

e

$$\mathcal{O}_{\rho\sigma, \kappa\lambda}^{-1} = \left[XP^{(2)} + YP_m^{(1)} + ZP_s^{(0)} + WP_w^{(0)} + RP_{sw}^{(0)} + SP_{ws}^{(0)} \right]_{\rho\sigma, \kappa\lambda}. \quad (1.13)$$

Associando os coeficientes A, ... , F aos coeficientes dos projetores na relação (1.8) e solucionando a equação (1.11) para X, ..., S, chega-se a:

$$\begin{aligned} \langle T [h_{\mu\nu}(x) h_{\kappa\lambda}(y)] \rangle = & \frac{i}{\square} \left\{ -2P^{(2)} - 2\alpha P_m^{(1)} - 2\frac{(D-5)}{(D-2)}P_s^{(0)} + \right. \\ & -2\frac{(2D\alpha - 4\alpha - D + 1)}{(D-2)}P_w^{(0)} + 2\frac{\sqrt{3}}{(D-2)}P_{sw}^{(0)} + \\ & \left. + 2\frac{\sqrt{3}}{(D-2)}P_{ws}^{(0)} \right\}_{\mu\nu, \kappa\lambda} \delta^D(x-y), \quad (1.14) \end{aligned}$$

ou, no espaço dos momenta,

$$\begin{aligned} \langle h_{\mu\nu}(-k) h_{\kappa\lambda}(k) \rangle &= \frac{i}{k^2} \left\{ \eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - \frac{2}{(D-2)}\eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} + \right. \\ &\quad \left. -(1-\alpha)[\eta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa}] \right\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde os projetores foram substituídos pelas equações (1.a)-(1.f), e o parâmetro de gauge-fixing foi deixado livre.

Adicionando à ação de Einstein-Hilbert um termo massivo do tipo Proca,

$$\mathcal{L}_{mass.} = -\frac{1}{4} m^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^\mu{}_\mu h^\nu{}_\nu), \quad (1.16)$$

obtemos o seguinte operador a ser invertido :

$$\mathcal{O}_{\rho\sigma,\kappa\lambda} = \left[-\frac{1}{2}(\square + m^2)P^{(2)} - \frac{1}{2}m^2 P_m^{(1)} + (\square + m^2)P_s^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2}m^2 (P_{sw}^{(0)} + P_{ws}^{(0)}) \right]_{\mu\nu,\kappa\lambda} \quad (1.17)$$

Seguindo o procedimento anterior, resulta a seguinte expressão para o propagador do gráviton massivo em D dimensões:

$$\begin{aligned} \langle h_{\mu\nu}(-k) h_{\kappa\lambda}(k) \rangle &= \frac{i}{(k^2 - m^2)} \left\{ \left(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa} - \frac{2}{(D-1)}\eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda} \right) + \right. \\ &\quad + 2 \left[\frac{k^4(D-2)}{m^4(D-1)} \right] \omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} + \\ &\quad - \frac{k^2}{m^2} [\eta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\lambda}\omega_{\mu\kappa} + \eta_{\nu\kappa}\omega_{\mu\lambda} + \\ &\quad \left. - \frac{2}{(D-1)}(\eta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda} + \eta_{\kappa\lambda}\omega_{\mu\nu}) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Uma extensão dos operadores de Barnes-Rivers pode ser proposta, de modo a considerar a gravitação topologicamente massiva em $D=3$ [11]. Pode ser mostrado que se necessita adicionar dois operadores à tabela inicial,

$$S_{1\ \mu\nu,\kappa\lambda} \equiv \frac{(-\square)}{4} \left\{ \varepsilon_{\mu\alpha\lambda} \partial_\kappa \omega^\alpha_\nu + \varepsilon_{\mu\alpha\kappa} \partial_\lambda \omega^\alpha_\nu + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda} \partial_\kappa \omega^\alpha_\mu + \varepsilon_{\nu\alpha\kappa} \partial_\lambda \omega^\alpha_\mu \right\} \quad (1.19.a)$$

e

$$S_{2\ \mu\nu,\kappa\lambda} \equiv \frac{\square}{4} \left\{ \varepsilon_{\mu\alpha\lambda} \eta_{\kappa\nu} + \varepsilon_{\mu\alpha\kappa} \eta_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda} \eta_{\kappa\mu} + \varepsilon_{\nu\alpha\kappa} \eta_{\lambda\mu} \right\} \partial^\alpha, \quad (1.19.b)$$

os quais podem ser encontrados analisando-se a parte bilinear do termo de Chern-Simons gravitacional :

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{\mu} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} (\partial_\mu \Gamma^\sigma_\rho + \frac{2}{3} \Gamma^\sigma_\mu \Gamma^\varphi_{\nu\rho}). \quad (1.20)$$

Fixando o gauge como em (1.6), o termo bilinear vindo da ação de Einstein-Hilbert e Chern-Simons resulta dado por :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \left\{ \square \left[\frac{1}{2} P^{(2)} + \frac{1}{2\alpha} P_m^{(1)} - \frac{(4\alpha - 3)}{4\alpha} P_s^{(0)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4\alpha} P_w^{(0)} - \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{sw}^{(0)} - \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{ws}^{(0)} \right] + \right. \\ & \left. + 4 \left(\frac{\kappa^2}{\mu} \right) [S_1 + S_2] \right\}_{\mu\nu,\kappa\lambda} h^{\kappa\lambda}. \quad (1.21) \end{aligned}$$

Novamente, o propagador associado pode ser lido com o auxílio da álgebra de operadores mostrada no Apêndice A :

$$\begin{aligned}
\langle T [h_{\mu\nu}(x) h_{\kappa\lambda}(y)] \rangle &= \frac{i}{\square} \left\{ \frac{2(\frac{\mu}{\kappa^2})^2}{[(\frac{\mu}{\kappa^2})^2 + 64\square]} P^{(2)} + 2\alpha P_m^{(1)} + \right. \\
&\quad - \frac{4[(\frac{\mu}{\kappa^2})^2 + 48\square]}{[(\frac{\mu}{\kappa^2})^2 + 64\square]} P_s^{(0)} + 4(\alpha - 1)P_w^{(0)} - 2\sqrt{3}P_{sw}^{(0)} + \\
&\quad \left. - 2\sqrt{3}P_{ws}^{(0)} - \frac{16(\frac{\mu}{\kappa^2})}{\square[(\frac{\mu}{\kappa^2})^2 + 64\square]} [S_1 + S_2] \right\} \delta^3(x - y). \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = 1$ (Feynman gauge), pode-se escrever, no espaço dos momenta :

$$\begin{aligned}
\langle h_{\mu\nu}(-k) h_{\kappa\lambda}(k) \rangle &= \frac{-i}{k^2 [64k^2 - (\frac{\mu}{\kappa^2})^2]} \left\{ 4i \left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right) k^\alpha [\varepsilon_{\mu\alpha\lambda} \Theta_{\kappa\nu} + \varepsilon_{\mu\alpha\kappa} \Theta_{\lambda\nu} + \right. \\
&\quad + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda} \Theta_{\kappa\mu} + \varepsilon_{\nu\alpha\kappa} \Theta_{\lambda\mu}] + \\
&\quad - \left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right)^2 [\eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa} - 2\eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda}] + \\
&\quad - 64k^2 [\eta_{\mu\kappa} \omega_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \omega_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\kappa} \omega_{\mu\lambda} + \\
&\quad \left. + \eta_{\nu\lambda} \omega_{\mu\kappa} + \Theta_{\mu\nu} \Theta_{\kappa\lambda} - 2\eta_{\mu\nu} \omega_{\kappa\lambda} - 2\eta_{\kappa\lambda} \omega_{\mu\nu}] \right\}. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Como pode ser visto, a ação de Hilbert-Einstein em D=4 leva a um pólo dinâmico não-massivo no propagador de $h_{\mu\nu}$, enquanto a ação de Einstein-Chern-Simons em D=3 leva a dois pólos : uma excitação não-dinâmica e não-massiva, além de um modo dinâmico massivo não-taquiãoico,

$$k^2 = \left(\frac{\mu}{8\kappa^2}\right)^2 > 0, \quad (1.24)$$

como é bem conhecido de [11].

