

1993/13

D345

TESE DE
MESTRADO

Aspectos da Dinâmica de
Campos Vetoriais Complexos
em 3 Dimensões

OSWALDO MONTEIRO DEL CIMA

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE CAMPOS E PARTÍCULAS - DCP

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF

RIO DE JANEIRO, JUNHO DE 1993

DEDICO

Ao meu pai Oswaldo Del Cima (in memorian) e à minha mãezinha Victoria Monteiro
Del Cima.

Ao tio Antôninho (in memorian) e à tia Esmeralda (in memorian).

À minha esposa e amiga, Zilda Cristina, que com todo o seu Amor e a sua Luz me
fortalece.

Aos meus irmãos, Arnaldo José e Inezita.

Aos meus sogros, Orlando Elias e Elza.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Helayël.

Ao amigo, Prof. Hélio Freitas de Carvalho.

Ao amigo, Prof. Roberto Nicolsky.

À um grande homem, Albert Sabin (1906-1993).

À G.:F.:B.: e à A.:M.:O.:R.:C.:.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador e amigo, Prof. José Abdallah Helayël-Neto, pela orientação e atenção que me foram dadas durante este cansativo, mas gratificante, trabalho de tese.

Aos grandes amigos do DCP que com o apoio e carinho habituais, me fizeram ter força para concluir esta tese. Vocês são um barato ! Os meus mais sinceros agradecimentos aos amigos : Marquinho, Sérgio Duque, Fernando, Marcelo Carvalho, Colatto, Zézinho, Gentil, Tião, Sasaki, Celina, Cambraia, Sobral e as mais recentes aquisições do DCP, Chumbinho e Marcelo.

Ao Prof. Olivier Piguet, pela orientação e pelas propostas de trabalhos futuros, como também, pela disposição em me orientar no programa de Ph.D. da Universidade de Genebra.

À Myriam, pela atenção e carinho com que nos recebe à CFC.

Ao CNPq, pelas bolsas concedidas desde a minha graduação.

Sumário

Dedicatória	1
Agradecimentos	2
Índice	3
1 Introdução e Motivação	7
2 Campos Vetoriais Complexos em $D=(1+2)$	15
2.1 Campo de Chern-Simons-Maxwell Complexo e Simetrias Associadas	16
2.2 Cálculo do Propagador e Análise de Pólos e Resíduos	19
2.3 Campos de Chern-Simons-Maxwell-Proca Complexos e Simetrias Associadas	27
2.4 Cálculo do Propagador e Análise de Pólos e Resíduos	29
3 Aspectos Quânticos das Teorias de CSM* e de CSMP*	36
3.1 Power-Counting das Teorias de CSM* e de CSMP*	37
3.2 Regras de Feynman e Self-Energy dos Campos Complexos de CSM*	40
3.3 Identidades de Ward	51
4 Conclusões Gerais e Perspectivas de Continuação	55

A	Resultados Explícitos dos Gráficos Calculados à Ordem de 1-loop	60
A.1	$\Sigma_{\alpha\beta}$	61
A.2	$\Lambda_{\alpha\beta}$	62
A.3	$\Xi_{\alpha\beta}^R$	63
A.4	$\Xi_{\alpha\beta}^L$	64
A.5	$\Gamma_{\alpha\beta}$	65
B	Resultados Explícitos para as Integrais de 1-loop em $D = 3$	66

Lista de Figuras

Lista de figuras	5
3.1 $\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$	42
3.2 Vértices de interação.	45
3.3 Diagramas de self-energy.	45
3.4 Correção de $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$ ao propagador Δ	49
4.1 Diagramas de self-energy à ordem de 2-loops.	59

Lista de Tabelas

Lista de tabelas	6
2.1 Álgebra dos operadores longitudinal e transversais.	21

Capítulo 1

Introdução e Motivação

O estudo de teorias de gauge em $D = 3$ revela aspectos interessantes e certas peculiaridades próprias das dimensões espaço-temporais ímpares. A temperaturas finitas, os modelos de gauge em $D = 4$ apresentam propriedades similares aos modelos em $D = 3$ a temperatura nula, o que contribui muito para a atenção dada à Física em espaços 3-dimensionais [1, 2]. Também os espaços ímpar-dimensionais são espaços muito particulares para os campos de gauge, pois termos gauge-invariantes topologicamente não-triviais geram massa para estes campos [3] sem, contudo, quebrar a simetria local em questão.

A estatística tem um papel fundamental na Física de Partículas Elementares. Esta importância deve-se, em parte, ao conceito de partículas indistinguíveis. Este conceito não se faz evidente na Física Clássica, mas a nível quântico torna-se fundamental para a estruturação da matéria. A dinâmica de um sistema de partículas, a nível quântico, não é regida apenas pelas interações ditas “físicas”, mas também pela estatística a que estas partículas obedecem, que pode ser considerada como uma interação adicional. Na

estatística quântica, um sistema de férmions se comporta como um gás clássico com interações repulsivas entre os mesmos, enquanto que um sistema de bósons se apresenta como um gás clássico onde as interações têm caráter atrativo. A importância destas “interações estatísticas” pode ser observada, por exemplo, no princípio de exclusão de Pauli, que forma a base para a interpretação da tabela periódica dos elementos químicos, como também, dos conceitos de condensação de Bose e superfície de Fermi nas teorias da superfluidez e supercondutividade.

Em $D = 4$, o grupo de spin que descreve as rotações 3-dimensionais é o $SO(3) \sim SU(2)$, que fixa em inteiros e semi-inteiros os spins das partículas [3], caracterizando, então, as estatísticas de Bose e Fermi, respectivamente. Mas, em $D = 3$, as partículas podem possuir spin real arbitrário, pois o grupo das rotações 2-dimensionais é o $SO(2) \sim U(1)$ e, devido à correlação spin-estatística, estas partículas obedecem a uma estatística arbitrária; pela permutação de duas destas partículas, a função de onda se altera por uma fase arbitrária. A idéia de estatística fracionária em $D = 3$ surgiu recentemente em Física [5, 6], e tornou-se bem conhecida através dos trabalhos de Wilczek [7, 8], que denominou estas partículas com spin e estatística quaisquer de “anyons” (any spin).

A introdução dos anyons na Física em $D = 3$ veio a reforçar a correlação entre a Física da Matéria Condensada e a Física de Altas Energias. O papel dos anyons no entendimento do efeito Hall quântico fracionário é, hoje, amplamente reconhecido [9].

A teoria de anyons para a supercondutividade apresentou-se, até muito recentemente, como bastante promissora, devido a propriedades observadas em certos materiais a altas temperaturas. Foi proposto por Laughlin [10] que um sistema de partículas obedecendo

a uma estatística fracionária torna-se, por si mesmo, supercondutor. Esta expectativa é confirmada pelos trabalhos citados nas referências [11, 12]. Entretanto, do ponto-de-vista fenomenológico, a teoria dos anyons para a supercondutividade apresenta alguns pontos fracos, como, por exemplo, a não observação experimental de violação das simetrias P e T em amostras supercondutoras.

Um aspecto teórico importante no estudo dos anyons é sua relação com a teoria de Chern-Simons (CS) [13]. Os anyons também podem ser descritos como bósons ou férmions em interação mediada por um campo de gauge de Chern-Simons (CS).

Recentemente, mostrou-se que em uma teoria Abelianana de Chern-Simons-Maxwell (CSM) acoplada a campos de matéria, os modos de massa nula do campo de gauge são completamente eliminados do espaço de Hilbert, e que uma interação não-local (de natureza estatística) entre os campos de matéria (férmions ou bósons) torna-se dominante. Verificou-se, também, ser esta interação não-local a responsável pela alteração da estatística obedecida pelos campos de matéria [14].

A adição de um termo de Chern-Simons à teoria de Maxwell em $D = 3$ gera, sem quebrar a invariância de gauge, um pólo massivo e dinâmico, acompanhado de um pólo de massa nula, fruto da teoria de Maxwell, que se revela não-dinâmico.

Dado o Lagrangeano de Chern-Simons-Maxwell (CSM) :

$$\mathcal{L}_{\text{CSM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{4}\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_{\alpha}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2 \quad , \quad (1.1)$$

obtêm-se os seguintes resultados para os setores transversal e longitudinal do propagador

vetorial de CSM, $\Delta^{\mu\nu}$:

$$\Delta_{\text{T}}^{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2(k^2 - m^2)} \left[im\epsilon^{\mu\kappa\nu} k_\kappa + k^2 \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \right] \quad (1.2.a)$$

e

$$\Delta_{\text{L}}^{\mu\nu}(k) = \alpha \frac{i}{k^2} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) . \quad (1.2.b)$$

Analisando-se o setor físico, isto é, o setor independente do parâmetro de gauge, verifica-se a existência de 2 pólos : $k^2 = 0$ e $k^2 = m^2$. Pelo método que será apresentado no Capítulo 2, conclui-se que o pólo em $k^2 = 0$ representa um quantum não-dinâmico de massa nula, enquanto que o pólo em $k^2 = m^2$ descreve um quantum dinâmico massivo. Já o setor longitudinal desacopla-se totalmente, devido à conservação das correntes J e J^* : $k_\mu J^\mu = k_\mu J^{*\mu} = 0$. Portanto, neste setor, o pólo $k^2 = 0$ representa um quantum não-dinâmico on- e off-shell, não contribuindo física ou virtualmente nos processos de espalhamento. Uma possível contribuição do setor longitudinal (1.2.b) nos cálculos de seções de choque, seja física ou virtualmente, seria algo bastante problemático, pois uma grandeza física dependente de um parâmetro de gauge comprometeria completamente a interpretação da teoria.

Como mencionado anteriormente, a adição de um termo de Chern-Simons à teoria de Maxwell gera, sem quebrar a simetria de gauge, massa para o campo de gauge, A_μ . Mas, como o termo de CS é um termo topológico de massa, que não contribui explicitamente para o cálculo do tensor de energia-momentum, $\Theta_{\text{CS}}^{\mu\nu} = 0$ [15], verifica-se que, apesar de tal

termo gerar massa de natureza topológica para o campo de gauge, não são introduzidos graus de liberdade adicionais à teoria, tendo, portanto, tanto o campo de Maxwell como o de Chern-Simons-Maxwell, apenas 1 grau de liberdade, o que caracteriza a natureza escalar de ambos os campos em $D = 3$.

Um resultado interessante das 3 dimensões, para o caso de CSM, é a relação entre o spin, s , e o parâmetro de massa, m . Esta relação é $s = \frac{m}{|m|}$, o que evidencia a existência de dois possíveis estados de spin : $s = 1$ ($m > 0$) e $s = -1$ ($m < 0$) [15]. Esta relação massa-spin não é contínua no limite de $m \rightarrow 0$, mas este limite implica na redução da teoria de Chern-Simons-Maxwell à teoria de Maxwell, o que leva o field-strength a ser escrito sob a forma

$$F_{\text{CSM}}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \varphi \quad , \quad (1.3)$$

onde φ é um campo escalar, sendo, portanto, o campo de Maxwell em $D = 3$, um campo de spin-0. Ou seja : o fóton descreve apenas 1 grau de liberdade físico em 3 dimensões espaço-temporais. Este resultado persiste também no caso do campo de CSM.

Em $D = 4$, verifica-se que a quebra espontânea de uma simetria global e contínua em uma teoria de campos a temperatura zero implica no restabelecimento desta simetria acima de uma certa temperatura crítica, T_c . Mas, em se tratando de uma teoria de campos em $D = 3$ a temperatura finita, $T \neq 0$, o que se verifica é a impossibilidade da quebra espontânea de simetrias contínuas globais da teoria. Isto se deve à impossibilidade da existência de bósons de Goldstone em espaços 2-dimensionais ($D = 3$ a $T \neq 0$) sem que haja violação de certos princípios, como localidade e causalidade [16]. Chega-se, então, a um aparente impasse : se não há a quebra espontânea de simetrias contínuas globais em

$D = 3$ a $T \neq 0$, como entender, então, certos fenômenos de transição de fases em espaços 2-dimensionais a temperatura finita ? Se, por um lado, o Teorema de Coleman afirma que “ não há quebra espontânea de simetrias contínuas globais em $D = 3$ a $T \neq 0$ ”, nada é dito a respeito da possibilidade ou impossibilidade da quebra espontânea de simetrias contínuas locais (simetria de gauge) e da quebra dinâmica de simetrias contínuas globais e locais [17, 18].

Entre as tentativas mais recentes em busca do entendimento do fenômeno da supercondutividade a altas temperaturas, estão os trabalhos realizados por Dorey e Mavromatos [19, 20]. A partir de uma representação redutível 4×4 para os férmions de Dirac em 3 dimensões e o acoplamento mínimo destes a um campo estatístico (anyon) de massa nula, a_μ , e a um campo de Maxwell (fóton) externo, A_μ , gera-se dinamicamente, por correções de loop, o acoplamento do campo de Maxwell (fóton) ao campo estatístico (anyon). Este último desempenha o papel de um bóson de Goldstone, gerando massa para o fóton (estado supercondutor) até uma certa temperatura crítica, $T_c \neq 0$, acima da qual a massa do fóton torna-se nula (estado normal) desaparecendo, então, o efeito Meissner, que é o fenômeno da não-penetração do campo magnético em um supercondutor do Tipo I. Nos supercondutores do Tipo II, há a penetração do campo magnético na forma de fluxóides, que são os quanta de fluxo magnético. Desta forma, caracteriza-se os supercondutores do Tipo I pelo fluxo de campo magnético nulo, e os supercondutores do Tipo II pelo fluxo de campo magnético quantizado.

Admitindo-se a relevância do estudo da dinâmica de campos vetoriais em $D = 3$ através das teorias de Chern-Simons e Chern-Simons-Maxwell, estabeleceu-se que o ob-

jetivo desta tese seria buscar o entendimento de teorias Lagrangeanas do tipo Chern-Simons-Maxwell (CSM*) e Chern-Simons-Maxwell-Proca (CSMP*) para campos vetoriais complexos em $D = 3$.

