



ALEXANDRE LYRA DE OLIVEIRA

CAMPO MAGNÉTICO EM UMA TRIESFERA
E INTRODUÇÃO AS TRIVARIEBADES

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

1993

A MEMÓRIA DE
Manoel Ferreira de Oliveira ,
MEU PAI

Este trabalho é dedicado também a todos aqueles que foram vítimas das consequências de ideologias que somente se viabilizaram através do autoritarismo

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram para que este trabalho pudesse chegar a seu término. Gostaria de agradecer nominalmente a algumas, que me desculpem aqueles que possa ingratamente haver me esquecido.

Em primeiro lugar não poderia deixar de lembrar-me do incentivo dos colegas que ingressaram juntos comigo no CBPF, Aldo Cardoso, Fortunato Menezes e Carla Papaleo. A esta além de tudo devo ressaltar o incentivo em alguns momentos de dificuldades no início do mestrado. Diversos colegas do CBPF, dentre os quais Gerson Pech, Alexandre Velasco e Marcelo Carvalho, me ajudaram de diversas maneiras, e com eles sempre tive agradáveis conversas sobre física ou amenidades ao longo destes anos.

Em virtude de problemas ao longo do mestrado, algumas pessoas contribuíram mais efetivamente para que tudo se resolvesse da melhor maneira possível, dentre elas, além do orientador desta dissertação (ao qual me referirei em seguida), o Prof. Ivano D. Soares do CBPF ajudou bastante. Também o Prof. M. M. Som da UFRJ foi sempre bastante prestativo nos momentos em que o procurei

para tirar dúvidas.

Apesar de que está sempre implícito o agradecimento ao orientador, Prof. Antonio Teixeira, aproveito para dizer que foi bastante agradável trabalhar com ele todo este período; e que sua orientação da tese foi além de tudo uma participação ativa em todas as suas partes através de infalíveis encontros semanais onde o trabalho era revisto pacientemente nos mínimos detalhes. Não poderia deixar de mencionar que foi através das referências que ele me indicou que tomei conhecimento pela primeira vez do trabalho matemático de W. Thurston. Assunto bastante atual e que, além de ter uma importância fundamental em diversas áreas, é altamente entusiasmador; deva-se dizer também que é ainda pouco mencionado na literatura de física.

Agradeço à secretária da Coordenação de Formação Científica, Myriam Coutinho, pela ajuda que sempre deu ao longo do mestrado. Também aos funcionários da biblioteca do CBPF pelos incontáveis quebra-galhos, e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos colegas do Departamento de Astronomia da UFRJ pelo incentivo, apoio material e compreensão da necessidade da minha dedicação à tese, o que foi configurado como dispensa de carga didática nos períodos finais da conclusão da tese. Isto foi fundamental para que pudesse redigi-la em tempo hábil. Particularmente a Sueli A. Guillens, Encarnación A. Martinez, e Gilson G. Vieira.

A todos os meus familiares e amigos cujos apoio e incentivo foram bastante importantes, principalmente nos períodos de dificuldades. Ao casal Wanda e Barros pelo incentivo, ao cunhado e amigo Waldemar, aos meus primos. Ao amigo de longa data Julio C. Drumond e família por tudo em que sempre me apoiaram.

A minha mulher *Eliana N. França* por todo o carinho, afeto e compreensão sem os quais seria extremamente árduo o trabalho, e que amenizou muitos momentos de dificuldades.

Em especial à minha mãe *Maria Isabel de Lyra* pelo seu sacrifício, compreensão e tantas coisas que levaria folhas para enumerar.

E mais uma vez, apesar da sua ausência, a meu pai por todo o apoio que sempre me deu e tudo o que fez, muitas vezes renunciando a si próprio.

A todos meu sincero muito obrigado.

RESUMO

Suposto um fluxo toroidal estacionário inhomogêneo de corrente elétrica em uma triesfera e em um triespço projetivo, os correspondentes campos magnéticos são obtidos por integração das equações de Maxwell no espaço curvo. A topologia de ambas variedades é considerada, e revela interessantes peculiaridades das soluções. Preliminarmente é apresentado um resumo da obra de Thurston sobre topologia de trivariiedades, bem como são descritos vários conceitos pertinentes à tri geometria esférica.

ABSTRACT

A stationary, non-homogeneous, toroidal flux of electric current is considered in a threesphere and a projective threespace, then the associate magnetic fields are obtained by integrating Maxwell equations in a curved space. The topology of both manifolds is taken into account and unveils interesting peculiarities of the solutions. A sketch of Thurston's work on the topology of threemanifolds is preliminarily given, and several concepts belonging to the spherical threegeometry are described.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	iv
RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
SUMÁRIO.....	ix
LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	xiii
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1: CONCEITOS BÁSICOS: CONJUNTOS, TOPOLOGIA, VARIEDADE.....	3
1.1 Introdução	3
1.2 Conjuntos e aplicações entre conjuntos.....	3
1.3 Espaços topológicos.....	9
1.3.1 Definições.....	9
1.3.2 Espaço de <i>Kausdorff</i>	11
1.3.3 Subconjuntos fechados.....	12
1.3.4 Conexidade.....	13
1.3.5 Compacidade.....	15
1.3.6 Homeomorfismos.....	16
1.3.7 Invariantes topológicos.....	18
1.4 Variedade diferenciável.....	21
1.4.1 Variedade, cartas e atlas.....	21
1.4.2 Variedade diferenciável.....	25

1.4.3 Orientabilidade.....	28
1.4.3.1 Bilateralidade	28
1.4.3.2 Orientabilidade.....	29
1.5 Grupos.....	34
1.5.1 Definições gerais.....	34
1.5.2 Relações de equivalência em grupos..	35
CAPÍTULO 2: ESPAÇOS VETORIAIS, MÉTRICA, E AÇÃO DE	
GRUPOS EM VARIEDADES.....	38
2.1 Introdução.....	38
2.2 Espaços vetoriais.....	39
2.2.1 Corpo e espaço vetorial.....	39
2.2.2 Aplicações lineares.....	41
2.2.3 Espaço dual e produto interior.....	42
2.2.4 Produto interior em um espaço	45
2.2.5 "Pullback".....	46
2.3 Cálculo sobre variedades.....	47
2.3.1 Introdução.....	47
2.3.2 Funções definidas sobre variedades..	47
2.3.3 Curvas e vetores em variedades.....	49
2.4 Métrica.....	52
2.4.1 Topologia métrica.....	52
2.4.2 Espaços vetoriais tangentes.....	53
2.4.3 Tensores.....	54
2.4.4 Imersão e mergulho.....	55
2.4.5 Métrica riemanniana.....	56
2.5 Ação de grupos em variedades.....	57
2.5.1 Introdução.....	57

2.5.2 Campos vetoriais invariantes.....	59
2.5.3 Ação de grupos sobre variedades.....	62
CAPÍTULO 3: INTRODUÇÃO AS TRIVARIEDADES.....	66
3.1 Introdução.....	66
3.2 Definição de conceitos.....	67
3.2.1 Geometria de Klein.....	67
3.2.2 Mais alguns conceitos gerais.....	68
3.3 Espaços bidimensionais.....	69
3.3.1 Introdução.....	69
3.3.2 Generalidades sobre duas dimensões..	70
3.3.3 Espaço euclidiano.....	72
3.3.4 Superfície esférica S^2	74
3.3.5 Plano hiperbólico H^2	75
3.4 Espaços tridimensionais.....	78
3.4.1 Visualização de trivariiedades.....	78
3.4.2 Geometria intrínseca.....	83
3.4.3 Introdução aos fibrados de Seifert..	91
3.5 As oito K-geometrias tridimensionais.....	94
3.5.1 Introdução.....	94
3.5.2 As oito K-geometrias.....	98
CAPÍTULO 4: AS ESFERAS S^2 E S^3	106
4.1 Introdução.....	106
4.2 A superfície esférica S^2	107
4.3 Visualização da S^3	110
4.4 Mapeamentos da S^3	112
4.5 Retas polares	116
4.6 Superfícies de Clifford	120

4.7 Retas paratáticas	124
CAPÍTULO 5: CAMPO MAGNÉTICO NA S^3 E NO P^3	127
5.1 Introdução.....	127
5.2 Eletrodinâmica no espaço-tempo curvo.....	129
5.3 Coordenadas esféricas na S^3 e no P^3	131
5.4 Tangentes às fibras de Seifert.....	134
5.5 Corrente toroidal.....	135
5.6 Campo magnético toroidal.....	140
CONCLUSÃO.....	144
REFERÊNCIAS.....	146

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<i>Figura</i> 1.1 Esquema de aplicações	6.
<i>Figura</i> 1.2 Espaço quociente	8
<i>Figura</i> 1.3 Superfícies homeomorfas	17
<i>Figura</i> 1.4 Conversão de toros em pretzel	20
<i>Figura</i> 1.5 Espaços que não são variedades	22
<i>Figura</i> 1.6 Cartas	23
<i>Figura</i> 1.7 Sistema de coordenadas	24
<i>Figura</i> 1.8 Cartas de vizinhanças com interseção	25
<i>Figura</i> 1.9 Cone duplo	27
<i>Figura</i> 1.10 Aplicação suave	27
<i>Figura</i> 1.11 Variedade não orientável	31
<i>Figura</i> 1.12 Tábua de multiplicação de grupo	36
<i>Figura</i> 2.1 "Pullback"	46
<i>Figura</i> 2.2 Função sobre uma variedade	48
<i>Figura</i> 2.3 Curva em uma variedade	49
<i>Figura</i> 2.4 Imersão e mergulho	56
<i>Figura</i> 3.1 Translação e rotação no \mathbb{E}^2	73
<i>Figura</i> 3.2 Tratriz e pseudoesfera.....	76
<i>Figura</i> 3.3 Movimento plano de uma barra	79
<i>Figura</i> 3.4 Sistema com duas barras	80
<i>Figura</i> 3.5 Espaço de configuração (duas dimensões)...	81

<i>Figura 3.6</i> Espaço de configuração (tres dimensões)...	82
<i>Figura 3.7</i> Geometria intrínseca	84
<i>Figura 3.8</i> Efeito da diminuição da curvatura	85
<i>Figura 3.9</i> Efeito do aumento da curvatura	86
<i>Figura 3.10</i> Esfacelamento de uma B^3	87
<i>Figura 3.11</i> Fatias do H^3	87
<i>Figura 3.12</i> Triespaço anisotrópico	88
<i>Figura 3.13</i> "Atuação do ser tridimensional"	89
<i>Figura 3.14</i> Espaço de Seifert-Weber	90
<i>Figura 3.15</i> Dodecaedro de Poincaré	91
<i>Figura 3.16</i> Estrutura de um fibrado	92
<i>Figura 3.17</i> Topologias do E^3 (não orientáveis)	98
<i>Figura 3.18</i> Topologias do E^3 (orientáveis)	99
<i>Figura 3.19</i> Um espaço torcido	102
<i>Figura 3.20</i> Tritoro torcido	104
<i>Figura 3.21</i> Esquema geral das oito geometrias	105
<i>Figura 4.1</i> Retas na S^2	108
<i>Figura 4.2</i> Circunferência e triângulo na S^2	109
<i>Figura 4.3</i> Mapa da superfície terrestre	113
<i>Figura 4.4</i> Estereomapa da S^3	114
<i>Figura 4.5</i> Atlas da S^2	116
<i>Figura 4.6</i> Reta polar e plano polar	117
<i>Figura 4.7</i> Construção de retas polares	119
<i>Figura 4.8</i> Par de retas polares	119
<i>Figura 4.9</i> Curvas equidistantes	120
<i>Figura 4.10</i> Tabela de figuras equidistantes	121
<i>Figura 4.11</i> Superfície equidistante no R^3	122

<i>Figura</i> 4.12 Superfície de Clifford	123
<i>Figura</i> 4.13 Como traçar paratáticas	125
<i>Figura</i> 5.1 Variação radial do campo magnético	128
<i>Figura</i> 5.2 Triângulo esférico	137
<i>Figura</i> 5.3 Linhas de corrente na S^3	138
<i>Figura</i> 5.4 Linhas de corrente no P^3	139
<i>Figura</i> 5.5 Comparação da variação radial do campo ...	143

INTRODUÇÃO

Todo nosso esforço neste trabalho visa desembocar no seguinte problema de física: em uma triesfera e em um triespaço projetivo admite-se uma densidade volumétrica de corrente elétrica com uma específica conformação, e obtém-se a solução analítica exata para o campo magnético estático associado a essa corrente. Entretanto, a simples posse dessa solução matemática não é suficiente para satisfazer a nossa curiosidade, nós queremos interpretar, ou visualizar aqueles campos físicos. Para isso torna-se necessário conhecer os espaços em que os campos residem, o que nos remete à topologia daqueles espaços.

Nossa mente inquisidora pode agora perguntar: considerando que a solução para \vec{H} a partir de \vec{j} foi inicialmente obtida com utilização de ferramentas apenas geométricas (as questões topológicas poderiam ter sido introduzidas a posteriori), então não poderiam aqueles mesmos \vec{j} e \vec{H} locais se estender por triespaços com topologias diferentes da do esférico e do projetivo? E caso a resposta fosse afirmativa, perguntaríamos logo em seguida: quem são os outros triespaços que admitem aquela mesma geometria?

Conseguidas as respostas a essas perguntas, começamos a nos preparar para outras questões: além das geometrias euclidiana e

esférica, seria possível existirem outras geometrias essencialmente distintas em espaços tridimensionais ? Será que já dispomos de ferramentas matemáticas confiáveis para responder essa questão ? Em caso afirmativo, quantas seriam as geometrias tridimensionais não equivalentes ? E para terminar: dada uma trigeometria arbitrária, seria possível descobrir o conjunto completo dos espaços topologicamente distintos que admitem aquela geometria ?

Será permeando essas questões que esta tese se desenvolverá. Certamente, como manda o bom senso, procuramos partir dos conceitos considerados mais elementares para pouco a pouco atingirmos os mais elaborados. A parte original de nosso trabalho se restringe a trechos que envolvem eletromagnetismo, no capítulo 5 (seções 5.1, 5.5 e 5.6). A aparente exiguidade desse material original é enganosa; com efeito, como corrente e campo magnético foram atrelados a várias entidades geometro-topológicas discutidas previamente em diversas seções, a exposição dos resultados físicos finais resultou consideravelmente compactada.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS BÁSICOS: CONJUNTOS, TOPOLOGIA, VARIEDADE

1.1 INTRODUÇÃO

Faremos em seguida um breve resumo do que nos interessa sobre conjuntos e que, de alguma maneira, será utilizado no decorrer da tese. Relembremos alguns conceitos e convenções para podermos definir propriedades de que necessitaremos para uma introdução à topologia. Apesar de serem conceitos elementares, optamos por relembrá-los com o fim exclusivo de que o texto seja razoavelmente completo e auto-suficiente no que se refere às definições matemáticas básicas. Que nos desculpe o leitor que não tenha mais paciência para ler as definições elementares que estão contidas nestas primeiras seções (ver o sumário). Contudo há necessidade de uma certa ordenação adaptada à abordagem que nos interessa, e que possa facilitar àqueles que estudam o assunto pela primeira vez.

1.2 CONJUNTOS E APLICAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Partiremos do conceito de *conjunto*. Há autores que ressaltam que nem toda coleção é um conjunto ([1]p1); já outros, por exemplo

([2]p1), dizem que conjunto por definição é uma coleção de objetos. Deixando essas polêmicas para os matemáticos, adotaremos a última. Os interessados podem consultar referências em [1]. Poderemos usar ainda os termos "coleção, família, sistema", etc. com o significado de conjunto; tanto para os que têm um número finito de constituintes (ou seja de elementos), quanto para o caso de número infinito de elementos.

Representaremos os conjuntos por letras maiúsculas e os elementos por minúsculas; isto é, conjunto A com elementos a, b, c, etc., ou seja $A = \{a, b, c, \dots\}$. Em alguns casos definiremos o conjunto através da propriedade comum aos seus elementos, na forma $A = \{x \mid (\text{propriedade})\}$. Como é usual, o *conjunto vazio*, aquele que não tem elementos, é representado por \emptyset . Se todos os elementos de um conjunto X são também elementos de um conjunto Y ([2]p1), então X é *subconjunto* de Y, e se representa por $X \subset Y$. Não fica excluída a possibilidade de X e Y serem compostos pelos mesmos elementos; neste caso temos $X \subset Y$ e $Y \subset X$, ou resumidamente $X = Y$. A *união* de dois conjuntos X e Y, representada por $X \cup Y$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a X e a Y. A *interseção*, representada por $X \cap Y$, é o novo conjunto formado pelos elementos comuns a ambos. Caso não tenham elementos comuns, se escreve $X \cap Y = \emptyset$; neste caso são chamados de *disjuntos*, sua interseção é o vazio.

Se A é um subconjunto de X, isto é, $A \subset X$, o *complemento* de A com relação a X é a totalidade de elementos $x \in X$ que não estão

contidos em A ; representa-se por $X \setminus A$. Por exemplo se $X = \{a, b, c, d\}$, e $A = \{a, b\}$ teremos que $X \setminus A = \{c, d\}$. O *produto cartesiano* $X \times Y$ dos conjuntos X e Y é o conjunto de pares ordenados (x, y) , onde $x \in X$ e $y \in Y$ ([1]p2).

Dados dois conjuntos X e Y , um mapa, mapeamento ("mapping", "map") ou *aplicação* f -que é o termo que usaremos na maioria das vezes- de X para Y , que se representa por

$$f : X \rightarrow Y ,$$

é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$ um ou mais elementos de Y ([3]p35). O *domínio* de f é o conjunto X , enquanto o subconjunto de Y alcançado pela aplicação é chamado de *alcançe* ("range") ou *contra-domínio*. O subconjunto de Y que corresponde aos elementos de um subconjunto M de X se chama *imagem* de M , $f(M) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para } x \in M\} \subset Y$. Já o subconjunto de X cujos elementos são aplicados em um subconjunto N de Y sob a ação de f se chama *imagem inversa* de N , e é denotado por $f^{-1}(N)$; ver figura 1.1.

Uma aplicação é dita *injetiva* (ou 1-1, ou *monomorfismo*, ou de X em Y , "into") se a cada elemento $x \in X$ corresponde apenas um elemento $y \in Y$; é *sobrejetivo* (ou de X sobre Y , "onto", "surjective") se todo $y \in Y$ tem imagem inversa (não necessariamente única).

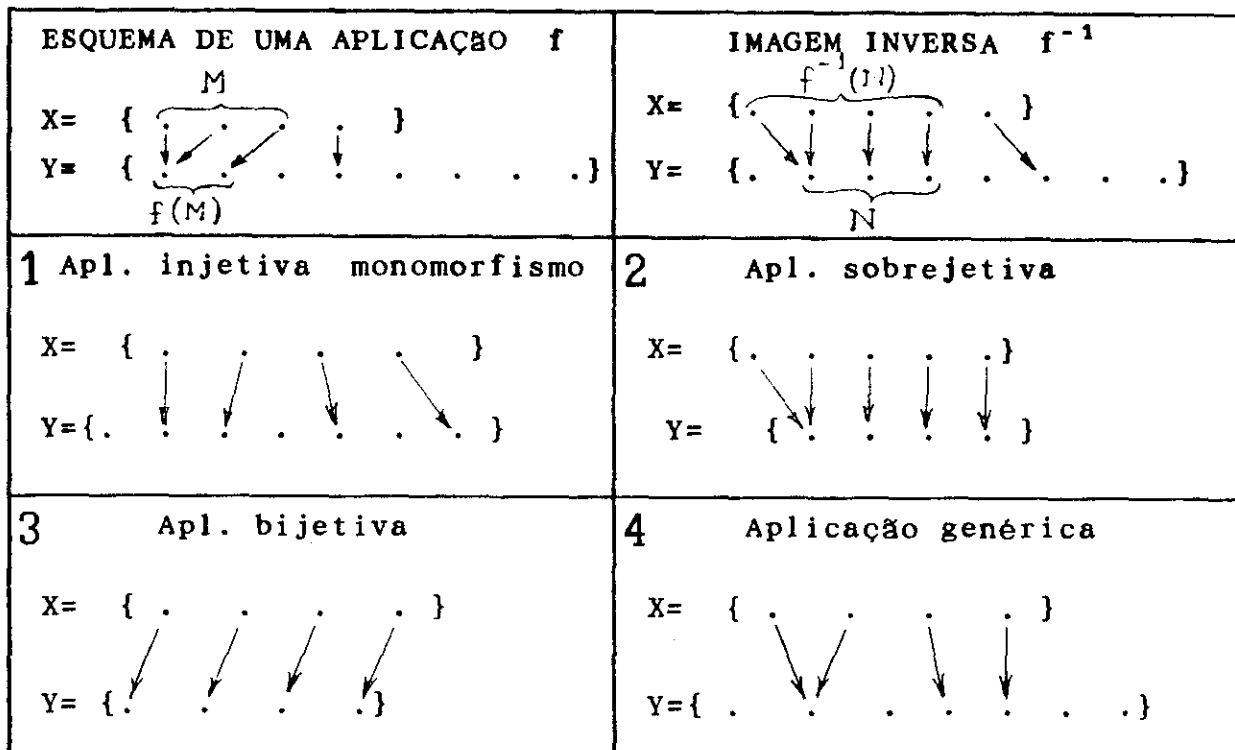


Figura 1.1 Esquema de aplicações e de imagem inversa.

Se é injetiva e sobrejetiva, a aplicação é chamada *bijetiva*. Como exemplos, vejamos que se $X=Y=\mathbb{R}$ -o conjunto dos números reais- então o mapa $x \mapsto x^3$ é bijetivo; já $x \mapsto \exp(x)$ é injetivo mas não é sobrejetivo, pois não há imagem inversa para os reais ≤ 0 . Contudo, se $X = \mathbb{R}$ e $Y=(0,\infty)$ então para $y=\exp(x)$ $f: \mathbb{R} \mapsto (0,\infty)$ é bijetiva. Já $x \mapsto \sin(x)$ não é uma aplicação caso consideremos estes mesmos domínio e contradomínio porque $\sin(3\pi/2) = -1 \notin (0, \infty) = Y$. Vale notar que há aplicações que nem são injetivas nem sobrejetivas; um exemplo é a aplicação $f: X \rightarrow Y$ com $X=Y=\mathbb{R}$ dada por $y=\sin x$.

Uma *relação* entre X e Y é um subconjunto R de $X \times Y$; se $(x,y) \in R$, diz-se que x e y estão relacionados por R , e representa-se por xRy ([1]p5). Dois exemplos de relação são "maior que" e "menor que", isto é, $x > y$ e $a < b$; cada par relacionado por $>$ ou $<$ é um elemento do produto cartesiano $X \times X$, isto é, de X^2 ([3]p38).

Uma relação $R \in X \times X$ é uma *relação de equivalência* ([1]p5) se é ao mesmo tempo

reflexiva: $(x,x) \in R, \forall x \in X$,

simétrica: $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R, \forall x,y \in X$ e

transitiva: $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R, \forall x,y,z \in X$.

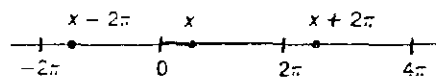
Uma relação de equivalência é representada por $x \sim y$ ou x é equivalente a y pela relação de equivalência R , $x=y$ (módulo R) ou mais sinteticamente $x=y(\text{mod } R)$.

Dado o conjunto X e uma relação de equivalência \sim , fica X partido em subconjuntos *disjuntos* chamados *classes de equivalências*. Uma classe de equivalência é representada na forma $[a]$; cada uma delas é um dos subconjuntos de X definido por $[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}$, e o conjunto X é a união disjunta das classes de equivalências. Fica então definido um novo conjunto, cujos elementos são as próprias classes de equivalências e que é representado por X/R , ou X/\sim . Chama-se este novo conjunto de *espaço quociente*. Como todos os elementos dentro de uma determinada classe de equivalência são por definição *equivalentes*

pela relação dada, qualquer um deles pode representar a classe à qual pertence; em outras palavras, se $a \sim b$ então $[a] = [b]$ ([3]p38 e [1]p5).

Por exemplo, se x e y são pontos no conjunto dos reais \mathbb{R} , introduzamos a relação de equivalência \sim por $x \sim y$ se $y = x + 2\pi n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Cada classe $[x]$ é constituída pelo subconjunto de \mathbb{R} dado por $[x] = \{\dots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, x + 4\pi, \dots\}$. Todos os elementos do conjunto das classes de equivalência - ou seja, do espaço quociente - estarão representados pelos diferentes x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi)$. Conclue-se então que \mathbb{R}/\sim pode ser representado por uma circunferência S^1 (veja a figura 1.2).

(a)



(b)

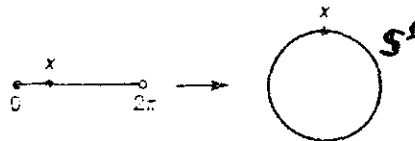


Figura 1.2 Em (a) todos os pontos $x + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ estão na mesma classe de equivalência $[x]$. (b) Se tomarmos $x \in [0, 2\pi)$ como representativo de $[x]$ então o espaço quociente \mathbb{R}/\sim é uma circunferência S^1 ([3]p39).

1.3 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

1.3.1 DEFINIÇÕES

Define-se um *espaço topológico* $E = (X, \tau)$ como um conjunto X , não vazio, com uma família τ de subconjuntos de X , $\tau = \{U_i\}$. Exige-se que os elementos de τ satisfaçam as seguintes propriedades:

i) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$;

ii) a interseção de um número finito de elementos de τ também pertence à família τ :

$$U_i \cap \dots \cap U_n \in \tau;$$

iii) a união de qualquer número de elementos de τ pertence a τ :

$$\bigcup U_i \in \tau.$$

Os elementos de τ são chamados conjuntos abertos, ou simplesmente *abertos*. Diz-se que a família de subconjuntos τ dá uma *topologia* em X . É oportuno notar que um espaço topológico pode ser tanto discreto como contínuo (conceitos apenas intuitivos, por ora).

Se τ é constituída apenas por X e \emptyset , isto é, $\tau = \{X, \emptyset\}$, a

topologia é chamada *trivial* ([3]p48) ou *indiscreta* ([4]p4); é esta a topologia mais *grosseira* ("coarsest" [1]p12) que existe para o conjunto X . Se é constituída por todos os subconjuntos de X , mais \emptyset , e também o próprio X (pois $X \subset X$), a topologia recebe o nome de *discreta*, ou 2^X ; é a topologia mais *fina* dentre todas.

Veremos em seguida o caso da topologia natural (ou usual) da reta real, com objetivo de introdução à noção de continuidade.

Se o conjunto X é a reta real, $X = \mathbb{R}$, pode-se definir nele uma topologia τ em que os abertos são os intervalos abertos (a,b) e todas as suas possíveis uniões disjuntas; a reta real \mathbb{R} agora dotada desta topologia (chamada topologia *usual* sobre \mathbb{R}) constitui um espaço topológico geralmente denotado também por \mathbb{R} ([4]p4). Para o $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (\mathbb{R} cartesiano \mathbb{R} , n vezes) faz-se n vezes a topologia usual da reta e obtém-se então uma família de abertos formada pelo produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, onde cada U_i é um aberto da reta \mathbb{R} . Convém enfatizarmos que a topologia usual de qualquer \mathbb{R}^n ($n > 0$) não é a topologia discreta. Notamos ainda que frequentemente é tolerado denotar-se um espaço topológico (X, τ) pelo mesmo símbolo X ([4]p4).

Um espaço topológico $E = \{X, \tau\}$ pode gerar outros espaços topológicos $E' = \{X', \tau'\}$, bastando que X' seja subconjunto de X ; as novas topologias τ' serão chamadas topologias *induzidas*. Para um X' fixado, cada aberto do respectivo τ' é definido como a interseção de X' com um aberto de τ . Isto nos permitirá falar de topologia de uma circunferência, esfera, toro, etc, sem mencionar

quais são os correspondentes abertos; fica sub-entendido que cada uma dessas figuras é considerada subconjunto de algum \mathbb{R}^n , e que os abertos das respectivas topologias são os induzidos pelos abertos usuais desse \mathbb{R}^n .

1.3.2 ESPAÇO DE HAUSDORFF

Dado um espaço topológico $E = (X, \tau)$, diremos que N é uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ se $N \subset X$ e N contiver algum aberto de E ao qual x pertença. Por exemplo, se $E = \mathbb{R}$ com a topologia usual da reta, $[-1, +1]$ é uma vizinhança ([3]p50) de qualquer ponto do intervalo $(-1, +1)$. Observe-se que uma vizinhança não necessariamente é constituída de abertos. Contudo se ela for um aberto de τ então será dita *vizinhança aberta*.

Um espaço topológico X é *separável* ou *hausdorffiano* se para um par arbitrário de pontos distintos, x e $y \in X$, sempre existem vizinhanças U_x de x e U_y de y que não se interceptam, isto é, $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Exemplos de espaços topológicos hausdorffianos:

\mathbb{R} com sua topologia usual;

Um conjunto X com a topologia discreta.

Já um espaço com a topologia trivial não é hausdorffiano.

Nas próximas seções serão definidos três conceitos relativos a espaços topológicos: o de subconjuntos fechados, o de espaços topológicos conexos, e o de subconjuntos compactos. O primeiro e o terceiro frequentemente se contrapõem à noção intuitiva sugerida por seus adjetivos; daremos exemplos.

1.3.3 SUBCONJUNTOS FECHADOS

Dado um espaço topológico (X, τ) , um subconjunto $A \subset X$ é *fechado* se o seu complemento em X ($X \setminus A$) é um aberto, isto é, se $X \setminus A \in \tau$. Convém notar que um espaço topológico pode ter subconjuntos que nem são abertos nem fechados.

Se o espaço topológico é a reta real \mathbb{R} com a topologia usual, um intervalo $[a, b]$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} , pois seu complemento $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ é um aberto em \mathbb{R} ([3]p51); já o intervalo $[a, b)$ não é um subconjunto aberto nem fechado no espaço topológico \mathbb{R} .

O intervalo finito (a, b) é um aberto em \mathbb{R} , porém em \mathbb{R}^2 ele nem é aberto nem fechado: não é aberto porque (a, b) não pertence à topologia usual do \mathbb{R}^2 , e não é fechado porque o seu complemento $\mathbb{R}^2 - (a, b)$ tampouco pertence. Já o intervalo $[a, b]$ é fechado no \mathbb{R}^2 com a topologia usual, pois seu complemento no \mathbb{R}^2 é a união de quatro abertos de \mathbb{R}^2 : $(-\infty, +\infty) \times (0, \infty) \cup (-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0) \cup (-\infty, a) \times (-1, +1) \cup (b, \infty) \times (-1, +1)$.

Por definição tanto X quanto \emptyset são abertos do espaço topológico (X, τ) , pois são elementos de τ ; mas são também fechados, pois cada um é o complemento do outro, que é aberto. Nas topologias discretas todo subconjunto é ao mesmo tempo aberto e fechado. Os abertos da topologia usual de \mathbb{R} são os intervalos (a, b) com $a < b$, o que elimina a possibilidade de um ponto ser aberto; logo esta topologia não é discreta. Os pontos são fechados ([1]p12) porque seus complementos são da forma $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, que são abertos na topologia usual de \mathbb{R} .

Sempre admitindo a topologia usual para os \mathbb{R}^n , verifica-se que a circunferência $S^1 (x^2 + y^2 = a^2)$ e o disco $D^2 (x^2 + y^2 \leq a^2)$ são fechados nos \mathbb{R}^n para $n > 1$, e que a esfera $S^2 (x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$ é também fechada nos \mathbb{R}^n para $n > 2$. Pode-se fazer uma definição de espaço topológico baseada no conceito de subconjuntos fechados, equivalente à definição que fizemos utilizando abertos ([4]p5). Aliás investigar os fechados, na análise de um subconjunto, mostra-se muitas vezes mais econômico que investigar os abertos.