Saturando o propagador com correntes externas, $\tau^{\mu\nu}$, compatíveis com as simetrias da teoria , e então tomando a parte imaginária dos resíduos da amplitude nos pólos, pode-se

verificar a condição necessária de unitariedade a tree-level e contar os graus-de-liberdade descritos pelo campo. A amplitude de transição corrente-corrente no espaço dos momenta é dada por :

$$\mathcal{A} \equiv \tau^{*\mu\nu}(k) \langle h_{\mu\nu}(-k) h_{\kappa\lambda}(k) \rangle \tau^{\kappa\lambda}(k), \quad (1.25)$$

onde somente os projetores de spin $P^{(2)}, P_s^{(0)}$ e S_2 deverão contribuir, devido à transversalidade de $\tau^{\mu\nu}(k)$. Agora, definindo o seguinte conjunto de vetores independentes no espaço dos momenta,

$$\begin{cases} k^\mu & \equiv (k^0; \vec{k}) \\ \tilde{k}^\mu & \equiv (k^0; -\vec{k}) \\ \varepsilon_i^\mu & \equiv (0; \vec{\varepsilon}_i), \quad i = 1 \dots D-2, \end{cases} \quad (1.26)$$

sujeitos às condições

$$\begin{cases} k^\mu \tilde{k}_\mu & = (k^0)^2 + (\vec{k})^2 \neq 0 \\ k^\mu \varepsilon_i^\mu & = 0 = \tilde{k}_\mu \varepsilon_i^\mu \\ \varepsilon_i^\mu \varepsilon_{\mu j} & = -\delta_{ij}, \end{cases} \quad (1.27)$$

pode-se parametrizar o tensor corrente simétrico $\tau^{\mu\nu}(k)$ de acordo com

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu}(k) &= a(k)k_\mu k_\nu + b(k)k_{(\mu} \tilde{k}_{\nu)} + c_i(k)k_{(\mu} \varepsilon_{\nu)}^i + \\ &+ d(k)\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu + e_i(k)\tilde{k}_{(\mu} \varepsilon_{\nu)}^i + f_{ij}(k)\varepsilon_{(\mu}^i \varepsilon_{\nu)}^j, \end{aligned} \quad (1.28)$$

e, então, extrair algumas relações envolvendo os coeficientes acima, quando se impõe sua

conservação para o momentum on-shell k^μ .

Portanto, para a teoria de Einstein em D dimensões, a amplitude \mathcal{A} é lida como :

$$\mathcal{A} = \frac{(-i)}{k^2} \tau_{\mu\nu}^*(k) \left\{ -2P^{(2)}(k) + \frac{2(5-D)}{(D-2)} P_s^{(0)}(k) \right\}^{\mu\nu, \kappa\lambda} \tau_{\kappa\lambda}(k). \quad (1.29)$$

No pólo $k^2 = 0$,

$$Im Res \mathcal{A} = \left[2|\tau_{\mu\nu}|^2 - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{5-D}{D-2} \right) |\tau_\mu^\mu|^2 \right]. \quad (1.30)$$

Manipulando-se com $\tau_{\mu\nu}(k)$, segundo estabelecido acima, tem-se :

$$Im Res \mathcal{A} = 2 \left[|f_{ij}|^2 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{5-D}{D-2} \right) |f_{ii}|^2 \right]. \quad (1.31)$$

Para D=4 dimensões especificamente:

$$Im Res \mathcal{A} = 2 \left[\frac{1}{2} |f_{11} - f_{22}|^2 + 2|f_{12}|^2 \right] > 0. \quad (1.32)$$

Solucionando o problema de auto-valor da matriz M de (1.32),

$$\frac{1}{2} Im Res \mathcal{A} = \begin{pmatrix} f_{11}^* & f_{22}^* & f_{12}^* \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{22} \\ f_{12} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

tem-se dois auto-valores não-nulos que descrevem os dois graus-de-liberdade do gráviton não-massivo.

Para D=3 dimensões,

$$Im Res \mathcal{A} = 2 \left(|f_{ij}|^2 - |f_{ii}|^2 \right) = 0, \quad (i = j = 1), \quad (1.34)$$

confirmando, como é bem conhecido, que a teoria de Einstein não é dinâmica em 3 dimensões.

Para a teoria de Einstein-Chern-Simons,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \frac{i}{k^2[64k^2 - (\frac{\mu}{\kappa^2})^2]} \tau_{\mu\nu}^*(k) \left\{ 2 \left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right)^2 P^{(2)}(k) + \right. \\ & \left. - \left[4 \left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right)^2 - 192k^2 \right] P_s^{(0)}(k) + \frac{16(\frac{\mu}{\kappa^2})}{k^2} S_2(k) \right\}^{\mu\nu, \kappa\lambda} \tau_{\kappa\lambda}(k). \end{aligned} \quad (1.35)$$

No pólo $k^2 = 0$,

$$\begin{aligned} Im Res \mathcal{A} = & \lim_{k^2=0} \frac{1}{[64k^2 - (\frac{\mu}{\kappa^2})^2]} \left\{ 2 \left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right)^2 \left[|\tau_{\kappa\lambda}|^2 - \frac{1}{3} |\tau_\mu^\mu|^2 \right] + \right. \\ & \left. - \frac{4[(\frac{\mu}{\kappa^2})^2 - 48k^2]}{3} |\tau_\mu^\mu|^2 + 16 \left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right) k^\alpha \varepsilon_{\mu\alpha\lambda} \tau^{*\mu}_\kappa \tau^{\kappa\lambda} \right\} \\ = & \lim_{k^2=0} \left\{ \frac{64k^2 |f|^2}{[64k^2 - (\frac{\mu}{\kappa^2})^2]} \right\} = 0; \end{aligned} \quad (1.36)$$

do que se conclui que o pólo não corresponde a um modo dinâmico.

No pólo $k^2 = (\frac{\mu}{8\kappa^2})^2$, podemos escolher um referencial de repouso para a excitação correspondente a este pólo:

$$\begin{cases} k^\mu \equiv (\frac{\mu}{8\kappa^2}; 0, 0) \\ \tilde{k}^\mu \equiv (\frac{\mu}{8\kappa^2}; 0, 0) \\ \varepsilon^\mu \equiv (0; \vec{\varepsilon}), \end{cases} \quad (1.37)$$

de modo a escrever a corrente $\tau^{\mu\nu}$ em termos destes vetores para extrair condições subsidiárias para a contagem dos graus-de-liberdade propagantes. Portanto,

$$\begin{aligned}
Im Res \mathcal{A} &= \lim_{k^2 = (\frac{\mu}{8\kappa^2})^2} \frac{1}{k^2} \left\{ 2\left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right)^2 \left[|\tau_{\kappa\lambda}|^2 - \frac{1}{3} |\tau_{\mu}^{\mu}|^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\left[\left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right)^2 - 48k^2\right]}{3} |\tau_{\mu}^{\mu}|^2 + 16\left(\frac{\mu}{\kappa^2}\right) k^{\alpha} \varepsilon_{\mu\alpha\nu} \tau^{*\mu}_{\kappa} \tau^{\kappa\lambda} \right\} \\
&= 64|f|^2 > 0;
\end{aligned} \tag{1.38}$$

resultando em um grau de liberdade. Aqui, deve-se chamar a atenção para o sinal do Lagrangeano de Einstein-Hilbert em $D=3$: um sinal de menos tem de ser escolhido em (1.21), de modo a garantir um propagador massivo livre de ghosts, embora, com a nossa escolha de métrica, o sinal oposto seja necessário para garantir que o gráviton não-massivo em $D=4$ não seja um ghost.

Para concluir, apresentou-se os operadores de spin para tratar a gravitação de Einstein D -dimensional e a gravitação topologicamente massiva em $D=3$. Sua tabela multiplicativa foi usada na obtenção dos propagadores do gráviton num gauge arbitrário, e a condição necessária de unitariedade a tree-level foi verificada.

Tendo em mente o acoplamento de um campo de Maxwell-Chern-Simons à gravitação de Einstein-Chern-Simons, o propagador (1.23) será empregado no cálculo explícito da correção radiativa a 1-loop do sistema gauge-gráviton. Estes resultados serão apresentados e discutidos no capítulo seguinte.

Referências

- [1] Isham, "Aspects of Quantum Gravity", in the Proc. of the 28th. Scottish Universities Summer School in Physics", ed. by A.T. Davies and D.G. sutherland, SUSSP Publications, Edinburgh, 1986; S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **78 B** (1978) 573; G. 't Hooft an M. Veltman, *Ann. Inst. Henri Poicarè* **20** (1974) 69; S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.* **D 10** (1974) 401, 411.
- [2] P.van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B 60** (1973) 478.
- [3] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103 B** (1981) 207 and 211.
- [4] M.B. Green, "Lectures on Superstrings", in workshop on unified String Theories, (1985), ed. by M. Green and D. Gross, World Scientific, Singapore, P. 294.
- [5] S.Weinberg, in " *Understanding the Fundamental Contituents of Matter*", ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York, NY, 1978.
- [6] R.B. Laughlin, *Science* **242** (1988) 525; X.G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 2873.
- [7] S. Chern, "Complex Manifolds without Potential Theory", 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, (1979).
- [8] J. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B 185** (1981) 157; B. Binengar, *J. Math. Phys.* **23** (1982).

