

TESE DE  
DOUTORADO



# LIMITES DE ESPAÇOS-TEMPOS EM GRAVITAÇÃO

Filipe de Moraes Paiva

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, OUTUBRO DE 1993

# Dedicatória

**À língua universal Esperanto.**

# Agradecimentos

- Ao Marcelo Rebouças pela orientação, pelo incentivo e pelo apoio na elaboração desta tese.
- Ao Malcolm MacCallum pela colaboração e orientação durante minha passagem pelo QMW em Londres.
- Ao Antonio Teixeira pelo bate papo sobre física, pelos seminários e pelas conversas em Esperanto.
- Ao Joel Fonseca Neto, Janilo Santos e Geraldo Dirk. Ao Jim Skea e ao Jan Áman pela ajuda com o CLASSI. Ao Graham Hall pelas discussões. Ao Carlos Romero pela colaboração e hospitalidade em João Pessoa. Ao XIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos em Caxambu, onde muitas idéias surgiram.
- Ao Maurício Calvão e infindáveis discussões. Aos demais camaradas com os quais dividi sala e que mantiveram o bom humor acima de tudo.
- Aos companheiros que encontrei pelos corredores, bibliotecas, bares, salas de chá e pelo mundo afora, com os quais tive a oportunidade de trocar alguma idéia. A todos os meus amigos do CBPF no Rio e do QMW em Londres.
- Ao CNPq e FAPERJ pela ajuda financeira.
- Ao Coral do CBPF por muitos momentos agradáveis.

# Resumo

## Limites de espaços-tempos em gravitação

Nas teorias métricas da gravitação, o espaço-tempo é representado por uma variedade quadridimensional, riemanniana e localmente lorentziana. O campo gravitacional é representado pelo tensor métrico  $g_{ab}$  definido nessa variedade e usualmente descrito a partir de um sistema de coordenadas. Podemos agrupar, em famílias, métricas que difiram apenas pelo valor de um ou mais parâmetros. Na família Schwarzschild, por exemplo, as métricas são iguais a menos do valor do parâmetro massa  $m$ . Surge assim a idéia de limite de uma família quando um ou mais parâmetros tendem a algum valor. Como mostrou Geroch, o limite tomado nos componentes do tensor métrico depende do sistema de coordenadas utilizado.

Utilizando técnicas do problema de equivalência de métricas, desenvolvemos um procedimento independente de coordenadas para a obtenção de limites de espaços-tempos tanto na relatividade geral como em teorias alternativas da gravitação. Os limites de Schwarzschild quando  $m \rightarrow 0$  e  $m \rightarrow \infty$  são estudados estendendo os resultados de Geroch. Limites entre teorias também são analisados com esse método. Obtemos o limite de algumas soluções na teoria de Brans-Dicke quando a constante de acoplamento tende a infinito e verificamos a que soluções correspondem na relatividade geral. Propriedades genéricas de limites, ditas hereditárias, são também estudadas. Em especial, contruímos um diagrama de limites para a classificação de Segre. Devido à grande quantidade de cálculos envolvidos nesse tipo de estudo, o emprego da computação algébrica se mostra indispensável.

# Summary

## Limits of spacetimes in gravitation

In metric theories of gravitation the spacetime is represented by a four dimensional locally Lorentzian Riemannian manifold. The gravitational field is represented by the metric tensor  $g_{ab}$  defined on the manifold and usually described in a coordinate system. One may group, in families, metrics which differ by the value of one or more parameters. In the Schwarzschild family, for example, all metrics are identical apart from the value of the parameter mass  $m$ . Thus, one can devise the idea of limit of a family as one or more parameters tend to a certain value. As Geroch showed, the limit taken on the components of the metric tensor depends on the coordinate system used.

Using techniques of the equivalence problem of metrics, we developed a coordinate-free procedure to obtain the limits of spacetimes in general relativity and in alternative theories of gravitation. The limits of the Schwarzschild spacetime as  $m \rightarrow 0$  and  $m \rightarrow \infty$  are studied extending Geroch's results. Limits between theories are also analysed with this method. We obtain the limits of some exact solutions in the Brans-Dicke theory as the coupling constant tends to infinity and interpret them as exact solutions in general relativity. Generic properties of limits, which we shall call hereditaries, are also studied. In special, we build a limiting diagram for the Segre classification. Due to the amount of calculations involved in this kind of study, algebraic computation becomes essential.

# Índice

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Resumo em inglês . . . . .	iv
Índice . . . . .	v
Lista de figuras . . . . .	viii
Lista de tabelas . . . . .	ix
Lista de arquivos . . . . .	x
Notação e convenções . . . . .	xi
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O problema de equivalência na relatividade geral</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 A solução devida a Cartan . . . . .	6
1.3 O algoritmo de Karlhede . . . . .	11
1.4 Os escalares de Cartan algebricamente independentes . . . . .	14
1.5 Transformação de base . . . . .	19
1.6 Bases canônicas . . . . .	21
1.6.1 Classificação de Segre . . . . .	21
1.6.2 Classificação de Petrov . . . . .	27
1.6.3 Escolha de base canônica . . . . .	28

1.7	O problema inverso . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Aspectos práticos da solução do problema de equivalência</b>	<b>34</b>
2.1	Introdução . . . . .	34
2.2	O banco de dados de métricas . . . . .	35
2.3	Métrica de ondas planas . . . . .	41
<b>3</b>	<b>A família Schwarzschild</b>	<b>45</b>
3.1	Introdução . . . . .	45
3.2	Limite dos escalares de Cartan . . . . .	47
3.3	Método de limite com os escalares de Cartan . . . . .	50
3.4	Limites Petrov tipo N . . . . .	54
3.5	Outros limites Petrov N . . . . .	60
3.6	Comentários finais . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Método geral para obtenção de limites de espaços-tempos</b>	<b>67</b>
4.1	Introdução . . . . .	67
4.2	Propriedades hereditárias . . . . .	68
4.3	Procedimento geral — coordenadas . . . . .	78
4.4	Procedimento geral — bases . . . . .	81
4.4.1	Mudança de base na ordem 0 . . . . .	82
4.4.2	Mudança de base na ordem 1 e seguintes . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Limites na teoria de Brans-Dicke</b>	<b>86</b>
5.1	Introdução . . . . .	86
5.2	Os espaços-tempos de Nariai e O'Hanlon-Tupper . . . . .	87
5.3	A solução de Romero-Barros . . . . .	93
5.4	Comentários finais . . . . .	95
	<b>Conclusão</b>	<b>97</b>

<b>A - Apêndice: Arquivos de métricas</b>	<b>102</b>
<b>B - Apêndice: Transformações de base</b>	<b>109</b>
<b>Referências</b>	<b>113</b>



# Lista de Figuras

4.1	Especializações dos tipos de Petrov . . . . .	70
4.2	Especializações dos tipos de Segre . . . . .	71
4.3	Especializações dos tipos de Segre — diagrama simplificado . . . . .	72
4.4	Especializações dos tipos de Segre — diagrama simplificado parcial . . . . .	73
4.5	Especializações do polinômio característico e do polinômio mínimo . . . . .	75

# Lista de Tabelas

1.1	Notação para o algoritmo de Karlhede . . . . .	12
1.2	Escalares de Cartan independentes até ordem 3 . . . . .	18
1.3	Efeito da rotação nula nos escalares de Cartan de ordem 0 . . . . .	22
1.4	Efeito do produto das rotações temporal e espacial nos escalares de Cartan de ordem 0 . . . . .	23
1.5	Efeito do produto das rotações temporal e espacial nos escalares de Cartan de ordem 1 . . . . .	23
1.6	Efeito do produto das rotações temporal e espacial nos escalares de Cartan de ordem 2 . . . . .	24
1.7	Tipos de Petrov . . . . .	28
1.8	Notação dos grupos de isotropia . . . . .	30
1.9	Formas canônicas e grupo de isotropia para os tipos de Petrov . . . . .	30
1.10	Formas canônicas e grupo de isotropia para os tipos de Segre . . . . .	31
2.1	Banco de dados . . . . .	36
4.1	Tipos de Segre correspondentes a cada polinômio característico e a cada polinômio mínimo . . . . .	75

# Lista de Arquivos

A.1	Métrica de Schwarzschild . . . . .	102
A.2	Métrica de Kasner . . . . .	103
A.3	Métrica de Friedman-Robertson-Walker com seção espacial fechada . . . .	103
A.4	Métrica de Einstein . . . . .	104
A.5	Métrica de ondas planas . . . . .	105
A.6	Métrica de ondas planas Segre 0 . . . . .	106
A.7	Métrica de ondas planas na segunda base . . . . .	107
A.8	Métrica de ondas planas Petrov 0 . . . . .	108
B.1	Rotação nula para ondas planas . . . . .	109
B.2	Transformação para obter limite N de uma métrica tipo D . . . . .	110
B.3	Transformação para obter novos limites Petrov N . . . . .	110
B.4	Transformação $SO(3)$ . . . . .	111
B.5	Transformação de díadas geral . . . . .	112

# Notação e convenções

## 1. Índices

### (a) latinos minúsculos

- i. ( $a, b \dots = 0, 1, 2, 3$ ) são utilizados em componentes de tensores em base de coordenadas;
- ii. ( $a, b \dots; w', x' \dots = 0, 1$ ) são utilizados em componentes de espinores em base diádica;

### (b) latinos maiúsculos

- i. ( $A, B \dots = 0, 1, 2, 3$ ) são utilizados em componentes de tensores em base tetrádica;
- ii. ( $A, B \dots; W', X' \dots$ , com distintas variações) são utilizados em componentes de espinores na notação compacta para espinores simétricos. Nessa notação, define-se dois índices latinos maiúsculos, um sem linha e outro com linha, cujos valores são a soma dos valores dos índices sem linha e com linha, respectivamente. Por exemplo, um espinor simétrico  $\theta$  com 4 índices sem linha e 3 com linha será escrito como

$$\theta_{AW'} = \theta_{abcdw'x'y'}; A = a + b + c + d; W = w + x + y.$$

Nesse exemplo,  $A$  varia de 0 a 4 e  $W$  de 0 a 3.

## 2. Abreviaturas

(a) EC - escalares de Cartan (veja seção 1.2)

## 3. Simetrização e anti-simetrização

(a) Parênteses indicam simetrização.

(b) Colchetes indicam anti-simetrização.

(c) O fator  $1/n!$  está sempre incluído, onde  $n$  é o número de índices, por exemplo,

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T_{ij} + T_{ji}).$$

(d) Índices espinoriais sem e com linha são simetrizados e anti-simetrizados separadamente, mesmo que escrevamos, por exemplo,  $\Theta_{(aw'bx')}$ . Veja eq. (1.25).

## 4. Uma barra denota conjugação complexa, ou seja,

$$\overline{(a + bi)} = (a - bi)$$

onde  $a$  e  $b$  são reais.

# Introdução

A descrição clássica da interação gravitacional mais aceita atualmente é feita através da teoria da relatividade geral [30]. Teorias alternativas tais como a teoria de Brans-Dicke [4] e as teorias de Einstein-Cartan [16] também têm sido utilizadas na descrição da gravitação.

Na teoria da relatividade geral, o conjunto de todos os eventos se constitui no que chamamos de espaço-tempo. O espaço-tempo é matematicamente descrito por uma variedade diferenciável de dimensão 4. Sistemas de coordenadas são utilizados para referir os eventos, ou pontos na variedade. Sobre a variedade, construímos diversos objetos correspondendo a quantidades físicas. O campo gravitacional, em especial, corresponde a um tensor simétrico, o tensor métrico  $g_{ab}$ , de assinatura  $(+ - - -)$ . Sucintamente, dizemos que o espaço-tempo é uma variedade riemanniana e localmente lorentziana. Riemanniana por possuir uma métrica e lorentziana devido à assinatura da métrica.

A partir do tensor métrico e suas derivadas, construímos outros objetos tais como os símbolos de Christoffel, os tensores de Riemann, de Weyl, de Ricci, de Einstein, de Ricci sem traço, o escalar de curvatura e vetores de Killing. A definição desses objetos pode ser encontrada em qualquer texto básico de relatividade geral ou em [30]. As convenções utilizadas aqui podem ser encontradas em [38].

A distribuição de matéria é descrita pelo tensor momento-energia. As equações de campo de Einstein relacionam esse tensor com o tensor métrico e suas derivadas, constituindo um sistema de equações diferenciais parciais não linear. O movimento de partículas teste, aquelas cuja energia não contribui significativamente para o campo gravitacional, se dá ao longo de curvas geodéticas.

Cálculos e interpretações físicas são usualmente feitos utilizando um sistema de coordenadas. A arbitrariedade na escolha das coordenadas origina diversos problemas, que discutiremos a seguir.

Devido a sua alta complexidade, as equações de Einstein não possuem ainda uma solução geral. Pelo contrário, diversas soluções particulares foram encontradas impondo-se simetrias ao tensor métrico e restrições ao conteúdo material. A diversidade de sistemas de coordenadas utilizados para apresentação do tensor métrico é tal que muitas métricas originalmente pensadas como distintas são na realidade equivalentes, ou seja, são a mesma a menos de uma transformação de coordenadas.

O problema de determinar se duas métricas são equivalentes ou não é conhecido como *problema de equivalência*. A solução de Cartan para esse problema consiste basicamente em definir um conjunto de escalares por transformação de coordenadas, os *escalares de Cartan* (EC), que determinem localmente o tensor métrico. Na prática, os cálculos envolvidos tornam indispensável a utilização da computação algébrica. No dois primeiros capítulos desta tese, discutiremos detalhadamente o problema de equivalência, desde a solução devida a Cartan até detalhes prático-computacionais.

As soluções das equações de Einstein agrupam-se naturalmente em classes ou famílias. Os critérios podem ser os mais variados, como por exemplo grupos de simetria, propriedades causais, etc. Podemos agrupar aquelas soluções cujas métricas diferem apenas pelo valor de um ou mais parâmetros. Na família Schwarzschild, por exemplo, as métricas são iguais a menos do valor do parâmetro massa  $m$ . Esse critério é bastante útil para que possamos introduzir a noção de limite de um espaço-tempo.

Considere uma família de espaços-tempos, onde cada métrica difere pelo valor de um ou mais parâmetros. Estamos interessados em conhecer o espaço-tempo correspondente a valores limites dos parâmetros. Na família Schwarzschild, digamos, qual é a métrica no limite  $m \rightarrow \infty$ ? Em 1969, Geroch [18] mostrou que o limite depende do sistema de coordenadas utilizado para obtê-lo, apresentando 2 limites diferentes para Schwarzschild quando  $m \rightarrow \infty$ . Geroch mostra ainda de que maneira as coordenadas podem influenciar

o resultado final e discute diversas propriedades dos limites, a que chama de propriedades hereditárias.

Limites de espaços-tempos em gravitação é o assunto desta tese. Mostraremos como utilizar os EC para tornar precisa a idéia de limite. A utilização desse formalismo nos conduzirá a um método sistemático para a obtenção de limites de famílias de espaços-tempos independente de sistema de coordenadas. Novas propriedades hereditárias são estudadas e, em especial, as propriedades hereditárias da classificação de Segre. O método é estendido de forma a estudar limites em teorias alternativas da gravitação e seus limites na relatividade geral. Grande parte desses resultados foram por nós publicados [46, 45, 48]. A tese encontra-se dividida como segue.

No cap. 1 discutimos o problema de equivalência, e apresentamos a solução de Cartan. Mostramos como obter o algoritmo prático de Karlhede para o cálculo dos EC e discutimos diversas propriedades da métrica, ditas discretas, que podem ser obtidas com o auxílio do algoritmo e dos EC. Definimos o conjunto mínimo de EC algebricamente independentes utilizando o formalismo espinorial. Transformações de base dos EC são discutidas e apresentadas. Gostaríamos de exibir todas as transformações de base dos EC, porém o resultado tomaria diversas páginas e sua utilização prática seria duvidosa. Assim, optamos por apresentar a sequência de comandos do pacote de computação algébrica CLASSI para a obtenção das transformações no caso geral e imprimimos somente aquelas que achamos convenientes. Mostramos como obter uma base canônica para o cálculo dos EC e apresentamos as bases canônicas para cada tipo de Petrov e de Segre. Uma breve discussão sobre essas duas formas de classificação de soluções das equações de Einstein é apresentada. Finalmente, discutimos o problema inverso de equivalência.

No cap. 2 mostramos como utilizar a linguagem algébrica SHEEP e o pacote CLASSI no cálculo dos EC. Mostramos como preparar um arquivo contendo os comandos para o cálculo dos EC; descrevemos os principais comandos de CLASSI e apresentamos alguns exemplos. Discutimos a formação de um banco de dados contendo esses arquivos e o resumo dos resultados. Uma seção especial é dedicada às métricas de ondas planas que,



como veremos, são um limite bastante comum a outras famílias de espaços-tempos.

No cap. 3 estudaremos os limites da família Schwarzschild. Nesse capítulo, começamos um esboço do procedimento para obtenção de limites utilizando os EC. Os resultados desse capítulo foram, em sua maioria, publicados [46].

No cap. 4 generalizamos o método de investigação de limites introduzido no cap. 3. Além do método propriamente dito, discutimos as propriedades hereditárias e estendemos os resultados de Geroch sobre a classificação de Petrov, de forma a determinar as propriedades hereditárias da classificação de Segre. Um artigo contendo esse resultado está em fase de elaboração [48].

No cap. 5 discutimos limites na teoria de Brans-Dicke. Costuma-se afirmar que, sob determinadas circunstâncias, a teoria de Brans-Dicke tem como limite a teoria da relatividade geral quando a constante de acoplamento  $\omega \rightarrow \infty$ . Nós estendemos a formulação de limites discutida nos capítulos anteriores de forma a estudar os limites de algumas soluções das equações de campo da teoria de Brans-Dicke, e verificar a que soluções na relatividade geral esses limites correspondem. Os resultados aqui obtidos foram publicados [45].

Na conclusão, revemos os limites obtidos discutindo a sua relevância. Analisamos as principais características do nosso método de obtenção de limites e discutimos aplicações a outras situações. Refinamentos e extensões dessas técnicas são propostas e discutidas, incluindo o desenvolvimento de novos algoritmos e programas de computação algébrica.

No apêndice A apresentamos todos os arquivos com os comandos na linguagem algébrica SHEEP para os cálculos dos EC de todas as métricas aqui estudadas.

No apêndice B apresentamos os arquivos de comandos em SHEEP para executar diversas transformações de base utilizadas nesta tese.

# Capítulo 1

## O problema de equivalência na relatividade geral

### 1.1 Introdução

O problema de equivalência consiste em determinar se duas variedades  $M$  e  $\tilde{M}$  na relatividade geral são ou não localmente equivalentes, ou seja, se existe uma transformação de coordenadas

$$\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x) \tag{1.1}$$

tal que

$$g_{ab}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^a} \frac{\partial \tilde{x}^d}{\partial x^b} \tilde{g}_{cd}(\tilde{x}) \tag{1.2}$$

seja válido, onde  $g_{ab}(x)$  e  $\tilde{g}_{cd}(\tilde{x})$  são os componentes do tensor métrico de cada espaço-tempo nas bases de coordenadas referentes aos dois sistemas de coordenadas locais  $\{x\}$  e  $\{\tilde{x}\}$  respectivamente. Uma discussão mais detalhada incluindo desde as primeiras tentativas de solução desse problema até os sistemas de computação algébrica atualmente utilizados pode ser encontrada em [35] e referências lá contidas.

## 1.2 A solução devida a Cartan

Nessa seção discutiremos a solução do problema de equivalência obtida por Cartan [6]. Inicialmente definiremos os objetos necessários para podermos enunciar o teorema de Cartan.

Sejam  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $dx^i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) a base de coordenadas do espaço tangente à variedade em um ponto  $P$  e sua respectiva base dual no espaço cotangente, definidas em um aberto da variedade [65, 34]. Sejam  $e_A$  e  $\omega^A$  ( $A = 0, \dots, 3$ ) dois conjuntos de quatro campos vetoriais (tétradas) pertencentes aos espaços vetoriais tangente e cotangente à variedade em  $P$ , respectivamente, definidos em um aberto. Na base de coordenadas podemos expressá-los como

$$e_A = e_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.3)$$

e

$$\omega^A = \omega_i^A dx^i \quad (1.4)$$

onde os componentes das matrizes  $e_A^i$  e  $\omega_i^A$  são funções das coordenadas  $x^i$ . Se as matrizes  $e_A^i$  e  $\omega_i^A$  forem não singulares, os campos vetoriais de cada conjunto serão linearmente independentes em cada ponto  $P$  do aberto e constituirão bases dos espaços tangente e cotangente respectivamente. Essas bases são ditas duais se e só se [65, 34] as relações abaixo forem satisfeitas:

$$e_A^i \omega_i^B = \delta_A^B \quad \text{e} \quad e_A^i \omega_j^A = \delta_j^i. \quad (1.5)$$

A bases assim constituídas, definidas em um aberto da variedade, chamaremos de *bases tetrádicas*. Podemos expressar qualquer tensor em uma base tetrádica; em especial, o tensor métrico covariante ( $g_{ij}$ ) pode ser escrito como

$$\eta_{AB} = e_A^i e_B^j g_{ij} \quad (1.6)$$

de forma que o elemento de linha tem a seguinte expressão:

$$ds^2 = \eta_{AB} \omega^A \omega^B. \quad (1.7)$$

Em geral os componentes de  $\eta_{AB}$  são funções das coordenadas. Uma base tetrádica é dita *do tipo constante* se os componentes do tensor métrico  $\eta_{AB}$  expressos nessa base forem constantes. Nesta tese utilizamos três tipos de bases tetrádicas constantes, a saber, base tetrádica tipo Lorentz, tipo nulo e tipo semi-nulo. A matriz  $\eta_{AB}$  tem as seguintes formas em cada um desses tipos:

- base tetrádica tipo Lorentz

$$\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (1.8)$$

- base tetrádica tipo nulo

$$\eta_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

- base tetrádica tipo semi-nulo

$$\eta_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Duas bases tetrádicas serão ditas do mesmo *tipo* se corresponderem à mesma matriz  $\eta_{AB}$ , ou seja, se o tensor métrico tiver os mesmos componentes em ambas.

Utilizando-se (1.7), verifica-se que a expressão do elemento de linha em tétradas tipo

Lorentz, tipo nulo e tipo semi-nulo é

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 \quad (1.11)$$

$$ds^2 = 2\omega^0\omega^1 - 2\omega^2\omega^3 \quad (1.12)$$

$$ds^2 = 2\omega^0\omega^1 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 \quad (1.13)$$

respectivamente. Seja  $\theta^A$  ( $A = 0, \dots, 3$ ) uma base tetrádica tipo Lorentz. Mostra-se facilmente que as tétradas  $\omega^A$  e  $\sigma^A$ , definidas por

$$\begin{cases} \omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 + \theta^1) & \omega^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 - \theta^1) \\ \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^2 + i\theta^3) & \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^2 - i\theta^3) \end{cases} \quad (1.14)$$

e

$$\begin{cases} \sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 + \theta^1) & \sigma^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 - \theta^1) \\ \sigma^2 = \theta^2 & \sigma^3 = \theta^3 \end{cases} \quad (1.15)$$

constituem bases tetrádicas tipo nulo e semi-nulo, respectivamente.

Aos componentes do tensor de Riemann e de suas derivadas covariantes expressos em uma base tetrádica constante denominamos *escalares de Cartan* (EC), que de fato são escalares sob transformações de coordenadas. Um EC é dito de *ordem n* se corresponder à *énésima* derivada covariante do tensor de Riemann.

De posse dessas definições, o teorema de Cartan sobre o problema de equivalência pode ser enunciado na forma abaixo:

**Teorema (Cartan):** (1.16)

Duas métricas são localmente equivalentes se e só se seus escalares de Cartan até uma ordem finita, expressos em bases tetrádicas de mesmo tipo, forem iguais a menos de transformações de Lorentz (locais) e transformações de coordenadas.

Para decidir sobre a equivalência, basta calcular os EC até uma ordem finita, que denominaremos de  $c$ . O valor de  $c$  será discutido mais adiante.

É imediato verificar que a condição expressa no teorema é necessária para equivalência. De fato se as duas métricas são equivalentes, então é possível por transformações de Lorentz (locais) transformar a base tetrádica originalmente escolhida para expressar uma das métricas, na base tetrádica escolhida para a outra, de tal modo que os dois conjuntos de EC difiram apenas pela escolha de coordenadas. Então, com uma transformação de coordenadas, os dois conjuntos de EC tornam-se idênticos. Para a demonstração completa do teorema, veja o trabalho original de Cartan [6].

Discutimos, no que segue, o teorema de Cartan no contexto mais amplo de fibrado. Da forma como enunciamos o teorema, uma base tetrádica deve ser escolhida para que calculemos os EC. Para recuperarmos a formulação original de Cartan [6], vamos aplicar aos EC encontrados a transformação de Lorentz (local) mais geral. Dessa forma, os EC são funções não apenas das 4 coordenadas da variedade, mas também das 6 “coordenadas” ou parâmetros do grupo de Lorentz. Em outras palavras, os EC são agora funções das 10 coordenadas da variedade fibrado de Lorentz (veja, por exemplo, [13] para uma introdução a fibrados). Assim, o trecho “transformações de Lorentz (locais) e transformações de coordenadas” do teorema de Cartan pode ser substituído por “transformações de coordenadas do fibrado”.

Introduziremos agora o conceito de independência funcional, que nos será útil adiante. Por funções funcionalmente independentes nas variáveis  $y^i$ , entende-se funções, não constantes, que não satisfaçam a nenhuma relação independente das variáveis  $y^i$ . Sejam  $m$  funções  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) nas  $n$  variáveis  $y^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $n \geq m$ . A condição necessária e suficiente [31] para que essas funções sejam funcionalmente independentes é que ao menos

um dos determinantes (jacobianos) formados com  $m$  colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y^1} & \frac{\partial f_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y^1} & \frac{\partial f_2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y^1} & \frac{\partial f_m}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y^n} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

seja diferente de zero.

Podemos finalmente discutir o valor de  $c$ , ou seja, a última ordem de derivação necessária para decidir sobre a equivalência. Entre todos os EC, no máximo podem existir 10 funções funcionalmente independentes nas coordenadas da variedade fibrado. Entretanto, não é necessário que haja 10. Ao calcularmos sucessivamente os EC em cada ordem de derivação, podemos encontrar zero, 1 ou várias novas funções funcionalmente independentes. Mostra-se [6] que se em uma ordem  $n$  não há nenhuma nova função funcionalmente independente, então nas ordens seguintes tampouco haverá. Mostra-se ainda [6] que as ordens seguintes à primeira em que não há nenhuma nova função funcionalmente independente não são necessárias para testar a equivalência de métricas. Note, entretanto, que o conhecimento da ordem onde pela primeira vez não aparece nenhuma nova função funcionalmente independente é necessário.

Assim, a ordem de derivação máxima  $c$  que pode ser necessária é 10, caso apareça apenas 1 nova função funcionalmente independente a cada ordem (a primeira na ordem 0 e a décima na ordem 9, na ordem 10 não aparecendo nenhuma).

Como é suficiente conhecer os EC para decidirmos sobre a equivalência local de métricas, conclui-se que os EC contêm todas as informações locais sobre a métrica. O fato de serem escalares por transformação de coordenadas nos leva a dizer que os EC caracterizam o espaço-tempo localmente de uma maneira independente de coordenadas.

Vimos que entre os EC temos no máximo 10 funções funcionalmente independentes nas 10 coordenadas do fibrado. Se forem exatamente 10, podemos tomá-las como coordenadas sobre o fibrado. Os EC podem ser escritos como funções dessas novas 10 coordenadas.

Suponha agora que haja um número menor de funções. Seja  $f_c$  o número total de funções funcionalmente independentes encontrado até a última ordem de derivação  $c$  (inclusive). Podemos ainda tomá-las como as  $f_c$  primeiras coordenadas do fibrado, ditas *coordenadas fundamentais* do fibrado; as  $10 - f_c$  restantes são ditas *coordenadas ignoráveis*. Nesse caso, os EC dependem apenas dessas  $f_c$  coordenadas fundamentais do fibrado. Transformações de coordenadas no fibrado que envolvam apenas as  $10 - f_c$  coordenadas ignoráveis do fibrado não alteram os EC, e portanto correspondem ao grupo de isometrias  $G_c$  da métrica [6]. Podemos ainda separar as funções que dependem dos parâmetros do grupo de Lorentz daquelas que dependem das coordenadas [6]. Dessa forma podemos obter a dimensão do grupo de isotropia e da órbita do grupo de isometria. Discutiremos isso, na linguagem de tétradas, na próxima seção.

### 1.3 O algoritmo de Karlhede

Karlhede [27] desenvolveu um algoritmo para a solução prática do problema de equivalência. Duas idéias fundamentais estão por trás desse algoritmo.

A primeira é devida a Brans [3]. Consiste em fixar a base escolhendo uma forma canônica para os EC. Como consequência, para testar a equivalência de duas métricas teremos que verificar se existem transformações apenas de coordenadas, que tornem iguais os EC.

Dito de outra maneira. Escolher uma base significa escolher um valor para os parâmetros do grupo de Lorentz. Dessa forma, os EC passam a ser função apenas das coordenadas na variedade. Assim separa-se naturalmente, entre as  $f_c \leq 10$  funções funcionalmente independentes nas coordenadas do fibrado, as  $t_c \leq 4$  funções funcionalmente independentes nas coordenadas das  $l_c \leq 6$  funções funcionalmente independentes nos parâmetros do grupo de Lorentz. Note que  $f_c = t_c + l_c$ .

Há casos em que a base não pode ser completamente fixada. Existirá então um subgrupo do grupo de Lorentz que não altera a forma canônica escolhida. Esse grupo constitui o grupo de isotropia ( $H_c$ ) da métrica, com dimensão  $6 - l_c$ . O grupo de isotropia é utilizado



$R_n$	escalares de Cartan (EC) até ordem $n$
$t_n$	$n^\circ$ de funções funcionalmente independentes nas coordenadas em $R_n$
$l_n$	$n^\circ$ de funções func. ind. nos parâmetros do grupo de Lorentz em $R_n$
$f_n$	$n^\circ$ de funções func. ind. nas coordenadas do fibrado em $R_n$
$G_n$	grupo de isometria de $R_n$ ou grupo de isometria até ordem $n$
$d_n$	dimensão da órbita de $G_n$
$H_n$	grupo de isotropia de $R_n$ ou grupo de isotropia até ordem $n$
$c$	última ordem de derivação.

Tabela 1.1: Notação para o algoritmo de Karlhede.

Note que  $R_n$  é constituído pelos EC de ordem  $0, 1, \dots, n$ .

A dimensão do grupo de isometria em cada ordem é dada por  $\dim(G_n) = d_n + \dim(H_n)$ .

A dimensão da órbita do grupo de isometria em cada ordem é dada por  $d_n = 4 - t_n$ .

A dimensão do grupo de isotropia em cada ordem é dada por  $\dim(H_n) = 6 - l_n$ .

para caracterizar simetria por rotação [30].