Serão analisadas aqui, questões como: causalidade, unitariedade e renormalizabilidade, como também a geração dinâmica de massa produzida pelas correções de 1-loop e lida na self-energy do campo vetorial complexo de CSM acoplado minimamente ao campo de Maxwell. O termo do tipo Proca, gerado quanticamente através das correções de 1-loop, não colocará em risco nem a causalidade nem a unitariedade a tree-level da teoria de CSM*, desde que sejam satisfeitas certas condições impostas sobre os parâmetros livres do Lagrangeano. Mas, apesar deste termo gerado quanticamente afetar o comportamento do propagador no limite de altas energias, isto é, alterar o grau superficial de divergência, não haverá comprometimento da renormalizabilidade da teoria, já que não é necessária a introdução de um contra-termo de massa no Lagrangeano, pois o termo gerado dinamicamente resulta finito.

Os Capítulos 2 e 3 que se seguem estão organizados de tal forma que, tratar-se-á, no Capítulo 2, de questões de caráter semi-clássico referentes às teorias de CSM* e CSMP*, enquanto que, no Capítulo 3, serão abordadas questões acerca do comportamento a nível quântico de ambas as teorias. O Capítulo 2 resume-se à análise das simetrias, cálculo dos propagadores, análise dos pólos e resíduos dos mesmos e a consequente verificação da fisicidade dos quanta envolvidos nas teorias em questão. A análise do comportamento das teorias de CSM* e CSMP* a nível quântico é o que se desenvolve no Capítulo 3, que aborda o cálculo dos graus superficiais de divergência pelo método de power-counting,

obtenção das regras de Feynman para os vértices de interação, cálculo da self-energy a 1-loop para os campos de CSM*, como também a obtenção das identidades de Ward.

As conclusões gerais obtidas das análises dos resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3 são expostas no Capítulo 4. Seguem-se, ainda neste Capítulo, conclusões de caráter qualitativo acerca de cálculos a 2-loops para a self-energy dos campos de CSM*, bem como, comentários sobre as limitações e vantagens do método de regularização dimensional no caso de teorias de campos em $D = 3$. Após o Capítulo 4, encontram-se dois Apêndices, contendo resultados explícitos de cálculos apresentados no Capítulo 3. O Apêndice A contém os resultados dos gráficos de 1-loop para a self-energy dos campos de CSM*. No Apêndice B, estão contidos resultados de integrais resolvidas pelo método de regularização dimensional, a partir dos quais é observada a geração dinâmica de massa e o surgimento de divergências infra-vermelhas na teoria.

Capítulo 2

Campos Vetoriais Complexos em

$D=(1+2)$

Como já se motivou no capítulo precedente, a introdução simultânea de um campo de Maxwell e um campo de gauge estatístico, no âmbito de teorias com simetria $U(1)$ local em 3 dimensões, aparece como um ingrediente fundamental nos modelos de anyons [7, 8] e nas teorias de gauge supercondutoras desenvolvidas recentemente por Dorey e Mavromatos [19, 20].

A importância do estudo dos pólos e resíduos dos propagadores em uma dada teoria de campos reside no fato de que são estas entidades a revelar a eventual presença de modos não-físicos, tais como táquions e ghosts. A análise de uma teoria quântica de campos considerada consistente deve preencher quatro requisitos fundamentais :

- covariância de Lorentz ;
- localidade e causalidade ;

- unitariedade ;
- renormalizabilidade .

A discussão da causalidade e da unitariedade, na aproximação de zero-loop, será destacada pela análise a que se procede neste capítulo. A causalidade será assegurada pela ausência de táquions no espectro. Por sua vez, a unitariedade, pelo menos a tree-level, é assegurada, na medida em que, estados de norma negativa (ghosts) não aparecem, ou se desacoplam dos demais estados físicos. Cabe, a este ponto, ressaltar que, mesmo a tree-level, esta última constatação é apenas uma condição necessária. Para se ter pleno controle da unitariedade à ordem perturbativa em questão, dever-se-ia também analisar o limite de altas energias das seções de choque que caracterizam os processos de espalhamento incorporados na teoria. A unitariedade é expressa através de certos limites superiores para as seções de choque na região de altas energias [21, 22, 23].

Serão aqui propostos alguns Lagrangeanos livres e, a partir destes, calcular-se-ão os respectivos propagadores da teoria para, então, discutir os espectros associados.

2.1 Campo de Chern-Simons-Maxwell Complexo e Simetrias Associadas

Será, agora, estudado um Lagrangeano livre, $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0$, para campos vetoriais complexos, B_μ e B_μ^* , com termos de Chern-Simons (CS*) e Maxwell (M*). Propõe-se :

$$\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* G_{\mu\nu} - \frac{1}{2M} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* \partial_\mu B_\nu - \frac{1}{2M} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ é o field strength para o campo B_μ , e M um parâmetro real com dimensão de massa.

Analisando-se o Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0$, verifica-se a existência de duas simetrias $U(1)$: uma global e outra local. A simetria global, $U_\alpha(1)$, é dada por :

$$B'_\mu(x) = e^{i\alpha} B_\mu(x) ; \quad (2.2)$$

por outro lado, a simetria local, $U_\beta(1)$, é caracterizada pela transformação

$$B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \partial_\mu \beta(x) , \quad (2.3)$$

onde β é uma função complexa arbitrária e do tipo C^∞ .

Pode-se, portanto, dizer que B e B^* têm caráter misto. Transformam-se como campos de matéria para a simetria $U_\alpha(1)$ e, ao mesmo tempo, como campos de gauge para a simetria $U_\beta(1)$. A questão de simetrias de gauge com parâmetro complexo já foi abordada no estudo de quebra espontânea de simetrias em modelos de gauge supersimétricos [24].

Ao se calibrar a simetria $U_\alpha(1)$, isto é, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$, define-se para efeitos de invariância, uma derivada covariante mediante a introdução de um campo de gauge real (campo de Maxwell), A_μ :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\omega A_\mu , \quad (2.4)$$

onde ω é uma constante de acoplamento com dimensão $\frac{1}{2}$ em unidades de massa.

Da lei de transformação

$$D'_\mu = e^{i\alpha(x)} D_\mu e^{-i\alpha(x)} , \quad (2.5)$$

encontra-se que

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{\omega} \partial_\mu \alpha(x) . \quad (2.6)$$

Faz-se, então, o acoplamento mínimo dos campos B_μ e B_μ^* ao campo de gauge A_μ , como indicado a seguir :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0(B, B^*, \partial B, \partial B^*) &\longmapsto \mathcal{L}_{\text{CSM}}(B, B^*, \partial B, \partial B^*, A) \\
&= \mathcal{L}_{\text{CSM}}^0(B, B^*, DB, D^*B^*) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu}B_\alpha^*\tilde{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2M}\tilde{G}_{\mu\nu}^*\tilde{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv D_\mu B_\nu - D_\nu B_\mu, \quad (2.8.a)$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^* \equiv D_\mu^* B_\nu^* - D_\nu^* B_\mu^*. \quad (2.8.b)$$

Substituindo-se em (2.7) as formas explícitas das derivadas covariantes, chega-se ao Lagrangeano :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{CSM}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu}B_\alpha^*G_{\mu\nu} - \frac{1}{2M}G_{\mu\nu}^*G^{\mu\nu} + i\omega\epsilon^{\alpha\mu\nu}B_\alpha^*A_\mu B_\nu + \quad (2.9) \\
&\quad -i\frac{\omega}{M}(G_{\mu\nu}^*A^\mu B^\nu - G_{\mu\nu}A^\mu B^{*\nu}) - \frac{\omega^2}{M}(A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu)A^\mu B^{*\nu}.
\end{aligned}$$

É interessante ressaltar que o acoplamento mínimo dos campos B_μ e B_μ^* ao campo de Maxwell, via gauging da simetria global $U_\alpha(1)$, quebra explicitamente a simetria local $U_\beta(1)$. Desta forma, B e B^* perdem o seu caráter de campos mistos, e passam a se comportar exclusivamente como campos de matéria, devido à quebra explícita da simetria local $U_\beta(1)$ nos termos de acoplamento entre os campos A_μ, B_μ e B_μ^* .

Tendo-se discutido as simetrias do Lagrangeano (2.1), prossegue-se com o estudo detalhado do espectro do modelo em questão. Estas simetrias, contudo, serão reconsideradas

no Capítulo 3, em ocasião da discussão do mecanismo de geração de massa para B_μ e B_μ^* através de correções quânticas.

2.2 Cálculo do Propagador e Análise de Pólos e Resíduos

Da análise de pólos e resíduos, pode-se inferir acerca da existência, ou não, de táquions e ghosts, os quais, como já mencionado, interferem na causalidade e unitariedade da teoria. Portanto, tal estudo é de extrema importância para o estabelecimento da consistência da teoria. Caso seja revelada a presença de modos não-físicos na teoria livre, todo o processo de acoplamento fica comprometido.

Para a obtenção do propagador da teoria, via operador equação de movimento, \mathcal{O} , tem-se um problema : este operador é da forma

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = X\Theta^{\mu\nu} + YS^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

onde

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (2.11)$$

e

$$S^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\alpha\nu} \partial_\alpha, \quad (2.12)$$

sendo, por conseguinte, um operador puramente transverso, logo, não-inversível. Pode-

se, então, para evitar tal singularidade, introduzir um gauge-fixing auxiliar, apenas para tornar possível o cálculo do propagador, pois há quebra explícita da simetria local $U_\beta(1)$ somente a nível de interação (via acoplamento mínimo), e não na teoria livre. Segue-se, assim, a introdução do gauge-fixing auxiliar :

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = \frac{1}{\hat{\alpha}} (\partial_\mu B^{*\mu}) (\partial_\nu B^\nu) . \quad (2.13)$$

Seja $\hat{\mathcal{L}}_{\text{CSM}}^0$ tal que :

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{CSM}}^0 = \mathcal{L}_{\text{CSM}}^0 + \mathcal{L}_{\text{GF}} , \quad (2.14.a)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{CSM}}^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* G_{\mu\nu} - \frac{1}{2M} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} + \frac{1}{\hat{\alpha}} (\partial_\mu B^{*\mu}) (\partial_\nu B^\nu) . \quad (2.14.b)$$

A partir de $\hat{\mathcal{L}}_{\text{CSM}}^0$, pode-se calcular o operador equação de movimento, \mathcal{O} , utilizando-se as equações de Lagrange para B_μ ou B_μ^* , como a seguir :

$$\partial_k \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{\text{CSM}}^0}{\partial (\partial_k B_\epsilon)} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{\text{CSM}}^0}{\partial B_\epsilon} = 0 , \quad (2.15)$$

a qual pode ser colocada sob a forma

$$\mathcal{O}^{\epsilon\alpha} B_\alpha^* = 0 , \quad (2.16)$$

com

$$\mathcal{O}^{\epsilon\alpha} \equiv -\epsilon^{\epsilon k \alpha} \partial_k - \frac{\square}{M} \left(\eta^{\epsilon\alpha} - \frac{\partial^\epsilon \partial^\alpha}{\square} \right) + \frac{\square}{\hat{\alpha}} \left(\frac{\partial^\epsilon \partial^\alpha}{\square} \right) . \quad (2.17)$$

Expressando-se (2.17) em termos dos operadores de projeção longitudinal

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (2.18)$$

	Ω	Θ	S
Ω	Ω	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
Θ	$\mathbf{0}$	Θ	S
S	$\mathbf{0}$	S	$-\square\Theta$

Tabela 2.1: Álgebra dos operadores longitudinal e transversais.

e dos operadores transversais Θ e S , tem-se :

$$\mathcal{O} = -S - \frac{\square}{M}\Theta + \frac{\square}{\hat{\alpha}}\Omega . \quad (2.19)$$

De posse destes operadores, constrói-se uma tabela multiplicativa (Tab.2.2), que fornece a álgebra operatorial necessária às manipulações no processo de inversão do operador \mathcal{O} .

Para se obter o propagador vetorial é necessário que o operador \mathcal{O} seja invertido. Propõe-se que seu inverso tenha a forma a seguir :

$$\mathcal{O}^{-1} = \left(-S - \frac{\square}{M}\Theta + \frac{\square}{\hat{\alpha}}\Omega \right)^{-1} = a S + b \Theta + c \Omega , \quad (2.20)$$

onde a , b e c são operadores diferenciais a serem determinados. Utilizando-se a Tab.2.2, obtém-se um sistema de equações para os coeficientes a , b e c , que levam aos seguintes resultados :

$$a = \frac{M^2}{\square(\square + M^2)} , \quad (2.21.a)$$

$$b = -\frac{M}{\square + M^2} \quad (2.21.b)$$

e

$$c = \frac{\hat{\alpha}}{\square} . \quad (2.21.c)$$

Com isto, a expressão final para \mathcal{O}^{-1} torna-se :

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{M^2}{\square(\square + M^2)} \left[S - \frac{\square}{M} \Theta \right] + \frac{\hat{\alpha}}{\square} \Omega , \quad (2.22)$$

onde é explícita a existência de dois setores : o longitudinal e o transversal. Projetando-se \mathcal{O}^{-1} nestes dois subespaços, tem-se :

$$\mathcal{O}_L^{-1} = \frac{\hat{\alpha}}{\square} \Omega , \quad (2.23.a)$$

$$\mathcal{O}_T^{-1} = \frac{M^2}{\square(\square + M^2)} \left[S - \frac{\square}{M} \Theta \right] . \quad (2.23.b)$$

A partir de (2.23.a) e (2.23.b) obtém-se os propagadores longitudinal e transversal mediante as seguintes relações :

$$\langle T[B^*(y)B(x)] \rangle_L = -i \mathcal{O}_L^{-1} \delta^3(x - y) \quad (2.24.a)$$

e

$$\langle T[B^*(y)B(x)] \rangle_T = -i \mathcal{O}_T^{-1} \delta^3(x - y) , \quad (2.24.b)$$

o que, finalmente, leva a :

$$\langle T[B^{*\mu}(y)B^\nu(x)] \rangle_L = -i \frac{\hat{\alpha}}{\square} \Omega^{\mu\nu} \delta^3(x - y) \quad (2.25.a)$$

$$= -i \frac{\hat{\alpha}}{\square} \left(\frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) \delta^3(x - y) \quad (2.25.b)$$

e

$$\langle T[B^{*\mu}(y)B^\nu(x)] \rangle_T = -i \frac{M^2}{\square(\square + M^2)} \left[S^{\mu\nu} - \frac{\square}{M} \Theta^{\mu\nu} \right] \delta^3(x-y) \quad (2.25.c)$$

$$= -i \frac{M^2}{\square(\square + M^2)} \left[\epsilon^{\mu k \nu} \partial_k - \frac{\square}{M} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) \right] \times \\ \times \delta^3(x-y) . \quad (2.25.d)$$

Para a análise de pólos e resíduos destes propagadores, é mais conveniente que estes sejam expressos no espaço dos momenta. Pela análise de pólos, são determinadas as massas dos possíveis quanta da teoria, enquanto que pela análise de resíduos conclui-se acerca da natureza física e dinâmica dos quanta.