- [9] N. Dorey and N.E. Mavromatos, *Phys. Lett.* **266 B** (1991) 163; *Phys. Rev B* **44** (1991) 5286.
- [10] R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1219; R. Brooks, F. Muhammad and S.J. Gates, *Nucl. Phys. B* **268** (1986) 599.
- [11] S.Deser, R.Jackiw and S.Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.
- [12] S.Deser and Z.Yang, *Class. Quant. Grav* **7** (1990) 1603.
- [13] B. Keszthelyi and G. Kleppe, *Phys. Lett.* **281 B** (1992) 33.
- [14] F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet and S. P. Sorella, *Nucl. Phys. B* **346** (1990) 313; A. Blasi, O. Piguet and S. P. Sorella, *Nucl. Phys. B* **356** (1991) 154.
- [15] K. J. Barnes, Ph.D. thesis (1963), unpublished.
- [16] R. J. Rivers, *Il Nuovo Cimento* **34** (1964) 387.
- [17] C. Pinheiro and G. O. Pires, "Extending the Barnes-Rivers operators to $D=3$ topological gravity", *Phys. Lett.* **301 B** (1993) 339.
- [18] C. Pinheiro, G. O. Pires and F. A. B. Rabelo de Carvalho, "1-Loop Analisis of the Photon Self-Energy due to 3D-Gravity", *Preprint CBPF NF 11/93*.
- [19] I.Antoniadis and E.T.Tomboulis, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 2756.
- [20] Y. C. Kao and M. Susuki, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 2137; S. Coleman and B. Hill, *Phys. Lett.* **159 B** (1985) 184.
- [21] R. Delburgo and A. B. Waites, *Phys. Lett.* **300 B** (1993) 241.
- [22] C. Pinheiro, G. O. Pires and F. A. B. Rabelo de Carvalho, *work in print*.
- [23] O.M. Del Cima, *M.Sc. thesis* CBPF (1993), Rio de Janeiro, RJ.

Capítulo 2

Análise a 1-Loop da Auto-Energia do Fóton Acoplado à Gravitação 3D.

Resumo

Um campo de Maxwell-Chern-Simons é minimamente acoplado à gravitação 3D. As regras de Feynman para os vértices de interação são obtidas e correções a 1-loop para a auto-energia do campo de gauge são calculadas. A transversalidade dos gráficos é verificada e constata-se que não ocorre geração dinâmica de massa.

⁶Submetido a *Phys. Lett. B* para publicação.

No trabalho do capítulo anterior [17], foi atacado o problema de estender a proposta dos projetores de Barnes-Rivers para considerar a gravitação 3D. Como subproduto desta investigação, propôs-se efetuar cálculos perturbativos para a gravitação de Chern-Simons, guardando a usual expansão do campo métrico [12]. Para tanto, efetua-se o acoplamento mínimo de um campo de Maxwell-Chern-Simons com a gravitação de Einstein-Chern-Simons, e concentra-se a atenção na correção a 1-loop da auto-energia do campo de gauge Abelian. A principal motivação deste cálculo consiste em analisar a possibilidade de geração dinâmica de massa [11, 20] através do acoplamento gravitacional.

O Lagrangeano adotado para descrever o acoplamento mínimo entre os setores de gauge e de gravitação em $D=3$ é dado por :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{E.C.S.} + \mathcal{L}_{M.C.S.} , \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo do lado direito denota o Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons,

$$\mathcal{L}_{E.C.S.} = \frac{-1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} \mathcal{R} + \frac{1}{\mu} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} (\partial_\mu \Gamma_\rho^\sigma{}_\nu + \frac{2}{3} \Gamma_\mu^\sigma{}_\varphi \Gamma_\nu^\varphi{}_\rho) , \quad (2.2)$$

enquanto o segundo termo representa a teoria de Maxwell-Chern-Simons,⁷

$$\mathcal{L}_{M.C.S.} = \frac{-1}{4} \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{M_{ph.}}{2} \varepsilon^{\mu\lambda\nu} A_\mu D_\lambda A_\nu . \quad (2.3)$$

Adotando o ponto-de-vista da expansão de campo fraco,⁸

⁷ $D_\lambda A_\nu \equiv \partial_\lambda A_\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho A_\rho$ é a derivada covariante sob transformações ger. de coord.

⁸diag. $\eta^{\mu\nu} \equiv (+; -, \dots, -)$.

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}(x), \quad (2.4)$$

onde $h^{\mu\nu}$ é a variável de campo definindo a expansão e κ é a constante de Planck, pode-se ler os propagadores e as regras de Feynman que descrevem a interação em teoria de campos perturbativa.

Como é bem conhecido [12, 17], segundo a parametrização (2.4), os propagadores da gravitação topologicamente massiva no gauge de Feynman são dados por :

$$\begin{aligned} \langle h_{\mu\nu}(-q) h_{\kappa\lambda}(q) \rangle &= \frac{-i}{64 q^2 [q^2 - M_{gr.}^2]} \{ 32 i M_{gr.} q^\alpha [\varepsilon_{\mu\alpha\lambda} \Theta_{\kappa\nu} + \varepsilon_{\mu\alpha\kappa} \Theta_{\lambda\nu} + \\ &+ \varepsilon_{\nu\alpha\lambda} \Theta_{\kappa\mu} + \varepsilon_{\nu\alpha\kappa} \Theta_{\lambda\mu}] + \\ &- 64 M_{gr.}^2 [\eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa} - 2\eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda}] + \\ &- 64 q^2 [\eta_{\mu\kappa} \omega_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \omega_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\kappa} \omega_{\mu\lambda} + \\ &+ \eta_{\nu\lambda} \omega_{\mu\kappa} + \Theta_{\mu\nu} \Theta_{\kappa\lambda} - 2\eta_{\mu\nu} \omega_{\kappa\lambda} - 2\eta_{\kappa\lambda} \omega_{\mu\nu}] \}, \quad (2.5) \end{aligned}$$

onde $\Theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são respectivamente os projetores transverso e longitudinal do espaço de vetores e $M_{gr.} \equiv (\frac{\mu}{8\kappa^2})$.

O propagador de Maxwell-Chern-Simons [11], no gauge de Feynman, toma a forma :

$$\langle A^a(-p) A^b(p) \rangle = \frac{-i}{(p^2 - M_{ph.}^2)} \left\{ \eta^{ab} - \frac{M_{ph.}}{p^2} \left[M_{ph.} \frac{p^a p^b}{p^2} - i \varepsilon^{a\alpha b} p_\alpha \right] \right\}. \quad (2.6)$$

Como se está acoplado um campo bosônico à gravitação 3D, a conexão afim, $\Gamma_{\mu}^{\nu\rho}$,

que aparece na derivada covariante, pode ser tomada livre de torção; é identificada, então, com o símbolo de Christoffel. Portanto, o último termo do Lagrangeano (2.3) não deverá contribuir para o setor de interação. Então, as regras de Feynman necessárias para o cômputo da auto-energia do fóton a 1-loop podem ser obtidas por uma análise das partes tri- e quadri-lineares do termo de Maxwell minimamente acoplado à gravitação :

$$\mathcal{L}_M^{(3)} = \frac{-\kappa}{4} \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h^\varphi_\varphi(x) - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta}(x) - \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha}(x) \right) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{(4)} = & \frac{-\kappa^2}{4} \left(h^{\mu\alpha}(x) h^{\nu\beta}(x) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta}(x) h^\varphi_\varphi(x) + \right. \\ & - \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} h^{\mu\alpha}(x) h^\varphi_\varphi(x) - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h^{\varphi\sigma}(x) h_{\varphi\sigma}(x) + \\ & \left. + \frac{1}{8} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h^\varphi_\varphi(x) h^\sigma_\sigma(x) \right) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Definindo o funcional gerador das funções de vértices próprios como

$$\Gamma[h_{\mu\nu}] \equiv \mathcal{W}[\tau_{\mu\nu}] - \int d^3x \tau_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde a ação efetiva pode ser expandida em uma série de Taylor funcional :

$$\Gamma[h_{\mu\nu}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta^n \Gamma[h_{\mu\nu}]}{\delta h_{\kappa\lambda}(x_1) \cdots \delta h_{\rho\sigma}(x_n)} \Big|_{h_{\mu\nu}=0} h_{\kappa\lambda}(x_1) \cdots h_{\rho\sigma}(x_n), \quad (2.10)$$

podemos reescrever $\Gamma[h_{\mu\nu}]$ como

$$\Gamma[h_{\mu\nu}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n (i) \Gamma^{(n)}(x_1; \cdots; x_n) h_{\kappa\lambda}(x_1) \cdots h_{\rho\sigma}(x_n), \quad (2.11)$$

onde

$$\Gamma^{(n)}(x_1; \cdots; x_n) \equiv \frac{1}{i} \left. \frac{\delta^n \Gamma[h_{\mu\nu}]}{\delta h_{\kappa\lambda}(x_1) \cdots \delta h_{\rho\sigma}(x_n)} \right|_{h_{\mu\nu}=0} \quad (2.12)$$

é a função de Green 1-P.I. de n-pontos. Agora, passando para o espaço dos momenta, com o uso da transformada de Fourier

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \delta(p_1 + \cdots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1; \cdots; p_n) &\equiv \\ &\equiv \int d^3x_1 \cdots d^3x_n \Gamma^{(n)}(x_1; \cdots; x_n) \exp^{-ip_1 \cdot x_1} \cdots \exp^{-ip_n \cdot x_n}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

obtemos

$$\Gamma[h_{\mu\nu}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n!} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3} \Gamma^{(n)}(p_1; \cdots; p_n) h_{\kappa\lambda}(-p_1) \cdots h_{\rho\sigma}(-p_n), \quad (2.14)$$

onde $h_{\kappa\lambda}$ é o funcional campo clássico.