Como vimos no final da seção anterior, a dimensão do grupo de isometria é  $\dim(G_c) = 10 - f_c = (6 + 4) - (l_c + t_c) = (6 - l_c) + (4 - t_c) = \dim(H_c) + d_c$ . As  $4 - t_c$  dimensões extras do grupo de isometria correspondem à dimensão  $d_c$  de sua órbita sobre a variedade. A órbita do grupo de isometria é interpretada como uma hipersuperfície de homogeneidade [30]. Um espaço-tempo é dito homogêneo se a órbita do grupo de isometria for toda a variedade. Essa situação corresponde a ter todos os EC constantes, em uma base canônica.

A segunda idéia fundamental do algoritmo se deve ao próprio Karlhede e consiste em um aprimoramento da idéia anterior. Fixa-se a base o mais possível a cada ordem de derivação. Isso diminui a quantidade de cálculos necessários, tornando o procedimento passível de ser implementado em um computador. Assim, denotando por  $R_n$  os EC até ordem  $n$  (inclusive), estende-se os conceitos de grupo de isometria ( $G_c$ ) e isotropia ( $H_c$ ), dimensão da órbita do grupo de isometria ( $d_c$ ) e número de funções funcionalmente independentes ( $f_c, t_c, l_c$ ) entre os EC, para conceitos análogos para cada etapa  $R_n$ , ou seja,  $G_n, H_n, d_n, f_n, t_n$  e  $l_n$ . Na tab. 1.1 sintetizamos essa notação. O algoritmo naturalmente se divide em ordens de derivação começando na ordem 0 e terminando na ordem  $c$ .

Vamos começar pela descrição da ordem 0. Escolhe-se uma base tetrádica constante e

calcula-se os EC de ordem 0, ou seja, os componentes do tensor de Riemann. Utilizando transformações de Lorentz (locais), encontra-se uma base canônica para a ordem 0, ou seja, uma base na qual os elementos de  $R_0$  assumem uma forma canônica. Encontra-se o grupo de isotropia  $H_0$  de  $R_0$  e o número  $t_0$  de funções funcionalmente independentes nas coordenadas, obtendo-se a dimensão  $d_0$  da órbita do grupo de isometria até ordem 0.

O procedimento para encontrar a base canônica e o grupo de isometria será tratado na seção 1.6. O número de funções funcionalmente independentes nas coordenadas em cada ordem é obtido calculando-se os jacobianos entre as possíveis candidatas a funções funcionalmente independentes [veja eq. (1.17)].

As ordens seguintes do algoritmo podem ser descritas como se segue.

Calcula-se os EC de ordem  $n$ , obtendo-se  $R_n$  (note que  $R_n$  consiste em todos os EC desde a ordem 0 até a ordem  $n$ ). Utilizando-se transformações do grupo de isotropia  $H_{n-1}$  de  $R_{n-1}$ , encontra-se uma base canônica para  $R_n$ . Então encontramos o grupo de isotropia  $H_n$  e o número  $t_n$  de funções funcionalmente independentes nas coordenadas até ordem  $n$  e daí a dimensão  $d_n$  da órbita de  $G_n$ .

Se as dimensões da órbita e do grupo de isotropia até essa ordem forem iguais às dimensões até a ordem anterior, significa, na linguagem de fibrados, que não apareceu nenhuma nova função funcionalmente independente nas coordenadas e nos parâmetros do grupo de Lorentz. Assim, de acordo com o teorema de Cartan, esta é a última ordem necessária (c). Caso contrário, prossegue-se para a ordem seguinte.

Dito de outra maneira. Se  $d_n = d_{n-1}$  e  $\dim(H_n) = \dim(H_{n-1})$  o algoritmo pára. Caso contrário, prossegue. Para a maioria das métricas estudadas, a segunda ou terceira derivadas costumam ser suficientes. Em apenas uma situação [29], a quarta ordem foi necessária. Limites superiores teóricos para a ordem máxima de derivação foram encontrados por Karlhede [27] e continuam sendo estudados por outros autores [9, 7, 8].

## 1.4 Os escalares de Cartan algebricamente independentes

Nem todos os componentes do tensor de Riemann e suas derivadas covariantes são algebricamente independentes, eles estão relacionados pelas identidades de Bianchi e de Ricci. Mostraremos nesta seção um conjunto mínimo de objetos algebricamente independentes, obtido por MacCallum e Åman [37]. Esse resultado está expresso na forma espinorial. Os resultados fundamentais do cálculo espinorial podem ser encontrados em [44, 55, 51]. A seguir apresentaremos apenas o necessário para a compreensão do restante deste capítulo.

O espaço espinorial é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo dos complexos. Os índices dos componentes de espinores são denotados por letras latinas minúsculas valendo 0 ou 1. São definidos dois espaços espinoriais. Para diferenciar espinores de um e outro, os índices dos componentes são denotados por  $a, b$  etc. ou por  $a', b'$  etc. Daí chamarmos ao primeiro de espaço espinorial sem linha e ao segundo de espaço espinorial com linha.

Dois espinores (uma díada) linearmente independentes constituem uma base, chamada de base diádica. Para o espaço vetorial sem linha, a base diádica é usualmente denotada pelas letras gregas ômicron ( $o$ ) e iota ( $\iota$ ). Para o espaço vetorial com linha denotamos a base diádica por  $\bar{o}$  e  $\bar{\iota}$ . Além da normalização impõe-se que os componentes dos espinores de base de um e outro espaço sejam o complexo conjugado um do outro, ou seja

$$\begin{aligned} o_a \iota^a &= \bar{o}_{w'} \bar{\iota}^{w'} = 1 \\ \bar{o}^{w'} &= \overline{o^w} \\ \bar{\iota}^{w'} &= \overline{\iota^w} \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde a barra denota conjugação complexa.

Espinores de ordem superior são definidos como elementos do produto tensorial de espaços espinoriais. Um espinor com o mesmo número de índices sem e com linha é dito

hermitiano se e só se seus componentes satisfizerem a relação

$$H_{a\dots bw'\dots x'} = \overline{H_{a'\dots b'w\dots x}} . \quad (1.19)$$

Pode-se mostrar [44] que essa propriedade independe de base.

A cada tensor no espaço tangente à variedade em um ponto  $P$ , associamos um espinor. Os vetores da base tetrádica tipo nulo estão associados aos espinores da base diádica pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \omega^0 &\leftrightarrow o\bar{o} \\ \omega^1 &\leftrightarrow i\bar{i} \\ \omega^2 &\leftrightarrow o\bar{i} \\ \omega^3 &\leftrightarrow i\bar{o} \end{aligned} \quad (1.20)$$

O tensor de Riemann pode ser decomposto em três partes irredutíveis: o tensor de Weyl, o tensor de Ricci sem traço e o escalar de curvatura. A cada um desses tensores corresponde um espinor simétrico em todos seus índices sem e com linha, a saber:

$$\begin{aligned} \Psi_{abcd} &\text{ espinor de Weyl} \\ \Phi_{abw'x'} &\text{ espinor de Ricci (hermitiano)} \\ \Lambda &\text{ escalar de curvatura (real).} \end{aligned} \quad (1.21)$$

As identidades de Bianchi podem então ser escritas como [37]

$$\nabla_{w'}^a \Psi_{abcd} = \nabla_{(b}^{x'} \Phi_{cd)x'w'} \quad (1.22)$$

$$\nabla^{aw'} \Phi_{abw'x'} = -3\nabla_{bx'} \Lambda \quad (1.23)$$

onde o operador de derivação covariante  $\nabla_{aw'}$  é hermitiano.

Utiliza-se uma notação compacta para espinores simétricos [51]. Como a ordem dos índices não é relevante, definimos dois índices latinos maiúsculos, um sem linha e outro com linha, cujos valores são a soma dos valores dos índices sem linha e com linha, respectivamente. Por exemplo, um espinor simétrico  $\theta$  com 4 índices sem linha e 3 com linha

será escrito como  $\theta_{AW'} = \theta_{abcdw'x'y'}$  onde  $A = a + b + c + d$  e  $W = w + x + y$ . Nesse exemplo,  $A$  varia de 0 a 4 e  $W$  de 0 a 3. A seguir escrevemos nessa notação compacta os espinores que serão utilizados para definir o conjunto mínimo algebricamente independente.

- Espinores de Weyl, Ricci e escalar de curvatura:

$$\begin{aligned}\Psi_A &= \Psi_{abcd} \\ \Phi_{AW'} &= \Phi_{abw'x'} \\ \Lambda &.\end{aligned}\tag{1.24}$$

- Derivadas covariantes simetrizadas:

$$\begin{aligned}\nabla^n \Psi_{AW'} &= \underbrace{\nabla_{(aw'} \nabla_{bx'} \cdots \nabla_{cy')}^n}_{n} \Psi_{defg} \\ \nabla^n \Phi_{AW'} &= \underbrace{\nabla_{(aw'} \nabla_{bx'} \cdots \nabla_{cy')}^n}_{n} \Phi_{dez'u'} \\ \nabla^n \Lambda_{AW'} &= \underbrace{\nabla_{(aw'} \nabla_{bx'} \cdots \nabla_{cy')}^n}_{n} \Lambda.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Note que índices com linha e sem linha são simetrizados separadamente. Para  $n = 0$  a notação (1.25) se reduz à notação (1.24) dos espinores de Weyl, Ricci e do escalar de curvatura.

- O espinor  $\Xi_{abcw'}$  é definido como um dos membros da primeira identidade de Bianchi [eq. (1.22)], ou seja,

$$\Xi_{bcdw'} \stackrel{def}{=} \nabla_{w'}^a \Psi_{abcd} = \nabla_{(b}^{x'} \Phi_{cd)x'w'} .\tag{1.26}$$

É denotado na notação compacta, juntamente com suas derivadas covariantes, por

$$\nabla^n \Xi_{AW'} = \underbrace{\nabla_{(aw'} \nabla_{bx'} \cdots \nabla_{cy')}^n}_{n} \Xi_{defz'} .\tag{1.27}$$

- Operador d'alembertiano,

$$\square \stackrel{def}{=} \nabla_a^{w'} \nabla_{w'}^a .\tag{1.28}$$

De posse dessas definições, podemos enumerar o conjunto mínimo de EC algebricamente independentes obtido por MacCallum e Åman [37] para uma ordem de derivação genérica  $n$ .

1.  $\nabla^n \Psi_{AW'}$
2.  $\nabla^n \Phi_{AW'}$
3.  $\nabla^n \Lambda_{AW'}$
4.  $\nabla^{(n-1)} \Xi_{AW'}$  para  $n \geq 1$
5.  $\square Q_{AW'}$  para  $n \geq 2$ , onde  $Q$  são todos os elementos do conjunto mínimo de ordem 0 até ordem  $(n - 2)$ .

Note que  $\nabla^n \Phi_{AW'}$  e  $\nabla^n \Lambda_{AW'}$  são hermitianos, assim como  $\square Q_{AW'}$  se  $Q_{AW'}$  for um espinor hermitiano. Na notação compacta para espinores simétricos, a hermiticidade de um espinor genérico  $H_{AW'}$  é escrita como

$$\overline{H_{AW'}} = H_{WA'}. \quad (1.29)$$

Assim, o componente  $H_{AW'}$  de um espinor hermitiano é algebricamente dependente do componente  $H_{WA'}$ . Cabe também notar que os componentes  $H_{AW'}$  são reais se  $A = W$  e que os escalares espinoriais  $\Lambda$ ,  $\square \Lambda$ ,  $\square^2 \Lambda$  etc. são também reais.

Na tab. 1.2 apresentamos explicitamente todos os elementos do conjunto mínimo até ordem 3. Observe que os EC são escalares por transformação de coordenadas, mas não são necessariamente escalares por transformação de base. Porém  $\Lambda$ ,  $\square \Lambda$ ,  $\square^2 \Lambda$  etc. são também escalares por transformação de base. Note que eles só aparecem nas ordens 0, 2, 4 etc, ou seja, nas ordens pares.

## 1.5 Transformação de base

A cada transformação de Lorentz da base tetrádica no espaço tangente corresponde uma (rigorosamente duas) transformação do SU(2) da base diádica no espaço espinorial. De forma a preservar as relações (1.18) a base diádica se transforma como

$$\begin{pmatrix} \widetilde{o} \\ \widetilde{\iota} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o \\ \iota \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \widetilde{\bar{o}} \\ \widetilde{\bar{\iota}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{o} \\ \bar{\iota} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

onde a matriz de transformação tem determinante 1, ou seja,

$$ad - bc = 1. \quad (1.31)$$

Toda transformação de base diádica pode ser decomposta nas três transformações que estudaremos a seguir [51].

**Rotação nula** - As rotações nulas mantendo  $\omega^0$  ou  $\omega^1$  fixos têm, respectivamente, as seguintes representações matriciais:

$$Na = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{onde } a \text{ é complexo} \quad (1.32)$$

e

$$Nb = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{onde } b \text{ é complexo.} \quad (1.33)$$

**Rotação espacial** - A rotação espacial no plano  $\omega^2 - \omega^3$  tem como representação

$$E = \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix} \quad \text{onde } \omega \text{ é real.} \quad (1.34)$$

**Rotação temporal** - Também conhecida como transformação de Lorentz pura. A

rotação temporal no plano  $\omega^0 - \omega^1$  tem a representação

$$T = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{onde } z \text{ é real.} \quad (1.35)$$

O efeito das rotações espacial e temporal acima pode ser apresentado de forma mais compacta pelo produto (comutativo) de (1.34) e (1.35), cuja representação matricial é

$$ET = TE = \begin{pmatrix} ze^{i\omega} & 0 \\ 0 & z^{-1}e^{-i\omega} \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

A partir de (1.30) podemos obter a lei de transformação da base diádica para cada uma das transformações acima e então, utilizando (1.20) obtemos a lei de transformação da base tetrádica tipo nulo. Dessa forma podemos mostrar que de fato  $\omega^0$  e  $\omega^1$  permanecem inalterados sob as transformações (1.32) e (1.33) respectivamente e que os planos  $\omega^2 - \omega^3$  e  $\omega^0 - \omega^1$  são de fato os planos de rotação das transformações (1.34) e (1.35) respectivamente. Vamos mostrar explicitamente como isso é feito no caso da rotação temporal. A partir de (1.30) temos que  $\tilde{o} = zo$  e  $\tilde{t} = z^{-1}t$  e então, de (1.20) verificamos que  $\tilde{\omega}^0 = z^2\omega^0$ ,  $\tilde{\omega}^1 = z^{-2}\omega^1$ ,  $\tilde{\omega}^2 = \omega^2$  e  $\tilde{\omega}^3 = \omega^3$ . Assim, a transformação se dá no plano  $\omega^0 - \omega^1$ . De (1.14) observamos que esse é o plano  $\theta^0 - \theta^1$ , ou seja, um plano tipo tempo, justificando a denominação *rotação temporal* para essa transformação.

Para efeito de transformação de base diádica, apenas os valores que os índices podem assumir importam. Assim, todos os d'alembertianos se transformam como os espinores originais, isto é,  $\square^n Q_{AW'}$  transforma-se como  $Q_{AW'}$ . Portanto não apresentaremos a lei de transformação de d'alembertianos. Analogamente,  $\nabla^n \Lambda_{AW'}$  transforma-se como  $\nabla^{(n-2)} \Phi_{AW'}$  (confira a lei de transformação de  $\nabla^2 \Lambda_{AW'}$  na tab. 1.6 com a lei de transformação de  $\Phi_{AW'}$  na tab. 1.4).

As tabs. 1.3 e 1.4 mostram o resultado das transformações de base diádica nos escalares de Cartan de ordem 0. As tabs. 1.5 e 1.6 mostram o efeito do produto das rotações temporal e espacial sobre os escalares de Cartan de ordem 1 e 2. Para as demais



transformações os resultados tornam-se muito longos. Portanto, nesses casos, apresentaremos apenas situações particulares, à medida que for necessário. Essas tabelas foram obtidas com o uso do sistema de computação algébrica SHEEP e do pacote CLASSI. Os resultados foram transportados diretamente para o processador de texto Latex (com o qual esta tese foi escrita), de forma a não conter erros de datilografia. O pacote CLASSI será discutido em detalhes no cap. 2. O arquivo B.5 no apêndice B apresenta os comandos em CLASSI para se obter não apenas as transformações de base mostradas aqui mas também as transformações para ordens superiores.

## 1.6 Bases canônicas

Tanto o tensor métrico quanto os escalares de Cartan privilegiam direções na variedade. Podemos utilizar essas direções para determinar a orientação dos vetores da base tetrádica, ou seja, para fixar a base canônica. Na ordem zero do algoritmo de Karlhede, quando apenas o tensor de Riemann está calculado, a base é fixada a partir de informações obtidas com as classificações de Petrov e Segre. Esta seção se divide em três subseções. Nas duas subseções seguintes estudaremos as classificações de Petrov e Segre e, finalmente, na subseção 1.6.3 mostraremos como encontrar uma base canônica.

### 1.6.1 Classificação de Segre

Classificação de Segre é a expressão usual para denominar-se a classificação algébrica em tipos de Segre do tensor de Ricci sem traço

$$S_b^a \stackrel{def}{=} R_b^a - \frac{1}{n} \delta_b^a R \quad (1.37)$$

onde  $n$  é a dimensão da variedade, igual a 4 na relatividade geral. Devido às equações de Einstein, esse tensor e o tensor momento-energia têm sempre o mesmo tipo de Segre [44].

Para classificá-lo, construímos um problema de autovalores e autovetores [68], que consiste em encontrar os valores de  $\lambda$  para os quais o sistema de  $n$  equações lineares

$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_0 &= \Psi_0 \\ \tilde{\Psi}_1 &= a\Psi_0 + \Psi_1 \\ \tilde{\Psi}_2 &= a^2\Psi_0 + 2a\Psi_1 + \Psi_2 \\ \tilde{\Psi}_3 &= a^3\Psi_0 + 3a^2\Psi_1 + 3a\Psi_2 + \Psi_3 \\ \tilde{\Psi}_4 &= a^4\Psi_0 + 4a^3\Psi_1 + 6a^2\Psi_2 + 4a\Psi_3 + \Psi_4\end{aligned}$ $\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{00'} &= \Phi_{00'} \\ \tilde{\Phi}_{01'} &= \bar{a}\Phi_{00'} + \Phi_{01'} \\ \tilde{\Phi}_{02'} &= \bar{a}^2\Phi_{00'} + 2\bar{a}\Phi_{01'} + \Phi_{02'} \\ \tilde{\Phi}_{11'} &= a\bar{a}\Phi_{00'} + a\Phi_{01'} + \bar{a}\overline{\Phi_{01'}} + \Phi_{11'} \\ \tilde{\Phi}_{12'} &= a\bar{a}^2\Phi_{00'} + 2a\bar{a}\Phi_{01'} + a\Phi_{02'} + \bar{a}^2\overline{\Phi_{01'}} + 2\bar{a}\Phi_{11'} + \Phi_{12'} \\ \tilde{\Phi}_{22'} &= a^2\bar{a}^2\Phi_{00'} + 2a^2\bar{a}\overline{\Phi_{01'}} + a^2\Phi_{02'} + 2a\bar{a}^2\overline{\Phi_{01'}} + 4a\bar{a}\Phi_{11'} + 2a\Phi_{12'} + \\ &\quad + \bar{a}^2\overline{\Phi_{02'}} + 2\bar{a}\overline{\Phi_{12'}} + \Phi_{22'}\end{aligned}$ $\tilde{\Lambda} = \Lambda$
$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_0 &= b^4\Psi_4 + 4b^3\Psi_3 + 6b^2\Psi_2 + 4b\Psi_1 + \Psi_0 \\ \tilde{\Psi}_1 &= b^3\Psi_4 + 3b^2\Psi_3 + 3b\Psi_2 + \Psi_1 \\ \tilde{\Psi}_2 &= b^2\Psi_4 + 2b\Psi_3 + \Psi_2 \\ \tilde{\Psi}_3 &= b\Psi_4 + \Psi_3 \\ \tilde{\Psi}_4 &= \Psi_4\end{aligned}$ $\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{00'} &= b^2\bar{b}^2\Phi_{22'} + 2b^2\bar{b}\overline{\Phi_{12'}} + b^2\overline{\Phi_{02'}} + 2b\bar{b}^2\Phi_{12'} + 4b\bar{b}\overline{\Phi_{11'}} + 2b\overline{\Phi_{01'}} + \\ &\quad + \bar{b}^2\Phi_{02'} + 2\bar{b}\Phi_{01'} + \Phi_{00'} \\ \tilde{\Phi}_{01'} &= b^2\bar{b}\Phi_{22'} + b^2\overline{\Phi_{12'}} + 2b\bar{b}\Phi_{12'} + 2b\Phi_{11'} + \bar{b}\Phi_{02'} + \Phi_{01'} \\ \tilde{\Phi}_{02'} &= b^2\Phi_{22'} + 2b\Phi_{12'} + \Phi_{02'} \\ \tilde{\Phi}_{11'} &= b\bar{b}\Phi_{22'} + b\overline{\Phi_{12'}} + \bar{b}\Phi_{12'} + \Phi_{11'} \\ \tilde{\Phi}_{12'} &= b\Phi_{22'} + \Phi_{12'} \\ \tilde{\Phi}_{22'} &= \Phi_{22'}\end{aligned}$ $\tilde{\Lambda} = \Lambda$

Tabela 1.3: Efeito da rotação nula nos escalares de Cartan de ordem 0. O primeiro quadro corresponde à rotação nula (1.32) com  $\omega^0$  fixo enquanto que o segundo corresponde à rotação nula (1.33) com  $\omega^1$  fixo.

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{\Psi}_0 = & z^4 e^{4iw} \Psi_0 \\
 \tilde{\Psi}_1 = & z^2 e^{2iw} \Psi_1 \\
 \tilde{\Psi}_2 = & \Psi_2 \\
 \tilde{\Psi}_3 = & z^{-2} e^{-2iw} \Psi_3 \\
 \tilde{\Psi}_4 = & z^{-4} e^{-4iw} \Psi_4 \\
 \\ 
 \tilde{\Lambda} = & \Lambda
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \tilde{\Phi}_{00'} = & z^4 \Phi_{00'} \\
 \tilde{\Phi}_{01'} = & z^2 e^{2iw} \Phi_{01'} \\
 \tilde{\Phi}_{02'} = & e^{4iw} \Phi_{02'} \\
 \tilde{\Phi}_{11'} = & \Phi_{11'} \\
 \tilde{\Phi}_{12'} = & z^{-2} e^{2iw} \Phi_{12'} \\
 \tilde{\Phi}_{22'} = & z^{-4} \Phi_{22'}
 \end{array}$$

Tabela 1.4: Efeito do produto (1.36) das rotações temporal e espacial nos escalares de Cartan de ordem 0.

$$\begin{array}{ll}
 \widetilde{\nabla}\Psi_{00'} = & z^6 e^{4iw} \nabla\Psi_{00'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{01'} = & z^4 e^{6iw} \nabla\Psi_{01'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{10'} = & z^4 e^{2iw} \nabla\Psi_{10'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{11'} = & z^2 e^{4iw} \nabla\Psi_{11'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{20'} = & z^2 \nabla\Psi_{20'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{21'} = & e^{2iw} \nabla\Psi_{21'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{30'} = & e^{-2iw} \nabla\Psi_{30'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{31'} = & z^{-2} \nabla\Psi_{31'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{40'} = & z^{-2} e^{-4iw} \nabla\Psi_{40'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{41'} = & z^{-4} e^{-2iw} \nabla\Psi_{41'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{50'} = & z^{-4} e^{-6iw} \nabla\Psi_{50'} \\
 \widetilde{\nabla}\Psi_{51'} = & z^{-6} e^{-4iw} \nabla\Psi_{51'} \\
 \\ 
 \widetilde{\nabla}\Lambda_{00'} = & z^2 \nabla\Lambda_{00'} \\
 \widetilde{\nabla}\Lambda_{01'} = & e^{2iw} \nabla\Lambda_{01'} \\
 \widetilde{\nabla}\Lambda_{11'} = & z^{-2} \nabla\Lambda_{11'}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \widetilde{\nabla}\Phi_{00'} = & z^6 \nabla\Phi_{00'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{01'} = & z^4 e^{2iw} \nabla\Phi_{01'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{02'} = & z^2 e^{4iw} \nabla\Phi_{02'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{03'} = & e^{6iw} \nabla\Phi_{03'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{11'} = & z^2 \nabla\Phi_{11'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{12'} = & e^{2iw} \nabla\Phi_{12'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{13'} = & z^{-2} e^{4iw} \nabla\Phi_{13'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{22'} = & z^{-2} \nabla\Phi_{22'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{23'} = & z^{-4} e^{2iw} \nabla\Phi_{23'} \\
 \widetilde{\nabla}\Phi_{33'} = & z^{-6} \nabla\Phi_{33'} \\
 \\ 
 \tilde{\Xi}_{00'} = & z^4 e^{2iw} \Xi_{00'} \\
 \tilde{\Xi}_{01'} = & z^2 e^{4iw} \Xi_{01'} \\
 \tilde{\Xi}_{10'} = & z^2 \Xi_{10'} \\
 \tilde{\Xi}_{11'} = & e^{2iw} \Xi_{11'} \\
 \tilde{\Xi}_{20'} = & e^{-2iw} \Xi_{20'} \\
 \tilde{\Xi}_{21'} = & z^{-2} \Xi_{21'} \\
 \tilde{\Xi}_{30'} = & z^{-2} e^{-4iw} \Xi_{30'} \\
 \tilde{\Xi}_{31'} = & z^{-4} e^{-2iw} \Xi_{31'}
 \end{array}$$

Tabela 1.5: Efeito do produto (1.36) das rotações temporal e espacial nos escalares de Cartan de ordem 1.

$\widetilde{\nabla^2\Psi_{00'}} = z^8 e^{4iw} \nabla^2\Psi_{00'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{00'}} = z^8 \nabla^2\Phi_{00'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{01'}} = z^6 e^{6iw} \nabla^2\Psi_{01'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{01'}} = z^6 e^{2iw} \nabla^2\Phi_{01'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{02'}} = z^4 e^{8iw} \nabla^2\Psi_{02'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{02'}} = z^4 e^{4iw} \nabla^2\Phi_{02'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{10'}} = z^6 e^{2iw} \nabla^2\Psi_{10'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{03'}} = z^2 e^{6iw} \nabla^2\Phi_{03'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{11'}} = z^4 e^{4iw} \nabla^2\Psi_{11'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{04'}} = e^{8iw} \nabla^2\Phi_{04'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{12'}} = z^2 e^{6iw} \nabla^2\Psi_{12'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{11'}} = z^4 \nabla^2\Phi_{11'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{20'}} = z^4 \nabla^2\Psi_{20'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{12'}} = z^2 e^{2iw} \nabla^2\Phi_{12'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{21'}} = z^2 e^{2iw} \nabla^2\Psi_{21'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{13'}} = e^{4iw} \nabla^2\Phi_{13'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{22'}} = e^{4iw} \nabla^2\Psi_{22'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{14'}} = z^{-2} e^{6iw} \nabla^2\Phi_{14'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{30'}} = z^2 e^{-2iw} \nabla^2\Psi_{30'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{22'}} = \nabla^2\Phi_{22'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{31'}} = \nabla^2\Psi_{31'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{23'}} = z^{-2} e^{2iw} \nabla^2\Phi_{23'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{32'}} = z^{-2} e^{2iw} \nabla^2\Psi_{32'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{24'}} = z^{-4} e^{4iw} \nabla^2\Phi_{24'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{40'}} = e^{-4iw} \nabla^2\Psi_{40'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{33'}} = z^{-4} \nabla^2\Phi_{33'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{41'}} = z^{-2} e^{-2iw} \nabla^2\Psi_{41'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{34'}} = z^{-6} e^{2iw} \nabla^2\Phi_{34'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{42'}} = z^{-4} \nabla^2\Psi_{42'}$	$\widetilde{\nabla^2\Phi_{44'}} = z^{-8} \nabla^2\Phi_{44'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{50'}} = z^{-2} e^{-6iw} \nabla^2\Psi_{50'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{00'}} = z^6 e^{2iw} \nabla^2\Xi_{00'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{51'}} = z^{-4} e^{-4iw} \nabla^2\Psi_{51'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{01'}} = z^4 e^{4iw} \nabla^2\Xi_{01'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{52'}} = z^{-6} e^{-2iw} \nabla^2\Psi_{52'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{02'}} = z^2 e^{6iw} \nabla^2\Xi_{02'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{60'}} = z^{-4} e^{-8iw} \nabla^2\Psi_{60'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{10'}} = z^4 \nabla^2\Xi_{10'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{61'}} = z^{-6} e^{-6iw} \nabla^2\Psi_{61'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{11'}} = z^2 e^{2iw} \nabla^2\Xi_{11'}$
$\widetilde{\nabla^2\Psi_{62'}} = z^{-8} e^{-4iw} \nabla^2\Psi_{62'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{12'}} = e^{4iw} \nabla^2\Xi_{12'}$
$\widetilde{\nabla^2\Lambda_{00'}} = z^4 \nabla^2\Lambda_{00'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{20'}} = z^2 e^{-2iw} \nabla^2\Xi_{20'}$
$\widetilde{\nabla^2\Lambda_{01'}} = z^2 e^{2iw} \nabla^2\Lambda_{01'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{21'}} = \nabla^2\Xi_{21'}$
$\widetilde{\nabla^2\Lambda_{02'}} = e^{4iw} \nabla^2\Lambda_{02'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{22'}} = z^{-2} e^{2iw} \nabla^2\Xi_{22'}$
$\widetilde{\nabla^2\Lambda_{11'}} = \nabla^2\Lambda_{11'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{30'}} = e^{-4iw} \nabla^2\Xi_{30'}$
$\widetilde{\nabla^2\Lambda_{12'}} = z^{-2} e^{2iw} \nabla^2\Lambda_{12'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{31'}} = z^{-2} e^{-2iw} \nabla^2\Xi_{31'}$
$\widetilde{\nabla^2\Lambda_{22'}} = z^{-4} \nabla^2\Lambda_{22'}$	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{32'}} = z^{-4} \nabla^2\Xi_{32'}$
	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{40'}} = z^{-2} e^{-6iw} \nabla^2\Xi_{40'}$
	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{41'}} = z^{-4} e^{-4iw} \nabla^2\Xi_{41'}$
	$\widetilde{\nabla^2\Xi_{42'}} = z^{-6} e^{-2iw} \nabla^2\Xi_{42'}$

Tabela 1.6: Efeito do produto (1.36) das rotações temporal e espacial nos escalares de Cartan de ordem 2. Os d'alembertianos não estão incluídos por razões explicadas no texto.

homogêneas

$$(S_b^a - \lambda \delta_b^a) V^b = 0 \tag{1.38}$$

em  $n$  variáveis ( $V^0, V^1, V^2, \dots$ ) tem solução não trivial (e encontrar as soluções desse sistema para cada valor de  $\lambda$ ). O sistema acima só possui solução não trivial para os valores de  $\lambda$  que anulem o determinante

$$|S_b^a - \lambda \delta_b^a|. \tag{1.39}$$

Esse determinante é um polinômio do grau  $n$  em  $\lambda$ , chamado de *polinômio característico* de  $S_b^a$ . O teorema fundamental da álgebra [5] garante que, sobre o corpo dos complexos, podemos sempre fatorá-lo completamente na forma

$$(\lambda - \lambda_1)^{d_1} (\lambda - \lambda_2)^{d_2} (\lambda - \lambda_3)^{d_3} \dots \tag{1.40}$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  são as raízes do polinômio, chamadas de *autovalores* e  $d_1, d_2, d_3, \dots$  suas respectivas degenerescências. Denotamos as degenerescências dos autovalores por  $\{d_1 d_2 d_3 \dots\}$ .