As convenções utilizadas para a obtenção dos propagadores no espaço dos momenta são as seguintes :

$$\langle T[B^{*\mu}(y)B^\nu(x)] \rangle_L = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Delta_L^{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)} , \quad (2.26.a)$$

onde

$$\Delta_L^{\mu\nu}(k) \equiv \langle B^{*\mu}(k)B^\nu(k) \rangle_L , \quad (2.26.b)$$

e

$$\langle T[B^{*\mu}(y)B^\nu(x)] \rangle_T = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Delta_T^{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)} , \quad (2.26.c)$$

onde

$$\Delta_T^{\mu\nu}(k) \equiv \langle B^{*\mu}(k)B^\nu(k) \rangle_T . \quad (2.26.d)$$

A partir das convenções adotadas acima, obtêm-se os seguintes resultados para os propagadores nos setores longitudinal e transversal :

$$\Delta_L^{\mu\nu}(k) = i \frac{\hat{\alpha}}{k^2} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (2.27.a)$$

e

$$\Delta_T^{\mu\nu}(k) = -i \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} \left[i \epsilon^{\mu k \nu} k_k + \frac{k^2}{M} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \right] . \quad (2.27.b)$$

Pela análise dos pólos dos propagadores Δ_L e Δ_T , verifica-se a existência de um pólo simples para Δ_L em $k^2 = 0$, e dois pólos simples para Δ_T em $k^2 = 0$ e $k^2 = M^2$:

$$\Delta_L \longrightarrow 1 \text{ pólo simples, } k^2 = 0 ;$$

$$\Delta_T \longrightarrow 2 \text{ pólos simples, } k^2 = 0 \text{ e } k^2 = M^2 .$$

Como tanto o pólo de Δ_L quanto os pólos de Δ_T satisfazem à condição de $k^2 \geq 0$, conclui-se pela não-existência de táquions na teoria. Desta forma, está garantida a causalidade.

Para a constatação, ou não, de que a unitariedade é respeitada, e que a função de Green de 2-pontos não descreve a propagação de ghosts, o procedimento usual consiste no acoplamento do propagador a correntes externas que, eventualmente, satisfaçam a vínculos impostos pelas simetrias do Lagrangeano. No caso de campos de gauge, estas

correntes devem ser conservadas.

Considerando-se, então, correntes carregadas e conservadas, J_μ e J_μ^* , satura-se os propagadores, Δ_L e Δ_T , com as correntes J e J^* como a seguir :

$$\hat{A}_L = J_\mu \Delta_L^{\mu\nu}(k) J_\nu^* \quad (2.28.a)$$

e

$$\hat{A}_T = J_\mu \Delta_T^{\mu\nu}(k) J_\nu^* . \quad (2.28.b)$$

A unitariedade impõe que as amplitudes, acima definidas, que descrevem a emissão e a conseqüente absorção de quanta correspondendo aos pólos dos propagadores tenham resíduos com parte imaginária não-negativa :

$$\text{Im Res } \hat{A}_L |_{k^2=0} \geq 0 \quad (2.29.a)$$

e

$$\text{Im Res } \hat{A}_T \Big|_{\substack{k^2=0 \\ k^2=M^2}} \geq 0 . \quad (2.29.b)$$

Procede-se, a seguir, ao cálculo dos resíduos das amplitudes nos seus respectivos pólos. O setor longitudinal, devido à conservação da corrente, anula-se, o que garante o desacoplamento do pólo $k^2 = 0$ no setor de spin-0 (longitudinal).

Para o estudo do setor transversal, são calculados, os resíduos de \hat{A}_T nos pólos $k^2 = 0$

e $k^2 = M^2$:

$$\text{Res } \hat{A}_T |_{k^2=0} = i J_\mu (i \epsilon^{\mu k \nu} k_k) J_\nu^* |_{k^2=0} \quad (2.30)$$

e

$$\text{Res } \hat{A}_T |_{k^2=M^2} = -i J_\mu (i \epsilon^{\mu k \nu} k_k + M \eta^{\mu \nu}) J_\nu^* |_{k^2=M^2} \quad (2.31)$$

Ao se fazer uso da conservação das correntes externas, e com a escolha de referenciais convenientes, onde $k^\mu = (M, 0, \pm M)$ ou $k^\mu = (M, 0, 0)$, se $k^2 = 0$ ou $k^2 = M^2$, respectivamente, mostra-se que :

$$\text{Im Res } \hat{A}_T |_{k^2=0} = 0 \quad (2.32)$$

e

$$\text{Im Res } \hat{A}_T |_{k^2=M^2} = 2M J_1 J_1^* \quad (2.33)$$

Pode-se agora, a partir destes resultados concluir algo acerca deste setor. Verifica-se no pólo $k^2 = 0$ que $\text{Im Res } \hat{A}_T |_{k^2=0} = 0$, concluindo-se, portanto, que os quanta físicos ($k^2 = 0$) associados a este setor são não-dinâmicos. Já no pólo $k^2 = M^2$, tem-se que $\text{Im Res } \hat{A}_T |_{k^2=M^2} = 2M J_1 J_1^*$. Dependendo este resultado linearmente de M , a condição para que o pólo massivo $k^2 = M^2$ seja físico reduz-se a

$$M > 0 \quad (2.34)$$

Esta condição garante que o pólo $k^2 = M^2$ descreve um quantum físico.

Tem-se então, a partir das análises de pólos e resíduos dos propagadores, o seguinte panorama geral :

$$setor \text{ L} \longrightarrow \text{pólo } k^2 = 0 \begin{cases} \text{n\~{a}o-din\~{a}mico (on/off-shell)} \\ 0\text{-t\~{a}qui\~{o}ns, 0\text{-ghosts} \end{cases} \quad (2.35.a)$$

$$setor \text{ T} \longrightarrow \begin{cases} \text{pólo } k^2 = 0 \begin{cases} \text{n\~{a}o-din\~{a}mico (on-shell)} \\ 0\text{-t\~{a}qui\~{o}ns, 0\text{-ghosts} \end{cases} \\ \text{pólo } k^2 = M^2 \begin{cases} \text{din\~{a}mico} \\ 0\text{-t\~{a}qui\~{o}ns, 0\text{-ghosts} \rightarrow M > 0 \end{cases} \end{cases} . \quad (2.35.b)$$

Feita esta análise, a tree-level, para a teoria de Chern-Simons-Maxwell (CSM*), com campos vetoriais complexos, passa-se, então, ao estudo da teoria de Chern-Simons-Maxwell-Proca (CSMP*), na qual é adicionado a CSM* um termo de Proca, $\hat{\mu} B_\mu^* B^\mu$.

2.3 Campos de Chern-Simons-Maxwell-Proca Complexos e Simetrias Associadas

Como dito anteriormente, obtém-se a teoria de CSMP* a partir da teoria de CSM* pela introdução de um termo de Proca, $\hat{\mu} B_\mu^* B^\mu$. Portanto, para a formulação do Lagrangeano livre de CSMP*, $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^o$, introduz-se o termo $\hat{\mu} B_\mu^* B^\mu$ no Lagrangeano livre, $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^o$ (2.1).

Logo :

$$\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^o = \mathcal{L}_{\text{CSM}}^o + \hat{\mu} B_\mu^* B^\mu . \quad (2.36)$$

Tem-se, portanto, que

$$\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^o = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* G_{\mu\nu} - \frac{1}{2M} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} + \hat{\mu} B_\mu^* B^\mu$$

$$= \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* \partial_\mu B_\nu - \frac{1}{2M} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} + \hat{\mu} B_\mu^* B^\mu \quad , \quad (2.37)$$

onde $\hat{\mu}$ é um parâmetro com dimensão de massa.

Analisando-se o Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^\circ$ (2.37), verifica-se a existência de uma simetria global $U_\alpha(1)$ dada por :

$$B'_\mu(x) = e^{i\alpha} B_\mu(x) \quad . \quad (2.38)$$

Verifica-se, então, que a adição do termo de Proca, $\hat{\mu} B_\mu^* B^\mu$, a $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^\circ$, para a obtenção de $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^\circ$, quebra explicitamente a simetria local (2.3) $U_\beta(1)$ de $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^\circ$.

Efetua-se o acoplamento mínimo dos campos B e B^* ao campo de gauge A (campo de Maxwell) em $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^\circ$ pelo método descrito na Seção 2.1, obtendo-se, portanto, que

$$\mathcal{L}_{\text{CSMP}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* \tilde{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2M} \tilde{G}_{\mu\nu}^* \tilde{G}^{\mu\nu} + \hat{\mu} B_\mu^* B^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad . \quad (2.39)$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CSMP}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* G_{\mu\nu} - \frac{1}{2M} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} + \hat{\mu} B_\mu^* B^\mu + i\omega \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* A_\mu B_\nu + \\ & -i \frac{\omega}{M} (G_{\mu\nu}^* A^\mu B^\nu - G_{\mu\nu} A^\mu B^{*\nu}) - \frac{\omega^2}{M} (A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu) A^\mu B^{*\nu} \quad . \quad (2.40) \end{aligned}$$

Observa-se que a simetria local $U_\alpha(1)$ é uma simetria de $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}$, já que este é obtido pelo gauging da simetria global $U_\alpha(1)$ (2.38) de $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^\circ$.

Após as discussões acerca das simetrias do Lagrangeano (2.36), segue-se agora, ao estudo detalhado do espectro desta teoria.

2.4 Cálculo do Propagador e Análise de Pólos e Resíduos

Esta Seção propõe o estudo de pólos e resíduos da teoria de CSMP*. Antes, porém, discute-se o cálculo do propagador, tendo como objetivo, verificar a possibilidade da existência, ou não, de táquions e ghosts na teoria.

A obtenção do propagador será feita via operador equação de movimento de $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^{\circ}$, conforme o método descrito na Seção 2.2 . No caso do Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^{\circ}$, o operador equação de movimento, $\bar{\mathcal{O}}$, é do tipo

$$\bar{\mathcal{O}}^{\mu\nu} = X S^{\mu\nu} + Y \Theta^{\mu\nu} + Z \Omega^{\mu\nu} , \quad (2.41)$$

sendo, portanto, um operador inversível, não havendo a necessidade, como no caso de $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^{\circ}$ (2.1), da introdução de um gauge-fixing auxiliar (2.13) para o cálculo do propagador para os campos B e B^* . A partir de $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^{\circ}$, obtém-se, pelas equações de Lagrange, o operador equação de movimento, $\bar{\mathcal{O}}$:

$$\bar{\mathcal{O}}^{\epsilon\alpha} \equiv -\epsilon^{\epsilon\kappa\alpha} \partial_{\kappa} - \frac{\square}{M} \left(\eta^{\epsilon\alpha} - \frac{\partial^{\epsilon} \partial^{\alpha}}{\square} \right) - \hat{\mu} \eta^{\epsilon\alpha} . \quad (2.42)$$

Expressando-se (2.42) em termos dos operadores transversais Θ e S , tem-se :

$$\bar{\mathcal{O}} = -S - \frac{\square}{M} \Theta - \hat{\mu} \mathbf{1} . \quad (2.43)$$

Calculando-se o inverso do operador $\bar{\mathcal{O}}$ ($\bar{\mathcal{O}}^{-1}$), conforme o método descrito na Seção 2.2, tem-se :

$$\bar{\mathcal{O}}^{-1} = \left(-S - \frac{\square}{M} \Theta - \hat{\mu} \mathbf{1} \right)^{-1} = a S + b \Theta + c \mathbf{1} , \quad (2.44)$$

onde a , b e c são operadores diferenciais a serem determinados. Utilizando-se a Tab.2.2, obtém-se :

$$a = \frac{M^2}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} , \quad (2.45.a)$$

$$b = -\frac{M(\square + \hat{\mu}M)}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} + \frac{1}{\hat{\mu}} \quad (2.45.b)$$

e

$$c = -\frac{1}{\hat{\mu}} . \quad (2.45.c)$$

Assim :

$$\bar{\mathcal{O}}^{-1} = \frac{M^2}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} S + \left(-\frac{M(\square + \hat{\mu}M)}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} + \frac{1}{\hat{\mu}} \right) \Theta - \frac{1}{\hat{\mu}} \mathbb{1} ; \quad (2.46)$$

mas, como $\mathbb{1} = \Theta + \Omega$, tem-se

$$\bar{\mathcal{O}}^{-1} = \frac{M^2}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} S - \frac{M(\square + \hat{\mu}M)}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} \Theta - \frac{1}{\hat{\mu}} \Omega , \quad (2.47)$$

onde se verifica a existência dos setores longitudinal e transversal. Projetando-se $\bar{\mathcal{O}}^{-1}$ nestes dois subespaços, tem-se :

$$\bar{\mathcal{O}}_L^{-1} = -\frac{1}{\hat{\mu}} \Omega , \quad (2.48.a)$$

$$\bar{\mathcal{O}}_T^{-1} = \frac{M}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} [M S - (\square + \hat{\mu}M) \Theta] . \quad (2.48.b)$$

Os propagadores longitudinal e transversal são obtidos conforme o método descrito na Seção 2.2, tendo-se, portanto :

$$\langle T[B^{*\mu}(y)B^\nu(x)] \rangle_L = i \frac{1}{\hat{\mu}} \left(\frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) \delta^3(x - y) \quad (2.49.a)$$

e

$$\begin{aligned} \langle T[B^{*\mu}(y)B^\nu(x)] \rangle_T = & -i \frac{M}{[(\square + \hat{\mu}M)^2 + M^2\square]} \left[M \epsilon^{\mu\kappa\nu} \partial_\kappa + \right. \\ & \left. -(\square + \hat{\mu}M) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) \right] \delta^3(x-y) . \end{aligned} \quad (2.49.b)$$