1.3.4 CONEXIDADE

A definição de espaços topológicos conexos e desconexos acompanha de perto a nossa intuição a respeito. Assim, diz-se que um espaço topológico $E = (X, \tau)$ é *desconexo* se existem 2 subconjuntos não vazios de X , A_1 e A_2 , ambos abertos, tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = X$ ([1]p16). Equivalentemente, $E = (X, \tau)$ é dito *conexo* se e somente se os únicos subconjuntos de X que são

simultaneamente abertos e fechados na topologia τ são o próprio X e o vazio \emptyset ([4]p12). São exemplos de E conexos todos os \mathbb{R}^n com a sua topologia usual, bem como todos os conjuntos X com a topologia trivial, e ainda o conjunto $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. São exemplos de desconexos $\mathbb{R} - \{0\}$, todos os conjuntos X com a topologia discreta, o conjunto $X = \{a, b\}$ com a topologia $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, etc.

Um espaço topológico $E = \{X, \tau\}$ é chamado *conexo por caminhos* ("arcwise connected") se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe uma aplicação contínua $f: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$ ([1]p19). Todo espaço conexo por caminhos é conexo ([5]p61); a recíproca é quase sempre verdadeira, sendo violada apenas por raridades patológicas ([3]p52).

Define-se um *caminho fechado* ("loop") ([5]p217) em um espaço topológico X como uma aplicação contínua $f: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = f(1)$. Se qualquer caminho fechado em X pode ser continuamente deformado ("elásticamente") até colapsar a um ponto, X é dito *simplesmente conexo* ([3]p52); um espaço conexo que não é simplesmente conexo é dito *multiplamente conexo*.

Entre outros, são simplesmente conexos todos os \mathbb{R}^n , e todas as S^n para $n > 1$. São multiplamente conexos a circunferência S^1 , todos os toros $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (produto cartesiano de $n > 1$ circunferências), etc.

1.3.5 COMPACIDADE

O conceito matemático de compacidade de um conjunto com frequência entra em desacordo com nosso senso comum; por exemplo, o intervalo $[-10, 10]$ é compacto mas o intervalo $(-1, 1)$ não é compacto. Vamos ver essa questão.

Se (X, τ) é um espaço topológico hausdorffiano, e Y é um subconjunto de X , uma família de subconjuntos A_i de X é chamada de *recobrimento* de Y se $Y \subset \bigcup A_i$. Se todos os A_i são abertos da topologia τ , então o recobrimento é chamado de *recobrimento aberto*. Dados todos os recobrimentos abertos de Y , o conjunto Y é dito *compacto* se para cada um desses recobrimentos existir um sub-recobrimento que seja finito ([1]p15). Como exemplos notamos que um ponto da reta \mathbb{R} (com a topologia usual) é compacto ([3]p51), mas que a reta real \mathbb{R} não é compacta ([4]p12); um aberto em \mathbb{R} tampouco é compacto ([4]p11; ver também [6]p16, 17). Vamos mostrar que o aberto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é compacto. Considere-se os abertos da forma $A_n = (1/(n+2), 1/n)$, que são intervalos do tipo $(1/3, 1)$, $(1/4, 1/2)$, $(1/5, 1/3)$, ...; $\bigcup A_n$ ($n = 1, 2, \dots$) é um recobrimento aberto de $(0, 1)$, e nota-se que $\{A_n\}$ não contém sub família que recubra $(0, 1)$ ([4]p11). A existência desse recobrimento $\bigcup A_n$ é suficiente para afiançar a não-compacidade de $(0, 1)$.

Nesse exemplo foi rapidamente encontrado um recobrimento aberto que não admite sub-recobrimento finito; em outros casos,

entretanto, quando houver um número infinito de recobrimentos abertos, pode tornar-se muito difícil assegurar a compacidade. Porém nos casos de maior utilização há um teorema (Heine-Borel [3]p51, [1]p15) muito prático: se Y é um subconjunto de \mathbb{R}^n , ele é compacto se e somente se for fechado e *limitado* ("bounded"). A condição de ser fechado é conhecida: seu complemento deve ser um aberto da topologia usual de \mathbb{R}^n . Já ser limitado é uma condição que acompanha a nossa intuição em termos de comprimento, área ou volume finitos.

Finalmente como exemplos temos que \mathbb{R} é não compacto, um intervalo do tipo $[a, b]$ em \mathbb{R} é compacto, a esfera S^n no \mathbb{R}^{n+1} com a topologia usual é compacta ([3]p51, 49).

1.3.6 HOMEOMORFISMOS

A noção de igualdade em topologia baseia-se no conceito de homeomorfismo, que é a "igualdade topológica". O conceito de homeomorfismo está para os espaços topológicos assim como o conceito de isomorfismo está para os grupos ([7]p60). Matematicamente, um *homeomorfismo* é uma aplicação f bijetiva (isto é, simultaneamente injetiva e sobrejetiva) e bicontinua (isto é, f e f^{-1} são contínuas) ([3]p53). Portanto, 2 espaços topológicos X_1 e X_2 são ditos *homeomorfos* se há uma aplicação $f: X_1 \rightarrow X_2$ contínua e com inversa f^{-1} também contínua. Esta propriedade permite que sejam deformados continuamente um no outro - ver na figura 1.3 espaços homeomorfos.

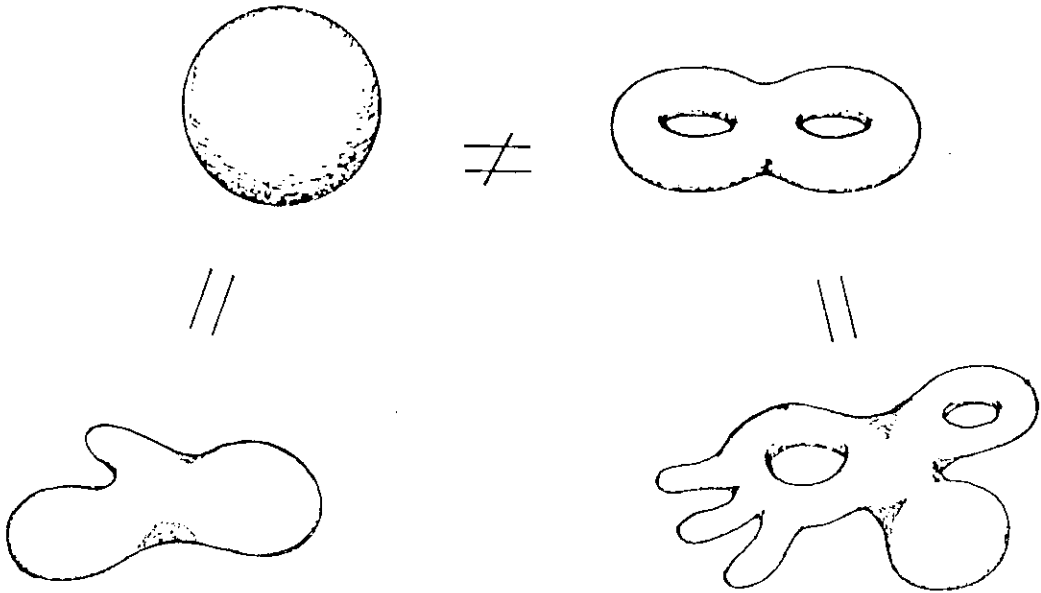


Figura 1.3 As duas superfícies da esquerda são topologicamente indistinguíveis, assim como as duas da direita ([8]p29).

Podemos associar o homeomorfismo a uma "elasticidade" do espaço topológico; um espaço topológico pode ser esticado ou encolhido sem que sua topologia se altere. Por exemplo, uma bola de futebol (sua superfície) é homeomorfa à superfície de um ovo, pois se fossem elásticas poderiam ser deformadas continuamente uma na outra. Note-se que, sob um homeomorfismo, pontos infinitamente próximos permanecem infinitamente próximos, e pontos finitamente separados permanecem finitamente separados. Tudo isto pode ser construído sem uma conceituação precisa (quantitativa) de distância, que não está até agora definida nos espaços topológicos. Os conceitos topológicos definidos até agora são mais

primitivos que os de distância e métrica, que só veremos no capítulo 2.

1.3.7 INVARIANTES TOPOLÓGICOS

Em consequência da definição de homeomorfismo, surge a questão do que poderia caracterizar uma classe de espaços homeomorfos. Isso nos conduz à pesquisa dos *invariantes topológicos* de um espaço topológico.

Entre outros, são invariantes topológicos as propriedades de conexidade, compacidade, e separabilidade (Zausdorff) ([1]p18).

A moderna geometria diferencial utiliza do conceito de "simplexes", para estudar, por exemplo, os poliedros. Constroem-se os poliedros através dos simplexes. O ponto é um 0-simplex, um segmento de reta é um 1-simplex, um triângulo é um 2-simplex. São portanto unidades construtoras de figuras geométricas. Este tipo de construção possibilitará uma maior facilidade na determinação de propriedades topológicas. Não é presentemente nosso objetivo o estudo dos simplexes, mas sabemos que é fundamental a possibilidade de partição de figuras geométricas complicadas, ou mesmo de espaços, em estruturas mais simples ([1]p66). Devemos lembrar que foi também através da equivalência de determinados espaços com os polígonos e os poliedros que os matemáticos do século passado estudaram e resolveram a classificação das topologias bidimensionais, isto é de superfícies, de que veremos alguns exemplos a seguir.

Pode-se empregar um poliedro K , homeomorfo a um espaço topológico bidimensional X , para avaliar um importante invariante topológico chamado *característica de Euler* ou número de Euler χ ([3]p56):

$$\begin{aligned}\chi(X) = & (\text{n.º de vértices em } K) \\ & -(\text{n.º de arestas em } K) \\ & +(\text{n.º de faces em } K).\end{aligned}$$

A razão desta equivalência entre K e X reside no fato de que podemos através ^{de} transformações suaves, geralmente "amassando" os vértices do poliedro e "torneando" as arestas, fazê-lo ir se transformando (por homeomorfismos) em X .

Outro invariante topológico é o *gênero* ou "genus" de uma superfície, que está relacionado com sua característica de Euler. Podemos definir o genus (g) a partir do estabelecimento $g=0$ para a superfície esférica (S^2); teremos $g=1$ se "aplicarmos" uma alça à esfera, ou seja, abrirmos 2 pequenos buracos na esfera e colarmos suavemente através ^{de} suas extremidades um tubo nos buracos abertos (ver figura). A característica de Euler do toro assim formado é zero (era +2 na esfera). Cada nova alça aplicada na esfera aumenta em uma unidade o genus e diminui em duas unidades a característica de Euler. Poderemos obter outras topologias bidimensionais desta forma. Por exemplo, se aplicarmos duas alças à esfera teremos o toro com dois buracos ([9]p65); ele tem $g=2$ e $\chi=-2$.

A idéia desenvolvida acima pode ser utilizada para definir o que se chama *soma conexa* entre duas superfícies X e Y , representada por $X \# Y$. Ela é obtida pela remoção de pequenos discos em X e Y e subsequente conexão através ^{de} um cilindro (uma S^2 com dois buracos é igual a um cilindro, que tem $\chi=0$ e $g=0$, e duas bordas como contorno). Concluiremos com o seguinte resultado bastante intuitivo (os interessados poderão consultar a referência ([3]p58): $S^2 \# X = X$.

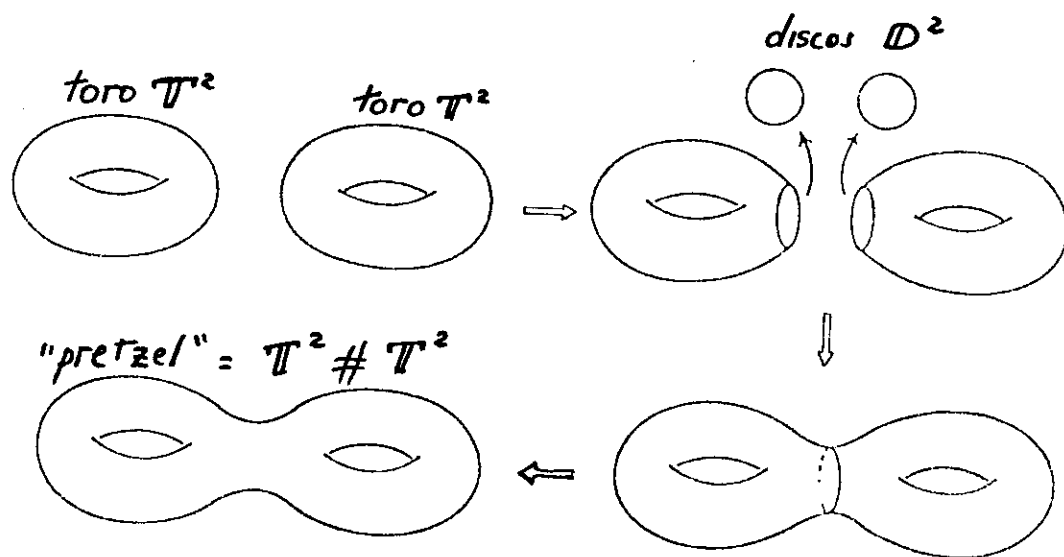


Figura 1.4 Como converter dois toros T^2 em um "pretzel" ([8]p73).

Para as superfícies orientáveis (veremos mais adiante o

conceito de orientabilidade), temos a relação $\chi = 2 - 2g - b$, onde $b = n^\circ$ de bordas ou fronteiras, e para as não orientáveis, $\chi = 2 - g - b$. É fácil constatar que também o número b é um invariante topológico.

1.4 VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

1.4.1. VARIEDADE, CARTAS E ATLAS

Uma variedade topológica é um espaço topológico hausdorffiano tal que todo ponto tem uma vizinhança *homeomorfa* ao \mathbb{R}^n ([1]p111); n é a dimensão da variedade. Em outras palavras, um conjunto de pontos M é uma *variedade* se cada ponto de M tem uma vizinhança que é continuamente e 1-1 mapeada em um conjunto aberto de \mathbb{R}^n - para detalhes sobre a propriedade hausdorffiana em variedades ver ([4]p49).

Como alguns exemplos de variedades, temos os \mathbb{R}^n e as *esferas* n -dimensionais S^n , estas definidas pelas equações ([10]p219)

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = c^2, \quad c = \text{const.}$$

Então, é usual chamar de S^1 a circunferência, de S^2 a

conhecida superfície esférica, e de S^3 a esfera tridimensional ou triesfera, que estudaremos em detalhes no capítulo 4. Mais por curiosidade ou por generalização do conceito, designa-se por esfera S^0 de raio c o par de pontos separados pela distância πc .

Dentre os espaços que não são variedades encontramos os exemplos da figura 1.5, onde a condição de que fossem localmente equivalentes ao \mathbb{R}^1 foi violada na junção. Pode-se imaginar facilmente análogos em número maior de dimensões.



Figura 1.5 Espaços unidimensionais que não são variedades ([10]p219).

A definição de variedade dada há pouco não permite que um círculo "fechado", isto é, com sua fronteira, seja uma variedade. Mas há autores que consideram este caso também uma variedade, chamada *variedade com fronteira* ([11]p12, [12]p431). É usual se designar por ∂M a fronteira de uma variedade M ([4]p49; nesta referência podem ser encontrados mais detalhes sobre o assunto). Trataremos geralmente de variedades sem fronteira, ou seja aquelas com $\partial M = \emptyset$; quando a variedade tiver fronteiras, o diremos explicitamente.

Tomando-se o cuidado de observar primeiro o que cada autor está chamando de variedade, prosseguiremos definindo *carta*, *atlas*, e *coordenadas locais*.

Uma *carta* (U_i, f_i) de uma variedade (topológica) M é um aberto U_i de M , chamado domínio da carta, com um homeomorfismo (aplicação 1-1 e sobrejetiva, também chamada bijeção [1]p3) $f_i: U_i \rightarrow V_i$ de U_i para ("onto") um aberto V_i de \mathbb{R}^n ([1]p111). $\{U_i\}$ é uma família de abertos que cobre M ([3]p133), ou seja $\bigcup_i U_i = M$. A família toda de cartas $\{U_i\}$ denomina-se *atlas* da variedade. Veja-se a seguir 2 cartas de uma variedade M .

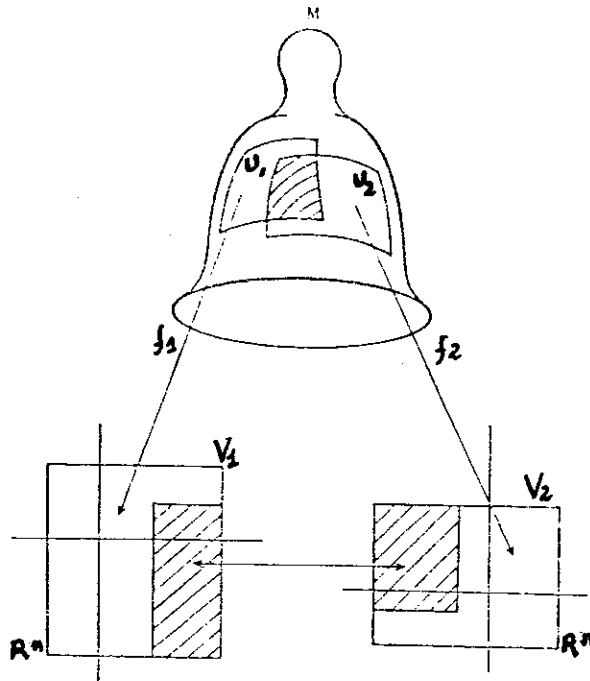


Figura 1.6 Duas cartas (U_1, f_1) e (U_2, f_2) de M no \mathbb{R}^n ([13]p10).

Para definirmos as *coordenadas locais* de um ponto observamos que se uma aplicação f - para simplificarmos estamos suprimindo o índice "i" chamando f_i de f bem como U_i de U - leva um aberto da variedade em um aberto de \mathbb{R}^n , então um ponto P da variedade é levado através \checkmark f em $f(P)$, que é seu correspondente no \mathbb{R}^n - ver figura 1.7. Estamos interessados em caracterizar de uma maneira unívoca o ponto P ; como cada ponto tem uma imagem através \checkmark uma carta no \mathbb{R}^n , então identificando a imagem de P no \mathbb{R}^n teremos também a identificação das imagens dos pontos vizinhos.

Poderemos então definir como *coordenadas de P na carta (U, f)* (coordenadas locais de P) aquelas *coordenadas* (x^1, x^2, \dots, x^n) da imagem de P em \mathbb{R}^n . A carta (U, f) é também chamada de *sistema de coordenadas locais* ([1]p111).

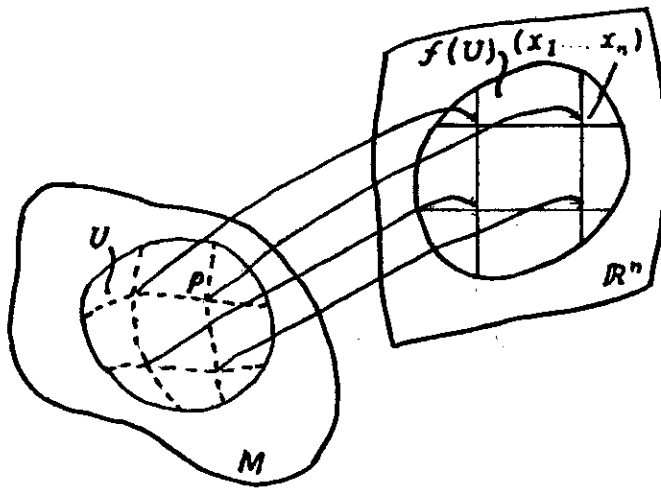


Figura 1.7 Uma região U da variedade M é aplicada 1-1 na região $f(U)$ do \mathbb{R}^n . Esta aplicação associa ao ponto P a n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) . Então U adquire um sistema de coordenadas ([14]p24).

1.4.2 VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

Para definirmos uma variedade diferenciável devemos estudar o comportamento da vizinhança de um ponto P da variedade ao ser aplicado em \mathbb{R}^n . Para tanto, sejam um ponto P e duas cartas U e V tais que $P \in U \cap V$.

Chamemos de f a função que mapeia a região U em \mathbb{R}^n e g a que mapeia a região V em \mathbb{R}^n . Com estas aplicações definimos sistemas de coordenadas, com f o sistema x^i e com g o sistema y^i . Teremos portanto duas cartas, (U, f) e (V, g) , para o ponto P - figura 1.8. Se f^{-1} é a inversa de f , a aplicação gf^{-1} (primeiro atua f^{-1} e depois g) leva \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , relacionando x^i com y^i .

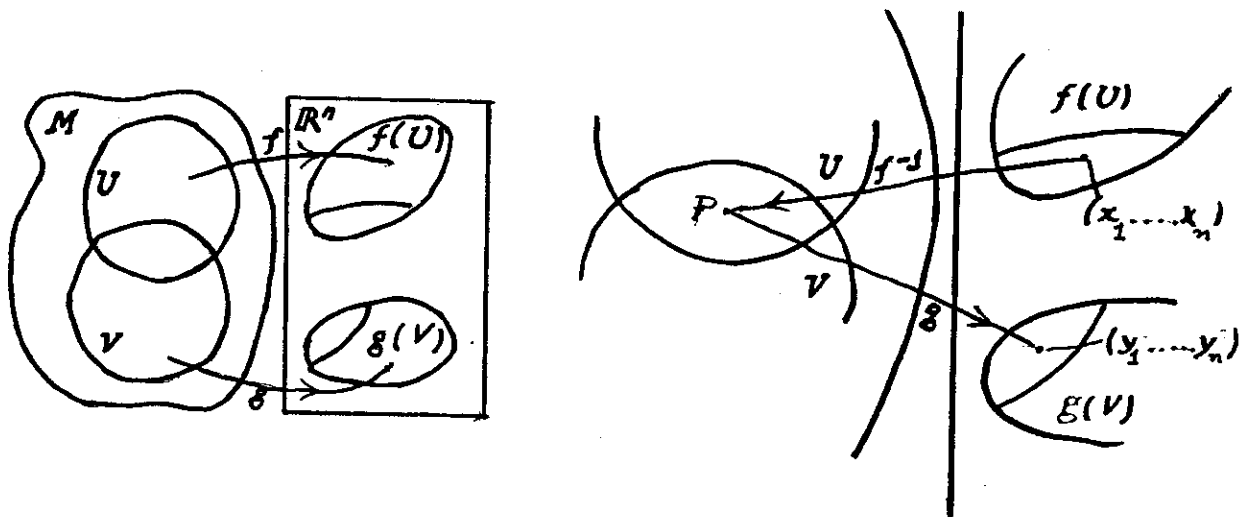


Figura 1.8 No lado esquerdo vemos as vizinhanças U e V - que se interceptam - aplicadas no \mathbb{R}^n ; e no lado direito uma ampliação da aplicação gf^{-1} ([14]p25).

Se as funções

$$\begin{aligned}x^i &= x^i(y^k), \\y^j &= y^j(x^i)\end{aligned}$$

são diferenciáveis de grau r (isto é, são C^r), então o par de cartas em questão é dito C^r -compatível ([15]p99).

Um atlas é dito *compatível* com um dado atlas C^r quando a união dos dois é também um atlas C^r para toda a variedade. O atlas que consiste de todos os atlas compatíveis com um dado atlas é chamado *atlas completo* da variedade ([11]p12).

Observe que definimos três conceitos diferentes: espaço topológico, variedade topológica, e variedade diferenciável. Relembremos que a condição relacionada com a topologia é a escolha dos abertos, e que a condição de variedade é que localmente se assemelhe ao \mathbb{R}^n ([10]p219). Já a diferenciabilidade é mais restritiva, pois o espaço deve ser *suave* ("smooth"), suavidade essa medida pelo grau r . Por exemplo, o conjunto de pontos no \mathbb{R}^3 definido por $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (o cone duplo) é uma variedade? Não é, porque a origem não tem uma vizinhança homeomorfa ao \mathbb{R}^2 (ver figura 1.9); no entanto sua metade, o meio-cone $x \geq 0$, é uma variedade do tipo C^0 , homeomorfa ao \mathbb{R}^2 .

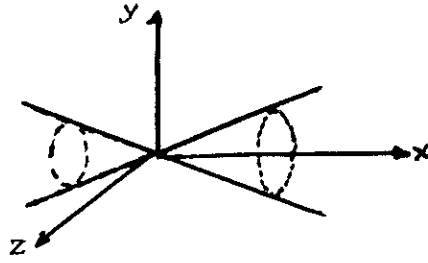


Figura 1.9 O cone duplo com a topologia induzida pelo \mathbb{R}^3 não é uma variedade ([1]p112).

Um *difeomorfismo* é uma aplicação entre duas variedades diferenciáveis, 1-1 e C^∞ , com inverso também C^∞ . As variedades que têm essa propriedade são ditas difeomórficas. Por exemplo, a esfera S^2 e a superfície de um charuto - ver a figura 1.10 - são difeomórficas ([14]p29). Observe-se que também se chama de difeomorfismo uma transformação (diferenciável) geral de coordenadas da variedade nela própria; isto é, uma aplicação interna que obedece as regras acima definidas.

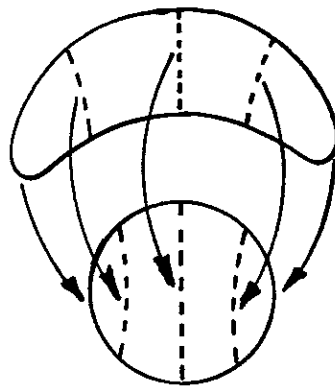


Figura 1.10 Uma aplicação suave (C^∞) entre duas superfícies.

1.4.3 ORIENTABILIDADE

1.4.3.1 BILATERALIDADE

A orientabilidade, ou não, de uma variedade é mais um invariante topológico (invariante sob transformações homeomorfas da variedade). No caso de variedades bidimensionais (superfícies) a questão da orientabilidade é frequentemente confundida com a questão da bilateralidade ("two-sidedness"), mormente em textos antigos ([16]p302). Ocorre que a orientabilidade ou não de uma superfície é uma propriedade intrínseca da superfície; já a sua bilateralidade ou unilateralidade depende não apenas da superfície, mas também da variedade em que ela seja suposta imersa e ainda da maneira como está feita essa imersão ([9]p195). Portanto a bilateralidade não é um invariante topológico.

O motivo da mistura dos conceitos orientabilidade e bilateralidade decorre do fato de que, quando imersa no \mathbb{R}^3 , toda superfície orientável apresenta 2 lados e toda superfície não-orientável apresenta-se unilateral. Em termos bem terra-a-terra, uma superfície de qualquer tipo (orientável ou não, com ou sem fronteira) se apresenta bilateral quando puder ser "pintada de branco de um lado e de preto do outro"; note-se que para pintar a superfície é necessário apelar para uma dimensão extra, o que traz à baila a questão da imersão.

Assim, superfícies orientáveis tais como a esfera S^2 , o toro

T^2 , o disco D^2 ou bola B^2 e o cilindro, apresentam-se com duas faces no cotidiano (interior/exterior, cara/coroa, lado A/lado B); já superfícies não-orientáveis, como a faixa ou fita de Möbius, apresenta apenas uma face nas mesmas condições: está fadado ao fracasso, se tentado no R^3 , o projeto de pintar de branco "um lado" da faixa e de preto "o outro lado".

Não é nossa intenção nos alongarmos sobre a questão uni/bilateralidade de variedades bidimensionais. Sugerindo ao leitor interessado a referência ([9]p196), apenas informamos que em uma trivariiedade não-orientável podemos nos deparar com toros T^2 (sempre orientáveis) que têm só uma face, bem como com garrafas de Klein (sempre não-orientáveis) com duas faces.

1.4.3.2 ORIENTABILIDADE

Um espaço topológico pode ser orientável ou não. Numa fita de Möbius ([9]p30), que é *não-orientável*, uma orientação de esquerda e direita - que são orientações que podem ser feitas localmente na própria superfície- não pode ser definida globalmente, conforme veremos a seguir. Um "ser" hipotético que só "viva" no mundo bidimensional da fita (ver a figura 1.11), se marcar uma direção que chame *adiante* e outra, ortogonal, que chame de *direita* (a oposta ele chamará de *esquerda*), e caminhe sempre em frente até dar uma volta completa na fita, ao retornar ao local de partida verá que o que chamou de seu lado "direito" virou "esquerdo" e vice-versa; sua orientação inicial terá se transformado na oposta.

Já sobre uma superfície esférica S^2 podemos adotar o mesmo procedimento, mas sempre que retornarmos ao ponto de partida veremos que os lados que chamamos de direito e de esquerdo continuarão sendo de direito e esquerdo, respectivamente. Isto porque a superfície esférica é orientável.

É fácil perceber que toda superfície, orientável ou não, é *localmente* orientável. Mesmo na fita de Möbius, que já sabemos ser não orientável, sempre poderemos orientar consistentemente uma região suficientemente restrita. Um "ser" que nunca abandone essa região da fita dirá que realmente há um lado esquerdo e um lado direito.

Vamos agora, ainda considerando apenas variedades bidimensionais, preparar o caminho para a investigação da orientabilidade de uma variedade n -dimensional. Para tanto sejam, em uma superfície, 2 pares de eixos ortogonais orientados consistentemente, o sistema I com eixos (\hat{x}^1, \hat{x}^2) e o sistema I' com eixos (\hat{x}'^1, \hat{x}'^2) . Mantendo fixo o sistema I, transportamos o sistema I' ao longo de algum caminho fechado na superfície; nesse transporte os eixos de I' não podem em momento algum abandonar a superfície. Ao retornar I' à posição de partida, comparamos sua orientação final com a do sistema I; nesse momento, para facilitar a comparação, é permitida uma rotação de I' no plano tangente à superfície. É fácil perceber que numa superfície orientável, como uma esfera S^2 , a orientação final de I' será a mesma que a de I, qualquer que tenha sido o caminho percorrido. Em contrapartida, se

I' percorrer uma volta em uma fita de Möbius então sua orientação final será oposta à de I ; convém porém notar que se I' der duas voltas, ou outro número par, então retornará com orientação igual à de I - ver a figura 1.11.

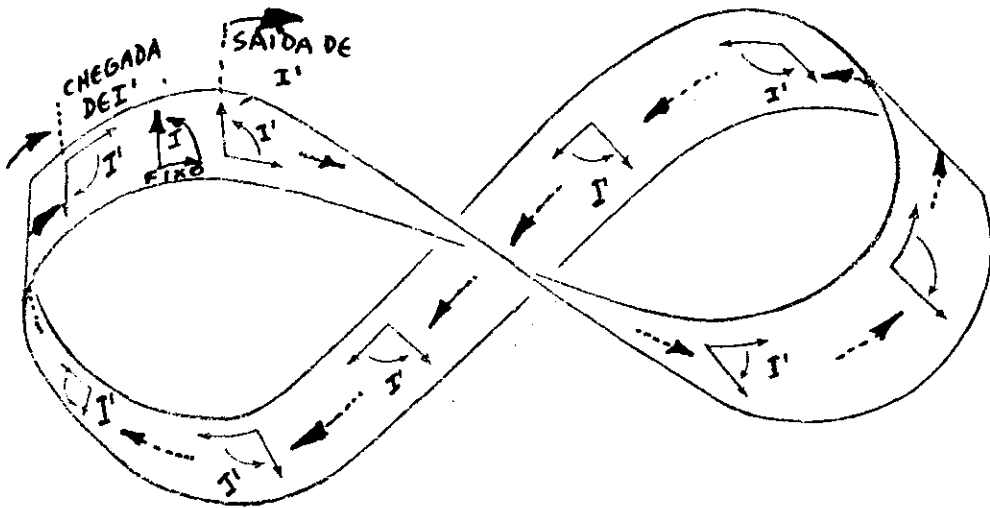


Figura 1.11 Acompanhamos o transporte do sistema I' na fita de Möbius; o sistema I' muda sua orientação original porque a fita é não orientável.

Disso tudo podemos inferir a seguinte conclusão: uma superfície é não-orientável quando admitir caminho fechado que mude a orientação de I' , e é orientável quando não admitir.

Vamos agora trasladar esta conclusão para o contexto da

geometria diferencial, ainda como preparação para uma definição de orientabilidade de uma variedade n-dimensional.

Suponhamos dado um atlas da superfície. Partindo dele, sempre é possível elaborar um novo atlas no qual a interseção entre quaisquer duas cartas contíguas seja conexa. Sejam $\{x^1, x^2\}$ as coordenadas de uma carta do novo atlas, e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ os correspondentes vetores da base natural local.