Caso a métrica fosse euclidiana, o tensor  $S_b^a$  seria simétrico e portanto diagonalizável. Na relatividade geral porém, devido à assinatura lorentziana da métrica, devemos fazer uso das formas canônicas de Jordan, como veremos a seguir.

Mostra-se [68] que é sempre possível encontrar uma base tal que  $S_b^a$  assumam uma forma de Jordan. Na forma de Jordan, uma matriz é constituída de submatrizes de Jordan ao longo da diagonal principal. Cada submatriz de Jordan é por sua vez uma matriz com uma das seguintes formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{etc.} \tag{1.41}$$

onde o componente da diagonal,  $\lambda$ , é um autovalor. Mostra-se ainda que a forma de Jordan é única a menos da ordenação das submatrizes de Jordan. Abaixo apresentamos um exemplo com uma matriz  $7 \times 7$ . Os “zeros” fora das submatrizes de Jordan não são escritos para permitir melhor visualização de cada submatriz.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_1 & \\ & & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Nesse exemplo temos 4 submatrizes de Jordan, de dimensões 3, 2, 1 e 1. A primeira e terceira submatrizes de Jordan têm o mesmo autovalor  $\lambda_1$ . O polinômio característico (1.40) para esse exemplo pode ser escrito como

$$(\lambda - \lambda_1)^4(\lambda - \lambda_2)^2(\lambda - \lambda_3). \quad (1.43)$$

De acordo com a notação introduzida no parágrafo anterior, sua degenerescência é  $\{421\}$ .

A cada autovalor, o sistema (1.38) tem pelo menos uma solução linearmente independente, chamada de *autovetor* de  $S_b^a$ . Se um autovalor pertence a apenas uma submatriz de Jordan ( $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  no exemplo), o sistema (1.38) terá apenas um autovetor para esse autovalor, independentemente da dimensão da submatriz de Jordan. Se um autovalor pertence a 2 (ou mais) submatrizes de Jordan, o sistema (1.38) terá como solução um subespaço de autovetores de dimensão 2 (ou mais), independentemente das dimensões das submatrizes de Jordan. No exemplo,  $\lambda_1$  é um autovalor pertencente a duas submatrizes de Jordan, portanto existe um subespaço bidimensional de autovetores com autovalor  $\lambda_1$ .

Na notação de Segre, cada submatriz de Jordan é denotada pelo algarismo correspon-

dente à sua dimensão. Para denotar que duas ou mais submatrizes possuem o mesmo autovalor (degenerescência de autovalores) colocamos os algarismos correspondentes entre parênteses. Finalmente, o conjunto todo é posto entre colchetes. O tipo de Segre do exemplo (1.42) é portanto [(31)21]. Observe que a ordem dos algarismos não é relevante, de vez que a ordem das submatrizes de Jordan tampouco o é.

Na relatividade geral, devido à assinatura de Lorentz, os autovetores podem ser tipo-espaço, nulos ou tipo-tempo. Abaixo mostramos todos os tipos de Segre possíveis na relatividade geral (veja, por exemplo, [53, 54, 23, 24]). Nos 3 primeiros itens todos os autovalores são reais.

1. [1,111] e degenerescências [(1,1)11], [1,1(11)], [(1,1)(11)], [(1,11)1], [1,(111)] e [(1,111)]. O primeiro algarismo, separado pela vírgula, corresponde a um autovetor tipo-tempo e os demais a autovetores tipo-espaço. O tipo [(1,111)] corresponde a  $S_0^g = 0$ , sendo denominado Segre 0.
2. [211] e degenerescências [(21)1], [2(11)] e [(211)]. O primeiro algarismo corresponde a um autovetor nulo e os demais a autovetores tipo-espaço.
3. [31] e degenerescência [(31)]. O primeiro algarismo corresponde a um autovetor nulo e o segundo a um autovetor tipo-espaço.
4. [ $z\bar{z}$ 11] e degenerescência [ $z\bar{z}$ (11)].  $z$  e  $\bar{z}$  representam autovalores complexos conjugados. Os dois algarismos correspondem a autovetores tipo-espaço.

### 1.6.2 Classificação de Petrov

A classificação de Petrov em sua versão espinorial pode ser apresentada como segue. Penrose [49, 52] mostrou que o espinor de Weyl pode ser escrito como o produto simetrizado de quatro 1-espinores, chamados de espinores principais do espinor de Weyl, isto é,

$$\Psi_{abcd} = \alpha_{(a}\beta_b\gamma_c\delta_{d)}. \tag{1.44}$$

Os espinores principais são determinados a menos de multiplicação por escalares complexos, ou seja,  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$  e  $D\delta$ , desde que o produto (1.44) não se altere, isto é,  $ABCD = 1$ . Os tipos de Petrov são então obtidos de acordo com a coincidência (degenerescência) das direções dos espinores principais, conforme a tab. 1.7.

I	II	III	D	N	0
{1111}	{211}	{31}	{22}	{4}	0

Tabela 1.7: Tipos de Petrov. A primeira linha indica a notação para os tipos de Petrov, enquanto a segunda linha mostra a degenerescência das direções dos espinores principais.

### 1.6.3 Escolha de base canônica

Veremos como fixar a base com um exemplo de uma métrica Petrov tipo D. Seja uma métrica Petrov tipo D. Como vimos na subseção anterior, seu espinor de Weyl pode ser sempre escrito na forma

$$\Psi_{abcd} = \alpha_{(a}\alpha_b\beta_c\beta_{d)}. \quad (1.45)$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são espinores principais, então  $K\alpha$  e  $\pm\frac{1}{K}\beta$  também são. Escolhemos a base diádica de forma que os espinores  $o$  e  $\iota$  estejam nas direções de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente. Para satisfazer a condição de normalização (1.18), uma possível escolha é

$$\begin{cases} o = \alpha \\ \iota = \frac{\beta}{\alpha_a\beta^a}. \end{cases} \quad (1.46)$$

Na notação compacta para espinores simétricos o espinor de Weyl (1.45) se escreve

$$\begin{aligned} \Psi_2 = \Psi_{0011} = \Psi_{abcd}o^ao^b\iota^c\iota^d &= \alpha_{(a}\alpha_b\beta_c\beta_{d)}\alpha^a\alpha^b\frac{\beta^c}{\alpha_i\beta^i}\frac{\beta^d}{\alpha_j\beta^j} = (\alpha_a\beta^a)^2 \\ \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$



já que para dois espinores quaisquer (veja por exemplo [44, 55])

$$\alpha_a \beta^a = -\alpha^a \beta_a \quad \text{e} \quad \alpha_a \alpha^a = 0. \quad (1.48)$$

Assim para qualquer métrica Petrov tipo D o espinor de Weyl pode ser escrito em uma base na qual somente o componente  $\Psi_2$  é não nulo. A essa base denominamos de base canônica da parte de Weyl dos EC até ordem de derivação 0 de métricas Petrov tipo D, ou simplesmente, base canônica para Petrov tipo D. O valor de  $\Psi_2$  em tal base é característico da métrica. De fato, seu valor independe da particular escolha dos espinores  $\alpha$  e  $\beta$  já que  $(\alpha_a \beta^a)^2 = \left(K \alpha_a (\pm \frac{1}{K} \beta^a)\right)^2$ .

Consultando-se as leis de transformação de  $\Psi_A$  (tabs. 1.3 e 1.4), verificamos que com as condições (1.47) todos seus componentes são invariantes por rotações espaciais (1.34) e rotações temporais (1.35). O grupo gerado por essas transformações constitui o grupo de isotropia da parte de Weyl do espinor de curvatura de métricas Petrov tipo D. De fato, utilizando a eq. (1.30) verifica-se facilmente que as transformações de base que preservam a condição (1.46) são as que têm  $a = 1/d$  e  $b = c = 0$ , ou seja, (1.34) e (1.35).

De maneira análoga pode-se encontrar bases canônicas e os grupos de isotropia para todos os tipos de Petrov. Para obter bases canônicas para os tipos de Segre, Hall [20, 21] utiliza-se de um procedimento similar, trabalhando porém com uma base tetrádica tipo semi-nulo. Seus resultados podem ser re-escritos na linguagem espinorial utilizando-se a relação entre os componentes de  $S_g^a$  em uma base tetrádica tipo semi-nulo e os componentes do espinor de Ricci  $\Phi_{AW}$ , como sugerido por Cormack e Hall [10]. As tabs. 1.9 e 1.10 apresentam as formas canônicas para os espinores de Weyl e de Ricci, respectivamente. Na tab. 1.8 mostramos a notação utilizada para o grupo de isotropia. Caso os espinores de Weyl e de Ricci sejam ambos não nulos, escolhe-se primeiro a forma canônica para o tensor de Weyl. O espinor de Ricci é então utilizado para fixar ainda mais a base. Entretanto não assumirá, em geral, uma forma canônica.

O problema de escolher uma base canônica não termina na ordem zero. Em nosso exemplo, vimos que a base está fixada apenas a menos de rotações espaciais e temporais,

Notação do CLASSI	Notação desta tese	Matriz de transformação ou nome do grupo
s	$E$	rotação espacial (eq. 1.34)
b	$T$	rotação temporal (eq. 1.35)
e	$ET$ (ou $TE$ )	produto (comutativo) de $E$ e $T$ (eq. 1.36)
n	$Na$	rotação nula com $\omega^0$ fixo (eq. 1.32)
k	$Nai$	rotação nula com $\omega^0$ fixo (eq. 1.32) e $a$ imaginário puro
n	$Nb$	rotação nula com $\omega^1$ fixo (eq. 1.33)
k	$Nbi$	rotação nula com $\omega^1$ fixo (eq. 1.33) e $b$ imaginário puro
p	$SO(3)$	grupo de rotação tridimensional
t	$SO(2,1)$	grupo de Lorentz tridimensional
6	$L$	grupo de Lorentz

Tabela 1.8: Notação dos grupos de isotropia. A primeira coluna indica a notação compacta utilizada pelo CLASSI, independente de qual seja exatamente a matriz de transformação [38]. Por exemplo, “s” significa qualquer grupo de rotações espaciais de dimensão 1. Na segunda coluna apresentamos uma notação específica para cada matriz de transformação. O processo mnemônico é o seguinte: as letras  $E$ ,  $T$  e  $N$  se referem a Espacial, Temporal e Nula respectivamente; as letras  $a$  e  $b$  correspondem aos parâmetros das matrizes de transformação (1.32) e (1.33), enquanto a letra  $i$  significa imaginário.

Petrov	$\Psi_0$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$	$H_\Psi$	$d$
I	B		A		B	—	0
II			A		1	—	0
III				1		—	0
D			A			$ET$	2
N					1	$Na$	2
0						$L$	6

A e B são complexos

Tabela 1.9: Formas canônicas e grupo de isotropia para os tipos de Petrov [52], com modificações utilizadas pelo CLASSI [63]. A coluna  $H_\Psi$  mostra o grupo de isotropia de  $\Psi_A$  (conforme notação na tab. 1.8) e a coluna  $d$  sua dimensão.

CLASSI	Segre	$\Phi_{00'}$	$\Phi_{11'}$	$\Phi_{22'}$	$\Phi_{01'}$	$\Phi_{02'}$	$\Phi_{12'}$	$H_\Phi$	d	restrição
g	[1,111]	Y	X	Y		Z		—	0	$Z \neq \pm 2X \pm Y$
b	[(1,1)11]		X			Z		T	1	$Z \neq \pm 2X$
s	[1,1(11)]	Y	X	Y				E	1	$Y \neq \pm 2X$
e	[(1,1)(11)]		X					ET	2	
t	[(1,11)1]	-2X	X	-2X				SO(2,1)	3	
p	[1,(111)]	2X	X	2X				SO(3)	3	
0	[(1111)]							L	6	
z	[z $\bar{z}$ 11]	Y	X	-Y		Z		—	0	
c	[z $\bar{z}$ (11)]	Y	X	-Y				E	1	
2	[211]		X	$\pm 1$		Z		—	0	$Z \neq \pm 2X$
h	[2(11)]		X	$\pm 1$				E	1	
n	[(21)1]		X	$\pm 1$		2X		Nai	1	
r	[(211)]			$\pm 1$				Na E	3	
3	[31]		X			-2X	1	—	0	$X \neq 0$
4	[(31)]						1	Nai	1	

X, Y e Z são reais.

Tabela 1.10: Formas canônicas e grupo de isotropia para os tipos de Segre [39, 26] com modificações utilizadas pelo CLASSI [62, 64]. A coluna  $H_\Phi$  mostra o grupo de isotropia de  $\Phi_{AW'}$  (conforme notação na tab. 1.8) e a coluna d sua dimensão. Nos tipos [211], [2(11)], [(21)1] e [(211)] o sinal de  $\Phi_{22'}$  não pode ser trocado por mudança de base. A primeira coluna (CLASSI) indica a notação compacta utilizada pelo CLASSI [38]. Há casos em que o CLASSI não consegue distinguir entre dois ou mais tipos. A seguinte notação coletiva é então utilizada: f  $\rightarrow$  (p ou t), 1  $\rightarrow$  (z ou g), i  $\rightarrow$  (s ou b), d  $\rightarrow$  (c ou s ou b).

ou seja, a menos do grupo de isotropia  $H_0$ . Vamos continuar em nosso exemplo até as demais ordens de derivação.

Suponha que na ordem 1 apenas os componentes  $\nabla\Psi_{20'}$  e  $\nabla\Psi_{31'}$  sejam não nulos em uma base canônica para a ordem 0 (Esse exemplo, como veremos, corresponde à métrica de Schwarzschild, que será objeto de estudo do cap. 3.). Sob a ação de  $H_0$ , os EC de ordem 1 se transformam como (veja a tab. 1.5)

$$\widetilde{\nabla\Psi}_{20'} = z^2 \nabla\Psi_{20'} \quad (1.49)$$

$$\widetilde{\nabla\Psi}_{31'} = z^{-2} \nabla\Psi_{31'} \quad (1.50)$$

onde  $z$  é real. Podemos escolher  $z$  tal que  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'}$  e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'}$  fiquem iguais a menos de um sinal. Não é possível com transformações de  $H_0$  trocar o sinal relativo desses dois componentes.

Assim, para métricas para as quais na ordem 1 apenas os componentes  $\nabla\Psi_{20'}$  e  $\nabla\Psi_{31'}$  são não nulos em uma base canônica para Petrov D, podemos encontrar uma base (ainda canônica para Petrov D) na qual  $\nabla\Psi_{20'} = \pm \nabla\Psi_{31'}$ . Essa é uma base canônica para a ordem 1 nesse caso. O valor de  $\nabla\Psi_{20'} = \pm \nabla\Psi_{31'}$  em tal base é característico da métrica, já que para alterar o valor dos componentes com transformações de  $H_0$ , a base deixaria de ser canônica, ou seja, os componentes deixariam de ser iguais a menos de um sinal.

As transformações de  $H_0$  que deixam a forma canônica invariante são as rotações espaciais (veja tab. 1.5). Constituem, portanto, o grupo  $H_1$  de isotropia até ordem 1.

Suponha que na ordem 2 apenas os componentes  $\nabla^2\Psi_{20'}$ ,  $\nabla^2\Psi_{31'}$  e  $\nabla^2\Psi_{42'}$  sejam não nulos em uma base canônica para as ordens 0 e 1. Sob a ação de  $H_1$ , de acordo com a tab. 1.6, esses componentes não se alteram, logo  $H_2 = H_1$  e a base é também canônica para a ordem 2. Se não houver novas funções funcionalmente independentes nas coordenadas nessa ordem, esta será a última ordem de derivação. Então  $H_2 = H_1$  é o grupo de isotropia da métrica. Note que o grupo de isotropia de uma ordem genérica é subgrupo dos grupos de isotropia das ordens anteriores.

Não existem ainda classificações como as de Petrov e Segre para os EC de ordens 1, 2 etc. Portanto não apresentaremos tabelas mostrando as formas canônicas para essas ordens. Por outro lado, como em geral a ordem 0 já restringiu o grupo de isotropia a dimensões pequenas, a análise de cada caso não é difícil e será feita à medida que for necessária. Cabe lembrar que o pacote CLASSI pode ser usado para encontrar as bases canônicas em todas as ordens.

## 1.7 O problema inverso

Como vimos, dada uma métrica, podemos algoritmicamente obter seus escalares de Cartan. Chamamos de problema inverso ao seguinte problema: dados os EC, determinar se existe uma métrica que os tenha como EC, ou seja, uma métrica correspondente a esse conjunto de EC, e obter essa métrica. Esse problema foi estudado em [28] mas não de forma conclusiva. Em alguns casos bem simples é possível mostrar, utilizando o formalismo de Newman-Penrose [42, 51], que certos conjuntos de EC de ordem 0 são incompatíveis. No cap 3 apresentamos um exemplo desse caso. Em outras situações, pode-se utilizar propriedades dos EC, como grupos de simetria e, utilizando-se teoremas gerais sobre grupos, encontrar-se a métrica ou mostrar que as possíveis métricas não são compatíveis com todo o conjunto de EC. Uma outra possibilidade consiste em encontrar no banco de dados do CLASSI a métrica desejada. Apesar de nenhum desses métodos ser sistemático, eles foram bastante úteis para a análise dos limites obtidos nesta tese.



# Capítulo 2

## Aspectos práticos da solução do problema de equivalência

### 2.1 Introdução

Nesse capítulo introduzimos o leitor a alguns aspectos práticos de cálculos relativos às técnicas do problema de equivalência. Discutiremos brevemente o emprego da computação algébrica e exemplificaremos essas técnicas calculando os EC para algumas classes de métricas de ondas planas.

O algoritmo de Karlhede está quase todo implementado em computador utilizando a linguagem de computação algébrica SHEEP [15] e constitui um conjunto de programas (pacote) denominado CLASSI [2]. Utilizando o CLASSI pode-se, dada uma métrica, encontrar uma base canônica, calcular os EC e obter o que chamamos de classificação discreta da métrica, que inclui as classificações de Petrov e de Segre, o grupo de isotropia a cada ordem de derivação e o número de funções funcionalmente independentes nas coordenadas a cada ordem.

Para determinar se duas métricas são equivalentes, verificamos primeiro se elas têm a mesma classificação discreta. Caso negativo, elas não são equivalentes. Caso positivo, devemos igualar dois a dois os EC de cada métrica, formando um sistema de equações

algébricas. Em seguida, verifica-se se o sistema tem solução. Caso tenha, as métricas são equivalentes. Note que não é necessário resolver o sistema, basta mostrar que existe solução.

As etapas descritas no parágrafo anterior não são executadas pelo computador. De fato, não há algoritmo que possa decidir sobre a existência de solução para um sistema de equações algébricas suficientemente geral [35]. Usualmente contudo, essa etapa pode ser feita à mão.

## 2.2 O banco de dados de métricas

Mostraremos agora como utilizar na prática o pacote CLASSI. Mais detalhes sobre SHEEP e CLASSI podem ser encontrados em [38] e referências lá contidas.

Conhecido o elemento de linha, ou seja, a métrica, podemos sem muita dificuldade encontrar uma base tetrádica para representá-lo. Em geral utiliza-se bases tetrádicas tipo Lorentz, tipo nulo ou tipo semi-nulo. Entretanto, ao calcularmos espinores é conveniente trabalhar com bases tetrádicas tipo nulo. Assim, para o cálculo dos EC, o CLASSI sempre transforma a base tetrádica inicial para uma tipo nulo. As definições utilizadas pelo CLASSI para esses três tipos de base tetrádica e suas inter-relações foram apresentadas no capítulo anterior nas eqs. (1.8)–(1.15). Escolhe-se, então, a base tetrádica mais conveniente para representar a métrica, deixando-se ao CLASSI o trabalho de encontrar uma base tetrádica tipo nulo conforme as relações (1.14) e (1.15).

Para uma grande quantidade de métricas, arquivos contendo os comandos necessários para calcular seus EC em uma base canônica já foram contruídos e fazem parte de um banco de dados de métricas usualmente distribuído junto com o CLASSI. Além dos arquivos de métricas, o banco de dados possui um arquivo contendo a classificação discreta dessas métricas. No apêndice A apresentamos os arquivos das métricas utilizadas nesta tese. Na fig. 2.1 mostramos a classificação discreta dessas métricas, tal como ela é fornecida pelo CLASSI.

O programa CLASSI é em geral executado, no computador, com o comando `classi`,

nome	$\Phi\Lambda\Psi$	$\dim(G_c)$	$\dim(H_c)$	$H_n$	$t_n$
schwar	00D	4	1	ess-111-	
kasner	00D	4	1	ess-111-	
frw	p10	6	3	pp--11--	
einste	p10	7	3	pp--00--	
pw	r0N	5	2	nn--11--	
pwv	00N	5	2	nnn-011-	
pwb2	r0N	5	2	nn--11--	
pwc	r00	6	3	rrr-011-	

Tabela 2.1: Banco de dados - classificação discreta de métricas. Cada linha corresponde a uma métrica. Os títulos das colunas têm os significados a seguir. “nome” é o nome do arquivo da métrica, nesse caso correspondem respectivamente aos arquivos A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7 e A.8. “ $\Phi$ ” é o tipo de Segre. “ $\Lambda$ ” indica se o escalar de curvatura é zero (0) ou não zero (1). “ $\Psi$ ” é tipo de Petrov (os tipos I, II e III são representados pelos números 1, 2 e 3 respectivamente). “ $\dim(G_c)$ ” e “ $\dim(H_c)$ ” são as dimensões dos grupos de isometria e isotropia respectivamente (dimensão 10 é representada por X). “ $H_n$ ” e “ $t_n$ ” são respectivamente o grupo de isotropia e o número de funções funcionalmente independentes (nas coordenadas) nas ordens de derivação 0, 1, 2 e 3. O sinal “-” significa que os EC da ordem correspondente não foram calculados. A notação compacta para os tipos de Segre e para os grupos de isotropia está indicada na tab. 1.10.

mas essa forma de execução pode variar dependendo da implementação utilizada. Uma vez no ambiente CLASSI, podemos iniciar os cálculos. Para utilizar esses arquivos de métricas, digitamos (CLASSIFY “*arquivo*”), onde *arquivo* é o nome do arquivo desejado<sup>1</sup>. O nome é em geral construído a partir do nome da métrica e contém no máximo 6 dígitos, além de uma terminação com 3 dígitos. O CLASSI então escreverá o resultado dos cálculos em um arquivo com o mesmo nome, mas com a terminação “.res”. A classificação discreta obtida pelo CLASSI estará em um arquivo com a terminação “.sum”.

A construção de um arquivo de métrica requer prática. Ao iniciante, recomendamos o estudo de [38]. Esquemáticamente, os passos principais para a construção de um arquivo de métrica são os seguintes. Escreve-se um arquivo preliminar contendo as informações necessárias à definição da base tetrádica. A partir desse arquivo, com o auxílio do CLASSI, encontra-se a transformação de díadas necessária para transformar a base tetrádica ini-

<sup>1</sup>Caso o CLASSI esteja sendo executado em um diretório diferente do diretório onde se encontra o *arquivo*, torna-se necessário informar o diretório onde está o *arquivo*. Para mais detalhes veja a ref. [38].



cial em uma base canônica. Além dessa transformação o CLASSI fornecerá também uma transformação de díadas que facilitará a obtenção do tipo de Segre. O usuário, então, armazena no arquivo de métrica, todas as informações obtidas na seção preliminar. A partir desse momento, o arquivo de métrica está completo e poderá ser utilizado futuramente por outras pessoas.

A seguir, faremos uma breve exposição dos principais comandos e da notação utilizados em um arquivo de métrica com vistas a permitir o entendimento dos arquivos mostrados nos apêndices A e B.

1. A notação utilizada pelo pacote CLASSI é bastante óbvia em algumas circunstâncias. Cada espinor tem o nome de sua letra grega correspondente escrito em inglês. Assim PSI, PHI, LAMBDA (sem o 'A' final) e XI correspondem a  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$ ,  $\Xi$ . Para as derivadas, é acrescentada a letra 'D' (representando o operador  $\nabla$ ) seguida do número correspondente à ordem de derivação. Para as derivadas de  $\Lambda$  volta-se a escrever 'LAMBDA' com o 'A' final, assim, D2LAMBDA corresponde a  $\nabla^2\Lambda$ . O d'alembertiano é representado pela letra 'A'. Assim, APSI corresponde a  $\square\Psi_{AW}$ .
2. (TITLE " ... ") - Utiliza-se para indicar o nome do arquivo de métrica e colocar referências sobre a métrica. Ex:  

```
(TITLE "SCHWAR.DIA  
Metrica de Schwarzschild.  
Geroch, R. (1969), Commun. math. Phys. 13, 180-193.")
```
3. % - Utiliza-se para inserir comentários. Tudo o que aparece na linha após o '%' é ignorado pelo CLASSI.
4. O CLASSI contém chaves que controlam a sua execução. As chaves são ligadas e desligadas com os comandos ON e OFF respectivamente.
  - (a) NOZERO - Com essa chave ligada só os componentes não nulos de um tensor são impressos.
  - (b) COMPLX - Permite trabalhar com quantidades complexas.

- (c) **DIAGONAL** - Utiliza-se para informar ao CLASSI que a métrica em questão é diagonal. Veja (RPL GD) adiante.
- (d) **NOSTDCHECK** - Permite trabalhar com bases não canônicas. Veja o arquivo A.7.
5. (**VARs**  $x^1 x^2 x^3 x^4$  ) - Define as coordenadas. Ex: o comando (**VARs** T R H P) define 't', 'r', 'h' e 'p' como coordenadas.
6. (**NAMLC** *objetos* ) - Faz com que CLASSI imprima *objetos* com letras minúsculas. Ex: o comando (**NAMLC** T R H P), faz com que as coordenadas 'T', 'R', 'H' e 'P' do exemplo anterior sejam impressas em caracteres minúsculos.
7. (**DEFNAM** *objeto* ( *definição* )) - É utilizado para definir a forma como queremos que o CLASSI imprima o *objeto*. Ex: o comando (**DEFNAM** AST (A UP !\* DOWN)) faz com que AST seja impresso como  $\overset{*}{A}$ .
8. (**REAL** ...), (**COMPLEX** ...) - Definem quais coordenadas e funções são reais ou complexas.
9. (**LORENTZ** IFRAME) - Define que a base tetrádica utilizada para representar a métrica é tipo Lorentz. Para bases tetrádicas tipo nulo e semi-nulo utiliza-se **NULLT** e **HNULLT** respectivamente.
10. (**NULLT** FRAME) - Define o tipo de base tetrádica utilizada para os cálculos. Deve ser sempre **NULLT** quando estivermos trabalhando com o problema de equivalência. É o "default".
11. (**RPL** *objeto*) - Esse comando serve para entrar com os valores dos componentes de um espinor ou qualquer outro objeto definido em CLASSI. Em seguida ao comando, devem vir os componentes. O valor de cada componente deve ser seguido pelo sinal '\$'. A seguir listamos alguns dos objetos que mais frequentemente aparecem.
- (a) **IZUD** - Matriz contendo os 4 componentes dos 4 campos vetoriais da base

tetrádica. Ex: a base tetrádica

$$\omega^0 = \frac{H}{2} dx^0 + dx^1, \quad \omega^1 = dx^0, \quad \omega^2 = dx^2, \quad \omega^3 = dx^3$$

apareceria no arquivo de métrica como

```
(RPL IZUD)
H/2 $ 1 $ 0 $ 0 $
  1 $ 0 $ 0 $ 0 $
  0 $ 0 $ 1 $ 0 $
  0 $ 0 $ 0 $ 1 $
```

- (b) GD - Vetor contendo os componentes diagonais de IZUD. Os demais componentes são nulos. Só pode ser utilizado para bases tetrádicas tipo Lorentz. Deve ser utilizado em conjunto com (PRELOAD DIAINP) ou com (ON DIAGONAL). Ex: a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = A dt^2 - A^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

seria escrita em CLASSI como

```
(RPL GD)  SQRT(A) $ 1/SQRT(A) $ R $ R*SIN(H) $
```

- (c) DYTR1 - Matriz de transformação de díadas. Ex: a matriz de transformação de díadas

$$\begin{pmatrix} A^{1/4} & 0 \\ 0 & A^{-1/4} \end{pmatrix}$$

seria escrita como

```
(RPL DYTR1)  A^(1/4) $ 0 $ 0 $ A^(-1/4) $
```

- (d) DYTRPHI1 - Matriz de transformação de díadas, utilizada apenas para facilitar a classificação de Segre. Não altera a base canônica.

- (e) Além desses objetos, o RPL é utilizado para substituir o valor de funções que apareçam na definição dos campos vetoriais da base tetrádica. Ex: para definir  $A = 1 - \frac{2m}{r}$ , utilizamos o comando (RPL A) 1-2\*M/R \$ .

12. (FUNS ... ) - Define dependências funcionais. Ex: Para definir  $M$  como constante e  $B$  como função de  $t$  e  $r$ , escreve-se (FUNS (M) (B T R) ). Se uma função  $A$  já foi definida com algum comando RPL, devemos assim mesmo informar explicitamente ao CLASSI que  $A$  é uma função com o comando (FUNS A ). Podemos ainda especificar a expressão para a derivada de uma função. Por exemplo, para especificar que

$$\frac{\partial(AST)}{\partial u} = \overline{\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)}$$

escrevemos (FUNS (AST SPEC U)) CONJ(DF(A,U)) \$

13. O CLASSI e o SHEEP não fazem muitas das simplificações algébricas comuns a outros sistemas de computação algébrica. Assim, convém que as funções que apareçam na definição dos campos vetoriais da base tetrádica não sejam explicitadas. Como exemplo, veja a função 'A' em Schwarzschild (arquivo A.1). Seu valor só deve ser substituído no estágio final dos cálculos. Para isso criamos listas de substituições, que descrevemos no exemplo a seguir.

(a) O comando (NEWSUL RIESUL) A \$ 1-2\*M/R \$ define a lista de substituições RIESUL. Após o comando, o primeiro argumento (A) é o objeto que será substituído e o segundo argumento (1-2M/R) é o valor a ser substituído. Se uma função  $A$  já foi definida com algum comando RPL, ao invés de 1-2M/R, poderíamos escrever simplesmente ':A' que representa o valor de  $A$  definido pelo comando RPL.

(b) Finalmente, o comando (USESUL RIESUL UNPSI PSI UNPHI PHI LAMBD) instrui CLASSI a utilizar a lista RIESUL nos espinores UNPSI PSI UNPHI PHI LAMBD.

A seguir descrevemos mais alguns comandos e objetos definidos no CLASSI, que em geral não aparecem em arquivos de métricas mas que serão úteis no apêndice B.

1. (LOAD DYTSYM) - Carrega o subpacote que executa transformações de díadas.
2. (LINIT *espinor*) - Inicia todos os componentes de um *espinor* como zero.