Para a análise de pólos e resíduos destes propagadores, é mais conveniente expressá-los no espaço dos momenta. Assim, adotando-se as convenções (2.26.a), (2.26.b), (2.26.c) e (2.26.d), obtém-se $\bar{\Delta}_L^{\mu\nu}(k)$ e $\bar{\Delta}_T^{\mu\nu}(k)$ como a seguir :

$$\bar{\Delta}_L^{\mu\nu}(k) = i \frac{1}{\hat{\mu}} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (2.50.a)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_T^{\mu\nu}(k) &= -i \frac{M}{[(k^2 - \hat{\mu}M)^2 - M^2 k^2]} \left[iM \epsilon^{\mu\kappa\nu} k_\kappa + (k^2 - \hat{\mu}M) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \right] \\ &= -i \frac{M}{(k^2 - m_+^2)(k^2 - m_-^2)} \left[iM \epsilon^{\mu\kappa\nu} k_\kappa + \right. \\ & \quad \left. + (k^2 - \hat{\mu}M) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (2.50.b)$$

Pela análise dos pólos dos propagadores $\bar{\Delta}_L$ e $\bar{\Delta}_T$, verifica-se a existência de um pólo simples para $\bar{\Delta}_L$ em $k^2 = 0$, e dois pólos (necessariamente simples) para $\bar{\Delta}_T$ em $k^2 = m_+^2$ e $k^2 = m_-^2$ onde ;

$$m_\pm^2 = \frac{M}{2} [M + 2\hat{\mu} \pm \sqrt{M(M + 4\hat{\mu})}] \quad (2.51.a)$$

e

$$m_-^2 = \frac{M}{2} [M + 2\hat{\mu} - \sqrt{M(M + 4\hat{\mu})}] . \quad (2.51.b)$$

Poder-se-ia ter para $\bar{\Delta}_T$ um pólo duplo em $k^2 = m_+^2 = m_-^2$, pela condição de $M(M + 4\hat{\mu}) = 0$. Isto levaria, necessariamente, ao surgimento de ghosts na teoria, em virtude do aparecimento da derivada de uma função-delta na representação espectral do propagador [25].

A condição de positividade dos pólos ($m_+^2 > 0$, $m_-^2 > 0$), implica que os parâmetros $\hat{\mu}$ e M devem satisfazer às seguintes condições :

$$\begin{cases} M > 0 , \hat{\mu} < 0 \\ M + 4\hat{\mu} > 0 \end{cases} , \quad (2.52.a)$$

$$\begin{cases} M < 0 , \hat{\mu} > 0 \\ M + 4\hat{\mu} < 0 \end{cases} , \quad (2.52.b)$$

$$\begin{cases} M < 0 \\ \hat{\mu} < 0 \end{cases} \quad (2.52.c)$$

e

$$\begin{cases} M > 0 \\ \hat{\mu} > 0 \end{cases} . \quad (2.52.d)$$

Passando-se, agora, ao estudo dos resíduos dos propagadores $\bar{\Delta}_L$ e $\bar{\Delta}_T$, pela saturação destes com correntes externas conservadas, encontrar-se-á pela imposição simultânea da inexistência de táquions e ghosts, condições a serem satisfeitas pelos parâmetros $\hat{\mu}$ e M .

As condições sobre os parâmetros, provenientes tanto da análise dos pólos quanto dos resíduos, devem ser confrontadas para que se encontre os domínios dos parâmetros $\hat{\mu}$ e M que satisfaçam, tanto à condição da inexistência de táquions quanto de ghosts, a fim de se controlar a causalidade e unitariedade (a tree-level) da teoria.

Aqui será utilizado o mesmo método elaborado na Seção 2.2 para a saturação dos propagadores $\bar{\Delta}_L$ e $\bar{\Delta}_T$:

$$\bar{A}_L = J_\mu \bar{\Delta}_L^{\mu\nu}(k) J_\nu^* \quad (2.53.a)$$

e

$$\bar{A}_T = J_\mu \bar{\Delta}_T^{\mu\nu}(k) J_\nu^* . \quad (2.53.b)$$

Para que se garanta a unitariedade, é necessário que as partes imaginárias dos resíduos das amplitudes \bar{A}_L e \bar{A}_T , nos respectivos pólos, sejam não-negativas :

$$\text{Im Res } \bar{A}_L |_{k^2=0} \geq 0 \quad (2.54.a)$$

e

$$\text{Im Res } \bar{A}_T \left| \begin{array}{l} k^2=m_+^2 \\ k^2=m_-^2 \end{array} \right. \geq 0 . \quad (2.54.b)$$

Pelas expressões dos propagadores $\bar{\Delta}_L$ (2.50.a) e $\bar{\Delta}_T$ (2.50.b), e considerando-se também a conservação das correntes J e J^* , $k_\mu J^\mu = k_\mu J^{*\mu} = 0$, verifica-se que o setor longitudinal anula-se no pólo $k^2 = 0$, sendo, assim, um pólo não-dinâmico. Mas, para o setor transversal, obtém-se os seguintes resíduos de \bar{A}_T nos pólos $k^2 = m_+^2$ e $k^2 = m_-^2$:

$$\text{Res } \bar{A}_T |_{k^2=m_+^2} = -i \frac{M}{(m_+^2 - m_-^2)} J_\mu [iM \epsilon^{\mu\kappa\nu} k_\kappa + (m_+^2 - \hat{\mu}M) \eta^{\mu\nu}] J_\nu^* |_{k^2=m_+^2} \quad (2.55)$$

e

$$\text{Res } \bar{A}_T \Big|_{k^2=m_-^2} = -i \frac{M}{(m_-^2 - m_+^2)} J_\mu [iM\epsilon^{\mu\kappa\nu} k_\kappa + (m_-^2 - \hat{\mu}M)\eta^{\mu\nu}] J_\nu^* \Big|_{k^2=m_-^2} \quad (2.56)$$

Chegando-se, portanto, ao resultado final :

$$\text{Im Res } \bar{A}_T \Big|_{k^2=m_+^2} = \frac{M[M + \sqrt{M(M + 4\hat{\mu})}]}{\sqrt{M(M + 4\hat{\mu})}} J_1 J_1^* \quad (2.57)$$

e

$$\text{Im Res } \bar{A}_T \Big|_{k^2=m_-^2} = -\frac{M[M - \sqrt{M(M + 4\hat{\mu})}]}{\sqrt{M(M + 4\hat{\mu})}} J_1 J_1^* \quad (2.58)$$

É de posse destes resultados, e das condições (2.54.b), que garantem a dinâmica e fisicidade dos quanta $k^2 = m_+^2$ e $k^2 = m_-^2$, que se chega ao domínio para os parâmetros $\hat{\mu}$ e M :

$$\begin{cases} M > 0 \\ \hat{\mu} > 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Confrontando-se, então, as condições (2.52.a, 2.52.b, 2.52.c e 2.52.d) provenientes da análise dos pólos, com as condições (2.59) decorrentes da análise dos resíduos, verifica-se que o domínio no qual $\hat{\mu}$ e M estarão sujeitos para que seja garantida a inexistência de táquions e ghosts é $M > 0$ e $\hat{\mu} > 0$.

Tem-se, então, a partir das análises de pólos e resíduos dos propagadores, o seguinte panorama geral :

$$\text{setor L} \longrightarrow \text{pólo } k^2 = 0 \begin{cases} \text{não-dinâmico (on/off-shell)} \\ \text{0-táquions, 0-ghosts} \end{cases} \quad (2.60.a)$$

$$\text{setor T} \longrightarrow \text{pólos } k^2 = m_+^2 \text{ e } k^2 = m_-^2 \begin{cases} \text{dinâmicos} \\ \text{0-táquions, 0-ghosts} \rightarrow M \text{ e } \hat{\mu} > 0 \end{cases} \quad (2.60.b)$$

Com base no estudo realizado neste capítulo, tendo como objetivo uma análise detalhada do espectro das teorias de CSM* e de CSMP* apresentadas, far-se-á no capítulo que se segue as devidas análises quânticas, como também, cálculos da self-energy dos campos de matéria B e B^* a 1-loop.

Capítulo 3

Aspectos Quânticos das Teorias de CSM* e de CSMP*

Tendo estudado e estabelecido, no capítulo precedente, as condições de consistência espectral para os modelos de CSM* e de CSMP*, a seqüência natural do estudo consistiria na análise dos mesmos após a incorporação de efeitos quânticos, os quais, no contexto da teoria de perturbações, apresentam-se como as chamadas correções de loops. Desta forma, o objetivo central deste capítulo é a discussão de alguns aspectos quânticos dos modelos introduzidos no Capítulo 2.

O método de power-counting a ser descrito em seguida tem como objetivo a verificação, ou não, da renormalizabilidade de ambas as teorias, bem como a identificação do grau superficial de divergência de diagramas de Feynman 1PI (one-particle-irreducible), com especial atenção à self-energy dos campos de CSM*.

Como cálculo explícito de um diagrama a 1-loop, propõe-se o gráfico de self-energy

para os campos complexos de CSM, do qual surgirão discussões referentes a questões como a geração dinâmica de massa e divergências infra-vermelhas, que devem ser mais drásticas em 3 do que em 4 dimensões.

Como finalização, serão obtidas as identidades de Ward da teoria de CSM*, das quais resultará a permanência da invariância de gauge a nível quântico.

3.1 Power-Counting das Teorias de CSM* e de CSMP*

O power-counting é um método pelo qual se pode inferir sobre o grau de divergência de uma dada teoria na região do ultra-violeta (UV), isto é, na região de altas energias, é, desta forma, pode-se estabelecer resultados sobre a renormalizabilidade da teoria.

Desenvolve-se, então, nesta Seção, o método de power-counting para ambas as teorias em questão. Para isso, necessita-se a identificação dos termos de interação nos Lagrangeanos minimamente acoplados de ambas as teorias, a de CSM* e de CSMP*.

Analisando-se o Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} dado em (2.10), identifica-se os seguintes termos de interação :

$$\mathcal{L}_{\text{CSM}}^{(1)\text{int}} = i \omega \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_{\alpha}^{*} A_{\mu} B_{\nu} \longrightarrow V_3 , \quad (3.1.a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{CSM}}^{(2)\text{int}} = -i \frac{\omega}{M} (G_{\mu\nu}^{*} A^{\mu} B^{\nu} - G_{\mu\nu} A^{\mu} B^{*\nu}) \longrightarrow \bar{V}_3 \quad (3.1.b)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{CSM}}^{(3)\text{int}} = -\frac{\omega^2}{M} (A_{\mu} B_{\nu} - A_{\nu} B_{\mu}) A^{\mu} B^{*\nu} \longrightarrow V_4 , \quad (3.1.c)$$

onde V_3, \bar{V}_3, V_4 são os respectivos vértices de interação.

Para se efetuar o power-counting das teorias em questão, é necessário que sejam definidas as quantidades :

$$L = n^2 \text{ de loops ;}$$

$$I_A = n^2 \text{ de linhas internas de } A_\mu \text{ ;}$$

$$I_B = n^2 \text{ de linhas internas de } B_\mu \text{ e } B_\mu^* \text{ ;}$$

$$v_3 = n^2 \text{ de vértices } V_3 \text{ ;}$$

$$\bar{v}_3 = n^2 \text{ de vértices } \bar{V}_3 \text{ ;}$$

$$v_4 = n^2 \text{ de vértices } V_4 \text{ ;}$$

$$E_A = n^2 \text{ de linhas externas de } A_\mu \text{ ;}$$

$$E_B = n^2 \text{ de linhas externas de } B_\mu \text{ e } B_\mu^* \text{ ;}$$

$$I = n^2 \text{ total de linhas internas ;}$$

$$v = n^2 \text{ total de vértices ;}$$

$$\delta = \text{ grau superficial de divergência .}$$

Como no limite assintótico de altas energias, $k^2 \rightarrow \infty$, $\langle B^* B \rangle$ e $\langle A A \rangle$ comportam-se assintoticamente com $(k^2)^{-1}$, tem-se que :

$$\delta_{\text{CSM}} = 3L - 2I_A - 2I_B + \bar{v}_3 \text{ .} \quad (3.2)$$

Mas como

$$L = I - v + 1 \text{ ,} \quad (3.3)$$

onde

$$I = I_A + I_B \quad (3.4)$$

e

$$v = v_3 + \bar{v}_3 + v_4 , \quad (3.5)$$

chega-se, a partir de (3.2) que

$$\delta_{\text{CSM}} = I_A + I_B - 3v_3 - 2\bar{v}_3 - 3v_4 + 3 . \quad (3.6)$$

Analisando-se os vértices V_3 , \bar{V}_3 e V_4 , obtém-se as seguintes relações entre o número de linhas internas e externas, e o número de vértices :

$$2I_A + E_A = v_3 + \bar{v}_3 + 2v_4 \quad (3.7.a)$$

e

$$2I_B + E_B = 2v_3 + 2\bar{v}_3 + 2v_4 . \quad (3.7.b)$$

De posse das expressões (3.6), (3.7.a) e (3.7.b), encontra-se finalmente que

$$\delta_{\text{CSM}} = 3 - \frac{3}{2}v_3 - \frac{1}{2}\bar{v}_3 - v_4 - \frac{1}{2}E_A - \frac{1}{2}E_B . \quad (3.8)$$

Verifica-se, portanto, que a teoria de CSM* é uma teoria super-renormalizável, caracterizada por estarem as possíveis divergências UV restritas até uma certa ordem finita de loops na expansão perturbativa.

Passando-se, agora, ao caso de CSMP*, encontra-se pelo Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}$ (2.40) os mesmos vértices de interação V_3 , \bar{V}_3 , V_4 do Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} (2.10). Obtém-se, pelo mesmo processo descrito no caso anterior, que :

$$\delta_{\text{CSMP}} = 3 + \frac{1}{2}v_3 + \frac{3}{2}\bar{v}_3 + v_4 - \frac{1}{2}E_A - \frac{3}{2}E_B . \quad (3.9)$$

A introdução do termo de Proca, como se vê, modifica radicalmente o comportamento ultra-violeta da teoria do ponto-de-vista do power-counting. Entretanto, cabe ressaltar aqui o interessante resultado de Boulware [26, 27] concernente à renormalização de campos vetoriais Abelianos do tipo Proca. Apesar do comportamento assintótico constante do propagador de um campo de Proca, o modelo em questão é efetivamente renormalizável, desde que o campo vetorial massivo se acople à correntes conservadas. Deixa-se claro, porém, que tal resultado é válido apenas no caso Abeliano.