Considere-se uma carta contígua com coordenadas $\{x'^1, x'^2\}$ e vetores base natural $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Na região de interseção dessas duas cartas podemos comparar a orientação relativa entre as duas bases vetoriais. Caso não coincidam, invertemos o sinal da coordenada x'^2 , o que ocasiona a inversão do vetor base natural \vec{e}'_2 ; agora as duas cartas estão orientadas consistentemente. Prosseguimos buscando orientar cada carta de acordo com as anteriores. Se for possível construir um atlas no qual todas as cartas tenham a mesma orientação, diremos que a superfície é orientável. Se não for possível, a superfície é não-orientável.

Todo esse procedimento reflete a tentativa de transportar sem inversão um par de eixos orientados ao longo de caminhos fechados na superfície, a fim de comparar as orientações final e inicial e decidir sobre sua orientabilidade.

É bastante simples, analiticamente, averiguar se duas bases vetoriais naturais $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ definidas em cartas contíguas têm orientação igual; basta avaliar o jacobiano $J=$

$\det(\partial x^i / \partial x^{j'})$ da transformação $x^i = x^i(x^{j'})$: se $J > 0$ então as orientações coincidem e se $J < 0$ então elas são opostas.

Este processo feito para variedades bidimensionais pode ser generalizado para uma variedade n-dimensional, da forma que veremos a seguir.

Sejam em uma variedade M as cartas U_α e U_β que definem os sistemas de coordenadas $\{x^i\}$ e $\{x^{j'}\}$ respectivamente; M é dita orientável se há um atlas

$$\left\{ U_\alpha, \phi_\alpha \right\}$$

tal que em toda intersecção não vazia $U_\alpha \cap U_\beta$ o jacobiano da transformação $J = \det(\partial x^i / \partial x^{j'})$ é positivo. Caso contrário, é não orientável.

Note-se que no caso da fita de Möbius, ao fazermos um atlas da variedade haverá ao menos uma inversão do sinal do jacobiano. Mas se fizermos apenas algumas cartas com intersecção não vazia poderemos não observar a inversão de sinal, o que não contraria a definição acima na medida em que é necessário compor todo um atlas da variedade. Finalmente, uma observação trivial é que uma variedade cujo atlas é composto de uma única carta é naturalmente orientável.



1.5 GRUPOS

1.5.1 DEFINIÇÕES GERAIS

Um *grupo* é um conjunto G , dotado de uma operação interna $G \times G \rightarrow G$, que associa ao par (x, y) um elemento xy , tal que

i- a operação é *associativa*: $(xy)z = x(yz) \forall x, y, z \in G$;

ii- há um elemento $e \in G$ (chamado *identidade*) tal que $xe = ex = x \forall x \in G$;

iii- para cada $x \in G$ há um elemento de G (chamado *inverso* de x e escrito x^{-1}) tal que $x^{-1}x = x x^{-1} = e$ ([1]p7).

A operação de grupo é geralmente chamada *multiplicação*. Se $xy = yx$ para todo $x, y \in G$, o grupo é chamado *comutativo* ou *abeliano*.

Um subconjunto A de G é um *subgrupo* de G se $xy \in A$ e $x^{-1} \in A$ para cada $x \in A, y \in A$; decorre dessa definição que todo grupo é subgrupo de si próprio.

Grupo de Lie é aquele cuja estrutura é compatível com a de uma variedade diferenciável; isto é, ele é tal que a operação $G \times G \rightarrow G$ segundo $(x, y) \rightarrow x y^{-1}$ é uma aplicação diferenciável ([1]p116).

1.5.2 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA EM GRUPOS

Vimos na seção 1.2 relações e relações de equivalência em teoria de conjuntos; agora aplicaremos aqueles conceitos em teoria de grupos, particularmente a grupos de Lie.

Seja G um grupo, $a \in G$, e H um subgrupo de G ; então $H' = \{aha^{-1}; h \in H\}$ também é um subgrupo de G , chamado *subgrupo conjugado* a H ([17]p20, 21, 22). Dois subgrupos conjugados têm a propriedade de ou serem idênticos ou só terem a identidade do grupo como elemento comum. Subgrupo *invariante* ou *normal* H de G é aquele que é igual a todos os seus conjugados. Todo grupo tem pelo menos dois subgrupos invariantes, denominados *triviais* ([17]p21): $\{e\}$, o subgrupo constituído pelo elemento identidade sozinho, e o próprio grupo. É fácil perceber que todo subgrupo de grupo comutativo é invariante.

Introduzamos uma relação de equivalência em G do seguinte tipo: $g \sim g'$ se existe $h \in H$ tal que $g' = gh$; cada classe de equivalência é então $[g] = \{gh \mid h \in H\}$, denotada gH e chamada *classe lateral* ("coset") à esquerda de H . Essas classes laterais satisfazem $gH \cap g'H = \emptyset$ ou então $gH = g'H$; isto é, elas ou são disjuntas ou são iguais. O espaço quociente obtido através dessa relação de equivalência é referido como G/H . Em geral não é um grupo, só o sendo quando H for um subgrupo invariante. Se $ghg^{-1} \in H \forall g \in G$ e $h \in H$, então G/H é o *grupo quociente*, cuja operação de grupo é $(gH).(g'H) = (gg')H$.

A idéia importante da *fatoração* de um grupo vem dos conceitos acima definidos. Se um grupo tem subgrupos invariantes não triviais, ele poderá ser simplificado, ou fatorado, conforme veremos no exemplo a seguir.

Um grupo cíclico C_n (de ordem $|C_n| = n$, o número de elementos do grupo) ([17]p13) é um grupo cuja estrutura geral é $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}; a^n = e\}$. Por exemplo, o grupo C_3 pode ser representado por $\{1, \exp(2i\pi/3), \exp(-2i\pi/3)\}$ com a lei usual de multiplicação de complexos, onde lembremos que $[\exp(2i\pi/3)]^2 = \exp(4i\pi/3) = \exp(-2i\pi/3)$. Vejamos então o grupo cíclico $C_4 = \{e = a^4, a, a^2, a^3\}$, que tem a tábua de multiplicação abaixo.

e	a	a ²	a ³
a	a ²	a ³	e
a ²	a ³	e	a
a ³	e	a	a ²

Figura 1.12 Tábua de multiplicação do grupo C_4 ([17]p.13)

Observa-se que essa tábua de multiplicação pode ser obtida através de permutações cíclicas dos elementos do grupo, daí a denominação. Pela simetria da tábua com respeito à diagonal principal, percebemos que C_4 é comutativo. Notamos ainda que o conjunto $\{e, a^2\}$ constitui um subgrupo, que denotamos H. Como C_4 é comutativo,

H é invariante. Vamos construir o grupo quociente G/H : sua ordem é dois, pois $|G/H| = |G|/|H| = 4/2 = 2$. O elemento identidade de G/H é o próprio H, ou seja, o conjunto $\{e, a^2\}$. O outro elemento de G/H é a classe lateral $M = a\{e, a^2\} = \{a, a^3\}$. Em resumo, $G/H = \{H, M\} = \{\{e, a^2\}, \{a, a^3\}\}$.

Em razão da possibilidade de fatoração de um grupo, define-se como *simples* o grupo isento de subgrupo invariante não trivial; ele não pode ser fatorado.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS, MÉTRICA, E AÇÃO DE GRUPOS EM VARIEDADES

2.1 INTRODUÇÃO

Os objetivos principais deste capítulo são uma familiarização com a noção de *estrutura riemanniana* (ou métrica riemanniana) de uma variedade e com a de *ação de grupos sobre as variedades*.

Serão necessários alguns conceitos prévios. Usaremos frequentemente os espaços vetoriais, e na linguagem da geometria diferencial estaremos nos utilizando do cálculo sobre variedades diferenciáveis. Este instrumental matemático nos possibilitará definir o conceito de *métrica*.

Relembraremos na primeira parte deste capítulo conceitos básicos referentes aos espaços vetoriais. Em seguida iremos tratar os vetores com as ferramentas da geometria diferencial, onde são associados com derivações, ou gradientes de funções; por esta razão é necessária uma alusão ao que se chama *cálculo sobre as variedades diferenciáveis*, que está bastante detalhado nas referências [4] e [3].

Finalizaremos o capítulo com o que se chama a *ação de grupos sobre variedades*, que será parte de fundamental importância no estudo da classificação topológica das triviedades.

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS

2.2.1 CORPO E ESPAÇO VETORIAL

Um conjunto de elementos a_0, a_1, \dots com as operações ([2]p3)

i- + chamada adição

ii- . chamada multiplicação escalar

constitue um *corpo comutativo* K ("field"), se os postulados A e B abaixo se verificam.

Postulado A

K é grupo abeliano (comutativo) sob a operação de adição, com identidade e inversos a_0 e $-a_1$, respectivamente.

Postulado B

O conjunto $K - \{a_0\}$ é grupo comutativo sob a operação de multiplicação escalar, com identidade e inversos a_1 e a_1^{-1} , respectivamente; devem ainda ser satisfeitas as leis distributivas

$$a_i \cdot (a_j + a_k) = (a_j + a_k) \cdot a_i = a_i \cdot a_j + a_i \cdot a_k.$$

Em física são usados com frequência o corpo dos reais \mathbb{R} e o

corpo dos complexos \mathbb{C} . Em ambos casos $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$.

Um *espaço vetorial* V consiste de ([2]p5) uma coleção de elementos $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ chamados *vetores*, passíveis de dois tipos de operação: adição vetorial $+$, e multiplicação \cdot por escalar de um corpo K . Devem ainda obedecer os postulados A e B abaixo:

Postulado A : $(V, +)$ é um grupo comutativo, com identidade e inversos $\vec{v}_0 = \vec{0}$ e $-\vec{v}_1$, respectivamente;

Postulado B :

- | | |
|--|-----------------|
| 1- $a_i \in K, \vec{v}_j \in V \rightarrow a_i \vec{v}_j \in V$ | fechamento |
| 2- $a_i \cdot (a_j \cdot \vec{v}_k) = (a_i \cdot a_j) \cdot \vec{v}_k$ | associatividade |
| 3- $1 \cdot \vec{v}_i = \vec{v}_i$ | identidade |
| 4- $a_i \cdot (\vec{v}_k + \vec{v}_1) = a_i \cdot \vec{v}_k + a_i \cdot \vec{v}_1$ | bilinearidade |
| $(a_i + a_j) \cdot \vec{v}_k = a_i \cdot \vec{v}_k + a_j \cdot \vec{v}_k$ | ([2]p5). |

Note-se que um corpo é um caso particular de espaço vetorial, em que os vetores \vec{v}_i são os próprios elementos a_i do corpo.

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são *linearmente independentes* (l.i.) se

$$\sum a^\Lambda \vec{v}_\Lambda = 0 \Rightarrow a^\Lambda = 0, \quad \Lambda = 1, 2, \dots, n.$$

Um espaço vetorial é n -dimensional se for possível encontrar um conjunto de n vetores l.i. não nulos $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ e todo

conjunto de $n+1$ vetores não nulos for *linearmente dependente* (l.d.).

Qualquer conjunto máximo de vetores l. i. constitui uma *base* do espaço vetorial. Poderemos escrever então qualquer vetor desse espaço em função dos vetores da base.

Observamos finalmente que trataremos apenas de espaços vetoriais com dimensão finita.

2.2.2 APLICAÇÕES LINEARES

Definiremos algumas propriedades das aplicações dos espaços vetoriais.

Seja um espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo K ([3]p43), representado por $V(n,K)$ (ou simplesmente V se não há dúvida sobre o corpo e a dimensão), e uma base $\{\vec{e}_A\}$ deste mesmo espaço. Portanto, qualquer vetor $\vec{v} \in V$ pode ser escrito como $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + \dots + v^n \vec{e}_n$; os números v^A são chamados *componentes* do vetor \vec{v} na base $\{\vec{e}_A\}$.

Uma aplicação $f: V \rightarrow W$ entre os espaços vetoriais $V(n_V, K_V)$ e $W(n_W, K_W)$ é linear se satisfaz $f(a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2) = a_1 f(\vec{v}_1) + a_2 f(\vec{v}_2)$ para quaisquer a_1 e $a_2 \in K$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. No que segue vamos nos restringir aos casos $K_V = K_W = K$. Chama-se *imagem* de f ($\text{im } f$) o subconjunto $f(V) \subset W$ e chama-se *núcleo* de f ("kernel", $\text{ker } f$) o subconjunto $\{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Percebe-se facilmente

que tanto $\text{im } f$ como $\text{ker } f$ são também espaços vetoriais, e mostra-se que $\dim(\text{im } f) + \dim(\text{ker } f) = n_v$ ([3]p44).

Notando-se que um corpo K é um particular espaço vetorial $V(n, K)$ em que os vetores $\vec{v}_i \in V$ se confundem com os elementos $a_i \in K$, podemos considerar uma aplicação $f: V(n, K) \rightarrow K$; tal aplicação se denomina *função linear* ([3]p43). Um exemplo simples de função linear é a que associa a cada vetor \vec{v} sua componente v^1 numa base fixa escolhida.

Toda aplicação linear $f: V \rightarrow W$ é um homomorfismo. Se f for um isomorfismo então os espaços V e W têm mesma dimensão; é fácil perceber que $V(n, K)$ é isomorfo ao espaço vetorial $K^n = K \times K \times \dots \times K$ (n vezes). Cada isomorfismo do $V(n, K)$ é um elemento do grupo matricial $GL(n, K)$.

2.2.3 ESPAÇO DUAL E PRODUTO INTERIOR

Seja $\{\vec{e}_A\}$ uma base sobre V ; um vetor $\vec{v} \in V$ pode ser descrito como uma combinação dos elementos da base. Sendo f uma função linear, poderemos escrever $f(\vec{v}) = v^1 f(\vec{e}_1) + v^2 f(\vec{e}_2) + \dots + v^n f(\vec{e}_n)$. Caso conheçamos $f(\vec{e}_A) \forall \vec{e}_A$ saberemos o resultado da operação f sobre qualquer vetor. O conjunto das funções lineares (ou formas lineares [18]p308, ou funcionais lineares caso V seja um espaço de funções [1]p10) constitui também um espaço com as propriedades de espaço vetorial, pois se $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$, onde a_1 e $a_2 \in K$, teremos $f(\vec{v}) = (a_1 f_1 + a_2 f_2)(\vec{v}) = a_1 f_1(\vec{v}) + a_2 f_2(\vec{v})$. Este espaço linear tem o nome especial de

espaço vetorial dual (ou dual algébrico [1]p10) de $V(n,K)$ e se escreve $V^*(n,K)$ ou V^* , sendo que $\dim(V^*) = \dim(V)$ (se $\dim(V)$ é finita).

Já que têm mesma dimensão e estão definidos no mesmo corpo, V e V^* são então isomorfos; contudo, não há um isomorfismo natural canônico) entre esses dois espaços ([1]p134). Mas dada uma base $\{\vec{e}_A\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ em V , podemos formalmente construir uma base em V^* , chamada de base dual de $\{\vec{e}_A\}$, da seguinte maneira. Sejam v^A as componentes de um vetor $\vec{v} \in V$ na base $\{\vec{e}_A\}$, logo $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + \dots + v^n \vec{e}_n$; os "n" números v^A são "n" formas lineares definidas sobre V , porque podemos definir formas e^{*A} através de

$$e^{*A}(\vec{v}) = v^A;$$

então teremos

$$e^{*A}(v^B \vec{e}_B) = v^A \Rightarrow v^B e^{*A}(\vec{e}_B) = v^A \Rightarrow e^{*A}(\vec{e}_B) = \delta_B^A.$$

Os (e^{*A}) assim construídos formam a base dual no espaço V^* ([1]p134). Qualquer função linear f (vetor dual) é expandida na base dual como $f = f_A e^{*A}$. A ação de f em \vec{v} é interpretada como produto interior ("inner product" [3]p45 ou "interior product" [1]p198), entre um vetor linha e um vetor coluna,

$$f(\vec{v}) = (f_A e^{*A})(v^B \vec{e}_B) = f_A v^B e^{*A} \vec{e}_B = f_A v^B \delta_B^A = f_A v^A,$$

também denotado por $\langle f, \vec{v} \rangle : V^* \times V \rightarrow K$.

Como exemplo, vejamos:

Dados no \mathbb{R}^3 uma base $\{\vec{e}_\Lambda\}$ e três vetores l.i.

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 1), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, -2), \quad \vec{a}_3 = (-1, -1, 0),$$

podemos ter uma função linear f tal que o produto interior com os três vetores seja

$$f(\vec{a}_1) = 1, \quad f(\vec{a}_2) = -1, \quad f(\vec{a}_3) = 3.$$

Com estes dados é possível calcular sem dificuldade quanto vale $f(\vec{a}) \forall \vec{a} \in V$ ([19]p103); a função linear f escrita na base dual $\{e^{\Lambda*}\}$ será $f = -2e^{1*} + 5e^{2*} + 3e^{3*}$. Qualquer outra função linear poderá ser escrita nesta base e será possível dizer qual seu valor ao ser aplicada em outros vetores.

Até agora observamos que se escolhemos uma função linear f , teremos para cada vetor de V um número (isto é, um elemento do corpo K); ao escolhermos outra função linear, g por exemplo, teremos outros números associados aos vetores de V . Veremos na próxima seção que é possível fazer corresponder a cada vetor de V uma única função linear, logo um único elemento do corpo; para isto, usaremos do fato que V e V^* são isomorfos.

2.2.4 PRODUTO INTERIOR EM UM ESPAÇO

Sejam o espaço vetorial V e seu dual V^* ; referimos os vetores $\vec{v} \in V$ a uma base $\{\vec{e}_A\}$, e os funcionais lineares $f \in V^*$ a base dual $\{e^{A*}\}$. Na verdade convém passar a designar esses funcionais como v^* , o que nos permite escrever de forma simétrica

$$\vec{v} = v^A \vec{e}_A, \quad v^* = v_A e^{A*};$$

agora diremos que v_A são os componentes do funcional linear (ou *vetor dual*) $v^* \in V^*$ na base $\{e^{A*}\}$.

Vamos agora especificar um isomorfismo $g: V \rightarrow V^*$; dado um vetor $\vec{v} \in V(n, K)$ com componentes v^A na base $\{\vec{e}_A\}$, obtém-se os componentes v_A do vetor correspondente $v^* \in V^*$ na base dual $\{e^{A*}\}$ mediante uma matriz g não singular, de ordem n e com coeficientes $g_{AB} \in K$, segundo

$$v_A = g_{AB} v^B.$$

A cada vetor de V temos uma função linear que lhe corresponde, devido ao isomorfismo g . Esta função linear pode ser aplicada a um outro vetor de V dando como resultado um número. Em suma, podemos definir um produto entre dois elementos de V cujo agente intermediador é o isomorfismo g . Define-se então o *produto interior entre dois vetores de V* , como segue.

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ teremos ([3]p46)

$$g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle g \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle,$$

(ver a notação na seção 2.2.3); devemos lembrar que $g\vec{v}_1 \in V^*$.

2.2.5 "PULLBACK"

Para finalizar o assunto espaços vetoriais, definiremos um tipo de aplicação decorrente das definições dos espaços V e V^* . É um conceito da geometria diferencial chamado "pullback".

Dados dois espaços vetoriais V e W definidos no corpo K , seja inicialmente a aplicação linear $f: V \rightarrow W$. Seja ainda a função linear $g: W \rightarrow K$. Denomina-se "pullback" de g por f a função linear $h = gf: V \rightarrow K$, onde em gf primeiro se aplica f e depois g . Note-se que $g \in W^*$ e que $h \in V^*$.

Observemos que dado $g \in W^*$, a aplicação $f: V \rightarrow W$ induziu $h \in V^*$. Ou, de outra forma, temos uma aplicação induzida $f^*: W^* \rightarrow V^*$ definido por $f^*: g \mapsto h = f^*(g)$. Veja a figura esquemática 2.1 ([3]p45).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{g-f} & & \\
 & & \text{-----} & & \\
 V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & K \\
 & & & & \\
 V^* & \xleftarrow{f^*} & W^* & & \\
 \cup & & \cup & & \\
 g-f & \xleftarrow{f^*} & g & &
 \end{array}$$

Figura 2.1 O "pullback" da função g é uma função $f^*g = gf$ ([3]p45).

2.3 CÁLCULO SOBRE VARIEDADES

2.3.1 INTRODUÇÃO

Podemos facilmente transferir para variedades diferenciáveis, a nível local, o cálculo desenvolvido no \mathbb{R}^n ([3]p140). Vamos então recapitular sumariamente alguns tópicos sobre aplicações no \mathbb{R}^n .

Uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto em \mathbb{R} , chama-se *função com valores reais de uma variável real* ([6]p10). Define-se ainda uma aplicação com *valores vectoriais* ("vector-valued map" [4]p22). Por exemplo, a aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (\cos(x), \sin(2x))$ ([4]p22) associa a cada ponto da reta real um ponto do plano, resultando em uma curva no \mathbb{R}^2 . Este conceito nos permitirá definir funções sobre variedades -relembrando que uma variedade n -dimensional é localmente equivalente ao \mathbb{R}^n .

2.3.2 FUNÇÕES DEFINIDAS SOBRE VARIEDADES

Seja uma variedade M de dimensão n , diferenciável do tipo C^∞ ; uma *função com valores reais* pode ser definida sobre a variedade por $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, onde f é do tipo C^k , analogamente ao que é feito para uma função com valores reais definida sobre o \mathbb{R}^n . É fácil ver que se uma carta (U, ϕ) mapeia no \mathbb{R}^n uma região U da variedade, isto é, $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ([4]p59, [3]p143);

em suma, associamos a cada ponto de uma vizinhança um número real.

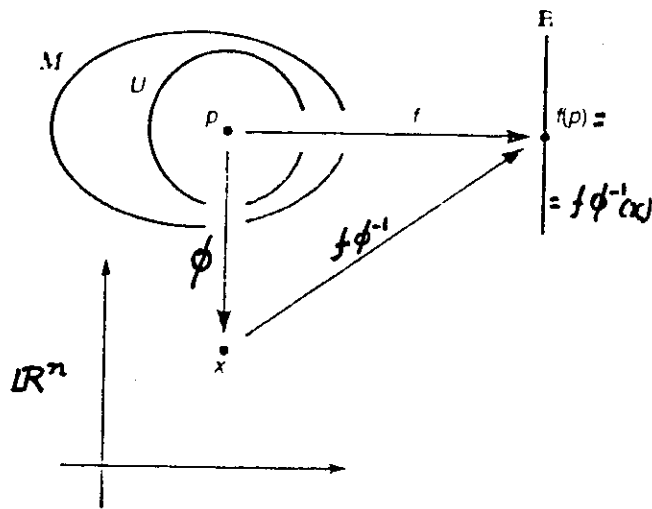


Figura 2.2 Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e sua apresentação em coordenadas locais $f \circ \phi^{-1}$ ([3]p143).

Para referência futura, denotaremos por $\mathcal{F}(M)$ o conjunto de funções suaves (tipo C^∞) definidas na variedade M ([3]p143).

Finalmente definimos *funções com valores reais* como sendo uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ e $U \subset M$. Percebe-se que neste tipo de aplicação U é levado em \mathbb{R}^n através da carta (U, ϕ) , e cada uma das f^i é tal que $f^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; ou seja, cada componente da função vetorial é uma função com valores reais. Em outras palavras, associamos a cada ponto da variedade

um vetor de n componentes reais.

2.3.3 CURVAS E VETORES EM VARIEDADES

Uma *curva* é um tipo especial de aplicação. Uma *curva aberta* em uma variedade n -dimensional é uma aplicação de um aberto (a, b) de \mathbb{R} na variedade M ; então uma curva c é descrita por $c: (a, b) \rightarrow M$ ([3]p142). Veja no esquema da figura 2.3 a aplicação c , e também sua representação em um sistema de coordenadas locais definido através da carta (U, ϕ) . Desta forma, se t é um parâmetro que varia no intervalo (a, b) da reta real \mathbb{R} , $c(t)$ associa a cada valor de t um ponto na variedade. Então $\phi \circ c$, isto é, a composição de ϕ com c onde primeiro atua c e depois ϕ , simplesmente atua sobre a reta real \mathbb{R} e repercute no \mathbb{R}^n , $\phi \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. A cada valor de t ficam associadas n funções diferenciáveis, sendo n a dimensão da variedade M .

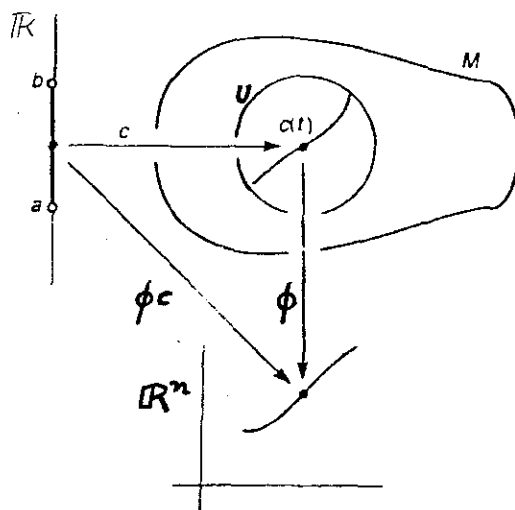


Figura 2.3 Uma curva c em M e sua apresentação em coordenadas locais $\phi \circ c$ ([3]p142).

No estudo de problemas físicos, trabalha-se frequentemente com vetores representando grandezas físicas tais como velocidade, momentum angular, campo elétrico, etc. Os vetores são *objetos geométricos* que, conforme vimos, pertencem a espaços vetoriais, que são espaços matemáticos abstratos cujas propriedades gerais já foram vistas. Como o espaço físico é bem aproximadamente plano, nele podemos traçar retas; representamos ainda um vetor como uma *flecha* ([3]p143). Esta idéia dos vetores como flechas é bastante prática no caso de campos elétricos e magnéticos ([20]§1-2).

Geometricamente imagina-se um espaço vetorial real de n dimensões como um \mathbb{R}^n em que da origem partem infinitos vetores, de todos os tamanhos e em todas as direções e sentidos. Se o espaço físico é plano, usamos o recurso de *deslizar* os vetores paralelamente a si próprios, e sempre podemos fazer uma superposição do espaço físico com o espaço vetorial. Porém se o espaço for curvo - por exemplo a superfície de uma esfera, ou espaços curvos com maior número de dimensões- começam a surgir dificuldades do tipo: *onde está localizada a origem do vetor?* ou então, *como definir uma flecha reta sobre uma variedade curva?* ([3]p143). Estas dificuldades levam às definições da geometria diferencial, com espaços vetoriais tangentes às variedades.

A elaboração acima poderá ser utilizada para a definição de um vetor em um ponto P da variedade M . Vamos defini-lo através ^{de} \checkmark uma curva (parametrizada) em M , à qual o vetor seja tangente.

Escolhe-se um aberto (a, b) em \mathbb{R} , e o parametrizamos por t ; em seguida consideramos uma curva que passe por P , representada por $c: (a, b) \rightarrow M$. Para definir um vetor na variedade, necessitamos provisoriamente de uma função escalar $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. O ponto P corresponderá ao valor $t=0$. O vetor tangente à curva $c(t)$ no ponto $t=0$ é definido como a derivada direcional da função $f(c(t))$ ao longo da curva $c(t)$ em $t=0$ ([3]p144): $df(c(t))/dt|_{t=0}$. Ou, em termos de coordenadas locais, como $(\partial f/\partial x^i)\{dx^i[c(t)]/dt\}_{t=0}$, onde $\partial f/\partial x^i$ significa $\partial[f\phi^{-1}(x)]/\partial x^i$. Logo, derivar f em relação a t equivale a aplicar a f o operador $X = X^i(\partial/\partial x^i)$, onde $X^i = dx^i(c(t))/dt|_{t=0}$. Portanto a função f serviu apenas como intermediária da definição, naturalmente ela desaparece. Ficamos apenas com o operador X definido acima, que equivale ao vetor tangente à curva no ponto considerado. A rigor, há uma correspondência 1-1 entre os vetores tangentes à curva e esses operadores (em [14]p33 há uma demonstração bem simples desta correspondência) ([21]p5, [4]p68, [1]p121).

É importante enfatizar que o que chamamos de curva é um caminho já parametrizado; portanto um mesmo caminho ao ser parametrizado de maneiras diferentes irá dar origem aos infinitos vetores de mesma direção, porém com tamanhos diferentes, ou mesmo diferindo pelo sentido, que depende da orientação do crescimento do parâmetro t . Outras curvas de M , que passem por P com diferentes direções, fornecerão novos vetores tangentes. A totalidade das curvas de M que passam por P gera o chamado espaço vetorial tangente à variedade em P ;

adiante tornaremos a esta questão.

2.4 MÉTRICA

2.4.1 TOPOLOGIA MÉTRICA

Dado um conjunto X , uma *métrica* d é uma aplicação da forma $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que atenda as propriedades abaixo ([3]p49, [1]p22):

- i- $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
- ii- $d(x_1, x_2) \geq 0$
- iii- $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \geq d(x_1, x_3)$.

A segunda diz que d não tem valores negativos, a primeira que tanto faz a ordem em que são tomados os pontos, e a última finalmente que d tem a propriedade do triângulo, em que o tamanho de um lado é sempre menor ou igual à soma dos outros dois.

O conjunto X dotado da métrica d é um espaço topológico, em que os abertos são os *discos abertos* da forma $U_\epsilon(x_1) = \{x_2 \in X \mid d(x_1, x_2) < \epsilon\}$, com todas suas possíveis uniões e interseções (estas em número limitado); a topologia assim definida chama-se *topologia métrica* ([22]p13, [3]p49, [1]p22).

2.4.2 ESPAÇOS VETORIAIS TANGENTES

Dada uma variedade M e um ponto P da mesma, o conjunto de todos os vetores tangentes à variedade em P constitui um espaço vetorial, cuja origem é o ponto P ; é o chamado *espaço tangente* à variedade M no ponto P , representado por $T_P M$ ([3]p145). Define-se também uma *base coordenada* $\{\vec{e}_i\}$ como aquela constituída pelos vetores tangentes às curvas do sistema de coordenadas local $\{x^i\} = \{x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\}$; isto é, os vetores \vec{e}_i são da forma $\vec{e}_i = \partial / \partial x^i$. Um vetor genérico \vec{v} será representado nessa base como $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$.

Associado ao espaço vetorial $T_P M$, existe o espaço vetorial dual $T_P^* M$, denominado *espaço cotangente*. As funções lineares que o constituem, os vetores duais, são também chamados *vetores cotangentes*, *covetores* ou ainda, na linguagem de formas diferenciais, *1-formas* ([3]p146). Um elemento ω de $T_P^* M$ é uma aplicação $\omega : T_P M \rightarrow \mathbb{R}$.

Dada uma função suave f , um exemplo simples de 1-forma é o gradiente df da função f . Já vimos que em geometria diferencial um vetor \vec{v} "atua" sobre uma função f na forma $\vec{v} [f] = v^i \partial f / \partial x^i$, que é um número real. Definimos agora a ação do gradiente df sobre o vetor \vec{v} da mesma maneira como definimos a ação das funções lineares sobre o espaço vetorial V , ou seja na forma

$$\langle df, \vec{v} \rangle = \vec{v} [f] = v^i (\partial f / \partial x^i) \in \mathbb{R}.$$

Pode-se observar que $\langle df, \vec{v} \rangle$ é linear tanto em f quanto em \vec{v} e que se a função f está definida numa vizinhança U do ponto P através da carta ϕ (ou seja (U, ϕ)), o gradiente df é expresso ([3]p143,145) em termos de coordenadas $x^i(P)$ como $df = (\partial f / \partial x^i) dx^i$. Portanto $\{dx^i\}$ é uma base de T_P^*M . E esta base é a base dual da base $\{\partial / \partial x^i\}$, pois

$$\langle dx^i, \partial / \partial x^j \rangle = \partial x^i / \partial x^j = \delta_j^i.$$

Uma 1-forma qualquer poderá ser escrita como $\omega = \omega_i dx^i$, e o produto interno entre elementos de T_P^*M e $T_P M$ é definido como a aplicação

$$\langle \quad , \quad \rangle : T_P^*M \otimes T_P M \rightarrow \mathbb{R};$$

por exemplo,

$$\langle \omega, \vec{v} \rangle = \omega_i v^j \langle dx^i, \partial / \partial x^j \rangle = \omega_i v^j \delta_j^i = \omega_i v^i.$$

2.4.3 TENSORES

Um tensor do tipo (q,r) é um objeto multilinear que aplica q elementos de T_P^*M e r elementos de $T_P M$ em \mathbb{R} ([3]p146). Logo um tensor poderá ser escrito como

$$T = T^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_r} \partial / \partial x^{i_1} \dots \partial / \partial x^{i_q} dx^{j_1} \dots dx^{j_r}.$$

Por exemplo, um tensor do tipo (1,2) aplica 1 elemento de $T_p^*(M)$ e dois elementos de $T_p(M)$ em um real; pode então ser escrito como

$$A = A^i{}_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} dx^j dx^k.$$

Caso B seja vetor de $T_p^*(M)$ e C e D sejam vetores de $T_p(M)$, então esse tensor A os aplicará nos reais da forma $A^i{}_{jk} B_i C^j D^k \in \mathbb{R}$.