3. (SYMBOLIC *espinor a b*) - Atribui um valor simbólico ao componente 'a b' de um *espinor*.
4. DYTRX1, DYTRX2 e DYTRX3 - Matrizes de transformação de díadas. Por "default" são a matriz identidade mas podem ser redefinidas pelo usuário. A transformação de díada final é o produto das três na ordem DYTRX3 DYTRX2 DYTRX1. Os espinores transformados têm o nome original acrescido da terminação TR. Ex: na nova base, PSI será denominado PSITR.

## 2.3 Métrica de ondas planas

Apresentamos nesta seção os EC de algumas classes de métricas de ondas planas. Além de servir de exemplo simples das técnicas de equivalência, esse resultado nos será útil na análise de limites. De fato, a experiência nos mostrou que ondas planas parecem ser um limite usual para outras métricas, como veremos nos capítulos seguintes.

A forma geral das métricas de ondas planas é [30]

$$ds^2 = -2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv + Hdu^2 \quad (2.1)$$

onde  $H = H(\zeta, \bar{\zeta}, u)$  é real. Aqui contudo, nos restringiremos às classes de métricas de ondas planas onde  $H(\zeta, \bar{\zeta}, u)$  é dado por

$$H = \bar{A}(u)\zeta^2 + A(u)\bar{\zeta}^2 + 2B(u)\zeta\bar{\zeta} \quad (2.2)$$

onde  $A(u)$  é complexo e  $B(u)$  é real. A partir do arquivo A.5, obtém-se que os EC algebricamente independentes, não nulos, são:

$$\text{(ordem 0)} \quad \Psi_4 = 1 \quad (2.3)$$

$$\Phi_{22'} = A^{-1/2}\overline{A^{-1/2}B} \quad (2.4)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Psi_{51'} = A^{-\frac{1}{4}}\overline{(A^{-\frac{1}{4}})}A_{,u} \quad (2.5)$$

$$\nabla\Phi_{33'} = A^{-\frac{3}{4}}\overline{(A^{-\frac{3}{4}})}B_{,u} . \quad (2.6)$$

A seguir descrevemos a classificação discreta obtida com o auxílio do CLASSI. Na ordem 0, obtém-se que o tipo de Petrov é N e o tipo de Segre é [(211)]. O grupo de isotropia  $H_0$  é o grupo de rotações nulas (1.32). Esses resultados podem ser confirmados consultando-se as tabs. 1.9 e 1.10. Há 1 função funcionalmente independente. Portanto  $t_0 = 1$  e  $d_0 = 3$ . Na ordem 1 não aparece nenhuma nova função funcionalmente independente, assim  $d_1 = d_0 = 3$ . O grupo de isotropia não se altera, ou seja,  $H_1 = H_0$ . Esse resultado, obtido automaticamente pelo CLASSI, pode ser confirmado com a sequência de comandos no arquivo B.1. Como  $d_1 = d_0$  e  $H_1 = H_0$ , o algoritmo de Karlhede pára nessa ordem. Vamos obter dois casos particulares, a saber, Segre 0, ou seja,  $\Phi_{AW'} = 0$  e Petrov 0, ou seja,  $\Psi_A = 0$ , que serão utilizados nos capítulos seguintes no estudo de limites.

Da expressão dos EC acima, vemos que obtemos Segre 0 se  $B(u) = 0$  em (2.2). Com auxílio do arquivo A.6 obtemos neste caso que os EC são

$$\text{(ordem 0)} \quad \Psi_4 = 1 \quad (2.7)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Psi_{51'} = A^{-\frac{5}{4}}\overline{(A^{-\frac{1}{4}})}A_{,u} \quad (2.8)$$

$$\text{(ordem 2)} \quad \nabla^2\Psi_{62'} = A^{-\frac{3}{2}}\overline{(A^{-\frac{1}{2}})}A_{,uu} . \quad (2.9)$$

Na ordem 0 verifica-se que o tipo de Petrov é N. O grupo de isotropia  $H_0$  é o grupo de rotações nulas (1.32). Não há funções funcionalmente independentes. Portanto  $t_0 = 0$  e  $d_0 = 4$ . Na ordem 1 temos 1 função funcionalmente independente, assim  $d_1 = 3$ . O grupo de isotropia não se altera, ou seja,  $H_1 = H_0$ . Como  $d_1 \neq d_0$ , o algoritmo continua. Na ordem 2 obtemos  $d_2 = d_1 = d_0 = 3$  e  $H_2 = H_1 = H_0$ .

Podemos obter uma métrica homogênea a partir desta. De fato, impondo que  $\nabla\Psi_{51'}$

seja constante, não haverá função funcionalmente independente na ordem 1. Portanto  $d_1 = d_0 = 0$ . Como  $H_1 = H_0$ , o algoritmo de Karlhede pára na ordem 1 resultando em EC constantes.

Obteremos agora o caso particular Petrov 0. Como  $\Psi_4 = 1$  em (2.3), não é óbvio para quais valor de  $A(u)$  e  $B(u)$  obtemos uma métrica Petrov 0. Uma maneira de conseguir esse resultado consiste em encontrar uma outra base canônica para os EC da métrica (2.1). No caso, escolhemos uma base em que  $\Phi_{AW'}$  esteja na forma canônica dada na tab. 1.10. Nessa nova base, os EC para a métrica (2.1) com  $H(\zeta, \bar{\zeta}, u)$  dado por (2.2) são (o arquivo de métricas utilizado é o A.7)

$$\text{(ordem 0)} \quad \Psi_4 = AB^{-1} \quad (2.10)$$

$$\Phi_{22'} = 1 \quad (2.11)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \Psi_{51'} = B^{-3/2} A_{,u} \quad (2.12)$$

$$\nabla\Phi_{33'} = B^{-3/2} B_{,u} . \quad (2.13)$$

A classificação discreta é a mesma que obtivemos para (2.3)–(2.6). Agora porém, fica claro que podemos obter métricas Petrov 0 fazendo  $A(u) = 0$ . Os EC nesse caso são (o arquivo de métricas utilizado é o A.8)

$$\text{(ordem 0)} \quad \Phi_{22'} = 1 \quad (2.14)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Phi_{33'} = B^{-3/2} B_{,u} \quad (2.15)$$

$$\text{(ordem 2)} \quad \nabla^2\Phi_{44'} = B^{-2} B_{,uu} . \quad (2.16)$$

Na ordem 0 verifica-se que o tipo de Segre é [(211)]. O grupo de isotropia  $H_0$  é o grupo

de rotações nulas (1.32). Não há funções funcionalmente independentes. Portanto  $t_0 = 0$  e  $d_0 = 4$ . Na ordem 1 temos 1 função funcionalmente independente, assim  $d_1 = d_0 = 3$ . O grupo de isotropia não se altera, ou seja,  $H_1 = H_0$ . Na ordem 2 obtemos  $d_2 = d_1 = d_0 = 3$  e  $H_2 = H_1 = H_0$ .

Podemos obter uma métrica homogênea a partir desta. De fato, impondo que  $\nabla\Phi_{33}$  seja constante não haverá função funcionalmente independente na ordem 1. Portanto  $d_1 = d_0 = 0$ . Como  $H_1 = H_0$ , o algoritmo de Karlhede pára na ordem 1 resultando em EC constantes.



# Capítulo 3

## A família Schwarzschild

### 3.1 Introdução

Muitos cálculos em relatividade geral são feitos em um específico sistema de coordenadas. Contudo, resultados distintos podem surgir se diferentes sistemas forem utilizados. Esse fato foi exemplificado por Geroch [18] ao mostrar que a métrica de Schwarzschild tem limites distintos quando  $m \rightarrow \infty$  se diferentes sistemas de coordenadas são utilizados. Neste capítulo desenvolvemos um formalismo independente de coordenadas baseado nos escalares de Cartan e o utilizamos no estudo dos limites de Schwarzschild. Como os escalares de Cartan não levam em conta informações topológicas globais, nossas conclusões serão de âmbito local. Uma parte substancial dos resultados deste capítulo foram publicados no *Classical and Quantum Gravity* [46].

O espaço-tempo de Schwarzschild é usualmente descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = A dt^2 - A^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

onde

$$A = 1 - \frac{2m}{r} \quad (3.2)$$

para um dado valor genérico de  $m$ . Definimos a família uniparamétrica Schwarzschild

como sendo o conjunto de espaços-tempos descritos pelo elemento de linha (3.1) onde o parâmetro  $m$  pode assumir valores reais no intervalo  $0 < m < +\infty$ . Neste capítulo, estudaremos os limites dessa família quando  $m \rightarrow 0$  ou  $m \rightarrow \infty$ . Inicialmente investigaremos o limite  $m \rightarrow \infty$ .

Uma maneira ingênua seria obter o limite do elemento de linha (3.1). O resultado seria divergente já que o componente  $g_{tt} = 1 - \frac{2m}{r}$  tenderia a infinito. A conclusão seria a de que a família Schwarzschild não possui limite quando  $m$  tende a infinito. Porém, Geroch [18] mostrou que não é bem assim.

De fato, com as transformações de coordenadas

$$x = r + m^{4/3} \quad \rho = m^{4/3}\theta \quad (3.3)$$

e

$$\tilde{r} = m^{-1/3}r \quad \tilde{t} = m^{1/3}t \quad \tilde{\rho} = m^{1/3}\theta \quad (3.4)$$

o elemento de linha da família Schwarzschild pode ser escrito como

$$ds^2 = A dt^2 - A^{-1} dx^2 - (x - m^{4/3})^2 \left( m^{-8/3} d\rho^2 + \text{sen}^2(m^{-4/3}\rho) d\varphi^2 \right) \quad (3.5)$$

onde

$$A = 1 - \frac{2m^{-1/3}}{m^{-4/3}x - 1} \quad (3.6)$$

e

$$ds^2 = \tilde{A} d\tilde{t}^2 - \tilde{A}^{-1} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 \left( d\tilde{\rho}^2 + m^{2/3} \text{sen}^2(m^{-1/3}\tilde{\rho}) d\varphi^2 \right) \quad (3.7)$$

onde

$$\tilde{A} = m^{-2/3} - \frac{2}{\tilde{r}} \quad (3.8)$$

respectivamente. Os limites desses elementos de linha quando  $m \rightarrow \infty$ , são dados, respectivamente, por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\varphi^2 \quad (3.9)$$

e

$$ds^2 = -\frac{2}{\tilde{r}}d\tilde{t}^2 + \frac{\tilde{r}}{2}d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2(d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2d\phi^2). \quad (3.10)$$

O primeiro é o elemento de linha de Minkowski e o segundo é uma métrica tipo Kasner [18]. As métricas tipo Kasner são talvez melhor conhecidas na forma [25]  $ds^2 = w^{2a_1}dw^2 - w^{2a_2}dx^2 - w^{2a_3}dy^2 - w^{2a_4}dz^2$ , onde  $a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + 1$  e  $(a_2)^2 + (a_3)^2 + (a_4)^2 = (a_1 + 1)^2$ . Se  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = a_4 = 1$ , verifica-se que essa forma geral se reduz à da eq. (3.10).

Consequentemente, tomar o limite do elemento de linha em um dado sistema de coordenadas não é o procedimento adequado, já que o resultado depende do sistema utilizado. De acordo com Geroch, ao tomarmos o limite do elemento de linha em um sistema de coordenadas específico, estamos identificando os pontos de mesmas coordenadas entre as variedades que compõem a família de espaços-tempos. Como tal identificação depende do sistema de coordenadas escolhido, também o limite dependerá. Geroch discute ainda as propriedades hereditárias dos limites, ou seja, aquelas que valem para qualquer métrica limite, independentemente do sistema de coordenadas utilizado. No cap. 4 discutiremos em detalhes as propriedades hereditárias. Aqui mencionaremos apenas uma delas: se um escalar construído a partir do tensor métrico e suas derivadas for identicamente nulo para todos os membros de uma família, então será nulo para todos os limites dessa família [18].

### 3.2 Limite dos escalares de Cartan

Com vistas a desenvolver um formalismo independente de coordenadas para o estudo de limites, calculamos, utilizando o algoritmo de Karlhede, os EC da métrica de Schwarzschild na forma (3.1). Os cálculos foram feitos com o auxílio do CLASSI e do arquivo de métrica A.1. Os EC algebricamente independentes diferentes de zero são

$$\text{(ordem 0)} \quad \Psi_2 = -\frac{m}{r^3} \quad (3.11)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Psi_{20'} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{m}{r^4}\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \quad (3.12)$$

$$\nabla\Psi_{31'} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{m}{r^4}\sqrt{1-\frac{2m}{r}} \quad (3.13)$$

(ordem 2) 
$$\nabla^2\Psi_{20'} = \frac{12m^2}{r^6} - \frac{6m}{r^5} \quad (3.14)$$

$$\nabla^2\Psi_{31'} = -\frac{27m^2}{2r^6} + \frac{6m}{r^5} \quad (3.15)$$

$$\nabla^2\Psi_{42'} = \frac{12m^2}{r^6} - \frac{6m}{r^5}. \quad (3.16)$$

A seguir descrevemos a classificação discreta. Na ordem 0, obtém-se que o tipo de Petrov é D. Existe 1 função funcionalmente independente, que podemos tomar como sendo  $\Psi_2$ . Portanto  $t_0 = 1$  e  $d_0 = 3$ . O grupo de isotropia  $H_0$  é o grupo de rotações temporais (1.35) e rotações espaciais (1.34), de acordo com a tab. 1.9.

Na ordem 1 não há nenhuma função funcionalmente independente nova, logo  $d_1 = d_0 = 3$ . Sob a ação de  $H_0$ , os EC de ordem 1 se transformam como (veja a tab. 1.5)

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{20'} = z^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.17)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{31'} = -z^{-2}\nabla\Psi_{20'}. \quad (3.18)$$

Uma base canônica pode então ser obtida se escolhermos  $z$  tal que os dois componentes acima sejam iguais a menos do sinal. De acordo com as expressões acima, a rotação espacial não altera a forma dos EC de ordem 1. Portanto,  $H_1$  é o grupo de rotações espaciais (1.34).

Na ordem 2 também não há novas funções funcionalmente independentes. Logo  $d_2 = d_1 = 3$ . A partir da tab. 1.6 verificamos que os EC de ordem 2 são invariantes sob a ação do grupo  $H_1$ . Portanto  $H_2 = H_1$ . Conseqüentemente, o algoritmo pára nesse ponto.

Resumindo, o grupo de isometria tem dimensão 4, sua órbita tem dimensão 3 e seu subgrupo de isotropia tem dimensão 1 [rotação espacial (1.34)].

Tomaremos agora as  $t_c$  funções funcionalmente independentes (nas coordenadas) e escreveremos os EC em termos delas. No caso só existe uma ( $t_2 = 1$ ), que podemos

escolher como sendo  $\Psi_2$ . Da eq. (3.11) obtemos  $r$  como função de  $\Psi_2$  e de  $m$  e substituímos nas expressões restantes. Assim

$$\text{(ordem 0)} \quad \Psi_2 = -\frac{m}{r^3} \quad (3.19)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Psi_{20'} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Psi_2^{\frac{4}{3}}\sqrt{m^{-\frac{2}{3}} + 2\Psi_2^{\frac{1}{3}}} \quad (3.20)$$

$$\nabla\Psi_{31'} = -\nabla\Psi_{20'} \quad (3.21)$$

$$\text{(ordem 2)} \quad \nabla^2\Psi_{20'} = 12\Psi_2^2 + 6m^{-\frac{2}{3}}\Psi_2^{\frac{5}{3}} \quad (3.22)$$

$$\nabla^2\Psi_{31'} = -\frac{27}{2}\Psi_2^2 - 6m^{-\frac{2}{3}}\Psi_2^{\frac{5}{3}} \quad (3.23)$$

$$\nabla^2\Psi_{42'} = \nabla^2\Psi_{20'} . \quad (3.24)$$

Numa tentativa de entender o problema de limites, vamos recalculer os EC para a métrica de Schwarzschild nas formas (3.5) e (3.7) e calcular os seus limites quando  $m \rightarrow \infty$ . Ao invés de realmente recalculer os EC, podemos simplesmente efetuar as transformações de coordenadas (3.3) e (3.4) diretamente nos EC dados por (3.19)–(3.24) acima. Como as expressões (3.20)–(3.24) não dependem de coordenadas, basta transformar  $\Psi_2$  dado pela eq. (3.19). Obtemos respectivamente

$$\Psi_2 = -\frac{m}{x - m^{\frac{4}{3}}} \quad (3.25)$$

e

$$\Psi_2 = -\frac{1}{\tilde{r}^3}. \quad (3.26)$$

No primeiro sistema de coordenadas, os EC são dados por (3.19)–(3.24). Quando  $m \rightarrow \infty$  o limite é divergente pois, por exemplo,  $\Psi_2 \rightarrow \infty$ . No segundo sistema de coordenadas, os EC são dados por (3.25) e (3.20)–(3.24). No limite, pode-se verificar facilmente que todos os EC são identicamente nulos, correspondendo à métrica de Minkowski. No terceiro

sistema de coordenadas, os EC são dados por (3.26) e (3.20)–(3.24). No limite, os EC são finitos e não nulos, dados por

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= -\frac{1}{f^3} & \nabla\Psi_{20'} &= 3\Psi_2^{\frac{3}{2}} & \nabla\Psi_{31'} &= -\nabla\Psi_{20'} \\ \nabla^2\Psi_{20'} &= 12\Psi_2^2 & \nabla^2\Psi_{31'} &= -\frac{27}{2}\Psi_2^2 & \nabla^2\Psi_{42'} &= \nabla^2\Psi_{20'}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resta verificar que métrica corresponde a esses EC. O candidato mais natural parece ser a métrica tipo Kasner dada por (3.10). Portanto, utilizando o CLASSI e o arquivo de métrica A.2, calculamos os EC para a métrica tipo Kasner (3.10). De fato, os EC acima e os EC da métrica tipo Kasner (3.10) são idênticos. Logo, esse limite corresponde à métrica tipo Kasner (3.10).

Aparentemente, tudo o que conseguimos até agora foi reproduzir com os EC os resultados que Geroch obteve com o elemento de linha. Porém, uma nova interpretação para o problema de limites surge complementando os argumentos de Geroch. *Ao escolhermos um sistema de coordenadas para calcular o limite da família Schwarzschild quando o parâmetro massa  $m$  tende a algum valor, estamos implicitamente impondo um limite para os EC.* A cada escolha de sistema de coordenadas corresponde um limite diferente (em princípio) para os EC. Portanto, para que o limite de Schwarzschild quando  $m$  tende a um certo valor fique bem definido, de maneira independente de coordenadas, devemos explicitar o limite dos EC. Essa interpretação nos permitirá contruir um método sistemático para a obtenção de limites.

### 3.3 Método de limite com os escalares de Cartan

Com o intuito de desenvolver um método sistemático para a obtenção de limites, escreveremos os EC (3.19)–(3.24) de uma forma um pouco mais conveniente. Observe que as expressões (3.19)–(3.24) mudam quando o valor de  $m$  varia. Isto é, são válidas para uma métrica de Schwarzschild de cada vez. Desejamos encontrar expressões que não dependam de  $m$  para que possamos estudar os limites. Ou seja, expressões válidas para toda

a família Schwarzschild. Assim como  $\Psi_2$  foi escolhido como coordenada fundamental e a coordenada  $r$  foi eliminada dos EC restantes, vamos eliminar  $m$  de tantos EC quanto possível. Da eq. (3.20) obtemos  $m$  como função de  $\Psi_2$  e de  $\nabla\Psi_{20'}$  e substituímos nas expressões restantes. Assim, os EC podem ser re-escritos como

$$\text{(ordem 0)} \quad \Psi_2 = -\frac{m}{r^3}, \quad (3.28)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Psi_{20'} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Psi_2^{\frac{4}{3}}\sqrt{m^{-\frac{2}{3}} + 2\Psi_2^{\frac{1}{3}}} \quad (3.29)$$

$$\nabla\Psi_{31'} = -\nabla\Psi_{20'} \quad (3.30)$$

$$\text{(ordem 2)} \quad \nabla^2\Psi_{20'} = \frac{4}{3}\frac{(\nabla\Psi_{20'})^2}{\Psi_2} \quad (3.31)$$

$$\nabla^2\Psi_{31'} = -\nabla^2\Psi_{20'} - \frac{3}{2}\Psi_2^2 \quad (3.32)$$

$$\nabla^2\Psi_{42'} = \nabla^2\Psi_{20'}. \quad (3.33)$$

A expressão (3.28) depende do sistema de coordenadas e do parâmetro  $m$ . EC dependentes das coordenadas e dos parâmetros serão denominados de EC de *primeira espécie* ou *coordenados*. A expressão (3.29) depende só do parâmetro  $m$ , portanto sua forma não varia por transformação de coordenadas. EC dependentes apenas dos parâmetros serão denominados de EC de *segunda espécie* ou *paramétricos*. As expressões restantes são independentes tanto das coordenadas quanto do parâmetro, portanto, suas formas não variam por transformação de coordenadas e por mudança no valor do parâmetro. Logo valem também no limite. EC independentes tanto de coordenadas como de parâmetros serão denominados de EC de *terceira espécie*. Assim, na família Schwarzschild, cada métrica fica determinada pelos EC de primeira e segunda espécies, respectivamente  $\Psi_2$  e  $\nabla\Psi_{20'}$ .

Um procedimento para a obtenção dos limites pode ser agora delineado. Escolhemos um limite para  $m$ . A escolha de um sistema de coordenadas impõe implicitamente um

limite a  $\Psi_2$ . O que faremos agora será deixar  $\Psi_2$  tomar qualquer limite, ou melhor, vamos explicitamente impor o limite de  $\Psi_2$ . As possíveis escolhas são: (a) 0; (b) uma função de todas ou algumas coordenadas,  $f(x^i)$ ; (c) constante diferente de zero; (d)  $\infty$ . Nesta tese não estudaremos limites divergentes (d). No capítulo 4 discutiremos sobre esse aspecto com um pouco mais de detalhe.

Antes de impor um limite para  $m$ , mostraremos que o limite (c) não satisfaz condições de integrabilidade. Da condição  $\Psi_2 = \text{constante}$  e das eqs. (3.29)–(3.33), obtemos que todos EC são constantes e portanto não há funções funcionalmente independentes entre os EC. Conseqüentemente, a órbita do grupo de isometria tem dimensão 4 e a métrica correspondente é homogênea. No entanto, mostra-se [9] (veja também [28]), utilizando-se o formalismo de Geroch-Held-Penrose [19], que as condições: homogeneidade, Petrov tipo D, Segre tipo 0 ( $\Phi_{AW'} = 0$ ),  $\Lambda = 0$ ,  $\Psi_A = 0$  ( $A \neq 2$ ) e  $\Psi_2 = \text{constante}$ , são incompatíveis. Esse resultado pode ser reobtido com o formalismo de Newman-Penrose [42, 30]. De fato, a condição de homogeneidade anula todas as derivadas nas equações de Newman-Penrose. Utilizando-se então as demais condições, as identidades de Bianchi nesse formalismo se reduzem a  $\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \rho = \mu = \pi = \tau = 0$ . Substituindo esses valores nas identidades de Ricci escritas no formalismo de Newman-Penrose (em particular, na equação (7.35) da referência [30]), obtemos que  $\Psi_2 = 0$ , o que contradiz a hipótese.

Discutiremos agora os dois casos restantes, (a) e (b), para os limites 0 e  $\infty$  de  $m$ .

1.  $m \rightarrow \infty$

- (a)  $\Psi_2 \rightarrow 0$ . De (3.29)–(3.33) verifica-se que todos os EC tendem a zero. A métrica correspondente é portanto Minkowski.
- (b)  $\Psi_2 \rightarrow f(x^i)$ . De (3.29),  $\nabla\Psi_{20'} \rightarrow 3(f(x^i))^{3/2}$ . Se  $f(x^i) = -1/r^3$ , não precisamos nos preocupar com o problema inverso pois já conhecemos a métrica com esse conjunto de EC. Trata-se da métrica de Kasner (3.10) com os EC dados por (3.27). Para diferentes funções  $f(x^i)$ , teríamos, em princípio, diferentes métricas. Entretanto, utilizando o teorema de Cartan (1.16), podemos mostrar



que todas essas métricas são na realidade equivalentes. De fato, o conjunto de EC de cada métrica é dado pelas expressões (3.29)–(3.33) onde  $\Psi_2$  é dado por diferentes funções, por exemplo  $h(x^i)$  e  $\tilde{h}(\tilde{x}^i)$ . Para verificar a equivalência, temos de compatibilizar as equações formadas igualando dois a dois os EC de cada conjunto. As equações serão compatíveis desde que

$$h(x^i) = \tilde{h}(\tilde{x}^i). \quad (3.34)$$

Essa equação nada mais é que a definição da transformação de coordenadas que torna idênticos os dois conjuntos de EC. Conseqüentemente, apenas uma métrica corresponde a esse limite.

## 2. $m \rightarrow 0$

(a)  $\Psi_2 \rightarrow 0$ . De maneira similar a (1.a), este limite é Minkowski.

(b)  $\Psi_2 \rightarrow f(x^i)$ . De (3.29),  $\nabla\Psi_{20'} \rightarrow \infty$ . Conseqüentemente, esse limite é singular.

Esgotam-se assim todos os limites possíveis na base tetrádica utilizada. Entretanto, assim como mudanças de coordenadas podem originar novos limites, transformações de base tetrádica também. No capítulo 4 discutiremos esse ponto num contexto mais amplo. Aqui, contudo, nos limitaremos à métrica de Schwarzschild.

A base tetrádica que utilizamos foi fixada passo a passo. Primeiro ao impormos uma forma canônica para os EC de ordem 0, em seguida ao impormos uma forma canônica para a ordem 1. A ordem 2 não impôs nenhuma restrição à base. Recuperaremos a liberdade da base passo a passo, mas na direção inversa, ou seja, começando com a ordem 1 e terminando com a ordem 0.

Vamos então manter a forma canônica dos EC de ordem 0. Assim, o grupo de transformações de base tetrádica que podemos utilizar para gerar novas bases é dado pelo grupo de isotropia  $H_0$ . Por outro lado, mantendo a base canônica para a ordem 0, os tipos de Petrov que podemos encontrar no limite são, de acordo com a tab. 1.9, D e 0.

Para Petrov tipo 0 todos os EC são identicamente nulos. Esse limite já foi obtido — é a métrica de Minkowski. Vamos analisar os limites Petrov tipo D.

Aplicando  $H_0$  nos EC de ordem 1 obtemos o conjunto mais geral de EC de ordem 1. Essa forma já foi apresentada em (3.17)–(3.18). O limite desse conjunto de EC será dado pelo limite do parâmetro  $z$  do grupo de Lorentz e pelo limite de  $\nabla\Psi_{20'}$ . As possibilidades são: (a)  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'} \rightarrow 0$  e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'} \rightarrow 0$ ; (b)  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'} \rightarrow 0$  e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'}$  finito não nulo; (c)  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'}$  finito não nulo e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'} \rightarrow 0$ ; (d)  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'}$  e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'}$  finitos não nulos. Da forma da transformação (3.17)–(3.18), os três primeiros casos só podem ocorrer se  $\nabla\Psi_{20'} \rightarrow 0$ . Porém, de (3.29) observamos que se descartamos limites divergentes,  $\nabla\Psi_{20'}$  só pode tender a zero se  $\Psi_2 \rightarrow 0$ , correspondendo portanto ao espaço-tempo de Minkowski. Resta somente o caso (d) em que ambos  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'}$  e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'}$  são finitos e não nulos. Podemos então utilizar o grupo de isotropia  $H_0$  novamente, para encontrar uma forma canônica para os novos EC de ordem 1 que encontramos no limite. Como ambas as transformações não alteram os sinais relativos de  $\widetilde{\nabla\Psi}_{20'}$  e  $\widetilde{\nabla\Psi}_{31'}$ , a base será a mesma base canônica que já havíamos utilizado. Portanto não há novos limites Petrov tipo D.

Podemos resumir os resultados mostrados até aqui no seguinte teorema.

**Teorema:** (3.35)

Os únicos limites não singulares Petrov tipo D ou 0 da família Schwarzschild, quando  $m$  tende a 0 ou  $\infty$  são:

$m \rightarrow \infty$ , Minkowski (tipo 0) e Kasner (tipo D);

$m \rightarrow 0$ , Minkowski.

### 3.4 Limites Petrov tipo N

Recuperaremos agora a liberdade da base na ordem 0. Como discutiremos em detalhes no cap. 4, uma família de métricas Petrov D só pode ter como limite métricas tipo D, tipo N ou tipo 0 (veja fig. 4.1). Os limites tipo D e 0 foram obtidos na seção anterior. Para obtermos limites tipo N escreveremos os EC em uma nova base que no limite possa

vir a ser uma base canônica para Petrov N.

Utilizando uma rotação nula (1.32), os EC de ordem 0 na forma canônica para Petrov D [(3.28), veja também fig. 1.9] se transformam, de acordo com a tab. 1.3, em

$$\text{(ordem 0)} \quad \tilde{\Psi}_2 = \Psi_2 \quad (3.36)$$

$$\tilde{\Psi}_3 = 3a\Psi_2 \quad (3.37)$$

$$\tilde{\Psi}_4 = 6a^2\Psi_2 \quad (3.38)$$

onde  $\Psi_2$  é dado por (3.28). Para obtermos a forma canônica para Petrov N, ou seja,  $\Psi_4 = 1$  e  $\Psi_A = 0$  se  $A \neq 0$  (conforme fig. 1.9), os limites de  $\Psi_2$  e  $a$  devem ser

$$\Psi_2 \rightarrow 0 \quad e \quad a \rightarrow \infty \quad (3.39)$$

de maneira tal que

$$6a^2\Psi_2 \rightarrow 1. \quad (3.40)$$

Essa condição é satisfeita se e somente se

$$a^2 \rightarrow \frac{1}{6\Psi_2}. \quad (3.41)$$

A transformação dos demais EC pode ser obtida com o auxílio do CLASSI (conforme arquivo B.2), fornecendo

(ordem 1)

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{20'} = \nabla\Psi_{20'} \quad (3.42)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{21'} = \bar{a}\nabla\Psi_{20'} \quad (3.43)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{30'} = 3a\nabla\Psi_{20'} \quad (3.44)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{31'} = (3a\bar{a} - 1)\nabla\Psi_{20'} \quad (3.45)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{40'} = 6a^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.46)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{41'} = (6a^2\bar{a} - 4a)\nabla\Psi_{20'} \quad (3.47)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{50'} = 10a^3\nabla\Psi_{20'} \quad (3.48)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} = (10a^3\bar{a} - 10a^2)\nabla\Psi_{20'} \quad (3.49)$$

(ordem 2)

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{20'} = 4/3(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.50)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{21'} = 4/3\bar{a}(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.51)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{22'} = 4/3\bar{a}^2(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.52)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{30'} = 4a(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.53)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{31'} = (4a\bar{a} - 4/3)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 3/2(\Psi_2)^2 \quad (3.54)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{32'} = (4a\bar{a}^2 - 8/3\bar{a})(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 3\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.55)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{40'} = 8a^2(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.56)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{41'} = (8a^2\bar{a} - 16/3a)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 6a(\Psi_2)^2 \quad (3.57)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{42'} = (8a^2\bar{a}^2 - 32/3a\bar{a} + 4/3)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 12a\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.58)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{50'} = 40/3a^3(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.59)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{51'} = (40/3a^3\bar{a} - 40/3a^2)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 15a^2(\Psi_2)^2 \quad (3.60)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{52'} = (40/3a^3\bar{a}^2 - 80/3a^2\bar{a} + 20/3a)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 30a^2\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.61)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{60'} = 20a^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.62)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{61'} = (20a^4\bar{a} - 80/3a^3)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 30a^3(\Psi_2)^2 \quad (3.63)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'} = (20a^4\bar{a}^2 - 160/3a^3\bar{a} + 20a^2)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 60a^3\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.64)$$

onde  $\Psi_2$  e  $\nabla\Psi_{20'}$  são dados por (3.28) e (3.29).