A tree-level, $\Gamma[h_{\mu\nu}]$ é simplesmente a ação clássica acrescida de termos de fontes externas. Portanto, as regras de Feynman para os 3- e 4-vértices podem ser lidas dos setores descritos pelos Lagrangeanos (2.7) e (2.8), simplesmente tomando a transformada de Fourier da ação associada. Estes vértices são descritos na Fig.(1) e suas expressões no

espaço dos momenta são dadas abaixo:

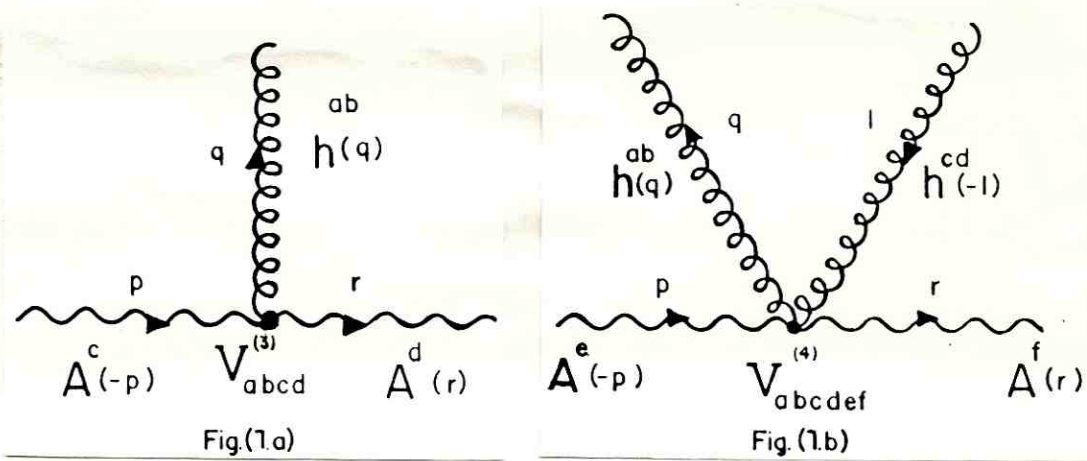


Fig.(1)

Vértices fóton-gráviton.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{abcd}^{(3)} = & \frac{i\kappa}{2} \{ (r \cdot p) \eta_{ab} \eta_{cd} - \eta_{ab} r_c p_d + \\
 & + 2p_a r_c \eta_{bd} + 2r_b p_d \eta_{ac} + \\
 & - 2(r \cdot p) \eta_{ac} \eta_{bd} - 2p_a r_b \eta_{cd} \}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $p = q + r$,

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{abcdef}^{(4)} = & i\kappa^2 \{ 2p_c r_d \eta_{ae} \eta_{bf} - 2p_c r_b \eta_{ae} \eta_{df} + \\
& -(p \cdot r) \eta_{ae} \eta_{bf} \eta_{cd} + p_f r_b \eta_{ae} \eta_{cd} + \\
& + p_a r_e \eta_{bf} \eta_{cd} - p_a r_b \eta_{cd} \eta_{ef} + \\
& -\frac{1}{2}(p \cdot r) \eta_{ef} \eta_{ac} \eta_{bd} + \frac{1}{2} p_f r_e \eta_{ac} \eta_{bd} + \\
& +\frac{1}{4}(p \cdot r) \eta_{ef} \eta_{ab} \eta_{cd} - \frac{1}{4} p_f r_e \eta_{ab} \eta_{cd} \} , \tag{2.16}
\end{aligned}$$

onde $p + l = q + r$.

A auto-energia do fóton só contribui, perturbativamente, com dois gráficos de Feynman à aproximação de 1-loop. Estes são mostrados na Fig.(2) :

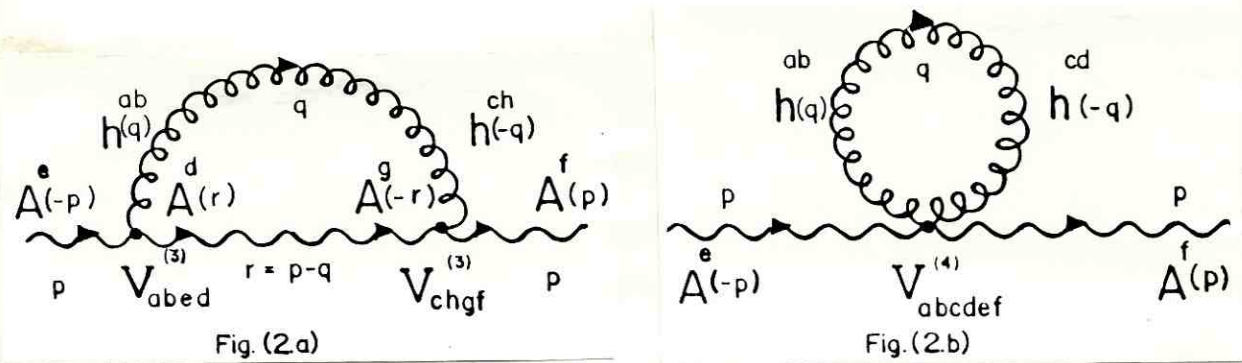


Fig.(2)

Contribuição a 1-loop para a auto-energia do fóton.

O diagrama apresentado na Fig.(2.a) resulta na seguinte contribuição para a auto-energia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{ef}^{(3)}(p) = & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{abed}^{(3)}(p; q) \langle h^{ab}(-q) h^{ch}(q) \rangle \times \\
& \times \langle A^d(-(p-q)) A^g(p-q) \rangle \mathcal{V}_{chgf}^{(3)}(p; q) . \tag{2.17}
\end{aligned}$$

O gráfico de tadpole apresentado na Fig.(2.b) é dado pela expressão :

$$\mathcal{I}_{ef}^{(4)}(p) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{abcdef}^{(4)}(p) \langle h^{ab}(-q) h^{cd}(q) \rangle . \quad (2.18)$$

Agora, simplesmente se substitui as expressões previamente derivadas para os propagadores e vértices. O cálculo explícito das integrais de loop dadas acima é extremamente laborioso ⁹: A integral $\mathcal{I}^{(3)}$ gera 1512 termos, enquanto a integral $\mathcal{I}^{(4)}$ gera outros 140. Uma análise cuidadosa revela que 54 integrais independentes ¹⁰ podem ser identificadas dentre os termos gerados. As integrais que surgem apresentam até 5 momenta de loop no numerador.

Procedimentos de regularização dimensional são adotados para solucionar as integrais de 1-loop [21]. Claramente, desde que se está trabalhando em 3 dimensões, todas estas integrais mostram-se finitas. Entretanto, como a principal motivação deste trabalho concerne a investigação da geração dinâmica de massa através do acoplamento com a gravitação, a solução destas integrais de Feynman é um passo importante para fixar a resposta dos gráficos em termos do momentum externo p^μ .

Os cálculos explícitos foram efetuados [22] e o resultado final é que não há geração dinâmica de massa topológica para o campo de gauge A^μ a 1-loop através do acoplamento mínimo deste campo ao setor de gravitação. Isto significa dizer que o pólo do propagador dado pela equação (2.6) não é alterado após levar-se em consideração correções de 1-loop. Ainda, deve-se mencionar que a identidade de Ward-U(1) é satisfeita : A contribuição total para o diagrama de 1-loop da auto-energia foi verificado ser transversa (resultado apresentado no último capítulo).

⁹A manipulação algébrica destas integrais e suas exaustivas simplificações não poderiam ser efetuadas sem o auxílio do software 'FORM by Vermaseren'.

¹⁰Estas integrais de Feynman serão apresentadas no próximo capítulo.

Tendo compreendido que não há geração dinâmica de massa para o campo A^μ minimamente acoplado à gravitação, está-se procedendo à investigação de interessantes acoplamentos não-mínimos e se está analisando a possibilidade de geração dinâmica de massa advinda destes acoplamentos. Estes resultados serão reportados brevemente [22].

Capítulo 3

Cálculos Explícitos da correção a 1-Loop da Auto-Energia do Fóton Acoplado à Gravitação 3D.

Resumo

As integrais de Feynman independentes que surgem nos gráficos anteriores são calculadas. A transversalidade destes gráficos é evidenciada e a não-geração dinâmica de massa topológica a 1-loop para o campo do fóton é verificada explicitamente.

Após terem sido obtidos os resultados quânticos a tree-level (propagadores e regras de Feynman para os vértices de interação), impôs-se a necessidade de se verificar explicitamente a geração dinâmica de massa a 1-loop para o campo do fóton.