2.4.4 IMERSÃO E MERGULHO

É importante se estabelecer a diferença entre *imersão* ("immersion") e *mergulho* ("embedding"); daremos as idéias básicas, podendo ser encontrados detalhes em ([21]p9), ([1]p229, 469, 470) e ([3]p149).

A *imersão* é uma aplicação de um espaço em outro, que pode levar uma variedade a *perder suas propriedades de variedade*; já no *mergulho* a variedade *continua sendo variedade*. Cada ponto da variedade mergulhada na outra variedade terá um único espaço vetorial tangente, que é a condição de ser localmente um \mathbb{R}^n . Veja a figura 2.4, onde uma circunferência S^1 pode ser imersa no \mathbb{R}^2 ou mergulhada no \mathbb{R}^2 . No caso da imersão podemos ter, como no desenho, um "oito"; aqui a circunferência deixou de ser variedade, pois a vizinhança do ponto P não é isomorfa ao \mathbb{R}^1 , o ponto tem dois espaços tangentes. Já no caso do mergulho ela

continua sendo uma variedade, passa a ser uma sub-variedade de \mathbb{R}^2 . O mergulho é sempre uma imersão, mas o contrário nem sempre é verdade.

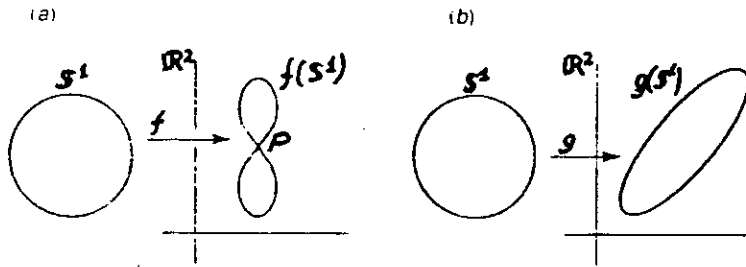


Figura 2.4 No lado esquerdo uma imersão, e no lado direito um mergulho g e a subvariedade $g(S^1)$ ([3]p39).

2.4.5 MÉTRICA RIEMANNIANA

A existência de uma métrica em uma variedade M , ou isomorfismo entre os elementos de $T_P M$ e $T_P^* M$, permite a definição do produto interno entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} pertencentes ao $T_P M$. Sendo assim, definimos uma *métrica riemanniana* ([3]p204) g em M como um tensor do tipo $(0,2)$ definido em toda a variedade e que satisfaz as seguintes condições em cada ponto P de M

- i- $g_p(\vec{u}, \vec{v}) = g_p(\vec{v}, \vec{u})$,
- ii- $g_p(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$, sendo zero apenas quando o vetor \vec{u} é o vetor nulo.

Se uma variedade está dotada de uma métrica riemanniana, diz-se que tem uma *estrutura riemanniana* ([1]p273).

2.5 AÇÃO DE GRUPOS EM VARIEDADES

2.5.1 INTRODUÇÃO

Faremos nesta introdução um pequeno resumo de alguns conceitos referentes aos grupos de Lie. Sem entrarmos em detalhes, apenas daremos as conclusões que interessam. Os interessados terão nas referências citadas mais informações.

A estrutura de variedade de um grupo de Lie G é tal que as aplicações da forma $G \times G \rightarrow G$, isto é, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 = g_3$, assim como $G \rightarrow G: g \mapsto g^{-1}$, são aplicações diferenciáveis ([23]p8, [3]p167). A dimensão do grupo G é a dimensão da *variedade do grupo* ("group manifold") ([3]p168), que representa também o número de *parâmetros independentes* com os quais é possível descrever os elementos do grupo; por esta razão a variedade do grupo também é chamada de *espaço dos parâmetros*. Para cada grupo de Lie G tem-se uma *álgebra de Lie* \mathfrak{G} ([2]p8, 10) associada ao grupo ([2]p87,[23]p9); o número de vetores l.i. que constitui uma base para a álgebra ([2]p12) também é a dimensão do grupo ($\dim \mathfrak{G} = \dim G$ [3]p170).

São importantes para nós os grupos *matriciais*, subgrupos do $GL(n, \mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{C})$, onde o produto dos elementos do grupo é o produto das matrizes, e as *coordenadas* de cada elemento do grupo

são os n^2 elementos constituintes de matriz correspondente, da forma $M = \{x^{ij}\}$. Vejamos alguns exemplos de grupos matriciais. $O(n)$, o grupo ortogonal, é o grupo das matrizes ortogonais, $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M M^t = M^t M = \mathbb{1}\}$, onde M^t é a matriz transposta de M e $\mathbb{1}$ a matriz identidade; cada matriz representa uma *rotação* no espaço de n dimensões, podendo ser seguida de *reflexão* no plano perpendicular ao eixo de rotação. O grupo $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det M = 1\}$; o grupo $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, que é o *grupo das rotações próprias* -sem reflexões- em n dimensões; o $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M M^* = M^* M = \mathbb{1}\}$ onde M^* é a matriz hermitiano-conjugada de M ; o $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

Representaremos a álgebra associada ao grupo utilizando o mesmo símbolo que o do grupo, mas mudando para minúsculo o tipo de letra ([3]p172); por exemplo, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é a álgebra associada ao $SL(n, \mathbb{R})$.

As variedades de grupo são variedades diferenciáveis. A álgebra do grupo *não determina a topologia* da variedade: grupos com mesma álgebra podem diferir por propriedades topológicas. Por exemplo, os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$, apesar de terem a mesma álgebra, diferem na topologia, pois o primeiro tem a topologia S^3 (triesfera) enquanto que o segundo é \mathbb{P}^3 ([10]p221, triespaco projetivo); mais adiante veremos estas topologias. Como exemplo de variedade de grupo temos ainda a circunferência S^1 , que é a variedade do grupo $SO(2)$ ([17]p82), o grupo das rotações próprias em *duas* dimensões.

Na terceira parte desta seção veremos como um grupo pode atuar sobre uma variedade, contudo por agora veremos um tipo particular de ação do grupo: a ação sobre ele mesmo. Esta ação é feita escolhendo-se um elemento qualquer do grupo e multiplicando-se todos os elementos do grupo por ele; conseqüentemente teremos um deslocamento de cada elemento do grupo na variedade. No caso particular do grupo $SO(2)$ esta ação significa uma rotação de toda a S^1 em torno de seu centro, pelo ângulo correspondente ao elemento do grupo pelo qual estamos multiplicando.

Se a (fixo) e g (variável) são elementos do grupo de Lie G , uma *translação à direita* é definida como $R_a: G \rightarrow G$, $R_a g = g \cdot a$, onde "." significa a operação de grupo; analogamente uma *translação à esquerda* é definida como $L_a g = a \cdot g$. Estas aplicações internas do grupo são diferenciáveis por definição, e induzem aplicações entre os espaços tangentes aos pontos (cada ponto da variedade representa um elemento do grupo).

2.5.2 CAMPOS VETORIAIS INVARIANTES

Trataremos agora de uma classe especial ([3]p170) de campos vetoriais definidos em grupos topológicos: os campos caracterizados pela sua *invariância* sob a ação do grupo sobre ele mesmo. São os chamados *campos vetoriais invariantes à direita* (CVID) ou *à esquerda* (CVIE). Na verdade trataremos aqui apenas dos CVIE, que serão representados por letras maiúsculas em negrito A, X, Y , etc.

Se L_{a*} é a aplicação entre os espaços tangentes induzida pela translação à esquerda, isto é, $L_{a*}: T_g(G) \rightarrow T_{a.g}(G)$, teremos por definição que $L_{a*}X|_g = X|_{a.g}$. Vejamos um exemplo: \mathbb{R} constitui um grupo de Lie unidimensional com respeito à adição de vetores; uma translação L_a faz $x \mapsto a+x$, e o campo vetorial invariante é dado por $X = \partial/\partial x$, que é um *gerador de translações* no grupo \mathbb{R} (ver em [14]p43 uma demonstração simples, ver também [4]p88 a 90).

Uma identidade algébrica para o caso do grupo \mathbb{R} e o CVIE X é

$$L_{a*} X|_x = \frac{\partial(a+x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial(a+x)} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial(a+x)} = X|_{a+x},$$

que pode ser generalizada para qualquer grupo de Lie na forma

$$L_{a*} X|_g = X^i \frac{\partial x^j(a.g)}{\partial x^i(g)} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{a.g} = X^j(a.g) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{a.g};$$

aqui $x^j(a.g)$ é a coordenada x^j do ponto $a.g$ e X^i são os componentes do campo X na base $\partial/\partial x^i$. A demonstração desta igualdade é interessante porque melhor nos familiariza com a estrutura diferenciável do grupo de Lie; ela pode ser encontrada em ([4]p90), ou como exercício em ([3]p170).

A partir dos campos vetoriais invariantes podemos construir a estrutura da álgebra \mathfrak{g} . Dados os campos X e Y , define-se um novo campo Z , o comutador $Z = [X, Y] = XY - YX$ com as propriedades

(mais detalhes e demonstrações em [23]p8)

$$[X, X] = 0 \text{ e}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 ;$$

esta última é a conhecida identidade de Jacobi. Toda álgebra de Lie define um *especial* grupo de Lie \tilde{G} , tal que cada grupo de Lie com esta mesma álgebra é uma imagem de \tilde{G} sob algum homomorfismo ([23]p9). Dada a álgebra \mathfrak{G} , e $X, Y \in \mathfrak{G}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então $\lambda X + \mu Y$ e $[X, Y]$ também pertencem à \mathfrak{G} , pois

$$L_{\mathfrak{g}^*}(\lambda X + \mu Y) = \lambda L_{\mathfrak{g}^*}X + \mu L_{\mathfrak{g}^*}Y = \lambda X + \mu Y ;$$

a última igualdade se deve ao fato do campo vetorial ser invariante.

Pela definição de álgebra a operação interna está definida através do comutador $[X, Y]$, e poderemos sintetizar a notação como

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma ,$$

onde os X_α são CVIE, e $C_{\alpha\beta}^\gamma$ são as constantes de estrutura da álgebra ([23]p10) de Lie e conseqüentemente do grupo.

2.5.3 AÇÃO DE GRUPOS SOBRE VARIEDADES

Define-se a ação σ de um grupo G sobre uma variedade M como uma aplicação diferenciável do tipo $\sigma : G \times M \rightarrow M$ que satisfaça as seguintes condições:

$$i- \sigma(e, p) = p, \text{ para qualquer } p \in M$$

$$ii- \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 \cdot g_2, p) .$$

A última condição pode ser escrita de forma mais evidente como $g_1(g_2 p) = (g_1 \cdot g_2)p$. Como exemplo simples, temos a ação do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ sobre a variedade \mathbb{R}^n , onde vetores coluna x com n componentes reais representam os elementos do \mathbb{R}^n , e as matrizes $A \in GL(n, \mathbb{R})$; então

$$\sigma(A, x) = A \cdot x .$$

A aplicação σ associa o par (g, m) , onde $g \in G$ e $m \in M$, a um ponto m' também da variedade. Temos os seguintes tipos especiais de ações de grupos sobre variedades ([3]p180):

i - ação transitiva- se para quaisquer $m_1, m_2 \in M$ existe ao menos um elemento $g \in G$ tal que $\sigma(g, m_1) = m_2$;

ii - ação livre- se todo elemento não trivial $g \in G$ ($g \neq e$) não tem pontos fixos em M . Ou seja, se $g \neq e$ então $\sigma(g, m) \neq m$, $\forall m \in M$;

iii - *ação efetiva*- se o único elemento de G que define a ação trivial sobre M é o elemento neutro (identidade, e). Em outras palavras, se somente o elemento identidade de G deixa fixos todos os pontos de M ; ou seja, se $\sigma(g,m)=m$ para todo $m \in M$ então $g=e$;

iv - *ação descontínua própria*- se for finita a quantidade de elementos $g \in G$ tais que $gC \cap C \neq \emptyset$, onde C é qualquer subconjunto compacto de M ([24]p406).

Vejamos alguns exemplos. Considere-se o grupo das rotações $SO(2)$ atuando no plano \mathbb{R}^2 da forma usual: ao elemento $e^{i\alpha}$ do grupo associa-se uma rotação do plano pelo ângulo α rad em torno de uma origem O . A atuação é intransitiva, não livre, efetiva e contínua. Intransitiva, pois pontos distantes r da origem não podem ser levados a pontos com $r' \neq r$; não livre, pois a origem permanece fixa sob a rotação de, por exemplo, $\alpha = \pi/2$ (na verdade a origem mantém-se invariante sob todas as rotações); efetiva, pois só o elemento identidade do grupo mantém fixo o plano inteiro; a continuidade da ação é óbvia.

Considere-se ainda o grupo $SO(2)$ atuando no \mathbb{R}^2 , mas de um modo diferente: ao elemento $e^{i\alpha}$ do grupo vamos agora associar uma rotação 2α rad (e não apenas α). Essa atuação é não-efetiva, pois ao elemento $-1 (= e^{i\pi})$ do grupo fica associada uma rotação 2π rad do plano; ou seja, o plano fica invariante sob a ação de um elemento não-neutro do grupo. Encontramos em [7]p13 a meticulosa distinção entre o grupo G e o grupo de transformação

associado, chamado de G^* ; estes grupos podem ou não ser isomorfos, dependendo do tipo de ação definida.

O grupo das rotações tridimensionais $SO(3)$, atuando na superfície esférica S^2 da forma usual, o faz transitiva, efetiva, não livre e continuamente. Porém sua atuação na *esfera sólida* D^3 (*disco três* ou B^3 *bola três*, como uma bola de bilhar) na forma usual é intransitiva, embora igualmente efetiva, não livre e contínua.

Outros exemplos são encontrados em ([3]p181), ([25]p71), ([26]p11); é fácil ver que uma ação livre é automaticamente efetiva ([26]p11). O grupo que atua sobre uma variedade é usualmente chamado de *grupo de transformação* ([7]p3, 13).

Um conceito também bastante usado no que se refere à ação de um grupo é o de órbita de um ponto $m \in M$, onde M é a variedade onde o grupo atua. A órbita do ponto m sob a ação σ do grupo é o subconjunto de pontos de M definido ([3]p180) por

$$g.m = \{ \sigma(g, m) \mid g \in G \}.$$

Por exemplo, na ação das rotações $SO(3)$ sobre uma esfera sólida B^3 da forma usual cada órbita é uma superfície esférica S^2 .

Pode-se observar que se o grupo atua transitivamente em M (vamos através do grupo a qualquer ponto de M) então M inteira é uma órbita. Por consequência direta da definição de órbita, a

ação de G sobre qualquer órbita é transitiva. Costuma-se dizer que se um grupo G atua transitivamente em M , a variedade M é *homogênea* sob essa ação de G . Por exemplo, a circunferência S^1 é homogênea sob a ação usual do $SO(2)$.

Se a ação de G em M é tal que existe um subgrupo de G , $H \subset G$, tal que todos os seus elementos agindo sobre um especificado ponto $m \in M$ mantêm-no imóvel, quer dizer,

$$H = \{ g \in G \mid \sigma(g, m) = m \},$$

então este subgrupo H se chama *grupo de isotropia* do ponto m , ou *estabilizador* ("little group") de m . No exemplo há pouco citado (rotações $SO(3)$ de esfera sólida B^3), o estabilizador H de um ponto m será o grupo das rotações $SO(2)$ em torno do eixo que liga m ao centro O da esfera; já o estabilizador do centro O é o próprio grupo $SO(3)$. Veja-se que no caso da ação ser livre então H se restringe ao elemento neutro para qualquer ponto de M .

No caso de uma geometria riemanniana, é de grande importância o grupo que mantém invariante a métrica. Este grupo recebe o nome de *grupo das isometrias* ou *grupo dos movimentos* ("motions"). Mais adiante iremos tratar extensivamente dos grupos de isometrias das trivariiedades.

CAPÍTULO 3

INTRODUÇÃO ÀS TRIVARIEDADES

3.1 - INTRODUÇÃO

Segundo Scott ([24]p401) a teoria de trivariiedades foi revolucionada pelo recente trabalho de Thurston ([27] e referências contidas em [24]), o qual mostrou que a geometria, quando aliada a métodos puramente topológicos, tem um importante papel para a classificação de trivariiedades.

Neste capítulo daremos uma pequena introdução ao trabalho de Thurston, e no decorrer da exposição tentaremos esclarecer por que, nos sentidos usados por Thurston, "topologia" e "geometria" não são tão independentes quanto no sentido usual. Para isto é necessária uma definição ao modo de Thurston de "geometria", e é o que faremos na primeira seção deste capítulo.

As referências básicas utilizadas foram [24], [28], [8]; as Notas de Aulas do Thurston [27] não são aconselhadas para uma primeira abordagem, em razão de sua complexidade.

Começaremos o capítulo com a aridez de mais alguns conceitos matemáticos. Ainda que não tenhamos conseguido um completo

domínio de certas definições envolvidas, optamos por sua inclusão na medida em que apontam na direção das referências consultadas e são uma preparação para o entendimento da obra de Thurston.

3.2 DEFINIÇÃO DE CONCEITOS

3.2.1 GEOMETRIA DE KLEIN

Seguindo a referência ([29]p603) faremos um pequeno resumo do significado de "geometria de Klein".

Seja K um conjunto, e G um grupo de transformações de K nele mesmo. Defina-se uma figura em K como um subconjunto de K . Então as propriedades das figuras e relações entre figuras em K que sejam invariantes sob o grupo G de transformações constituirão uma *geometria de Klein*, que será denotada por (K, G) . Duas figuras A e B em K são ditas equivalentes com respeito a G se existe $g \in G$ tal que $g(A) = B$.

Por exemplo, seja $E(n)$ o grupo das transformações ortogonais (rotações), reflexões e translações em n dimensões, o chamado *grupo euclidiano*; a distância euclidiana entre dois pontos é invariante sob a ação de $E(n)$. Uma geometria de Klein é então definida por $(\mathbb{R}^n, E(n))$, onde a propriedade geométrica é a distância euclidiana. Como outro exemplo, a geometria de Minkowski é obtida no caso $n = 4$ como $(\mathbb{R}^4, P(4))$, onde $P(4)$ é o grupo de Poincaré ([29]p604).

A concepção de Klein não somente dá um tratamento unificado às diversas "geometrias" como dá as relações entre elas. Daqui por diante vamos designar por *X-geometria* a geometria no sentido *kleiniano* ([24]p403), isto é, o par (K, G) onde K é um espaço topológico e G um grupo; já se escrevermos simplesmente *geometria* poderemos estar nos referindo ao seu sentido usual, *não kleiniano*.

3.2.2 MAIS ALGUNS CONCEITOS GERAIS

Um espaço topológico X é *localmente conexo* se qualquer vizinhança de qualquer ponto contém uma vizinhança conexa ([1]p16). Um espaço pode ser conexo sem ser localmente conexo.

Um *espaço recobrimento* de um espaço topológico X é um par (\tilde{X}, f) onde \tilde{X} é conexo e localmente conexo, e $f: \tilde{X} \rightarrow X$ é sobrejetiva ([1]p18); f é chamada *projeção* ou *aplicação recobrimento* ([26]p32). Caso \tilde{X} seja simplesmente conexo, diz-se que (\tilde{X}, f) é um *espaço recobrimento universal* de X ([1]p18, [21]p61).

Uma métrica em uma variedade M é *localmente homogênea* se, para quaisquer dois pontos $p, q \in M$, houver vizinhanças (U, p) de p e (V, q) de q e uma isometria $\phi: (U, p) \rightarrow (V, q)$. Neste

caso diz-se que M é localmente homogênea, o que implica ser o espaço recobrimento universal \tilde{M} ao mesmo tempo localmente homogêneo e homogêneo com respeito à métrica que herda de M ([30]p201). A métrica em \tilde{M} é *localmente* idêntica à sua "métrica mãe" em M pois uma aplicação recobrimento $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ é localmente uma isometria.

Seja X uma trivariiedade riemanniana simplesmente conexa, homogênea com respeito ao grupo G de isometrias que preserva sua orientação, tal que o grupo estabilizador de cada ponto $x \in X$ é compacto. O par (X, G) é uma geometria no sentido de Klein ([24]p403, [30]p201).

Diz-se que um espaço M tem uma *estrutura geométrica* modelada na *geometria* (X, G) se M for isométrico ao espaço quociente de X por um subgrupo Γ de G ($M \cong X/\Gamma$) tal que a ação de Γ em X seja descontínua, discreta e sem pontos fixos; isto é, X é o recobrimento universal de M , $X = \tilde{M}$.

3.3 ESPAÇOS BIDIMENSIONAIS

3.3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo desta seção é introduzir os espaços bidimensionais inicialmente apenas através dos resultados mais antigos sobre superfícies, e em seguida iniciar o tratamento mais moderno, estudando-os nos métodos que serão utilizados nas trivariiedades.

3.3.2 GENERALIDADES SOBRE DUAS DIMENSÕES

A relação entre topologia e geometria em duas dimensões foi bastante vasculhada no século passado. Os espaços bidimensionais que melhor servem para um estudo introdutório são aqueles chamados de *superfícies* ([9]p58) - são os que estudaremos.

Em linhas gerais, podemos dizer que não são superfícies os espaços não conexos, os infinitos (plano euclidiano), os que se rompem ao retirar um ponto, etc.

Já dentre as *superfícies* temos as *orientáveis* e as *não orientáveis*. Como exemplos de *orientáveis abertas* temos o disco D^2 e o cilindro; *orientáveis fechadas*, a esfera S^2 , o toro T^2 , o duplo toro; *não-orientáveis abertas*, a fita de Möbius, e *não-orientáveis fechadas* o plano projetivo P^2 e a garrafa de Klein.

Se em um poliedro chamarmos de n_0 o número de vértices, de n_1 o número de arestas e de n_2 o número de faces, a característica de Euler será escrita como $\chi = n_0 - n_1 + n_2$. Por homeomorfismos é possível obtermos uma S^2 a partir de um cubo, e para o cubo pode-se calcular $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$; portanto a característica de Euler -invariante topológico- da esfera S^2 é, assim como a do cubo, igual a 2. Em ([3]p195) pode se encontrar a generalização da característica de Euler para espaços n dimensionais, que é

$$\chi = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i (M),$$

onde M é a variedade da qual se deseja calcular χ e b_i é o i -ésimo número de Betti da variedade ([3]p86). Esta é uma das aplicações do estudo dos simplexes a que nos referimos em 1.3.7.

Há somente duas superfícies que são fechadas e têm a característica de Euler positiva: a esfera S^2 e o plano projetivo P^2 (S^2 com $g = \text{zero}$, $\chi = +2$; P^2 com $g = 1$, $\chi = +1$). Para se calcular χ , faz-se $\chi = 2-2g-b$ ($b = \text{número de bordas ou buracos}$) para as orientáveis, e $\chi = 2-g-b$ para as não orientáveis (o P^2). Com $\chi = 0$ temos 2 superfícies fechadas, o toro T^2 (orientável, $g=1$), e a garrafa de Klein (não orientável, $g=2$).

Quanto às geometrias em duas dimensões ([24]p405) temos três: a geometria do plano euclidiano ($\chi=0$), a elítica da esfera S^2 ($\chi > 0$), e a hiperbólica ($\chi < 0$). Veremos a seguir algumas particularidades de cada uma delas, inclusive como defini-las no sentido de Klein.

3.3.3 ESPAÇO EUCLIDIANO

Através a métrica podemos calcular o comprimento de qualquer curva suave em uma variedade M , que será definida como a integral de "ds" (distância infinitesimal) ao longo da curva. No plano euclidiano, o comprimento de uma curva γ é $\int_{\gamma} ds$ onde $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Uma *geodésica* é uma curva que localmente minimiza a distância entre dois pontos A e B da variedade; o segmento de geodésica AB é o *menor caminho* entre A e B .

O *espaço euclidiano* de 2 dimensões E^2 é definido como o espaço topológico R^2 , com a topologia usual e sem pontos no infinito, dotado da métrica euclidiana ([24]p402). O grupo das isometrias do espaço euclidiano é chamado *grupo de Galileo*, que denotaremos por $Isom(E^2)$; portanto definimos a *geometria* do E^2 como $(R^2, Isom(E^2))$.

Pode-se demonstrar que qualquer isometria do E^2 é uma translação, rotação, reflexão ou translação + reflexão. Sendo que esta última é uma reflexão em uma linha ℓ com uma translação ao longo de ℓ . Dado um vetor \vec{x} , uma isometria de E^2 é $\alpha(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ onde A é uma matriz ortogonal, grupo $O(2)$, e \vec{b} é um vetor de E^2 .

A aplicação natural $Isom(E^2) \rightarrow O(2)$, isto é, a que leva $\alpha(\vec{x})$ em $A \cdot \vec{x}$ apenas, é um homomorfismo sobrejetivo (aplicação muitos para um), em que todas as isometrias do tipo \vec{b} (as translações) são aplicadas no elemento neutro de $O(2)$. Isto nos leva a

concluir que o núcleo (kernel) da aplicação é constituído de todas as translações no plano representadas pelos vetores \vec{b} , formando um conjunto isomorfo ao espaço vetorial \mathbb{R}^2 .

Uma propriedade interessante do grupo das isometrias do \mathbb{E}^2 é que ele pode ser gerado por reflexões apenas. Vejamos que uma translação por uma distância que chamaremos de $2d$ em uma direção k pode ser obtida mediante duas reflexões em retas ortogonais a k separadas pela distância d . Veja a figura 3.1 (a), onde a

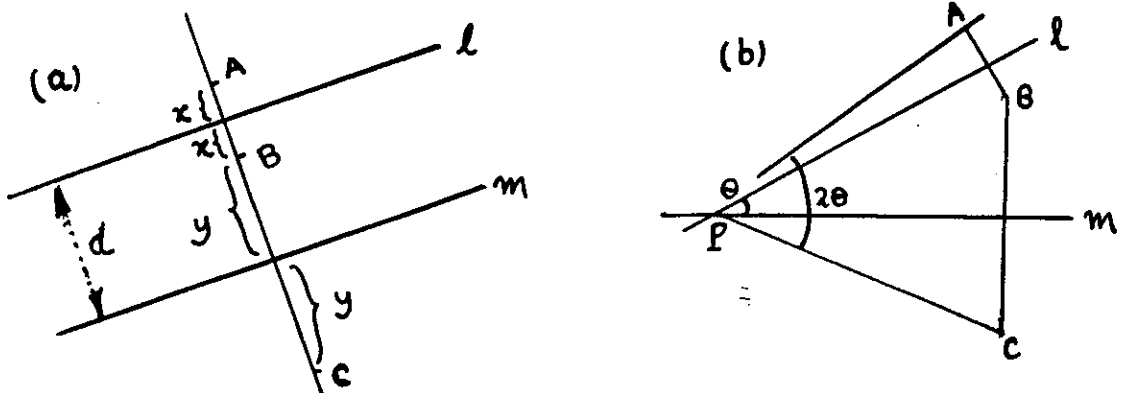


Figura 3.1 (a) Uma translação $2d$ de A para C pode ser realizada através das duas reflexões de x e y nas retas paralelas com separação $d = x + y$. (b) Uma rotação do plano \mathbb{E}^2 em torno de P por um ângulo 2θ pode ser efetuada mediante reflexões em duas retas l e m , concorrentes em P sob o ângulo θ .

translação do ponto A para C é descrita por uma reflexão na reta l (reflexão α) seguida de uma reflexão na reta m (reflexão β); o

produto $\beta\alpha$ das reflexões equivale a translação $A \rightarrow C$. Por outro lado, se as retas ℓ e m concorrem em P e formam um ângulo θ , uma rotação do plano por um ângulo 2θ é obtida com o produto $\beta\alpha$; ver figura 3.1 (b).

3.3.4 SUPERFÍCIE ESFÉRICA S^2

Sabe-se ([31]p10) que em uma bivariedade S^2 a soma dos ângulos internos do triângulo depende da magnitude da S^2 , e vale $\Sigma = (1 + \pi S/M^2) \times (180^\circ)$, onde S é a área do triângulo e M a magnitude da S^2 ($\pi R = M$). Já no E^2 , se especificarmos os três ângulos de um triângulo não teremos sua área determinada, porque todos os triângulos semelhantes terão os mesmos ângulos porém áreas diferentes.

O grupo completo das isometrias da S^2 é o $O(3)$ ([24]p411), grupo das matrizes ortogonais 3×3 ; este é também o grupo de isometrias do E^3 fixando a origem, isto é, o estabilizador da origem. O grupo $O(3)$ tem como subgrupo o $SO(3)$, onde só são levadas em conta as rotações, não há reflexões. Um elemento de $SO(3)$ é uma rotação em E^3 em torno de uma reta que passa pela origem. É fácil observar que uma rotação pura sobre a S^2 preserva a orientação, assim o grupo das isometrias da S^2 que preservam a orientação é o $SO(3)$. A K-geometria da S^2 é portanto $(S^2, O(3))$.

3.3.5 PLANO HIPERBÓLICO H^2

A visualização do plano hiperbólico H^2 é a menos óbvia das três geometrias bidimensionais; mas vamos tentar através ^{de} alguns recursos matemáticos facilitar a sua compreensão.

O H^2 é uma superfície curva, como a S^2 , com a mesma curvatura em todos os pontos. Sua curvatura é negativa, enquanto que a da S^2 é positiva. Não é possível visualizar o H^2 da mesma forma que a S^2 porque o H^2 não pode ser *isometricamente* mergulhado no E^3 , enquanto que a esfera o pode; ou seja, não é possível através ^{de} um mergulho tornar o H^2 uma subvariedade do E^3 . Contudo, ele é *localmente isométrico* a uma superfície constituída toda por *pontos sela*: trata-se da *pseudoesfera*, uma superfície multiplamente conexa e não completa (em um espaço métrico não completo não há convergências de sequências de Cauchy, [1]p22, 25) gerada por uma tratriz (ou tratória) ([32]p150). Ver a figura 3.2.

Consideremos um mapa usual da superfície da Terra ([24]p413); ao ser desenhada uma grande porção da mesma em uma folha de papel plana, ela ficará distorcida conforme costumamos observar nos atlas geográficos. A escala do mapa é alterada à medida em que "andamos" pelo atlas. Uma *geodésica* - caminho mínimo - na superfície da Terra (arco de circunferência máxima, de um meridiano por exemplo) aparecerá curva no mapa, ao passo que uma reta no mapa não é uma geodésica na superfície da Terra. Contudo, o mapa e parte da superfície são homeomorfos, logo uma

métrica na superfície da Terra induz uma métrica no mapa geográfico. Caso a superfície da Terra fosse plana, a métrica no mapa seria $ds^2 = N^2(dx^2 + dy^2)$ onde a escala do mapa é N para 1. Mas como a superfície da Terra é curva, podemos supor um caso geral, onde a métrica no plano do mapa será do tipo $ds^2 = a(x,y)dx^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dy^2$. O plano com esta métrica é isométrico à parte correspondente da superfície da Terra, pois por construção os dois têm a mesma métrica. Este raciocínio é de fundamental importância para se compreender ao que nos referimos em capítulos anteriores como "dotar" um espaço topológico de uma determinada métrica. No caso acima o espaço topológico é uma região do \mathbb{R}^2 . Usaremos este procedimento para compreender o H^2 -fazendo um *mapeamento* no sentido cartográfico.

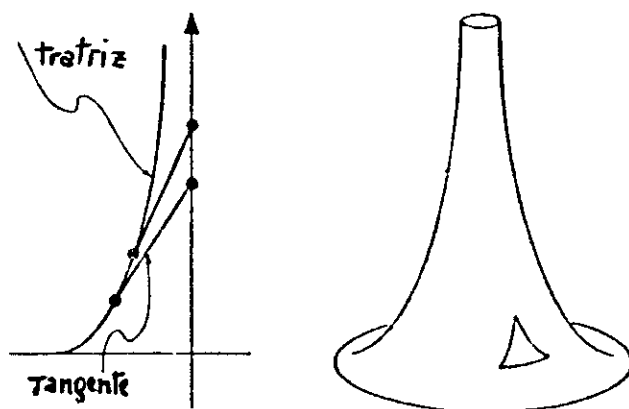


Figura 3.2 Tratrix é a curva cujos segmentos tangentes como acima indicados têm todos o mesmo comprimento; ao lado a pseudoesfera, obtida por revolução da tratrix, tem curvatura gaussiana negativa uniforme e apresenta propriedades geométricas análogas às do plano hiperbólico ([32]p150).

Uma métrica para o H^2 é obtida considerando-se a metade "superior" do plano R^2 , qual seja, $R_+^2 = \{(x,y) \in R^2 \mid y > 0\}$; nessa região impõe-se o elemento de linha $ds^2 = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$, que dá a fórmula para calcularmos o comprimento de uma curva suave no R_+^2 . Esta métrica é *conformemente plana*, ou seja, é a métrica euclidiana multiplicada por uma função de ponto $(1/y^2)$. A geometria diferencial irá nos informar sobre as geodésicas nesta variedade.

Sejam P_0 e P_1 dois pontos do R_+^2 com a mesma abscissa x , e com ordenadas y_0 e $y_1 > y_0$. Um segmento vertical γ que vá de P_0 até P_1 terá como comprimento

$$\int_{\gamma} ds = \int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} \left[\frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2) \right]^{1/2} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \log(y_1/y_0) ;$$

contudo ainda não podemos dizer que este é o menor caminho entre esses dois pontos na geometria hiperbólica. Imaginemos um outro caminho ℓ entre P_0 e P_1 ; para que a vertical seja geodésica, ℓ deverá ser maior que a distância calculada ao longo de γ . Percebemos que a curva ℓ deverá ter pelo menos um ponto fora da vertical, caso contrário ela seria a própria curva γ . Então x não é constante em algum trecho de ℓ , e a contribuição positiva dx^2 se fará sentir no integrando ocasionando um comprimento maior. Concluimos que $x = \text{const}$ é efetivamente uma geodésica do H^2 ([24]p414). Uma observação interessante sobre as linhas

verticais é que são duplamente infinitas em comprimento, tanto em $y \rightarrow \infty$ quanto em $y \rightarrow 0$.

Como em qualquer variedade, também no \mathbb{H}^2 uma isometria deverá levar geodésicas em geodésicas. Uma isometria bem simples do \mathbb{H}^2 é a reflexão do \mathbb{R}_+^2 em uma linha reta vertical, consequência direta do que foi visto acima, bem como uma translação horizontal - produto de reflexões em retas verticais. Uma outra isometria, menos trivial, é uma inversão do \mathbb{R}_+^2 em uma semicircunferência de raio r , centrada em um ponto a do eixo x ; esta isometria se encontra discutida em ([24]p415).

Vale notar que também essas semicircunferências representam geodésicas do \mathbb{H}^2 ; e ainda que toda semi-reta vertical no \mathbb{R}_+^2 é um caso limite de semicircunferência em que a abcissa a do centro tende ao infinito.

Mostra-se que toda isometria de \mathbb{H}^2 pode ser obtida (de forma não unívoca) mediante no máximo três reflexões em geodésicas de \mathbb{H}^2 ([24]p417); então toda isometria que preserve a orientação pode ser obtida mediante duas reflexões apenas.

3.4 ESPAÇOS TRIDIMENSIONAIS

3.4.1 VISUALIZAÇÃO DE TRIVARIEDADES

A exposição a seguir é baseada fortemente na referência [28], onde Thurston e Weeks mostram de maneira simples como visualizar

uma trivariabilidade que não o familiar E^3 . Para iniciar essa visualização eles sugerem estudar as diferentes configurações assumidas por uma dada engrenagem mecânica ([28]p110). Este conjunto geralmente constitui uma variedade topológica, chamada *espaço de configurações*.

Iniciaremos o estudo com um caso simples de movimento no plano, com apenas um grau de liberdade. Suponhamos uma barra com um ponto de apoio fixo e uma extremidade livre para girar sob qualquer ângulo no plano - figura 3.3. A extremidade móvel da

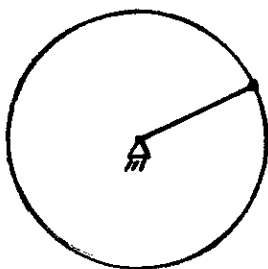


Figura 3.3 Movimento plano de uma barra.

barra traça uma circunferência S^1 no plano, cada ponto da circunferência representando uma configuração do sistema. O espaço das configurações é a circunferência S^1 , ou equivalentemente um segmento de reta com os dois extremos identificados: tal segmento tem igualmente a topologia S^1 .

Podemos partir desse sistema e adicionar-lhe alguns elementos; com isso aumentaremos as possibilidades de diferentes

configurações e obteremos novas variedades topológicas. Por exemplo, adaptando à extremidade livre da barra uma outra também livre para girar sob qualquer ângulo (figura 3.4) no plano,

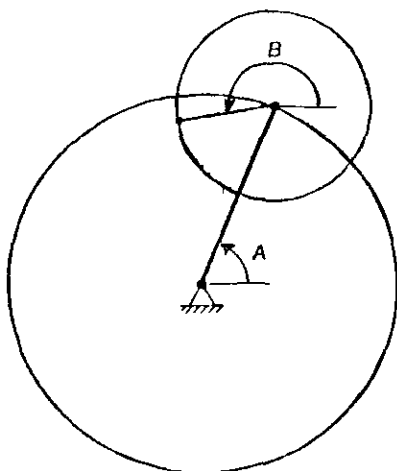


Figura 3.4 Sistema com duas barras unidas por uma rótula e livres para se moverem no plano ([28]p110).

teremos uma manivela dupla, ou seja, um sistema com dois graus de liberdade. Cada configuração corresponde agora a uma combinação dos ângulos independentes \hat{A} e \hat{B} , cada um podendo valer de zero a 360 graus; podemos representar cada configuração como um ponto em um plano coordenado cartesianamente, identificando os valores angulares zero e 360 graus (figura 3.5). Com isso obteremos um quadrado limitado pelas linhas de zero grau e 360 graus, que devem ser identificadas. O lado

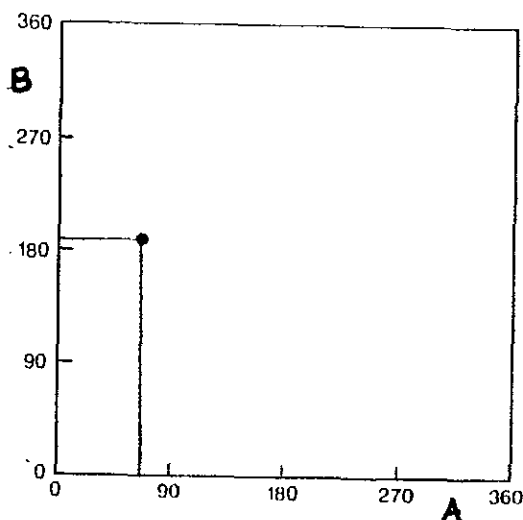


Figura 3.5 Espaço de configuração das duas barras, sua topologia é T^2 ([28]p110).

superior do quadrado é identificado ao inferior e o lado direito ao esquerdo; com essas identificações o quadrado adquire a topologia do toro T^2 .

O exemplo dado acima para o T^2 poderá ser utilizado para uma visualização do tritoro T^3 ; simplesmente adicionamos uma 3a. barra à extremidade da 2a. barra. É interessante notar que o movimento do sistema *continua sendo realizado no plano* ([28]p111) -ver a figura 3.6 - embora o espaço das configurações

seja tridimensional. Neste caso qualquer posição da tripla manivela poderá ser representada em um sistema de três eixos - cada eixo corresponde a uma das barras - onde em cada um será marcado um ângulo de zero a 360 graus; no cubo assim obtido deveremos identificar a face superior à inferior, a direita à esquerda, e a frontal à posterior (figura 3.6).

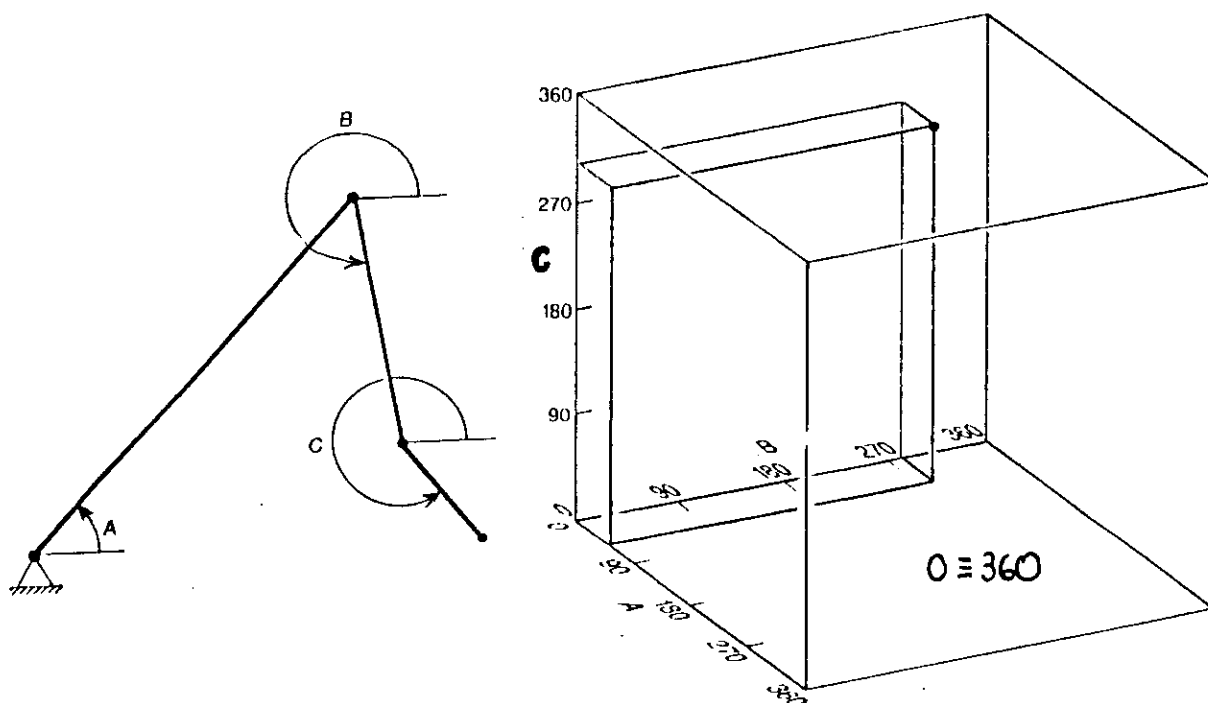


Figura 3.6 Espaço das configurações de três barras vinculadas com movimentos no plano. Ao lado o tritoro T^3 que o representa ([28]p111).

Com outros sistemas de barras vinculadas é possível visualizar diversas outras topologias, por exemplo o toro com dois buracos ("pretzel"); os interessados podem consultar ([28]p116), onde ali estão descritas.

3.4.2 GEOMETRIA INTRÍNSECA

Um "observador" deve se ater às medições realizadas no próprio espaço que estuda, sem se referir a elementos "externos" à sua variedade - que a rigor são inexistentes para ele. Ao estudar as propriedades geométricas da variedade ele deve descobrir a sua *geometria intrínseca*. Há também o que se chama de *geometria extrínseca*, que se refere a como a variedade está imersa ([28]p115) em um espaço de dimensão maior; a imersão pode ser efetuada de diferentes maneiras, sem violar sua geometria intrínseca. Vejamos: uma folha de papel pode ser curvada sem distensão no espaço tridimensional euclidiano para formar um cilindro ou um cone. Cilindro e cone - que têm diferentes geometrias extrínsecas - terão a mesma geometria intrínseca, porque do ponto de vista de um observador que *viva* na folha de papel não serão detectadas mudanças; por exemplo, a distância entre dois pontos sobre a folha de papel continuará a mesma quer a folha plana se deforme em um cilindro quer num cone. A métrica - no sentido local e não global- da folha de papel não muda ao serem feitas essas transformações. Em outras palavras, seres bidimensionais ("flatlanders" [33]p13 e referências aí citadas, [8]p35, ou ainda *betas* [31]p3) que vivam numa pequena região da folha de papel não poderão detectar se a folha foi curvada ou não.

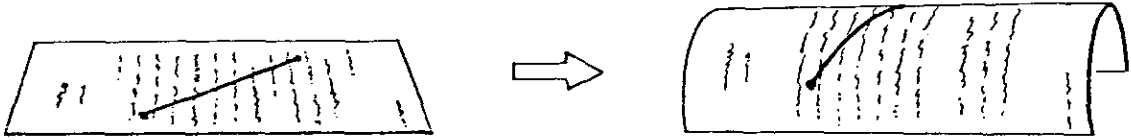


Figura 3.7 A folha de papel plana à esquerda e a curva à direita têm a mesma geometria intrínseca ([8]p37).

Se entretanto tentarmos "colar" a folha plana de papel sobre a superfície de uma bola de futebol não o conseguiremos; a menos que a cortemos, para que ela possa se adaptar à geometria intrínseca da superfície da bola de futebol, que é a geometria esférica (ou elítica).

Ainda sob o tema geometria intrínseca, tentaremos visualizar o que se chama *curvatura* da variedade, ou *curvatura gaussiana* ([8]p182).

Consideremos um círculo (disco D^2 ou bola B^2) recortado de uma superfície esférica S^2 ; ao tentarmos adaptar esse círculo ao plano euclidiano (ver figura 3.8) ele terá que ser rompido porque tem área menor que a área do círculo plano. A curvatura da S^2 é positiva, e a do plano euclidiano E^2 é nula.

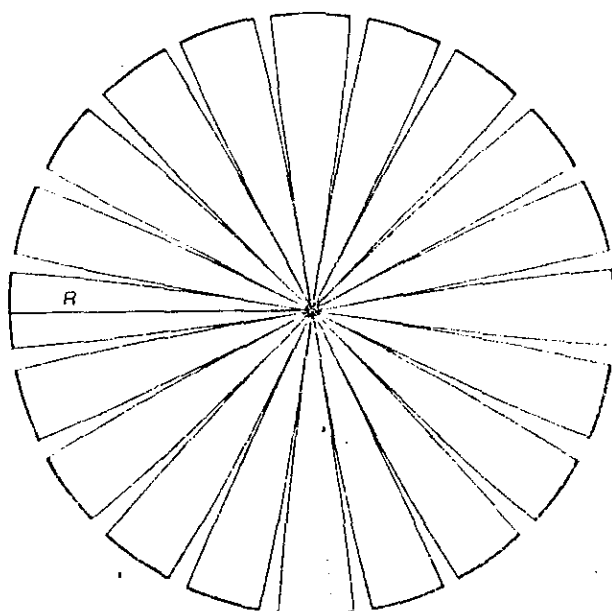


Figura 3.8 Efeito da mudança da curvatura em um disco D^2 transportado de uma S^2 para um E^2 ([28]p117).

O efeito oposto ocorrerá se transportarmos um círculo construído em um plano *hiperbólica* H^2 para o plano euclidiano: ele ficará *envuado* porque tem área maior (ver figura 3.9) que o círculo plano, a curvatura de H^2 é negativa. Podemos então, a partir do fato que nossa intuição está de certa forma adaptada à geometria euclidiana, dizer que a geometria elítica "*tem menos espaço*" que a euclidiana e a hiperbólica "*tem mais espaço*" que a euclidiana.

É óbvia a generalização desses conceitos para três dimensões: uma esfera sólida D^3 (ou B^3) de raio R , que tem volume $(4/3)\pi R^3$

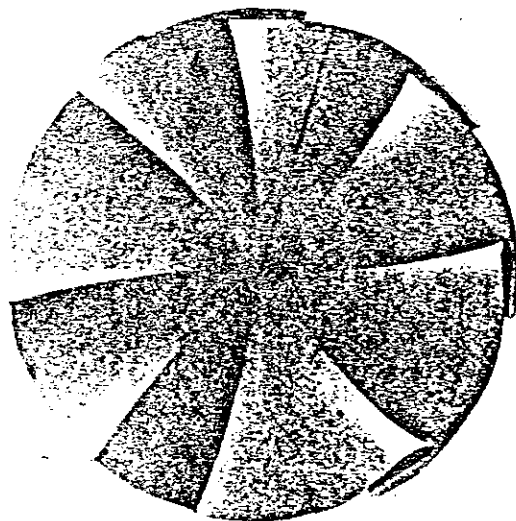


Figura 3.9 Efeito do aumento de curvatura em um disco D^2 transportado de um H^2 para um E^2 ([28]p117).

no espaço euclidiano E^3 , terá volume menor no triespaço esférico S^3 (ver figura 3.10) e volume maior no espaço tridimensional hiperbólico H^3 . Ao fatiarmos uma B^3 que está em um espaço triesférico S^3 e levarmos estas fatias D^2 para o espaço euclidiano tridimensional E^3 , acontecerá com essas fatias o mesmo que o representado na figura 3.8. Já as fatias D^2 de uma B^3 de um triespaço hiperbólico se enrugariam como na figura 3.9, se transportadas para um triespaço euclidiano.

O triespaço H^3 é isotrópico, todas as suas fatias bidimensionais são planos hiperbólicos H^2 (ver figura 3.11). Há

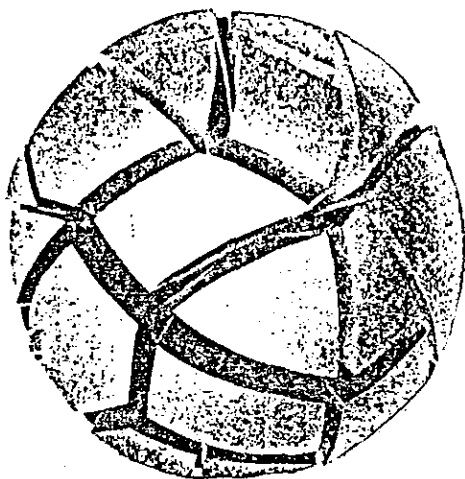


Figura 3.10 Uma B^3 construída em uma S^3 se esfacela ao ser trazida para o espaço tridimensional E^3 , se for mantido o seu raio ([28]p120).

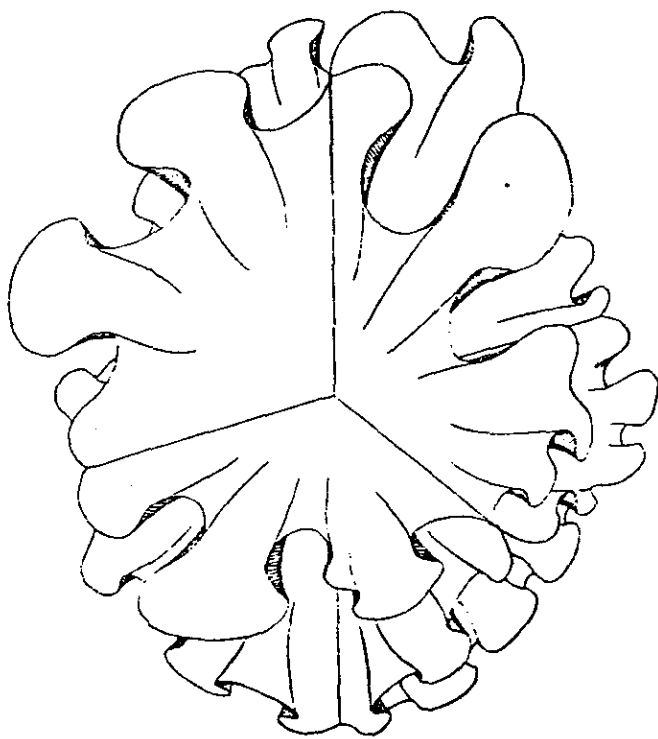


Figura 3.11 As fatias do espaço hiperbólico H^3 são planos hiperbólicos H^2 ([8]p216).

entretanto trivariiedades que têm diferentes curvaturas em diferentes direções: são *variedades anisotrópicas*. Por exemplo, uma variedade pode ter em algumas fatias a geometria elítica - curvatura gaussiana positiva - e noutras a geometria hiperbólica - curvatura gaussiana negativa. Ao fatiarmos uma B^3 deste espaço, obteremos tanto *discos elíticos* (discos com a geometria elítica) como *discos hiperbólicos* (discos com a geometria hiperbólica) (ver na figura 3.12)

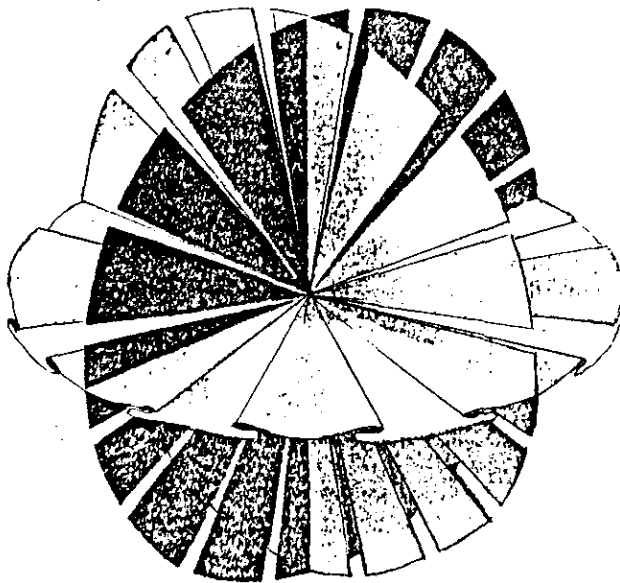


Figura 3.12 Espaço anisotrópico cujas seções tanto podem ter geometria elítica quanto hiperbólica ([28]p120).

Há algumas propriedades dos espaços tridimensionais que o recurso do mergulho (ver capítulo 2) ajuda a visualizar, da

mesma forma que nos ajudou a compreender no caso bidimensional.

Um flatlander ([33]p13) que vivesse na superfície de 2 dimensões, se visse um objeto desaparecer de sua frente e depois aparecer em outro ponto da superfície, não saberia como explicar o fato à luz do seu conhecimento (ver na referência [33] diversas abordagens desse assunto). Mas "seres tridimensionais" veriam o fato sem qualquer dificuldade; simplesmente poderiam retirar o objeto da superfície e colocá-lo em outra região da mesma. O "ser bidimensional" não perceberia as fases intermediárias dessa intervenção - ver a figura 3.13.

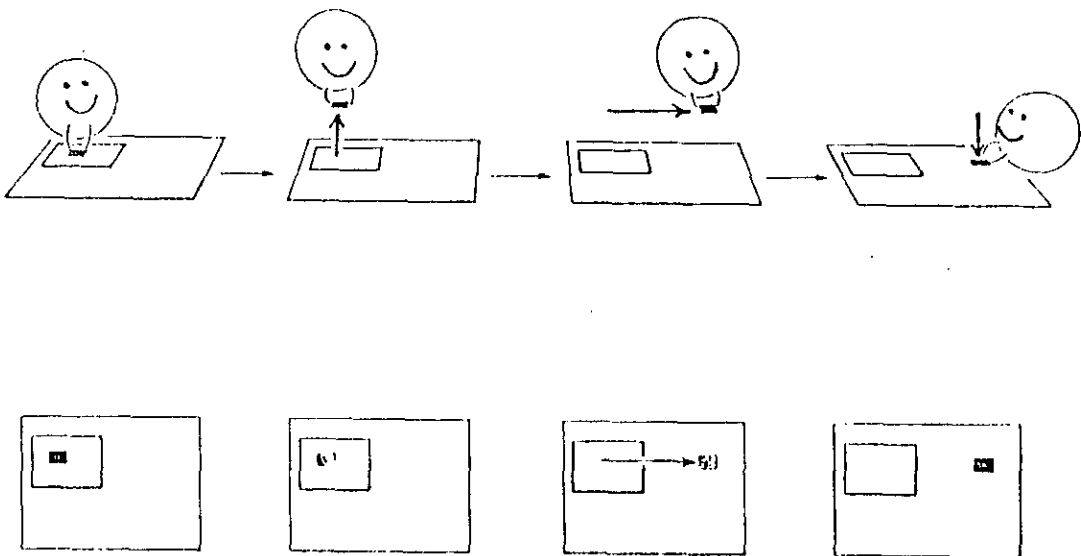


Figura 3.13 Na sequência de cima a atuação do ser tridimensional e na de baixo como o "ser da superfície" tentaria explicar o fato ([8]p190).

Como vivemos em um espaço localmente euclidiano, não é trivial "sentir" como é um espaço tridimensional curvo, o que requer muitos exemplos que ajudem a visualização.

De modo análogo à visualização do T^3 a partir de um cubo euclidiano, uma maneira bastante elementar de se visualizar uma trivariiedade é representá-la como um poliedro euclidiano no qual são consideradas idênticas duas-a-duas algumas faces. Por exemplo, obtém-se o chamado *espaço de Seifert-Weber* através de um dodecaedro no qual as faces opostas são identificadas -ver figura 3.14- após uma rotação de $3/10$ de volta. Já o *dodecaedro*

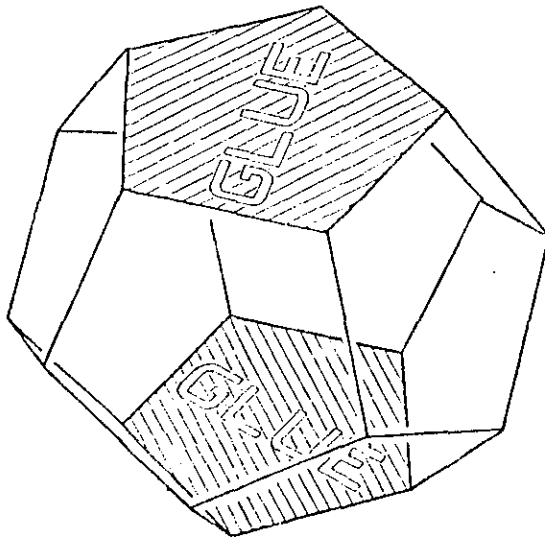


Figura 3.14 Espaço de Seifert-Weber pode ser obtido a partir do dodecaedro identificando cada par de faces opostas com giro de $3/10$ de volta sempre no mesmo sentido ([8]p222).

de Poincaré é obtido de forma análoga contudo gira-se apenas de $1/10$ de volta. Nenhum dos dois admite geometria euclidiana: o espaço de Seifert-Weber admite a geometria hiperbólica, e o de Poincaré admite a geometria elítica (ver detalhes em [8]p224 a 226).

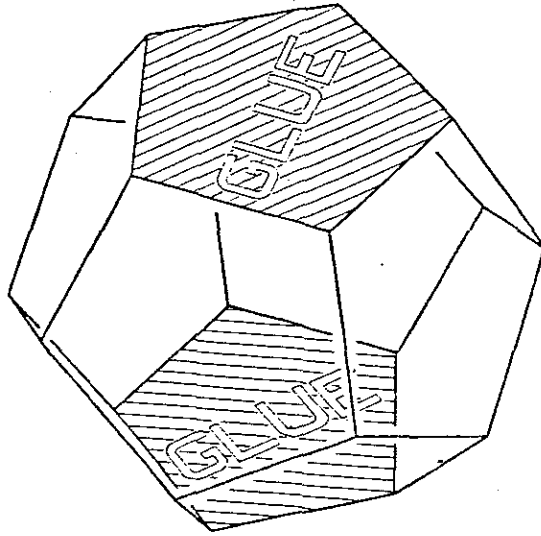


Figura 3.15 Dodecaedro de Poincaré obtido de forma análoga ao de Seifert-Weber, porém com o giro de $1/10$ de volta sempre no mesmo sentido, em cada par de faces opostas ([8]p224).

3.4.3 INTRODUÇÃO AOS FIBRADOS DE SEIFERT

Sejam dadas uma variedade B , que chamaremos de *variedade base*, e outra variedade F , que chamaremos de *fibra*; um espaço fibrado, ou *fibrado*, ou ainda *feixe fibrado* E ("fiber bundle") sobre B com fibra F , denotado $E = B \times F$, é uma variedade que localmente é o *produto direto* (ou produto cartesiano) de B e F

([10]p259). Isto é, se B é coberto por um conjunto de vizinhanças locais $\{U_i\}$, então o feixe E é topologicamente descrito em cada vizinhança U_i pela variedade produto $U_i \times F$ (ver figura 3.16).

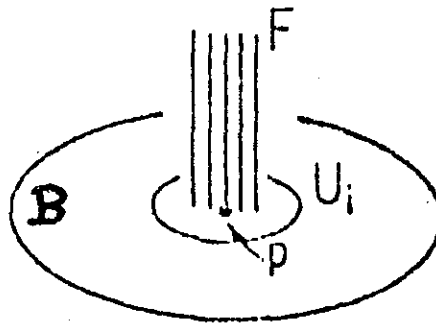


Figura 3.16 Estrutura local de um fibrado ([10]p260). Cada linha vertical representa a fibra associada a um ponto $p \in U_i$; as fibras podem ser pluridimensionais.

Um caso particular de fibrados constitui o dos *fibrados triviais* ("product bundles" [34]p3); neles a decomposição $E = B \times F$ vale não apenas localmente mas também globalmente ([10]p260), ou seja, $E = B \times F = F \times B$.

Não iremos definir uma série de propriedades dos fibrados porque não nos serão necessárias, mas a importância deles na interpretação de diversas teorias físicas é enorme: no estudo do eletromagnetismo, nas teorias de Yang-Mills, na gravitação de

Einstein, etc ([10]p259). Veremos apenas alguns exemplos de fibrados para podermos estudar os fibrados de Seifert.

Um cilindro finito pode ser obtido como o produto cartesiano - conceito simétrico - de um intervalo por uma circunferência, isto é, $I \times S^1$, porque ao mesmo tempo em que é um *intervalo de circunferências* e também uma *circunferência de intervalos* (ver figuras em [8] p232, 233). Já uma fita de Möbius pode ser vista como um conjunto de intervalos I ao longo de uma circunferência base S^1 , mas não como um conjunto de circunferências ao longo de um intervalo; em outras palavras, a fita de Möbius é "uma circunferência de intervalos" mas não é "um intervalo de circunferências" ([8]p231). O cilindro é então um fibrado trivial, e a fita de Möbius é apenas um fibrado $S^1 \times I$.

Um *toro sólido* é uma variedade tridimensional com fronteira, sendo sua fronteira um toro T^2 ; é como o tri-espaço ocupado por uma câmara de ar e mais o ar que ela encerra (não confundir o toro sólido com o tritoro T^3 , um espaço também tridimensional mas destituído de fronteira).

Um *toro sólido fibrado trivial* ([24]p428) é essencialmente o produto cartesiano $S^1 \times D^2$, onde as fibras são circunferências S^1 . Um *toro sólido fibrado* $T(p,q)$ é obtido a partir do trivial por um seccionamento transversal, com subsequente rotação de um dos discos D^2 por $2\pi q/p$ radianos, e uma soldagem para recompor. Finalmente, uma *garrafa de Klein sólida fibrada* é também obtida a partir do toro sólido fibrado trivial, mas um dos discos

obtidos no secionamento é soldado ao outro com uma reflexão em um diâmetro, em vez de uma rotação.

Estamos agora suficientemente aparelhados para a definição atual de *fibrado de Seifert* ([24]p429): é toda trivariiedade que possa ser decomposta em circunferências disjuntas (fibras), cada fibra tendo uma vizinhança isomorfa ou a um toro fibrado sólido ou a uma garrafa de Klein fibrada sólida. Convém alertar que uma definição menos abrangente foi usada até recentemente ([35]p361), excluindo a menção à garrafa de Klein.

3.5 AS OITO K-GEOMETRIAS TRIDIMENSIONAIS

3.5.1 INTRODUÇÃO

Esta seção objetiva fazer uma pequena introdução, no nível do instrumental matemático que foi estudado, ao teorema de Thurston ([24]p474). Faremos previamente algumas observações visando esclarecer mais a questão da interrelação *topologia* \times *geometria*. Nesta exposição evitaremos demonstrações matemáticas, as quais podem ser encontradas nas referências indicadas.

Ao ser deformada mediante homeomorfismos ([8]p28), uma variedade mantém invariantes algumas de suas propriedades, chamadas *topológicas*; por oposição, são chamadas *geométricas* as

propriedades que podem sofrer alteração. A curvatura gaussiana é uma importante propriedade geométrica de uma variedade bidimensional, ao lado da área, distâncias e ângulos. São topológicas por exemplo a dimensão n da variedade, a orientabilidade, a característica de Euler, a quantidade de fronteiras, e o genus (para superfícies).

Os matemáticos do século passado chegaram a uma estreita relação entre geometria e topologia no caso de bivariedades ([24]p401). Cada superfície *fechada* (isto é, sem fronteira), orientável ou não, admite uma e apenas uma métrica de curvatura constante. Em duas dimensões há somente três possibilidades de geometrias homogêneas: a euclidiana, a elítica, e a hiperbólica.

Admitem a geometria E^2 tanto o toro T^2 , que pode ser obtido através ^{de} identificações dos lados de um quadrado, como a garrafa de Klein K^2 , desde que um par de lados seja identificado normalmente e o outro o seja com inversão ([8]p51).

As superfícies fechadas que admitem a geometria S^2 são também apenas duas, a esfera S^2 e o plano projetivo P^2 . Todas as demais variedades bidimensionais fechadas admitem a geometria hiperbólica.

Em três dimensões dispomos de 8 geometrias homogêneas, 3 delas generalizando as bidimensionais: euclidiana tridimensional E^3 , elítica tridimensional S^3 , e hiperbólica tridimensional H^3 . As outras 5 são anisotrópicas, não têm curvatura constante.

Alertamos o leitor que quando mencionamos um tipo de geometria estamos na realidade nos referindo a toda uma *classes de geometrias* ([8]p251). Por exemplo, a geometria de uma esfera de raio igual a três é no sentido estrito diferente da geometria de uma esfera de raio dez; mas as duas, no sentido aqui usado, pertencem à uma mesma família, a *família das geometrias elíticas* bidimensionais. Essa classe engloba todas as variedades fechadas com curvatura constante positiva.

Devemos ainda acrescentar que em três dimensões há na realidade mais do que oito classes de geometrias homogêneas. Porém somente oito delas ocorrem como geometrias homogêneas de variedades compactas fechadas ([8]p252, 46).

Demonstra-se ([24]p476) que se uma 3-variedade fechada admite uma estrutura geométrica modelada em uma das 8 geometrias, então a K-geometria envolvida é *única*.

Em geral uma trigeometria não é capaz de palmilhar sozinha uma trivariiedade, cuja topologia é especificada; entretanto, há para esses casos a *Conjectura da Geometrização*, de Thurston ([24]p403): toda trivariiedade compacta e orientável pode ser retalhada por esferas S^2 e toros T^2 nela mergulhados, cada retalho admitindo uma estrutura geométrica (bolas tridimensionais B^3 sendo coladas às fronteiras esféricas S^2). Acrescente-se que, por definição, uma variedade com fronteira tem uma estrutura geométrica quando seu interior a tiver ([24]p403).

Na classificação de Thurston, numa K -geometria (X, G) o grupo G atua transitivamente em X , e com estabilizadores compactos ([24]p474). Duas K -geometrias (X, G) e (X', G') são *equivalentes* se há um difeomorfismo (ver também [36]p1200) de X com X' que leve a ação de G na de G' (ver detalhes em [24]p474). Restringe-se, sem perda da generalidade, ao caso onde X é simplesmente conexo e G é o *grupo máximo de isometrias de X* . Por exemplo, no caso do E^3 o grupo máximo de isometrias é $G = \text{Isom } E^3 = R^3 \times O(3)$; logo a geometria euclidiana em três dimensões é $(E^3, R^3 \times O(3))$ e não apenas (E^3, R^3) , embora também R^3 atue transitivamente em E^3 e constitua um grupo de isometrias do E^3 . Finalmente se impõe a restrição que *exista um $H \subset \text{Isom } X$ que atue em X como grupo recobrimento*, e tal que o *quociente seja compacto*. Lembramos que por exemplo E^3/H é homeomorfo ao tritoro T^3 (que é compacto) caso H seja o grupo gerado por três translações em direções independentes; note-se que $H \subset \text{Isom}(E^3)$.

Scott observa ([24]p474) que há trabalhos com classificações *mais finas* de trivariiedades, onde G não necessariamente é máximo, e pode não admitir quociente compacto. Neste caso, a K -geometria definida por Thurston como $(S^3, SO(4))$ pode também ser (S^3, e) , $(U(2), SO(2))$, ou ainda $(SO(4), SO(3))$.

A classificação de trivariiedades (adaptada de [24]p474) pode ser resumida enunciando o teorema de Thurston, que se encontra demonstrado na referência acima citada e nas notas de aulas do próprio Thurston [27]:

Qualquer K -geometria máxima, simplesmente conexa, tridimensional e que admita quociente compacto, é equivalente a uma das oito geometrias $(X, \text{Isom } X)$ onde X é uma das seguintes variedades: E^3 , H^3 , S^3 , $S^2 \times R$, $H^2 \times R$, \widetilde{SL}_2R , Nil ou Sol.

3.5.2 AS OITO K-GEOMETRIAS

TIPO 1 - K-GEOMETRIA EUCLIDIANA E^3

O grupo total de isometrias do espaço euclidiano é o $R^3 \times O(3)$. Podem ser citadas 10 topologias diferentes, todas admitindo ([24]p448) fibração de Seifert, para trivariiedades fechadas com estrutura geométrica modelada em E^3 . Dentre elas, 6 são orientáveis e 4 não-orientáveis ([8]p252), todas cobertas finitamente pelo T^3 . As não-orientáveis são $K^2 \times S^1$ e três outras que são feixes de K^2 sobre S^1 , e que podem ser obtidas através de um cubo com identificação de faces opostas com ou sem giro ([8]p112, 252, 297; ver figura 3.17). As seis orientáveis são o tri-toro T^3 ,

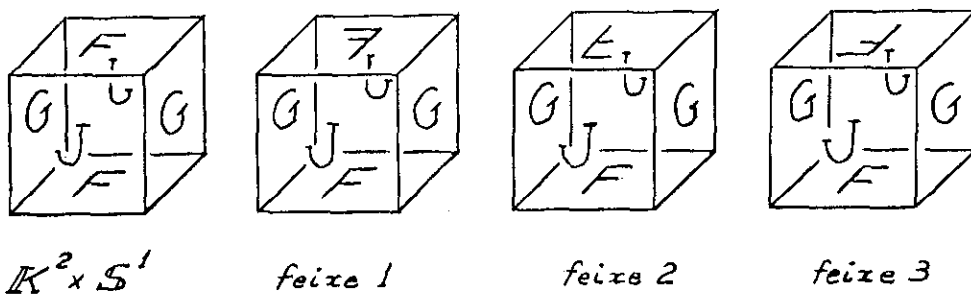


Figura 3.17 As 4 topologias não orientáveis do E^3 .

TIPO 2 - K-GEOMETRIA HIPERBÓLICA \mathbb{H}^3

Guarda analogia com o plano hiperbólico bidimensional \mathbb{H}^2 , é seu análogo tridimensional. Toda fatia bidimensional do \mathbb{H}^3 é um plano \mathbb{H}^2 (ver figura 3.11). A geometria do \mathbb{H}^3 (veja-se em [37]p14 o estudo de *hipersuperfícies* \mathbb{H}^3 do tipo espaço no espaço-tempo) não admite fibração de Seifert. O *dodecaedro de Seifert-Weber* (ver figura 3.14) admite a geometria \mathbb{H}^3 .

Thurston sugeriu ([8]p253) que a geometria mais comum em três dimensões é a hiperbólica. Um poliedro no \mathbb{H}^3 tem ângulos menores que no espaço euclidiano ([8]p215, 217). O grupo de isometrias do \mathbb{H}^3 é isomorfo ao grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ([36]p1201, [24]p418, 448), também chamado de grupo de Möbius. Esta geometria é ainda objeto de pesquisas.

TIPO 3 - K-GEOMETRIA ELÍTICA \mathbb{S}^3

É a geometria da triessfera \mathbb{S}^3 . O grupo total de isometrias é o grupo $O(4)$ ([24]p450) e o subgrupo que preserva a orientação é o $SO(4)$ ([30]p202). Alguns exemplos de variedades com esta geometria são a própria triessfera \mathbb{S}^3 ([8]p210), o espaço projetivo real tridimensional \mathbb{P}^3 , o *dodecaedro de Poincaré* (ver figura 3.15) e a variedade quaterniônica ([8]p229). Admite fibrados de Seifert ([24]p450). Estudaremos no capítulo 4 a triessfera e no 5 o \mathbb{P}^3 .

TIPO 4 - K-GEOMETRIA $S^2 \times E$

Deste tipo até o tipo 7 todas têm grupo de isometrias de 4 dimensões, possuem simetria de rotação local ([30]p202). O grupo de isometrias deste tipo é $\text{Isom}(S^2) \times \text{Isom}(E^1)$ e o subgrupo que preserva a orientação é $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^1$. Há somente 4 variedades compactas ([24]p457, 459) com esta geometria. São o fibrado trivial $S^2 \times S^1$ orientável, um fibrado não trivial $S^2 \times S^1$ não orientável (designado K^3 em [8]p311), o fibrado trivial $P^2 \times S^1$ não orientável, e finalmente o fibrado não-trivial $P^3 \# P^3$ orientável (que aliás constitui a única trivariiedade fechada dotada de estrutura geométrica e que é uma soma conexa não-trivial [24]p457).

TIPO 5 - K-GEOMETRIA $H^2 \times E^1$

Há infinitas trivariiedades com estrutura modelada nesta K-geometria; o produto de qualquer superfície hiperbólica por S^1 ou por \mathbb{R}^1 tem essa estrutura. Seu grupo de isometrias é $\text{Isom}(H^2) \times \text{Isom}(E^1)$, e todas as suas variedades fechadas admitem fibração de Seifert ([24]p460). Exemplos de topologias são $T_g \times S^1$ onde os T_g são toros ([36]p1201) com genus g , isto é, esferas S^2 com g alças.

TIPO 6 - K-GEOMETRIA $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$

Também é chamada de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ *torcida*, ou $\widetilde{T}_1(\mathbb{H}^2)$, que é o espaço recobrimento universal do feixe de vetores unitários tangentes sobre o \mathbb{H}^2 ([36]p1201, [30]p202); esta geometria guarda para com $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ a mesma relação que a euclidiana torcida (tipo 7-Nil) tem para com a geometria euclidiana, e admite fibração de Seifert se a trivariiedade for fechada ([24]p465). Toda variedade do tipo $A \times \mathbb{S}^1$, onde A é uma superfície fechada $\neq \mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2, \mathbb{K}^2$ ou \mathbb{T}^2 , admite ou a geometria $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ ou a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ torcida ([8]p257). As isometrias da $\widetilde{T}_1(\mathbb{H}^2)$ formam o grupo $\mathbb{R}^1 \times \widetilde{Isom}(\mathbb{H}^2)$ ([30]p202); todas preservam a orientação ([24]p462). Ver em [24] p463 e em [30]p202 detalhes sobre a denominação $\widetilde{T}_1(\mathbb{H}^2)$.

O exemplo mais popular de variedade com esta geometria é construído a partir de um prisma octogonal, com identificação das faces de um modo bastante peculiar ([8]p245, 313).

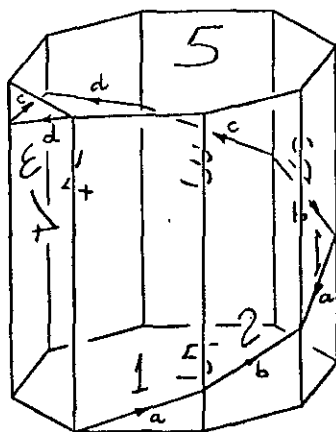


Figura 3.19 Variedade $(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) \times \mathbb{S}^1$, com K-geometria $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ torcida ([8]p313).

O leitor poderia conjecturar a existência de uma correspondente K-geometria $S^2 \times E$ torcida; esta geometria realmente existe, mas "*bastante espantosamente*" ([8]p257) ela é a já conhecida K-geometria S^3 , que vimos como tipo 3.

TIPO 7 - K-GEOMETRIA NIL

É também chamada de *geometria euclidiana torcida* ([8]p254); Nil, ou de Heisenberg, é o grupo de Lie constituído pelas matrizes reais da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sob multiplicação. Toda variedade euclidiana torcida é um fibrado sobre o plano euclidiano, assim como toda variedade $H^2 \times E$ torcida o é sobre o hiperbólico. Entretanto, Nil não é isométrico ao E^3 ; em particular, enquanto E^3 admite isometrias que mudam a orientação, Nil não admite ([24]p467).

O *tritoro torcido* constitui a trivariiedade mais conhecida da geometria Nil. Ele é obtido a partir de um cubo em que as faces superior e inferior são identificadas da maneira usual, mas as faces laterais opostas requerem identificação fibra a fibra. Cada fibra vertical é identificada à que lhe fica exatamente em frente na face oposta, mas com um deslocamento vertical dado por uma linha inclinada como indica a figura 3.20; na verdade cada fibra é topologicamente uma circunferência S^1 . O tritoro torcido

é orientável como o é qualquer variedade com a geometria Nil ([8]p257).

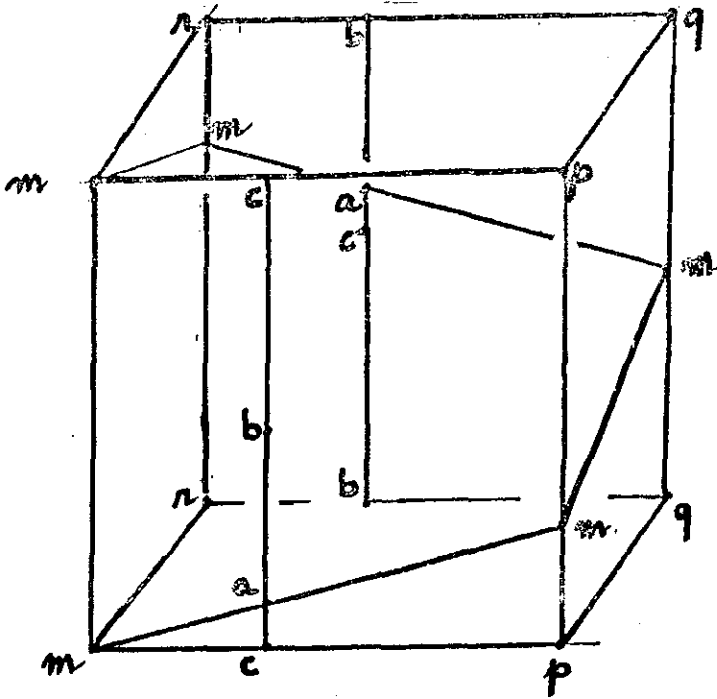


Figura 3.20 Tritoro torcido, com K-geometria Nil ([8]p244).

Toda variedade fechada modelada no Nil admite fibração de Seifert ([24]p469); e todo fibrado de Seifert sobre um toro ou garrafa de Klein admite ou a K-geometria E^3 ou a Nil ([8]p257).

TIPO 8 - K-GEOMETRIA SOL

Também é representada abstratamente por um grupo de Lie, chamado grupo de Lie solúvel ("solvable"), daí o nome Sol

([24]p470). *Não admite fibrados de Seifert* e sim feixes com base S^1 e fibras contituídas de toros bidimensionais. A geometria Sol nem é isotrópica nem localmente rotacionalmente simétrica; desconhecemos qualquer variedade que seja dotada dessa geometria e cuja visualização seja suficientemente simples.

Finalizamos este capítulo com uma tabela indicando para cada tipo de K-geometria tridimensional a variedade \tilde{M} de recobrimento universal, o grupo das isometrias $G(M) = \text{Isom}(M)$, a curvatura, e a possibilidade ou não de admitir fibração de Seifert.

Tipo	Variedade rec.univ.	Grupo de isometrias	Curvatura	Admite Seifert
1	E^3	$R^3 \times O(3)$	const nula	SIM
2	H^3	$SL(2, C)$	const negat.	NÃO
3	S^3	$O(4)$	const posit.	SIM
4	$S^2 \times E$	$G(S^2) \times G(E^1)$	Anisotrop.	SIM
5	$H^2 \times E$	$G(H^2) \times G(E^1)$	Anisotrop.	SIM
6	$\tilde{SL}_2 R$	$R^1 \times G(H^2)$	Anisotrop.	SIM
7	Nil	$G(\text{Nil})$	Anisotrop.	SIM
8	Sol	$G(\text{Sol})$	Totalm. Anisotrop.	NÃO

Figura 3.21 Esquema das oito geometrias e suas características gerais.

CAPITULO 4

AS ESFERAS S^2 E S^3

4.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é descrever a variedade topológica de recobrimento universal pertencente à K-geometria $(S^3, O(4))$, que é a tri-esfera S^3 . Interessa-nos compreender melhor a tri-esfera para aplicar esse conhecimento ao estudo de um campo magnético na S^3 e no P^3 - o que será feito no capítulo 5. Começaremos recorrendo à familiar bi-esfera S^2 e faremos um paralelo com a S^3 , pois grande parte dos conceitos geométricos e topológicos da S^3 têm seus correspondentes na S^2 .

Ainda que neste trabalho não seja nosso objetivo estudar a topologia do espaço-tempo, tampouco a do universo, citamos a referência [38] em que Ellis e Schreiber analisam algumas das possibilidades topológicas para o modelo padrão do universo (FLRW); eles discutem topologias compactas ("small universes") que são compatíveis com os modelos de Friedman. Devemos ressaltar a importância deste trabalho na medida em que os artigos referentes ao modelo FLRW em geral discutem as *geometrias* possíveis e raramente as *topologias* possíveis.

4.2 A SUPERFÍCIE ESFÉRICA S^2

Na geometria plana a reta é infinita tanto para frente quanto para trás, retas paralelas são aquelas que mantêm invariante a distância entre si. O quociente entre o comprimento da circunferência e o raio vale 2π , qualquer que seja o tamanho da mesma; além disto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180 graus, ou π radianos, para qualquer triângulo.

Faremos o possível para visualizar o *mundo biesférico* como se fôssemos flatlanders, que desconhecem portanto a terceira dimensão. Este tipo de recurso é bastante bom porque poderemos depois com maior facilidade visualizar o *mundo triesférico* ([31]p3, 14). Em princípio não usaremos o mergulho da S^2 , ou da S^3 , no R^3 , ou no R^4 , respectivamente.

Os flatlanders são pequenos a ponto de poderem aplicar a geometria euclidiana localmente em sua biesfera. Mas, caso façam viagens mais longas, sentirão os efeitos da curvatura da S^2 . Verão que ao traçarem o que consideram uma reta, ou seja, uma linha que siga sempre em frente, esta retornará ao ponto de partida; será portanto uma circunferência, de comprimento designado por $2M$, onde M se chama *magnitude* da biesfera.

Se os flatlanders traçarem duas retas - circunferências máximas ou seja geodésicas da S^2 - que estejam inicialmente separadas por uma distância d , obrigatoriamente sua separação

irá diminuir até que se encontrem em dois pontos opostos que distam entre si M . Ou seja, não há retas paralelas na S^2 . Se tentarem mantê-las paralelas, pelo menos uma delas deixará de ser reta da biesfera.

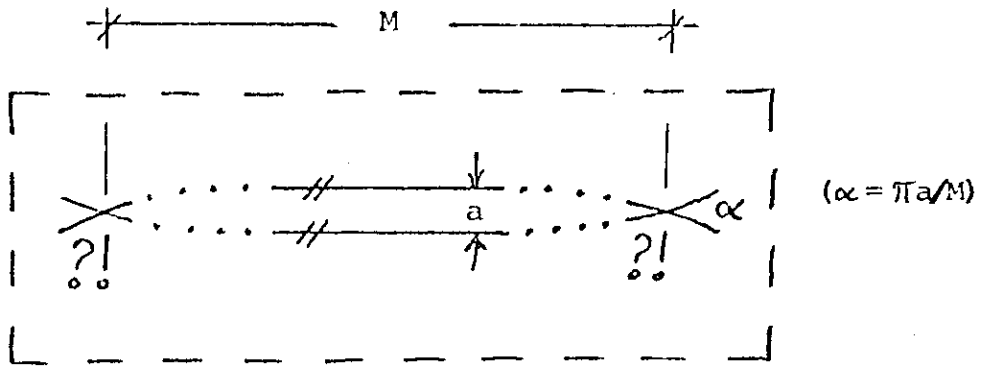
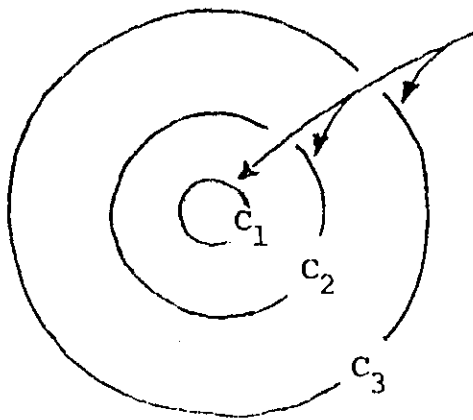


Figura 4.1 As retas que pretendem ser paralelas na S^2 acabam se encontrando em pontos separados pela magnitude M ([31]p9).

Quanto ao comprimento da circunferência que for traçada pelos flatlanders, não é mais $C = 2\pi R$ e sim $C = 2M \text{ sen}(\pi R/M)$, que para $R \ll M$ tende a $2\pi R$; nessa fórmula para a S^2 o raio R da circunferência é obviamente traçado sobre a biesfera. Esta circunferência (ver figura 4.2) limita um círculo curvo (D^2) da S^2 .

(a)



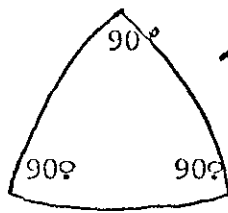
circunferências
com raios r_1, r_2, r_3

$$r_1 \ll M \quad ; \quad C_1 \approx 2\pi r_1$$

$$r_2 = M/2 \quad ; \quad C_2 = 2M \quad (\neq \pi M \text{ ?!})$$

$$r_3 = M \quad ; \quad C_3 = 0 \quad (\text{?!})$$

(b)



triângulo triretângulo
(área $S = M^2/2\pi$)

Figura 4.2 (a) Circunferências em uma S^2 . (b) Triângulo triretângulo na S^2 ([31]p9, 10).

Note-se que a circunferência é máxima para $\pi R/M = \pi/2$, ou seja, $R = M/2$ e então $C = 2M$. Quanto aos triângulos, são também curvos, e conforme se vê na figura 4.2 b, é possível sobre uma esfera se construir um triângulo com três ângulos retos.

Quanto às propriedades globais da S^2 notamos que ela não tem limites, isto é, não tem uma fronteira onde acabe; contudo é

finita, pois tem sua área perfeitamente determinada (igual a $4\pi\rho^2$, onde $\rho = M/\pi$). Conforme vimos em 1.3.5 é compacta no \mathbb{R}^3 ; já no plano euclidiano podemos ir tão longe quanto queiramos, pois ele se prolonga infinitamente em todas as direções. Na S^2 o centro de curvatura fica fora de sua superfície, portanto os seres bidimensionais não têm acesso a ele, assim como os seres tridimensionais da S^3 não terão acesso ao centro de curvatura da triessfera caso esta seja suposta mergulhada num \mathbb{R}^4 .

4.3 VISUALIZAÇÃO DA S^3

Para a visualização da curvatura da S^3 é interessante a comparação das curvaturas nas esferas de menor dimensão, isto é, na S^1 e na S^2 . Devemos inicialmente imaginar seres unidimensionais ([31]p13) que vivem em uma S^1 . Se seu tamanho é muito menor que o raio da circunferência, eles localmente terão a impressão de que vivem em uma reta \mathbb{R}^1 ; contudo, se fizerem uma viagem mais longa em seu mundo seguindo *sempre em frente*, inevitavelmente chegarão de volta ao ponto de onde partiram. Determinam assim uma propriedade topológica estranha de seu mundo. De maneira análoga os seres bidimensionais que vivam em uma S^2 , ao seguirem *sempre em frente, sem desvios*, percorrerão um caminho que supõem reto, pois estão seguindo sem qualquer afastamento lateral; analogamente àqueles da S^1 , também eles retornarão ao ponto de onde partiram.

Há uma dificuldade a enfrentarmos para extrapolarmos esse

procedimento ao caso da triésfera: é que o número máximo de dimensões que visualizamos bem é tres, e poderá ser bastante penoso nos reportarmos a um mundo de 4 dimensões e de lá visualizarmos as propriedades da esfera tridimensional nele mergulhada. Portanto parece-nos melhor prosseguirmos extrapolando até onde for possível a familiar S^2 para a S^3 e veremos que com algum esforço e exercício passaremos a lidar com a S^3 sem grandes incômodos.

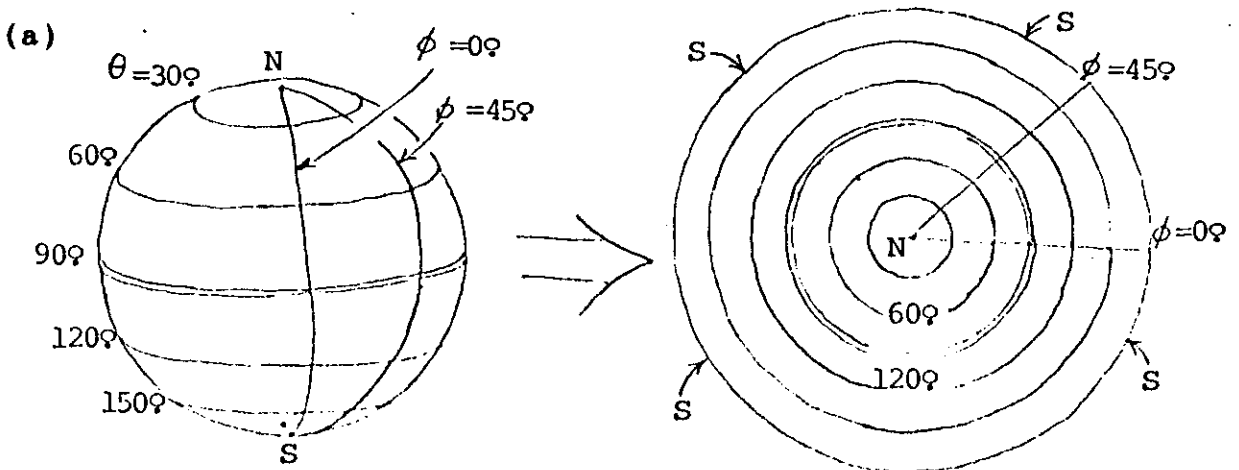
Devemos tomar um certo cuidado para não confundir a S^3 com a B^3 (bola 3, sólida). A superfície esférica S^2 está para o círculo D^2 (a área limitada por uma circunferência S^1) assim como a S^3 está para a B^3 (volume limitado pela S^2).

Na S^2 , a cada ponto P temos um único ponto diametralmente oposto a ele, chamado de *antípoda* de P , que será representado por \bar{P} ; para sairmos de P e irmos para \bar{P} podemos tomar a direção de qualquer reta -geodésica- da S^2 que passe por P . [31]p24). Na S^3 ocorre o análogo ([31]p24): no ponto P tomamos qualquer direção no triés espaço (para cima, para os lados ou para baixo), e após escolhida a direção seguimos *sempre em frente*, na "reta" da triésfera. Exatamente na metade do caminho total de ida e volta encontraremos o antípoda de P , isto é, o ponto \bar{P} . Designamos por $2M$ a distância total percorrida no trajeto $P\bar{P}P$, e chamamos de *magnitude* da triésfera a quantidade M .

4.4 MAPEAMENTOS DA S^3

Uma das dificuldades da S^3 é a questão do mapeamento. Deveremos mais uma vez recorrer a uma comparação com a biesfera, pois já estamos habituados ao mapa da S^2 (por exemplo no estudo da geografia, onde a superfície terrestre é aproximadamente uma S^2). Na figura a seguir, em um lado do desenho temos a " S^2 " terrestre e do outro lado um mapa seu no plano. O círculo mais próximo ao pólo norte (N)-centro do mapa- é a região de menor distorção, e na periferia o círculo maior que representa o pólo sul (S) é maximamente distorcido, porque S é apenas um ponto e está sendo representado por toda uma S^1 ; na região intermediária está representado o equador da superfície terrestre.

As circunferências máximas da biesfera são mapeadas em curvas ovais (não elipses), tendo como formas limites ora uma circunferência (mapa do equador), ora diâmetros (os meridianos) acrescidos da circunferência que mapeia o pólo sul.



a figura
continua

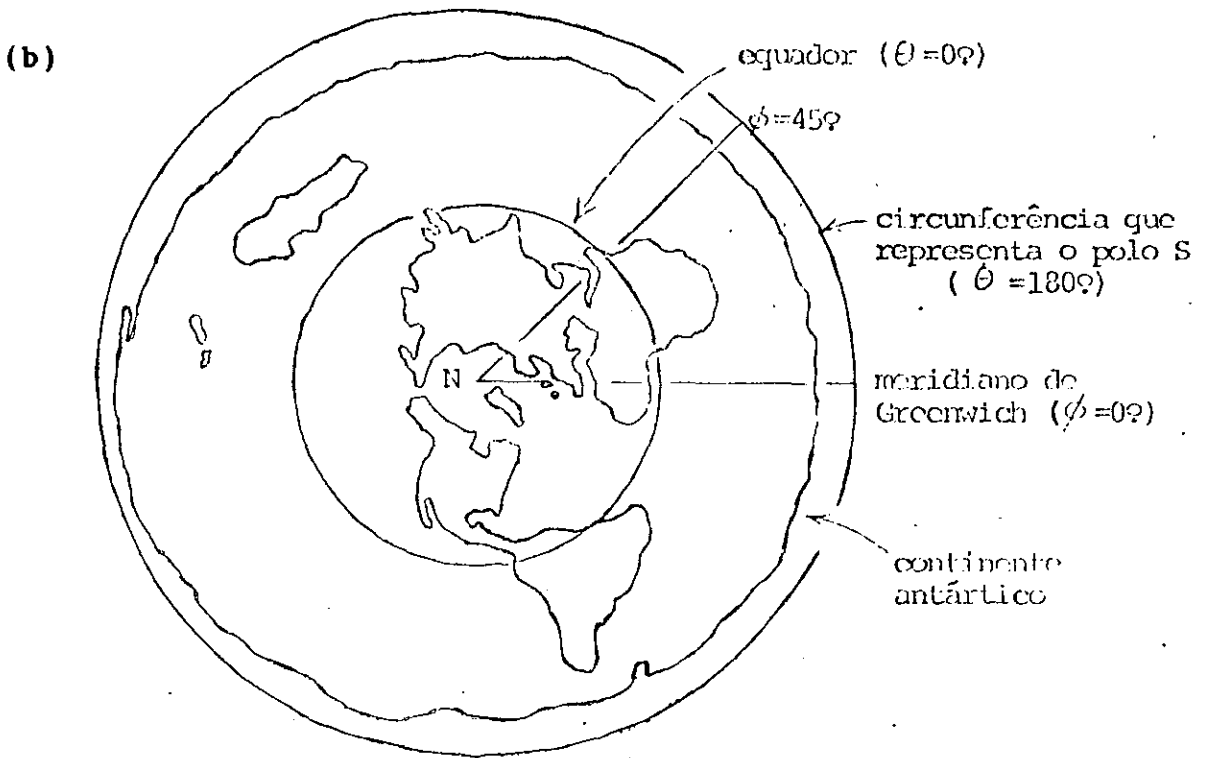


Figura 4.3 (a) e (b) Mapa da superfície terrestre. Observe que o pólo sul é mapeado na circunferência que limita o mapa ([31]p34, 35).

Passemos ao caso da S^3 , onde vamos encontrar uma dificuldade adicional: em uma folha de papel somente poderemos desenhar projeções do espaço tridimensional. Esta dificuldade não existia no mapa da S^2 , pois ela e seu mapa são ambos bidimensionais. Escolhe-se um ponto P da triefera para centro do mapa (estereomapa [31]p37), que será uma esfera sólida comum B^3 com raio caracterizando a magnitude da S^3 , isto é, M . O espaço tridimensional vizinho a P será minimamente distorcido; porém a região volumétrica vizinha a \bar{P} terá grande distorção, na medida em que o ponto \bar{P} é mapeado em toda a superfície S^2 que limita a bola B^3 .

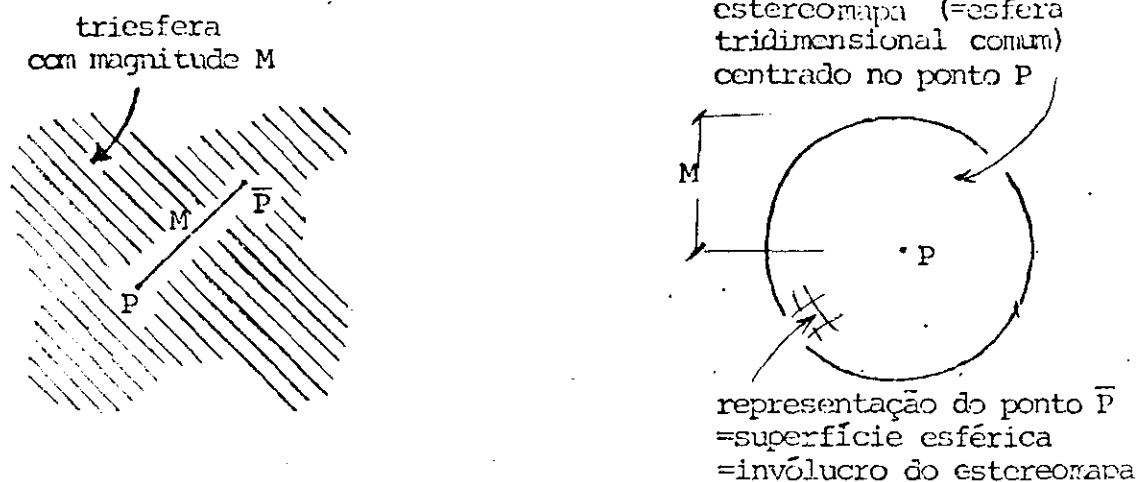


Figura 4.4 Estereomapa da triesfera S^3 ([31]p37).

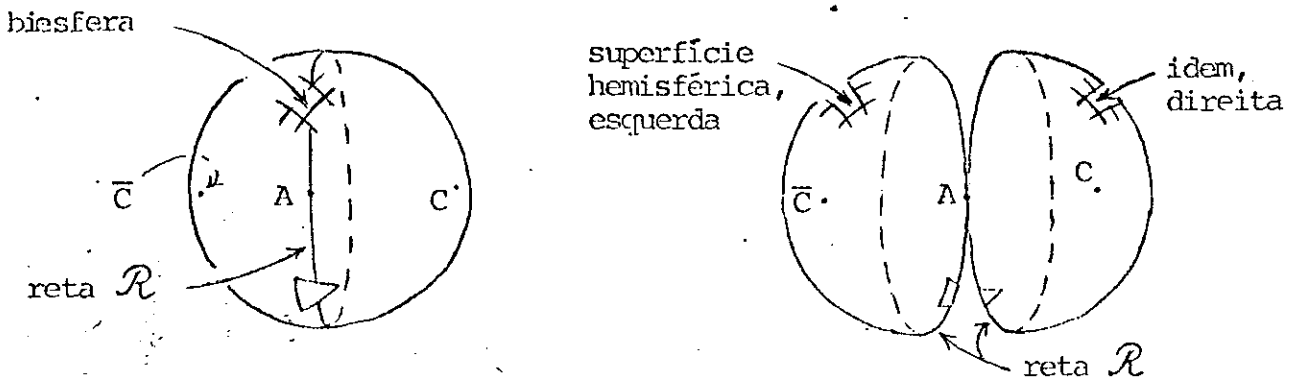
O plano da S^3 é um "plano curvo", tem algumas propriedades semelhantes ao plano euclidiano, no entanto se trata de uma superfície esférica S^2 . Analogamente uma reta da S^3 é uma "reta curva", como na biesfera S^2 . Sabemos que a partir de uma reta r e um ponto A não pertencente a ela fica determinado um plano no R^3 , este plano contendo qualquer reta que passe por A e intercepte r ; e poderemos caracterizar o plano como "o conjunto das retas que passam por A e se apoiam em r ". Em uma S^3 com magnitude M , um plano também é determinado por um ponto A exterior a uma "reta" (uma S^1) \mathfrak{K} ; cada reta que passe por A e se apoie na reta \mathfrak{K} é também uma circunferência S^1 , que na verdade intercepta a reta \mathfrak{K} em dois pontos opostos (antípodas). A medida em que vamos traçando todas essas as circunferências, iremos preenchendo o "plano", isto é, a superfície S^2 que contém A e a reta \mathfrak{K} . No plano da S^3 a geometria não é euclidiana como no

plano do E^3 , e sim a geometria elítica da superfície esférica de raio $\rho = M/\pi$.

Cada plano "curvo" compartimenta a triessfera em 2 regiões disjuntas. Topologicamente ambas as regiões são B^3 , porém ambas são curvas; notamos a analogia com um meridiano de uma superfície esférica que a divide em duas calotas, isto é, em 2 círculos curvos (topologicamente dois discos D^2).

A triessfera pode ser mapeada de forma a reduzir as deformações; como vantagem teremos menor distorção e como desvantagem o fato de termos que repartir o atlas em duas cartas. Para fixação de idéias, vejamos no caso da S^2 como seria feito. Divide-se a S^2 por uma circunferência máxima, por exemplo um meridiano, obtendo-se 2 hemisférios exatamente iguais (2 calotas D^2); agora achatamos os hemisférios, obtendo dois círculos D^2 - ver figuras 4.5 (a) e (b). Para a triessfera S^3 , por

(a)



(b)

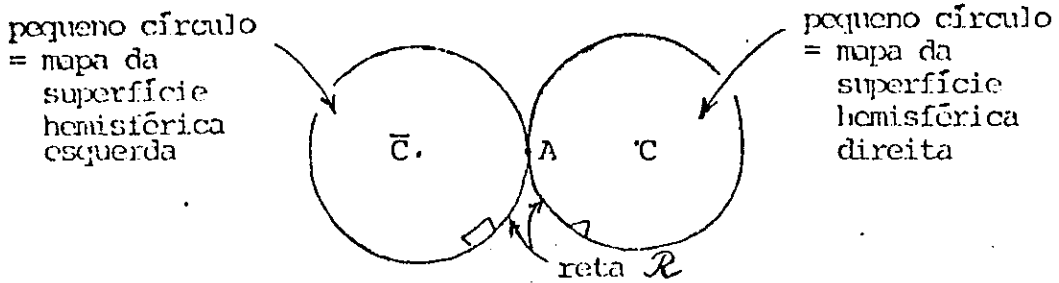


Figura 4.5 (a) e (b) Mapa da superfície esférica através ^{de} duas cartas ([31]P45).

analogia, constroem-se um plano (S^2) com pólos P e \bar{P} que a divide em duas bolas B^3 ; uma mapeará os pontos mais próximos de P e a outra os de \bar{P} (ver [31]p45).

4.5 RETAS POLARES

O fato da triessfera ser finita (volume finito) e curva traz diferenças bem interessantes em relação ao espaço euclidiano, e por outro lado apresenta semelhanças com a biesfera.

Dado um ponto P na S^2 , temos já bem determinado uma única reta \mathcal{R} (topologia S^1) com a característica de que todos os seus pontos distam $M/2$ de P ; além disto, o antípoda de P (o ponto \bar{P})

dista também $M/2$ de todos os pontos de \mathcal{R} . Chama-se a esta reta de *reta polar de P e \bar{P}* , ou simplesmente *polar de P* , e os pontos P e \bar{P} são os *pólos de \mathcal{R}* . Como a distância entre P e \bar{P} é M e o máximo afastamento entre os pontos de uma S^2 também é M , tem-se que a reta polar é a *reta maximamente afastada de P* , e por outro lado os pontos de maior afastamento da reta são os pólos desta reta.

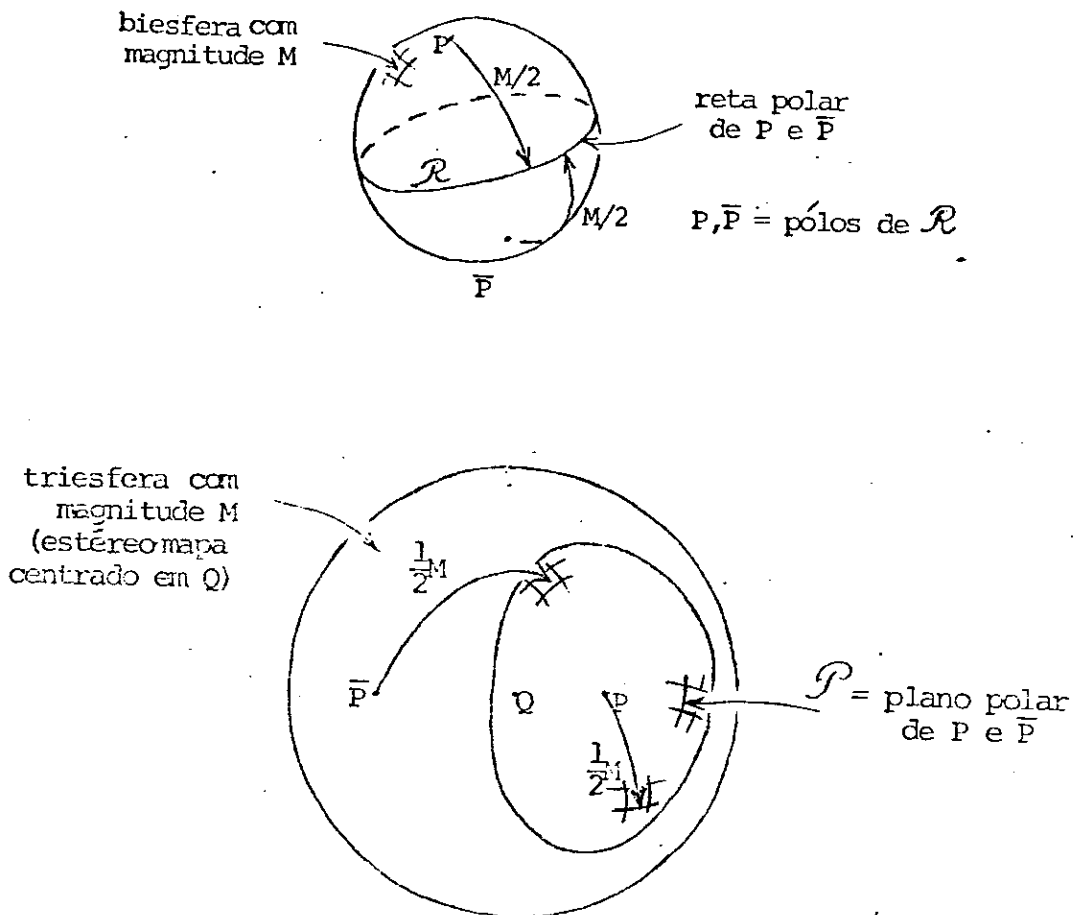


Figura 4.6 Em cima a reta polar de P e \bar{P} na biesfera S^2 , e embaixo o análogo na S^3 , que é o plano polar de P e \bar{P} ([31]p48).

Na triesfera podemos definir conceitos análogos a esses. Dado um ponto P da S^3 , temos determinado univocamente um plano \mathcal{P} , *polar de P* , e os pontos P e \bar{P} são os *pólos do plano \mathcal{P}* . Igualmente ao caso bidimensional, em que toda reta que passa por um ponto P incide perpendicularmente na correspondente reta polar, também na S^3 toda reta que passa por um ponto P incide ortogonalmente no correspondente plano polar.

Cada reta \mathcal{R} da S^3 *privilegia uma reta companheira \mathcal{R}'* , chamada de *reta polar da reta \mathcal{R}* , com a propriedade que a distância de qualquer ponto de uma delas a qualquer ponto da outra é invariante e vale $M/2$. Inicialmente tomamos 2 circunferências de mesmo raio enlaçadas e situadas em planos ortogonais (ver figura 4.7), centradas cada uma em algum ponto da outra, e em seguida fazemos crescer os raios destas circunferências mantendo-se a centralização mútua e a ortogonalidade entre os planos. Quando seus raios atingirem $M/2$, as circunferências constituirão o par de retas polares \mathcal{R} e \mathcal{R}' ; e teremos que qualquer ponto de uma delas distará exatamente $M/2$ de qualquer ponto de sua companheira.

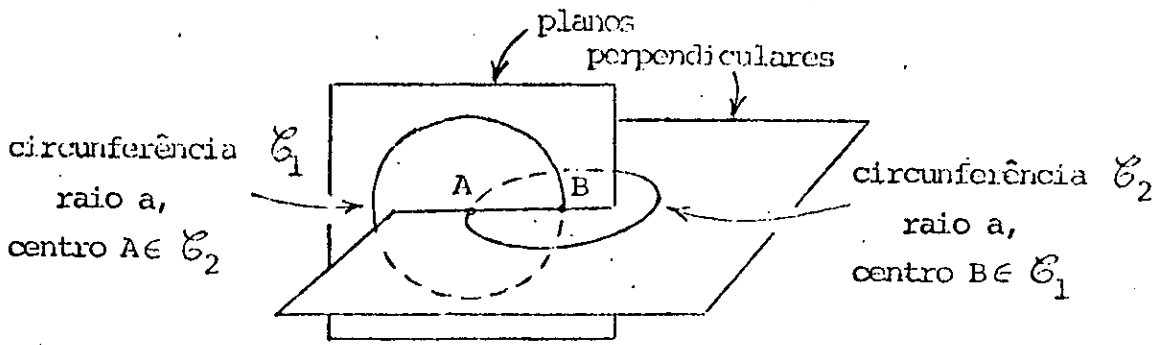


Figura 4.7 Construção de retas polares na triesfera ([31]p56).

A polar da reta \mathcal{R} também pode ser obtida escolhendo-se um ponto P_1 de \mathcal{R} e desenhando-se o correspondente plano polar \mathcal{P}_1 - conjunto dos pontos que distam $M/2$ do ponto P_1 ; em seguida escolhe-se outro ponto P_2 da reta \mathcal{R} , e desenha-se o plano polar \mathcal{P}_2 de P_2 . A interseção de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 determina a reta polar de \mathcal{R} , isto é, \mathcal{R}' ; apenas há que evitar que o ponto P_2 seja o antípoda de P_1 , a fim de que os planos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sejam distintos.

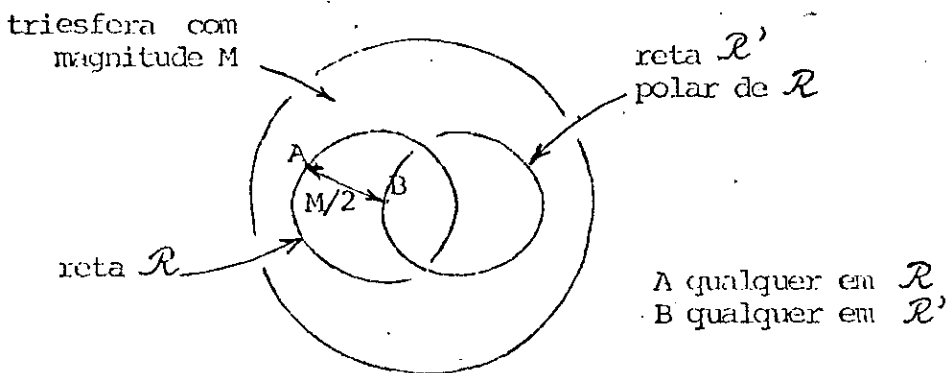


Figura 4.8 As retas polares \mathcal{R} e \mathcal{R}' ([31]p57).

4.6 SUPERFÍCIES DE CLIFFORD

Pretendemos descrever o lugar geométrico (l.g.) dos pontos equidistantes de determinadas figuras geométricas da triessfera. Por exemplo, qual é o l.g. dos pontos equidistantes de um plano S^2 da triessfera? Veremos a seguir como dar solução a questões deste tipo.

No plano euclidiano, as linhas que se mantêm equidistantes de uma dada reta são também retas; na S^2 , as linhas que se mantêm equidistantes a uma reta \mathcal{R} da biesfera (\mathcal{R} é uma circunferência máxima), são circunferências menores (não geodésicas) centradas nos polos R e \bar{R} da reta \mathcal{R} - ver figura 4.9.

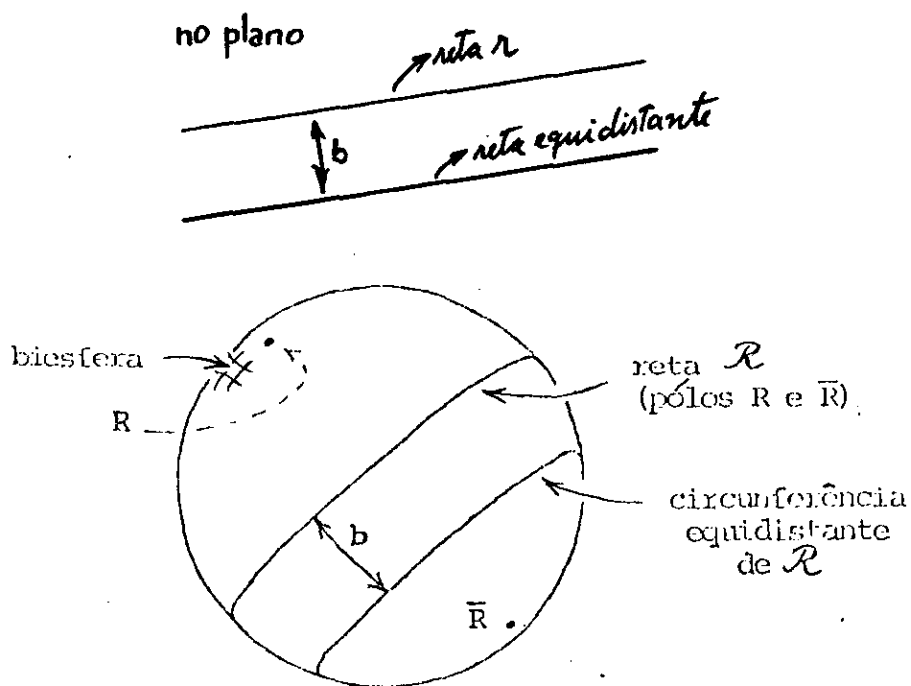


Figura 4.9 Curva equidistante a reta, no plano euclidiano e na esfera S^2 ([31]p60).

Na S^3 , um plano \mathcal{P} é topologicamente uma esfera S^2 , e pergunta-se que tipo de superfície será o l.g. dos pontos que se mantêm equidistantes do plano \mathcal{P} . Analogamente ao caso bidimensional, serão superfícies esféricas de menor área (esferas não "máximas") centradas nos pólos do plano \mathcal{P} . Veja na tabela abaixo alguns lugares geométricos nas variedades E^2 , S^2 , e na S^3 .

Variedade	E^2	S^2	S^3
Figura geométrica	reta euclidiana	"reta" = S^1	"plano" = S^2
Figura equidistante	reta do plano	circunferência menor centrada nos pólos de S^1	superfície esférica menor centrada nos pólos de S^2

Figura 4.10 Tabela de algumas figuras equidistantes.

No espaço tridimensional euclidiano, dada uma reta \mathcal{X} , o lugar geométrico dos pontos que distam b desta reta é uma superfície cilíndrica infinitamente longa de eixo \mathcal{X} e raio b .

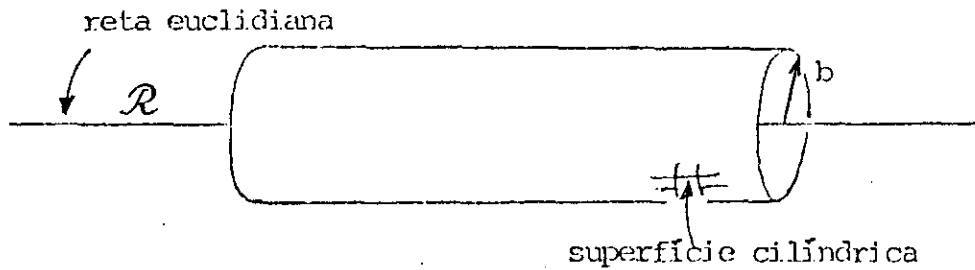


Figura 4.11 Uma superfície cilíndrica é o lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta \mathcal{R} no \mathbb{R}^3 ([31]p61).

Na triessfera de magnitude M , a reta \mathcal{R} é uma circunferência de comprimento $2M$, assim os pontos equidistantes de \mathcal{R} a uma distância $b \ll m$ é claramente uma superfície toroidal (ver figura 4.12). No triespço euclidiano, podemos fazer a distância b crescer à vontade, que teremos sempre cilindros infinitamente longos de raio b . Já na S^3 , ao fazermos b crescer, a curvatura da triessfera fará com que à medida em que b se aproxime do valor $M/2$ mudem as características desta superfície. Sabemos que os pontos que distam $M/2$ de uma reta \mathcal{R} constituem a correspondente

reta polar \mathfrak{R}' , portanto aquela superfície que era no início uma "câmara de ar" (para $b \ll M$ é um T^2) ficará reduzida à reta polar de \mathfrak{R} . Quer dizer, esse toro (chamado *superfície de Clifford*) é de dupla revolução, tem como eixos as retas \mathfrak{R} e \mathfrak{R}' (retas polares); se o raio de revolução em torno de \mathfrak{R} é b , será de $b' = (M/2 - b)$ o raio de revolução em torno de \mathfrak{R}' . Esta propriedade torna a superfície de Clifford bastante singular com

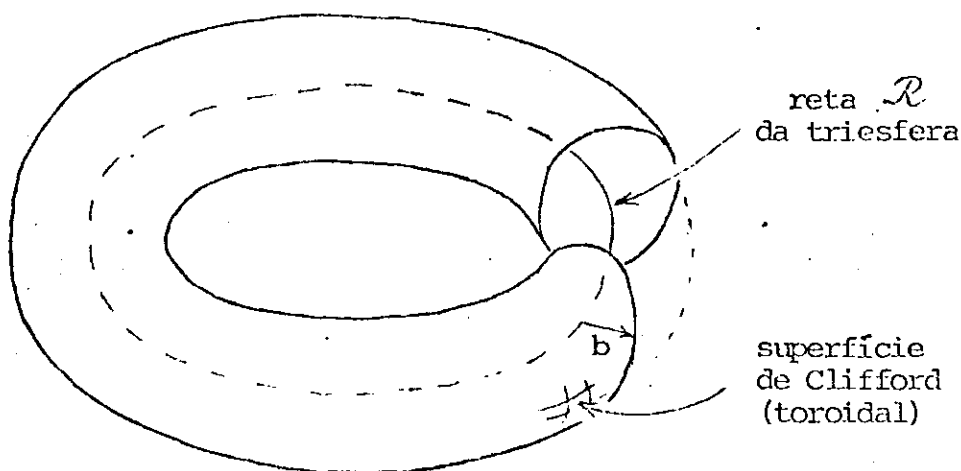


Figura 4.12 Superfície de Clifford ([31]p61).

relação às superfícies cilíndricas de revolução do espaço euclidiano, que são superfícies com um único eixo. No entanto há uma propriedade comum às duas: a geometria intrínseca do cilindro e da superfície de Clifford é a mesma, isto é, ambos admitem a geometria euclidiana: um triângulo sobre uma superfície de Clifford tem a soma de seus ângulos internos igual

a 180 graus, bem como a área do círculo construído sobre ela é igual a π vezes o raio ao quadrado. Note-se ainda que como $b' = M/2 - b$, quando b valer $M/4$ teremos b' também valendo $M/4$; neste caso a S^3 ficará repartida em duas regiões sólidas toroidais idênticas, entrelaçadas como dois elos circulares de uma corrente.

4.7 RETAS PARATÁTICAS

Sabemos que na superfície esférica não há retas que se mantenham equidistantes, porque duas circunferências máximas *sempre se cruzam* em pontos antípodas. Mas na S^3 existem pares de retas que mantêm entre si separação constante, mas não são coplanares (nem poderiam ser, pois as retas coplanares se cruzam nos pontos antípodas); na verdade são mais semelhantes às *retas reversas*, porém a geometria curva da triessfera permite que mantenham separação constante. Essas retas são denominadas de *paratáticas* ou *paralelas de Clifford* ([31]p64). Assemelham-se a duas circunferências entrelaçadas. Daremos a seguir um procedimento para obtê-las.

Seja uma reta \mathfrak{K} e um ponto P que diste b de \mathfrak{K} (ver figura 4.13). Por P traçaremos retas paratáticas à \mathfrak{K} . Desenha-se o plano \mathcal{P}_1 , que contém \mathfrak{K} e P , em seguida traçamos por P uma

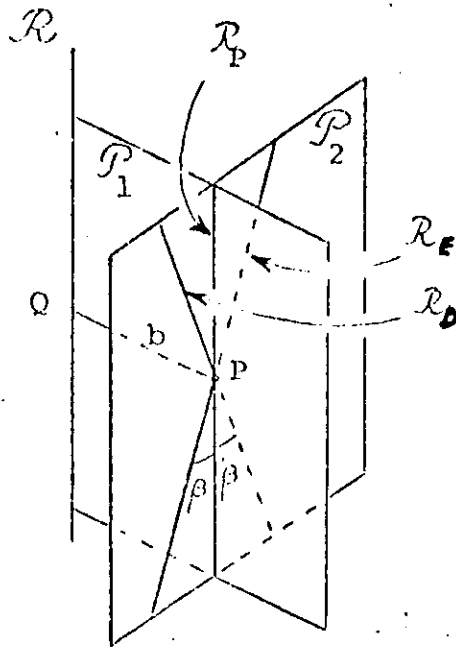


Figura 4.13 Uma maneira de traçar as retas paratáticas([31]p65).

perpendicular a \mathcal{R} , o segmento PQ , de comprimento b ; por P traça-se o plano \mathcal{P}_2 , normal ao segmento PQ (cuidado! na figura, apesar de parecerem planos euclidianos, \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 globalmente são superfícies S^2). A interseção de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 forma a reta \mathcal{R}_p . As retas \mathcal{R} e \mathcal{R}_p pertencem ao plano \mathcal{P}_1 , logo não permanecem equidistantes. No plano \mathcal{P}_2 traçamos duas retas passando por P e formando com \mathcal{R}_p ângulos $\beta = \pi b/M$; estas duas retas \mathcal{R}_D e \mathcal{R}_E (direita e esquerda) são as paratáticas à reta \mathcal{R} que passam por P .

Já vimos anteriormente pares de retas que apresentam um

paratatismo especial, as retas polares; conforme vimos, elas estão separadas por $b = M/2$, logo $\beta = \pi/2$, são portanto paratáticas simultaneamente à esquerda e à direita. Duas paratáticas direitas a uma dada reta são paratáticas direitas entre si, bem como duas paratáticas esquerdas a uma dada reta são paratáticas esquerdas entre si.

É possível preencher a triesfera inteiramente com uma infinidade de retas todas paratáticas direitas (ou esquerdas se assim escolhermos) entre si, fazendo-se a distância b variar de zero a $M/2$ (isto é entre os dois casos limites, que são a própria reta e a sua reta polar). Este processo é semelhante ao utilizado para preencher o espaço euclidiano com retas paralelas entre si. Relembrando a seção 3.4.3, dizemos que a triesfera S^3 admite fibrações de Seifert.

Tentámos fazer uma figura que representasse esta fibração, mas só obtivemos um emaranhado de circunferências que em nada ajudaria a uma visualização. Mais fácil de se perceber, entretanto, é o fato de que em uma superfície de Clifford acomodam-se duas famílias de retas que não se interceptam, uma de paratáticas direitas e outra de esquerdas.

CAPÍTULO 5

CAMPO MAGNÉTICO NA S^3 E NO P^3

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo visa mostrar, mediante um exemplo simples, de que maneira a geometria e a topologia de um triespço se combinam e interagem com um sistema físico. Para esse exemplo nós escolhemos a geometria elítica, selecionamos duas possíveis topologias (S^3 e P^3), e para sistema físico selecionamos uma *corrente elétrica* inomogênea e o respectivo *campo magnético*. Corrente e campo serão moldados para não somente acompanharem a geometria elítica mas ainda respeitarem cada topologia considerada.

Para futura comparação com essas duas soluções curvas, vamos preliminarmente considerar uma corrente e seu campo no *triespço euclidiano* E^3 , análogos aos que serão tratados no espaço curvo. Considere-se uma densidade volumétrica de corrente elétrica

$$\vec{j} = j_0 \cos(\rho/a) \hat{z}, \quad (5.1.1)$$

onde j_0 e a são constantes positivas, $\rho = [x^2 + y^2]^{1/2}$, e \hat{z} é um vetor unitário; a corrente é máxima ao longo do eixo

cartesiano z , e varia harmonicamente ao nos afastarmos radialmente do eixo. O campo magnético \vec{H} associado a essa corrente é obtido por integração de $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ e vale

$$\vec{H} = j_0 \left(\frac{\sin \sigma}{\sigma} - \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} \right) \left(x \hat{y} - y \hat{x} \right), \quad (5.1.2)$$

onde $\sigma = \rho/a$; trata-se de um campo orientado azimutalmente, como era de esperar pela lei de Biot e Savart. Seu módulo $|\vec{H}|$ inicialmente cresce desde o valor zero sobre o eixo z ($\sigma=0$) até um valor máximo $\sim 0,4j_0$ na distância $\sigma \sim 3\pi/8$; para valores crescentes de σ o comportamento de $\hat{\phi} \cdot \vec{H}$ lembra o de uma senóide deformada, com semiamplitude $\sim j_0$ (ver figura 5.1). Na seção 5.6 retornaremos a esta função $|\vec{H}(\sigma)|$, particularmente no seu trecho inicial $\sigma \leq \pi/2$.

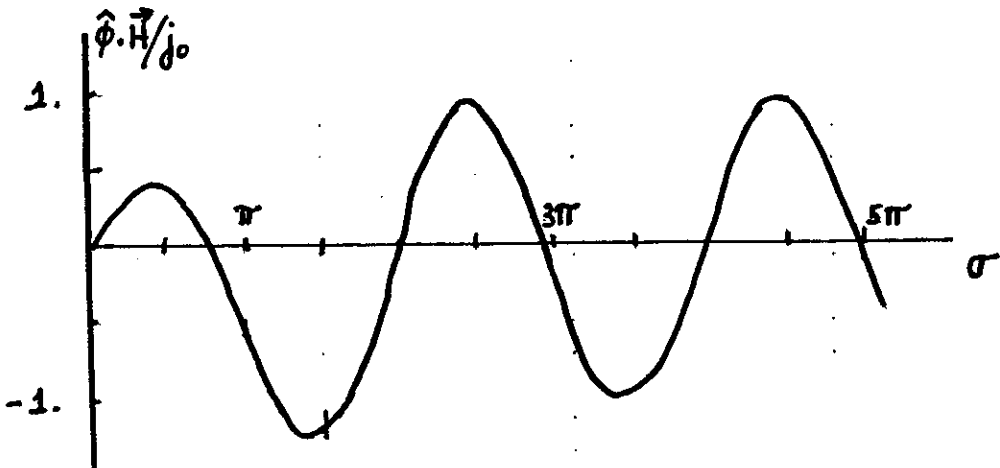


Figura 5.1 Variação radial do campo magnético da equação 5.1.2.

5.2 ELETRODINÂMICA NO ESPAÇO CURVO

Nesta seção vamos escrever as equações de Maxwell em uma geometria espaço-temporal curva.

Em muitas teorias gravitacionais, entre as quais a relatividade geral (Einstein, 1915), o campo eletromagnético é considerado capaz de gerar gravitação; essa capacidade é entretanto tida como muita fraca em condições normais, sendo porisso usualmente descartada em favor da simplificação dos cálculos. A técnica de desprezar a gravitação de origem eletromagnética é bastante antiga (veja-se uma lista de referências em [39]), e será empregada por nós a seguir.

Iniciamos nosso estudo com o campo no espaço-tempo de Minkowski, em que o elemento de linha se escreve

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (5.2.1)$$

e o tensor $F_{\mu\nu}$ eletromagnético satisfaz as equações

$$F_{[\mu\nu,\rho]} = 0, \quad (5.2.2)$$

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = j^\nu. \quad (5.2.3)$$

As quantidades F_{0i} ($i=1,2,3$) são os componentes cartesianos E_i

do campo elétrico no vácuo, e cada componente F_{ij} é o negativo de H_k no vácuo (i, j, k em ordem cíclica); uma vírgula subscrita indica derivação parcial, o símbolo $[]$ representa anti-simetrização, e o quadrivetor j^ν é a densidade da fonte (densidade de carga-corrente).

Estas equações são invariantes por transformações de Lorentz. Para o emprego de coordenadas mais gerais, entretanto, elas requerem uma pequena alteração, que consiste em substituir a operação de derivação parcial pela de derivação covariante. Devido às propriedades deste novo operador ao atuar sobre objetos anti-simétricos, a 1ª equação continua válida assim como está, enquanto a 2ª passa a ser escrita

$$\left[(-g)^{1/2} F^{\mu\nu} \right]_{,\mu} = (-g)^{1/2} j^\nu, \quad g = \det (g_{\mu\nu}). \quad (5.2.4)$$

As quantidades $g_{\mu\nu}$ são os componentes covariantes do tensor métrico, que tanto pode ser o de Minkowski escrito em coordenadas não-cartesianas como o de um espaço-tempo dotado de curvatura (o espaço-tempo de Minkowski não tem curvatura). Geralmente $g_{\mu\nu}$ depende do ponto, isto é, $\partial g_{\mu\nu} / \partial x^\rho \neq 0$.

Uma família de espaço-tempos muito conhecida em relatividade geral é a dos modelos cosmológicos espacialmente homogêneos e isotrópicos de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW); ela é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - A^2(t) dl^2 \quad , \quad (5.2.5)$$

em que dl^2 representa a parte homogênea puramente espacial.

Das três K-geometrias isotrópicas existentes em três dimensões (seção 3.5), é da elítica que vamos nos ocupar. Para ela é válido o elemento de linha

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\theta^2 + \sin^2\chi \, \sin^2\theta \, d\phi^2 \quad , \quad (5.2.6)$$

sendo denominadas *esféricas* as coordenadas χ , θ , ϕ ; enquanto χ desempenha o papel de coordenada *radial*, θ e ϕ são as usuais coordenadas angulares *polar* e *azimutal*, respectivamente.

5.3 COORDENADAS ESFÉRICAS NA S^3 E NO P^3

Duas variedades dotadas da K-geometria elítica serão consideradas por nós: a triesfera S^3 e o triespaço projetivo (real) P^3 . Para a triesfera, cada ponto é caracterizado pela triade (χ, θ, ϕ) de modo semelhante ao da triade (r, θ, ϕ) no espaço euclidiano usual, com apenas uma ressalva: enquanto o r euclidiano pode ser estendido indefinidamente, o χ riemanniano fica limitado ao valor máximo π . Para as coordenadas θ e ϕ usamos as convenções $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. A presença dos termos $\sin^2 \chi$ em $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$ no elemento de linha indica que há apenas 1 ponto com coordenada $\chi = \pi$; esse ponto é o antípoda do ponto $\chi = 0$, cuja unicidade está evidenciada da mesma forma que a do

$\chi = \pi$.

O triespaco projetivo é obtido da S^3 por identificação dos pontos antípodas; ou seja, identifica-se cada ponto $[\chi, \theta, \phi]$ da S^3 ao correspondente antípoda $[\pi-\chi, \pi-\theta, \pi+\phi \pmod{2\pi}]$. Como consequência dessas identificações, um ponto de P^3 fica caracterizado univocamente pela triade (χ, θ, ϕ) com $0 \leq \chi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$, com a ressalva de que o ponto $(\pi/2, \theta, \phi)$ coincide com o ponto $[\pi/2, \pi-\theta, \pi+\phi \pmod{2\pi}]$. Claro está que no triespaco projetivo não persiste o conceito de pontos antípodas.

Tanto a S^3 como o P^3 que estamos descrevendo têm raio unitário; nos modelos cosmológicos de FLRW seria o fator $A(t)$, que comparece na equação (5.2.5), o responsável pela alteração da magnitude das variedades. Nesta tese, entretanto, consideraremos constante esse fator, e igual numericamente à unidade.

A triesfera foi suficientemente analisada no capítulo 4; vamos agora descrever a estrutura do triespaco projetivo, suas geodésicas (retas), suas fatias (planos), suas incidências, etc. Toda geodésica do P^3 é topologicamente uma circunferência S^1 , que geometricamente tem raio $\pi/2$ e comprimento π (não 2π !). Subsiste no P^3 o conceito de paralelas de Clifford: por um ponto localizado fora de uma geodésica γ duas geodésicas podem ser traçadas de modo tal que se mantêm equidistantes de γ . Se γ for orientada, uma congruência de paratáticas direitas (e outra de esquerdas) pode ser estabelecida no P^3 , orientadas

consistentemente e preenchendo inteiramente o P^3 . Também subsiste no P^3 o conceito de pares de retas polares: cada reta \mathfrak{R} (geodésica) do P^3 determina univocamente uma outra reta \mathfrak{R}' tal que a distância de qualquer ponto de \mathfrak{R} a qualquer ponto de \mathfrak{R}' é $\pi/2$.

O conceito de plano de um P^3 requer alguma atenção. Iniciamos com a noção de fatia bidimensional, à qual já nos referimos no capítulo 3 sem prévia definição. Para obtermos uma fatia bidimensional em um ponto P de um triespaco metrizado M , tomamos nesse ponto um disco circular suficientemente pequeno, centrado em P , e prolongamos todos os diâmetros desse disco. O conjunto das geodésicas assim formadas irá delinear uma superfície, uma *fatia* do espaço; essa superfície *herda* de um modo natural, do triespaco M em que está mergulhada, uma métrica bidimensional. Escolhidos arbitrariamente 2 pontos da fatia, podemos conectá-los tanto mediante uma geodésica g_M do espaço M como mediante uma geodésica g_F da fatia F dotada da métrica herdada de M . Somente quando todas as geodésicas de F o forem também de M a fatia será considerada um *plano* de M . Retornando agora ao caso especial $M = P^3$, pode-se mostrar que toda fatia de P^3 constitui efetivamente um plano; entretanto, esse plano não é orientável, e sim um plano projetivo P^2 .

Diferentemente do que ocorre na S^3 , todo par de retas coplanares em um P^3 concorre em apenas um ponto; isso confere à variedade P^3 um grau de simetria maior que o da S^3 . Do mesmo modo que na S^3 , não há em P^3 retas coplanares que se mantenham equidistantes; contudo, sobrevive no P^3 o conceito de

paratáticas, ou paralelas de Clifford, tanto as direitas como as esquerdas.

Subsistem também no \mathbf{P}^3 as superfícies de Clifford, ainda com a topologia do toro \mathbf{T}^2 . Todos esses entes geométricos serão ventilados nas seções seguintes.

5.4 TANGENTES ÀS FIBRAS DE SEIFERT

Por serem ambos moldados na K-geometria elítica, tanto a \mathbf{S}^3 como o \mathbf{P}^3 admitem fibração de Seifert. Em cada uma dessas variedades vamos designar por γ a geodésica composta pelos segmentos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, ou seja, o usual eixo z .

Vamos fibrar a \mathbf{S}^3 e o \mathbf{P}^3 com a congruência de paratáticas esquerdas a γ . Em um ponto de coordenadas (χ, θ, ϕ) considere-se agora o vetor $\hat{\eta}$ de componentes naturais contravariantes

$$\eta^a = (\cos\theta, -\cot\chi \sin\theta, 1). \quad (5.4.1)$$

É fácil verificar que esse vetor tem norma unitária, com a métrica dada pelo elemento de linha (5.2.6):

$$\begin{aligned} \eta^a \eta_a &= \cos^2\theta + \sin^2\chi \cot^2\chi \sin^2\theta + \sin^2\chi \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta + \cos^2\chi \sin^2\theta + \sin^2\chi \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Também trivialmente pode-se mostrar que esse campo vetorial $\hat{\eta}(\chi, \theta, \phi)$ satisfaz as equações geodésicas

$$d\eta^a/dl + \left\{ \begin{matrix} a \\ b \ c \end{matrix} \right\} \eta^b \eta^c = 0 , \quad (5.4.3)$$

onde os símbolos de Christoffel se referem como sempre ao elemento de linha (5.2.6); mais ainda, prova-se que o campo vetorial $\hat{\eta}$ satisfaz as equações de Killing.

Tudo somado, conclui-se que $\hat{\eta}$ é o campo dos vetores unitários tangentes às fibras de Seifert na fibração paratática esquerda que contém a geodésica γ (o eixo z). De modo análogo se prova que o campo de componentes

$$\zeta^a = (\cos\theta, -\cot\chi \sin\theta, -1) \quad (5.4.4)$$

corresponde à fibração direita contendo o eixo z , tanto para a triesfera S^3 como para o P^3 .

Os dois campos unitários $\hat{\eta}$, $\hat{\zeta}$ formarão a base vetorial sobre a qual assentaremos um campo de corrente elétrica, na seção seguinte.

5.5 CORRENTE TOROIDAL

Vamos agora preencher, tanto a triesfera S^3 como o triespaço projetivo P^3 unitários, com uma densidade de corrente elétrica estacionária

$$\vec{j} = 1/2 (\hat{\eta} + \hat{\zeta}) j_0, \quad j_0 = \text{const} \geq 0. \quad (5.5.1)$$

Para visualizarmos o campo \vec{j} notamos de início que, na base vetorial natural associada às coordenadas (χ, θ, ϕ) , ele é desprovido de componente azimutal ($j_\phi = 0$); com efeito, das equações (5.4.1) e (5.4.4) se conclui que

$$j^a = j_0 (\cos\theta, -\cot\chi \sin\theta, 0). \quad (5.5.2)$$

Em seguida calculamos a norma de \vec{j} , lembrando que a métrica está dada pela eq. (5.2.6) :

$$\begin{aligned} j^a j_a &= j_0^2 (\cos^2\theta + \sin^2\chi \cot^2\chi \sin^2\theta) \\ &= j_0^2 (1 - \sin^2\chi \sin^2\theta). \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Com um pouco de trigonometria esférica (ver figura 5.2) se obtém

$$|\vec{j}| = j_0 \cos\sigma, \quad (5.5.4)$$

onde σ é a distância que vai do ponto considerado até o eixo z (o eixo de $\theta=0$ e de $\theta=\pi$); então o campo de corrente elétrica que estamos discutindo tem máxima intensidade j_0 ao longo do eixo z, e enfraquece harmonicamente conforme nos afastamos desse eixo. Como tanto na S^3 como no P^3 unitários o máximo afastamento

possível entre um ponto e uma geodésica é $\pi/2$, o valor mínimo que o módulo $|\vec{j}|$ pode assumir é zero. Com essas características o campo \vec{j} nos espaços curvos S^3 e P^3 lembra a corrente elétrica descrita na seção 5.1, se confinada a uma região de raio $\pi/2$.

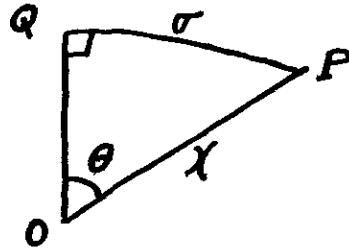


Figura 5.2 No triângulo esférico retângulo OQP se tem $\sin\sigma = \sin\chi \sin\theta$.

Entretanto, tanto na S^3 como no P^3 unitários todas as linhas de corrente de \vec{j} são fechadas; cada linha é uma circunferência S^1 , que se mantém afastada do eixo z com uma separação constante σ . O raio de cada circunferência é $\pi/2 - \sigma$, e o comprimento é $2\pi \cos\sigma$ na S^3 e é $\pi \cos\sigma$ no P^3 . O lugar geométrico dos pontos em que o módulo $|\vec{j}|$ da corrente tem um dado valor intermediário constitui uma superfície de Clifford (um toro T^2), tanto na S^3 como no P^3 . Resumindo, o campo das correntes \vec{j} é toroidal (ver figuras 5.3 e 5.4) em ambos S^3 e P^3 .

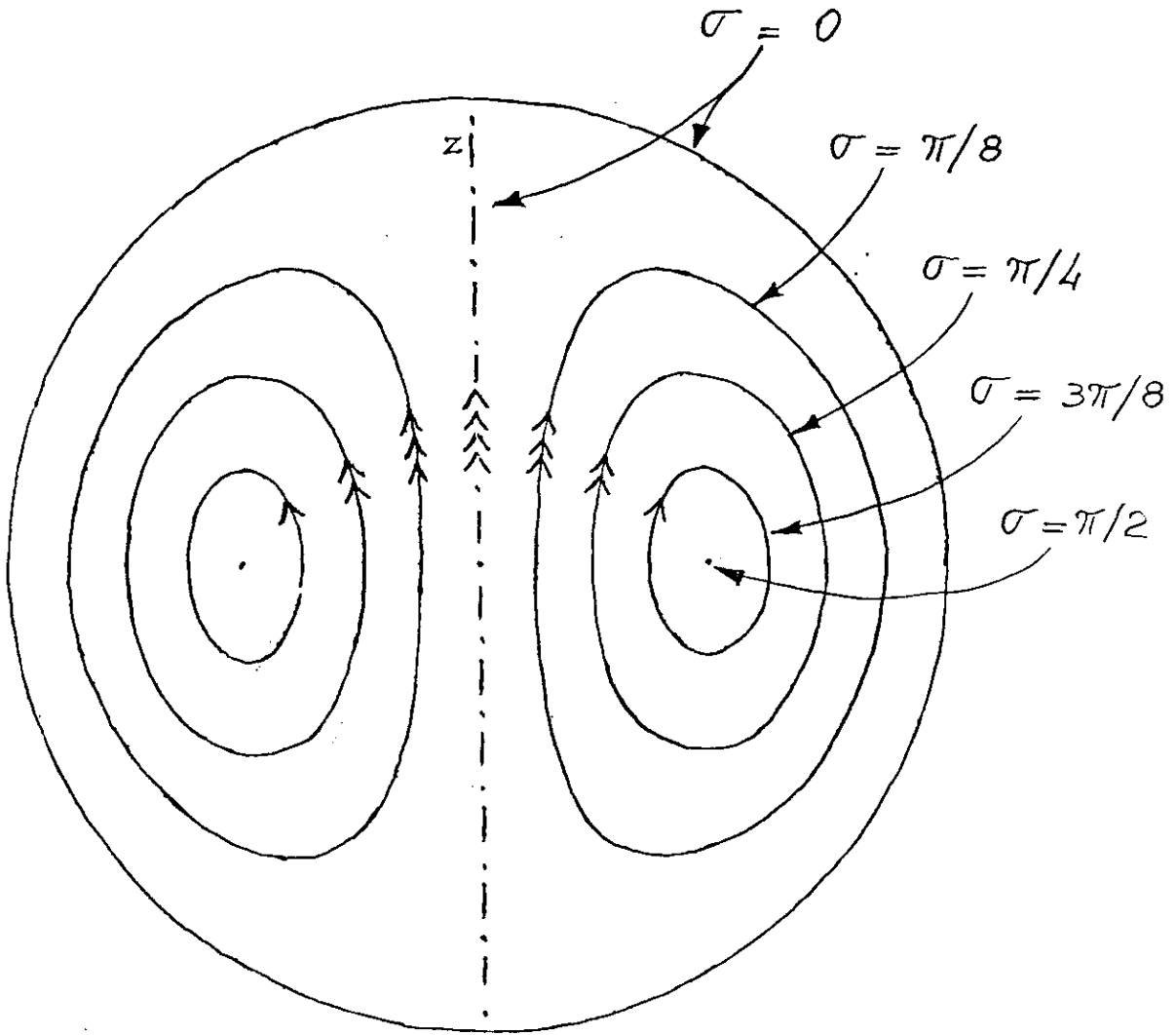


Figura 5.3 Corte em uma triesfera, contendo o eixo z , e mostrando as linhas de corrente de conformação toroidal. A corrente tem módulo constante ao longo de cada linha, é máxima no eixo $\sigma=0$, e decresce harmonicamente até se anular no correspondente eixo polar $\sigma=\pi/2$. O eixo $\sigma=0$ é de simetria de rotação do sistema todo.

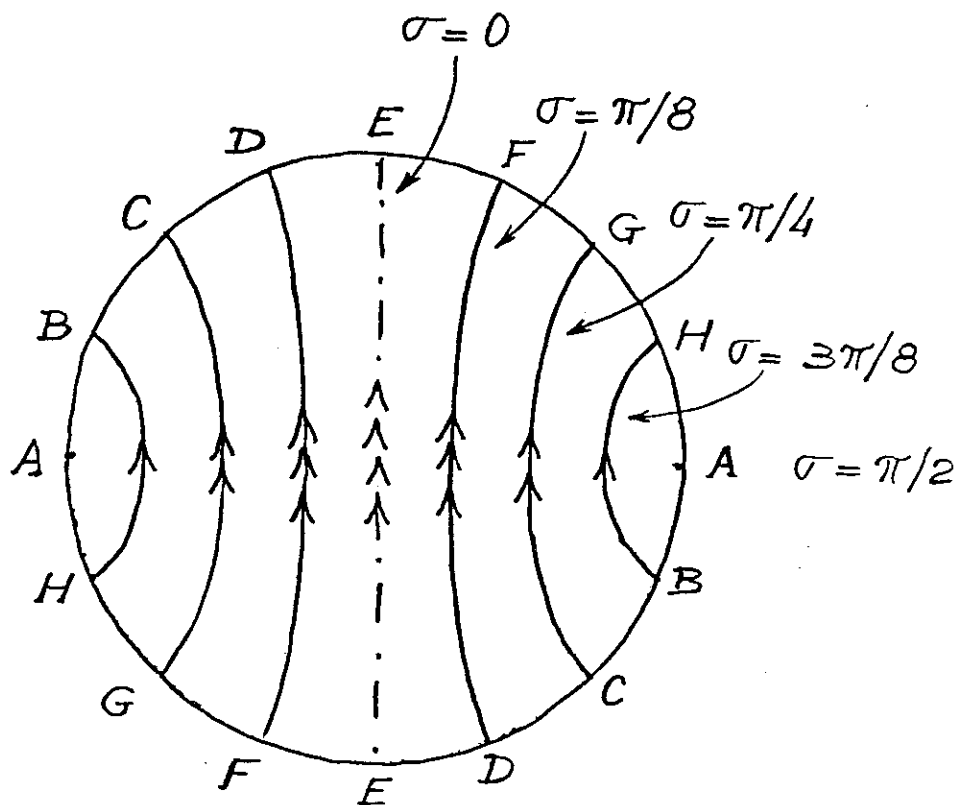


Figura 5.4 Corte (plano projetivo \mathbb{P}^2) em um triespço projetivo \mathbb{P}^3 , com as linhas de corrente de um campo toroidal. A corrente (uniforme em cada linha) é máxima no eixo $\sigma=0$, e nula no correspondente eixo polar $\sigma=\pi/2$. Ambos esses eixos são de simetria de rotação do sistema físico.

5.6 CAMPO MAGNÉTICO TOROIDAL

Chegamos agora ao tópico cujo resultado final nos pareceu o mais interessante no nosso trabalho: a configuração assumida pelo campo magnético associado à corrente toroidal da seção anterior.

O campo \vec{H} é obtido da corrente \vec{j} por integração das três equações $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$. Como estamos usando coordenadas não-cartesianas (χ, θ, ϕ) , essas equações são escritas

$$\frac{1}{(-g)^{1/2}} \partial_a \left((-g)^{1/2} F^{ab} \right) = j^b, \quad (5.6.1)$$

onde $(-g)^{1/2} = \sin^2 \chi \sin \theta$, F^{12} representa a componente magnética H_3 , etc. Por razões de simetria o campo \vec{H} deve ser azimutal (somente as componentes $F^{12} = -F^{21}$ sobrevivem), e essas componentes não devem depender da coordenada angular azimutal ϕ . Assim sendo, as equações a serem integradas são apenas duas:

$$\frac{1}{\sin^2 \chi \sin \theta} \partial_\theta \left(-\sin^2 \chi \sin \theta F^{12} \right) = j_0 \cos \theta, \quad (5.6.2)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \chi \sin \theta} \partial_\chi \left(\sin^2 \chi \sin \theta F^{12} \right) = -j_0 \cot \chi \sin \theta. \quad (5.6.3)$$

As respectivas soluções são

$$F^{12} = -(1/2) j_0 \sin\theta + \csc\theta f(\chi) , \quad (5.6.4)$$

$$F^{12} = -(1/2) j_0 \sin\theta + \csc^2\chi g(\theta) , \quad (5.6.5)$$

onde $f(\chi)$ e $g(\theta)$ são funções arbitrárias; a única solução regular deste último par de equações é obtida tomando-se $f=g=0$, resultando então que

$$F^{12} = -(1/2) j_0 \sin\theta . \quad (5.6.6)$$

Para visualizarmos esse campo magnético precisamos conhecer sua norma,

$$F^{12}F_{12} = \left[(-1/2)j_0 \sin\theta \right]^2 \sin^2\chi = (1/4)j_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta; \quad (5.6.7)$$

relembrando (figura 5.2) que $\sin\chi \sin\theta = \sin\sigma$, obtemos finalmente que o módulo do campo magnético azimutal é

$$|\vec{H}| = 1/2 j_0 \sin\sigma . \quad (5.6.8)$$

Como σ é a distância que vai desde o ponto considerado até o eixo z na triessfera S^3 e no tri espaço projetivo P^3 unitários, vemos que o campo \vec{H} se anula ao longo do eixo z (uma circunferência S^1 , a geodésica $\sigma=0$); ao nos afastamos dessa circunferência a intensidade do campo \vec{H} cresce harmonicamente, até o valor máximo $(1/2)j_0$ ao longo da geodésica $\sigma=\pi/2$ (que é a polar de $\sigma=0$). Percebemos então que, semelhantemente à da

acumulada desde o eixo z , implicando no fortalecimento sustentado do campo \vec{H} até o máximo afastamento $\sigma = \pi/2$.

Porém o que mais nos surpreendeu em S^3 e P^3 foi a simplicidade analítica da intensidade de \vec{H} , puramente harmônica para uma corrente \vec{j} também harmônica (equações 5.6.10); essa simplicidade parece-nos sugerir uma adequação intrínseca notável entre o eletromagnetismo e aqueles triespacos de K-geometria esférica.

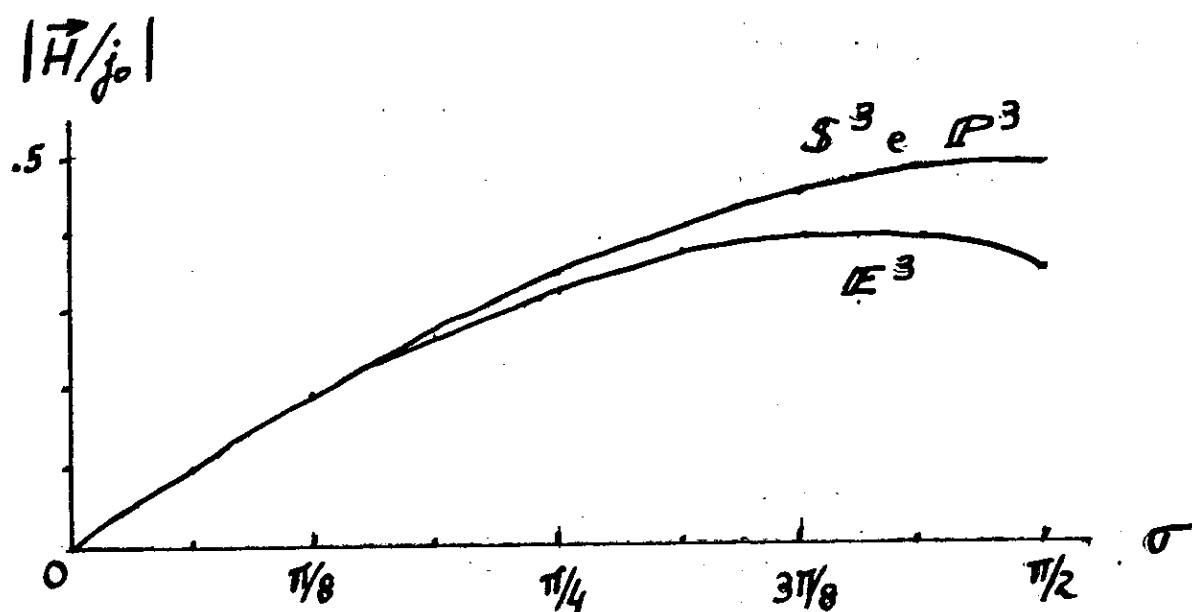


Figura 5.5 Variação radial dos campos magnéticos no espaço euclidiano (equação 5.6.9) e nos espaços curvos (equação 5.6.10).

CONCLUSÃO

Esta tese misturou matemática (os 4 capítulos iniciais e dois terços do 5^o) com física (um terço do capítulo 5). Na matemática tratou-se de topologia, de geometria e do amálgama entre elas. Na física tratou-se de eletromagnetismo.

Para introduzir a topologia foi redigido o capítulo 1, enquanto que a geometria só aparece no capítulo 2. Já nesses capítulos 1 e 2 trata-se de teoria de grupos, imprescindível para conectar a geometria à topologia. Essa conexão é feita no capítulo 3, inicialmente para superfícies e depois para variedades tridimensionais.

Ainda na matemática, mas agora preparando mais diretamente o caminho para o terreno físico, estão o capítulo 4 e o início do capítulo 5. No fechar deste capítulo finalmente surgem carga elétrica e campo magnético, homogeneamente montados ambos em superfícies de Clifford e ambos simetricamente decompostos em vetores tangentes a paratáticas em fibrações de Seifert, quer em uma triesfera quer em um triespaço projetivo real geometro-topológicos.

Depois de compreendida (dominada, sentida) a topologia da S^3

e do P^3 , torna-se fácil perceber que a corrente e o campo estão ali enroscados como dois elos de uma cadeia difusa. Em cada ponto corrente e campo coexistem, mas onde um é forte o outro é débil. Eles satisfazem $|\vec{2H}|^2 + |\vec{j}|^2 = \text{const.}$ O sistema como um todo é invariante pela permuta da corrente pelo campo (este multiplicado por 2), simetria essa que nos parece não ter paralelo no eletromagnetismo em espaços de Minkowski.

REFERÊNCIAS

- [1] - Y. Choquet-Bruhat, C. de Witt-Morette, M. Dillard-Bleick - *Analysis, Manifolds and Physics* - North-Holland Publishing Company - Amsterdam - 1977;
- [2] - R. Gilmore - *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications* - John Wiley and Sons - New York - 1974;
- [3] - M. Nakahara - *Geometry, Topology and Physics* - Adam Hilger - Bristol, England - 1990;
- [4] - C. von Westenholz - *Differential forms in mathematical physics* - North-Holland Publishing Company - Amsterdam - 1978;
- [5] - E. L. Lima - *Curso de análise*, vol. 2 - 2^a ed. - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides - Rio de Janeiro (1985);
- [6] - C. Nash and S. Sen - *Topology and geometry for physicists* - Academic Press, Inc. - London - 1983;
- [7] - L. S. Pontryagin - *Topological groups* - Second edition - Translated from russian by Arlen Brown - Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. New York - 1966;
- [8] - J. R. Weeks - *The shape of space* - Marcel Dekker, Inc. New York - 1985;
- [9] - D. W. Blakett - *Elementary topology: a combinatorial and algebraic approach* - Academic Press - New York - 1968;

- [10] - T. Eguchi, P. Gilkey, A. Hanson - *Gravitation, gauge theories and differential geometry* - Phys. Rep. 66, no. 6 (1980) 213-393;
- [11] - S. W. Hawking and G. F. R. Ellis - *The large scale structure of space-time* - Cambridge University Press - 1977;
- [12] - R. M. Wald - *General Relativity* - The University of Chicago Press - Chicago and London - 1984;
- [13] - W. Thirring - *A course in mathematical physics* - Springer Verlag - New York - 1978;
- [14] - B. F. Schutz - *Geometrical methods of mathematical physics* - Cambridge University Press - 1980;
- [15] - R. D. Richtmyer - *Principles of advanced mathematical physics*, volume II - Springer Verlag - New York - 1981;
- [16] - D. Hilbert, S. Cohn-Vossen - *Geometry and the Imagination* - Chelsea Pub. Co. - New York, 1952 (original de 1932);
- [17] - W. K. Tung - *Group Theory in Physics* - World Scientific - Philadelphia, U.S.A. - 1985;
- [18] - S. Lipschutz - *Álgebra Linear*, tradução de R. R. Baldino, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda - São Paulo;
- [19] - K. Hoffman, R. Kunze - *Álgebra Linear*, tradução de A. P. Bergamasco, Editora da Universidade de São Paulo - São Paulo (1971);
- [20] - R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands - *The Feynman Lectures on Physics* vol II - Fondo Educativo Interamericano, S. A. - Addison-Wesley Publishing Company - Mexico - 1972;
- [21] - S. Kobayashi, K. Nomizu - *Foundations of differential geometry*, vol. I and II, Interscience Publishers - London - 1963;

- [22] - B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko - *Geometrie contemporaine, méthodes et applications, première partie* - Éditions Mir - Moscou, 1985;
- [23] - M. MacCallum - The mathematics of anisotropic spatially-homogeneous cosmologies - Lectures Notes in Physics, *Physics of the expanding universe* - Edited by M. Demiansk - Springer - Verlag, vol. 109, Berlin 1979;
- [24] - P. Scott - The geometry of 3-manifolds - Bull. London Math. Soc. 15 (1983) 401-487;
- [25] - L. P. Eisenhart - *Continuous groups of transformations* - Princeton University Press - Amsterdam - 1933;
- [26] - J. A. Wolf - *Spaces of constant curvature* - fifth edition - Publish or Perish, Inc. USA - 1984;
- [27] - W. P. Thurston - *The geometry and topology of threemanifolds* - Notas de aulas em Princeton a serem publicadas como livro pela Princeton University Press;
- [28] - W. P. Thurston, J. R. Weeks - The Mathematics of Three-dimensional Manifolds - Sci. Am. 108, (july 1984) 108-120;
- [29] - J. Anandan - On the Hypotheses Underlying Physical Geometry - Foundations of Physics 10 (1980) 601-629;
- [30] - H. V. Fagundes - Closed spaces in Cosmology - Gen. Rel. Grav. 24 (1992) 197-217;
- [31] - A. F. da F. Teixeira - Introdução à triesfera (universo de Einstein) - Monografia CBPF, MO-002/84 - Rio de Janeiro -1984;
- [32] - E. R. Harrison - *Cosmology* - Cambridge University Press - Cambridge - 1981;


- [33] - R. Rucker - *The fourth dimension* - Houghton Mifflin Company - Boston - 1984;
- [34] - N. Steenrod - *The topology of fibre bundles* - Princeton University Press - Princeton - 1951;
- [35] - H. Seifert - *Topology of 3-dimensional fibered spaces* - Translated by W. Heil - Volume 89, Pure and applied mathematics - Academic Press - 1980;
- [36] - H. V. Fagundes - Relativistic Cosmologies with Closed, Locally Homogeneous Spatial Sections - Phys. Rev. Lett. 54, (1985) 1200-1202;
- [37] - G. F. R. Ellis - Topology and Cosmology - Gen. Rel. Grav. 2 (1971) 7-21;
- [38] - G. F. R. Ellis , G. Schreiber - Observational and dynamical properties of small universes - Phys. Lett. A 115 (1986) 97-107;
- [39] - J. A. Souza - Electric dipole radiation in Einstein and de Sitter cosmological backgrounds and the quasar problem - Astroph. Spa. Sci. 15B (1989) 57-66.

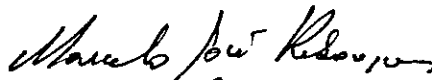
"CAMPO MAGNÉTICO NA S^3 E INTRODUÇÃO ÀS TRIVARIEDADES"

ALEXANDRE LYRA DE OLIVEIRA

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:


Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira
Presidente


Murari Mohan Som


Marcelo José Rebouças

Rio de Janeiro, 12 de março de 1993