Como  $a \rightarrow \infty$ , apenas os termos de ordem mais alta em  $a$  permanecem no limite.

Assim, eqs. (3.49) e (3.64) podem ser re-escritas como

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow 10a^3\bar{a}\nabla\Psi_{20'} \quad (3.65)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'} \rightarrow 20a^4\bar{a}^2(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 60a^3\bar{a}(\Psi_2)^2. \quad (3.66)$$

Utilizando o limite (3.41) de  $\Psi_2$ , podemos re-escrever o segundo termo do lado direito de (3.66) como  $-60a^3\bar{a}(\Psi_2)^2 \rightarrow -\frac{5\bar{a}}{3a}$ , ou seja, um valor finito. Como limites singulares não estão sendo considerados,  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  e  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'}$  devem ser finitos e portanto as expressões  $10a^3\bar{a}\nabla\Psi_{20'}$  e  $20a^4\bar{a}^2(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2$  devem também ser finitas. A finitude dessas três expressões implica na nulidade de todas os demais componentes de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{AW'}$  e  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{AW'}$ , visto que são de menor ordem em  $a$ . Finalmente, substituindo a expressão de  $\nabla\Psi_{20'}$  da eq. (3.29) e o limite (3.41) em (3.65) e (3.66), os únicos componentes não nulos no limite, nas ordens 1 e 2, podem ser escritos como

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow \frac{5}{6\sqrt{2}}\frac{\bar{a}}{a}\Psi_2^{-\frac{2}{3}}\sqrt{m^{-\frac{2}{3}} + 2\Psi_2^{\frac{1}{3}}} \quad (3.67)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'} \rightarrow \frac{6}{5}(\widetilde{\nabla}\Psi_{51'})^2 - \frac{5\bar{a}}{3a}. \quad (3.68)$$

De (3.39), o termo fora da raiz quadrada em (3.67) tende a  $\infty$ , logo a raiz quadrada deve tender a zero para que o produto seja finito. Isso implica em  $m \rightarrow \infty$ .

A partir de agora vamos impor que a massa  $m$  é não negativa. Assim, de (3.11) e (3.12) concluímos que  $\Psi_2$  é real negativo e que  $\nabla\Psi_{20'}$  é real positivo ou imaginário puro positivo. Essas propriedades são hereditárias na acepção de Geroch. Conseqüentemente, de (3.41) concluímos que o limite de  $a$  é imaginário puro e portanto o limite de  $\bar{a}/a$  é  $-1$ . De (3.65) concluímos ainda que o limite de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  é negativo, real ou imaginário puro. Finalmente, o limite dos EC quando  $m \rightarrow \infty$  pode ser escrito como

$$\text{(ordem 0)} \quad \tilde{\Psi}_4 \rightarrow 1 \quad (3.69)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow -\frac{5}{6\sqrt{2}}\Psi_2^{-\frac{2}{3}}\sqrt{m^{-\frac{2}{3}} + 2\Psi_2^{\frac{1}{3}}} \quad (3.70)$$

$$\text{(ordem 2)} \quad \widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'} \rightarrow \frac{6}{5}(\widetilde{\nabla}\Psi_{51'})^2 + \frac{5}{3}. \quad (3.71)$$

Esse conjunto de EC corresponde a uma métrica Petrov tipo N, com  $H_0$  bi-dimensional

constituído por rotações nulas (1.32), como mostra a tab. 1.9 e com  $d_0 = 4$ . Contudo, a expressão (3.70) não determina univocamente o limite de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$ , que, dependendo de como  $\Psi_2 \rightarrow 0$  e  $m \rightarrow \infty$ , pode ser: (1) constante diferente de zero, (2) uma função das coordenadas  $f(x^i)$  ou (3) 0. A partir de cada um desses limites, o limite de  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'}$  pode ser calculado utilizando-se (3.71). Vamos analisar essas três possibilidades.

1.  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow$  constante não nula. Para cada valor negativo, real ou imaginário puro dessa constante, satisfazendo (3.71), uma métrica não equivalente é obtida. Com o auxílio do CLASSI e do arquivo B.1, verifica-se que o grupo de isotropia  $H_1$  é igual a  $H_0$ . Não há funções funcionalmente independentes, logo  $d_1 = d_0 = 4$ . Assim, os EC de ordem 2 não precisam ser calculados. A órbita do grupo de isometria tem dimensão 4, o que implica que a métrica é homogênea. O grupo de isotropia tem dimensão 2 e o grupo de isometria dimensão 6.
2.  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow f(x^i)$ . Há uma função funcionalmente independente na ordem 1, a saber,  $f(x^i)$ . Na 2 ordem não há novas funções funcionalmente independentes, pois  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'}$  é função de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$ , portanto  $d_2 = d_1 = 3$ . Como no item anterior,  $H_2 = H_1 = H_0$ . Então a órbita do grupo de isometria tem dimensão 3, o grupo de isotropia dimensão 2 e o grupo de isometria dimensão 5.
3.  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow 0$ . De (3.71),  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'} \rightarrow 5/3$ . Esse conjunto de EC não corresponde a nenhuma métrica já que a derivada covariante de um espinor identicamente nulo deve ser também nula.

De posse dos EC e da classificação discreta, podemos procurar no banco de dados do CLASSI a métrica correspondente. Pela classificação discreta, um bom candidato parece ser a classe de métricas de ondas planas estudada no capítulo 2, e cujo elemento de linha é dado pelas equações (2.1)–(2.2), a saber,  $ds^2 = -2d\zeta d\bar{\zeta} + 2dudv + Hdu^2$  onde  $H = \bar{A}(u)\zeta^2 + A(u)\bar{\zeta}^2 + 2B(u)\zeta\bar{\zeta}$ . O passo seguinte consiste em calcular seus EC para verificar se realmente coincidem com os EC que obtivemos no limite. Conforme descrito naquele capítulo, para obter Segre 0, ou seja,  $\Phi_{AW'} = 0$ , como é o caso aqui, fazemos  $B = 0$ . Os EC

correspondentes são dados então por (2.7)-(2.9), a saber  $\Psi_4 = 1$ ,  $\nabla\Psi_{51'} = A^{-\frac{1}{4}}\overline{(A^{-\frac{1}{4}})}A_{,u}$  e  $\nabla^2\Psi_{62'} = A^{-\frac{3}{2}}\overline{(A^{-\frac{1}{2}})}A_{,uu}$ .

Verificaremos a seguir que para funções  $A(u)$  específicas os limites (1) e (2) acima são recuperados.

1.  $\widetilde{\nabla\Psi}_{51'} \rightarrow \text{constante}$ . É possível mostrar [30] que a métrica (2.1)-(2.2), com  $B = 0$ , é homogênea se e somente se  $A(u)$  tiver uma das formas<sup>1</sup>

$$A(u) = A_0 e^{i\kappa u} \quad (3.72)$$

ou

$$A(u) = A_0 u^{2i\kappa-2} \quad (3.73)$$

onde  $A_0 > 0$  e  $\kappa$  são constantes reais. Substituindo (3.72) ou (3.73) na forma geral (2.8) de  $\nabla\Psi_{51'}$ , obtemos

$$\nabla\Psi_{51'} = iA_0^{-\frac{1}{2}}\kappa \quad (3.74)$$

ou

$$\nabla\Psi_{51'} = -2A_0^{-\frac{1}{2}} + i2A_0^{-\frac{1}{2}}\kappa \quad (3.75)$$

respectivamente. Assim, a escolha  $\kappa = -1$  em (3.72) e  $\kappa = 0$  em (3.73) recupera todos os possíveis valores de  $\widetilde{\nabla\Psi}_{51'}$ , no limite, ou seja, negativos, reais ou imaginários puros.

Substituindo as expressões (3.72) ou (3.73) de  $A(u)$  em (2.9), a derivada segunda é respectivamente

$$\nabla^2\Psi_{62'} = -\frac{\kappa^2}{A_0} \quad (3.76)$$

ou

$$\nabla^2\Psi_{62'} = -\frac{4\kappa^2}{A_0} + \frac{6}{A_0} - i\frac{10\kappa}{A_0}. \quad (3.77)$$

Substituindo esses valores de  $\Psi_{51'}$  e  $\Psi_{62'}$  encontrados para essa classe de métrica

---

<sup>1</sup>Esse resultado foi por nós confirmado utilizando o CLASSI.

de ondas planas homogêneas, ou seja, (3.74) e (3.76), ou (3.75) e (3.77) na expressão limite de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{62'}$ , ou seja, (3.71), obtemos apenas duas soluções para  $A(u)$ , respectivamente

$$A(u) = \frac{3}{25}e^{-iu} \quad (3.78)$$

ou

$$A(u) = \frac{18}{25}u^{-2}. \quad (3.79)$$

Assim, a classe de métrica de ondas planas (2.1)–(2.2), com  $B = 0$  e  $A(u)$  dado por (3.78) ou (3.79), é um limite de Schwarzschild quando  $m \rightarrow \infty$ .

2.  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow f(x^i)$ . Substituindo os valores de  $\Psi_{51'}$  e  $\Psi_{62'}$  encontrados para essa classe de métricas de ondas planas Segre 0, ou seja, (2.8) e (2.9) na expressão limite de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{62'}$ , ou seja, (3.71), a equação obtida para  $A(u)$  é

$$A_{,uu} - \frac{6}{5}A^{-1}(A_{,u})^2 - \frac{5}{3}A^{\frac{3}{2}}\overline{(A^{\frac{1}{2}})} = 0. \quad (3.80)$$

Entre as soluções dessa equação, aquelas da forma (3.78) ou (3.79) resultam em métricas homogêneas já discutidas no caso anterior. Qualquer outra solução dará origem a  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  não constante. Analogamente ao limite (1.b) Petrov tipo D da seção anterior [veja eq. (3.34)], apenas uma métrica corresponde a esse limite, independentemente do valor da função.

### 3.5 Outros limites Petrov N

Assim como nos limites Petrov D, investigaremos a possibilidade de existirem outros limites Petrov N se mudarmos a base mantendo a forma dos EC de ordem 0 e alterando a forma dos EC na ordem 1.

Denotaremos por  $B_1$  a base na qual os EC têm a forma dada por (3.28)–(3.33), ou seja, a base na qual encontramos os limites Petrov D. Nessa base o grupo de isotropia



$H_0$  é representado pela matriz  $TE$ , produto (1.36) das matrizes  $T$  e  $E$  que representam, respectivamente, os grupos de rotação temporal (1.35) e rotação espacial (1.34). O grupo de isotropia da ordem 1 ( $H_1$ ) é o grupo de rotação espacial (1.34), representado pela matriz  $E$ , na base  $B_1$ .

Denotaremos por  $B_2$  a base na qual os EC têm a forma dada por (3.36)–(3.38) e (3.42)–(3.64), ou seja, a base que nos permitiu obter limites Petrov N na seção anterior. Para transformarmos a base  $B_1$  na base  $B_2$ , utilizamos uma rotação nula (1.32) com o parâmetro  $a$  real, cuja matriz denotaremos, nesta seção, pela letra  $N$ .

Mostra-se [68] que se um grupo  $G$  é representado em uma base  $B_1$  pela matriz  $M$ , e se uma base  $B_2$  é obtida a partir da base  $B_1$  por meio de uma transformação representada pela matriz  $N$ , então  $G$  será representado na base  $B_2$  pela matriz  $NMN^{-1}$ . A transformação que leva a matriz  $M$  na matriz  $NMN^{-1}$  é denominada transformação de similaridade.

Assim, na base  $B_2$  as matrizes que representam  $H_0$  e  $H_1$  são dadas respectivamente por  $NTE N^{-1}$  e  $NE N^{-1}$ , ou seja, são obtidas por uma transformação de similaridade. Em outras palavras, a transformação de isotropia na base  $B_2$  é obtida aplicando-se a inversa de  $N$  para passar à base  $B_1$ , em seguida aplicando-se o grupo de isotropia na base  $B_1$  e posteriormente aplicando-se  $N$  para voltar à base  $B_2$ .

Para transformar os EC de ordem 1 e 2 sem alterar os EC de ordem 0 aplica-se, então, o grupo de isotropia  $H_0$  dado por  $NTE N^{-1}$  aos EC referidos à base  $B_2$  [eqs. (3.42)–(3.64)]. Na prática, claro, aplicamos  $NTE$  diretamente aos EC referidos à base  $B_1$  [eqs. (3.29)–(3.33)].

Os cálculos podem ser ainda simplificados de vez que o grupo de rotação espacial, representado por  $E$ , é o grupo  $H_1$  de isotropia dos EC de ordem 1. Assim, para obtermos a base mais geral que permite limites Petrov N, basta aplicarmos sucessivamente as rotações temporal  $T$  e nula  $N$  (com  $a$  real) dadas por (1.35) e (1.32) aos EC de ordem 1 e 2 dados pelas eqs. (3.29)–(3.33). Os cálculos foram feitos utilizando-se os comandos mostrados no

arquivo B.3, fornecendo

(ordem 1)

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{20'} = z^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.81)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{21'} = \bar{a}z^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.82)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{30'} = 3az^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.83)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{31'} = (3a\bar{a}z^2 - z^{-2})\nabla\Psi_{20'} \quad (3.84)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{40'} = 6a^2z^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.85)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{41'} = (6a^2\bar{a}z^2 - 4az^{-2})\nabla\Psi_{20'} \quad (3.86)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{50'} = 10a^3z^2\nabla\Psi_{20'} \quad (3.87)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} = (10a^3\bar{a}z^2 - 10a^2z^{-2})\nabla\Psi_{20'} \quad (3.88)$$

(ordem 2)

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{20'} = 4/3z^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.89)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{21'} = 4/3\bar{a}z^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.90)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{22'} = 4/3\bar{a}^2z^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.91)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{30'} = 4az^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.92)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{31'} = (4a\bar{a}z^4 - 4/3)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 3/2(\Psi_2)^2 \quad (3.93)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{32'} = (4a\bar{a}^2z^4 - 8/3\bar{a})(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 3\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.94)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{40'} = 8a^2z^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.95)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{41'} = (8a^2\bar{a}z^4 - 16/3a)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 6a(\Psi_2)^2 \quad (3.96)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{42'} = (8a^2\bar{a}^2z^4 - 32/3a\bar{a} + 4/3z^{-4})(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 12a\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.97)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{50'} = 40/3a^3z^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.98)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{51'} = (40/3a^3\bar{a}z^4 - 40/3a^2)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 15a^2(\Psi_2)^2 \quad (3.99)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{52'} = (40/3a^3\bar{a}^2z^4 - 80/3a^2\bar{a} + 20/3az^{-4})(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 30a^2\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.100)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{60'} = 20a^4z^4(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 \quad (3.101)$$

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{61'} = (20a^4\bar{a}z^4 - 80/3a^3)(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 30a^3(\Psi_2)^2 \quad (3.102)$$

$$\widetilde{\nabla^2\Psi}_{62'} = (20a^4\bar{a}^2z^4 - 160/3a^3\bar{a} + 20a^2z^{-4})(\nabla\Psi_{20'})^2/\Psi_2 - 60a^3\bar{a}(\Psi_2)^2 \quad (3.103)$$

Observe que a menos do parâmetro  $z$ , essas expressões são idênticas às eqs. (3.42)–(3.64). Impondo a relação (3.41) entre  $a$  e  $\Psi_2$  no limite, podemos reescrever (3.88) e (3.103) como

$$\widetilde{\nabla\Psi}_{51'} \rightarrow 10a^3\nabla\Psi_{20'}iF \quad (3.104)$$

$$\widetilde{\nabla^2\Psi}_{62'} \rightarrow \frac{6}{5}(\widetilde{\nabla\Psi}_{51'})^2 - \frac{4\bar{a}}{5a}(10a^3\nabla\Psi_{20'})^2 - \frac{5\bar{a}}{3a} \quad (3.105)$$

onde

$$F = \frac{\bar{a}}{a}f + \frac{1}{f} \quad e \quad f = \frac{az^2}{i}. \quad (3.106)$$

Como limites divergentes não estão sendo considerados, os limites de  $\widetilde{\nabla\Psi}_{51'}$  e  $\widetilde{\nabla^2\Psi}_{62'}$  devem ser finitos ou nulos. Daí concluímos que termos da ordem de  $a^3\nabla\Psi_{20'}$  são também finitos ou zero. Utilizando esse resultado pode-se mostrar que todos os demais componentes de  $\widetilde{\nabla\Psi}_{AW'}$  e  $\widetilde{\nabla^2\Psi}_{AW'}$  são nulos qualquer que seja o limite de  $f$ .

Utilizando-se a expressão de  $\nabla\Psi_{20'}$  (3.29) e o limite de  $\Psi_2$  (3.41) obtém-se

$$10a^3\nabla\Psi_{20'} \rightarrow \frac{5}{2\sqrt{3}}\Psi_2^{-\frac{1}{6}}\sqrt{m^{-\frac{2}{3}} + 2\Psi_2^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.107)$$

De (3.39), o termo fora da raiz quadrada em (3.107) tende a  $\infty$ , logo a raiz quadrada deve tender a zero para que  $10a^3\nabla\Psi_{20'}$  seja finito. Isso implica em  $m \rightarrow \infty$ . Assim, como tanto  $\widetilde{\nabla\Psi}_{51'}$  e  $\widetilde{\nabla^2\Psi}_{62'}$  em (3.104) e (3.105) devem ser finitos ou nulos, concluímos que nenhum novo limite surge quando  $m \rightarrow 0$ .

Como na seção 3.4, impomos que  $m$  é não negativo. Aqui, como lá,  $a$  será imaginário puro e  $\nabla\Psi_{20'}$  será real positivo ou imaginário puro positivo. Portanto, de (3.88) concluímos que  $\widetilde{\nabla\Psi}_{51'}$  pode ser real ou imaginário puro, positivo ou negativo, enquanto que na seção anterior apenas valores negativos eram possíveis. Passamos agora à análise dos diversos limites de  $f$  e  $F$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

1.  $f$  finito.

(a)  $F \rightarrow 0$ . Nesse caso  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow 0$ . A derivada  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'}$  deve também tender a zero, o que pode ocorrer se

$$\frac{4}{5}(10a^3\nabla\Psi_{20'})^2 + \frac{5}{3} \rightarrow 0. \quad (3.108)$$

O único EC independente não nulo é então  $\Psi_4 = 1$ . Recupera-se assim o terceiro limite da seção anterior ( $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow 0$ ). A métrica corresponde a um caso particular de ondas planas [eqs. (2.1)-(2.2)] com  $B(u) = 0$ . A partir dos EC dados por (2.8) e (2.9) obtemos que  $A(u) = \text{constante}$  para que  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  e  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'}$  sejam nulos. Como o valor de  $A$  não aparece na expressão dos EC, métricas com diferentes valores constantes de  $A$  são equivalentes. Portanto, podemos sempre encontrar um sistema de coordenadas no qual  $A = 1$ .

(b)  $F$  finito não nulo. Os EC independentes não nulos são  $\Psi_4 = 1$ ,  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$ , dado por (3.104) e  $\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'}$ , dado por (3.105), que pode ser re-escrita como

$$\widetilde{\nabla}^2\Psi_{62'} \rightarrow (\widetilde{\nabla}\Psi_{51'})^2 \left( \frac{6}{5} - \frac{4}{5} \frac{1}{F^2} \right) + \frac{5}{3} \quad (3.109)$$

Assim como na seção 3.4,  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  pode ser constante não nulo ou uma função.

i.  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow \text{constante}$ . O cálculos são análogos aos que levaram a (3.78) e (3.79), apenas substituímos a expressão (3.71) de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{62'}$  pelo novo limite (3.109). As soluções para  $A(u)$  são

$$A(u) = \left( \frac{3}{25} - \frac{12}{25F^2} \right) e^{-iu} \quad (3.110)$$

$$A(u) = \left( \frac{3}{25} - \frac{12}{25F^2} \right) e^{iu} \quad (3.111)$$

$$A(u) = \left( \frac{18}{25} - \frac{48}{25F^2} \right) u^{-2} \quad (3.112)$$

conforme  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  seja imaginário negativo, imaginário positivo ou real negativo. As expressões (3.74) e (3.75) de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'}$  não podem ser reais po-

sitivas, logo, a métrica para esse 4<sup>o</sup> caso não é coberta pela métrica de ondas planas (2.1)-(2.2). Não encontramos no banco de dados do CLASSI nenhuma métrica para esse limite dos EC e temos alguns indícios na literatura [9, 30] de que esse conjunto de EC não corresponde a nenhuma métrica riemanniana. Não conseguimos, contudo, uma prova formal desse fato.

- ii.  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow f(x^i)$ . O mesmo procedimento que levou a (3.80) é utilizado, apenas substituímos a expressão (3.71) de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{62'}$  pelo novo limite (3.109). A equação para  $A(u)$  é então a seguinte:

$$A_{,uu} - \left(\frac{6}{5} - \frac{4}{5F^2}\right) A^{-1}(A_{,u})^2 - \frac{5}{3} A^{\frac{3}{2}} \overline{(A^{\frac{1}{2}})} = 0. \quad (3.113)$$

2.  $f$  tende a zero ou infinito. Então  $F$  tende a infinito e o limite (3.109) de  $\widetilde{\nabla}\Psi_{62'}$  se reduz ao limite já estudado na seção 3.4, ou seja, (3.71). Consequentemente, obtemos as mesmas métricas de ondas planas com  $A(u)$  dado por (3.78) e (3.79) no caso  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow \text{constante}$  e a mesma equação para  $A(u)$ , ou seja, (3.80) quando  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow f(x^i)$ . Contudo, no caso  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow \text{constante}$ , um novo limite surge se a constante for imaginária positiva, a saber

$$A(u) = \frac{3}{25} e^{iu}. \quad (3.114)$$

No caso  $\widetilde{\nabla}\Psi_{51'} \rightarrow \text{constante imaginário positivo}$ , analogamente ao caso (1bi) acima, não encontramos a métrica, nem tampouco pudemos provar que ela não exista, apesar de termos indícios [9, 30] de que esse conjunto de EC não corresponde a nenhuma métrica riemanniana.

### 3.6 Comentários finais

A família Schwarzschild pode ser definida pela métrica (3.1). Cada elemento da família corresponde a um específico valor do parâmetro massa  $m$ . São todas métricas Petrov tipo D e Segre tipo 0. De acordo com os esquemas de especializações brevemente mencionados, e que serão discutidos no cap. 4, os limites possíveis são Petrov tipo D, N ou 0, enquanto o tipo de Segre será sempre 0. Os limites quando  $m \rightarrow 0$  e  $m \rightarrow \infty$  foram estudados.

Os limites Petrov tipo D e 0 foram encontrados em uma mesma base canônica e estão enumerados no teorema 3.35, seção 3.3. São eles os espaços-tempos de Minkowski (Petrov 0) e Kasner (Petrov D) quando  $m \rightarrow \infty$  e o espaço-tempo de Minkowski quando  $m \rightarrow 0$ .

Utilizando uma rotação nula (seção 3.4), obtemos limites Petrov tipo N quando  $m \rightarrow \infty$ . Para  $m \rightarrow 0$  nenhum limite Petrov N é encontrado. Os limites obtidos correspondem a casos particulares da classe de métricas de ondas planas dada por (2.1)–(2.2). Duas métricas homogêneas são obtidas se a função  $A(u)$  for dada por (3.78) ou (3.79) e  $B = 0$ . Uma métrica não homogênea é obtida se  $B = 0$  e  $A(u)$  for uma solução (diferente das duas acima) da equação diferencial (3.80).

Na seção 3.5, utilizando uma rotação nula e uma rotação temporal, mais algumas métricas de ondas planas Petrov N são encontradas quando  $m \rightarrow \infty$ , a saber: uma métrica homogênea (1a) com  $A(u) = 1$ ; três classes de métricas homogêneas (1bi) com  $A(u)$  dado por (3.110), (3.111) e (3.112); uma métrica homogênea (2) com  $A(u)$  dado por (3.114); uma métrica não homogênea (1bii) onde  $A(u)$  é solução de (3.113). Encontramos ainda, os EC correspondentes a uma classe de métricas homogêneas (1bi) e a uma métrica homogênea (2).

Além do estudo de limites, o conhecimento dos escalares de Cartan pode ser bastante útil para a compreensão das propriedades de um espaço-tempo. Note por exemplo, que a partir das eqs. (3.11)–(3.12) podemos escrever a coordenada  $r$  e a massa  $m$  como função dos EC  $\Psi_2$  e  $\Psi_{20'}$ . Dessa forma a massa e a coordenada  $r$  podem ser definidas a partir de propriedades independentes de coordenadas.

# Capítulo 4

## Método geral para obtenção de limites de espaços-tempos

### 4.1 Introdução

Tendo em vista a experiência ganha no estudo dos limites de Schwarzschild, podemos agora formalizar algumas técnicas utilizadas e estendê-las para situações mais gerais. Inicialmente necessitamos introduzir o conceito de família de espaços-tempos. Uma maneira consiste em considerar um elemento de linha cuja expressão contém parâmetros (não elimináveis por transformação de coordenadas). Em geral, a diferentes valores dos parâmetros correspondem métricas diferentes. Esse conjunto de métricas é denominado de família. Por limite de um espaço-tempo entende-se então o limite de uma família de espaços-tempos quando um ou mais parâmetros tendem a algum valor.

Antes de descrevermos o procedimento geral, estudaremos o que Geroch [18] chamou de propriedades hereditárias de uma família de espaços-tempos pelo processo de limite. Discutiremos algumas propriedades estudadas por Geroch e investigaremos a sua extensão. Um artigo contendo os resultados deste capítulo está em fase de elaboração [48].

## 4.2 Propriedades hereditárias

Como vimos no cap. 3, diversas métricas podem ser obtidas como limite de uma específica família de métricas. Discutiremos aqui algumas propriedades comuns a todos os limites de uma dada família de métricas. Tais propriedades são chamadas de *propriedades hereditárias* [18]. Entendemos então por hereditária uma propriedade comum a todos os limites de uma dada família de métricas.

Entre as propriedades hereditárias discutidas por Geroch [18], a seguinte será de grande utilidade para nosso trabalho.

**Propriedade hereditária (Geroch):** (4.1)

Seja  $T$  um campo tensorial, vetorial, escalar ou espinorial construído a partir do tensor métrico e suas derivadas. Se  $T$  é identicamente nulo para todas as métricas de uma família, então  $T$  é nulo para todos os limites dessa família.

A partir dessa propriedade, podemos mostrar a seguinte propriedade hereditária:

**Propriedade hereditária:** (4.2)

Seja  $E$  um campo escalar construído a partir do tensor métrico e suas derivadas. Se  $E$  é constante e  $E = C$  para todas as métricas de uma família, então  $E$  é constante e  $E = C$  para todos os limites dessa família.

A propriedade acima nada mais é do que uma extensão da propriedade (4.1) para escalares. Evidencia o fato de que, no caso de  $T$  ser um escalar, o valor zero na propriedade (4.1) pode ser substituído por um valor constante qualquer. Note que um escalar constante pode ser pensado como a soma de um escalar nulo e uma constante. Uma terceira propriedade



pode ainda ser obtida.

**Propriedade hereditária:**

(4.3)

Seja  $E$  um campo escalar construído a partir do tensor métrico e suas derivadas e  $C$  uma constante. Se  $E$  é constante e  $E > C$  ( $E < C$ ) para todas as métricas de uma família, então  $E$  é constante e  $E \geq C$  ( $E \leq C$ ) para todos os limites dessa família. Em particular,  $C$  pode ser nulo.

Esta propriedade pode ser entendida se notarmos que para que o valor de um campo escalar  $E$  mude continuamente de valores maiores que  $C$  para valores menores que  $C$ , seu valor tem de ser igual a  $C$  para alguma métrica da família, o que contraria a hipótese.

Como consequência imediata da propriedade hereditária 4.1, os limites de métricas do tipo de Segre 0 (tensor de Ricci nulo) são também Segre 0 e os limites de métricas do tipo de Petrov 0 (tensor de Weyl nulo) são também Petrov 0. O que dizer dos demais tipos de Petrov e de Segre?

Penrose [49, 50] (veja também [52, 22, 61]) obteve diagramas de especialização para as classificações de Petrov (fig. 4.1) e Segre (fig. 4.2). Será que diagramas de especialização são também diagramas de limites? Dito de outra forma, seria possível mostrar que no limite de uma família de espaços-tempos, os tipos de Petrov e de Segre ou continuariam os mesmos ou se especializariam conforme os diagramas das figs. 4.1 e 4.2 ?

Em 1969, Geroch [18] mostrou que o diagrama de especialização da classificação de Petrov é também um diagrama de limites. De fato, de acordo com o algoritmo de D’Inverno e Russell-Clark para classificação de Petrov [44, 11], a cada especialização, um escalar construído a partir da métrica e suas derivadas torna-se nulo. De acordo com a propriedade hereditária (4.1), no limite, um escalar nulo deve continuar nulo. Portanto o tipo de Petrov ou continua o mesmo ou se especializa.

Contudo, Geroch não investiga o diagrama de especialização da classificação de Segre. É nossa intenção, então, demonstrar que esse diagrama é de fato um diagrama de limites. Entretanto, até o momento, chegamos a apenas um resultado parcial, que discutimos

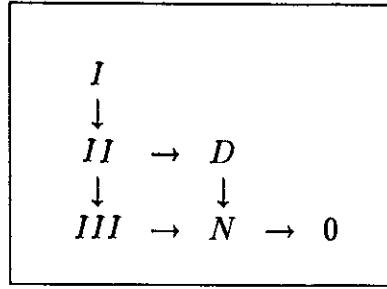


Figura 4.1: Especializações dos tipos de Petrov.

no que se segue. A partir do diagrama da fig. 4.2, podemos construir um diagrama de especialização simplificado (fig. 4.3) agrupando os tipos  $[(1,1)11]$  e  $[1,1(11)]$  num só tipo denotado  $[(11)11]$  e agrupando os tipos  $[(1,11)1]$  e  $[1,(111)]$  no tipo  $[(111)1]$ . Dessa forma, tipos que difiram pelo caráter dos autovetores não são distinguidos<sup>1</sup>. Mostraremos que esse diagrama de especialização para a classificação de Segre é também um diagrama de limites. Como um passo intermediário construiremos inicialmente um diagrama de limites ainda mais simples. Obtemos esse outro diagrama (fig.4.4) agrupando os tipos  $[z\bar{z}11]$  e  $[1111]$  no tipo  $[1111]$  e os tipos  $[z\bar{z}(11)]$  e  $[(11)11]$  no tipo  $[(11)11]$ , ou seja, não fazendo distinção entre autovalores reais e complexos.