Com o uso do software "FORM by Vermaseren", foi possível o cálculo explícito dos gráficos de Feynman da Fig.(2). Das quase 1700 integrais geradas, identificou-se 54 integrais independentes exibindo até 5 momenta no numerador do integrando.

A transversalidade de cada gráfico de Feynman é demonstrada, satisfazendo aos resultados bem conhecidos das identidades de Ward para o campo de gauge vetorial. São apresentadas as soluções das integrais independentes e a ausência de geração de massa para o fóton fica patente. Como consequência do cálculo destas integrais, verificou-se, com o uso do software "Maple ver. V", que todas as integrais paramétricas, cujas soluções explícitas não serão apresentadas, são finitas, como seria de se esperar para cálculos a 1-loop em $D=3$.

3.1 Integrais Independentes no Gráfico da Fig.(2.b):

São apresentadas a seguir as integrais independentes que aparecem no cálculo do diagrama da Fig.(2.b):

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 - M_{gr}^2)} = \frac{i}{4} \pi^{-1} M_{gr} \quad (3.1)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2(q^2 - M_{gr}^2)} = \frac{i}{4} \pi^{-1} M_{gr}^{-1} \quad (3.2)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^a}{q^2(q^2 - M_{gr}^2)} = 0 \quad (3.3)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^a q^b}{q^2(q^2 - M_{gr}^2)} = \frac{i}{12} \pi^{-1} M_{gr} \eta^{ab} \quad (3.4)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^a q^b q^c}{q^4(q^2 - M_{gr}^2)} = 0. \quad (3.5)$$

3.2 Integrais Independentes no Gráfico da Fig.(2.a):

São dadas abaixo todas as integrais independentes resultantes no cálculo do diagrama esboçado na Fig.(2.a):

$$I_1 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^4 (q^2 - M_{gr}^2) [(p - q)^2 - M_{ph}^2] (p - q)^2} \quad (3.6)$$

$$I_{1.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^4 [(p - q)^2 - M_{ph}^2] (p - q)^2} \quad (3.7)$$

$$I_{1.b} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^4 (p - q)^2} \quad (3.8)$$

$$I_2 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^4 (q^2 - M_{gr}^2) [(p - q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.9)$$

$$I_{2.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^4 [(p - q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.10)$$

$$I_{2.b} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p - q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.11)$$

$$I_{2.c} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^2 [(p - q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.12)$$

$$I_{2.d} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.13)$$

$$I_3 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.14)$$

$$I_4 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.15)$$

$$I_5 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.16)$$

$$I_{5.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.17)$$

$$I_{5.b} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{q^2 [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.18)$$

$$I_{5.c} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma}{(q^2 - M_{gr}^2) (p-q)^2} \quad (3.19)$$

$$I_6 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.20)$$

$$I_{6.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.21)$$

$$I_7 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.22)$$

$$I_{7.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.23)$$

$$I_8 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.24)$$

$$I_{8.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 - M_{gr}^2) (p-q)^2} \quad (3.25)$$

$$I_9 = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.26)$$

$$I_{9.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - M_{gr}^2) (p-q)^2} \quad (3.27)$$

$$I_{10} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.28)$$

$$I_{11} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.29)$$

$$I_{12} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.30)$$

$$I_{13} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.31)$$

$$I_{13.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu}{q^2 [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.32)$$

$$I_{14} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.33)$$

$$I_{14.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.34)$$

$$I_{14.b} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^2 [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.35)$$

$$I_{15} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.36)$$

$$I_{16} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.37)$$

$$I_{16.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{(q^2 - M_{gr}^2) (p-q)^2} \quad (3.38)$$

$$I_{17} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.39)$$

$$I_{18} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.40)$$

$$I_{18.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) (p-q)^2} \quad (3.41)$$

$$I_{19} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^4 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.42)$$

$$I_{19.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^4 [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.43)$$

$$I_{19.b} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^4 [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.44)$$

$$I_{19.c} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho}{q^4 (p-q)^2} \quad (3.45)$$

$$I_{20} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{q^4 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.46)$$

$$I_{20.a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{q^2 (q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.47)$$

$$I_{20.b} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{q^4 [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.48)$$

$$I_{20.c} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.49)$$

$$I_{20.d} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{q^2 [(p-q)^2 - M_{ph}^2] (p-q)^2} \quad (3.50)$$

$$I_{20.e} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{(q^2 - M_{gr}^2) [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.51)$$

$$I_{20.f} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{(q^2 - M_{gr}^2) (p-q)^2} \quad (3.52)$$

$$I_{20.g} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{q^4 [(p-q)^2 - M_{ph}^2]} \quad (3.53)$$

$$I_{20.h} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma q^\lambda}{q^4 (p-q)^2} \quad (3.54)$$

3.2.1 Soluções das Integrais I_1 a $I_{20.h}$:

$$I_{11} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[-\eta^{\mu\nu} \mathcal{A}_{11}^{1/2} + x^2 p^\mu p^\nu \mathcal{A}_{11}^{-1/2} \right] \quad (3.55)$$

$$I_{10} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[\mathcal{A}_{11}^{-1/2} \right] \quad (3.56)$$

$$I_9 = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{11} - I_{9.a}] \quad (3.57)$$

$$I_{9.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[-\eta^{\mu\nu} \mathcal{A}_{9.a}^{1/2} + x^2 p^\mu p^\nu \mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} \right] \quad (3.58)$$

$$I_8 = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{10} - I_{8.a}] \quad (3.59)$$

$$I_{8.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[\mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} \right] \quad (3.60)$$

$$I_6 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{10} - I_{6.a}] \quad (3.61)$$

$$I_{6.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[\mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} \right] \quad (3.62)$$

$$I_7 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{11} - I_{7.a}] \quad (3.63)$$

$$I_{7.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[-\eta^{\mu\nu} \mathcal{A}_{6.a}^{1/2} + x^2 p^\mu p^\nu \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} \right] \quad (3.64)$$

$$I_3 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_8 - I_{3.a}] \quad (3.65)$$

$$I_{3.a} = \frac{1}{M_{ph}^2} \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[\mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} + \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2} \right] \quad (3.66)$$

$$I_4 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_9 - I_{4.a}] \quad (3.67)$$

$$I_{4.a} = \frac{1}{M_{ph}^2} \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \left(\int_0^1 dx \left[-\eta^{\mu\nu} \mathcal{A}_{6.a}^{1/2} + x^2 p^\mu p^\nu \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} \right] + \int_0^1 dx \left[-\eta^{\mu\nu} \mathcal{A}_{3.a}^{1/2} + x^2 p^\mu p^\nu \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2} \right] \right) \quad (3.68)$$

$$I_2 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{2.b} - I_{2.a}] \quad (3.69)$$

$$I_{2.b} = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{2.d} - I_{2.c}] \quad (3.70)$$

$$I_{2.d} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[x^4 \mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{11}^{-1/2} - x^2 \mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{11}^{1/2} + \frac{1}{3} x^4 \mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{11}^{3/2} \right] \quad (3.71)$$

$$I_{2.c} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[x^4 \mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} - x^2 \mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{1/2} + \frac{1}{3} x^4 \mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{3/2} \right] \quad (3.72)$$

$$I_{2.a} = \frac{(-i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{x^4}{2} \mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-3/2} + \frac{x^2}{2} \mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} + \frac{x^4}{2} \mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{1/2} \right] \quad (3.73)$$

$$I_5 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{5.a} - I_{5.b}] \quad (3.74)$$

$$I_{5.a} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{2.d} - I_{5.c}] \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}
I_{5.c} &= \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[x^4 \mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} - x^2 \mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{1/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} x^4 \mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{3/2} \right] \tag{3.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{5.b} &= \frac{1}{M_{ph}^2} \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[x^4 \mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) (\mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2}) + \right. \\
&\quad \left. - x^2 \mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) (\mathcal{A}_{6.a}^{1/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{1/2}) + \frac{1}{3} x^4 \mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) (\mathcal{A}_{6.a}^{3/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{3/2}) \right] \tag{3.77}
\end{aligned}$$

$$I_{12} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (p^\mu x) \mathcal{A}_{11}^{-1/2} \tag{3.78}$$

$$I_{13} = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{12} - I_{13.a}] \tag{3.79}$$

$$I_{13.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx [p^\mu x \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2}] \tag{3.80}$$

$$I_{15} = \frac{1}{M_{ph}^2} \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (p^\mu x) [\mathcal{A}_{11}^{-1/2} - \mathcal{A}_{9.a}^{-1/2}] \tag{3.81}$$

$$I_{17} = \frac{1}{M_{ph}^2} \frac{1}{M_{gr}^2} \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (p^\mu x) [\mathcal{A}_{11}^{-1/2} - \mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} - \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} + \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2}] \tag{3.82}$$

$$I_{14} = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{14.a} - I_{14.b}] \tag{3.83}$$

$$I_{14.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x) \mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{11}^{1/2} + x^3 \mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{11}^{-1/2} \right] \tag{3.84}$$