3.2 Regras de Feynman e Self-Energy dos Campos Complexos de CSM*

Para que sejam realizados os cálculos da self-energy, é necessário obter as regras de Feynman para os vértices de interação. Calculam-se estes fatores de vértice através da ação efetiva ou funcional gerador das funções de Green 1PI, $\Gamma[A, B, B^*]$, definida por

$$\Gamma[A, B, B^*] = Z[J, j, j^*] - \int d^3x (J^\mu A_\mu + j^\mu B_\mu + j^{*\mu} B_\mu^*), \quad (3.10)$$

onde $Z[J, j, j^*]$ é o funcional gerador das funções de Green conexas :

$$\begin{aligned} \langle T[A_\mu(x_1) \dots B_\nu^*(x_i) \dots B_\kappa(x_n)] \rangle_c &= \\ &= \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j^{*\nu}(x_i)} \dots \frac{\delta}{\delta j^\kappa(x_n)} Z[J, j, j^*] \Big|_{\substack{J=0 \\ j=j^*=0}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Define-se a função de Green 1PI de n-pontos, $\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ como

$$\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^n \Gamma[A, B, B^*]}{\delta A^\mu(x_1) \dots \delta B^{*\nu}(x_i) \dots \delta B^\kappa(x_n)} \Big|_{\substack{A=0 \\ B=B^*=0}} \quad (3.12)$$

sendo sua transformada de Fourier, $\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$, definida por

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + \dots + p_i + \dots + p_n) \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \equiv \\
& \equiv \int d^3x_1 \dots d^3x_i \dots d^3x_n \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \times \\
& \times e^{-ip_1x_1} \dots e^{-ip_ix_i} \dots e^{-ip_nx_n} .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Expandindo-se a ação efetiva, $\Gamma[A, B, B^*]$, em uma série funcional de Taylor, e utilizando-se a definição (3.12), tem-se que :

$$\begin{aligned}
& \Gamma[A, B, B^*] = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^3x_1 \dots d^3x_i \dots d^3x_n \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \times \\
& \times A^\mu(x_1) \dots B^{*\nu}(x_i) \dots B^\kappa(x_n) .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Como os cálculos de correções de loops são realizados no espaço dos momenta, é necessário que se obtenha a expansão da ação efetiva neste espaço. Deve-se, portanto, adotar algumas convenções como :

$$B_\nu^*(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} B_\nu^*(k) e^{-ikx} , \tag{3.15.a}$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} A_\mu(l) e^{ilx} , \tag{3.15.b}$$

$$B_\kappa(x) = \int \frac{d^3m}{(2\pi)^3} B_\kappa(m) e^{imx} \tag{3.15.c}$$

e

$$\delta^3(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ipx} . \tag{3.15.d}$$

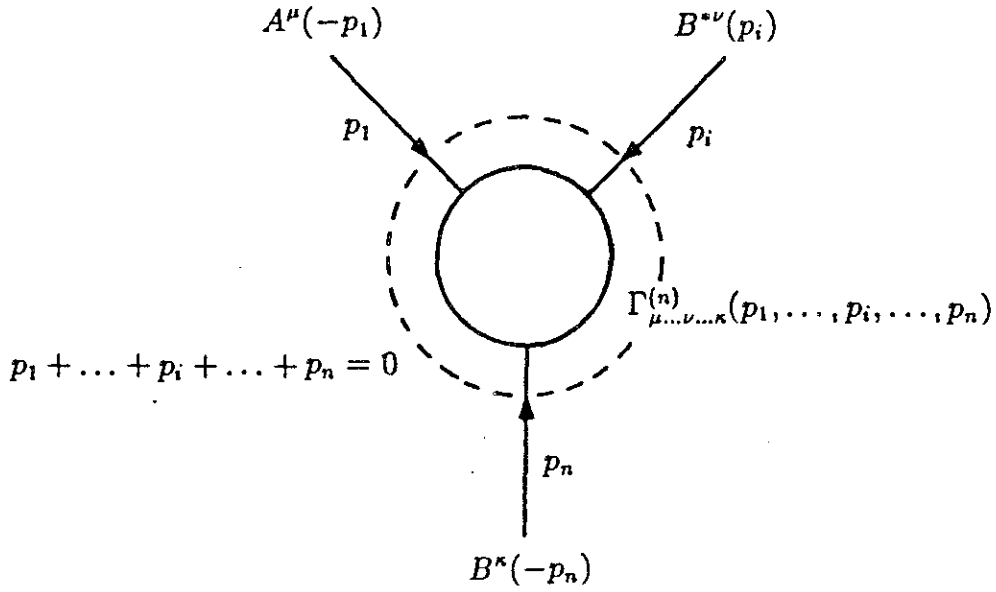


Figura 3.1: $\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$.

De posse destas convenções, e da definição (3.13), obtém-se, a partir de (3.14) o seguinte resultado para a expansão da ação efetiva no espaço dos momenta :

$$\begin{aligned}
 \Gamma[A, B, B^*] = & \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n!} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 p_{n-1}}{(2\pi)^3} & \Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \times \\
 \times A^\mu(-p_1) \dots B^{*\nu}(p_i) \dots B^\kappa(-p_n), & \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

com $p_1 + \dots + p_i + \dots + p_n = 0$.

As funções de Green 1PI, $\Gamma_{\mu\dots\nu\dots\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$, podem ser representadas em forma de diagramas segundo o gráfico da Fig.3.1.

A partir da expansão da ação efetiva no espaço dos momenta, (3.16), pode-se derivar as regras de Feynman para os vértices de interação do Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} (2.10), pois, a

tree-level, a ação efetiva nada mais é do que a ação clássica acrescida dos termos das fontes externas [26]. Portanto, tomando-se as ações de interação, e fazendo-se as transformadas de Fourier dos campos envolvidos, pode-se, após efetuar a integração espaço-temporal, obter os fatores de vértice a menos de fatores $\frac{i}{n!}$.

Da teoria de CSM* obtem-se, a partir do Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} , as seguintes ações de interação :

$$S_{\text{int}}^{(1)} = \int d^3x i\omega\epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\alpha^* A_\mu B_\nu , \quad (3.17.a)$$

$$S_{\text{int}}^{(2)} = \int d^3x -i\frac{\omega}{M} (G_{\mu\nu}^* A^\mu B^\nu - G_{\mu\nu} A^\mu B^{*\nu}) \quad (3.17.b)$$

e

$$S_{\text{int}}^{(3)} = \int d^3x -\frac{\omega^2}{M} (A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu) A^\mu B^{*\nu} . \quad (3.17.c)$$

A partir das ações de interação acima e das convenções adotadas (3.15.a), (3.15.b), (3.15.c) e (3.15.d) tem-se :

$$S_{\text{int}}^{(1)} = i \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{d^3m}{(2\pi)^3} \omega\epsilon_{\alpha\mu\nu} B^{*\alpha}(k) A^\mu(l) B^\nu(m) , \quad k = l + m ; \quad (3.18.a)$$

$$S_{\text{int}}^{(2)} = i \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{d^3m}{(2\pi)^3} \frac{d^3n}{(2\pi)^3} i\frac{\omega}{M} (\eta_{\nu\alpha} k_\mu - \eta_{\mu\alpha} k_\nu + \eta_{\nu\alpha} m_\mu - \eta_{\mu\nu} m_\alpha) \times \\ \times B^{*\alpha}(k) A^\mu(l) B^\nu(m) , \quad k = l + m ; \quad (3.18.b)$$

$$S_{\text{int}}^{(3)} = \frac{i}{2!} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{d^3m}{(2\pi)^3} \frac{d^3n}{(2\pi)^3} i\frac{2\omega^2}{M} (\eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}) \times \\ \times B^{*\alpha}(k) A^\nu(l) B^\beta(m) A^\mu(n) , \quad k = l + m + n . \quad (3.18.c)$$

São lidos, portanto, os seguintes fatores de vértice :

$$(V_3)_{\alpha\mu\nu} = \omega\epsilon_{\alpha\mu\nu} , \quad (3.19.a)$$

$$(\bar{V}_3)_{\alpha\mu\nu} = i\frac{\omega}{M}(\eta_{\nu\alpha}k_\mu - \eta_{\mu\alpha}k_\nu + \eta_{\nu\alpha}m_\mu - \eta_{\mu\nu}m_\alpha) \quad (3.19.b)$$

e

$$(V_4)_{\alpha\nu\beta\mu} = i\frac{2\omega^2}{M}(\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu}) . \quad (3.19.c)$$

De posse dos propagadores e das regras de Feynman para os vértices V_3 , \bar{V}_3 e V_4 , (3.19.a), (3.19.b) e (3.19.c), pode-se, com base nos diagramas da Fig.3.2, passar à etapa dos cálculos a 1-loop dos diagramas de self-energy dos campos complexos de CSM, B e B^* .

Na Fig.3.3 encontram-se, a partir dos vértices de interação da Fig.3.2, os diagramas de self-energy Σ ($\delta = 1$), Λ ($\delta = 1$), Ξ^R ($\delta = 0$), Ξ^L ($\delta = 0$), e Γ ($\delta = -1$).

Os resultados explícitos dos diagramas de self-energy dos campos complexos de CSM (3.3) são apresentados no Apêndice A. A partir destes resultados, serão escolhidos termos que sejam simétricos nos índices livres e independentes dos momenta das pernas externas dos diagramas, pois, verificar-se-á a posteriori que estes termos são os responsáveis pelo efeito da geração dinâmica de massa.

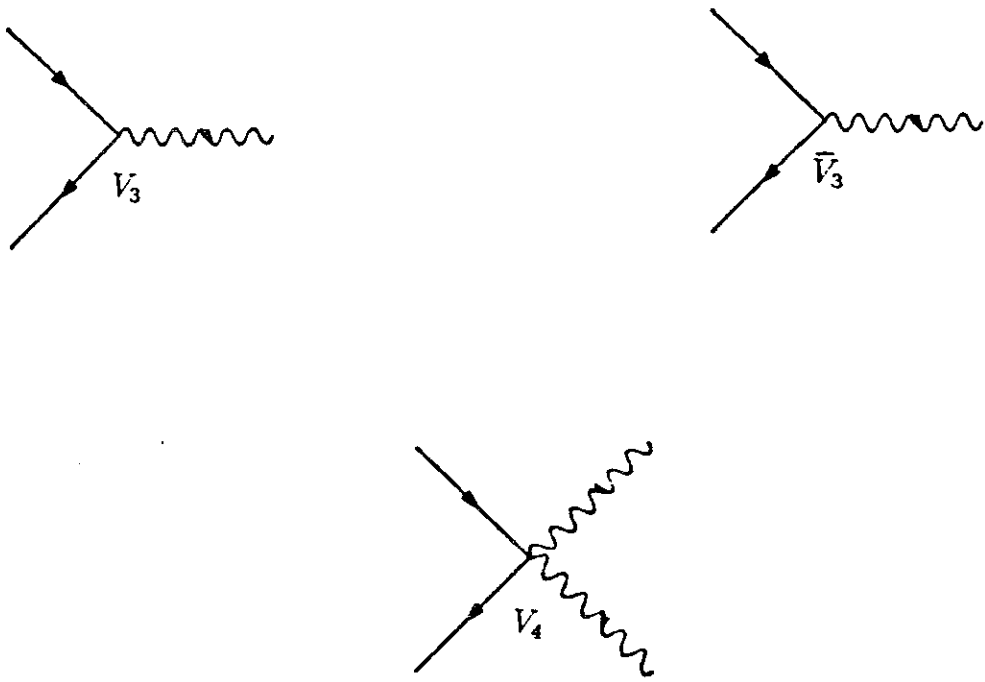


Figura 3.2: Vértices de interação.

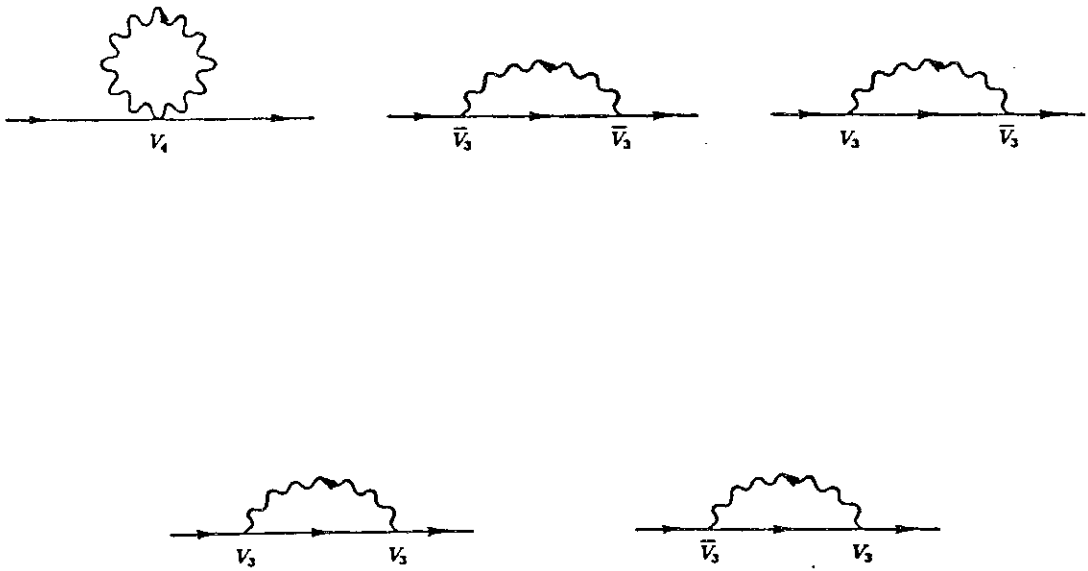


Figura 3.3: Diagramas de self-energy.

Surge um resultado interessante acerca de possíveis divergências em cálculos a 1-loop, em $D = 3$, apenas pela análise das integrais de momenta J_0 , J_1^μ e $J_2^{\mu\nu}$ contidas no Apêndice B. Verifica-se no caso da integral $J_2^{\mu\nu}$ que, como esta contém uma função Γ do tipo $\Gamma(\alpha - 1 - \frac{D}{2})$, depara-se com divergências quando $\alpha - 1 - \frac{D}{2} = -n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), pois a função Γ diverge para inteiros negativos. Concluindo-se, então, que as dimensões espaço-temporais pares, $D = 2(\alpha + n - 1) = 2, 4, 6, \dots$, são em parte responsáveis pelas divergências que surgem na teoria, tornando assim necessário os processos de regularização e renormalização.

Em se tratando, neste capítulo, do cálculo dos diagramas de self-energy a 1-loop em $D = 3$, não se faz necessário o processo de regularização, pois as integrais são finitas. Já, para cálculos da self-energy a 2-loops, as divergências serão inevitáveis, sendo aí, necessário o processo de regularização e a posterior renormalização da massa.

Pelos resultados explícitos dos diagramas de self-energy contidos no Apêndice A, identifica-se quatro integrais I_1 , I_2 , I_3 e I_4 . Estas, satisfazem as condições dos integrandos serem simétricos nos índices livres e independentes dos momenta das pernas externas. Abaixo, são apresentados ainda, os resultados após a parametrização de Feynman :

$$(I_1)_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k-p)^2(k^2 - M^2)} \quad (3.20.a)$$

$$= \frac{\omega^2}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2k \cdot px + (p^2 + M^2)x - M^2]^2} \quad , \quad (3.20.b)$$

$$(I_2)_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{M} \eta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{(k-p)^2(k^2 - M^2)} \quad (3.20.c)$$

$$= \frac{\omega^2}{M} \eta_{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k^\mu}{[k^2 - 2k \cdot px + (p^2 + M^2)x - M^2]^2} \quad , \quad (3.20.d)$$

$$(I_3)_{\alpha\beta} = M\omega^2 \eta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k-p)^2(k^2 - M^2)} \quad (3.20.e)$$

$$= M\omega^2\eta_{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - 2k \cdot px + (p^2 + M^2)x - M^2]^2} \quad (3.20.f)$$

e

$$(I_4)_{\alpha\beta} = M\omega^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k-p)^2(k^2 - M^2)k^2} \quad (3.20.g)$$

$$= \frac{\omega^2}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2k \cdot px + (p^2 + M^2)x - M^2]^2} + \\ - \frac{\omega^2}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - 2k \cdot px + p^2 x)^2} . \quad (3.20.h)$$

Após serem efetuadas as integrações dos momenta em I_1 , I_2 , I_3 e I_4 , obtém-se com o auxílio das integrais contidas no Apêndice B, J_0 (B.1), J_1^μ (B.2) e $J_2^{\mu\nu}$ (B.3), os seguintes resultados :

$$(I_1)_{\alpha\beta} = i \frac{\omega^2}{8\pi M} \left\{ p_\alpha p_\beta \int_0^1 dx \frac{x^2}{[p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} \int_0^1 dx [p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}} \right\} , \quad (3.21.a)$$

$$(I_2)_{\alpha\beta} = i \frac{\omega^2}{8\pi M} \eta_{\alpha\beta} \left\{ p^2 \int_0^1 dx \frac{x^2}{[p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + 3 \int_0^1 dx [p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}} \right\} , \quad (3.21.b)$$

$$(I_3)_{\alpha\beta} = i \frac{\omega^2 M}{8\pi} \eta_{\alpha\beta} \int_0^1 dx \frac{1}{[p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.21.c)$$

e

$$(I_4)_{\alpha\beta} = i \frac{\omega^2}{8\pi M} \left\{ p_\alpha p_\beta \int_0^1 dx \frac{x^2}{[p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} \int_0^1 dx [p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. - p_\alpha p_\beta \int_0^1 dx \frac{x^2}{(p^2 x^2 - p^2 x)^{\frac{1}{2}}} - \eta_{\alpha\beta} \int_0^1 dx (p^2 x^2 - p^2 x)^{\frac{1}{2}} \right\} . \quad (3.21.d)$$

Feitas as integrações paramétricas, $\int_0^1 dx$, obtém-se os resultados das integrais I_1 , I_2 , I_3 , e I_4 listados no Apêndice B para as regiões $p^2 > 0$ e $p^2 < 0$. Nota-se, nestes resultados, que as integrais I_1 e I_4 possuem para ambas as regiões, $p^2 > 0$ e $p^2 < 0$, um termo do tipo $i \frac{\omega^2}{32\pi} \eta_{\alpha\beta}$ que é simétrico nos índices livres, α e β , e independente do momentum p . Todos os termos restantes das integrais I_1 , I_2 , I_3 , e I_4 são dependentes do momentum p , portanto, não serão os responsáveis pela geração dinâmica de massa.

O diagrama completo de self-energy, a 1-loop, dos campos complexos de CSM, $\Omega^{(1)}$, é a soma dos diagramas (Fig.3.3) Σ , Λ , Ξ^R , Ξ^L , e Γ :

$$\Omega^{(1)} = \Sigma + \Lambda + \Xi^R + \Xi^L + \Gamma . \quad (3.22)$$

Como o interesse primário deste capítulo é o efeito da geração dinâmica de massa, considera-se, a partir de agora, apenas os termos $i \frac{\omega^2}{32\pi} \eta_{\alpha\beta}$ contidos nos resultados explícitos dos diagramas Σ , Λ , Ξ^R , Ξ^L , e Γ . Com o auxílio dos resultados apresentados nos Apêndices A e B, encontra-se para o termo de geração dinâmica de massa, $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$:

$$\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)\alpha\beta} = i \frac{\omega^2}{8\pi} \eta^{\alpha\beta} = i \hat{\mu} \eta^{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

onde

$$\hat{\mu} = \frac{\omega^2}{8\pi} > 0 . \quad (3.24)$$

É interessante, neste momento, o estudo dos efeitos do termo $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$ (3.23) para as correções quânticas de 1-loop ao propagador Δ (A.1), e que termo é gerado no Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} (2.10) a partir destas correções. Obtém-se o propagador corrigido quanticamente a

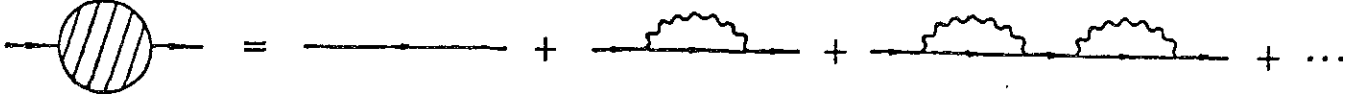


Figura 3.4: Correção de $\Omega_{\mu}^{(1)}$ ao propagador Δ .

1-loop, $\hat{\Delta}$, a partir da correção $\Omega_{\mu}^{(1)}$, como a seguir :

$$\hat{\Delta}^{\alpha\beta} = \Delta^{\alpha\beta} + \Delta^{\alpha\epsilon} \Omega_{\mu c\sigma}^{(1)} \Delta^{\sigma\beta} + \Delta^{\alpha\epsilon} \Omega_{\mu c\sigma}^{(1)} \Delta^{\sigma\rho} \Omega_{\mu\rho\gamma}^{(1)} \Delta^{\gamma\beta} + \dots \quad (3.25)$$

ou

$$\hat{\Delta} = \Delta + \Delta \Omega_{\mu}^{(1)} \Delta + \Delta \Omega_{\mu}^{(1)} \Delta \Omega_{\mu}^{(1)} \Delta + \dots, \quad (3.26)$$

representado em forma de diagramas na Fig.3.4.

Mostra-se, a partir de (3.26), que :

$$\hat{\Delta} = (\Delta^{-1} - \Omega_{\mu}^{(1)})^{-1}, \quad (3.27)$$

onde $\hat{\Delta}$, como já mencionado, é o propagador corrigido quanticamente pela contribuição de 1-loop, $\Omega_{\mu}^{(1)}$.

Verifica-se da relação (2.24.b) que :

$$\Delta^{-1} = i\tilde{\mathcal{O}}_0(k), \quad (3.28)$$

onde $\tilde{\mathcal{O}}_0(k)$ é o operador equação de movimento associado ao Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0$ (2.1) no

espaço dos momenta. De (3.27) e (3.28) chega-se a

$$\hat{\Delta} = [i\tilde{\mathcal{O}}_0(k) - \Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}]^{-1} . \quad (3.29)$$

Como dito anteriormente, a intenção até o momento é verificar que tipo de termo pode ser gerado no Lagrangeano de CSM* pela correção de 1-loop, $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$. Portanto, deve-se supor que ao propagador corrigido $\hat{\Delta}$ está associado um operador equação de movimento $\tilde{\mathcal{O}}(k)$, logo

$$\hat{\Delta}^{-1} = i\tilde{\mathcal{O}}(k) . \quad (3.30)$$

Concluindo-se, então, de (3.23), (3.29) e (3.30) que

$$\tilde{\mathcal{O}}^{\alpha\beta}(k) = \bar{\mathcal{O}}_0^{\alpha\beta}(k) - \hat{\mu}\eta^{\alpha\beta} . \quad (3.31)$$

Para que seja obtido o termo gerado ao Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0$ através de $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$, é necessário que se expresse (3.31) no espaço das coordenadas espaço-temporais. De acordo com as convenções aqui adotadas, tem-se que

$$\bar{\mathcal{O}}^{\alpha\beta} = \mathcal{O}_0^{\alpha\beta} - \hat{\mu}\eta^{\alpha\beta} , \quad (3.32)$$

onde

$$\mathcal{O}_0^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\kappa\beta}\partial_\kappa - \frac{\square}{M} \left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial^\alpha\partial^\beta}{\square} \right) \quad (3.33)$$

resultando em

$$\bar{\mathcal{O}}^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\kappa\beta}\partial_\kappa - \frac{\square}{M} \left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial^\alpha\partial^\beta}{\square} \right) - \hat{\mu}\eta^{\alpha\beta} . \quad (3.34)$$

Como este operador é o operador equação de movimento, $\bar{\mathcal{O}}$ (2.42), proveniente do Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSMP}}^0$ (2.37), conclui-se, então, que a correção de 1-loop, $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$, ao propagador de CSM*, Δ , contribui para a geração no Lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{CSM}}^0$ (2.1) de um termo do tipo Proca, $\hat{\mu}B_{\mu}^*B^{\mu}$.

Observa-se, finalmente, que as correções quânticas de self-energy a 1-loop para os campos complexos de CSM, $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$, geram dinamicamente um termo de Proca, $\hat{\mu}B_{\mu}^*B^{\mu}$, à teoria de CSM*. Fato este, que caracteriza o efeito da geração dinâmica de massa, pois, $\hat{\mu}$ é dependente apenas da constante de acoplamento ω ($\hat{\mu} = \frac{\omega^2}{8\pi}$) e não do parâmetro M .

É importante mencionar que a introdução do termo de Proca no Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} (2.10), via correção quântica $\Omega_{\hat{\mu}}^{(1)}$, não viola as condições obtidas, no Capítulo 2, sobre os parâmetros da teoria de CSMP* a respeito da inexistência de táquions e ghosts, $\hat{\mu}$ e $M > 0$. Daí, conclui-se que o termo de Proca gerado quanticamente não acarreta o surgimento de quanta não-físicos à teoria de CSM*, já que o parâmetro $\hat{\mu}$ gerado é

$$\hat{\mu} = \frac{\omega^2}{8\pi} > 0 . \quad (3.35)$$

3.3 Identidades de Ward

Como já mencionado na introdução deste capítulo, as identidades de Ward que serão aqui obtidas têm como objetivo comprovar que a simetria de gauge a tree-level é mantida a nível quântico pelas correções de loop, e também identificar algumas simetrias não-triviais da teoria de CSM*. Para tal, é necessário que seja indicado um método pelo qual se possam obter as identidades de Ward, que são relações entre diferentes funções de

Green 1PI da teoria. Faz-se necessário, então, a introdução da ação de CSM* com fontes externas J , j e j^* :

$$S[A, B, B^*; J, j, j^*] \equiv \int d^3x [\mathcal{L}_{\text{CSM}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + J^\mu A_\mu + j^\mu B_\mu + j^{*\mu} B_\mu^*] , \quad (3.36)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (3.37)$$

Considerando-se o funcional gerador das funções de Green, $W[J, j, j^*]$, definido por

$$W[J, j, j^*] \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}B^* e^{iS[A, B, B^*; J, j, j^*]} , \quad (3.38)$$

onde

$$W[J, j, j^*] = e^{iZ[J, j, j^*]} , \quad (3.39)$$

faz-se, então, a variação deste funcional, $\delta W[J, j, j^*]$, que resulta em

$$\delta W = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}B^* e^{iS} \delta S . \quad (3.40)$$

A partir da ação de CSM* com fontes externas (3.36) obtém-se que

$$\delta S = \int d^3x [\delta \mathcal{L}_{\text{GF}} + J^\mu \delta A_\mu + j^\mu \delta B_\mu + j^{*\mu} \delta B_\mu^*] , \quad (3.41)$$

pois $\delta \mathcal{L}_{\text{CSM}} = 0$ mediante as seguintes transformações infinitesimais sobre os campos A , B e B^* :

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{\omega} \partial_\mu \alpha(x) , \quad (3.42.a)$$

$$\delta B_\mu = i\alpha(x) B_\mu \quad (3.42.b)$$

e

$$\delta B_\mu^* = -i\alpha(x)B_\mu^* . \quad (3.42.c)$$

De posse destas transformações, pode-se mostrar que :

$$\delta S = \int d^3x \left[\frac{1}{\omega\xi} \square \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{\omega} \partial_\mu J^\mu + ij^\mu B_\mu - ij^{*\mu} B_\mu^* \right] \alpha(x) . \quad (3.43)$$

Considerando-se que $\delta W = 0$, obtém-se, a partir de (3.39), (3.40) e (3.43), a seguinte relação

$$-\frac{i}{\xi} \square \partial^\mu \frac{\delta Z}{\delta J^\mu} - i \partial^\mu J_\mu + \omega j^\mu \frac{\delta Z}{\delta j^\mu} - \omega j^{*\mu} \frac{\delta Z}{\delta j^{*\mu}} = 0 , \quad (3.44)$$

onde, de (3.10), tem-se ;

$$\frac{\delta Z}{\delta J^\mu(x)} = A_\mu(x) , \quad \frac{\delta Z}{\delta j^\mu(x)} = B_\mu(x) \text{ e } \frac{\delta Z}{\delta j^{*\mu}(x)} = B_\mu^*(x) ; \quad (3.45.a)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} = -J_\mu(x) , \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta B^\mu(x)} = -j_\mu(x) \text{ e } \frac{\delta \Gamma}{\delta B^{*\mu}(x)} = -j_\mu^*(x) . \quad (3.45.b)$$

Finalmente, obtém-se, através das relações (3.44), (3.45.a) e (3.45.b), para a ação efetiva a identidade de Ward é dada por

$$-\frac{i}{\xi} \square \partial^\mu A_\mu + i \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} - \omega B^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta B^\mu} + \omega B^{*\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta B^{*\mu}} = 0 . \quad (3.46)$$

Derivando-se a expressão (3.46) em relação a $A^\nu(y)$, e tomando-se $A = 0$ e $B = B^* = 0$, tem-se

$$\Gamma_{AA}^{(2)\mu\nu}(x,y)_L = \Gamma_{AA}^{(2)\mu\nu}(x,y)_L \Big|_{\substack{\text{tree} \\ \text{level}}} , \quad (3.47)$$

revelando-se, portanto, que as correções quânticas de loop não geram contribuições longitudinais para o Lagrangeano \mathcal{L}_{CSM} (2.10). Desta relação, pode-se concluir que o programa de renormalização da teoria não requer contra-termos para o termo de gauge-fixing, verificando-se também a invariância de gauge $(\delta A_\mu = -\frac{1}{\omega} \partial_\mu \alpha(x))$ a nível quântico.

Derivando-se, agora, a identidade (3.46) em relação a $B^\nu(y)$ e tomando-se $A = 0$ e $B = B^* = 0$ encontra-se

$$\partial_\mu^{(x)} \Gamma_{AB}^{(2)\mu\nu}(x, y)_L + \omega \delta^3(x - y) \Gamma_B^{(1)\nu}(x) = 0 \quad (3.48)$$

mas pela invariância segundo $U_\alpha(1)$, $\Gamma_B^{(1)\nu}(x) = 0$, então

$$\Gamma_{AB}^{(2)\mu\nu}(x, y)_L = 0 \quad (3.49)$$

Da identidade (3.47) encontra-se que

$$\Gamma_{AAA}^{(3)\mu\nu\rho}(x, y, z)_L = 0 \quad (3.50)$$

e de (3.48) que

$$\partial_\mu^{(x)} \Gamma_{B^*BA}^{(3)\mu\nu\rho}(x, y, z)_L + \omega \delta^3(x - y) \Gamma_{B^*B}^{(2)\nu\rho}(x, y) = 0 \quad (3.51)$$

A identidade (3.50) é uma confirmação da conclusão acerca da permanência da invariância de gauge, $\delta A_\mu = -\frac{1}{\omega} \partial_\mu \alpha(x)$, a nível quântico, enquanto que a identidade (3.51) relaciona a renormalização dos campos B e B^* com a renormalização do vértice B^*BA .

Capítulo 4

Conclusões Gerais e Perspectivas de Continuação

Neste Capítulo de conclusões da tese, tem-se por objetivo organizar brevemente os resultados apresentados, ressaltar as eventuais contribuições do trabalho e estabelecer alguns problemas que, por não terem sido concluídos até o presente momento, merecem ser analisados e discutidos posteriormente.

No Capítulo 1, nada de original foi apresentado, pois o propósito deste é a motivação para o estudo de teorias de gauge em 3 dimensões [29], como também expor algumas particularidades da Física em 3 dimensões espaço-temporais.

No Capítulo 2, teve-se como objetivo o estudo da consistência dos modelos de Chern-Simons-Maxwell (CSM*) e Chern-Simons-Maxwell-Proca (CSMP*) para campos vetoriais complexos. Foram, também, analisadas e discutidas as simetrias clássicas e determinados os critérios para que fossem garantidas a causalidade e a unitariedade, a tree-level, dos

respectivos modelos. Tal estudo trouxe resultados que, apesar de serem originais, ainda não são considerados conclusivos.

Finalmente, no Capítulo 3, foram discutidos em detalhe alguns aspectos essenciais da quantização via integral de caminho. Analisou-se a questão do power-counting para os modelos de CSM* e CSMP* acoplados minimamente ao campo de Maxwell, e também foram derivadas as regras de Feynman para os cálculos radiativos; cálculos estes, feitos a 1-loop para a self-energy do campo de CSM*. Algumas integrais de loop foram calculadas explicitamente (resultados contidos nos Apêndices A e B), e verificou-se, a partir destes resultados, o fenômeno de geração dinâmica de massa através da indução de um termo do tipo Proca, $\hat{\mu} B_\mu^* B^\mu$. Este é um resultado também original [30].

Seria interessante mencionar, como finalização, alguns tópicos não considerados nesta tese, mas que fazem parte de uma investigação a ser feita posteriormente. O primeiro, trata da questão dos processos de regularização de integrais de loop divergentes em 3 dimensões. Vários esquemas de regularização podem ser usados: Pauli-Villars [31], regularização analítica [32], regularização dimensional [33] e regularização por redução dimensional [34]. Este último esquema se aplica perfeitamente para o cálculo de partes divergentes até 3-loops e foi o esquema adotado para o cálculo das integrais de loop que surgiram ao longo desta tese. Seria, contudo, instrutivo proceder-se a uma comparação dos diferentes esquemas no cálculo de grandezas divergentes a partir de 2-loops.

Um outro ponto a ser abordado em um trabalho futuro, e que é fundamental para a consistência quântica do modelo de CSM* apresentado nesta tese, diz respeito à análise de contribuições quânticas à ordem de 2-loops. A consistência quântica do modelo de

CSM* pode vir a ser ameaçada, na aproximação de 2-loops, pela contribuição à ação efetiva de um termo divergente da forma $|(\partial_\mu B^\mu)|^2$. Através das análises realizadas no Capítulo 3, pode-se verificar que, a 1-loop, tal contribuição divergente não aparece, pois a esta ordem perturbativa as contribuições são finitas. No caso de 3-loops, pela análise do power-counting obtido no Capítulo 3, verifica-se a não geração deste termo divergente, pois a teoria é super-renormalizável e as únicas divergências são geradas à ordem de 2-loops. Portanto, a situação crítica acerca da consistência do modelo de CSM* reside a 2-loops.

Esta tese tem como prosseguimento o cálculo e análise dos diagramas de 2-loops esboçados na Fig.4.1, com o objetivo de se verificar se as contribuições destes gráficos geram, ou não, um termo divergente do tipo $|(\partial_\mu B^\mu)|^2$: a não geração deste termo asseguraria a consistência do modelo [35]. Deve-se ressaltar, no entanto, que o modelo de CSM* é comprovadamente consistente a nível quântico, até o presente momento, apenas por correções da ordem de 1-loop.

É de muita importância para a consistência de teorias quânticas, que estas apresentem um comportamento satisfatório no limite de altas energias. Deve-se, portanto, verificar que todas as amplitudes de espalhamento a tree-level satisfaçam à unitariedade para energias no centro de massa, E_{CM} , muito maiores que as massas de todas as partículas envolvidas no processo de espalhamento. Para o caso de partículas (em $D = 4$) com spins 0, $\frac{1}{2}$ e 1, mostra-se que a imposição de comportamento a altas energias consistente com a unitariedade fornece como teoria mais geral uma teoria de gauge espontaneamente quebrada com um eventual campo Abelian massivo [36].

No caso de campos vetoriais massivos e carregados, W_μ^+ e W_μ^- , acoplados a um campo de gauge Abelian, A_μ , é necessário acrescentar, além dos termos de acoplamento mínimo, um acoplamento não-mínimo da forma $F_{\mu\nu}W^{+\mu}W^{-\nu}$, para que o limite de unitariedade seja satisfeito e a teoria seja quanticamente consistente. Deixa-se, portanto, em aberto a verificação de ser necessário, ou não, acrescentar acoplamentos não-mínimos ao modelo estudado no Capítulo 3, a fim de que os limites de unitariedade em $D = 1 + 2$ venham a ser respeitados.

Para finalizar, uma outra proposta que pode seguir ao estudo já realizado nesta tese, é o cálculo de contribuições de temperatura finita à self-energy do campo de CSM*. Seria interessante, para o estudo de transições de fase, derivar a massa gerada dinamicamente como função da temperatura. Esta investigação seria cabível no âmbito dos modelos de gauge supercondutores propostos nas referências [16, 19, 20].

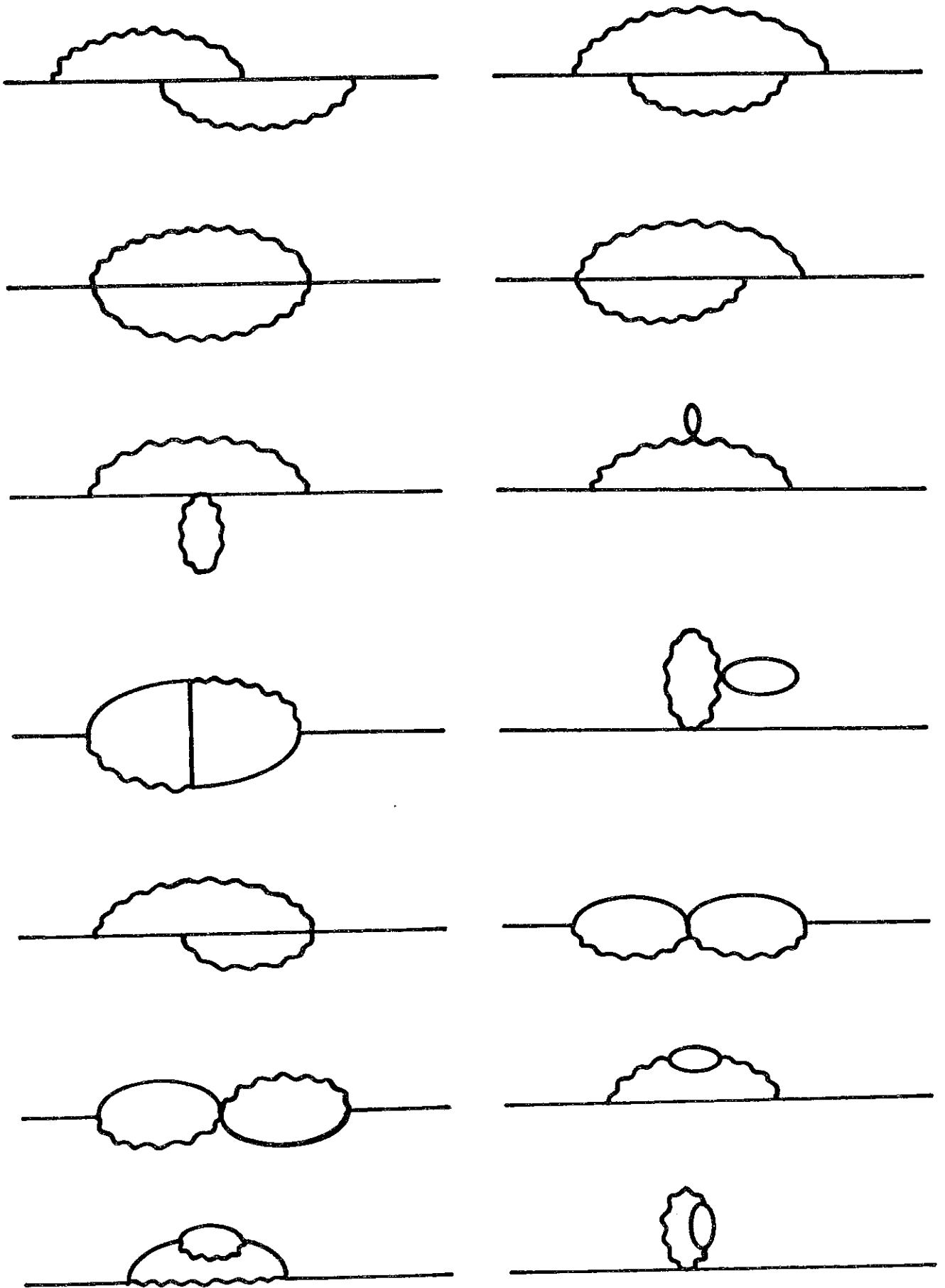


Figura 4.1: Diagramas de self-energy à ordem de 2-loops.

Apêndice A

Resultados Explícitos dos Gráficos Calculados à Ordem de 1-loop

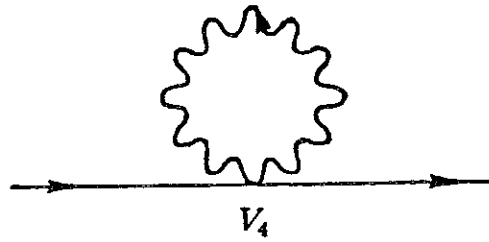
Para os cálculos dos diagramas de self-energy indicados na Fig.3.3, utiliza-se, para simplificação dos mesmos o gauge de Landau, $\alpha = 0$, no propagador de CSM*, Δ ; quanto ao propagador do campo de Maxwell, D , resulta mais conveniente o gauge de Feynman, $\xi = 1$.

$$\Delta^{\alpha\beta}(k) = -i \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} \left[i \epsilon^{\alpha\kappa\beta} k_\kappa + \frac{k^2}{M} \left(\eta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

$$D^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{k^2} \eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

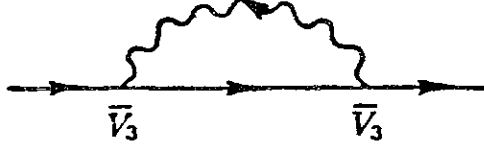
São fornecidas, a seguir, as respostas encontradas para os gráficos esboçados na Fig.3.3.

A.1 $\Sigma_{\alpha\beta}$



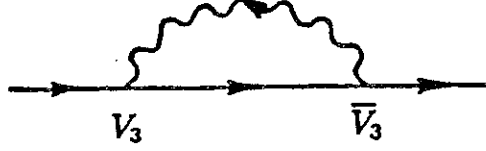
$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (V_4)_{\alpha\beta\mu\nu} D^{\nu\mu}(k) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{4\omega^2}{M} \frac{1}{k^2} [\eta_{\alpha\beta}] \right\} = 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2 $\Lambda_{\alpha\beta}$



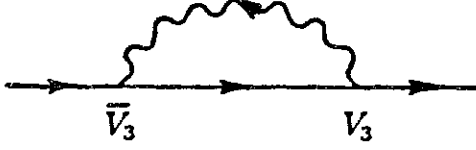
$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\bar{V}_3)_{\alpha\mu\nu} D^{\mu\sigma}(k-p) \Delta^{\rho\nu}(k) (\bar{V}_3)_{\rho\sigma\beta} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ i\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[3\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\mu p^\nu k_\beta - 3\epsilon_{\mu\nu\beta} k^\mu p^\nu k_\alpha + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\mu p^\nu p_\beta - \epsilon_{\mu\nu\beta} k^\mu p^\nu p_\alpha + \epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu k^2 + 2\epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu(k.p) + \epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu p^2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega^2}{M} \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[-k_\alpha k_\beta p^2 + k_\alpha p_\beta(k.p) + k_\beta p_\alpha(k.p) - \eta_{\alpha\beta}(k.p)^2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega^2}{M} \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)} \left[k_\alpha k_\beta - k_\alpha p_\beta - k_\beta p_\alpha - 2p_\alpha p_\beta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \eta_{\alpha\beta} k^2 + 2\eta_{\alpha\beta}(k.p) + 2\eta_{\alpha\beta} p^2 \right] \right\} \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

A.3 $\Xi_{\alpha\beta}^R$



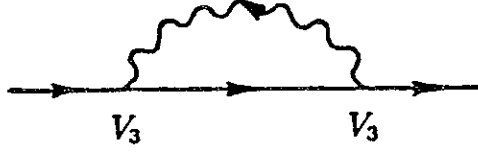
$$\begin{aligned}
 \Xi_{\alpha\beta}^R &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (V_3)_{\alpha\mu\nu} D^{\mu\sigma}(k-p) \Delta^{\rho\nu}(k) (\bar{V}_3)_{\rho\sigma\beta} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ -i\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\mu p^\nu k_\beta + \epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu (k \cdot p) \right] + \right. \\
 &\quad + i\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[\epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu k^2 + 2\epsilon_{\mu\alpha\beta} p^\mu k^2 \right] + \\
 &\quad \left. + M\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[k_\alpha k_\beta - k_\beta p_\alpha + \eta_{\alpha\beta} k^2 + \eta_{\alpha\beta} (k \cdot p) \right] \right\} \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

A.4 $\Xi_{\alpha\beta}^L$



$$\begin{aligned}
 \Xi_{\alpha\beta}^L &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\bar{V}_3)_{\alpha\mu\nu} D^{\mu\sigma}(k-p) \Delta^{\rho\nu}(k) (V_3)_{\rho\sigma\beta} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ i\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[\epsilon_{\mu\nu\beta} k^\mu p^\nu k_\alpha - \epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu (k \cdot p) \right] + \right. \\
 &\quad + i\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[\epsilon_{\mu\alpha\beta} k^\mu k^2 + 2\epsilon_{\mu\alpha\beta} p^\mu k^2 \right] + \\
 &\quad \left. + M\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[k_\alpha k_\beta - k_\alpha p_\beta + \eta_{\alpha\beta} k^2 + \eta_{\alpha\beta} (k \cdot p) \right] \right\} \quad (\text{A.6})
 \end{aligned}$$

A.5 $\Gamma_{\alpha\beta}$



$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (V_3)_{\alpha\mu\nu} D^{\mu\sigma}(k-p) \Delta^{\rho\nu}(k) (V_3)_{\rho\sigma\beta} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ -iM^2\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[\epsilon_{\alpha\lambda\beta} k^\lambda \right] + \right. \\
 &\quad + M\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)} \left[\eta_{\alpha\beta} \right] + \\
 &\quad \left. + M\omega^2 \frac{1}{(k-p)^2(k^2-M^2)k^2} \left[k_\alpha k_\beta \right] \right\} \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

Apêndice B

Resultados Explícitos para as Integrais de 1-loop em $D = 3$

Para a resolução das integrais I_1, I_2, I_3 e I_4 , mencionadas no Capítulo 3, foram utilizados os seguintes resultados conhecidos do método de regularização dimensional [28]:

$$J_0 = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + 2p \cdot k - c)^\alpha} = i(-1)^\alpha \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (c + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\text{B.1})$$

$$J_1^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 + 2p \cdot k - c)^\alpha} = i(-1)^{\alpha+1} \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (c + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} p^\mu \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{B.2})$$

e

$$J_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + 2p \cdot k - c)^\alpha} = i(-1)^\alpha \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (c + p^2)^{\frac{D}{2} - \alpha} \times \left[\frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) p^\mu p^\nu - \frac{1}{2} \Gamma(\alpha - 1 - \frac{D}{2}) \eta^{\mu\nu} (c + p^2)}{\Gamma(\alpha)} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Serão fornecidos a seguir resultados das integrais paramétricas, a serem efetuadas posteriormente às integrais sobre os momenta das linhas internas que formam os loops.

Define-se :

$$W \equiv \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left[\ln(|p^2 - M^2|) - 2\ln(|\sqrt{p^2} - M|) - i\pi\theta(p^2 - M^2) \right] \text{ se } p^2 > 0 \quad (\text{B.4})$$

e

$$V \equiv \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{p^2 + M^2}{2M\sqrt{-p^2}} \right) \right] \text{ se } p^2 < 0 . \quad (\text{B.5})$$

Com isto, chega-se a :

$$\int_0^1 dx [p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{(p^2+M^2)}{4p^2} M - \frac{(p^2-M^2)^2}{8p^2} W , & p^2 > 0 \\ \frac{(p^2+M^2)}{4p^2} M + \frac{(p^2-M^2)^2}{8p^2} V , & p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{[p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} -\frac{3(p^2+M^2)}{4(p^2)^2} M + \frac{3(p^2)^2 + 2M^2 p^2 + 3M^4}{8(p^2)^2} W , & p^2 > 0 \\ -\frac{3(p^2+M^2)}{4(p^2)^2} M + \frac{3(p^2)^2 + 2M^2 p^2 + 3M^4}{8(p^2)^2} V , & p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$\int_0^1 dx \frac{1}{[p^2 x^2 - (p^2 + M^2)x + M^2]^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} W , & p^2 > 0 \\ V , & p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\int_0^1 dx (p^2 x^2 - p^2 x)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} i\frac{\pi}{8}\sqrt{p^2} , & p^2 > 0 \\ \frac{\pi}{8}\sqrt{-p^2} , & p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{(p^2 x^2 - p^2 x)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} -i\frac{3\pi}{8}\frac{1}{\sqrt{p^2}} , & p^2 > 0 \\ \frac{3\pi}{8}\frac{1}{\sqrt{-p^2}} , & p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

A partir dos resultados acima obtidos, passa-se, então, ao cálculo explícito das integrais

$(I_1)_{\alpha\beta}$ (3.21.a), $(I_2)_{\alpha\beta}$ (3.21.b), $(I_3)_{\alpha\beta}$ (3.21.c) e $(I_4)_{\alpha\beta}$ (3.21.d) :

$$(I_1)_{\alpha\beta} = \begin{cases} i \frac{\omega^2}{8\pi M} \left\{ p_\alpha p_\beta \left[-\frac{3(p^2+M^2)}{4(p^2)^2} M + \frac{3(p^2)^2+2M^2p^2+3M^4}{8(p^2)^2} W \right] + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{M^3}{4p^2} - \frac{(p^2-M^2)^2}{8p^2} W \right] \right\} + i \frac{\omega^2}{32\pi} \eta_{\alpha\beta} , \quad p^2 > 0 \\ \\ i \frac{\omega^2}{8\pi M} \left\{ p_\alpha p_\beta \left[-\frac{3(p^2+M^2)}{4(p^2)^2} M + \frac{3(p^2)^2+2M^2p^2+3M^4}{8(p^2)^2} V \right] + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{M^3}{4p^2} + \frac{(p^2-M^2)^2}{8p^2} V \right] \right\} + i \frac{\omega^2}{32\pi} \eta_{\alpha\beta} , \quad p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$(I_2)_{\alpha\beta} = \begin{cases} i \frac{\omega^2 M}{8\pi} \eta_{\alpha\beta} W , \quad p^2 > 0 \\ \\ i \frac{\omega^2}{8\pi M} \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{3(p^2)^2-2M^2p^2+3M^4}{4p^2} V \right] , \quad p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$$(I_3)_{\alpha\beta} = \begin{cases} i \frac{\omega^2 M}{8\pi} \eta_{\alpha\beta} W , \quad p^2 > 0 \\ \\ i \frac{\omega^2 M}{8\pi} \eta_{\alpha\beta} V , \quad p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$$(I_4)_{\alpha\beta} = \begin{cases} i \frac{\omega^2}{8\pi M} \left\{ p_\alpha p_\beta \left[-\frac{3(p^2+M^2)}{4(p^2)^2} M + i \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{p^2}} + \frac{3(p^2)^2+2M^2p^2+3M^4}{8(p^2)^2} W \right] + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{M^3}{4p^2} - i \frac{\pi}{8} \sqrt{p^2} - \frac{(p^2-M^2)^2}{8p^2} W \right] \right\} + i \frac{\omega^2}{32\pi} \eta_{\alpha\beta} , \quad p^2 > 0 \\ \\ i \frac{\omega^2}{8\pi M} \left\{ p_\alpha p_\beta \left[-\frac{3(p^2+M^2)}{4(p^2)^2} M - \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{-p^2}} + \frac{3(p^2)^2+2M^2p^2+3M^4}{8(p^2)^2} V \right] + \right. \\ \left. + \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{M^3}{4p^2} - \frac{\pi}{8} \sqrt{-p^2} + \frac{(p^2-M^2)^2}{8p^2} V \right] \right\} + i \frac{\omega^2}{32\pi} \eta_{\alpha\beta} , \quad p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Referências

- [1] A. Linde, *Rep. Progr. Phys.* **42** (1979) 389.
- [2] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975 ;
S. Deser, *Three Topics in Three Dimensions*, in the proceedings of the Trieste Conference on Supermembranes and Physics in 2+1 Dimensions, eds. M.J. Duff *et al.*, World Scientific (Singapore, July 1989).
- [3] J. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157.
- [4] E. P. Wigner, *Unitary Representations of Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections*, in Istanbul Summer School of Theoretical Physics, eds. F. Gürsey *et al.* (New York, 1964).
- [5] D. Finkelstein and J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1762.
- [6] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37B** (1977) 1.
- [7] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1144.
- [8] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957.

- [9] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1395.
- [10] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2677.
- [11] A. L. Fetter, C. B. Hanna and R. B. Laughlin, *Phys. Rev.* **B39** (1989) 9679.
- [12] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B3** (1989) 1001.
- [13] R. Iengo and K. Lechner, *Phys. Reports* **213C** (1992) 179.
- [14] K.-H. Cho and C. Rim, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 381.
- [15] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** (1982) 372.
- [16] N. Dorey and N. E. Mavromatos, *Phys. Lett.* **B226** (1991) 163.
- [17] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
- [18] S. Coleman, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 259.
- [19] N. Dorey and N. E. Mavromatos, *QED₃ and Two-Dimensional Superconductivity without Parity Violation*, CERN and Los Alamos Lab. preprint, CERN-TH.6278/91; LANL 91-3181 (1991).
- [20] N. E. Mavromatos, *Superconducting Gauge Theories in (2+1)-Dimensions*, CERN preprint, CERN-TH.6331/91 (1991).
- [21] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **118** (1960) 838.
- [22] M. Froissart, *Phys. Rev.* **123** (1961) 1053.

- [23] J. C. Polkinghorne, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 503.
- [24] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (Princeton, 1983).
- [25] K. Hepp, *LSZ Quantum Field Theory in Axiomatic Field Theory*, eds. Chrétien *et al.*, Brandeis University (1965).
- [26] D. G. Boulware and L. S. Brown, *Phys. Rev.* **172** (1968) 1628.
- [27] D. G. Boulware, *Ann. Phys. (N.Y.)* **56** (1970) 140.
- [28] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge Univ. Press (Cambridge, 1984).
- [29] F. Delduc, F. Gieres and S.P. Sorella, *Phys. Lett.* **B225** (1989) 367 ;
F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 313.
- [30] O.M. Del Cima, J.A. Helayël-Neto and F.A.B. Rabelo de Carvalho, submitted for publication.
- [31] W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434.
- [32] B.M. Pimentel, A.T. Suzuki and J.L. Tomazelli, *Vacuum polarisation tensor in three dimensional quantum electrodynamics*, IFT preprint, IFT-028/91 (1991).
- [33] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* **B40** (1972) 566 ;
G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189 ;
R. Delbourgo and A.B. Waites, *Phys. Lett.* **B300** (1993) 241.

[34] W. Siegel, *Phys. Lett.* **B84** (1979) 197.

[35] M.F.L. Carvalho, O.M. Del Cima and F.A.B. Rabelo de Carvalho, work in progress.

[36] J.M. Cornwall, D.N. Levin and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1145.

"ASPECTOS DA DINÂMICA DE CAMPOS VETORIAIS
COMPLEXOS EM TRÊS DIMENSÕES"

OSWALDO MONTEIRO DEL CIMA

Tese de Mestrado apresentada no Cen
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvi-
mento Científico e Tecnológico, fa-
zendo parte da banca examinadora os
seguintes professores:

J. A. Helayél - Neto .
José Abdalla Helayél-Neto - Presidente

Helio Freitas de Carvalho
Helio Freitas de Carvalho

Francisco Caruso Neto
Francisco Caruso Neto

Luis Alberto Willis Toro
Luis Alberto Willis Toro - Suplente

Rio de Janeiro, 02 de julho de 1993