Na subseção 1.6.1 sobre a classificação de Segre, estudamos o polinômio característico e as formas de Jordan. Com o intuito de construir um diagrama de limites, apresentaremos a seguir uma breve revisão sobre polinômio mínimo. Seja o polinômio em  $S$

$$P = c_0\delta + c_1S + c_2S^2 + c_3S^3 + \dots \quad (4.4)$$

onde  $S$  é a matriz que representa o tensor de Ricci sem traço (1.37),  $\delta$  é a matriz identidade e  $c_n$  são constantes. Re-escrevendo essa expressão na forma

$$P_b^a = c_0\delta_b^a + c_1S_b^a + c_2S_c^a S_b^c + c_3S_c^a S_d^c S_b^d + \dots \quad (4.5)$$

fica claro que  $P$  é um tensor. O polinômio  $P$  é denominado *polinômio mínimo* de  $S$  se

<sup>1</sup>Lembramos que o primeiro algarismo, separado pela vírgula, corresponde a um autovetor tipo-tempo e os demais a autovetores tipo-espaço.

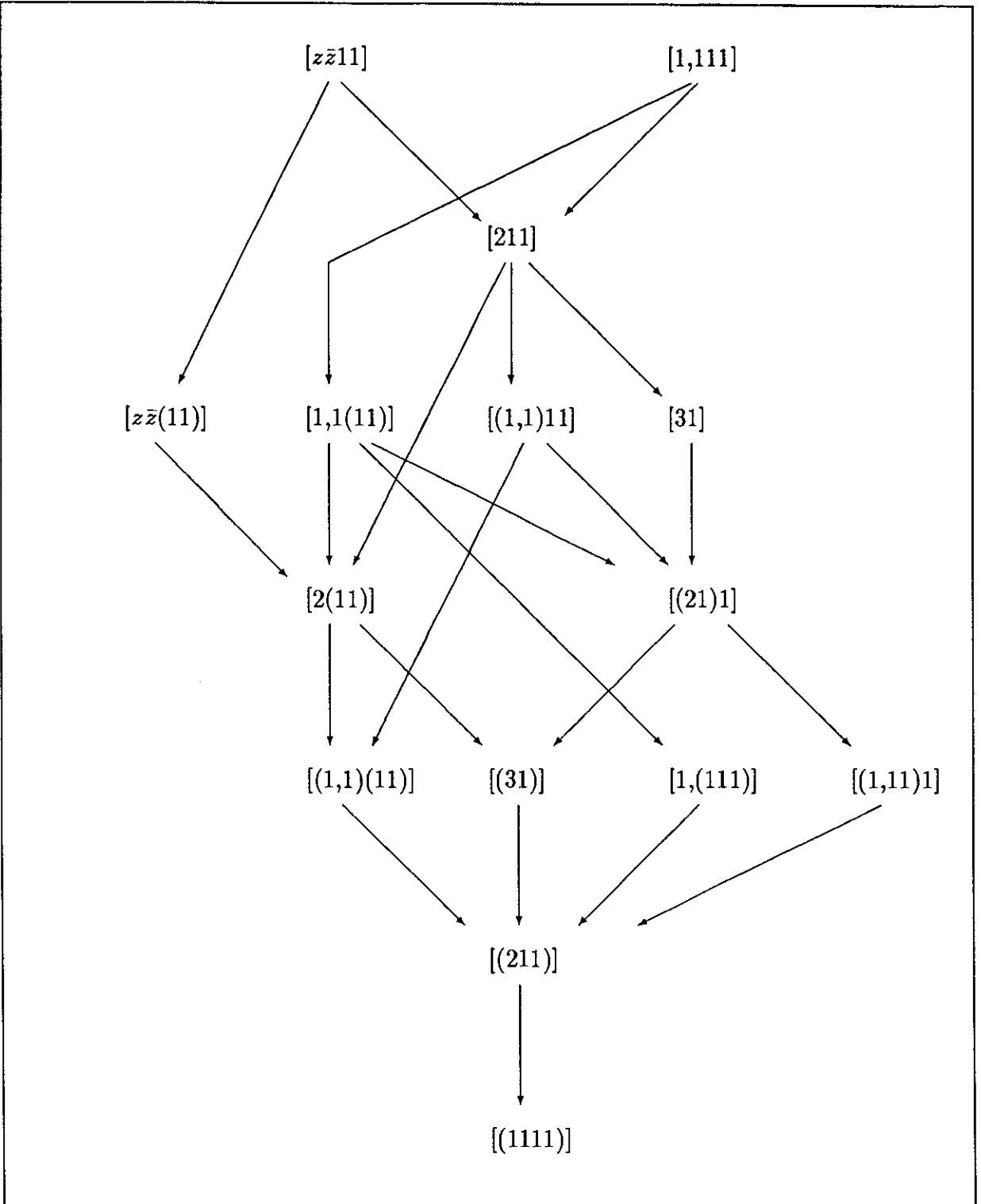


Figura 4.2: Especializações dos tipos de Segre.

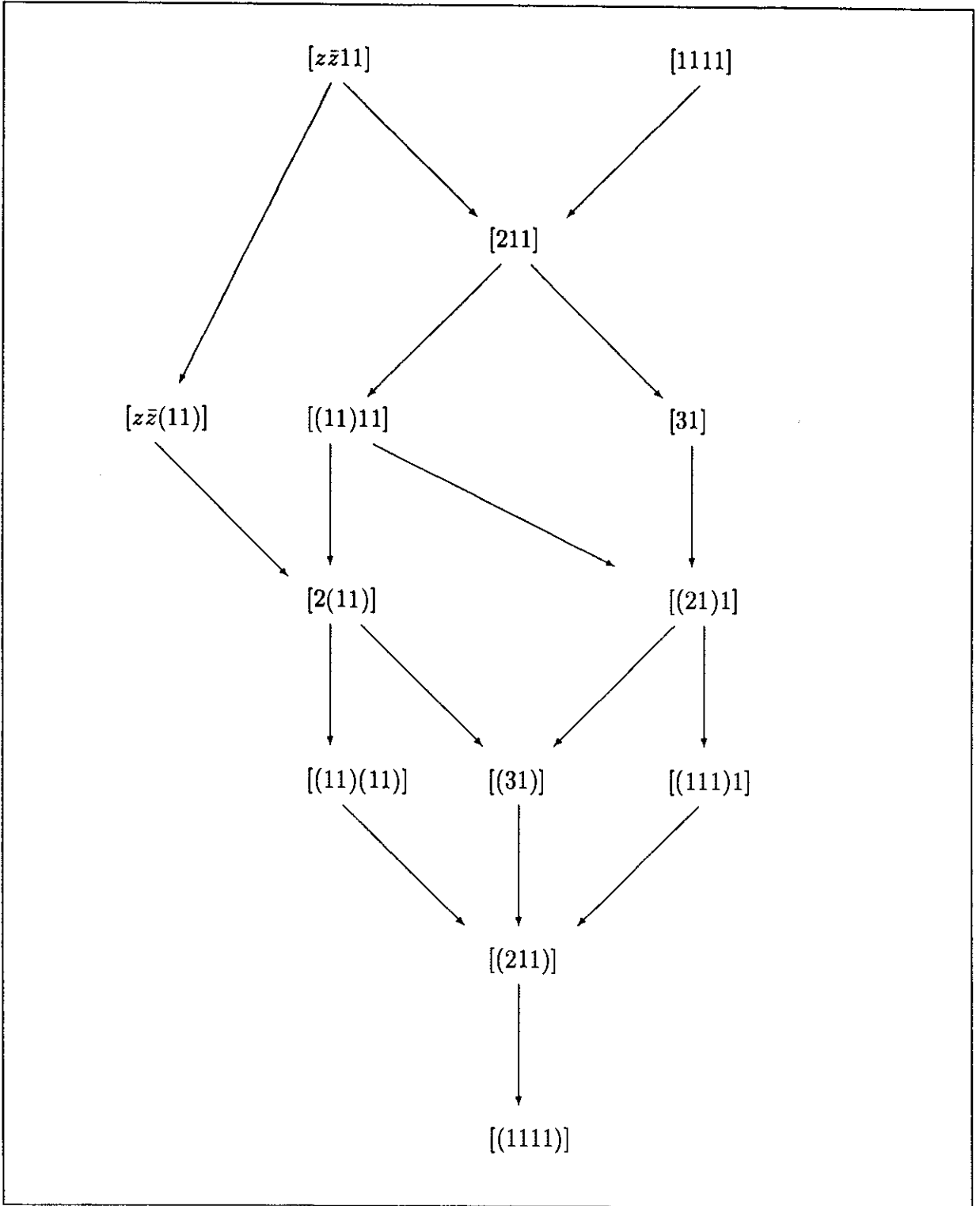


Figura 4.3: Especializações dos tipos de Segre — diagrama simplificado. Neste diagrama, tipos que difiram pelo caráter dos autovetores não são distinguidos. Assim, os tipos  $[(1,1)11]$  e  $[1,1(11)]$  estão agrupados no tipo  $[(11)11]$  e os tipos  $[(1,11)1]$  e  $[1,(111)]$  agrupados no tipo  $[(111)1]$ .

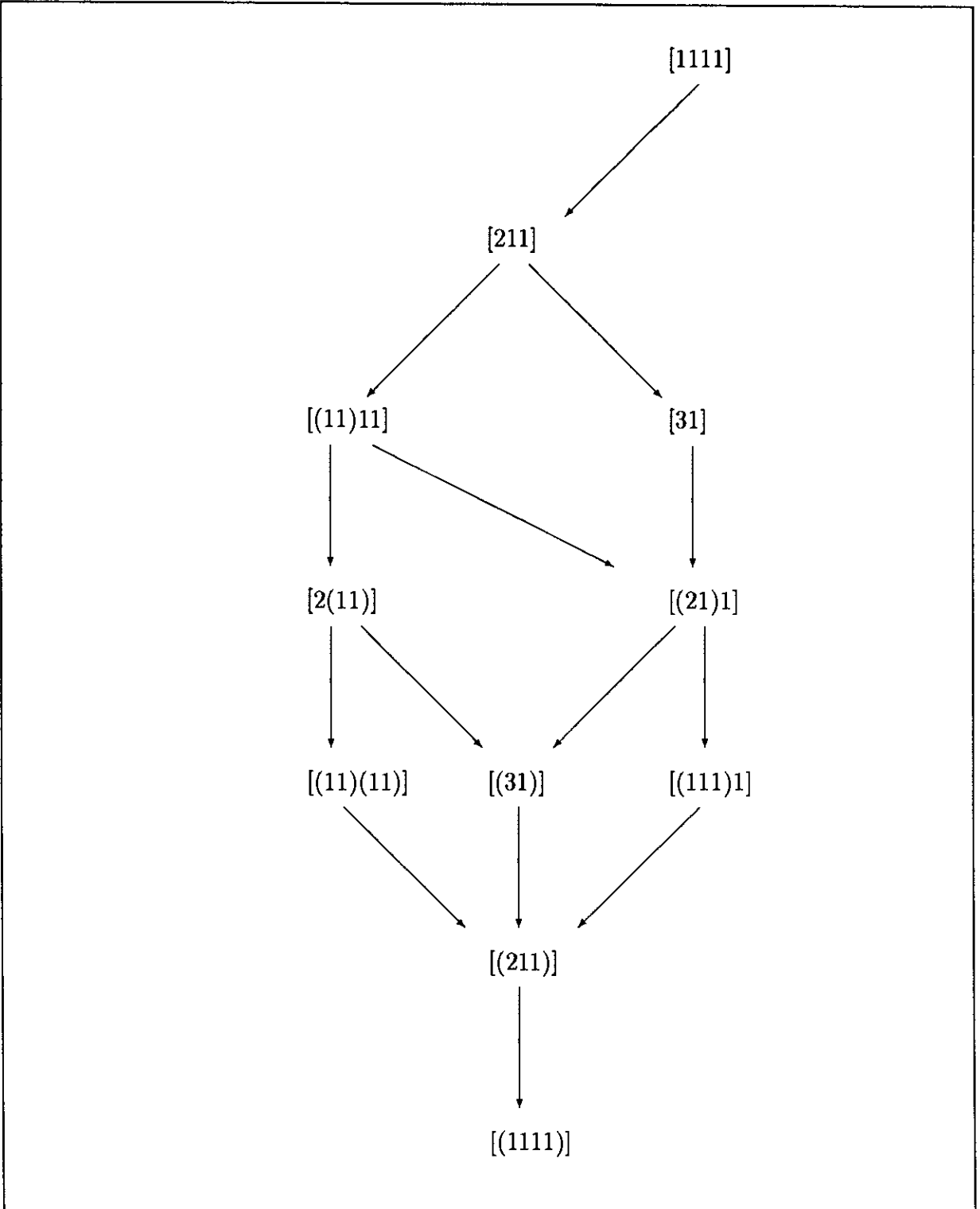


Figura 4.4: Especializações dos tipos de Segre — diagrama simplificado parcial. Neste diagrama, tipos que difram pelo caráter dos autovetores não são distinguidos. Assim, os tipos  $[(1,1)11]$  e  $[1,1(11)]$  estão agrupados no tipo  $[(11)11]$  e os tipos  $[(1,11)1]$  e  $[1,(111)]$  agrupados no tipo  $[(111)1]$ . Não é feita, tampouco, distinção entre autovalores reais e complexos. Assim, os tipos  $[z\bar{z}11]$  e  $[1111]$  estão agrupados no tipo  $[1111]$  e os tipos  $[z\bar{z}(11)]$  e  $[(11)11]$  agrupados no tipo  $[(11)11]$ .

$P$  for o polinômio de menor grau em  $S$  tal que  $P = 0$ . Mostra-se [68] que o polinômio mínimo é único e pode ser fatorado na forma

$$(S - \lambda_1 \delta)^{i_1} (S - \lambda_2 \delta)^{i_2} (S - \lambda_3 \delta)^{i_3} \dots \quad (4.6)$$

onde  $i_1, i_2, i_3, \dots$  são as dimensões das submatrizes de Jordan de maior dimensão para cada autovalor  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  respectivamente. Denotaremos o polinômio mínimo compactamente por  $\|i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots\|$ . Assim, no exemplo (1.42) da subseção 1.6.1, o polinômio mínimo é

$$(S - \lambda_1 \delta)^3 (S - \lambda_2 \delta)^2 (S - \lambda_3 \delta) \quad (4.7)$$

denotado por  $\|321\|$ .

Podemos, para cada tipo de Segre, encontrar os polinômios característico e mínimo correspondentes. Na obtenção do polinômio característico, o expoente de cada autovalor é a soma das dimensões das submatrizes de Jordan com mesmo autovalor. Assim, por exemplo, os tipos de Segre  $[(111)1]$ ,  $[(21)1]$  e  $[31]$  têm o mesmo polinômio característico denotado por  $\{31\}$ , conforme notação introduzida na subseção 1.6.1 do cap. 1. No polinômio mínimo, o expoente de cada autovalor é a dimensão da submatriz de Jordan de maior dimensão, com esse autovalor. Assim, por exemplo, os tipos de Segre  $[2(11)]$  e  $[(21)1]$  têm o mesmo polinômio mínimo denotado por  $\|21\|$ . A tab. 4.1 mostra os polinômios característico e mínimo correspondentes à cada tipo de Segre.

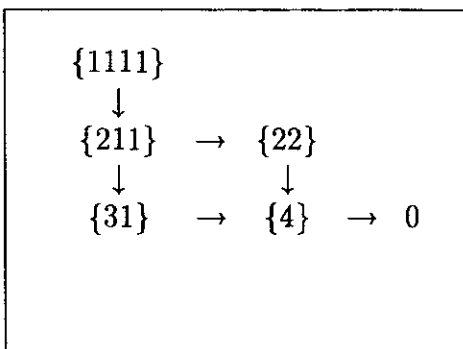
Mostra-se a partir do algoritmo para as degenerescências das raízes de polinômios do 4º grau [44, 5], que a cada nova degenerescência das raízes do polinômio característico, um escalar construído a partir da métrica e suas derivadas torna-se nulo. Assim, utilizando-se a propriedade hereditária (4.1) podemos montar (fig. 4.5, diagrama à esquerda) um diagrama de limites para as degenerescências do polinômio característico<sup>2</sup>.

---

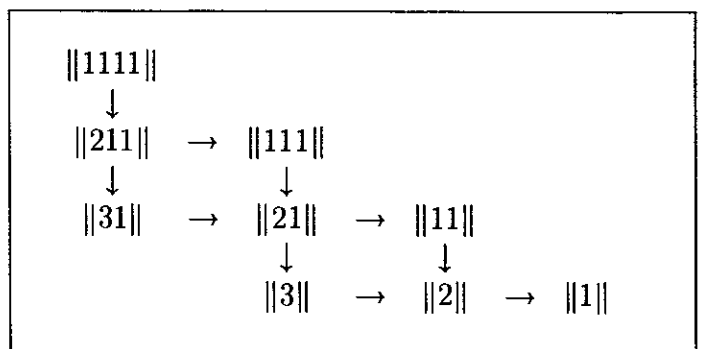
<sup>2</sup>“En passant”, podemos notar que esse é justamente o diagrama de especialização da classificação de Petrov (fig. 4.1) se utilizarmos a correspondência entre degenerescências da quártica e tipos de Petrov (tab. 1.7). Esse foi precisamente o método utilizado por Geroch [18] para obter o diagrama de limites para a classificação de Petrov descrito sucintamente há alguns parágrafos.

Polinômio mínimo	Polinômio característico				
	{1111}	{211}	{31}	{22}	{4}
1111	[1,111] [z $\bar{z}$ 11]				
211		[211]			
31			[31]		
111		[(1,1)11] [1,1(11)] [z $\bar{z}$ (11)]			
21			[(21)1]	[2(11)]	
3					[(31)]
11			[(1,1)1] [1,(11)]	[(1,1)(11)]	
2					[(211)]
1					[(1111)]

Tabela 4.1: Tipos de Segre correspondentes a cada polinômio característico e a cada polinômio mínimo. As colunas mostram os tipos de Segre correspondentes a cada polinômio característico, enquanto que as linhas mostram os tipos de Segre correspondentes a cada polinômio mínimo.



POLINÔMIO CARACTERÍSTICO



POLINÔMIO MÍNIMO

Figura 4.5: Especializações do polinômio característico e do polinômio mínimo. O diagrama à esquerda mostra as especializações do polinômio característico, enquanto que o diagrama à direita as especializações do polinômio mínimo. Só os polinômios mínimos compatíveis com os tipos de Segre do tensor de Ricci estão relacionados.

Montaremos, agora, um diagrama de limites para o polinômio mínimo. O tensor de Ricci é construído a partir da métrica e suas derivadas. Assim, os coeficientes de seu polinômio mínimo também o são. Conseqüentemente, o polinômio mínimo é um tensor construído a partir da métrica e suas derivadas. Seja  $P_n$  o polinômio mínimo (de grau  $n$ ) associado ao tipo de Segre de uma família de métricas. Por definição,  $P_n = 0$  para qualquer membro da família. Assim, de acordo com a propriedade hereditária (4.1),  $P_n = 0$  para qualquer limite dessa família. Como o polinômio mínimo é único, o polinômio mínimo associado ao tipo de Segre do limite é  $P_n$  ou um polinômio de menor grau. Assim, o grau do polinômio mínimo permanece o mesmo ou diminui no limite. Além dessa propriedade, sabemos do diagrama de limites do polinômio característico (fig. 4.5, diagrama à esquerda) que o número de autovalores ou permanece o mesmo ou diminui no processo de limite. Com essas duas propriedades, podemos montar diagrama de limites do polinômio mínimo (fig. 4.5, diagrama à direita), onde cada coluna corresponde a um mesmo grau e cada linha a um mesmo número de autovalores.

A partir dos diagramas de limite dos polinômios característico e mínimo (fig. 4.5) e da tab. 4.1, relacionando esses polinômios com os tipos de Segre, podemos contruir o diagrama de limites da classificação de Segre mostrado na fig. 4.4. Inicialmente substituímos, no diagrama de especialização do polinômio mínimo, os tipos de Segre fornecidos na tab. 4.1. Nessa etapa não levaremos em conta o caráter dos autovetores e não distinguiremos autovalores reais de complexos. Assim, manteremos os tipos de Segre  $[1,111]$  e  $[z\bar{z}11]$  agrupados em  $[1111]$ , os tipos  $[(1,1)11]$ ,  $[1,1(11)]$  e  $[z\bar{z}(11)]$  agrupados em  $[(11)11]$  e os tipos  $[(1,11)1]$  e  $[1,(111)]$  agrupados em  $[(111)1]$ . Mesmo assim, note que em duas situações, a um mesmo polinômio mínimo correspondem mais de um tipo de Segre. De fato, no caso  $\|21\|$  correspondem os tipos  $[(21)1]$  e  $[2(11)]$  e no caso  $\|11\|$  os tipos  $[(111)1]$  e  $[(11)(11)]$ .

De forma a distinguir o tipo  $[(21)1]$  do tipo  $[2(11)]$  e o tipo  $[(111)1]$  do tipo  $[(11)(11)]$ , consideramos, em seguida, as informações contidas no diagrama de limites do polinômio característico (fig. 4.5, diagrama à esquerda). Verificamos, assim, que enquanto o tipo de



Segre [(11)11] tem como limites os tipos [2(11)] e [(21)1], o tipo de Segre [31], tem como limite o tipo [(21)1] mas não tem como limite o tipo [2(11)]. Analogamente, verificamos que o tipo [2(11)] tem como limites os tipos [(31)] e [(11)(11)], enquanto que o tipo [(21)1] tem como limites os tipos [(31)] e [(111)1]. Completa-se, fessa forma, o diagrama de limites dos tipos de Segre da fig. 4.4.

Mostraremos, a seguir, como distinguir, nesse diagrama, autovalores reais de complexos, e obter o diagrama da fig. 4.3. Para distinguir entre os tipos [1111] e [z $\bar{z}$ 11], construímos o produto dos quadrados das diferenças entre as raízes do polinômio característico, a saber

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_4)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_4)^2(\lambda_3 - \lambda_4)^2 \quad (4.8)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda_4$  são as raízes. De acordo com a teoria das equações algébricas [5], se  $D$  for real positivo o tipo de Segre será [1111] e se  $D$  for real negativo o tipo de Segre será [z $\bar{z}$ 11]. Isso pode ser facilmente verificado. De fato, se todos os autovalores forem reais então  $D > 0$ , pois é o produto de quadrados e, caso contrário, se houver um par de autovalores complexo conjugado, a substituição direta na expressão de  $D$  mostra que  $D < 0$ .

Os coeficientes do polinômio característico são construídos a partir do tensor de Ricci sem traço, e este, a partir da métrica e suas derivadas. Portanto, as suas raízes são escalares construídos a partir da métrica e suas derivadas e conseqüentemente,  $D$  é um escalar construído a partir da métrica e suas derivadas. Assim, de acordo com a propriedade hereditária 4.3, os tipos [z $\bar{z}$ 11] e [1111], não podem se especializar um no outro.

Para distinguir entre os tipos [(11)11] e [z $\bar{z}$ (11)], construímos o produto dos quadrados das diferenças entre as três raízes distintas do polinômio característico, a saber

$$M = (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2. \quad (4.9)$$

Analogamente ao caso anterior, se todos os autovalores forem reais então  $M > 0$  e, caso

contrário, se houver um par de autovalores complexo conjugado, a substituição direta na expressão de  $M$  mostra que  $M < 0$ . Portanto, para o tipo de Segre  $[z\bar{z}(11)]$ ,  $M$  é negativo, enquanto que para os tipos de Segre  $[(11)11]$  e  $[211]$ ,  $M$  é positivo. Assim como  $D$ ,  $M$  é um escalar construído a partir da métrica e suas derivadas. Conseqüentemente, de acordo com a propriedade hereditária 4.3, os tipos  $[z\bar{z}(11)]$  e  $[(11)11]$  e os tipos  $[z\bar{z}(11)]$  e  $[211]$  não podem se especializar um no outro.

Essas informações, incorporadas ao diagrama da fig. 4.4 nos permite construir o diagrama de limites para os tipos de Segre da fig. 4.3. Temos algumas indicações que poderão nos permitir, futuramente, considerar o caráter dos autovetores (tipo-tempo, tipo-espaço e nulos) e mostrar, finalmente, que o diagrama de especialização obtido por Penrose (fig. 4.2) é também um diagrama de limites.

Terminamos essa seção mencionando uma tentativa primeira que fizemos para obter o diagrama de limites da fig. 4.4. Ao invés do polinômio mínimo, utilizamos o espinor de Plebański [44, 56, 39], construído a partir do espinor de Ricci na forma  $\chi_{abcd} = 1/4\Phi_{(ab}{}^{w'x'}\Phi_{cd)w'x'}$ . O espinor de Plebański possui as mesmas simetrias do espinor de Weyl e pode portanto ser classificado de maneira análoga [44, 26]. Sua classificação, que corresponde a uma classificação (parcial) do espinor de Ricci, satisfaz portanto um diagrama de limites como o da classificação de Petrov. Utilizando esse diagrama e o diagrama do polinômio característico obtém-se um diagrama de limites dos tipos de Segre quase tão completo quanto o diagrama simplificado da fig. 4.4. A razão para a diferença reside no fato de que a partir do polinômio mínimo obtém-se mais informações que a partir da classificação do espinor de Plebański.

### 4.3 Procedimento geral — coordenadas

Como vimos no exemplo de Schwarzschild, seção 3.1, simplesmente tomar o limite do elemento de linha expresso em dado sistema de coordenadas não é conveniente, pois o resultado depende do sistema utilizado. Na seção 3.2, verificamos que tomar o limite dos escalares de Cartan expressos em um sistema de coordenadas tampouco é suficiente, pois

novamente o resultado depende do sistema utilizado. Porém uma nova interpretação para a diversidade de limites surge através desse cálculo, ou seja, utilizando coordenadas para expressar os EC, estamos implicitamente impondo limites para os EC quando o limite dos parâmetros é escolhido. A partir dessa visão, formularemos agora o procedimento geral para a obtenção de limites, que já esboçamos na seção 3.3 do cap. 3. Remeteremos sempre que necessário ao exemplo de Schwarzschild.

A partir da métrica dada em um sistema de coordenadas [como por exemplo (3.1)], escolhemos uma base tetrádica para representá-la. Utilizando o algoritmo de Karlhede, obtemos os EC [como nas eqs. (3.11–3.16)] até a ordem finita necessária para a caracterização do espaço-tempo, em uma base canônica. Os EC em geral são funções das 4 coordenadas e de  $p$  parâmetros que caracterizam a família em apreço. Entre os EC aparecem  $t_c \leq 4$  funções funcionalmente independentes nas coordenadas, ou seja, apenas  $t_c$  coordenadas são fundamentais. Os EC podem, então, ser divididos em três conjuntos.

1. Escolhe-se  $t_c$  EC, cada um representando uma coordenada fundamental. Esses EC, que denominaremos de EC de *primeira espécie* ou *coordenados*, dependem das coordenadas e em geral dos parâmetros da família. O EC na eq. (3.28) é um exemplo desse tipo.
2. Seleciona-se  $p$  EC, cada um representando um parâmetro da família. Esses EC, que denominaremos de EC de *segunda espécie* ou *paramétricos*, dependem dos parâmetros e em geral das coordenadas. No entanto toda a dependência das coordenadas pode ser eliminada utilizando-se os EC de primeira espécie. Assim, os EC de segunda espécie passam a depender somente dos parâmetros e dos EC de primeira espécie. O EC na eq. (3.29) é um exemplo de EC de segunda espécie.
3. O demais EC, que chamaremos de EC de *terceira espécie*, em geral dependem das coordenadas e dos parâmetros. Entretanto, essa dependência pode ser eliminada utilizando-se os dois conjuntos anteriores. Assim, os EC de terceira espécie passam a depender apenas dos EC de primeira e de segunda espécie. Os EC nas eqs. (3.30)–

(3.33) são exemplos de EC de terceira espécie.

Como as expressões dos EC de terceira espécie são independentes das coordenadas e dos parâmetros, elas são válidas para quaisquer limites, qualquer que seja o sistema de coordenadas utilizado, e qualquer que seja o limite imposto aos parâmetros. Uma vez que se conheça o limite dos EC de primeira e de segunda espécie, o limite dos EC de terceira espécie fica completamente determinado.

O limite dos EC de segunda espécie, por sua vez, depende do limite dos parâmetros e do limite dos EC de primeira espécie. Assim, uma vez escolhido um limite para os parâmetros, o limite dos EC de segunda espécie fica determinado pelo limite dos EC de primeira espécie.

Já o limite dos EC de primeira espécie depende tanto do limite dos parâmetros como do limite das coordenadas. Mesmo fixado um limite para os parâmetros, as transformações de coordenadas são suficientemente gerais para que diversos limites sejam possíveis para os EC de primeira espécie. Lembre-se que cada EC de primeira espécie corresponde, por construção, a uma coordenada fundamental.

Os possíveis limites que os EC de primeira espécie podem assumir são

1. 0;
2. uma função de todas ou algumas coordenadas,  $f(x^i)$ ;
3. constante diferente de zero;
4.  $\infty$ .

Como vimos, calcular o limite utilizando um sistema de coordenadas impõe implicitamente um limite para os EC de primeira espécie. A idéia fundamental de nosso método, será, então, impor explicitamente esse limite, sem nos preocuparmos com sistemas de coordenadas. Em outras palavras, escolhe-se um limite para os EC de primeira espécie e para os parâmetros. A partir daí, calculamos diretamente o limite dos EC de segunda e de terceira espécie.

Observamos que a quarta possibilidade, ou seja, quando um EC tende a  $\infty$ , corresponde a existência de escalares divergentes construídos a partir da métrica e suas derivadas. Quando isso ocorre em apenas alguns pontos ou em uma hipersuperfície tri-dimensional, tal caso pode servir como modelo para algumas situações físicas, tais como as estudadas em [1, 12, 14]. No entanto, não consideramos tal possibilidade nesta tese.

## 4.4 Procedimento geral — bases

O procedimento discutido na seção anterior não esgota todos os possíveis limites de uma família. É preciso lembrar que estamos trabalhando em uma base canônica fixa. O exame das formas canônicas para os tipos de Petrov e Segre nas tabs. 1.9 e 1.10 parece indicar que nem todos os limites encontrados nos diagramas de limites 4.1 e 4.2 são possíveis. Por exemplo, a forma canônica para Petrov N ( $\Psi_4 = 1$  e  $\Psi_A = 0$  se  $A \neq 4$ ) não surge como especialização da forma canônica de Petrov D ( $\Psi_2 \neq 0$  e  $\Psi_A = 0$  se  $A \neq 2$ ). De fato, essa tabela de formas canônicas nos levaria a pensar que métricas Petrov tipo D só têm como limites métricas tipo D ou 0. Estudaremos a seguir por que esse problema surge, e como resolvê-lo.