$$I_{14.b} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x) \mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{1/2} + x^3 \mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} \right] \tag{3.85}$$

$$I_{16} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{14.a} - I_{16.a}] \quad (3.86)$$

$$I_{16.a} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x) \mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{1/2} + x^3 \mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} \right] \quad (3.87)$$

$$I_{18} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{14} - I_{18.a}] \quad (3.88)$$

$$I_{18.a} = \frac{1}{M_{gr}^2} \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x) \mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) (\mathcal{A}_{9.a}^{1/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{1/2}) + x^3 \mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) (\mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2}) \right] \quad (3.89)$$

$$I_1 = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_5 - I_{1.a}] \quad (3.90)$$

$$I_{1.a} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{2.a} - I_{1.b}] \quad (3.91)$$

$$I_{1.b} = \frac{(-i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{x^4}{2} \mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{-3/2} + \frac{x^2}{2} \mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2} + \frac{x^4}{2} \mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{1/2} \right] \quad (3.92)$$

$$I_{19} = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{18} - I_{19.a}] \quad (3.93)$$

$$I_{19.a} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{19.b} - I_{19.c}] \quad (3.94)$$

$$I_{19.b} = \frac{(-i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{x}{2} \mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} + \frac{x^3}{2} \mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-3/2} \right] \quad (3.95)$$

$$I_{19.c} = \frac{(-i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{x}{2} \mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2} + \frac{x^3}{2} \mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{-3/2} \right] \quad (3.96)$$

$$I_{20} = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{20.a} - I_{20.b}] \quad (3.97)$$

$$I_{20.a} = \frac{1}{M_{gr}^2} [I_{20.c} - I_{20.d}] \quad (3.98)$$

$$I_{20.c} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{20.e} - I_{20.f}] \quad (3.99)$$

$$I_{20.e} = \frac{(i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x^3) \mathcal{B}_6^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{11}^{1/2} + x^5 \mathcal{B}_7^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{11}^{-1/2} + \frac{x^3}{3} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{11}^{3/2} \right] \quad (3.100)$$

$$I_{20.f} = \frac{(i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x^3) \mathcal{B}_6^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{1/2} + x^5 \mathcal{B}_7^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{-1/2} + \frac{x^3}{3} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{9.a}^{3/2} \right] \quad (3.101)$$

$$I_{20.d} = \frac{1}{M_{ph}^2} \frac{(i)\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx \left[(-x) \mathcal{B}_6^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) (\mathcal{A}_{6.a}^{1/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{1/2}) + x^5 \mathcal{B}_7^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) (\mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2}) + \frac{x^3}{3} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) (\mathcal{A}_{6.a}^{3/2} - \mathcal{A}_{3.a}^{3/2}) \right] \quad (3.102)$$

$$I_{20.b} = \frac{1}{M_{ph}^2} [I_{20.g} - I_{20.h}] \quad (3.103)$$

$$I_{20.g} = \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{x^3}{2} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-1/2} + \frac{x^5}{2} \mathcal{B}_7^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{-3/2} - \frac{x}{2} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{6.a}^{1/2} \right] \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned}
I_{20.h} = & \frac{i\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{x^3}{2} \mathcal{B}_6^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{-1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{x^5}{2} \mathcal{B}_7^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{-3/2} - \frac{x}{2} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \mathcal{A}_{3.a}^{1/2} \right] \quad (3.105)
\end{aligned}$$

onde os coeficientes \mathcal{A}_i são dados por :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} & \equiv [x(1-x) \cdot p^2 - M_{ph.}^2 \cdot x - M_{gr.}^2 \cdot (1-x)] , \\
\mathcal{A}_{9.a} & \equiv [x(1-x) \cdot p^2 - M_{gr.}^2 \cdot (1-x)] , \\
\mathcal{A}_{6.a} & \equiv [x(1-x) \cdot p^2 - M_{ph.}^2 \cdot x] , \\
\mathcal{A}_{3.a} & \equiv [x(1-x) \cdot p^2] ,
\end{aligned}$$

e os tensores $\mathcal{B}_i(p)$ tomam a forma :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1^{\mu\nu\rho\sigma}(p) & \equiv (p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma) , \\
\mathcal{B}_2^{\mu\nu\rho\sigma}(p) & \equiv (\eta^{\mu\nu} p^\rho p^\sigma + \eta^{\nu\sigma} p^\mu p^\rho + \eta^{\rho\sigma} p^\mu p^\nu + \eta^{\mu\rho} p^\nu p^\sigma + \eta^{\nu\rho} p^\mu p^\sigma + \eta^{\mu\sigma} p^\nu p^\rho) , \\
\mathcal{B}_3^{\mu\nu\rho\sigma}(p) & \equiv (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}) , \\
\mathcal{B}_4^{\mu\nu\rho}(p) & \equiv (\eta^{\nu\rho} p^\mu + \eta^{\mu\rho} p^\nu + \eta^{\mu\nu} p^\rho) , \\
\mathcal{B}_5^{\mu\nu\rho}(p) & \equiv (p^\mu p^\nu p^\rho) , \\
\mathcal{B}_6^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) & \equiv (\eta^{\mu\lambda} p^\nu p^\rho p^\sigma + \eta^{\nu\lambda} p^\mu p^\rho p^\sigma + \eta^{\rho\lambda} p^\mu p^\nu p^\sigma + \\
& + \eta^{\sigma\lambda} p^\mu p^\nu p^\rho + \eta^{\mu\nu} p^\rho p^\sigma p^\lambda + \eta^{\nu\sigma} p^\mu p^\rho p^\lambda + \\
& + \eta^{\rho\sigma} p^\mu p^\nu p^\lambda + \eta^{\mu\rho} p^\nu p^\sigma p^\lambda + \eta^{\nu\rho} p^\mu p^\sigma p^\lambda + \\
& + \eta^{\mu\sigma} p^\rho p^\nu p^\lambda) ,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_7^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \equiv (p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma p^\lambda) ,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_8^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}(p) \equiv & \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\lambda} p^\sigma + \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\lambda} p^\rho + \eta^{\nu\sigma} \eta^{\mu\lambda} p^\rho + \right. \\ & + \eta^{\nu\sigma} \eta^{\rho\lambda} p^\mu + \eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\lambda} p^\nu + \eta^{\rho\sigma} \eta^{\nu\lambda} p^\mu + \\ & + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} p^\sigma + \eta^{\mu\rho} \eta^{\sigma\lambda} p^\nu + \eta^{\nu\rho} \eta^{\mu\lambda} p^\sigma + \\ & + \eta^{\nu\rho} \eta^{\sigma\lambda} p^\mu + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\lambda} p^\nu + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda} p^\rho + \\ & \left. + \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} p^\lambda + \eta^{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} p^\lambda + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} p^\lambda \right) . \end{aligned}$$

3.2.2 Teste de transversalidade dos gráficos da Fig.(2.a) e (2.b):

format 80;

```
*****
*
*           Photon Self-Energy Feynman graphic of Fig.(2.b).
*           Transversality test
*           ( a 'Form' routine. )
*****
```

```
V q,p;
S pi,Mgr,kapa,[p^2],[q^2-Mgr^2],[Mgr^2],[q^2],[q^4];
S [(q^2)*(q^2-Mgr^2)],[(q^4)*(q^2-Mgr^2)],[(q^2-Mgr^2)];
S [kapa^-2*(q^2)*(q^2-Mgr^2)];
S [kapa^-2*(q^4)*(q^2-Mgr^2)];
S [kapa^-2*(q^2-Mgr^2)];
Dimension 3;
I alf,ex,a,b,c,d,e,f;
L Loop = p(e) * p(f) * i_ * kapa^2 * (
      2 * p(c)*p(d)*d_(a,e)*d_(b,f)
      - 2 * p(c)*p(b)*d_(a,e)*d_(d,f)
      - p(ex)*p(ex)*d_(a,e)*d_(b,f)*d_(c,d)
      + p(f)*p(b)*d_(a,e)*d_(c,d)
      + p(a)*p(e)*d_(b,f)*d_(c,d)
      - p(a)*p(b)*d_(c,d)*d_(e,f)
      - 1/2 * p(ex)*p(ex)*d_(e,f)*d_(a,c)*d_(b,d)
      + 1/2 * p(f)*p(e)*d_(a,c)*d_(b,d)
      + 1/4 * p(ex)*p(ex)*d_(e,f)*d_(a,b)*d_(c,d)
      - 1/4 * p(f)*p(e)*d_(a,b)*d_(c,d) ) *
1/64 * ( -i_/[q^2]/[q^2-Mgr^2] ) *
( 32*i_*Mgr*q(alf) * (
      e_(a,alf,d)*( d_(c,b)-q(c)*q(b)/[q^2] )
      + e_(a,alf,c)*( d_(d,b)-q(d)*q(b)/[q^2] )
      + e_(b,alf,d)*( d_(c,a)-q(c)*q(a)/[q^2] )
      + e_(b,alf,c)*( d_(d,a)-q(d)*q(a)/[q^2] ) )
- 64 * Mgr^2 * ( d_(a,c)*d_(b,d) + d_(a,d)*d_(b,c)
      - 2*d_(a,b)*d_(c,d) )
- 64*[q^2] * (
      d_(a,c)*q(b)*q(d)/[q^2]
      + d_(a,d)*q(b)*q(c)/[q^2]
      + d_(b,c)*q(a)*q(d)/[q^2]
      + d_(b,d)*q(a)*q(c)/[q^2]
      + ( d_(a,b)-q(a)*q(b)/[q^2] ) *
      ( d_(c,d)-q(c)*q(d)/[q^2] )
      - 2*d_(a,b)*q(c)*q(d)/[q^2]
      - 2*d_(c,d)*q(a)*q(b)/[q^2] ) );
```

```
id [q^2]^-2=[q^4]^-1;
id [q^4]^-1*[q^2-Mgr^2]^-1=[(q^4)*(q^2-Mgr^2)]^-1;
id [q^2]^-1*[q^2-Mgr^2]^-1=[(q^2)*(q^2-Mgr^2)]^-1;
id [q^2-Mgr^2]^-1=[(q^2-Mgr^2)]^-1;
id kapa^2*[(q^4)*(q^2-Mgr^2)]^-1=
[kapa^-2*(q^4)*(q^2-Mgr^2)]^-1;
id kapa^2*[(q^2)*(q^2-Mgr^2)]^-1=
[kapa^-2*(q^2)*(q^2-Mgr^2)]^-1;
id kapa^2*[(q^2-Mgr^2)]^-1=
[kapa^-2*(q^2-Mgr^2)]^-1;
```

```
B [kapa^-2*(q^4)*(q^2-Mgr^2)],
[kapa^-2*(q^2)*(q^2-Mgr^2)],
```

```
[kapa^-2*(q^2-Mgr^2)];
```

```
print +s;  
.end
```

```
Time =          0.11 sec      Generated terms =          130  
      Loop          Terms in output =          0  
          Bytes used   =          2
```

```
Loop = 0;
```

```
FORM by J.Vermaseren. Version 1.1 3-jun-1992
```

```
format 80;
```

```
*****  
*                                                                 *  
*           Photon Self-Energy Feynman graphic of Fig.(2.a).   *  
*                   Transversality Test                         *  
*                   (a 'Form' routine.)                         *  
*****
```

```
V q,p;
```

```
S pi,Mgr,kapa,Mph,[q^2],[q^2-Mgr^2],[p^2],[q^4];
```

```
S [(p-q)^2-Mph^2],[p-q]^2,[p^2];
```

```
S [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
S [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
S [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2];
```

```
S [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2];
```

```
S [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2];
```

```
S [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
Dimension 3;
```

```
I alf,bet,ex,ey,a,b,c,d,e,f,g,h;
```

```
L Loop2 = p(e) * 1/2 * i_ * kapa * (  
    p(ex)*( p(ex)-q(ex) ) * d_(a,b) * d_(e,d)  
    - p(d)*( p(e)-q(e) ) * d_(a,b)  
    + 2*p(a)*( p(e)-q(e) ) * d_(b,d)  
    + 2*p(d)*( p(b)-q(b) ) * d_(a,e)  
    - 2*p(ex)*( p(ex)-q(ex) ) * d_(a,e) * d_(b,d)  
    - 2*p(a)*( p(b)-q(b) ) * d_(e,d)  
    ) *  
    1/64*(-i_/ [q^2] / [q^2-Mgr^2]) * (  
    32*i_*Mgr*q(alf) * (  
    e_(a,alf,h) * (d_(c,b)-q(c)*q(b) / [q^2])  
    + e_(a,alf,c) * (d_(h,b)-q(h)*q(b) / [q^2])  
    + e_(b,alf,h) * (d_(c,a)-q(c)*q(a) / [q^2])  
    + e_(b,alf,c) * (d_(h,a)-q(h)*q(a) / [q^2])  
    )  
    - 64 * Mgr^2 * (  
    d_(a,c) * d_(b,h) + d_(a,h) * d_(b,c) - 2*d_(a,b) * d_(c,h)  
    )  
    - 64*[q^2] * (  
    d_(a,c) * q(b) * q(h) / [q^2]  
    + d_(a,h) * q(b) * q(c) / [q^2]  
    + d_(b,c) * q(a) * q(h) / [q^2]  
    + d_(b,h) * q(a) * q(c) / [q^2]  
    + ( d_(a,b)-q(a)*q(b) / [q^2] ) *  
    ( d_(c,h)-q(c)*q(h) / [q^2] )  
    - 2*d_(a,b) * q(c) * q(h) / [q^2]  
    - 2*d_(c,h) * q(a) * q(b) / [q^2]  
    ) *  
    ( -i_ / [(p-q)^2-Mph^2] ) * (  
    d_(d,g) - Mph / [(p-q)^2] ) * (  
    )
```

3.2.3 Busca dos termos que geram massa dinamicamente para o fóton:

```

*****
*
*           Photon Self-Energy Feynman graphic of Fig.(2.b).
*           Selecting Mass-Generating Term
*           ( a 'Form' routine. )
*****

V q,p;
S pi,Mgr,kapa,[p^2],[q^2-Mgr^2],[Mgr^2],[q^2],[q^4];
S [(q^2)*(q^2-Mgr^2)],[(q^4)*(q^2-Mgr^2)],[(q^2-Mgr^2)];
S [kapa^-2*(q^2)*(q^2-Mgr^2)];
S [kapa^-2*(q^4)*(q^2-Mgr^2)];
S [kapa^-2*(q^2-Mgr^2)];
Dimension 3;
I alf,ex,a,b,c,d,e,f;
L Loop = i_ * kapa^2 * (
      2 * p(c)*p(d)*d_(a,e)*d_(b,f)
      - 2 * p(c)*p(b)*d_(a,e)*d_(d,f)
      - p(ex)*p(ex)*d_(a,e)*d_(b,f)*d_(c,d)
      + p(f)*p(b)*d_(a,e)*d_(c,d)
      + p(a)*p(e)*d_(b,f)*d_(c,d)
      - p(a)*p(b)*d_(c,d)*d_(e,f)
      - 1/2 * p(ex)*p(ex)*d_(e,f)*d_(a,c)*d_(b,d)
      + 1/2 * p(f)*p(e)*d_(a,c)*d_(b,d)
      + 1/4 * p(ex)*p(ex)*d_(e,f)*d_(a,b)*d_(c,d)
      - 1/4 * p(f)*p(e)*d_(a,b)*d_(c,d) ) *
1/64 * ( -i_/[q^2]/[q^2-Mgr^2] ) *
(
  32*i_*Mgr*q(alf) * (
    e_(a,alf,d)*( d_(c,b)-q(c)*q(b)/[q^2] )
  + e_(a,alf,c)*( d_(d,b)-q(d)*q(b)/[q^2] )
  + e_(b,alf,d)*( d_(c,a)-q(c)*q(a)/[q^2] )
  + e_(b,alf,c)*( d_(d,a)-q(d)*q(a)/[q^2] ) )
- 64 * Mgr^2 * ( d_(a,c)*d_(b,d) + d_(a,d)*d_(b,c)
                 -2*d_(a,b)*d_(c,d) )
- 64*[q^2] * (
                d_(a,c)*q(b)*q(d)/[q^2]
                + d_(a,d)*q(b)*q(c)/[q^2]
                + d_(b,c)*q(a)*q(d)/[q^2]
                + d_(b,d)*q(a)*q(c)/[q^2]
                + ( d_(a,b)-q(a)*q(b)/[q^2] ) *
                  ( d_(c,d)-q(c)*q(d)/[q^2] )
                - 2*d_(a,b)*q(c)*q(d)/[q^2]
                - 2*d_(c,d)*q(a)*q(b)/[q^2] ) );

id [q^2]^(-2)=[q^4]^(-1);
id [q^4]^(-1)*[q^2-Mgr^2]^(-1)=[(q^4)*(q^2-Mgr^2)]^(-1);
id [q^2]^(-1)*[q^2-Mgr^2]^(-1)=[(q^2)*(q^2-Mgr^2)]^(-1);
id [q^2-Mgr^2]^(-1)=[(q^2-Mgr^2)]^(-1);
id kapa^2*[(q^4)*(q^2-Mgr^2)]^(-1)=
[kapa^-2*(q^4)*(q^2-Mgr^2)]^(-1);
id kapa^2*[(q^2)*(q^2-Mgr^2)]^(-1)=
[kapa^-2*(q^2)*(q^2-Mgr^2)]^(-1);
id kapa^2*[(q^2-Mgr^2)]^(-1)=
[kapa^-2*(q^2-Mgr^2)]^(-1);

B [kapa^-2*(q^4)*(q^2-Mgr^2)],
[kapa^-2*(q^2)*(q^2-Mgr^2)],

```

```
[kapa^-2*(q^2-Mgr^2)];
```

```
* Seleccionando termos que contribuem para geracao dinamica de massa :
```

```
if ( count(p,1) > 1 );  
  discard;  
endif;
```

```
print +s;  
.end
```

```
Time =          0.12 sec      Generated terms =          0  
      Loop          Terms in output =          0  
                        Bytes used      =          2
```

```
Loop = 0;
```

```
FORM by J.Vermaseren. Version 1.1 3-jun-1992
```

```
format 80;
```

```
*****  
*                                                                 *  
*           Photon Self-Energy Feynman graphic of Fig.(2.a)     *  
*           Selecting Mass-Generating Term                       *  
*                                                                 *  
*           (a 'Form' routine.)                                   *  
*****
```

```
V q,p;
```

```
S pi,Mgr,kapa,Mph,[q^2],[q^2-Mgr^2],[p^2],[q^4];
```

```
S [(p-q)^2-Mph^2],[(p-q)^2],[p^2];
```

```
S [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
S [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
S [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2];
```

```
S [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2];
```

```
S [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2];
```

```
S [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
Dimension 3;
```

```
I alf,bet,ex,ey,a,b,c,d,e,f,g,h;
```

```
L Loop2 = 1/2 * i_ * kapa * (
```

```
    p(ex)*( p(ex)-q(ex) )*d_(a,b)*d_(e,d)  
    - p(d)*( p(e)-q(e) )*d_(a,b)  
    + 2*p(a)*( p(e)-q(e) )*d_(b,d)  
    + 2*p(d)*( p(b)-q(b) )*d_(a,e)  
    - 2*p(ex)*( p(ex)-q(ex) )*d_(a,e)*d_(b,d)  
    - 2*p(a)*( p(b)-q(b) )*d_(e,d)  
    ) *
```

```
1/64*(-i_/[q^2]/[q^2-Mgr^2]) * (
```

```
    32*i_*Mgr*q(alf) * (  
        e_(a,alf,h)*(d_(c,b)-q(c)*q(b)/[q^2])  
    + e_(a,alf,c)*(d_(h,b)-q(h)*q(b)/[q^2])  
    + e_(b,alf,h)*(d_(c,a)-q(c)*q(a)/[q^2])  
    + e_(b,alf,c)*(d_(h,a)-q(h)*q(a)/[q^2])  
    )
```

```
- 64 * Mgr^2 * (  
    d_(a,c)*d_(b,h) + d_(a,h)*d_(b,c) - 2*d_(a,b)*d_(c,h)  
    )
```

```
- 64*[q^2] * (  
    d_(a,c)*q(b)*q(h)/[q^2]  
    + d_(a,h)*q(b)*q(c)/[q^2]  
    + d_(b,c)*q(a)*q(h)/[q^2]  
    + d_(b,h)*q(a)*q(c)/[q^2]  
    + ( d_(a,b)-q(a)*q(b)/[q^2] ) *
```

```

      ( d_(c,h)-q(c)*q(h)/[q^2] )
      - 2*d_(a,b)*q(c)*q(h)/[q^2]
      - 2*d_(c,h)*q(a)*q(b)/[q^2]
    ) *
      ( -i_/[(p-q)^2-Mph^2] ) * (
      d_(d,g) - Mph/[(p-q)^2] * (
      Mph*( p(d)-q(d) )*( p(g)-q(g) )/[(p-q)^2]
      - i_ * e_(d,bet,g)*( p(bet)-q(bet) )
    ) *
    1/2 * i_ * kapa * (
    p(ey)*( p(ey)-q(ey) )*d_(c,h)*d_(g,f)
    - p(f)*( p(g)-q(g) )*d_(c,h)
    + 2*p(c)*( p(g)-q(g) )*d_(h,f)
    + 2*p(f)*( p(h)-q(h) )*d_(c,g)
    - 2*p(ey)*( p(ey)-q(ey) )*d_(c,g)*d_(h,f)
    - 2*p(c)*( p(h)-q(h) )*d_(g,f)
    );

```

```
contract;
```

```
if ( count(p,1) > 1 );
  discard;
endif;
```

```
id [q^4]^-1*[q^2-Mgr^2]^-1*[(p-q)^2-Mph^2]^-1*[(p-q)^2]^-1=
  [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2]^-1;
```

```
id [q^4]^-1*[q^2-Mgr^2]^-1*[(p-q)^2-Mph^2]^-1=
  [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)]^-1;
```

```
id [q^2]^-1*[q^2-Mgr^2]^-1*[(p-q)^2-Mph^2]^-1*[(p-q)^2]^-1=
  [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2]^-1;
```

```
id [q^2]^-1*[q^2-Mgr^2]^-1*[(p-q)^2-Mph^2]^-1=
  [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)]^-1;
```

```
id [q^2-Mgr^2]^-1*[(p-q)^2-Mph^2]^-1*[(p-q)^2]^-1=
  [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2]^-1;
```

```
id [q^2-Mgr^2]^-1*[(p-q)^2-Mph^2]^-1=
  [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)]^-1;
```

```
B [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2],
  [(q^4)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)],
  [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2],
  [(q^2)*(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)],
  [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)*(p-q)^2],
  [(q^2-Mgr^2)*((p-q)^2-Mph^2)];
```

```
print +s;
```

```
.end
```

```
Time =          5.98 sec      Generated terms =          0
      Loop2          Terms in output =          0
                        Bytes used      =          2
```

```
Loop2 = 0;
```

O propósito deste capítulo foi simplesmente o de reunir sistematicamente todas as integrais de loop que foram analisadas na questão de verificar se o acoplamento mínimo do fóton à gravitação de Einstein-Chern-Simons poderia levar à geração dinâmica de massa para o campo-de-gauge abeliano. Em função destes resultados, concluiu-se que o acoplamento gravitacional não induz radiativamente massa topológica para o fóton, contrariamente ao que ocorre no caso de campos vetoriais carregados minimamente acoplados a um campo-de-gauge abeliano em 3D [23].

Apêndice A

Tabela Multiplicativa para os operadores de projeção de spin de Barnes-Rivers em D dimensões :

$$P^{(2)}P^{(2)} = P^{(2)} + \frac{(D-4)}{3}P_s^{(0)},$$

$$P_m^{(1)}P_m^{(1)} = P_m^{(1)},$$

$$P^{(2)}P_s^{(0)} = \frac{(4-D)}{3}P_s^{(0)},$$

$$P_s^{(0)}P^{(2)} = \frac{(4-D)}{3}P_s^{(0)},$$

$$P^{(2)}P_{sw}^{(0)} = \frac{(4-D)}{3}P_{sw}^{(0)},$$

$$P_{ws}^{(0)}P^{(2)} = \frac{(4-D)}{3}P_{ws}^{(0)},$$

$$P_s^{(0)}P_s^{(0)} = \frac{(D-1)}{3}P_s^{(0)},$$

$$P_w^{(0)}P_w^{(0)} = P_w^{(0)},$$

$$P_s^{(0)}P_{sw}^{(0)} = \frac{(D-1)}{3}P_{sw}^{(0)},$$

$$P_{ws}^{(0)}P_s^{(0)} = \frac{(D-1)}{3}P_{ws}^{(0)},$$

$$P_{sw}^{(0)}P_w^{(0)} = P_{sw}^{(0)},$$

$$P_w^{(0)}P_{ws}^{(0)} = P_{ws}^{(0)},$$

$$P_{sw}^{(0)}P_{ws}^{(0)} = P_s^{(0)},$$

$$P_{ws}^{(0)} P_{sw}^{(0)} = \frac{(D-1)}{3} P_w^{(0)}.$$

Extensão ao caso da gravitação massiva 3D :

$$S_2 S_2 = \square^3 \left\{ \frac{1}{2} P_s^{(0)} - \frac{1}{4} P_m^{(1)} - P^{(2)} \right\},$$

$$S_2 S_1 = \frac{\square^3}{4} P_m^{(1)},$$

$$S_1 S_2 = \frac{\square^3}{4} P_m^{(1)},$$

$$S_1 S_1 = \frac{(-\square^3)}{4} P_m^{(1)},$$

$$S_1 P_m^{(1)} = S_1,$$

$$P_m^{(1)} S_1 = S_1,$$

$$S_2 P^{(2)} = S_2 + S_1,$$

$$P^{(2)} S_2 = S_2 + S_1,$$

$$S_2 P_m^{(1)} = -S_1,$$

$$P_m^{(1)} S_2 = -S_1.$$

Identidade Tensorial :

$$\left\{ P^{(2)} + P^{(1)} + P_s^{(0)} + P_w^{(0)} \right\}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\kappa} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\kappa}).$$

“Aspectos Quânticos de Gravitação Topologicamente Massiva em $D = (1+2)$ ”

Gentil Oliveira Pires

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Clóvis José Wotzasek – UFRJ

Luiz Alberto Willis Toro – CBPF

Suplente: Sebastião Alves Dias – CBPF