Na formulação original de Cartan para a solução do problema de equivalência (veja seção 1.2), os EC são função das coordenadas da variedade e dos parâmetros do grupo de Lorentz. Mais precisamente, função de  $t_c$  coordenadas independentes da variedade e de  $l_c$  parâmetros independentes do grupo de Lorentz. No entanto, no algoritmo prático de Karlhede (seção 1.3) os  $l_c$  parâmetros do grupo de Lorentz são fixados com a escolha de uma base canônica. Vamos recapitular como a base é fixada no algoritmo.

A cada ordem de derivação, ou encontra-se pelo menos uma função funcionalmente independente nas coordenadas ou pelo menos uma função funcionalmente independente nos parâmetros do grupo de Lorentz, a menos que seja a última ordem. Surgindo  $l \geq 1$  funções dos parâmetros do grupo de Lorentz,  $l$  parâmetros do grupo são fixados com a escolha da base canônica. Como consequência, a dimensão do grupo de isotropia diminui  $l$  unidades. Dessa forma, ao final do algoritmo os  $l_c$  parâmetros do grupo de Lorentz não

aparecem explicitamente nas expressões dos EC. Quanto às coordenadas, o procedimento é diferente. Cada nova função das coordenadas é apenas registrada pelo pacote CLASSI, de forma que as  $t_c$  coordenadas aparecem explicitamente nas expressões dos EC.

Como vimos na seção anterior, é essencialmente a presença de coordenadas nas expressões dos EC a responsável pela existência de diversos limites. Ou seja, por transformação de coordenadas as expressões dos EC mudam e dão origem a distintos limites. É de se esperar que por mudança de base novos limites sejam encontrados. Esse fato não é, no entanto, evidente, visto que os parâmetros do grupo de Lorentz não estão explícitos nas expressões dos EC.

Como visto no exemplo da família Schwarzschild, os parâmetros do grupo de Lorentz devem ser recuperados passo a passo, começando pela ordem de derivação mais alta. Nas seções seguintes, mostramos como isso é feito na prática.

#### 4.4.1 Mudança de base na ordem 0

A mudança de base na ordem 0 é bastante simplificada pela existência das classificações de Petrov e Segre. A partir dos diagramas de limites das figs. 4.1 e 4.2 podemos verificar quais tipos de Petrov e Segre seriam esperados nos limites. Procuramos então uma transformação de base tal que a nova base tenha como limite uma base canônica para o tipo desejado. Esse procedimento é completamente geral, independente de uma particular métrica. A seguir, aplicamos esse procedimento para os tipos de Petrov e Segre utilizados nesta tese.

##### 1. Limites tipo N de métricas tipo D

Vamos generalizar o que discutimos para Schwarzschild para qualquer métrica Petrov tipo D. Utilizando uma rotação nula (1.32), de acordo com a tab. 1.3, a forma

canônica para Petrov D (tab. 1.9) se transforma em

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_2 &= \Psi_2 \\ \tilde{\Psi}_3 &= 3a\Psi_2 \\ \tilde{\Psi}_4 &= 6a^2\Psi_2.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Para obtermos a forma canônica para Petrov N (tab. 1.9) os limites de  $\Psi_2$  e  $a$  devem ser

$$\Psi_2 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad a \rightarrow \infty\tag{4.11}$$

de maneira tal que

$$6a^2\Psi_2 \rightarrow 1.\tag{4.12}$$

Essa condição é satisfeita se e somente se

$$a^2 \rightarrow \frac{1}{6\Psi_2}.\tag{4.13}$$

## 2. Limites tipo [(211)] de métricas tipo [1,(111)]

Utilizando uma rotação temporal (1.35), de acordo com a tab. 1.4, a forma canônica para Segre [1,(111)] (tab. 1.10) se transforma em

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{00'} &= 2z^4\Phi_{11'} \\ \tilde{\Phi}_{11'} &= \Phi_{11'} \\ \tilde{\Phi}_{22'} &= 2z^{-4}\Phi_{11'}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Para obtermos a forma canônica para Segre [(112)] (tab. 1.10) os limites de  $\Phi_{11'}$  e  $z$  devem ser

$$\Phi_{11'} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad z \rightarrow 0\tag{4.15}$$

de maneira tal que

$$2z^{-4}\Phi_{11'} \rightarrow \pm 1,\tag{4.16}$$

conforme o limite de  $\tilde{\Phi}_{22'}$  seja  $+1$  ou  $-1$ . Essa condição é satisfeita se e somente se

$$z^4 \rightarrow \pm 2\Phi_{11'}. \quad (4.17)$$

#### 4.4.2 Mudança de base na ordem 1 e seguintes

Na ausência de uma classificação algébrica para os EC de ordem 1 e superiores, utilizamos um procedimento alternativo para recuperarmos a liberdade de base em uma ordem  $n \geq 1$  genérica.

Se a dimensão do grupo de isotropia  $H_n$  for menor que a dimensão de  $H_{n-1}$ , então os EC de ordem  $n$  foram utilizados para fixar a base canônica. Isto corresponde a fixar 1 ou mais parâmetros do grupo de Lorentz. Para recuperar os graus de liberdade perdidos ao fixarmos esses parâmetros, executamos não uma transformação de Lorentz a 6 parâmetros, mas apenas a transformação mais geral do grupo de isotropia  $H_{n-1}$ . Na maioria das situações investigadas, o grupo de isotropia  $H_{n-1}$  é de dimensão pequena —  $H_0$ , por exemplo, costuma ser de dimensão 1 ou 2, de forma que esse procedimento não é exageradamente trabalhoso. Uma vez executada a transformação, faz-se a análise de limites na nova base. Assim, por exemplo, na seção 3.3 utilizamos o grupo de isotropia  $H_0$  para obter a base mais geral na qual os EC da ordem 0 assumem a forma canônica para Petrov tipo D ( $\Psi_2 \neq 0$  e  $\Psi_A = 0$  se  $A \neq 2$ ).

Vimos ainda, na análise dos limites da família Schwarzschild, que ao escolhermos uma nova base na ordem 0 (a base que permitiu obter limites Petrov N), devemos re-executar o procedimento acima descrito para a ordem 1. Entretanto, devemos notar que a representação matricial do grupo de isotropia  $H_0$  na nova base está relacionada com a representação da base anterior por uma transformação de similaridade, conforme discutido na seção 3.5.

Para termos uma idéia global desse procedimento, vamos rever rapidamente a análise dos limites de Schwarzschild. Utilizamos inicialmente para o estudo de limites, a base canônica apropriada para Petrov D (na ordem 0) e a base em que  $\nabla\Psi_{20'} = -\nabla\Psi_{31'}$  (na



ordem 1). Os EC da ordem 2 não são utilizados para fixar a base. Em seguida, mantendo a forma dos EC da ordem 0, utilizamos  $H_0$  e obtivemos a base mais geral para Petrov D. Assim, esgotamos todos os limites Petrov D. Sabemos do diagrama de limites da fig. 4.1 que as especializações de Petrov D são D, N e 0. Os limites Petrov 0 foram analisados na mesma base canônica de Petrov D e resultaram no espaço-tempo de Minkowski. Quanto aos limites do tipo de Petrov N, utilizamos o procedimento geral descrito na subseção 4.4.1 para obter uma base que permitisse encontrar limites Petrov N. Em seguida, utilizamos  $H_0$  e obtivemos a base mais geral que permitisse obter limites Petrov N.

# Capítulo 5

## Limites na teoria de Brans-Dicke

### 5.1 Introdução

A teoria de Brans-Dicke [4] surge como uma alternativa à relatividade geral na descrição da gravitação. Uma de suas motivações consiste em transformar a constante gravitacional em um campo escalar  $\phi$  variável com o tempo. A teoria é construída a partir de uma Lagrangiana onde aparece um termo de acoplamento entre o campo  $\phi$  e a métrica. Costuma-se afirmar [67] que, sob determinadas circunstâncias, a teoria de Brans-Dicke tem como limite a teoria da relatividade geral quando a constante de acoplamento  $\omega \rightarrow \infty$  (veja também [59, 32]).

Na teoria de Brans-Dicke o espaço-tempo é, como na relatividade geral, uma variedade quadridimensional riemanniana localmente lorentziana. A métrica é determinada pelas equações de campo [4, 66]

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{ab} + \lambda g_{ab} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,a}\phi_{,b} - \frac{1}{2}g_{ab}\phi_{,c}\phi^{,c} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,a;b} - g_{ab}\square\phi) \quad (5.1)$$

e

$$\square\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{;a}{}^a = \frac{(8\pi T + 2\lambda\phi)}{2\omega + 3} \quad (5.2)$$

onde  $\lambda$  é a constante cosmológica,  $\phi$  é o campo escalar (que é o análogo a uma constante gravitacional variável),  $\omega$  é a constante de acoplamento a ser determinada *a posteriori*,  $T_{ab}$  é o tensor momento energia e  $T$  é o seu traço. Para preservar o princípio de equivalência, postula-se que o campo  $\phi$  não tem influência direta sobre o movimento de partículas teste, que se dá ao longo de geodésicas. Formalmente, as eqs. (5.1) podem ser vistas como idênticas às equações de campo da relatividade geral se definirmos um tensor momento energia 'efetivo'  $\tau_{ab}$  por

$$8\pi G\tau_{ab} = \frac{8\pi}{\phi}T_{ab} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,a}\phi_{,b} - \frac{1}{2}g_{ab}\phi_{,c}\phi^{,c} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,a;b} - g_{ab}\square\phi) \quad (5.3)$$

sujeito à equação (5.2). Assim, o método desenvolvido nos capítulos anteriores para o estudo limites na relatividade geral pode ser utilizado aqui.

Neste capítulo, encontraremos os limites de algumas soluções das equações de Brans-Dicke quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Em seguida, interpretaremos as métricas obtidas nos limites, como soluções das equações de campo da relatividade geral. Encontraremos, então, os possíveis tensores momento-energia, no contexto das equações da relatividade geral, compatíveis com esses limites. Poderemos, assim, verificar se as famílias de métricas, soluções das equações de campo de Brans-Dicke, têm o mesmo tensor energia-momento que as métricas limites, interpretadas como soluções das equações de campo da relatividade geral. Os resultados deste capítulo foram publicados no *General Relativity and Gravitation* [45].

## 5.2 Os espaços-tempos de Nariai e O'Hanlon-Tupper

O elemento de linha de Nariai [40, 41, 33] e de O'Hanlon-Tupper [43] (com  $k = 0$ ) e os respectivos campos escalares podem ser escritos coletivamente como

$$ds^2 = dt^2 - A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.4)$$

$$\phi = \phi_0 t^P \quad (5.5)$$

onde

$$A = A_0 t^Q \quad (5.6)$$

$$A_0 \text{ e } \phi_0 \text{ são constantes} \quad (5.7)$$

$$Q = \begin{cases} (3\omega + 4)^{-1} (\omega + 1 \pm \sqrt{\frac{2\omega+3}{3}}) & \text{(O'Hanlon-Tupper)} \\ \frac{2+2\omega(2-\gamma)}{4+3\omega\gamma(2-\gamma)}, \text{ onde } 1 \leq \gamma < 2 & \text{(Nariai)} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$P = \begin{cases} (3\omega + 4)^{-1} (1 \mp \sqrt{3(2\omega + 3)}) & \text{(O'Hanlon-Tupper)} \\ \frac{2(4-3\gamma)}{4+3\omega\gamma(2-\gamma)} & \text{(Nariai)}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Ambas são soluções das equações de Brans-Dicke (5.1) sem constante cosmológica. A métrica de Nariai é uma solução de fluido perfeito com equação de estado dada por

$$p = (\gamma - 1)\rho. \quad (5.10)$$

A métrica de O'Hanlon-Tupper é uma solução de vácuo.

Os EC independentes não nulos correspondentes ao elemento de linha dado pelas eqs. (5.4) e (5.6) foram calculados com o auxílio do CLASSI, utilizando-se o arquivo A.3. São eles:

$$\text{(ordem 0)} \quad \Phi_{00'} = 2\Phi_{11'} \quad (5.11)$$

$$\Phi_{11'} = \frac{1}{4}Qt^{-2} \quad (5.12)$$

$$\Phi_{22'} = 2\Phi_{11'} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{4}Qt^{-2}(2Q - 1) \\ &= \Phi_{11'}(2Q - 1) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\text{(ordem 1)} \quad \nabla\Phi_{00'} = \nabla\Phi_{33'} \quad (5.15)$$

$$\nabla\Phi_{11'} = \frac{1}{3}\nabla\Phi_{33'} \quad (5.16)$$

$$\nabla\Phi_{22'} = \frac{1}{3}\nabla\Phi_{33'} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_{33'} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}Qt^{-3}(Q+1) \\ &= -\frac{8}{\sqrt{2}}\frac{Q+1}{\sqrt{Q}}(\phi_{11'})^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{4\Phi_{11'}(\Lambda+3\Phi_{11'})}{\sqrt{\Lambda+\Phi_{11'}}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\nabla\Lambda_{00'} = \nabla\Lambda_{11'} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla\Lambda_{11'} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}Qt^{-3}(2Q-1) \\ &= -\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{2Q-1}{\sqrt{Q}}(\phi_{11'})^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{4\Phi_{11'}\Lambda}{\sqrt{\Lambda+\Phi_{11'}}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Os EC foram divididos em três conjuntos, conforme o método descrito no cap. 4. Há apenas um EC de primeira espécie, a saber,  $\Phi_{11'}$ , e apenas um EC de segunda espécie, ou seja,  $\Lambda$ . Todos os restantes são EC de terceira espécie. A seguir, apresentamos a classificação discreta da métrica.

Na ordem 0, obtém-se que o tipo de Petrov é 0 e o tipo de Segre é  $[1,(111)]$ . Existe 1 função funcionalmente independente. Portanto  $t_0 = 1$  e  $d_0 = 3$ . O grupo de isotropia  $H_0$  é o  $SO(3)$  de acordo com a tab. 1.10.

Na ordem 1 não surgem novas funções funcionalmente independentes, logo  $d_1 = d_0 = 3$ . Verifica-se que os EC de ordem 1 são também invariantes sob a ação do grupo  $H_0$ , logo  $H_1 = H_0$ . Esse resultado, obtido automaticamente pelo CLASSI, pode ser verificado utilizando-se o arquivo B.4. Consequentemente, o algoritmo de Karlhede pára nesse ponto.

De acordo com o método descrito na seção 4.3 do cap. 4, devemos escolher limites para o parâmetro  $\omega$  que caracteriza a família de métricas e para o EC de primeira espécie  $\Phi_{11'}$ . Para o parâmetro, impomos o limite  $\omega \rightarrow \infty$ . Utilizando então a relação (5.8) entre  $\omega$  e  $Q$ , obtemos

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{(O'Hanlon-Tupper)} \\ \frac{2}{3\gamma} & \text{(Nariai)}. \end{cases} \quad (5.21)$$

Conforme a seção 4.3, com uma escolha adequada do sistema de coordenadas, o EC de primeira espécie  $\Phi_{11'}$  pode assumir 4 diferentes limites, a saber: (1) 0; (2) uma função de todas ou algumas coordenadas,  $f(x^i)$ ; (3) constante diferente de zero; (4)  $\infty$ . Como discutido naquela seção, limites divergentes (4) não serão estudados. A seguir, discutimos os limites (1), (2) e (3) de  $\Phi_{11'}$  em conjunto com o limite  $\omega \rightarrow \infty$  do parâmetro.

1.  $\Phi_{11'} \rightarrow 0$ . Todos os EC tendem a zero, portanto o limite é a métrica de Minkowski. Considerada como uma solução das equações de Einstein, corresponde a vácuo.
2.  $\Phi_{11'} \rightarrow f(x^i)$ . De (5.11)–(5.20) verifica-se que os demais EC têm limites finitos. Assim como no limite  $\Psi_2 \rightarrow f(x^i)$  da família Schwarzschild, seção 3.3, diferentes funções geram métricas equivalentes [veja eq. (3.34)]. A métrica correspondente a esse conjunto de EC é a métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW) com seção espacial euclidiana, cujo elemento de linha é dado também por (5.4), mas com um novo valor de  $A$  dado por

$$A = A_0 t^{Q'}, \quad Q' = \text{constante} \quad (5.22)$$

onde  $Q'$  é dado por (5.21). De fato, utilizando o arquivo A.3, calculamos os EC correspondentes à métrica FRW com seção espacial euclidiana e verificamos serem idênticos aos EC obtidos neste limite. A métrica FRW com seção espacial euclidiana, vista como uma solução da relatividade geral [30], pode ser obtida das equações de campo sem constante cosmológica e com tensor momento energia de fluido perfeito satisfazendo a equação de estado  $p = (\gamma' - 1)\rho$  onde  $\gamma'$  e  $Q'$  estão relacionados por

$$Q' = \frac{2}{3\gamma'}. \quad (5.23)$$

3.  $\Phi_{11'} \rightarrow \text{constante} \neq 0$ . Todos os EC tendem a valores constantes. Não tendo sido encontrada a métrica correspondente no banco de dados do CLASSI, o próximo passo seria tentar provar que esse conjunto de EC não satisfaz condições de integrabili-

dade. Entretanto, é mais simples fazer isto de forma indireta. Dos EC conclui-se que, no limite, a métrica continua tipo de Petrov 0 e tipo de Segre  $[1,(111)]$ . O grupo de isotropia continua sendo o  $SO(3)$ . Como os EC são agora constantes,  $t_1 = 0$  e  $d_1 = 4$ . Logo o espaço-tempo é homogêneo e o grupo de isometria é de dimensão 7. A existência de um grupo de isotropia  $SO(3)$  implica em ser a métrica do tipo Robertson-Walker (veja por exemplo [30]). Da condição de homogeneidade obtém-se então uma métrica de Robertson-Walker estática, ou seja, a métrica de Einstein com curvatura positiva ou negativa. O cálculo dos EC para a métrica de Einstein (arquivo A.4) mostra que todos os EC de ordem 1 são identicamente nulos. Entretanto, os EC de ordem 1 que obtemos nesse limite são necessariamente não nulos. Portanto, esse limite não corresponde a uma métrica riemanniana.

De acordo com o método descrito no cap. 4, estudaremos a possibilidade de existirem limites com diferentes tipos de Segre. A métrica que estamos estudando tem tipo de Segre  $[1,(111)]$ . No diagrama de limites da fig. 4.3, os tipos  $[1,(111)]$  e  $[(1,11)1]$  estão agrupados no tipo  $[1,(111)]$ . De acordo com esse diagrama, seus possíveis limites são os tipos  $[(211)]$  e  $[(1111)]$ . Esse diagrama não contém nenhuma informação sobre a possibilidade do tipo  $[1,(111)]$  ter como limite o tipo  $[(1,11)1]$ . Usaremos, nesse caso apenas, a informação do diagrama de especialização de Penrose da fig. 4.2, de que o tipo  $[1,(111)]$  não pode ter como limite o tipo  $[(1,11)1]$ . Assim, os possíveis limites do tipo de Segre  $[1,(111)]$  são os tipos  $[(211)]$  e  $[(1111)]$ .

O tipo  $[(1111)]$  corresponde a  $\Phi_{AB'}$  identicamente nulo. O limite com esse tipo de Segre foi obtido na mesma base em que estudamos os limites do tipo  $[1,(111)]$ ; é o espaço-tempo de Minkowski.

A fim de obter limites do tipo de Segre  $[(211)]$  de uma métrica tipo  $[1,(111)]$ , conforme a subseção 4.4.1, faremos uma transformação de base dada pela rotação temporal (1.35). Os componentes de  $\Phi_{AW'}$  na nova base são dados por (4.14). O escalar  $\Lambda$  permanece inalterado, dado por (5.14). De acordo com a subseção 4.4.1, o limite de  $\Phi_{11'}$  será 0 e o limite do parâmetro  $z$  da transformação será dado por (4.17), ou seja,  $z^4 \rightarrow \pm 2\Phi_{11'}$ ,

especificamente, ao caso com tipo de Petrov 0 e homogêneo. Seus EC são dados por (2.14)–(2.15), a saber  $\Phi_{22'} = 1$  e  $\nabla\Phi_{33'} = B^{-3/2}B_{,u}$ . Com uma escolha apropriada da função  $B(u)$ , podemos recuperar o limite (5.30)–(5.31). De fato, igualando o lado direito de (5.31) e (2.15) obtemos

$$-2\frac{Q+1}{\sqrt{Q}} = B^{-3/2}B_{,u}. \quad (5.32)$$

Quaisquer funções  $B(u)$  satisfazendo a esta equação resultarão nos mesmos EC, e portanto corresponderão a métricas equivalentes<sup>1</sup>. Logo, para os nossos propósitos, é suficiente encontrar uma solução particular para  $B(u)$ , como por exemplo

$$B = 4 \left( -2\frac{Q+1}{\sqrt{Q}} \right)^{-2} u^{-2}. \quad (5.33)$$

De fato, com essa escolha de  $B(u)$ ,  $\nabla\Phi_{33'}$  assume o valor em (5.31). Assim, o presente limite corresponde à métrica de ondas planas (2.1)–(2.2), com  $A = 0$  e  $B(u)$  dado por (5.33), onde  $Q$  é dado por (5.21).

### 5.3 A solução de Romero-Barros

Estudaremos nesta seção os limites de uma métrica de Robertson-Walker estática cuja seção espacial tem curvatura positiva. É uma solução de vácuo das equações de Brans-Dicke com constante cosmológica, encontrada por Romero e Barros [59, 60]. Seu elemento de linha e campo escalar podem ser escritos como

$$ds^2 = dt^2 - A^2 \left( dr^2 + \text{sen}^2 r (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (5.34)$$

$$\phi = \phi_0 e^{\pm \sqrt{\frac{2\lambda}{2\omega+3}} t} \quad (5.35)$$

---

<sup>1</sup>Quando primeiro determinamos esta métrica [45] partimos de um elemento de linha mais geral que esse. Porém, o resultado final é o mesmo.



onde

$$A = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{\lambda(\omega + 1)}} \quad (5.36)$$

$$\phi_0 = \text{constante} \quad (5.37)$$

e  $\lambda$  é a constante cosmológica. Os EC, obtidos com o auxílio do arquivo A.4, são

$$\text{(ordem 0)} \quad \Phi_{00'} = 2\Phi_{11'} \quad (5.38)$$

$$\Phi_{11'} = \frac{1}{4}A^{-2} \quad (5.39)$$

$$\Phi_{22'} = 2\Phi_{11'} \quad (5.40)$$

$$\Lambda = \Phi_{11'}. \quad (5.41)$$

Os EC devem ser divididos em três conjuntos, conforme o método descrito no cap. 4. Como todos os EC são constantes, não há EC de primeira espécie.  $\Phi_{11'}$  foi escolhido como EC de segunda espécie. Os EC restantes são de terceira espécie.

A classificação discreta é a seguinte. Na ordem 0 obtemos que o tipo de Petrov é 0 e o tipo de Segre é  $[1,(111)]$ . Não há nenhuma função das coordenadas. O grupo de isotropia  $H_0$  é o  $SO(3)$ . O grupo de isometria tem dimensão 7. Na ordem 1, todos os EC são identicamente nulos. Portanto  $H_1 = H_0$ ,  $d_1 = d_0$ . Conseqüentemente, a métrica é homogênea.

De (5.36), o limite de  $A$  quando  $\omega \rightarrow \infty$  é

$$A \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\lambda}}. \quad (5.42)$$

O limite dos EC é dado substituindo esse limite de  $A$  em (5.38)–(5.41). A métrica correspondente continua sendo (5.34), mas com  $A$  dado por (5.42). Vista como uma solução das equações da relatividade geral, pode ser obtida das equações de campo com constante cosmológica igual a  $\lambda/2$  e tensor momento energia de poeira (solução cosmológica de Einstein).

Para obter limites do tipo de Segre  $[(211)]$  conforme descrito na subseção 4.4.1, devemos fazer uma transformação de base dada pela rotação temporal (1.35) e em seguida, escolher o limite  $\Phi_{11'} \rightarrow 0$ . Porém, não há EC de primeira espécie, portanto, não podemos impor limites aos EC. Os EC têm um limite único que, como descrito acima, é diferente de zero. Assim, não foi possível obter limites do tipo de Segre  $[(211)]$ .

## 5.4 Comentários finais

Estudamos os limites de algumas soluções das equações de campo na teoria de Brans-Dicke quando a constante de acoplamento  $\omega \rightarrow \infty$ . Em seguida, interpretamos o resultado como uma solução das equações de campo da relatividade geral. Com isso, estamos verificando a que soluções da relatividade geral, espaços-tempos de Brans-Dicke têm como limite quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Investigamos as famílias Nariai, O'Hanlon-Tupper e Romero-Barros.

As métricas de Nariai e O'Hanlon-Tupper são soluções das equações de Brans-Dicke sem constante cosmológica. Para Nariai a fonte é um fluido perfeito com equação de estado (5.10), ou seja,  $p = (\gamma - 1)\rho$ , enquanto O'Hanlon-Tupper é solução de vácuo. O elemento de linha pode ser apresentado coletivamente por (5.4)–(5.9), correspondendo a métricas tipo Friedman-Robertson-Walker com seção espacial euclidiana.

A métrica de Romero-Barros é uma solução das equações de Brans-Dicke no vácuo com constante cosmológica. Seu elemento de linha é dado por (5.34)–(5.37), correspondendo à métrica de Einstein fechada (ou Friedman-Robertson-Walker estático com curvatura espacial positiva).

Tanto Nariai, O'Hanlon-Tupper como Romero-Barros são Petrov tipo 0 e Segre tipo  $[1,(111)]$ . De acordo com os esquemas de especialização do cap. 4, os limites são Petrov 0 e Segre  $[1,(111)]$ ,  $[(211)]$  e 0. Para Nariai e O'Hanlon-Tupper, os seguintes limites foram obtidos.

1. Um limite Segre tipo 0 correspondendo à métrica de Minkowski. Na relatividade geral corresponde a uma solução de vácuo. Observe que esse é o mesmo conteúdo

material (vácuo) da solução de O'Hanlon-Tupper.

2. Um limite tipo  $[1,(111)]$  correspondendo à métrica de Friedman-Robertson-Walker com seção espacial euclidiana. Seu elemento de linha é dado por (5.4) com o fator de escala  $A = A_0 t^{Q'}$  onde, de acordo com (5.21),  $Q' = \frac{1}{3}$  para o limite de O'Hanlon-Tupper e  $Q' = \frac{2}{3\gamma'}$  para o limite de Nariai. Na relatividade geral correspondem à solução de Friedman-Robertson-Walker cuja fonte é um fluido perfeito com equação de estado dada por  $p = \rho$  no limite de O'Hanlon-Tupper e  $p = (\gamma' - 1)\rho$  no limite de Nariai. Note que o conteúdo material do limite de Nariai é o mesmo conteúdo material da solução de Nariai, ou seja, fluido perfeito com a mesma equação de estado.
3. Um limite Segre tipo  $[(211)]$  correspondendo a um caso particular de ondas planas (2.1)-(2.2) homogêneo, com  $A = 0$  e  $B(u)$  dado por (5.33), onde  $Q$  é dado por (5.21). Na relatividade geral corresponde a uma solução com conteúdo material com tipo de Segre  $[(211)]$ , visto que o tipo de Segre do tensor momento-energia e do tensor de Ricci sem traço são o mesmo.

Para a métrica de Romero-Barros só um limite foi obtido. Seu tipo de Segre é  $[1,(111)]$  e a métrica é a de Einstein com seção espacial fechada. Na relatividade geral corresponde a uma solução cujo conteúdo material é do tipo de Segre  $[1,(111)]$ .

Para a solução de vácuo de O'Hanlon-Tupper, o primeiro limite, ou seja, Minkowski, é também uma solução de vácuo na relatividade geral, enquanto que os demais limites de O'Hanlon-Tupper não são soluções de vácuo. Para a solução de fluido perfeito de Nariai, o segundo limite também é uma solução de fluido perfeito na relatividade geral, com a mesma equação de estado, enquanto que os demais limites de Nariai não são fluido perfeito. Assim, em ambos os casos, tanto o limite com a mesma fonte que a solução original na teoria de Brans-Dicke, quanto limites com fonte diferente são encontrados. Quanto à solução de Romero-Barros, apenas um limite é encontrado, possuindo fonte diferente da fonte da solução original de Romero-Barros.

# Conclusão

Os escalares de Cartan (EC) mostraram-se uma poderosa ferramenta na investigação de limites de famílias de espaços-tempos. Mostramos no cap. 3 que obter o limite dos componentes do tensor métrico em um sistema de coordenadas não é um procedimento conveniente para a obtenção de limites. Verificamos, ainda, que simplesmente tomar o limite dos EC em um dado sistema de coordenadas tampouco cobre todos os possíveis limites de uma dada família de espaços-tempos. Finalmente, observamos que é necessário especificar não apenas o limite dos parâmetros, mas também o limite dos EC. Classificamos os EC em 3 categorias, a saber: EC de primeira espécie (coordenados), EC de segunda espécie (paramétricos) e EC de terceira espécie. Verificamos que aos EC de primeira espécie devemos impor diversos limites de forma a cobrir os vários limites de uma família de espaços-tempos. Os limites dos demais EC ficam então determinados pelos limites dos parâmetros e pelos limites dos EC de primeira espécie.

Estudamos como novos limites podem ser obtidos por mudança de base. Mostramos ainda como obtê-los utilizando os grupos de isotropia  $H_n$  dos EC nas diversas ordens de derivação. Para a ordem zero, em particular, verificamos como utilizar os esquemas de especialização das classificações de Petrov e de Segre como guia na obtenção de novos limites. No cap. 4 esses resultados são re-examinados de maneira mais detalhada, com base na experiência ganha no cap. 3 onde estudamos os limites da família Schwarzschild. Um método geral para obtenção de limites é então apresentado. No cap. 5, mostramos que esse método pode ser utilizado para estudar limites na teoria de Brans-Dicke e estudamos os limites de alguns espaços-tempos nesta teoria.

Ainda no cap. 4, estendemos o trabalho original de Geroch sobre propriedades hereditárias montando, com base na teoria dos polinômios característico e mínimo, um diagrama de limites para a classificação de Segre. Estamos, no momento, investigando a possibilidade de incluir nesse diagrama o caráter dos autovetores de forma a provar que o diagrama de especialização obtido por Penrose é também um diagrama de limites.

No cap. 3, estudamos os limites da família Schwarzschild. Esta família pode ser definida pela métrica (3.1). Cada elemento da família corresponde a um específico valor do parâmetro massa  $m$ . São todas métricas Petrov tipo D e Segre tipo 0. De acordo com os esquemas de especializações discutidos no cap. 4, os limites possíveis são Petrov tipo D, N ou 0, enquanto o tipo de Segre será sempre 0. Os limites quando  $m \rightarrow 0$  e  $m \rightarrow \infty$  foram estudados. Todos os limites Petrov tipo D e 0 foram encontrados, resultando no teorema 3.35. São eles os espaços-tempos de Minkowski (Petrov 0) e Kasner (Petrov D) quando  $m \rightarrow \infty$  e o espaço-tempo de Minkowski quando  $m \rightarrow 0$ .

Obtemos limites Petrov tipo N quando  $m \rightarrow \infty$ . Para  $m \rightarrow 0$  nenhum limite Petrov N é encontrado. Os limites Petrov N encontrados quando  $m \rightarrow \infty$  correspondem a casos particulares da classe de métricas de ondas planas dada por (2.1)-(2.2). Duas métricas homogêneas são obtidas se a função  $A(u)$  for dada por (3.78) ou (3.79) e  $B = 0$ . Uma métrica não homogênea é obtida se  $B = 0$  e  $A(u)$  for uma solução (diferente das duas acima) da equação diferencial (3.80).

Finalmente, mais algumas métricas de ondas planas Petrov N foram encontradas como limite da família Schwarzschild quando  $m \rightarrow \infty$ , a saber: uma métrica homogênea (1a) com  $A(u) = 1$ ; três classes de métricas homogêneas (1bi) com  $A(u)$  dado por (3.110), (3.111) e (3.112); uma métrica homogênea (2) com  $A(u)$  dado por (3.114); uma métrica não homogênea (1bii) onde  $A(u)$  é solução de (3.113). Foram encontrados ainda os EC de uma classe de métricas homogêneas (1bi) e de uma métrica homogênea (2).

No cap. 5 estudamos os limites de algumas soluções das equações de campo na teoria de Brans-Dicke quando a constante de acoplamento  $\omega \rightarrow \infty$ . Em seguida, interpretamos o resultado como uma solução das equações de campo da relatividade geral. Com isso,

estamos verificando a que soluções da relatividade geral, espaços-tempos de Brans-Dicke têm como limite quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Investigamos as famílias Nariai, O'Hanlon-Tupper e Romero-Barros.

As métricas de Nariai e O'Hanlon-Tupper são soluções das equações de Brans-Dicke sem constante cosmológica. Para Nariai a fonte é um fluido perfeito com equação de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ , enquanto O'Hanlon-Tupper é solução de vácuo. O elemento de linha pode ser apresentado coletivamente por (5.4)–(5.9), correspondendo a métricas tipo Friedman-Robertson-Walker com seção espacial euclidiana. A métrica de Romero-Barros é uma solução das equações de Brans-Dicke no vácuo com constante cosmológica. Seu elemento de linha é dado por (5.34)–(5.37), correspondendo à métrica de Einstein fechada (ou Friedman-Robertson-Walker estático com curvatura espacial positiva). Todas três são Petrov tipo 0 e Segre tipo  $[1,(111)]$ . De acordo com os esquemas de especialização do cap. 4, os limites são Petrov 0 e Segre  $[1,(111)]$ ,  $[(211)]$  e 0. Para Nariai e O'Hanlon-Tupper, os seguintes limites foram obtidos.

1. Um limite Segre tipo 0 correspondendo à métrica de Minkowski. Na relatividade geral corresponde a uma solução de vácuo. Observe que esse é o mesmo conteúdo material (vácuo) da solução de O'Hanlon-Tupper.
2. Um limite tipo  $[1,(111)]$  correspondendo à métrica de Friedman-Robertson-Walker com seção espacial euclidiana. Seu elemento de linha é dado por (5.4) com o fator de escala  $A = A_0 t^{Q'}$  onde, de acordo com (5.21),  $Q' = \frac{1}{3}$  para o limite de O'Hanlon-Tupper e  $Q' = \frac{2}{3\gamma'}$  para o limite de Nariai. Na relatividade geral correspondem a solução de Friedman-Robertson-Walker cuja fonte é um fluido perfeito com equação de estado dada por  $p = \rho$  no limite de O'Hanlon-Tupper e  $p = (\gamma' - 1)\rho$  no limite de Nariai. Note que o conteúdo material do limite de Nariai é o mesmo conteúdo material da solução de Nariai, ou seja, fluido perfeito com a mesma equação de estado.
3. Um limite do tipo de Segre  $[(211)]$  correspondendo a um caso particular de ondas

planas (2.1)-(2.2) homogêneo, com  $A = 0$  e  $B(u)$  dado por (5.33), onde  $Q$  é dado por (5.21). Na relatividade geral corresponde a uma solução com conteúdo material com tipo de Segre [(211)], visto que o tipo de Segre do tensor momento-energia e do tensor de Ricci sem traço são o mesmo.

Para a métrica de Romero-Barros só um limite foi obtido. Seu tipo de Segre é  $[1,(111)]$  e a métrica é a de Einstein com seção espacial fechada. Na relatividade geral corresponde a uma solução cujo conteúdo material é do tipo de Segre  $[1,(111)]$ .

Para solução de vácuo de O'Hanlon-Tupper, o primeiro limite, ou seja, Minkowski, é também uma solução de vácuo na relatividade geral, enquanto que os demais limites de O'Hanlon-Tupper não são soluções de vácuo. Para a solução de fluido perfeito de Nariai, o segundo limite também é uma solução de fluido perfeito na relatividade geral, com a mesma equação de estado, enquanto que os demais limites de Nariai não são fluido perfeito. Assim, em ambos os casos, tanto o limite com a mesma fonte que a solução original na teoria de Brans-Dicke, quanto limites com fonte diferente são encontrados. Quanto à solução de Romero-Barros, apenas um limite é encontrado, possuindo fonte diferente da fonte da solução original de Romero-Barros.

Entre as propriedades hereditárias estudadas por Geroch [18], uma diz que a dimensão do grupo de isotropia aumenta ou permanece a mesma no limite. Pode-se notar que esta propriedade hereditária é observada por todos os limites que obtivemos.

O número de extensões futuras para este trabalho é ilimitado. Há diversos espaços-tempos cujos limites gostaríamos de investigar. Entre eles destacamos os modelos tipo-Gödel [58, 57, 47]. Seria bastante útil [36] encontrar uma maneira de armazenar informações sobre limites no banco de dados (fig. 2.1). Seria também importante desenvolver um método para encontrar o sistema de coordenadas no qual o tensor métrico tenha o limite obtido através dos escalares de Cartan. Quanto às propriedades hereditárias, além do trabalho já em andamento sobre o diagrama de limites da classificação de Segre, pretendemos pesquisar mais propriedades hereditárias. Poderíamos, por exemplo, montar um diagrama de limites para a classificação de Bianchi.

No contexto de outras teorias (alternativas) de gravitação, pretendemos investigar os limites das soluções tipo Schwarzschild na teoria de Brans-Dicke. Tendo em vista a recente solução do problema de equivalência para teorias com torção [16] e o desenvolvimento de pacotes de programas algébricos para efetuar os cálculos correspondentes [17], pretendemos estender o método de obtenção de limites para o tratamento do limites de espaços-tempos em teorias com torção.

Algumas etapas do procedimento para obtenção de limites já estão quase algoritmizadas. De fato, uma vez determinados os EC de primeira, de segunda e de terceira espécie, é quase automático encontrar os limites em uma dada base. Podemos construir, ainda, algoritmos para executar as mudanças de base, tanto na ordem 0, seguindo os esquemas de especialização das classificações de Petrov e de Segre, como nas ordens seguintes, já que a dimensão do grupo de isotropia fica bastante reduzida. A partir dos algoritmos, novos pacotes de computação algébrica seriam criados permitindo que o trabalho de obtenção de limites seja quase que integralmente executado pelo computador.



# Apêndice A

## Arquivos de métricas

Neste apêndice apresentamos os arquivos de métricas utilizados nesta tese. Veja o capítulo 2 para uma discussão sobre esses arquivos.

```
(TITLE "SCHWAR.DIA
Metrica de Schwarzschild.
Geroch, R. (1969), Commun. math. Phys. 13, 180-193.")
(PRELOAD DIAINP)
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(NAMLC T R H P)
(VARS T R H P) % (t r theta phi)
(RPL A) 1-2*M/R $
(FUNS (M) A)
(RPL GD)
SQRT(A) $ 1/SQRT(A) $ R $ R*SIN(H) $
(NEWSUL RIESUL) A $ :A $
(USESUL RIESUL UNPSI PSI UNPHI PHI LAMB D PSI D2PSI)
(LORENTZ IFRAME)
(NULLT FRAME)
```

Arquivo A.1: Métrica de Schwarzschild [eqs. (3.1)–(3.2)]. Os EC obtidos são dados pelas eqs. (3.11)–(3.16).

```
(TITLE "KASNER.DIA
Limite de Schwarzschild quando m ---> infinito. (Kasner)
Geroch, R. (1969), Commun. math. Phys. 13, 180-193.")
(PRELOAD DIAINP)
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(NAMLC T R K P)
(VARS T R H P) % (t~ r~ ro phi)
(RPL A) -2/R $
(FUNS A)
(NEWSUL RIESUL)
A $ :A $
(USESUL RIESUL RIE DPSI D2PSI APSI XI)
(RPL GD)
SQRT(A) $ 1/SQRT(A) $ R $ R*H $
(LORENTZ IFRAME)
(NULLT IFRAME)
```

Arquivo A.2: Métrica de Kasner [eq. (3.10)]. Os EC obtidos são dados pela eq. (3.27).

```
(TITLE "FRW.DIA
Metrica de FRW - Modelo de Nariaiou O'Hanlon-Tupper
Lorenz, D. (1983), Lecture Notes in Physics 205. ")
(OFF ALL) (ON NOZERO DIAGONAL)
(VARS T R H P) % t,r,theta,phi.
(FUNS (Q) (B))
(RPL A)B*T^Q $
(FUNS A)
(NAMLC T R H P)
(RPL GD)
1 $ A $ A*R $ A*R*SIN(H) $
(NEWSUL 2 RIESUL)
COS(R)^2 $ 1-SIN(R)^2 $
A $ :A $
(USESUL RIESUL RIE DPHI)
(LORENTZ IFRAME)
(NULLT FRAME)
```

Arquivo A.3: Métrica de Friedman-Robertson-Walker com seção espacial fechada [eqs. (5.4) e (5.6)]. Este arquivo pode ser utilizado para as métricas de Nariai, O'Hanlon-Tupper e Friedman, já que a menos do valor de  $Q$  as métricas são idênticas. Os EC obtidos são dados pelas eqs. (5.11)–(5.20).

```
(TITLE "EINSTE.DIA
Espaco-tempo estatico de Einstein - Modelo de Romero-Barros
Romero, C. & Barros, A. (1993) Phys. Lett. A 173. 243.")
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(VARS T R H F) % t, r, teta, fi.
(NAMLC T R H F)
(FUNS (A))
(RPL GD)
1 $ A $ A*SIN(R) $ A*SIN(R)*SIN(H) $
(NEWSUL RIESUL)
COS(R)^2 $ 1-SIN(R)^2 $
(USESUL RIESUL RIE)
(LORENTZ IFRAME)
(NULLT FRAME)
```

Arquivo A.4: Métrica de Einstein [eq. (5.34)]. Este arquivo pode ser utilizado para as métricas de Einstein e Romero-Barros, já que a menos do valor de  $A$  as métricas são idênticas. Os EC obtidos são dados pelas eqs. (5.38)–(5.41).





```
(TITLE "PWB2.SPI
Ondas Planas - Base nao canonica
Tetrada nula com coordenadas complexas (2 reais e 2 complexas).
KSMH p234 eq. 21.38")
(PRELOAD IZUD DYTRSP)
(OFF ALL) (ON NOZERO COMPLX) (ON NOSTDCHECK)
(COMPLEX Z ZST A AST)
(REAL V U H B)
(NAMLC Z V U)
(DEFNAM ZST ((LC Z) UP !* DOWN))
(DEFNAM AST (A UP !* DOWN))
(DEFCONJL (Z ZST) (A AST))
%                               *
(VARS U V Z ZST) % (u v z z )
% funcoes
(FUNS (A U) (B U) (AST SPEC U))
CONJ(DF(A,U))$
(RPL H) AST*Z^2 +A*ZST^2 + 2*B*Z*ZST$
(FUNS H)
% l, k, m, m cc
(RPL IZUD)
H/2 $ 1 $ 0 $ 0 $
  1 $ 0 $ 0 $ 0 $
  0 $ 0 $ 1 $ 0 $
  0 $ 0 $ 0 $ 1 $
%DYTRPHI1 para obter a forma canonica de PHI
(RPL DYTR1)
B^(1/4) $          0 $
  0 $ B^(-1/4) $
(NULLT IFRAME)
```

Arquivo A.7: Métrica de ondas planas na segunda base [eqs. (2.1)–(2.2)]. Os EC obtidos são dados pelas eqs. (2.10)–(2.13).



# Apêndice B

## Transformações de base

Neste apêndice apresentamos arquivos que executam alguns cálculos feitos nesta tese. Veja o capítulo 2 para a definição da notação utilizada pelo CLASSI.

```
(OFF ALL) (ON COMPLX) (COMPLEX A) (NAMLC A)
(LOAD DYTSYM)
(KEEP PSI PHI DPSI DPHI D2PSI D2PHI)
(RPL DYTRX1)                                % Rotacao nula Na
1 $ 0 $
A $ 1 $
(LINIT PSI PHI DPSI DPHI D2PSI D2PHI)
(SYMBOLIC PSI 4)
(SYMBOLIC PHI 2 2)
(SYMBOLIC DPSI 5 1)
(SYMBOLIC DPHI 3 3)
(SYMBOLIC D2PSI 6 2)
(SYMBOLIC D2PHI 4 4)
(WMAKE PSITR DPSITR D2PSITR PHITR DPHITR D2PHITR)
```

Arquivo B.1: Rotação nula para ondas planas. Este arquivo executa uma rotação nula (1.32) sobre os EC de ondas planas para mostrar que esta transformação pertence ao grupo de isotropia de ondas planas. Pode ser usado para todas as métricas de ondas planas da seção 2.3 e para os limites Petrov N de Schwarzschild, Nariai e O'Hanlon-Tupper, pois todas têm EC semelhantes.



```
(LDAD DYTSYM)
(DFE ALL) (DN NDZERD) (DN COMPLX)
(CDMPLEX A)
(KEEP PSI DPSI D2PSI)
(LINIT PSI DPSI D2PSI)
(SYMBOLIC PSI 2)
(SYMBOLIC DPSI 2 0)
(RPL DPSI 3 1) -:(DPSI 2 0) $
(RPL D2PSI 2 0) 4/3(: (DPSI 2 0))^2/:(PSI 2) $
(RPL D2PSI 3 1) -:(D2PSI 2 0) - 3/2(: (PSI 2))^2 $
(RPL D2PSI 4 2) :(D2PSI 2 0) $
(RPL DYTRX1) 1 $ 0 $ A $ 1 $           % Rotacao nula Na
(WMAKE PSITR DPSITR D2PSITR)
```

Arquivo B.2: Transformação para obter limite N de uma métrica tipo D. Veja eqs. (3.36-3.64) e subseção 4.4.1.

```
(LOAD DYTSYM)
(OFF ALL) (ON NOZERO) (ON CDMPLEX)
(REAL Z)(CDMPLEX A)
(KEEP PSI DPSI D2PSI)
(LINIT PSI DPSI D2PSI)
(SYMBOLIC PSI 2)
(SYMBOLIC DPSI 2 0)
(RPL DPSI 3 1) -:(DPSI 2 0) $
(RPL D2PSI 2 0) 4/3(: (DPSI 2 0))^2/:(PSI 2) $
(RPL D2PSI 3 1) -:(D2PSI 2 0) - 3/2(: (PSI 2))^2 $
(RPL D2PSI 4 2) :(D2PSI 2 0) $
(RPL DYTRX1) Z $ 0 $ 0 $ 1/Z $       % rotacao temporal
(RPL DYTRX2) 1 $ 0 $ A $ 1 $       % rotacao nula Na
(WMAKE PSITR DPSITR D2PSITR)
```

Arquivo B.3: Transformação para obter novos limites Petrov N. Veja eqs. (3.81)-(3.103).

```

(Load DYTSYM)
(OFF ALL) (ON COMPLX) (REAL T F P) (NAMLC T F P)
(KEEP PHI DPHI DLAMBDA)
(RPL DYTRX1) % SO(3)
+COS(T/2)EXP(+I(F+P)/2) $ -SIN(T/2)EXP(+I(F-P)/2) $
+SIN(T/2)EXP(-I(F-P)/2) $ +COS(T/2)EXP(-I(F+P)/2) $
(NEWSUL 3 DYTRXDETSUL)
SIN(T/2)^2 $ 1 - COS(T/2)^2 $
SIN(T/2)^4 $ (1 - COS(T/2)^2)^2 $
SIN(T/2)^6 $ (1 - COS(T/2)^2)^3 $
(USESUL DYTRXDETSUL DYTRXDET PHITR DPHITR DLAMBDA TR)
(LIMIT PHI DPHI DLAMBDA)
(SYMBOLIC PHI 1 1)
(RPL PHI 0 0)2:(PHI 1 1)$
(RPL PHI 2 2)2:(PHI 1 1)$
(SYMBOLIC DPHI 3 3)
(RPL DPHI 0 0) :(DPHI 3 3)$
(RPL DPHI 1 1) 1/3:(DPHI 3 3)$
(RPL DPHI 2 2) 1/3:(DPHI 3 3)$
(SYMBOLIC DLAMBDA 1 1)
(RPL DLAMBDA 0 0) :(DLAMBDA 1 1)$
(WMAKE PHITR DPHITR DLAMBDA TR)

```

Arquivo B.4: Transformação  $SO(3)$ . Este arquivo executa a transformação  $SO(3)$  mais geral (veja [51]). Aplicada em  $\Phi_{AW'}$  na forma canônica para Segre [1,(111)], mostra que o grupo de isotropia desse tipo de Segre é o  $SO(3)$  (veja tab. 1.10). Aplicada nos EC de ordem 1 na forma canônica [veja eqs. (5.11)–(5.20)]  $\nabla\Phi_{11} = \nabla\Phi_{22} = 1/3\nabla\Phi_{00} = 1/3\nabla\Phi_{33}$  e  $\nabla\Lambda_{00} = \nabla\Lambda_{11}$ , mostra que essa forma canônica é invariante sob a ação do  $SO(3)$ .

```
(OFF ALL) (ON COMPLX) (REAL Z W) (COMPLEX A B) (NAMLC A B W Z)
(LOAD DYTSYM)
(ON TEXMODE)
%
(KEEP
PSI  PHI
DPSI DPHI DLAMBDA  XI
D2PSI D2PHI D2LAMBDA  DXI
D3PSI D3PHI D3LAMBDA  D2XI )
%
(SYMBOLIC
PSI  PHI
DPSI DPHI DLAMBDA  XI
D2PSI D2PHI D2LAMBDA  DXI
D3PSI D3PHI D3LAMBDA  D2XI )
%
(RPL DYTRX1) % rotacao temporal+espacial
Z*EXP(I*W) $ 0 $ 0 $ 1/Z/EXP(I*W)$
(OUTF ESPTM (WMAKE
PSITR  PHITR
DPSITR DPHITR DLAMBDATR XITR
D2PSITR D2PHITR D2LAMBDATR DXITR
D3PSITR D3PHITR D3LAMBDATR D2XITR ) )
%
(RPL DYTRX1) 1 $ 0 $ A $ 1 $ % rotacao nula
(OUTF ROTNUA (WMAKE
PSITR  PHITR
DPSITR DPHITR DLAMBDATR XITR
D2PSITR D2PHITR D2LAMBDATR DXITR
D3PSITR D3PHITR D3LAMBDATR D2XITR ) )
%
(RPL DYTRX1) 1 $ B $ 0 $ 1 $ % rotacao nula
(OUTF ROTNUB (WMAKE
PSITR  PHITR
DPSITR DPHITR DLAMBDATR XITR
D2PSITR D2PHITR D2LAMBDATR DXITR
D3PSITR D3PHITR D3LAMBDATR D2XITR ) )
```

Arquivo B.5: Transformação de díadas geral. Esta série de comandos grava em formato Latex, nos arquivos de nomes ESPTM.LAM, ROTNUA.LAM, ROTNUB.LAM, o resultado das transformações de díadas (1.36), (1.32) e (1.33) sobre os escalares de Cartan linearmente independentes até ordem 3.

# Referências

- [1] Aichelburg, P. C. & Sexl, R. U. (1971), “*On the Gravitational Field of a Massless Particle*”, Gen. Rel. Grav. **2**, 303–312.
- [2] Åman, J. E. (1987), “*Manual for CLASSI - Classification Programs for Geometries in General Relativity (Third Provisional Edition)*”, University of Stockholm Report.
- [3] Brans, C. (1965), “*Invariant Approach to the Geometry of Spaces in General Relativity*”, J. Math. Phys. **6**, 94–102.
- [4] Brans, C. & Dicke, R. H. (1961), “*Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*”, Phys. Rev. **124**, 925–935.
- [5] Cajori, F. (1969), “*An Introduction to the Theory of Equations*”, Dover Publications, Inc, New York.
- [6] Cartan, É. (1951), “*Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*”, Gauthier-Villars, Paris.
- [7] Collins, J. M. (1991), “*The Karlhede classification of type N vacuum spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **8**, 1859–1869.
- [8] Collins, J. M. & D’Inverno, R. A. (1993), “*The Karlhede classification of type-D non-vacuum spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **10**, 343–351.
- [9] Collins, J. M., D’Inverno, R. A. & Vickers, J. A. (1990), “*The Karlhede classification of type D vacuum spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **7**, 2005–2015.

- [10] Cormack, W. J. & Hall, G. S. (1981), "*Spinors, Algebraic Geometry, and the Classification of Second-Order Symmetric Tensors in General Relativity*", *Int. J. Theor. Phys.* **20**, 105–119.
- [11] D’Inverno, R. A. & Russell-Clark, R. A. (1971), "*Classification of the Harrison metrics*", *J. Math. Phys.* **12**, 1258–1263.
- [12] Dray, T. & ’t-Hooft, G. (1985), "*The Gravitational Shock Wave of a Massless Particle*", *Nuclear Phys.* **B253**, 173–188.
- [13] Eguchi, T., Gilkey, P. B. & Hanson, A. J. (1980), "*Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*", *Phys. Reports* **66**, 213–393.
- [14] Ferrari, V. & Pendenza, P. (1990), "*Boosting the Kerr Metric*", *Gen. Rel. Grav.* **22**, 1105–1117.
- [15] Frick, I. (1977), "*SHEEP Users Guide*", Institute of Theoretical Physics, University of Stockholm Report 77–14.
- [16] Fonseca-Neto, J. B., Rebouças, M. J. & Teixeira, A. F. F. (1992), "*The equivalence problem in torsion theories of gravitation*", *J. Math. Phys.* **33**, 2574–2577.
- [17] Fonseca-Neto, J. B., Rebouças, M. J. & MacCallum, M. A. H. (1993), "*Algebraic Computing in Torsion Theories of Gravitation*". Proceedings of the International IMACS Symposium on Symbolic Computation, 103–109. Eds. G. Jacob, M. F. Oussous & S. Steimberg, IMACS Press.
- [18] Geroch, R. (1969), "*Limits of Spacetimes*", *Commun. Math. Phys.* **13**, 180–193.
- [19] Geroch, R., Held, A. & Penrose, R. (1973), "*A space-time calculus based on pairs of null directions*", *J. Math. Phys.* **14**, 874–881.
- [20] Hall, G. S. (1976), "*The classification of the Ricci tensor in general relativity theory*", *J. Phys. A* **9**, 541–545.

- [21] Hall, G. S. (1979), "*The Classification of Second Order Symmetric Tensors in General Relativity Theory*", monografia do Stefan Banach International Mathematical Centre, Warsaw. Publicado em *Diff. Geom.* **12** (1984), 53-73.
- [22] Hall, G. S. (1985), "*The Energy-Momentum Tensor in General Relativity*", em *Proceedings of the first Hungarian Workshop on Gravitation*, Balatonszékplak, Hungria.
- [23] Hall, G. S. (1993), "*Physical and Geometrical Classification in General Relativity*", monografia do CBPF, MO-001/93.
- [24] Hall, G. S. & Negm, D. A. (1986), "*Physical Structure of the Energy-Momentum Tensor in General Relativity*", *Int. J. Theor. Phys.* **25**, 405-423.
- [25] Harvey, A. (1990) "*Will the Real Kasner Metric Please Stand Up*", *Gen. Rel. Grav.* **22**, 1433-1445.
- [26] Joly, G. C. & MacCallum, M. A. H. (1990), "*Computer-aided classification of the Ricci tensor in general relativity*", *Class. Quantum Grav.* **7**, 541-556.
- [27] Karlhede, A. (1980), "*A Review of the Geometrical Equivalence of Metrics in General Relativity*", *Gen. Rel. Grav.* **12**, 693-707.
- [28] Karlhede, A. & Lindström, U. (1983), "*Finding Space-Time Geometries without Using a Metric*", *Gen. Rel. Grav.* **15**, 597-610.
- [29] Koutras, A. (1992), "*A spacetime for which the Karlhede invariant classification requires the fourth covariant derivative of the Riemann tensor*", *Class. Quantum Grav.* **9**, L143-L145.
- [30] Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M. & Herlt, E. (1980), "*Exact Solutions of Einstein's Field Equations*", Cambridge University Press.
- [31] La Vallée Poussin, Ch.-J. (1957), "*Cours d'Analyse Infinitésimale - Tome II*", 9<sup>a</sup> edição, revista e aumentada com a colaboração de Simonart, F., Gauthier-Villars, Paris.

- [32] Lord, E. A. (1979), "*Tensors, Relativity and Cosmology*", Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi.
- [33] Lorenz, D. (1983), "*Exact Brans-Dicke-Bianchi solutions*", em Lectures Notes in Physics 205 — Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results, Springer-Verlag.
- [34] Lovelock, D. & Rund, H. (1975), "*Tensor, Differential Forms, and Variational Principles*", 1<sup>a</sup> ed., John Wiley and Sons, Inc.
- [35] MacCallum, M. A. H. (1991), "*Computer-aided classification of exact solutions in general relativity*" em General relativity and gravitational physics (9th Italian Conference), R. Cianci, R. de Ritis, M. Francaviglia, G. Marmo, C. Rubano & P. Scudellaro, World Scientific, Singapore, 318–337.
- [36] MacCallum, M. A. H., comunicação privada.
- [37] MacCallum, M. A. H. & Åman, J. E. (1986), "*Algebraically independent  $n^{\text{th}}$  derivatives of the Riemann curvature in general relativity*", Class. Quantum Grav. **3**, 1133–1141.
- [38] MacCallum, M. A. H. & Skea, J. E. F. (1993), "*SHEEP: A Computer Algebra System for General Relativity*", em "Algebraic Computing in General Relativity: Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra", Vol. 2, editado por M. J. Rebouças & W. L. Roque, Oxford U. P., Oxford.
- [39] McIntosh, C. B. G., Foyster, J. M. & Lun, A. W. -C. (1981), "*The classification of the Ricci and Plebański tensors in general relativity using Newman-Penrose formalism*", J. Math. Phys. **22**, 2620–2623.
- [40] Nariai, H. (1968), "*On the Green's Functions in an Expanding Universe and its Role in the Problem of Mach's Principle*", Prog. Theor. Phys. **40**, 49-59.

- [41] Nariai, H. (1969), "*Gravitational Instability in Brans-Dicke Cosmology*", *Prog. Theor. Phys.* **42**, 544–554.
- [42] Newman, E. & Penrose, R. (1962), "*An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*", *J. Math. Phys.* **3**, 566–578. Errata: *J. Math. Phys.* **4**, 998 (1963).
- [43] O'Hanlon, J. & Tupper, B. O. J. (1972), "*Vacuum-Field Solutions in The Brans-Dicke Theory*", *Nuovo Cimento* **B7**, 305–312.
- [44] Paiva, F. M. (1988), "*O Universo de Som-Raychaudhuri: Geodésicas, Campos de Killing e Classificação invariante*", Tese de Mestrado, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [45] Paiva, F. M. & Romero, C. (1993), "*The limits of Brans-Dicke spacetimes: a coordinate-free approach*", *Gen. Rel. Grav.* **25**, 1305–1317.
- [46] Paiva, F. M., Rebouças, M. J. & MacCallum, M. A. H. (1993), "*On limits of spacetimes – a coordinate-free approach*", *Class. Quantum Grav.* **10**, 1165–1178.
- [47] Paiva, F. M., Rebouças, M. J. & Teixeira, A. F. F. (1987), "*Time-travel in the Som-Raychaudhuri Universe*", *Phys. Lett. A* **126**, 168–170.
- [48] Paiva, F. M., Hall, G. S., MacCallum, M. A. H. & Rebouças, M. J. (1994), "*Hereditary properties of spacetimes*", em elaboração.
- [49] Penrose, R. (1960), "*A Spinor Approach to General Relativity*", *Ann. Phys. NY* **10**, 171–201.
- [50] Penrose, R. (1972), "*Spinor classification of energy tensors*", em *Gravitation: Problems, Prospects (Dedicated to the memory of A. Z. Petrov)*. Izdat, Naukova Dumka, Kiev.
- [51] Penrose, R. & Rindler, W. (1984), "*Spinors and Space-Time*", vol. 1, Cambridge University Press.



- [52] Penrose, R. & Rindler, W. (1986), “*Spinors and Space-Time*”, vol. 2, Cambridge University Press.
- [53] Petrov, A. Z. (1966), “*Perspectives in Geometry and Relativity*”, Essays in Honor of Václav Hlavatý, Indiana University, Press. Bloomington e London.
- [54] Petrov, A. Z. (1969), “*Einstein Spaces*”, 1<sup>a</sup> edição inglesa, Pergamon Press.
- [55] Pirani, F. A. E. (1964), “*Introduction to Gravitational Radiation Theory*”, Brandeis Lectures on General Relativity, vol. 1, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [56] Plebański, J. (1964), “*The Algebraic Structure of the Tensor of Matter*”, Acta Phys. Pol. **26**, 963–1020.
- [57] Rebouças, M. J. & Åman, J. E. (1987), “*Computer-aided study of a class of Riemannian space-times*”, J. Math. Phys. **28**, 888–892.
- [58] Rebouças, M. J. & Tiomno, J. (1983), “*Homogeneity of Riemannian space-times of Gödel type*”, Phys. Rev. D **28**, 1251–1264.
- [59] Romero, C. & Barros, A. (1993), “*Does Brans-Dicke theory of gravity go over to general relativity when  $\omega \rightarrow \infty$ ?*”, Phys. Lett. A **173**, 243.
- [60] Romero, C. & Barros, A. (1993), “*Brans-Dicke vacuum solutions and the cosmological constant: a qualitative analysis*”, Gen. Rel. Grav. **25**, 491–502.
- [61] Sánchez, A. R. G., Plebański, J. F. & Przanowski, M. (1991), “*Deformations of algebraic types of the energy-momentum tensor*”, J. Math. Phys. **32**, 2838–2847.
- [62] Seixas, W. (1991), “*Extensions to the computer-aided classification of the Ricci tensor*”, Class. Quantum Grav. **8**, 1577–1585.
- [63] Skea, J. E. F. (1992), “*Relatividade Geral Avançada com Computação Alébrica*”, Notas de aula do CBPF.

# "LIMITES DE ESPAÇOS-TEMPOS EM GRAVITAÇÃO"

FILIFE DE MORAES PAIVA

Tese de Doutorado apresentada no Cen  
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
do Conselho Nacional de Desenvolvi-  
mento Científico e Tecnológico, fa-  
zendo parte da banca examinadora os  
seguintes professores:



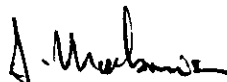
Marcelo José Rebouças - Presidente



Maurício Ortiz Calvão



Silvestre Ragusa



Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson



José Martins Salim



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira