

**TEXTURAS GLOBAIS
E A EXTENSÃO DO TEOREMA NO-HAIR
PARA COSMOLOGIAS FECHADAS**

L. C. Q. Vilar

Tese de Mestrado

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro
Junho 1992**

530.44
1/30

Agradecimentos

Ao amigo Rubem Mondaini, pela orientação no desenvolvimento deste trabalho, e aos demais integrantes do Grupo de Astrofísica Relativística do IPRJ, Fernando Matias e Flávio Montenegro.

Aos centros de pesquisa CBPF e IPRJ, pela oportunidade de convívio nos seus ambientes científicos.

RESUMO

Neste trabalho abordamos os problemas das cosmologias fechadas, particularmente o problema de uma formulação eficiente do teorema “no-hair” cosmológico.

No primeiro capítulo fazemos uma revisão dos resultados conhecidos na literatura acerca deste teorema, e também propomos o estudo de campos escalares com simetria interna como fonte de gravitação após a apresentação do problema de recolapso prematuro para as cosmologias FLRW fechadas em $D + 1$ dimensões espaço-temporais através de uma análise de energia.

No capítulo 2, apresentamos a ação que adotaremos para o campo escalar multipletto, e o tensor energia-momentum dela obtido. A seguir mostramos que as condições de energia para esse tensor são sempre satisfeitas, independente das dimensões do espaço interno do campo escalar (N) e do espaço externo (D). E através de um ansatz de métrica adequado para incluir os universos homogêneos FLRW e Kantowski-Sachs fechados, desenvolvemos as equações do campo escalar e de conservação do tensor energia-momentum que fornecem restrições que a geometria do espaço interno impõe no espaço externo.

Na primeira parte do capítulo 3, resolvemos as equações de Einstein em $D + 1$ dimensões para o caso isotrópico, obtendo uma solução de expansão contínua que representa um exemplo de violação à conjectura de recolapso. São mostrados também os estados de matéria limite na evolução segundo a analogia de fluido perfeito com uma equação de estado tipo lei-gama. Na segunda parte, resolvemos as equações de Einstein para o caso anisotrópico, onde uma solução não recolapsante é novamente encontrada. Agora a analogia de fluido leva à conclusão que a termodinâmica de fluidos de Eckart

não é adequada pelo fato de obtermos um “shear” nulo enquanto a pressão anisotrópica não o é. A termodinâmica de Israel é então aplicada, e obtemos uma solução para o coeficiente de relaxamento desta teoria, relacionando-o à idade do universo.

No capítulo 4, mostramos como a idéia de um mapeamento entre os espaços interno e externo foi introduzida na física, apresentando como exemplo a solução de monopolo. O teorema de Derrick é abordado a seguir, e argumentamos contra a sua utilização para espaços curvos, mostrando uma solução de textura que o viola.

No capítulo 5, propomos uma modificação da gravitação de Einstein incluindo na dinâmica uma contribuição advinda da estrutura interna. Mostramos como a identidade de Bianchi pode ser satisfeita nessa teoria modificada e como o termo cinético se conforma, então, com as propostas encontradas recentemente na literatura. A seguir, desenvolvemos as equações que determinam a compatibilidade entre as geometrias interna e das seções espaciais D -dimensionais, mostrando como a eliminação da curvatura espacial da dinâmica de Einstein pode ser realizada naturalmente. Finalizando o capítulo, aplicamos esses resultados aos modelos homogêneos Bianchi-IX e Kantowski-Sachs.

No último capítulo, apresentamos uma solução de textura com o termo cinético modificado, e concluímos que essa estrutura é de fato a responsável pelo corte da curvatura no contexto da teoria modificada. Como encerramento, formulamos uma nova versão do teorema “no-hair”, eficiente no sentido de não excluir os modelos cosmológicos fechados.

SUMÁRIO

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Lista de Figuras	vii
1 - Introdução	1
2 - O Campo Escalar Multipleteo $SO(N+1)$ em $D+1$ Dimensões Espaço Temporais	23
2.1 - Uma Proposta de Ação	23
2.2 - O Tensor Momento-Energia	25
2.3 - Condições de Energia	28
2.4 - A Equação do Campo Escalar	32
2.5 - Conservação do $T_{\mu\nu}$	39
3 - O Campo Escalar Multipleteo como Fonte na Dinâmica de Einstein $(D+1)$ - Dimensional	44
3.1 - $N \geq D$ - Estrutura FLRW	44
3.2 - $N < D$ - Estrutura Anisotrópica	49
4 - Soluções de Sólitons com um Campo Escalar Multipleteo	63
4.1 - O Monopolo	63
4.2 - O Teorema de Derrick	71
4.3 - A Textura Global	72

5 - Uma Modificação Mínima da Gravitação de Einstein	76
5.1 - A Gravitação de Einstein Modificada	76
5.2 - Identidade de Bianchi	77
5.3 - O Termo Cinético	81
5.4 - A Equação de Compatibilidade	84
5.5. - O Corte da Curvatura Espacial	85
5.6 - Aplicação aos Universos de Kantowski-Sachs e Bianchi - IX	88
6 - Texturas, Gravitação Modificada e o Teorema “No-Hair” Cosmológico	93
6.1 - Soluções de Energia Finita para Campos Escalares em D Dimensões	93
6.2 - A Gravitação de Einstein Modificada e o Teorema “No-Hair” para Cosmologias Fechadas	96
6.3 - A Formulação do Teorema “No-Hair” para Cosmologias Fechadas	98
Referências	99

Lista de Figuras

Figura 1.1	19
Figura 1.2	19
Figura 1.3	20
Figura 1.4	20
Figura 1.5	20

Lista de Tabelas

Tabela 1.1	14
------------------	----

1 - Introdução

Os modelos cosmológicos fechados sempre chamaram um maior interesse para sua análise. O fato de problemas associados à quantização serem mais facilmente tratáveis no contexto de universos fechados “tem levado teóricos desde Einstein (1) até Wheeler (2) a considerarem tais modelos como mais fisicamente razoáveis que os abertos” (3).

Apesar disso, as cosmologias fechadas em geral apresentam dificuldades para explicar o estágio atual do universo, e por um motivo simples: elas tendem a recolapsar.

Por exemplo, os modelos FLRW, sendo homogêneos e isotrópicos desde a origem, satisfazem o requisito de descrição dessas características observadas no universo presente, desde que, obviamente, o modelo FLRW fechado não recolapse muito cedo. Esse é o chamado “problema do recolapso prematuro” como foi denominado por Barrow (4).

Isso nos traz a um segundo problema: quais as condições iniciais que um modelo deve possuir para que possa evoluir para um estágio atualmente homogêneo e isotrópico?

A imposição dessas características desde o momento inicial, como é feito nos FLRW, é extremamente restritiva. Seria de se esperar que existisse um conjunto amplo de cosmologias inicialmente inhomogêneas que se isotropizassem com o passar do tempo. A confirmação disto tornaria a existência de nosso universo pelo menos “mais provável” dentro do quadro atual da cosmologia.

O primeiro a enunciar essa idéia como um possível teorema foi Hawking (5, 6), afirmando que, na presença de uma constante cosmológica positiva (repulsiva), o universo se aproximaria assintoticamente de um universo localmente de Sitter, o que garantiria a sua isotropização. Isso foi denominado a conjectura “no-hair” cosmológica, em analogia ao teorema “no-hair” para buracos negros. Gibbons e Hawking (5) mostraram

a extensão dessa analogia e como as conclusões da termodinâmica de buracos negros poderiam ser transcritas para caracterizar uma "termodinâmica cosmológica".

A primeira tentativa de demonstração dessa conjectura foi feita por Wald (7). Ele se limitou à análise de modelos homogêneos (Bianchi) mas não necessariamente isotrópicos. Também as restantes cosmologias homogêneas, os Kantowski-Sachs, foram analisadas quanto a possíveis estágios assintóticos de Sitter (8 - 12); Weber, por um desenvolvimento independente daquele realizado por Wald, mostrou que esses modelos, na presença de uma constante cosmológica positiva e de um fluido perfeito, em geral tendiam assintoticamente à isotropização (8, 9). E finalmente a sequência de trabalhos com universos inicialmente inhomogêneos (13 - 16) culminou com a extensão do resultado de Wald para essas cosmologias (17), o que será mostrado a seguir.

É admitida a validade das equações de Einstein com uma constante cosmológica positiva. A assinatura utilizada será a $(-, +, +, +)$ e as equações de Einstein serão escritas na forma

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Também serão necessárias as condições de energia (18):

. condição fraca,

$$T_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq 0, \quad (1.2)$$

que estabelece que a densidade de energia medida por qualquer observador é não-negativa;

. condição dominante, que além da expressão para a condição fraca, inclui

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\alpha} W^\alpha T_{\nu\beta} W^\beta \leq 0, \quad (1.3)$$

que estabelece que o vetor fluxo de energia local é não -“spacelike”;

. condição forte,

$$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-1} g_{\mu\nu} T) W^\mu W^\nu \geq 0, \quad (1.4)$$

que indica o caráter atrativo da gravidade. Em todas as expressões, W^μ é qualquer vetor não -“spacelike”, i.e. , $W_\mu W^\mu \leq 0$. Apesar da aplicação a ser feita no teorema “no-hair” ser específica para três dimensões espaciais, as condições de energia foram escritas para o caso geral de D dimensões, prevendo seu uso futuro. E como se observa, apenas na condição forte, eq.(1.4), a dimensionalidade do espaço interfere explicitamente.

Adotaremos um referencial síncrono, com

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ab} dx^a dx^b \quad , \quad 1 \leq a, b \leq 3, \quad (1.5)$$

onde h_{ab} é o tensor métrico espacial, de determinante h .

A eq.(1.1) abre então em (19):

$$R_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial(\chi_a^a)}{\partial t} + \frac{1}{4} \chi_a^b \chi_b^a = k \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) + \lambda, \quad (1.6)$$

$$R_a^0 = -\frac{1}{2} (\chi_{a||b}^b - \chi_{b||a}^b) = k T_a^0, \quad (1.7)$$

$$R_a^b = {}^{(3)}R_a^b + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{h} \chi_a^b) = k \left(T_a^b - \frac{1}{2} \delta_a^b T \right) + \delta_a^b \lambda, \quad (1.8)$$

onde $\chi_{ab} = \frac{\partial h_{ab}}{\partial t} = \dot{h}_{ab}$ e ${}^{(3)}R_{ab}$ é o tensor de Ricci tridimensional das hipersuperfícies espaciais.

A curvatura extrínseca dessas hipersuperfícies é dada por (20)

$$K_{ab} = \frac{\chi_{ab}}{2} = \frac{\dot{h}_{ab}}{2}, \quad (1.9)$$

seu traço por

$$K = K_{ab} h^{ab} = \frac{\dot{h}_{ab} h^{ab}}{2},$$

e como

$$\dot{h} = h h^{ab} \dot{h}_{ab},$$

chegamos a

$$K = \frac{\dot{h}}{2h} \quad (1.10)$$

que é a denominada expansão volumétrica.

Podemos separar agora a curvatura extrínseca em duas partes,

$$K_{ab} = \frac{K}{3} h_{ab} + \sigma_{ab}, \quad (1.11)$$

onde σ_{ab} é a taxa de “shear” da congruência geodésica ortogonal às hipersuperfícies, observando que, pela separação acima,

$$h^{ab} \sigma_{ab} = 0. \quad (1.12)$$

Substituindo as eqs.(1.9) e (1.11) na eq.(1.6), obtemos

$$\dot{K} = -\frac{K^2}{3} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + k\left(T_0^0 - \frac{T}{2}\right) + \lambda, \quad (1.13)$$

e também na eq.(1.8), usando ainda a eq.(1.10),

$${}^{(3)}R_a^b + K\left(\frac{K}{3}\delta_a^b + \sigma_a^b\right) + \frac{\dot{K}}{3}\delta_a^b + \dot{\sigma}_a^b = k\left(T_a^b - \frac{1}{2}\delta_a^b T\right) + \delta_a^b \lambda.$$

Contraíndo os índices livres na última equação, obtemos que

$$K^2 + \dot{K} = -k\left(T_0^0 + \frac{T}{2}\right) - {}^{(3)}R + 3\lambda, \quad (1.14)$$

onde ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura das hipersuperfícies espaciais: ${}^{(3)}R = {}^{(3)}R_{ab}h^{ab}$.

Subtraindo a eq.(1.13) da eq.(1.14), escrevemos que

$$\frac{K^2}{3} - \lambda = \frac{\sigma_{ab}\sigma^{ab}}{2} - kT_0^0 - \frac{{}^{(3)}R}{2}. \quad (1.15)$$

Como σ_{ab} está ligado às hipersuperfícies de métrica definida positiva,

$$\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0; \quad (1.16)$$

pelas condições de energia fraca, eq.(1.2), e forte, eq.(1.4), temos que

$$T_0^0 \leq 0, \quad (1.17)$$

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T \leq 0; \quad (1.18)$$

e neste momento faz-se necessário restringirmo-nos a espaços abertos, i.e.,

$${}^{(3)}R \leq 0. \quad (1.19)$$

Estas quatro últimas inequações, quando aplicadas às equações (1.13) e (1.15), fornecem respectivamente

$$\dot{K} \leq \lambda - \frac{K^2}{3}, \quad (1.20)$$

$$\frac{K^2}{3} - \lambda \geq 0 \quad \rightarrow \quad K \geq \sqrt{3\lambda}. \quad (1.21)$$

A integração da eq.(1.20) indica que

$$K \leq \sqrt{3\lambda} \coth \left[\left(\frac{\lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \right], \quad (1.22)$$

para um universo que inicialmente está se expandindo.

Unindo as inequações (1.21) e (1.22):

$$\sqrt{3\lambda} \leq K \leq \sqrt{3\lambda} \coth \left[\left(\frac{\lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \right]. \quad (1.23)$$

Assim, no limite assintótico em que $t \rightarrow \infty$, vemos que o terceiro membro na inequação (1.23) tende a $\sqrt{3\lambda}$, e, então, $K \rightarrow \sqrt{3\lambda}$, o valor para um universo de Sitter.

A equação (1.15), junto com as inequações (1.17), (1.19) e (1.22), implica que

$$\sigma_{ab}\sigma^{ab} \leq \frac{2K^2}{3} - 2\lambda \leq 2\lambda \operatorname{csch}^2 \left[\left(\frac{\lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \right], \quad (1.24)$$

o que indica que no limite assintótico temos $\sigma_{ab} \rightarrow 0$, i.e., as hipersuperfícies tornam-se “shear-free”. Seguindo o mesmo raciocínio, e através das mesmas equações, conclui-se facilmente que T_0^0 e ${}^{(3)}R$ também se anulam assintoticamente. Ainda, pela condição dominante, eq.(1.3), observamos que

$$-(T_{0\alpha}W^\alpha)^2 + h^{ab}T_{a\alpha}T_{b\beta}W^\alpha W^\beta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (T_{00})^2 \geq h^{ab}T_{a0}T_{b0}. \quad (1.25)$$

Agora, pela eq.(1.11), no limite em que $\sigma_{ab} \rightarrow 0$ e $K \rightarrow \sqrt{3\lambda}$, e usando a eq.(1.9):

$$\dot{h}_{ab} - 2\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}} h_{ab} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad h_{ab} \rightarrow \exp\left[\left(\frac{4\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(t - t_0)\right] f(x_a) \quad (1.26)$$

onde $f(x_a)$ é uma função qualquer das coordenadas espaciais. Pelas eqs. (1.15) e (1.22),

e tomando o mesmo limite de $t \rightarrow \infty$, vemos que

$$(T_{00})^2 \leq \lambda^2 \operatorname{csch}^4\left[\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(t - t_0)\right] \rightarrow \lambda^2 \exp\left[-\left(\frac{16\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(t - t_0)\right] \quad (1.27)$$

Podemos observar então, a partir das duas últimas equações, que $(T_{00})^2$ decai assintoticamente mais rapidamente que h^{ab} , e com isso a inequação (1.25) implica que T_{a0} se anula nesse limite. E, esses resultados, quando substituídos na primeira expressão da eq.(1.25), mostram que as demais componentes T_{ab} do tensor energia-momentum também se anulam assintoticamente.

Resumindo, assintoticamente o universo se torna localmente de Sitter, livre de matéria e de “shear”, na presença de uma constante cosmológica positiva λ e admitindo a validade das condições de energia. Observe-se ainda que essa afirmação é independente do número de dimensões espaciais. A conjectura de Hawking (5, 6) acerca de um teorema “no-hair” cosmológico fica então demonstrada, mas com uma ressalva: ela ficou restrita a universos abertos pela condição eq.(1.19).

A conexão dessas idéias com a inflação proposta originalmente por Guth (21) é imediata. Esta fornece o mecanismo de surgimento de uma constante cosmológica e a

dinâmica posterior enquanto que o resultado acima garante a sua eficiência na homogeneização e isotropização do universo, válidas as premissas do teorema. De fato, o teorema pode ser encarado como uma condição suficiente para a existência de um processo inflacionário. Nessa linha de raciocínio, foi mostrado que após o término da inflação seria necessário decorrer um tempo muito longo até que as inhomogeneidades voltassem a permear o universo, o que garantiria o seu estado presente homogêneo e isotrópico (22, 23). Barrow e Götz (24) analisaram também o grau de convergência ao estado local de Sitter, calculando os principais termos de correção a esse estado assintótico, que obviamente tendem a zero à medida que $t \rightarrow \infty$. Esses termos responderão pelo nível da inhomogeneidade após o término da inflação. A relação do teorema com modelos específicos de inflação, como por exemplo a nova inflação (23, 25), a inflação caótica (26) e a inflação de potência (27), também foi estabelecida. Foi desenvolvida ainda uma proposta para análise numérica do teorema para cosmologias inhomogêneas (28), e o estudo no contexto de teorias R^2 de gravitação (29-31).

Esse resultado pode também ser comparado com o trabalho de Collins e Hawking (32) que mostraram que o conjunto dos modelos homogêneos que tendem assintoticamente a um estado isotrópico é de medida zero no espaço de todos os modelos homogêneos. Não existe contradição com o que foi analisado até aqui, já que eles não consideraram o efeito de uma constante cosmológica (8). Ao contrário, o que a conclusão desse trabalho significa é que a inflação é um processo necessário para a isotropização (23) (nesse aspecto ver também (33)).

O fato dos modelos fechados terem sido excluídos da demonstração do teorema "no-hair" foi encarado como reflexo natural da suposição tácita de que todos esses universos inevitavelmente recolapsariam (ou, pelo menos aqueles com topologia mais simples S^3

e $S^1 \times S^2$) (3, 32, 34-38).

No entanto, tal suposição não é correta. Mesmo no caso de uma constante cosmológica nula, até um universo FLRW fechado (topologia S^3) pode se expandir eternamente sem recolapsar para uma segunda singularidade (4, 39). Para mostrar isso, podemos utilizar como fonte das equações de Einstein um fluido perfeito satisfazendo uma lei gama do tipo

$$P = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.28)$$

com $0 \leq \gamma \leq 2$. Por motivo de referência posterior e como a demonstração do teorema “no-hair” é independente do número de dimensões, estenderemos a análise a partir daqui para um número D qualquer ($D > 1$) de dimensões espaciais.

As condições de energia eqs.(1.2), (1.3) e (1.4) para esse fluido determinam que

(20)

$$\rho \geq 0, \quad (1.29)$$

$$\rho - |P| \geq 0, \quad (1.30)$$

$$(D - 2)\rho + DP \geq 0. \quad (1.31)$$

A métrica a ser utilizada é $(D + 1)$ -dimensional, homogênea, isotrópica e com topologia S^D nas seções espaciais, a generalização mais imediata de um FLRW fechado,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\gamma_D^2 + \text{sen}^2 \gamma_D d\gamma_{D-1}^2 + \dots + \text{sen}^2 \gamma_D \dots \text{sen}^2 \gamma_2 d\gamma_1^2 \right]. \quad (1.32)$$

Abaixo são listadas as convenções seguidas para os tensores de Einstein e de Ricci (20):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu|\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha|\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}. \quad (1.34)$$

Os Christoffels não nulos para a métrica eq.(1.32) são *

$$\Gamma_{\gamma_j\gamma_j}^0 = a\dot{a}\Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2\gamma_k, \quad \Gamma_{\gamma_j 0}^{\gamma_j} = \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\Gamma_{\gamma_l\gamma_l}^{\gamma_j} = -\frac{\cos\gamma_j}{\text{sen}\gamma_j} \Pi_{k=j}^{l+1} \text{sen}^2\gamma_k \quad l < j \leq D,$$

$$\Gamma_{\gamma_j\gamma_l}^{\gamma_l} = \frac{\cos\gamma_j}{\text{sen}\gamma_j} \quad l < j \leq D. \quad (1.35)$$

Assim, incluindo apenas os termos não nulos, teremos que, a partir da eq.(1.34),

$$\begin{aligned} R_{\gamma_j\gamma_j} &= \Gamma_{\gamma_j\gamma_j|0}^0 + \sum_{k=j+1}^D \Gamma_{\gamma_j\gamma_j|\gamma_k}^{\gamma_k} - \sum_{l=1}^{j-1} \Gamma_{\gamma_j\gamma_l|\gamma_j}^{\gamma_l} + \sum_{l=1}^D \Gamma_{\gamma_l 0}^{\gamma_l} \Gamma_{\gamma_j\gamma_j}^0 + \sum_{k=j+1}^D \sum_{l=1}^{k-1} \Gamma_{\gamma_l\gamma_k}^{\gamma_l} \Gamma_{\gamma_j\gamma_j}^{\gamma_k} \\ &- 2\Gamma_{\gamma_j\gamma_j}^0 \Gamma_{\gamma_j 0}^{\gamma_j} - 2\sum_{k=j+1}^D \Gamma_{\gamma_j\gamma_j}^{\gamma_k} \Gamma_{\gamma_j\gamma_k}^{\gamma_j} - \sum_{k=1}^{j-1} \Gamma_{\gamma_j\gamma_k}^{\gamma_k} \Gamma_{\gamma_j\gamma_k}^{\gamma_k}, \end{aligned}$$

e ao substituirmos as expressões da eq.(1.35) obteremos

* Obs: na notação utilizada para o produtório, o valor de baixo é o limite superior que o índice pode assumir e $\Pi_i^{i+1} f_i = 1$; para o somatório, a convenção é de que o limite superior está acima e $\Sigma_{i+1}^i f_i = 0$

$$\begin{aligned}
R_{\gamma_j \gamma_j} &= (a\ddot{a} + \dot{a}^2) \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k + \sum_{k=j+1}^D \left(1 - \frac{\cos^2 \gamma_k}{\text{sen}^2 \gamma_k}\right) \Pi_{l=k}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_l + \sum_{l=1}^{j-1} \left(1 + \frac{\cos^2 \gamma_j}{\text{sen}^2 \gamma_j}\right) \\
&+ \sum_{l=1}^D \dot{a}^2 \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k + \sum_{k=j+1}^D \sum_{l=1}^{k-1} \left(-\frac{\cos^2 \gamma_k}{\text{sen}^2 \gamma_k}\right) \Pi_{m=k}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_m - 2\dot{a}^2 \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \\
&- 2\sum_{k=j+1}^D \left(-\frac{\cos^2 \gamma_k}{\text{sen}^2 \gamma_k}\right) \Pi_{m=k}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_m - \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\cos^2 \gamma_j}{\text{sen}^2 \gamma_j} \\
&= [a\ddot{a} + (D-1)\dot{a}^2] \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k + j-1 + \sum_{k=j+1}^D \left[\frac{1 + (1-k)\cos^2 \gamma_k}{\text{sen}^2 \gamma_k}\right] \Pi_{l=k}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_l \\
&= [a\ddot{a} + (D-1)\dot{a}^2] \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k + j \text{sen}^2 \gamma_{j+1} + \sum_{k=j+2}^D [1 + (1-k)\cos^2 \gamma_k] \Pi_{l=k-1}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_l,
\end{aligned}$$

e seguindo o processo iterativo delineado na última passagem, chegamos finalmente a

$$R_{\gamma_j \gamma_j} = [a\ddot{a} + (D-1)\dot{a}^2 + (D-1)] \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k. \quad (1.36)$$

Da mesma forma,

$$R_{00} = -\sum_{k=1}^D \Gamma_{0k|0}^k - \sum_{k=1}^D \Gamma_{0k}^k \Gamma_{0k}^k = -\sum_{k=1}^D \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - \sum_{k=1}^D \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -D \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (1.37)$$

O escalar de curvatura é determinado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2D \frac{\ddot{a}}{a} + D(D-1) \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{D(D-1)}{a^2}. \quad (1.38)$$

Agora temos todos os elementos para a construção do tensor de Einstein para a métrica do FLRW fechado $(D+1)$ -dimensional. As equações de Einstein tomando como fonte um fluido perfeito serão então

$$G_0^0 = -\frac{D(D-1)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{D(D-1)}{2} \frac{1}{a^2} = -k\rho, \quad (1.39)$$

$$G_{\gamma^j}^{\gamma^j} = -(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(D-2)(D-1)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{(D-2)(D-1)}{2} \frac{1}{a^2} = kP. \quad (1.40)$$

A equação de conservação do tensor energia-momentum será

$$\dot{\rho} + (\rho + P)D \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (1.41)$$

que, obviamente, pode ser obtida diretamente das equações de Einstein. Ela permite uma integração direta utilizando a eq.(1.28):

$$\rho = A_0 a^{-\gamma D}, \quad (1.42)$$

com A_0 uma constante de integração definida positiva.

Substituindo a expressão acima na eq.(1.39) e definindo $A = \frac{2A_0}{D(D-1)}$, obtemos que

$$\dot{a}^2 = \frac{kA}{a^{\gamma D - 2}} - 1. \quad (1.43)$$

Pela observação da positividade do segundo membro dessa equação vemos de imediato que para $\gamma D > 2$ esses universos não podem se expandir indefinidamente. Perto da origem o fator de escala se comporta como

$$a \propto t^{2/\gamma D}, \quad (1.44)$$

conferindo, para $D = 3$, com o que é conhecido na literatura (18). Já para $0 \leq \gamma D < 2$, esses universos se expandem eternamente sem uma singularidade inicial. A equação (1.44) agora representa o comportamento assintótico ($t \rightarrow \infty$).

E quando $\gamma D = 2$ (com $kA > 1$) o universo se expande continuamente com

$$a \propto t. \quad (1.45)$$

Estes exemplos ($0 \leq \gamma D \leq 2$) mostram que a conjectura de recolapso é falsa. Posteriormente, essa conjectura foi alterada para a afirmação de que todos os universos fechados, mas que satisfizessem as condições de energia, recolapsariam. Para analisá-la, utilizaremos a condição mais restritiva, advinda da inequação (1.31) para a condição forte, e substituindo a eq.(1.28), chegamos a

$$\gamma \geq \frac{2}{D}. \quad (1.46)$$

Comparando esta inequação com aquela obtida para que o universo se expanda,

$$\gamma \leq \frac{2}{D}, \quad (1.47)$$

podemos montar a tabela 1.1.

REGIÃO	VALORES PARA γ	VALORES PARA D	TIPO	PRESSÃO
I	$0 \leq \gamma < \frac{2}{D}$	$D \geq 2$	E,V	$P < 0$
II	$\gamma = \frac{2}{D}$	$D \geq 2$	E,N	$P \leq 0$
III	$2 \geq \gamma > \frac{2}{D}$	$D = 2$ $D > 2$	R,N	$P > 0$ -

Tab.1.1: Segundo os intervalos de γ e D são analisados os comportamentos de universos, quanto às condições de expansão (E-expande; R-recolapsa) e de energia forte (V-viola; N-não viola), tendo como fonte um fluido perfeito com equação de estado $P = (\gamma - 1)\rho$, onde $0 \leq \gamma \leq 2$. Na última coluna são apresentados os possíveis sinais da pressão.

Observamos assim que existirá sempre um valor de γ para o qual as condições de energia são satisfeitas e o universo apresenta uma expansão contínua. Esse valor, $\gamma = \frac{2}{D}$, representa então uma violação à conjectura de recolapso qualquer que seja o número de dimensões espaciais. Isso já havia sido relatado na literatura para o caso específico tri-dimensional (4, 39). Atualmente permanece ainda uma variante da conjectura de recolapso que afirma que universos com seções espaciais fechadas (com ${}^{(3)}R > 0$), satisfazendo as condições de energia e com pressão não negativa ($P \geq 0$) sempre recolapsam para uma segunda singularidade (40, 41). Pela tabela 1.1 vemos que, apesar dessa nova formulação resistir à análise feita para três ou mais dimensões espaciais, ela é novamente

violada para $D = 2$ e $\gamma = 1$.

Esse resultado mostra que a exclusão das cosmologias fechadas da demonstração do teorema “no-hair” não é “natural”. Nesse sentido, têm sido exploradas as condições que modelos fechados devem satisfazer para permitirem a isotropização, particularmente os modelos homogêneos Bianchi IX (42-45) e Kantowski-Sachs (8-12). A divergência das análises não leva a uma conclusão definitiva, e exemplos são citados como violações ao teorema para estas cosmologias (11, 43).

Barrow (46, 47) associa essa exclusão ao fato de se ter imposto de uma maneira insatisfatória a condição de energia forte, eq.(1.18). Realmente, espera-se que uma constante cosmológica positiva advenha da própria estrutura da matéria. Esse é o caso, por exemplo, de um campo escalar com um termo de auto-interação $V(\phi)$. Se durante a evolução ocorrer um período em que o campo $\phi(t)$ varie muito lentamente, o termo de potencial aproximadamente constante durante o período poderá dominar o termo cinético:

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \simeq V(\phi), \quad (1.48)$$

$$P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \simeq -V(\phi). \quad (1.49)$$

Esse potencial entrará então nas equações de Einstein como uma constante cosmológica efetiva. Sob esse ponto de vista torna-se estranho impor a condição forte de energia para o tensor energia-momentum excluindo dele justamente a constante cosmológica. Porém, se concluirmos que ela deva ser incluída no $T_{\mu\nu}$, poderemos violar a condição dada pela eq.(1.4). Por exemplo, no caso particular das eqs.(1.48) e (1.49), no período em que $\phi \simeq c^{t/\epsilon}$,

$$P = -\rho \Rightarrow \gamma = 0, \quad (1.50)$$

valor que viola a condição forte, como pode ser observado pela eq.(1.46).

De fato, se admitirmos que tudo o que existe é o tensor energia-momentum (com uma possível “constante cosmológica efetiva” embutida) observa-se que a condição de inflação,

$$\ddot{a} > 0, \quad (1.51)$$

implica na violação da condição forte de energia (46, 48).

Uma proposta para estender o teorema “no-hair” seria a utilização de uma condição de energia menos restritiva que a da equação (1.4), apesar de que a sua retirada pura e simples não só invalida a demonstração como torna o teorema falso (46).

Cabe aqui então um comentário: o problema das cosmologias fechadas pode ser visto como um de escalas de tempo. Duas concorrem para o sucesso ou não do modelo: o tempo até o universo recolapsar e o necessário para o início de um período inflacionário. No entanto a comparação dessas duas escalas de tempo é extremamente dependente das condições iniciais, ferindo o espírito do teorema “no-hair”. Dessa forma caracteriza-se o problema de recolapso prematuro para universos fechados (4) mencionado no início.

Isso pode ser mostrado claramente. Suponhamos a validade das equações de Einstein, eqs.(1.39) e (1.40), com a adição de uma constante cosmológica λ positiva, e ainda da eq.(1.41) e sua integral eq.(1.42). A análoga à eq.(1.43) neste caso será

$$\dot{a}^2 = kAa^{2-\gamma D} + \Lambda a^2 - 1, \quad (1.52)$$

com $\Lambda = \frac{2\lambda}{D(D-1)}$.

Substituindo a eq.(1.39) na eq.(1.40) (com a presença de λ), e levando em consideração as eqs.(1.28) e (1.42), chegamos a

$$\ddot{a} = -\frac{a}{D-1} \left[P + \left(\frac{D-2}{D} \right) (\rho + \Lambda) - \Lambda \right] = \Lambda a - \frac{k\Lambda(\gamma D - 2)}{2} a^{1-\gamma D}. \quad (1.53)$$

Podemos iniciar agora, a partir das eqs.(1.52) e (1.53), uma análise de energia para observarmos todos os comportamentos possíveis para o fator de escala (20, 49). A energia cinética associada a esses universos será dada por

$$T(a) = \frac{\dot{a}^2}{2} = \frac{kA}{2} a^{2-\gamma D} + \frac{\Lambda}{2} a^2 - \frac{1}{2}; \quad (1.54)$$

a energia potencial será obtida de

$$-\frac{\partial V}{\partial a} = \ddot{a} \quad \Rightarrow \quad V(a) = -\frac{kA}{2} a^{2-\gamma D} - \frac{\Lambda}{2} a^2; \quad (1.55)$$

onde a constante de integração foi feita nula de forma que $E = T + V = -\frac{1}{2}$. O potencial $V(a)$ pode apresentar um máximo dado por

$$a_0 = \left[\frac{kA}{2\Lambda} (\gamma D - 2) \right]^{\frac{1}{\gamma D}}. \quad (1.56)$$

Chamaremos de Λ_c o valor crítico de Λ que faz com que o máximo de V seja igual a E , $V_{\max} = E = -\frac{1}{2}$, e pelas eqs.(1.55) e (1.56) vemos que ele será

$$\Lambda_c = (\gamma D)^{\frac{-\gamma D}{\gamma D - 2}} \left(\frac{kA}{2} \right)^{\frac{-2}{\gamma D - 2}} (\gamma D - 2). \quad (1.57)$$

Considerando o intervalo $0 \leq \gamma D < 2$, teremos sempre $\Lambda > \Lambda_c$, como pode ser visto da eq.(1.57), já que Λ é definido positivo. Em outras palavras, não teremos um Λ

crítico. Na fig. 1.1 podemos observar a forma das curvas de energia potencial. Nesse mesmo intervalo, teremos também valores de γD cujas posições de V_{\max} não serão dadas pela eq.(1.56), mas sim por $a_0 = 0$. E como pode ser observado da fig. 1.2, onde são mostrados alguns exemplos desse comportamento, a conclusão de inexistência de um Λ_c continua válida.

A análise dessas figuras mostra que esses universos sempre colapsam de um raio infinito para um raio mínimo e depois se expandem ilimitadamente (solução de “bounce”). Eles não possuem uma singularidade e são assintoticamente de Sitter.

Também para $\gamma D = 2$ não existirá um valor crítico de Λ , mas haverá, além da solução acima, soluções onde o fator de escala começa da origem e cresce indefinidamente.

Concluindo o estudo desse intervalo, vemos que para $\gamma D = 2$ o teorema “no-hair” é verificado devido à existência de estágios assintóticos de Sitter em todas as possíveis soluções (no restante do intervalo as premissas do teorema não são válidas).

Para $\gamma D > 2$, a posição de V_{\max} continua a ser obtida a partir da eq.(1.56). Mas pela eq.(1.57) vemos que agora teremos comportamentos distintos para esses universos segundo a relação entre Λ e Λ_c (50). Para $\Lambda > \Lambda_c$, poderemos ter até duas soluções: uma com expansão contínua a partir da origem, que sempre será encontrada, e outra de “bounce”, que só aparecerá para determinados valores de γD . Nas figs. 3 e 4 são mostrados os gráficos de energia potencial para esses dois casos. Quando $\Lambda = \Lambda_c$, poderemos ter até 4 soluções: o universo ou começa de uma origem e alcança um estágio Einstein ($a = c^{t/a}$), ou é eternamente Einstein, ou inicia de um estágio Einstein e se expande para sempre, ou ainda, para alguns valores de γD , é descrito por uma solução de “bounce”. Quando $\Lambda < \Lambda_c$, poderão ocorrer três soluções: uma de recolapso,

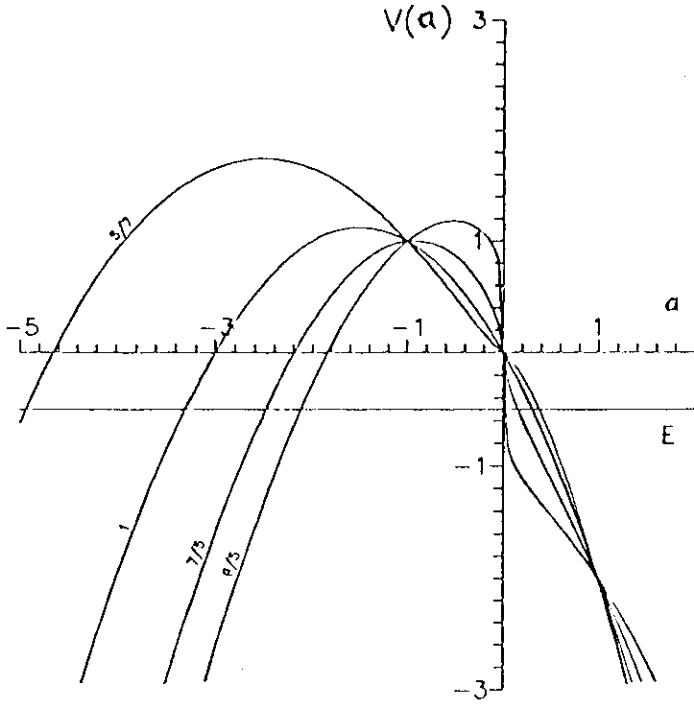


Figura 1 - Curvas de energia potencial com valores de γD na região $0 < \gamma D < 2$. As posições dos máximos são sempre dadas pela eq.(1.56). Foram escolhidos os valores: $\Lambda = 1$, $KA = 3$ e $\gamma D = \frac{5}{7}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}$.

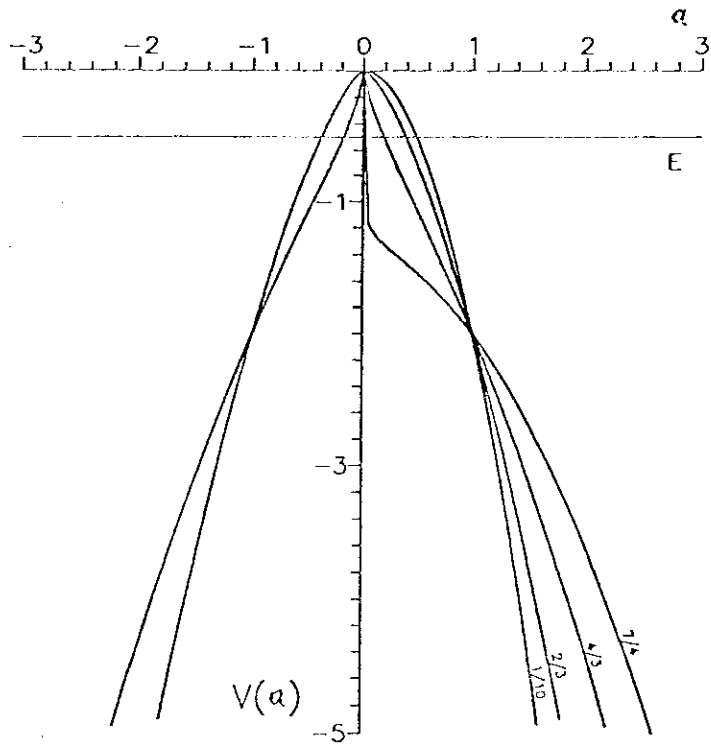


Figura 2 - Curvas de energia potencial com valores de γD na região $0 < \gamma D < 2$. As posições dos máximos são dadas por $a_0 = 0$. Foram escolhidos os valores: $\Lambda = 1$, $KA = 3$ e $\gamma D = \frac{7}{4}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{10}$.

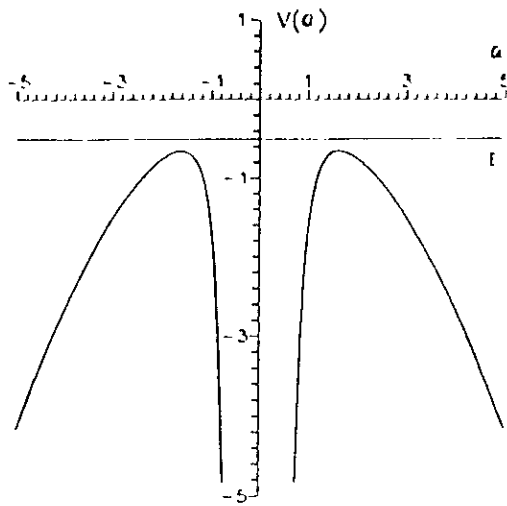


Figura 3 - Universo apresentando expansão contínua com $\Lambda > \Lambda_c$. Foi escolhido $\Lambda = \frac{1}{3}$ com $KA = 3$, $\gamma D = 6$, $\Lambda_c = \frac{2}{9}$.

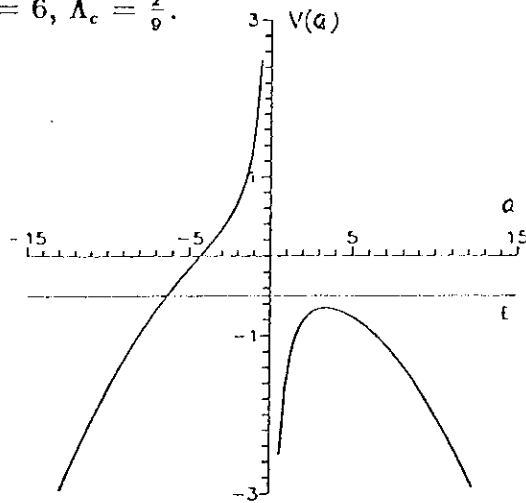


Figura 4 - Soluções de "bounce" e expansão contínua quando $\Lambda > \Lambda_c$. Foi escolhido $\Lambda = \frac{1}{27}$ com $KA = 3$, $\gamma D = 3$, $\Lambda_c = \frac{4}{243}$.

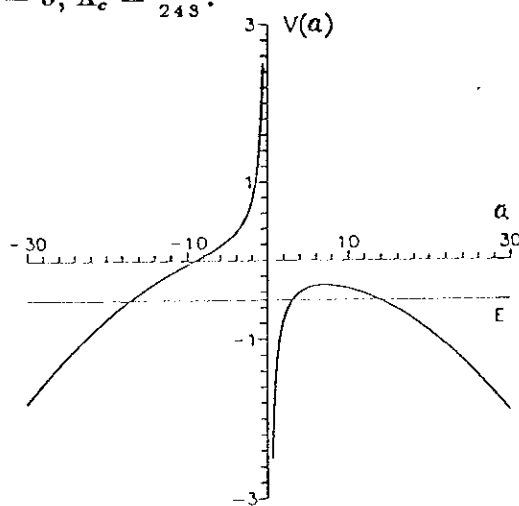


Figura 5 - Duas soluções de "bounce" e uma de recolapso quando $\Lambda < \Lambda_c$. Foi escolhido $\Lambda = \frac{1}{243}$ com $KA = 3$, $\gamma D = 6$, $\Lambda_c = \frac{4}{243}$.

e duas de “bounce” distintas, como pode ser entendido a partir da fig. 1.5.

Esses resultados podem ser comparados com os da tabela 1.1. Somente os universos com $0 \leq \gamma D \leq 2$, que sem a constante cosmológica já se expandiam, possuem estágios assintóticos de Sitter em todas as possíveis soluções. Entre os com $\gamma D > 2$, apesar de existirem aqueles com estágios assintóticos de Sitter, existem os que violam o teorema “no-hair” por possuírem estágio assintótico Einstein ou que recolapsam, tudo isso dependendo das condições iniciais satisfeitas pelo fator de escala, constante cosmológica e o estado da matéria.

Dentro desse contexto, podemos começar a inserir o estudo de um campo escalar como fonte das equações de Einstein.

O papel deste na evolução do universo primitivo tem sua importância destacada pelos seguintes argumentos:

- . A previsão das teorias de unificação da existência de um campo escalar multipletto (com um potencial de auto-interação) nos estágios primordiais do universo antes da quebra de simetria.

- . O trabalho de Zel’dovich (51) introduzindo a equação de estado $P = \rho$ ($\gamma = 2$) como aquela que descreveria os estados de mais alta densidade possível da matéria, equação de estado esta realizável através de um fluido escalar sem massa (ou, para efeitos práticos com o potencial nulo durante o estágio em que a matéria deva ser descrita por essa equação de estado). Barrow fornece outros argumentos em favor de $P = \rho$ sendo satisfeita primordialmente na sua cosmologia “quiescent” (52).

- . O fato de um potencial de auto-interação de um campo escalar proporcionar um mecanismo adequado para o surgimento de uma “constante cosmológica efetiva”, aspecto fundamental para a existência da inflação, como foi demonstrado.

No entanto, um campo escalar, com a equação de estado $P = \rho$, se enquadraria na nossa análise anterior justamente na faixa crítica de $\gamma D > 2$, onde um estágio assintótico de Sitter não é consequência obrigatória. Mesmo a consideração de um termo de massa ou um potencial não evita a existência de soluções reolapsantes sem estágio inflacionário (53, 54), o que simplesmente significa que a situação descrita pelas equações (1.41) e (1.42) pode nunca chegar a ocorrer.

O que se pode argumentar é que toda a análise feita até agora lidou apenas com um campo escalar singleto. Nada foi feito para analisar o que acarretaria uma estrutura interna de um campo multiplete, de que forma a geometria do espaço-tempo seria afetada pela geometria interna associada a esse campo escalar em termos de evolução cosmológica.

É isso que pretendemos explorar a partir de agora.

2 - O Campo Escalar Multipleteo $SO(N+1)$ em $D+1$ dimensões espaço-temporais

2.1 - Uma Proposta de Ação

O campo de matéria que será utilizado é um campo escalar com simetria interna esférica representado no espaço interno pelo vetor normal à superfície esférica de N dimensões parametrizada por N ângulos:

$$\hat{r}_n = (\text{sen}\gamma_n \text{sen}\gamma_{n-1} \dots \text{sen}\gamma_1, \text{sen}\gamma_n \dots \text{sen}\gamma_2 \cos\gamma_1, \text{sen}\gamma_n \dots \\ \dots \text{sen}\gamma_3 \cos\gamma_2, \dots, \text{sen}\gamma_n \cos\gamma_{n-1}, \cos\gamma_n), \quad (2.1.1)$$

ou de uma forma recursiva:

$$\hat{r}_n = (\hat{r}_{n-1} \text{sen}\gamma_n, \cos\gamma_n) \quad , \quad \hat{r}_0 \equiv 1. \quad (2.1.2)$$

No espaço externo, esse campo se comporta como um campo escalar com dependência temporal apenas. Assim ele pode ser representado como

$$\hat{\phi} = \varphi(t) \hat{r}_n. \quad (2.1.3)$$

A ação de matéria é escrita na forma:

$$S_m = - \int w(\hat{\phi}, \hat{\phi}) \hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, dx^{D+1}, \quad (2.1.4)$$

onde $w(\hat{\phi}, \hat{\phi})$ é uma função positiva de φ^2 e μ e ν variam sobre as coordenadas espaciais externas (γ_1 a γ_D para um espaço a D dimensões) e tempo. Observando que, no caso do número de dimensões do espaço interno ser maior ou igual ao do espaço externo,

$$\hat{r}_{|\gamma_j} = \prod_{i=N}^{j+1} \text{sen} \gamma_i \hat{R}_{\gamma_i}, \quad D \geq j \geq 1, \quad (2.1.5)$$

sendo \hat{R}_{γ_j} o unitário ao longo da direção de γ_j no espaço tangente a cada ponto da esfera N -dimensional (daqui por diante suprimiremos o índice (n) no vetor normal),

$$\hat{R}_{\gamma_i} \cdot \hat{R}_{\gamma_j} = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \hat{R}_{\gamma_j} \cdot \hat{r} = 0, \quad (2.1.6)$$

e, similarmente, para o caso $D > N$

$$\hat{r}_{|\gamma_j} = \begin{cases} \prod_{i=N}^{j+1} \text{sen} \gamma_i \hat{R}_{\gamma_i}, & N \geq j \geq 1, \\ 0 & D \geq j > N, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

vemos que

$$\hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu} = \dot{\varphi}^2 \delta_\mu^t \delta_\nu^t + \varphi^2 \tau_{\mu\nu}, \quad (2.1.8)$$

onde $\tau_{\mu\nu}$ é a projeção espaço-temporal da métrica das esferas S^N com componentes

$$\tau_{00} = 0 \quad , \quad \tau_{ij} = 0 \quad , \quad \text{se } i \neq j, \quad \text{e}$$

$$p/N \geq D$$

$$\tau_{\gamma_j \gamma_j} = \prod_{i=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_i \quad D \geq j \geq 1,$$

$$p/N < D$$

$$\tau_{\gamma_j \gamma_j} = \begin{cases} \prod_{i=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_i & N \geq j \geq 1, \\ 0 & D \geq j > N. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

A ação de matéria eq.(2.1.4) pode então ser escrita como:

$$S_m = \int w(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}) [\dot{\phi}^2 - \varphi^2 \tau] \sqrt{-g} \, dx^{D+1}, \quad (2.1.10)$$

onde τ é o traço de $\tau_{\mu\nu}$,

$$\tau = \tau_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (2.1.11)$$

Percebe-se então o surgimento de um termo extra nessa ação em comparação com a de um campo escalar comum devido exclusivamente à estrutura interna. Ele entra de uma forma análoga a de uma “constante cosmológica”, a princípio podendo ter tanto dependência temporal quanto espacial.

É importante realçar mais uma vez que esse termo advém puramente da estrutura fornecida ao campo e, como será visto posteriormente, nem mesmo um potencial arbitrário em um campo escalar singleto pode reproduzir os efeitos que um multipletto sozinho pode gerar.

2.2 - O Tensor Energia-Momentum

Seguindo a decomposição invariante do tensor energia-momentum proposta por Eckart (55), temos que

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu + P h_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} + q_{(\mu} V_{\nu)}, \quad (2.2.12)$$

com

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad , \quad V_\mu V^\mu = -1 \quad , \quad h_{\mu\nu} V^\nu = 0 \quad , \quad g_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = D \quad , \quad (2.2.13)$$

e ainda:

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (2.2.14)$$

que é a densidade de energia;

$$P = \frac{1}{D} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (2.2.15)$$

que é a pressão isotrópica;

$$\Pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - P h_{\mu\nu}, \quad (2.2.16)$$

pressão anisotrópica; e

$$q_\mu = -T_{\alpha\beta} V^\alpha h_\mu^\beta, \quad (2.2.17)$$

o fluxo de calor.

V_μ são vetores tipo tempo normalizados, e é admitido que se pode folhear o espaço-tempo com hipersuperfícies D-dimensionais puramente espaciais determinadas por uma congruência de linhas tipo tempo ortogonais às hipersuperfícies, no sentido de que seus vetores tangente V_μ não possuem projeções sobre estas, $h_{\mu\nu} V^\mu = 0$. Como já está dito, $h_{\mu\nu}$ são os projetores sobre as hipersuperfícies: $h_{\alpha\mu} h_{\beta\nu} g^{\alpha\beta} = h_{\mu\nu}$.

Interpretando-se a congruência como gerada pelas linhas de universo de observadores nesse espaço-tempo, V_μ seria o campo de velocidades e $h_{\mu\nu}$ a métrica puramente espacial definida positiva para esses observadores.

Para um fluido escalar singleto $\varphi(x^\mu)$, com um tensor energia-momentum dado por

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{|\mu} \varphi_{|\nu} - \frac{1}{2} \varphi_{|\alpha} \varphi_{|\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \lambda V(\phi) g_{\mu\nu}, \quad (2.2.18)$$

temos que

$$\rho = \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varphi_{|\alpha}\varphi_{|\beta}g^{\alpha\beta} + \lambda V(\phi) = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\varphi_{|\alpha}\varphi_{|\beta}h^{\alpha\beta}}{2} + \lambda V(\phi), \quad (2.2.19)$$

$$P = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(2-D)}{2D}\varphi_{|\alpha}\varphi_{|\beta}h^{\alpha\beta} - \lambda V(\phi), \quad (2.2.20)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \varphi_{|\alpha}\varphi_{|\beta}\left(h_{\mu}^{\alpha}h_{\nu}^{\beta} - \frac{1}{D}h^{\alpha\beta}h_{\mu\nu}\right), \quad (2.2.21)$$

$$q_{\mu} = -\dot{\varphi}\varphi_{|\alpha}h_{\mu}^{\alpha}. \quad (2.2.22)$$

Se no referencial síncrono ($V_{\mu} = \delta_{\mu}^0$) o campo for dependente apenas do tempo, observa-se que o fluxo de calor e a pressão anisotrópica se anulam e este campo descreve então um fluido perfeito.

Já para o campo multipletto, a partir da ação na equação (2.1.4), temos que

$$T_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 - \frac{1}{2}g^{00}g_{\mu\nu}\right)\dot{\varphi}^2 w(\varphi^2) + \left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tau\right)\varphi^2 w(\varphi^2), \quad (2.2.23)$$

que implica, para um referencial síncrono:

$$\rho = \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\tau\varphi^2}{2}\right)w(\varphi^2), \quad (2.2.24)$$

$$P = \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(2-D)}{2D}\tau\varphi^2\right)w(\varphi^2), \quad (2.2.25)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{D}h_{\mu\nu}\tau\right)\varphi^2 w(\varphi^2), \quad (2.2.26)$$

$$q_\mu = 0. \quad (2.2.27)$$

Este campo, no referencial síncrono, pode possuir pressão anisotrópica não nula e, portanto, não descrever um fluido perfeito. Para isso basta que $\tau_{\mu\nu}$ não seja proporcional a $h_{\mu\nu}$, o que certamente ocorrerá quando $N < D$. De fato, restringindo agora a análise a espaços fechados com topologia S^D , por exemplo, quando $h_{\mu\nu}$ se escreve:

$$h_{\gamma_i\gamma_j} = 0 \quad \text{se } i \neq j,$$

$$h_{\gamma_j\gamma_j} = a^2(t) \prod_{i=1}^{j-1} \text{sen}^2 \gamma_i, \quad (2.2.28)$$

e admitindo-se que os ângulos que parametrizam as esferas S^N são identificáveis aos respectivos ângulos do espaço externo, temos as expressões:

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{\tau}{D} h_{\mu\nu} \quad , \quad \Rightarrow \quad \Pi_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2.29)$$

quando $N > D$ e que implica num fluido perfeito; mas para $N < D$:

$$\tau_{\gamma_j\gamma_j} = \begin{cases} \frac{\tau}{N} h_{\gamma_j\gamma_j} & j=1, \dots, N, \\ 0 & j = N+1, \dots, D, \end{cases} \quad (2.2.30)$$

que implica num fluido anisotrópico ($\Pi_{\mu\nu} \neq 0$).

2.3 - Condições de Energia

Representando um observador qualquer por W^μ :

$$W^\mu W_\mu = -b^2, \quad (2.3.31)$$

cuja componente ao longo da direção temporal V_μ é *

$$W^\mu V_\mu = a \quad \Rightarrow \quad W_\mu W_\nu h^{\mu\nu} = a^2 - b^2, \quad (2.3.32)$$

e como

$$(W^\mu V_\mu)^2 \geq -W_\mu W^\mu \quad \Rightarrow \quad a^2 \geq b^2, \quad (2.3.33)$$

a condição fraca, equação (1.2), para um fluido perfeito, implica que

$$\rho + P \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \geq 0. \quad (2.3.34)$$

Pela inequação (2.3.33) vê-se que $1 \geq 1 - \frac{b^2}{a^2} \geq 0$. A desigualdade (2.3.34) deve ser analisada nos extremos desta última, o que leva a

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + P \geq 0. \quad (2.3.35)$$

A condição dominante, equação (1.3), fica:

$$\rho^2 + P^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \geq 0, \quad (2.3.36)$$

e, segundo a mesma análise,

$$\rho^2 \geq 0, \quad (2.3.37)$$

$$\rho^2 \geq P^2. \quad (2.3.38)$$

A equação (2.3.37) é uma trivialidade e a eq.(2.3.38) pode ser reescrita na forma como é usualmente apresentada,

$$\rho \geq |P|. \quad (2.3.39)$$

* Notar o uso da mesma letra a usada para fator de escala para denotar o produto na eq.(2.3.32).

A condição forte, equação (1.4), fornece

$$\rho + P \left[\frac{(D-1) + \frac{b^2}{a^2}}{(D-1) - \frac{b^2}{a^2}} \right] \geq 0, \quad (2.3.40)$$

que nos limites da inequação (2.3.33) representa

$$(D-2)\rho + DP \geq 0, \quad (2.3.41)$$

$$\rho + P \geq 0. \quad (2.3.42)$$

Um fluido escalar homogêneo no referencial síncrono, tratado como fluido perfeito, satisfaz automaticamente todas as condições de energia se possuir um potencial nulo. Para o caso de um $\lambda V(\phi)$ maior que zero, existe a possibilidade de violação da condição forte pela inequação (2.3.41).

Para um fluido generalizado, eq.(2.2.12), a condição de energia fraca se escreve

$$a^2 \rho + \Pi_{\mu\nu} W^\mu W^\nu + P(a^2 - b^2) + 2a q_\mu W^\mu \geq 0. \quad (2.3.43)$$

Substituindo os resultados das eqs.(2.2.24) a (2.2.27) e lembrando que, para $N \geq D$, $\Pi_{\mu\nu} = 0$ e que $w(\varphi^2)$ é definida positiva:

$$p/N \geq D$$

$$w(\varphi^2) \left\{ \dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} \right) + \tau \varphi^2 \left[\frac{b^2}{2a^2} + \frac{1}{D} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right] \right\} \geq 0. \quad (2.3.44)$$

Como se observa, a desigualdade é automaticamente satisfeita, pois o membro da esquerda é definido positivo.

Similarmente, para $N < D$ e introduzindo a notação

$$\sigma_s^2 = \frac{N}{\tau} \tau_{\mu\nu} W^\mu W^\nu = \Sigma_{j=1}^N h_{\gamma_j \gamma_j} W^{\gamma_j} W^{\gamma_j} \Rightarrow \sigma_s^2 \geq 0, \quad (2.3.45)$$

chega-se a

$$p/N < D$$

$$w(\varphi^2) \left\{ \dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{b^2}{2a^2} \right) + \tau \varphi^2 \left[\frac{b^2}{2a^2} + \frac{\sigma_s^2}{Na^2} \right] \right\} \geq 0 \quad (2.3.46)$$

que é também satisfeita.

Já a condição dominante para o fluido da equação (2.2.12) é escrita como

$$\left(P^2 - \rho^2 \right) a^2 - b^2 P^2 + \Pi^{\mu\nu} W_\mu \Pi_{\nu\epsilon} W^\epsilon + 2P \Pi^{\mu\nu} W_\mu W_\nu \leq 0, \quad (2.3.47)$$

e assim:

$$p/N \geq D$$

$$w^2(\varphi^2) \left\{ \frac{-b^2 \dot{\varphi}^4}{4} - \frac{\tau \dot{\varphi}^2}{2D} \varphi^2 \left[2a^2(D-1) - b^2(D-2) \right] - \frac{\tau^2 \varphi^4}{4D^2} \left[4a^2(D-1) + b^2(D-2)^2 \right] \right\} \leq 0, \quad (2.3.48)$$

$$p/N < D$$

$$w^2(\varphi^2) \left\{ \frac{-b^2 \dot{\varphi}^4}{4} + \frac{\tau \dot{\varphi}^2}{2D} \varphi^2 \left[(-2a^2 + b^2)N + 2\sigma_s^2 \right] - \frac{\tau^2 \varphi^4}{4N^2} \left[4\sigma_s^2(N-1) + b^2 N^2 \right] \right\} \leq 0. \quad (2.3.49)$$

A primeira desigualdade é satisfeita e para mostrar que a segunda também o é, basta observarmos que

$$\sigma_s^2 \leq a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad (-2a^2 + b^2)N + 2\sigma_s^2 \leq -2a^2(N-1) + b^2(N-2) \leq 0. \quad (2.3.50)$$

A condição forte,

$$\rho\left(a^2 - \frac{b^2}{D-1}\right) + \Pi^{\mu\nu} W_\mu W_\nu + P\left(a^2 + \frac{b^2}{D-1}\right) + 2aq^\mu W_\mu \geq 0, \quad (2.3.51)$$

implica nas relações:

$$p/N \geq D$$

$$w(\varphi^2) \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{\tau\varphi^2}{D} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \right] \geq 0, \quad (2.3.52)$$

$$p/N < D$$

$$w(\varphi^2) \left[\dot{\varphi}^2 + \tau\varphi^2 \left(\frac{\sigma_s^2}{Na^2}\right) \right] \geq 0. \quad (2.3.53)$$

Essas duas desigualdades são sempre satisfeitas e assim concluímos que o tensor energia-momentum da eq.(2.2.23) para o campo escalar multipleteo satisfaz todas as condições de energia para quaisquer N e D .

2.4 - A Equação do Campo Escalar

A variação com relação a $\hat{\phi}$ da ação eq.(2.1.4) fornece a equação de campo

$$2w(\varphi^2) \hat{\phi}_{|\mu||\nu} g^{\mu\nu} + 2 \left[w(\varphi^2) \right]_{|\mu} \hat{\phi}_{|\nu} g^{\mu\nu} - \frac{\partial w(\varphi^2)}{\partial \hat{\phi}} \left(\hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu} g^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (2.4.54)$$

que, com

$$\left[w(\varphi^2) \right]_{|\mu} = \frac{\partial w(\varphi^2)}{\partial \hat{\phi}} \cdot \hat{\phi}_{|\mu} = 2\varphi w'(\varphi^2) \hat{r} \cdot \hat{\phi}_{|\mu}, \quad (2.4.55)$$

pode ser reescrita como

$$\hat{\phi}_{|\mu||\nu} g^{\mu\nu} - \left[\frac{w'}{w} \varphi (\dot{\varphi}^2 + \tau\varphi^2) \right] \hat{r} = 0, \quad (2.4.56)$$

onde

$$\hat{\phi}_{|\mu||\nu} g^{\mu\nu} = \left(-\tilde{\varphi} - \frac{D\hat{\alpha}\varphi}{a} \right) \hat{r} - \varphi \sum_{j=1}^{\min(N,D)} \sum_{i=1}^D h^{\gamma_i\gamma_i} \Gamma_{\gamma_i\gamma_i}^{\gamma_j} (\hat{r}_{|\gamma_j|}) + \varphi \sum_{j=1}^{\min(N,D)} h^{\gamma_j\gamma_j} (\hat{r}_{|\gamma_j|}). \quad (2.4.57)$$

Considerando-se as equações (2.1.5) e (2.1.7) e as formas explícitas dos vetores \hat{r} e \hat{R}_{γ_j} , pode-se induzir que:

$$\hat{r}_{|\gamma_j|} = -\prod_{k=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \hat{r} - \sum_{l=j+1}^N \cos \gamma_l \prod_{k=N}^l \text{sen} \gamma_k \prod_{i=l-1}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_i \hat{R}_{\gamma_l}, \quad (2.4.58)$$

e, em particular

$$\hat{r}_{|\gamma_N|} = -\hat{r}. \quad (2.4.59)$$

O ansatz de métrica a ser utilizado é o seguinte:

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \\ g_{\gamma_i\gamma_j} = h_{\gamma_i\gamma_j} = \left(a^2 f^2 \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right) \delta_{\gamma_i\gamma_j}, \quad (2.4.60)$$

onde $a = a(t)$ é o fator de escala e $f = f(\gamma_D)$.

Os Christoffels $\Gamma_{\gamma_i\gamma_i}^{\gamma_j}$, não nulos a ela associados são

$$\Gamma_{\gamma_D\gamma_D}^{\gamma_D} = \frac{f'}{f}, \\ \Gamma_{\gamma_i\gamma_i}^{\gamma_D} = -\left(\frac{f'}{f} + \frac{\cos \gamma_D}{\text{sen} \gamma_D} \right) \prod_{k=D}^{i+1} \text{sen}^2 \gamma_k, \quad (2.4.61) \\ \Gamma_{\gamma_i\gamma_i}^{\gamma_j} = -\left(\frac{\cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \right) \prod_{k=j}^{i+1} \text{sen}^2 \gamma_k, \quad D > j > i.$$

Com esses resultados já se pode calcular os termos da equação (2.4.57). Abaixo são dadas as suas expressões finais divididas em 3 classes segundo a relação entre N e D:



$$\sum_{j=1}^{\min(N,D)} h^{\gamma_j, \gamma_j} \hat{f}_{|\gamma_j, \gamma_j} =$$

$$p/N < D$$

$$= \frac{-N}{a^2 f^2} \left(\frac{\hat{f}}{\prod_{k=D}^{N+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \right) - \frac{1}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=j+1}^N \left(\frac{\cos \gamma_l \prod_{k=N}^l \text{sen} \gamma_k}{\prod_{k=D}^l \text{sen}^2 \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_l} \right], \quad (2.4.62)$$

$$p/N = D$$

$$= \frac{-1}{a^2 f^2} \left[D \hat{f} + \sum_{j=1}^{D-1} \sum_{l=j+1}^D \left(\frac{\cos \gamma_l}{\prod_{k=D}^l \text{sen} \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_l} \right], \quad (2.4.63)$$

$$p/N > D$$

$$= \frac{-D}{a^2 f^2} \left(\prod_{k=N}^{D+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right) \hat{f} - \frac{1}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=1}^D \sum_{l=j+1}^N \left(\frac{\cos \gamma_l \prod_{k=N}^l \text{sen} \gamma_k \prod_{k=l-1}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k}{\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_l} \right]. \quad (2.4.64)$$

E o mesmo para o termo restante da eq.(2.4.57):

$$\sum_{j=1}^{\min(N,D)} \sum_{i=1}^D h^{\gamma_i, \gamma_i} \Gamma_{\gamma_i, \gamma_i}^{\gamma_j} \hat{f}_{|\gamma_j} =$$

$$p/N < D$$

$$= \frac{1}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{-\cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \right) \left(\frac{\prod_{k=N}^{j+1} \text{sen} \gamma_k}{\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_j} \right], \quad (2.4.65)$$

$$p/N = D$$

$$= \frac{1}{a^2 f^2} \left[\left((2-D) \frac{f'}{f} + (1-D) \frac{\cos \gamma_D}{\text{sen} \gamma_D} \right) \hat{R}_{\gamma_D} \right] + \frac{1}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=2}^{D-1} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{-\cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \right) \left(\frac{1}{\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen} \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_j} \right], \quad (2.4.66)$$

$p/N > D$

$$= \frac{1}{a^2 f^2} \left((2-D) \frac{f'}{f} + (1-D) \frac{\cos \gamma_D}{\sin \gamma_D} \right) \Pi_{k=N}^{D+1} \sin \gamma_k \hat{R}_{\gamma_D} \\ + \frac{1}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=2}^{D-1} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{-\cos \gamma_j}{\sin \gamma_j} \right) \left(\frac{\Pi_{k=N}^{D+1} \sin \gamma_k}{\Pi_{k=D}^{j+1} \sin \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_j} \right]. \quad (2.4.67)$$

A equação (2.4.56), então, com os termos do D'Alembertiano eq.(2.4.57) calculados acima, é escrita para o primeiro caso, $N < D$:

$$\left\{ -\ddot{\varphi} - D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} - \varphi \frac{w'}{w} [\dot{\varphi}^2 + r\varphi^2] - \frac{\varphi}{a^2 f^2} \frac{N}{\Pi_{k=D}^{N+1} \sin^2 \gamma_k} \right\} \hat{r} - \\ - \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=j+1}^N \left(\frac{\cos \gamma_l \Pi_{k=N}^l \sin \gamma_k}{\Pi_{k=D}^l \sin^2 \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_l} \right] \\ + \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=2}^N (j-1) \frac{\cos \gamma_j}{\sin \gamma_j} \frac{\hat{R}_{\gamma_j}}{\left(\Pi_{k=D}^{N+1} \sin^2 \gamma_k \right) \left(\Pi_{k=N}^{j+1} \sin \gamma_k \right)} \right] = 0. \quad (2.4.68)$$

Pelas relações de ortonormalidade da eq.(2.1.6) para \hat{r} e \hat{R}_{γ_j} , o coeficiente de cada um desses vetores deve ser obrigatoriamente nulo na expressão acima. Temos então para a componente em \hat{r} , quando $N < D$,

$$\ddot{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi \frac{w'}{w} [\dot{\varphi}^2 + r\varphi^2] + \frac{\varphi N}{a^2 f^2 \Pi_{k=D}^{N+1} \sin^2 \gamma_k} = 0. \quad (2.4.69)$$

Os demais coeficientes (de \hat{R}_{γ_n} a \hat{R}_{γ_2}) são identicamente nulos como pode ser observado.

Quando $N = D$, com as eqs.(2.4.63) e (2.4.66), a equação de campo fica:

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\tilde{\varphi} - D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} - \varphi \frac{w'}{w} [\dot{\varphi}^2 + \tau \varphi^2] - \frac{\varphi D}{a^2 f^2} \right\} \hat{r} \\
& - \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\left((2-D) \frac{f'}{f} + (1-D) \frac{\cos \gamma_D}{\text{sen} \gamma_D} \right) \hat{R}_{\tau_D} \right] \\
& + \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=2}^{D-1} (j-1) \frac{\cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \frac{1}{\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen} \gamma_k} \hat{R}_{\tau_j} \right] \\
& - \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=1}^D \sum_{l=j+1}^D \left(\frac{\cos \gamma_l}{\prod_{k=D}^l \text{sen} \gamma_k} \right) \hat{R}_{\tau_l} \right] = 0. \tag{2.4.70}
\end{aligned}$$

E da mesma forma

$$\tilde{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi \frac{w'}{w} [\dot{\varphi}^2 + \tau \varphi^2] + \frac{\varphi D}{a^2 f^2} = 0. \tag{2.4.71}$$

A anulação do coeficiente de \hat{R}_{τ_D} implica que

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad f = c^{t\epsilon}, \tag{2.4.72}$$

e os demais são nulos.

Agora para $N > D$, os termos das eqs.(2.4.64) e (2.4.67) fornecem a equação de campo

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\tilde{\varphi} - D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} - \varphi \frac{w'}{w} [\dot{\varphi}^2 + \tau \varphi^2] - \frac{\varphi D}{a^2 f^2} \left(\prod_{k=N}^{D+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right) \right\} \hat{r} \\
& - \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\left((2-D) \frac{f'}{f} + (1-D) \frac{\cos \gamma_D}{\text{sen} \gamma_D} \right) \prod_{k=N}^{D+1} \text{sen} \gamma_k \hat{R}_{\gamma_D} \right] \\
& + \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=2}^{D-1} (j-1) \frac{\cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \left(\frac{\prod_{k=N}^{D+1} \text{sen} \gamma_k}{\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen} \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_j} \right] \\
& - \frac{\varphi}{a^2 f^2} \left[\sum_{j=1}^D \sum_{l=j+1}^N \left(\frac{\cos \gamma_l \prod_{k=N}^l \text{sen} \gamma_k \prod_{k=l-1}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k}{\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \right) \hat{R}_{\gamma_l} \right] = 0. \quad (2.4.73)
\end{aligned}$$

Como antes,

$$\tilde{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi \frac{w'}{w} [\dot{\varphi}^2 + \tau \varphi^2] + \frac{\varphi D}{a^2 f^2} \left[\prod_{k=N}^{D+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right] = 0, \quad (2.4.74)$$

mas os coeficientes de \hat{R}_{γ_N} a $\hat{R}_{\gamma_{D+1}}$ implicam que $\cos \gamma_N = \cos \gamma_{N-1} = \dots = \cos \gamma_{D+1} = 0$, isto é,

$$\gamma_N = \gamma_{N-1} = \dots = \gamma_{D+1} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.4.75)$$

já que a alternativa seria fazer um dos senos desses ângulos igual a zero, o que destruiria a estrutura interna do campo.

O coeficiente de \hat{R}_{γ_D} leva novamente a

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad f = e^{te}, \quad (2.4.76)$$

com os demais se anulando identicamente.

Pode-se agora mostrar que as 3 equações de campo, eqs.(2.4.69), (2.4.71) e (2.4.74), possuem a mesma forma, já que, no caso geral

$$\begin{aligned}
 \tau = \tau_{\mu\nu} h^{\mu\nu} &= \sum_{j=1}^{\min(N,D)} \left(\frac{\prod_{k=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k}{a^2 f^2 \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\min(N,D)} \frac{1}{a^2 f^2} \left[\prod_{k=\max(N,D)}^{\min(N,D)+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right]^{\frac{N-D}{|N-D|}} \\
 &= \frac{\min(N,D)}{a^2 f^2} \left[\prod_{k=\max(N,D)}^{\min(N,D)+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right]^{\frac{N-D}{|N-D|}}.
 \end{aligned} \tag{2.4.77}$$

Essa forma é a apresentada a seguir:

$$\ddot{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi \frac{w'}{w} \left[\dot{\varphi}^2 + \tau \varphi^2 \right] + \tau \varphi = 0. \tag{2.4.78}$$

Esse resultado pode ser ainda mais explorado para o caso $N < D$, onde não obtivemos a forma da $f(\gamma_D)$ nem qualquer restrição sobre ângulos. Com esse intuito, faz-se uma separação de variáveis na equação (2.4.78), colocando-se somente funções do tempo à esquerda e funções dos ângulos à direita,

$$\left[\ddot{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi \frac{w'}{w} \dot{\varphi}^2 \right] \frac{a^2}{\left(\varphi^3 \frac{w'}{w} + \varphi \right)} = \frac{N}{f^2 \prod_{k=D}^{N+1} \text{sen}^2 \gamma_k}. \tag{2.4.79}$$

Para que se realize a identidade, ambos os membros têm que ser iguais a uma constante.

Assim

$$f = \frac{1}{\text{sen} \gamma_D}, \tag{2.4.80}$$

e

$$\gamma_{D-1} = \dots = \gamma_{N+1} = c^{ie}. \tag{2.4.81}$$

Observe-se que essa mesma análise quando aplicada à eq.(2.4.74) leva à eq.(2.4.76), mas ainda não é capaz de especificar o valor dos ângulos como na eq.(2.4.75).

2.5 - Conservação do $T_{\mu\nu}$

O tensor energia-momentum para o campo multipletto está dado na eq.(2.2.23). A equação de conservação

$$g^{\mu\alpha} T_{\mu\nu||\alpha} = 0 \quad (2.5.82)$$

para esse tensor será

$$\begin{aligned} & - (\dot{\varphi}\ddot{\varphi}w + \varphi\dot{\varphi}^3 w')\delta_\nu^0 + g^{\mu\alpha} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0)_{||\alpha} \dot{\varphi}^2 w \\ & + \left(g^{\mu\alpha} \tau_{\mu\nu||\alpha} - \frac{1}{2} \tau_{|\nu} \right) \varphi^2 w + (2\varphi\dot{\varphi}w + 2\varphi^3 \dot{\varphi}w') \left(\tau_\nu^0 - \frac{1}{2} \delta_\nu^0 \tau \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.5.83)$$

Abrindo o 2º termo com a métrica da eq.(2.4.60),

$$g^{\mu\alpha} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0)_{||\alpha} = -g^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^0 \delta_\nu^0 + \Gamma_{\nu 0}^0 = -\Sigma_{j+1}^D \frac{h^{\gamma_j \gamma_j}}{2} (h_{\gamma_j \gamma_j})_{|0} \delta_\nu^0 = -D \frac{\dot{a}}{a} \delta_\nu^0, \quad (2.5.84)$$

a equação (2.5.83) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & - \dot{\varphi}w \left(\ddot{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi\dot{\varphi}^2 \frac{w'}{w} + \varphi^3 \frac{w'}{w} \tau + \varphi\tau \right) \delta_\nu^0 \\ & + \left(g^{\mu\alpha} \tau_{\mu\nu||\alpha} - \frac{1}{2} \tau_{|\nu} \right) \varphi^2 w = 0. \end{aligned} \quad (2.5.85)$$

Como a equação do campo escalar eq.(2.4.78) indica que o primeiro termo da eq.(2.5.85) se anula para quaisquer N e D , o segundo termo também o deve fazer para que a identidade de Bianchi seja satisfeita.

A componente temporal dessa equação,

$$g^{\mu\alpha} \tau_{\mu 0||\alpha} - \frac{1}{2} \tau_{|0} = 0, \quad (2.5.86)$$

é uma identidade, pois

$$g^{\mu\alpha} \tau_{\mu 0||\alpha} = -g^{\mu\alpha} \tau_{\mu\nu} \Gamma_{0\alpha}^\nu = -\tau^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \frac{\dot{a}}{a} = -\tau \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.5.87)$$

e, pela equação (2.4.77),

$$-\frac{1}{2} \tau_{|0} = \tau \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.5.88)$$

Para as demais componentes, temos que

$$g^{\gamma_j \gamma_j} \tau_{\gamma_j \gamma_j || \gamma_j} - \frac{1}{2} \tau_{|\gamma_j} = 0 \quad (\text{nenhuma soma em } \gamma_j), \quad (2.5.89)$$

e é necessário analisar para cada termo na equação acima a relação entre N e D separadamente. Assim

$$g^{\gamma_j \gamma_j} \tau_{\gamma_j \gamma_j || \gamma_j} = g^{\gamma_j \gamma_j} (\tau_{\gamma_j \gamma_j | \gamma_j} - 2\Gamma_{\gamma_j \gamma_j}^{\gamma_j} \tau_{\gamma_j \gamma_j}),$$

e como

$$\Gamma_{\gamma_j \gamma_j}^{\gamma_j} = \begin{cases} 0, & j < D, \\ \frac{f'}{f}, & j = D, \end{cases}$$

temos que, usando a eq.(2.1.9),

$$g^{\gamma_j \gamma_j} \tau_{\gamma_j \gamma_j} =$$

$$= -2 \frac{f'}{f} \tau_{\gamma_j \gamma_j} \delta_{\gamma_j \gamma_D} = \begin{cases} \left(\frac{-2f'}{a^2 f^3} \prod_{k=N}^{D+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right) \delta_{\gamma_j \gamma_D}, & N > D, \\ \left(\frac{-2f'}{a^2 f^3} \right) \delta_{\gamma_j \gamma_D}, & N = D, \\ 0, & N < D. \end{cases} \quad (2.5.90)$$

E utilizando a eq.(2.4.77):

$$p/N > D$$

$$\tau_{\gamma_j} = \left(\frac{-2D}{a^2} \frac{f'}{f^3} \prod_{k=N}^{D+1} \text{sen}^2 \gamma_k \right) \delta_{\gamma_j \gamma_D},$$

$$p/N = D$$

$$\tau_{\gamma_j} = \left(\frac{-2D}{a^2} \frac{f'}{f^3} \right) \delta_{\gamma_j \gamma_D}, \quad (2.5.91)$$

$$p/N < D$$

$$\tau_{\gamma_j} = \begin{cases} \frac{N}{a^2 f^2 \prod_{k=D}^{N+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \left(-\frac{2 \cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \right), & N < j < D, \\ \frac{N}{a^2 f^2 \prod_{k=D}^{N+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \left(-\frac{2f'}{f} - \frac{2 \cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \right), & j = D. \end{cases}$$

Reunindo todos esses termos na eq.(2.5.89) chegamos às seguintes expressões:

$$p/N > D$$

$$\frac{(D-2)}{a^2} \frac{f'}{f^3} \prod_{k=N}^{D+1} \text{sen}^2 \gamma_k = 0,$$

$$p/N = D$$

$$\frac{(D-2)}{a^2} \frac{f'}{f^3} = 0,$$

$p/N < D$

$$j = D \rightarrow \frac{-2N}{a^2 f^2 \prod_{k=D}^{N+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \left(\frac{f'}{f} + \frac{\cos \gamma_D}{\text{sen} \gamma_D} \right) = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{\text{sen} \gamma_D},$$

$$N < j < D \rightarrow \frac{-2N}{a^2 f^2 \prod_{k=D}^{N+1} \text{sen}^2 \gamma_k} \left(\frac{\cos \gamma_j}{\text{sen} \gamma_j} \right) = 0 \Rightarrow \gamma_j = \frac{\pi}{2}. \quad (2.5.92)$$

As duas primeiras expressões não trazem nenhuma nova restrição em relação às que já foram obtidas para esses casos na equação de campo. E quando $N < D$ obtemos as restrições que já tinham sido esboçadas nas equações (2.4.80) e (2.4.81), sendo que agora fica confirmado que a constante da eq.(2.4.81) é de fato $\frac{\pi}{2}$.

As restrições obtidas até agora decorreram apenas da equação para o campo escalar e da identidade de Bianchi. Elas formam um conjunto mínimo de condições de compatibilidade entre as esferas S^N dos campos de Higgs e as S^D do espaço-tempo. Ora elas promovem cortes nas esferas do espaço interno, ora no espaço externo, deformando suas estruturas. Além disso ficam especificadas as funções $f(\gamma_D)$ da métrica em cada caso. As equações de Einstein irão especificar $a(t)$, $w(\varphi^2)$ e $\varphi(t)$.

Abaixo são resumidas essas restrições e mostradas as formas específicas de $\tau_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ e τ em cada caso:

$p/N > D$

$$f = 1, \quad \gamma_N = \dots = \gamma_{D+1} = \frac{\pi}{2}, \quad \tau = \frac{D}{a^2},$$

$$g_{\gamma_i \gamma_j} = a^2 \tau_{\gamma_i \gamma_j} = a^2 \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k; \quad (2.5.93)$$

$$p/N = D$$

$$f = 1 \quad , \quad \tau = \frac{D}{a^2},$$

$$g_{\tau_j \tau_j} = a^2 \tau_{\tau_j \tau_j} = a^2 \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k; \quad (2.5.94)$$

$$p/N < D$$

$$f = \frac{1}{\text{sen} \gamma_D} \quad , \quad \gamma_{D-1} = \dots = \gamma_{N+1} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tau = \frac{N}{a^2},$$

$$g_{\tau_j \tau_j} = a^2 \begin{cases} \frac{1}{\text{sen}^2 \gamma_D} & j = D, \\ 1 & D > j \geq N, \\ \prod_{k=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k & N > j, \end{cases} \quad (2.5.95)$$

$$\tau_{\tau_j \tau_j} = \begin{cases} 0 & D \geq j > N, \\ \prod_{k=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k & N \geq j. \end{cases}$$

Como se observa, os casos $N > D$ e $N = D$ têm uma mesma natureza e a partir de agora serão tratados conjuntamente ($N \geq D$). Além disso, a eq.(2.4.77) para a forma geral de τ torna-se

$$\tau = \frac{\min(N, D)}{a^2}. \quad (2.5.96)$$

3 - O Campo Escalar Multipleteo como Fonte na Dinâmica de Einstein (D+1)-Dimensional

Nesta seção analisaremos separadamente os casos $N \geq D$ e $N < D$.

3.1 - $N \geq D$ - Estrutura FLRW

Neste caso temos uma estrutura espacial compacta isotrópica na qual está presente um fluido perfeito ($\Pi_{\mu\nu} = 0$, ver eq.(2.2.29)) realizado por um campo escalar $(N + 1)$ -pleto. O tensor de Einstein será aquele calculado nas eqs.(1.39) e (1.40) e o tensor energia-momentum aquele obtido da eq.(2.2.23) quando substituídos os resultados da eq.(2.5.94). As equações de Einstein, com índices mistos, poderão ser escritas então como:

$$\frac{D(D-1)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{D(D-1)}{2a^2} = kw \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{D\varphi^2}{2a^2} \right), \quad (3.1.1)$$

$$(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-2)(D-1)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{(D-2)(D-1)}{2a^2} = kw \left(\frac{-\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(D-2)\varphi^2}{2a^2} \right), \quad (3.1.2)$$

que juntas com a equação de campo (2.4.78),

$$\ddot{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \varphi \frac{w'}{w} \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{D\varphi^2}{a^2} \right] + \frac{D\varphi}{a^2} = 0, \quad (2.4.78)$$

formam um sistema para w , φ e a . No entanto pode ser mostrado que uma dessas equações é obtida a partir das outras duas. A escolha de se fixar w em função de φ é a mais natural, e com esse intuito a equação do campo escalar é reescrita na forma

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + D\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{w}}{2w} + \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\dot{w}}{2w}\right)\frac{D\varphi^2}{a^2\dot{\varphi}^2} = 0, \quad (3.1.3)$$

Essa liberdade em w pode agora ser utilizada para simplificar o sistema de equações, e fica claro pela expressão acima que a escolha mais óbvia é a de anular o termo entre parênteses,

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{-\dot{w}}{2w} \Rightarrow w(\varphi^2) = \frac{D-1}{k\varphi^2}, \quad (3.1.4)$$

onde a constante arbitrária de integração foi escolhida igual a $\frac{D-1}{k}$.

É oportuno fazermos uma rápida observação aqui. Como já foi comentado após as equações (2.1.10) e (2.1.11), a existência de estrutura interna fez surgir um termo extra na lagrangiana em relação à de um campo escalar singlete. Na equação (2.2.23) confirmamos que, de fato, esse termo fornece ao tensor energia-momento, entre outras coisas, algo com um comportamento análogo ao de um potencial para um campo singlete na forma $\tau\varphi^2 w$. Mais do que isso, vemos que ao substituirmos a expressão para τ da eq.(2.5.94) e para w da eq.(3.1.4) esse fator é na verdade uma “constante cosmológica efetiva” proporcional ao inverso do quadrado do fator de escala,

$$\lambda_{ef} = \frac{D(D-1)}{2a^2(t)}. \quad (3.1.5)$$

Uma constante cosmológica com essa dependência acima em um espaço-tempo FLRW fechado foi proposta há algum tempo (56, 57) como uma forma de resolver alguns dos problemas do modelo padrão. É interessante então que esse termo apareça aqui da estrutura interna de uma forma natural. No entanto, as conclusões dessas referências não podem ser estendidas integralmente ao caso presente pois outras contribuições, além da constante cosmológica da eq.(3.1.5), surgem no $T_{\mu\nu}$.

Também o fato de terem sido encontradas soluções cosmológicas de expansão eterna nas referências 56 e 57 para um FLRW com curvatura positiva não representa uma violação à conjectura de recolapso para universos fechados. Apesar da colocação arbitrária dessa constante cosmológica, isso não significa que ela possa ser excluída das condições de energia, como é imposto na formulação da conjectura. Se então a excluíssemos das condições de energia, seguiria o resultado obtido por Wald (7), que mostrou que os Bianchi IX podem expandir-se sempre mediante uma escolha adequada da constante cosmológica, para violar trivialmente a conjectura de recolapso.

Prosseguindo na solução das equações de campo, são escolhidas como as duas equações independentes a do campo escalar e uma combinação das duas de Einstein, respectivamente

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + D \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(D-1)}{D} \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}, \quad (3.1.7)$$

com a expressão da eq.(3.1.4) para w já substituída. A integral primeira da equação (3.1.6) fornece

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = A_1 a^{-D}, \quad A_1 > 0, \quad (3.1.8)$$

que, quando substituída na eq.(3.1.7) indica que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(D-1)}{D} A_1^2 a^{-2D}. \quad (3.1.9)$$

A solução da eq.(3.1.9) é da forma

$$a(t) = \left(\sqrt{D}A_1 t + A_2 \right)^{\frac{1}{D}} = A(t - t_0)^{\frac{1}{D}}, \quad (3.1.10)$$

mediante redefinição de constantes. A solução para φ é obtida substituindo a eq.(3.1.10) na eq.(3.1.8):

$$\varphi(t) = B(t - t_0)\sqrt{1/D}. \quad (3.1.11)$$

A conclusão obtida da equação (3.1.10) é que o universo FLRW com topologia fechada S^D não precisa de fato recolapsar, o que a análise de um fluido perfeito com uma equação de estado fixa já havia indicado. Além disso nenhuma das condições de energia é violada.

Esse resultado contraria a conjectura de que universos com topologia fechada simples (S^3 ou $S^1 \times S^2$) obrigatoriamente recolapsariam se satisfizessem as condições de energia (4, 37, 38).

E, principalmente, ele mostra que uma demonstração do teorema “no-hair” cosmológico não deve prescindir dos casos de universos fechados e que sua exclusão não pode ser encarada, como já foi dito antes, como algo natural.

Deve ser realçado que esse é o exemplo mais simples possível dentro do contexto de campos com simetria interna como fontes de gravitação e seu efeito já se mostra bastante divergente em relação ao caso de um campo escalar puro. O estudo de estruturas mais complexas é um dos objetivos futuros desta linha de trabalho.

Para concluir o estudo deste fluido em particular, são calculadas as formas explícitas para a densidade de energia ρ e pressão P , equações (2.2.24) e (2.2.25):

$$\rho = \frac{D-1}{2kD} \frac{1}{(t-t_0)^2} + \frac{D(D-1)}{2kA^2} \frac{1}{(t-t_0)^{2/D}}, \quad (3.1.12)$$

$$P = \frac{D-1}{2kD} \frac{1}{(t-t_0)^2} - \frac{(D-1)(D-2)}{2kA^2} \frac{1}{(t-t_0)^{2/D}}. \quad (3.1.13)$$

Admitindo uma equação de estado tipo lei-gama, eq.(1.28), mostra-se que

$$\gamma(t) = 2 \left[\frac{1+g(t)}{1+Dg(t)} \right], \quad g(t) = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^2 a^2}. \quad (3.1.14)$$

No limite em que $t \rightarrow t_0$, temos que $g(t) \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow 2$; para $t \rightarrow \infty$, $g(t) \rightarrow \infty$ e $\gamma \rightarrow \frac{2}{D}$. Assim esse campo escalar descreve um fluido com equação de estado dependente do tempo variando entre os limites

$$2 \geq \gamma \geq \frac{2}{D}. \quad (3.1.15)$$

Aqui observamos mais um resultado diferente do que é obtido com um campo escalar singlete com um potencial $V(\phi)$, cuja equação de estado varia entre os limites (53, 54)

$$2 \geq \gamma \geq 0. \quad (3.1.16)$$

O limite $\gamma = 2$ corresponde a equação de estado $P = \rho$ conhecida como equação de “stiff matter”, primeiro analisada por Zel’dovitch (51) e representando matéria num estado ultra-denso. Zel’dovitch (51) e Barrow (52) argumentaram a favor de uma equação de estado desse tipo nos estágios primordiais da expansão.

3.2 - $N < D$ - Estrutura Anisotrópica

Aqui serão apresentados os Christoffels não nulos e as componentes do tensor de Einstein com índices mistos calculados a partir da métrica na eq.(2.5.95):

$$\Gamma_{\gamma_j \gamma_j}^0 = \begin{cases} a\dot{a}\prod_{k=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k, & N > j, \\ a\dot{a}, & D \geq j \geq N, \end{cases}$$

$$\Gamma_{\gamma_j 0}^{\gamma_j} = \frac{\dot{a}}{a} \quad ; \quad \Gamma_{\gamma_l \gamma_j}^{\gamma_l} = -\frac{\cos \gamma_l}{\text{sen} \gamma_l} \prod_{k=l}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k, \quad j < l \leq N,$$

$$\Gamma_{\gamma_l \gamma_j}^{\gamma_j} = \frac{\cos \gamma_l}{\text{sen} \gamma_l}, \quad j < l \leq N; \quad (3.2.17)$$

$$G_{\gamma_j}^{\gamma_j} = \begin{cases} -(D-1)\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(D-1)(D-2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{N(N-1)}{2} \frac{1}{a^2}, & D \geq j > N, \\ -(D-1)\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(D-1)(D-2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} \frac{1}{a^2}, & N \geq j \geq 1, \end{cases}$$

$$G_0^0 = -\frac{D(D-1)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{N(N-1)}{2} \frac{1}{a^2}. \quad (3.2.18)$$

Quando $D = N+1$, a métrica na eq.(2.5.95) possui a forma de um Kantowski-Sachs (58-61) degenerado $(D+1)$ -Dimensional*, com a seção espacial possuindo topologia $R^1 X S^{D-1}$. Em geral, a topologia da seção espacial terá a forma $R^1 X S^1 X \cdots X S^1 X S^N$.

Com o $T_{\mu\nu}$ da equação (2.2.23), podemos escrever as equações de Einstein:

* A transformação $\chi = \int \frac{d\gamma_D}{\text{sen} \gamma_D}$ coloca a métrica, eq.(2.5.95), na forma padrão:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 [d\chi^2 + (d\Omega_N)^2], \quad \text{para } D = N+1,$$

onde $(d\Omega_N)^2$ é o elemento de linha da esfera S^N .

$$\frac{D(D-1)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{N(N-1)}{2a^2} = \frac{kw\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{kNw\varphi^2}{2a^2}, \quad (3.2.19)$$

$$(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)(D-2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{N(N-1)}{2a^2} = -\frac{kw\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{kNw\varphi^2}{2a^2}, \quad (3.2.20)$$

$$(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-1)(D-2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{2a^2} = \frac{-kw\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k(N-2)w\varphi^2}{2a^2}, \quad (3.2.21)$$

que, junto com a equação de campo (2.4.78) formam um sistema ** para a , φ e w . De imediato, subtraindo-se a eq.(3.2.20) da eq.(3.2.21), obtemos a expressão para w ,

$$w(\varphi^2) = \frac{N-1}{k\varphi^2}, \quad (3.2.22)$$

que é justamente a forma funcional de w que havia sido escolhida no caso $N \geq D$, reforçando a coerência do raciocínio que levou à eq.(3.1.4).

A partir deste resultado, podemos mostrar que das três equações restantes apenas duas são de fato independentes. As escolhidas para representar o sistema serão a do campo escalar, eq.(2.4.78), e a eq.(3.2.19), com a expressão para w já substituída:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + D \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = 0, \quad (3.2.23)$$

$$D(D-1) \frac{\dot{a}^2}{a^2} = (N-1) \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}. \quad (3.2.24)$$

** Observe-se que, para um tensor energia-momentum de fluido perfeito descrito, por exemplo, por um campo escalar singlete com um potencial de auto-interação, as equações de Einstein no caso de uma geometria Kantowski-Sachs degenerada são incompatíveis. A presença da estrutura interna é fundamental para a solução do sistema.

Como no caso $N \geq D$, a integral da equação do campo é

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = A_1 a^{-D} \quad , \quad A_1 > 0, \quad (3.2.25)$$

que, quando substituída na eq.(3.2.24), indica uma solução para $a(t)$ na forma

$$a(t) = (A_1 f t + A_2)^{1/D} = \Lambda(t - t_0)^{1/D}, \quad (3.2.26)$$

com $f = \left[\frac{(N-1)D}{D-1} \right]^{\frac{1}{2}}$, idêntica a que tínhamos anteriormente. A solução para φ é

$$\varphi(t) = B(t - t_0)^{1/J}. \quad (3.2.27)$$

Assim, também aqui encontramos uma solução não reolapsante.

Utilizando novamente as expressões na eq.(2.2.13), a mesma decomposição invariante realizada para o tensor energia-momentum pode ser feita para

$$V_{\mu||\nu} = w_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{\theta}{D} h_{\mu\nu} - a_{\mu} V_{\nu}, \quad (3.2.28)$$

onde:

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{2} V_{[\mu||\alpha} h_{\nu]}^{\alpha} \quad (3.2.29)$$

é a vorticidade;

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} V_{(\mu||\alpha} h_{\nu)}^{\alpha} - \frac{1}{D} V_{||\alpha}^{\alpha} h_{\mu\nu} \quad (3.2.30)$$

é o "shear", já definido por expressão equivalente na eq.(1.11);

$$\theta = V_{||\alpha}^{\alpha} \quad (3.2.31)$$

é a expansão, igualmente já definida na eq.(1.10) e então denominada por K ; e

$$a_\mu = V_{\mu||\alpha} V^\alpha \quad (3.2.32)$$

é a aceleração.

As seguintes propriedades desses elementos são observadas:

$$a_\mu V^\mu = w_{\mu\nu} V^\mu = \sigma_{\mu\nu} V^\mu = w_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0, \quad (3.2.33)$$

e, em particular,

$$\sigma_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0, \quad (3.2.34)$$

i.e., o tensor de “shear” tem traço nulo.

Para a métrica da eq.(2.5.95), $V_\mu = \delta_\mu^0$ e podemos calcular $\sigma_{\mu\nu}$ pela eq.(3.2.30):

$$\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\alpha}^0 h_\nu^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^0 h_\mu^\alpha) + \frac{1}{D}\Gamma_{0\alpha}^\alpha h_{\mu\nu} = \left(-\Gamma_{\gamma_j\gamma_j}^0 + \frac{1}{D}\Sigma_{\gamma_i}\Gamma_{0\gamma_i}^{\gamma_i} h_{\gamma_j\gamma_j}\right)\delta_\mu^{\gamma_j}\delta_\nu^{\gamma_j},$$

e utilizando a eq.(3.2.17),

$$\sigma_{\gamma_D\gamma_D} = \frac{-a\dot{a}}{\text{sen}^2\gamma_D} + \frac{1}{D}\left(\frac{D\dot{a}}{a}\right)\frac{a^2}{\text{sen}^2\gamma_D} = 0,$$

$$\sigma_{\gamma_j\gamma_j} = \begin{cases} -a\dot{a} + \frac{1}{D}\left(\frac{D\dot{a}}{a}\right)a^2 = 0, & D > j > N, \\ -a\dot{a}\Pi_{k=N}^{j+1}\text{sen}^2\gamma_k + \frac{1}{D}\left(\frac{D\dot{a}}{a}\right)a^2\Pi_{k=N}^{j+1}\text{sen}^2\gamma_k = 0, & N \geq j, \end{cases}$$

e obviamente $\sigma_{00} = \sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Assim para a métrica eq.(2.5.95) vale o resultado:

$$\sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (3.2.35)$$

independentemente de D ou N (desde que N seja menor que D obviamente). Em particular, no caso $D = N + 1$, o Kantowski-Sachs degenerado generalizado, temos o tensor de “shear” nulo. De fato, escrevendo o caso mais geral como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2 + b^2(t)(d\Omega_N)^2 \quad (3.2.36)$$

obtemos um “shear” não nulo:

$$\begin{aligned} \sigma_{00} = \sigma_{ij} = 0 \quad , \quad i \neq j, \\ \sigma_{\gamma_D \gamma_D} = \frac{(D-1)}{D} \left[\frac{\dot{b}a^2}{b} - \dot{a}a \right], \\ \sigma_{\gamma_j \gamma_j} = \frac{1}{D} \left[\frac{\dot{a}b^2}{a} - \dot{b}b \right] \prod_{k=N}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k, \quad D > j, \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

mas que quando $a = b$, o caso degenerado, possui todas as componentes iguais a zero.

Esse resultado mostra que a anulação do “shear” não garante a isotropia do espaço.

De fato, um espaço D -dimensional para ser isotrópico precisa admitir um grupo máximo de simetrias. Isso pode ser entendido na seguinte forma, já que isotropia implica na existência:

A) de um grupo de isometrias que realize a rotação de todo o espaço em torno de um dado ponto, i.e., que o espaço seja esfericamente simétrico em torno desse dado ponto e esse grupo então tem dimensão igual a $\frac{D(D-1)}{2}$;

B) e de um grupo de “translações” que leve essa simetria a todos os pontos do espaço e esse grupo é D -dimensional.

O grupo total de isometrias para um espaço isotrópico possui então $\frac{D(D-1)}{2} + D = \frac{D(D+1)}{2}$ dimensões. E pode ser demonstrado que essa é a dimensão máxima que um

grupo de isometrias pode ter num espaço D -dimensional (ver, por exemplo, a referência 62, Cap. XIII). Aliás, a condição B implica que um espaço isotrópico é obrigatoriamente homogêneo.

O Kantowski-Sachs D -dimensional não admite um grupo máximo de isometrias (a não ser num caso patológico *), apesar de ser um espaço homogêneo, o único além dos Bianchi no caso $D = 3$. O grupo de isometrias das seções espaciais que possui é, em geral, $R^1 \otimes SO(D)$, portanto de dimensão $\frac{D^2 - D + 2}{2}$ (para $D > 2$), menor que o número máximo possível. A estrutura topológica da variedade de cobertura dessas seções ** é $R^1 \times S^{D-1}$, sendo que $SO(D)$ atua de forma multiplamente transitiva sobre as esferas S^{D-1} (sendo esse o fato que o exclui da classificação de Bianchi, o de não ter nenhum subgrupo no seu grupo de isometrias que atue de forma simplesmente transitiva sobre todo o espaço tridimensional (61)).

Isso pode ser confirmado calculando-se os vetores de Killing para as seções espaciais do Kantowski-Sachs a 3 dimensões a partir da equação de Killing (62)

$$\xi_{k||j} + \xi_{j||k} = 0. \quad (3.2.38)$$

Os vetores obtidos com a métrica do Kantowski-Sachs degenerado são

* No caso patológico de $D = 2$, o grupo de isometrias para o Kantowski-Sachs generalizado tem dimensão máxima ($Dim = 3$) como aliás tem que ser para qualquer espaço homogêneo a duas dimensões (63) (a sua topologia será a de um cilindro: $R^1 \times S^1$).

** outras topologias podem ser obtidas por identificação de pontos (64).

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \text{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \text{cot}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\xi^2 &= \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \text{cot}\theta \text{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\xi^3 &= \frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\xi^4 &= \frac{\partial}{\partial\chi},
\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

que satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned}
[\xi^1, \xi^2] &= \xi^3, \quad [\xi^2, \xi^3] = \xi^1, \quad [\xi^3, \xi^1] = \xi^2, \\
[\xi^4, \xi^1] &= [\xi^4, \xi^2] = [\xi^4, \xi^3] = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Existem, portanto, apenas 4 vetores de Killing em $D = 3$, número menor que o requerido para um espaço isotrópico.

Outro critério normalmente encontrado na literatura é que um espaço para ser isotrópico tem que ser um espaço de curvatura constante (20). No entanto demonstra-se que o critério anterior implica neste, i.e., que a existência de $D(D+1)/2$ vetores de Killing em um espaço D -dimensional implica que este espaço possui curvatura constante. Com esse intuito, começamos escrevendo

$$\xi_{i||j||k} - \xi_{i||k||j} = R^l_{ijk} \xi_l, \tag{3.2.41}$$

que implica que

$$\begin{aligned}
&\xi_{i||j||k} - \xi_{i||k||j} + \xi_{j||k||i} - \xi_{j||i||k} + \xi_{k||i||j} - \xi_{k||j||i} \\
&= \xi_l (R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

pela simetria do tensor de Riemann.

Se ξ_k é um vetor de Killing, então substituindo a eq.(3.2.38) na equação acima obtemos

$$\xi_{i||j||k} - \xi_{i||k||j} - \xi_{k||j||i} = 0, \quad (3.2.43)$$

e então a eq.(3.2.41) pode ser reescrita como

$$\xi_{k||j||i} = R_{ijk}^l \xi_l. \quad (3.2.44)$$

O que essa equação mostra é que derivadas segunda e superiores dos vetores de Killing num dado ponto podem ser obtidas a partir dos valores dos próprios vetores de Killing e suas derivadas primeira nesse ponto. Esses valores podem ser encarados como o conjunto de condições iniciais que especificam univocamente os vetores. Como existem no máximo D componentes independentes em ξ_j e $\frac{D(D-1)}{2}$ em $\xi_{j||k}$ (pela propriedade na eq.(3.2.38)), vemos que o número máximo dos vetores de Killing em um espaço D dimensional é $\frac{D(D+1)}{2}$ como havia sido afirmado anteriormente (62).

Prosseguindo, a condição de integrabilidade para a eq.(3.2.44) é

$$\xi_{i||j||k||l} - \xi_{i||j||l||k} = \xi_{i||m} R_{jkl}^m + \xi_{m||j} R_{ikl}^m, \quad (3.2.45)$$

que pelas eqs.(3.2.44) e (3.2.38) é reescrita como

$$\xi_m (R_{kij||l}^m - R_{lij||k}^m) + \xi_{m||n} (\delta_l^n R_{kij}^m - \delta_k^n R_{lij}^m - \delta_i^n R_{jkl}^m + \delta_j^n R_{ikl}^m) = 0 \quad (3.2.46)$$

Pelo que foi observado acima, um espaço de simetria máxima implica na independência das componentes de ξ_m e $\xi_{m||n}$, e para que a expressão acima se anule é necessário que os coeficientes destes termos se anulem identicamente (lembrando que a parte simétrica em mn no segundo termo se anula pela propriedade de anti-simetria de $\xi_{m||n}$ pela eq.(3.2.38)):

$$R_{kij||l}^m - R_{lij||k}^m = 0, \quad (3.2.47)$$

$$\delta_l^n R_{kij}^m - \delta_l^m R_{kij}^n - \delta_k^n R_{lij}^m + \delta_k^m R_{lij}^n - \delta_i^n R_{jkl}^m + \delta_i^m R_{jkl}^n + \delta_j^n R_{ikl}^m - \delta_j^m R_{ikl}^n = 0. \quad (3.2.48)$$

Contraindo os índices livres l e n na eq.(3.2.48) obtemos que

$$(D-2)R_{kij}^m - R_{jki}^m - R_{ijk}^m - (\delta_i^m R_{jk} - \delta_j^m R_{ik}) = 0, \quad (3.2.49)$$

ou

$$R_{mkij} = \frac{1}{D-1}(g_{mi}R_{jk} - g_{mj}R_{ik}). \quad (3.2.50)$$

Fazendo agora $m = k$, vemos que

$$g_{ki}R_{jk} - g_{kj}R_{ik} = 0, \quad (3.2.51)$$

de onde se conclui que

$$R_{ij} = f(x^\alpha)g_{ij}. \quad (3.2.52)$$

Essa expressão, quando substituída na eq.(3.2.50), fornece

$$R_{ijkl} = K(x^\alpha)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad (3.2.53)$$

onde $K(x^\alpha) = \frac{f(x^\alpha)}{D-1}$. Derivando em relação a m e tomando a permutação cíclica de klm :

$$\begin{aligned}
& K_{|m} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + K_{|k} (g_{il} g_{jm} - g_{im} g_{jl}) + K_{|l} (g_{im} g_{jk} - g_{ik} g_{jm}) \\
& = R_{ijkl||m} + R_{ijlkm||k} + R_{ijmkl||l} = 0,
\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

pela identidade de Bianchi. Contraindo com $g^{ik} g^{jl}$ chegamos finalmente a

$$\frac{\partial K(x^a)}{\partial x^m} (D - 2)(D - 1) = 0. \tag{3.2.55}$$

Assim para $D > 2$, a equação acima implica que K é uma constante e, então, a eq.(3.2.53) identifica este espaço como de curvatura constante, como se queria demonstrar (65). A passagem que leva da eq.(3.2.53) à eq.(3.2.55) é uma demonstração do teorema de Schur, que afirma que se um espaço é isotrópico, com $D > 2$, ele é obrigatoriamente homogêneo (65), como já havia sido dito anteriormente.

Para reafirmar a anisotropia dos Kantowski-Sachs generalizados degenerados, eq.(2.5.95), observamos que as únicas componentes não nulas do tensor de Riemann para as hipersuperfícies D-dimensionais espaciais são

$${}^{(D)}R_{\gamma_l \gamma_j \gamma_l \gamma_j} = a^2(t) \Pi_{k=D-1}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \Pi_{k=D-1}^{l+1} \text{sen}^2 \gamma_k \quad , \quad l, j < D. \tag{3.2.56}$$

Para um dado tempo t , o que a expressão acima mostra é que essas hipersuperfícies não são de curvatura constante, já que ela não pode ser escrita na forma da eq.(3.2.53) para um único K . Isto é, as curvaturas seccionais dos espaços de métrica Kantowski-Sachs são constantes (não dependem do ponto sobre a hipersuperfície), mas são distintas ao longo de diferentes direções:

$$\begin{aligned}
& {}^{(D)}R_{\gamma_D \gamma_j \gamma_D \gamma_j} = 0, \\
& {}^{(D)}R_{\gamma_l \gamma_j \gamma_l \gamma_j} = \frac{1}{a^2(t)} g_{\gamma_l \gamma_l} g_{\gamma_j \gamma_j}, \quad l, j < D.
\end{aligned} \tag{3.2.57}$$

Com base nesses resultados, foi argumentado que, dentre os espaços homogêneos, apenas aqueles que possuíssem os FLRW como casos particulares poderiam se isotropizar, pois somente para eles teríamos a possibilidade de igualar as curvaturas seccionais e fazê-las constantes. Em particular, uma cosmologia Kantowski-Sachs nunca se tornaria isotrópica (32), mesmo no caso degenerado.

No entanto, foi estabelecido um critério menos restritivo de isotropização. Observando a eq.(3.2.57), vemos que se quando $t \rightarrow \infty$ tivermos $a(t) \rightarrow \infty$, conseguiremos que $R_{\gamma_i}^{\gamma_i} \rightarrow R_{\gamma_b}^{\gamma_b} = 0$. Pode-se então falar de universos assintoticamente isotrópicos. Na verdade, esse foi o conceito utilizado no capítulo 1 quando da demonstração do teorema “no-hair”, através do resultado da eq.(1.26). Somente nesse sentido estar-se-ia falando de isotropização de cosmologias inhomogêneas (ou mesmo de um Bianchi em geral).

No entanto, em cosmologia, o critério de igualdade assintótica das curvaturas seccionais não é suficiente. Basta notarmos que um Kantowski-Sachs, eq.(3.2.36), pode ter todas as suas curvaturas espaciais se anulando assintoticamente se $b(t) \rightarrow \infty$ independente do comportamento de $a(t)$. O mesmo acontece para um Bianchi I, com as curvaturas nulas mas com $a(t) \neq b(t) \neq c(t)$.

O critério igualmente necessário para a garantia da isotropização assintótica é a anulação do “shear”. Ele faz com que tenhamos $a(t) \rightarrow b(t)$ no caso do Kantowski-Sachs, por exemplo, e também aparece na demonstração do teorema “no-hair” na eq.(1.24). Obviamente, como vimos argumentando até aqui, esse critério não é suficiente se não tomado em conjunto com o da igualdade das curvaturas seccionais, fato não observado em alguns trabalhos lidando com modelos Kantowski-Sachs (10,11) (ver referência 66 para outros detalhes dessa discussão).

A obtenção de uma solução anisotrópica, apesar da anulação do “shear”, não era

realmente inesperada, já que a própria fonte neste caso $N < D$ é anisotrópica. Isto foi rapidamente mencionado na eq.(2.2.30) e agora será analisado mais detidamente.

As eqs.(2.2.24) a (2.2.27) mostram a estrutura deste fluido, e, ao serem substituídos os resultados das eqs.(2.5.95), (3.2.22), (3.2.26) e (3.2.27), assumem a forma:

$$\rho = \frac{(N-1)}{2k} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} + \frac{N}{a^2} \right] = \frac{(N-1)}{2k} \left[\frac{1}{f^2(t-t_0)^2} + \frac{N}{A^2(t-t_0)^{\frac{2}{D}}} \right], \quad (3.2.58)$$

$$P = \frac{(N-1)}{2k} \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} + \frac{(2-D)N}{Da^2} \right] = \frac{(N-1)}{2k} \left[\frac{1}{f^2(t-t_0)^2} - \frac{(D-2)N}{DA^2(t-t_0)^{\frac{2}{D}}} \right], \quad (3.2.59)$$

$$\Pi_{\mu}^{\nu} = \frac{(N-1)}{k} \left[\tau_{\mu}^{\nu} - \frac{N h_{\mu}^{\nu}}{Da^2} \right] \rightarrow \Pi_0^0 = \Pi_{\gamma_j}^{\gamma_j} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\Pi_{\gamma_j}^{\gamma_j} = \begin{cases} -\frac{(N-1)N}{kD} \frac{1}{A^2(t-t_0)^{\frac{2}{D}}}, & D \geq j > N, \\ \frac{(N-1)(D-N)}{kD} \frac{1}{A^2(t-t_0)^{\frac{2}{D}}}, & N \geq j, \end{cases} \quad (3.2.60)$$

$$q_{\mu} = 0. \quad (3.2.61)$$

O fluido apresenta um desvio do equilíbrio pela presença da pressão anisotrópica não nula.

É interessante observar que esse resultado contraria a termodinâmica de fluidos de Eckart (55). Esta teoria estabelece relações lineares entre as variáveis termodinâmicas fora do equilíbrio e as variáveis hidrodinâmicas que aparecem na eq.(3.2.28). A relação para a pressão anisotrópica é (55, 67)

$$\Pi_{\mu\nu} = -2\eta\sigma_{\mu\nu}, \quad (3.2.62)$$

onde $\sigma_{\mu\nu}$ é o tensor de “shear”, eq.(3.2.30); o coeficiente η é denominado viscosidade de “shear” e é positivo, não podendo se anular (ver, por exemplo, a referência 67).

Obviamente, a pressão anisotrópica obtida na eq.(3.2.60) não satisfaz essa relação, já que o “shear”, pela eq.(3.2.35), é nulo.

Porém, a teoria de Eckart apresenta problemas graves como, por exemplo, a previsão de propagação de perturbações com velocidade infinita. Com o intuito de corrigi-los foi desenvolvida primeiramente por Israel (69, 70) e, posteriormente, obtida de forma alternativa por outros autores (68, 71, 72), uma teoria termodinâmica relativística que tinha um comportamento causal. As chamadas equações fenomenológicas por eles obtidas relacionando as variáveis termodinâmicas e hidrodinâmicas são agora equações diferenciais para as primeiras. Para Israel, a eq.(3.2.62) é então substituída por (69)

$$\Pi_{\mu\nu} = -2\eta\sigma_{\mu\nu} - \zeta\Pi_{\mu\nu||\alpha}V^\alpha + \left[h_{(\mu}^\alpha h_{\nu)}^\beta - \frac{1}{D}h_{\mu\nu}h^{\alpha\beta} \right] (Aq_{\alpha||\beta} + Bq_\alpha a_\beta + 2\zeta\Pi_\alpha^\gamma w_{\beta\gamma}), \quad (3.2.63)$$

onde a_β e $w_{\beta\gamma}$ são a aceleração e a vorticidade definidas nas eqs.(3.2.32) e (3.2.29), respectivamente. Como se observa, aqui a anulação do “shear” não implica na anulação da pressão anisotrópica.

Para a métrica da eq.(2.5.95), com $V_\mu = \delta_\mu^0$, temos, pelas eqs.(3.2.32) e (3.2.29), que

$$a_\mu = -\Gamma_{\mu 0}^0 = 0, \quad (3.2.64)$$

e

$$w_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\alpha}^0 h_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^0 h_\mu^\alpha) = 0. \quad (3.2.65)$$

Como q_μ e $\sigma_{\mu\nu}$ são também nulos, tendo sido calculados nas eqs.(3.2.61) e (3.2.35), a eq.(3.2.63) passa a ser uma expressão para a determinação do coeficiente de relaxamento ζ :

$$\Pi_{\mu\nu} = -\zeta(\Pi_{\mu\nu|0} - \Pi_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu 0}^\alpha - \Pi_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu 0}^\alpha) \quad (3.2.66)$$

A solução da eq.(3.2.66), a partir da eq.(3.2.60) e dos Christoffels da eq.(3.2.17), fornece para o coeficiente ζ ,

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{a}{\dot{a}} = \frac{D}{2}(t - t_0). \quad (3.2.67)$$

É interessante observar da eq.(3.2.67) que a pressão anisotrópica obtida das fontes de campo escalar multipletto $SO(N + 1)$, $N < D$ é compatibilizada com a teoria causal de Israel quando o coeficiente de relaxamento é relacionado com a idade do Universo. Ressaltamos isto, conjuntamente com a inadequação da teoria de Eckart, como uma das principais características das estruturas de simetria interna que temos analisado. Estas portanto exigem a introdução de uma teoria correta (causal) de fluidos dissipativos.

4 - Soluções de Sólitons com um Campo Escalar Multiplete

Até aqui viemos realizando uma parametrização entre o chamado espaço interno de $\hat{\phi}$ e as seções espaciais do espaço-tempo sem entrar nas considerações físicas que motivam-na.

A introdução dessa idéia em física remonta à procura de soluções para campos que possuíssem energia finita e fossem estáveis (73), sendo essa estabilidade garantida pela parametrização utilizada, e para que pelo menos uma solução seja estável basta que haja um mapeamento possível entre os dois espaços que não possa ser continuamente deformável no mapeamento trivial, isto é, de todo um espaço num ponto apenas do outro. Mapeamentos continuamente deformáveis são conhecidos na literatura como homotópicos. E o conjunto de todos os mapeamentos continuamente deformáveis entre si formam uma classe de homotopia. Assim uma solução existirá se existir um mapeamento entre os dois espaços que não seja homotópico ao trivial (73).

Pode-se mostrar também que as classes de homotopia, definida uma operação adequada, formam um grupo (73). Como exemplo, o grupo $\pi_D(S^D)$, das classes de homotopia dos mapeamentos de uma esfera S^D em outra, é o grupo dos inteiros sob a operação de adição Z (74, 75).

4.1 - O Monopolo

As soluções que nos referimos são conhecidas na literatura pelo nome geral de sólitons topológicos (Coleman as denomina "lumps" (73)); em geral são soluções inde-

pendentes do tempo. Entre elas estão o “kink” (76), o monopolo magnético (77, 78) e o instanton (79). A primeira envolve apenas um campo escalar, a última apenas um campo de Yang-Mills, e o monopolo utiliza as duas estruturas.

O espaço interno envolvido na parametrização é, no caso do instanton, o espaço topológico do grupo de simetria interna G dos campos de Yang-Mills. Soluções estáticas de instantons só podem ser realizadas em 4 dimensões espaciais (80). Neste caso, o grupo de simetria é um $SO(3)$ e o espaço topológico é uma esfera tri-dimensional com pontos antipodais identificados.

Para o monopolo, o grupo de simetria G é também um $SO(3)$ mas a parametrização não é realizada sobre o espaço do grupo e sim sobre o espaço do vácuo degenerado após a quebra de simetria (81, 82). Este é o espaço das órbitas dos geradores de $SO(3)$ que não são mais simetria do vácuo após a quebra (que é a definição do espaço dos cosets G/H , onde H é o grupo formado pelos geradores que permanecem como simetrias do vácuo). Como neste caso H é o grupo $U(1)$, o espaço terá dimensão $D_{SO(3)} - D_{U(1)} = 2$ e pode ser visto que ele terá a topologia de uma S^2 . A parametrização a ser feita é entre esse espaço interno e uma S^2 assintótica obtida quando fazemos a coordenada radial tender a infinito num espaço euclidiano tri-dimensional (ou na seção espacial de um espaço-tempo de Minkowski de quatro dimensões). O espaço interno pode ser representado então por um vetor ortonormal em cada ponto,

$$\hat{r} = (\text{sen}\bar{\theta}\text{sen}\bar{\varphi}, \text{sen}\bar{\theta}\text{cos}\bar{\varphi}, \text{cos}\bar{\theta}), \quad (4.1.1)$$

e a parametrização se resumirá então à consideração que $\bar{\theta}$ e $\bar{\varphi}$, coordenadas no espaço interno, sejam funções de θ e φ , coordenadas do espaço externo.

Como um potencial $\lambda\phi^4$ de quebra espontânea de simetria (81, 82)

$$V(\hat{\phi}) = \frac{\eta}{4!}(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi})^2 - \frac{\mu^2}{2}\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}, \quad (4.1.2)$$

onde η e $\mu^2 > 0$, possui um mínimo em

$$\hat{\phi}_0 \cdot \hat{\phi}_0 = \frac{6\mu^2}{\eta} = \alpha^2, \quad (4.1.3)$$

vemos que podemos representar esse mínimo $\hat{\phi}_0$ como

$$\hat{\phi}_0 = \alpha \hat{r}. \quad (4.1.4)$$

Esse será o valor assintótico a ser imposto ao campo $\hat{\phi}$. Isso garantirá, em parte, a finitude da energia, pois fará com que assintoticamente a solução atinja um dos zeros do potencial (73). No entanto, como pode ser depreendido da equação do campo escalar

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \hat{\phi} - \frac{2\partial V(\hat{\phi})}{\partial(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi})} \hat{\phi} = 0 \quad (4.1.5)$$

(lembrando que a solução buscada para $\hat{\phi}$ não depende do tempo, i.e., $\hat{\phi} = \varphi(r)\hat{r}$), algo deve ser adicionado ao sistema além desse campo já que o valor assintótico na eq.(4.1.4) não satisfaz identicamente a eq.(4.1.5) (isso será abordado novamente quando falarmos do teorema de Derrick). Faz-se necessária então a introdução dos campos vetoriais de Yang-Mills. A ação completa se escreve agora (78):

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) + V(\hat{\phi}), \quad (4.1.6)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.1.7)$$

é o tensor de campo, expresso acima em função dos tripletos de potenciais vetoriais A_μ^a ; ϵ_{abc} é o tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico; e é uma constante de acoplamento.

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + e \epsilon_{abc} A_\mu^b \phi^c \quad (4.1.8)$$

é a derivada covariante, sendo ϕ^a as componentes internas do campo escalar $\hat{\phi}$, e a sua equação é alterada da forma na eq.(4.1.5) para

$$D_\mu D^\mu \phi^a - \frac{\partial V(\phi^a)}{\partial \phi^a} = 0. \quad (4.1.9)$$

E agora, mediante condições assintóticas adequadas para os potenciais A_μ^a , podemos fazer com que a eq.(4.1.9) seja satisfeita quando $\hat{\phi} \rightarrow \hat{\phi}_0$. Reescrevendo $\hat{\phi}_0$ em coordenadas cartesianas e escolhendo por enquanto a parametrização $\bar{\varphi} = \varphi$ e $\bar{\theta} = \theta$ na eq.(4.1.1):

$$\hat{\phi}_0 \rightarrow \phi_0^a = \frac{\alpha x^a}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{\alpha x^a}{r}, \quad (x^a = x, y, z), \quad (4.1.10)$$

vemos que os valores assintóticos ($r \rightarrow \infty$) de A_μ^a devem ser (78)

$$A_0^a \rightarrow 0, \quad A_i^a \rightarrow -\epsilon_{iab} \frac{x^b}{er^2}. \quad (4.1.11)$$

Pela definição invariante de calibre do campo eletromagnético (78)

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{|\hat{\phi}|} \phi_a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e |\hat{\phi}|^3} \epsilon^{abc} \phi_a D_\mu \phi_b D_\nu \phi_c, \quad (4.1.12)$$

vemos que este assintoticamente possui apenas as componentes não nulas dadas por

$$F_{ij} = -\frac{1}{er^3} \epsilon_{ija} x^a, \quad (4.1.13)$$

i.e., aparece um campo magnético assintótico:

$$B_a = \frac{x_a}{er^3}. \quad (4.1.14)$$

O fluxo total gerado por esse campo é $\frac{4\pi}{e}$, que significa que a carga magnética correspondente que o gera é

$$M = \frac{1}{e}. \quad (4.1.15)$$

Podemos definir agora uma corrente magnética por (83)

$$K_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma}. \quad (4.1.16)$$

Definindo também

$$A_\mu = \frac{1}{|\hat{\phi}|} \phi_a A_\mu^a, \quad (4.1.17)$$

vemos que a eq.(4.1.12) pode ser reescrita como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e |\hat{\phi}|^3} \epsilon^{abc} \phi_a (\partial_\mu \phi_b) (\partial_\nu \phi_c), \quad (4.1.18)$$

de onde se conclui que

$$K_\mu = \frac{1}{2e} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abc} \left[\partial^\nu \left(\frac{\phi_a}{|\hat{\phi}|} \right) \right] \left[\partial^\rho \left(\frac{\phi_b}{|\hat{\phi}|} \right) \right] \left[\partial^\sigma \left(\frac{\phi_c}{|\hat{\phi}|} \right) \right]. \quad (4.1.19)$$

Essa corrente é obviamente conservada,

$$\partial^\mu K_\mu = 0, \quad (4.1.20)$$

o que implica que a carga magnética definida por

$$M = \frac{1}{4\pi} \int K_0 dx^3, \quad (4.1.21)$$

é uma constante:

$$\dot{M} = 0. \quad (4.1.22)$$

Um aspecto interessante da eq.(4.1.19) é que ela mostra que a corrente magnética K_μ e, portanto, a carga magnética M somente dependem do campo $\hat{\phi}$, ou mais propriamente de

$$\frac{\hat{\phi}}{|\hat{\phi}|} = \hat{r}. \quad (4.1.23)$$

\hat{r} como está definido na eq.(4.1.1) identifica a parametrização entre o espaço interno e o externo e independe da dinâmica. Isso implica que a conservação da corrente K_μ não advém de uma simetria do sistema via teorema de Noether, mas sim da estrutura topológica envolvida. Esse ponto pode ser mais explorado. Para isso reescreve-se a eq.(4.1.21) utilizando a eq.(4.1.19):

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{8\pi e} \int \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \epsilon^{abc} (\partial^\nu r_a) (\partial^\rho r_b) (\partial^\sigma r_c) dx^3 \\ &= \frac{1}{8\pi e} \int \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \partial^i [r_a (\partial^j r_b) (\partial^k r_c)] dx^3 \\ &= \frac{1}{8\pi e} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S^2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} r_a \partial^j r_b \partial^k r_c (d\Omega^2)^i, \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

onde a integração é feita sobre uma esfera no infinito. Mudando então as variáveis de integração para as coordenadas θ e φ sobre essa esfera, podemos escrever o elemento de superfície como (83)

$$(d\Omega^2)_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} \frac{\partial x^l}{\partial \zeta^r} \frac{\partial x^m}{\partial \zeta^s} \epsilon^{rs} d\zeta^2, \quad (4.1.25)$$

com

$$\partial_j \phi_b = \partial_r \phi_b \frac{d\zeta^r}{dx^j},$$

e a carga magnética como

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{16\pi e} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S^2} (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_k^l \delta_j^m) \epsilon^{abc} r_a \partial^r r_b \partial^s r_c \left(\frac{\partial \zeta_r}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_s}{\partial x_k} \frac{\partial x^l}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial x^m}{\partial \zeta_\beta} \right) \epsilon_{\alpha\beta} d\zeta^2 \\ &= \frac{1}{8\pi e} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S^2} \epsilon^{abc} r_a \partial^\alpha r_b \partial^\beta r_c \epsilon_{\alpha\beta} d\zeta^2, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

que pode ainda ser reescrita na forma

$$M = \frac{1}{4\pi e} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S^2} \frac{1}{2} \hat{r} \cdot \hat{r}_{|\alpha} X \hat{r}_{|\beta} \epsilon^{\alpha\beta} d\zeta^2, \quad (4.1.27)$$

expressão apresentada por Polyakov (74). Utilizando agora a eq.(4.1.1) para \hat{r} e substituindo-a na equação acima, vemos que

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4\pi e} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}\bar{\theta} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi} \right) d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi e} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}\bar{\theta} J \left(\frac{\bar{\theta}\bar{\varphi}}{\theta\varphi} \right) d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Ela mostra definitivamente como a conservação da carga é de natureza puramente topológica. Escolhendo $\bar{\theta} = \theta$ e $\bar{\varphi} = \varphi$ chegamos a $M = 1/e$, o valor da carga magnética que já havíamos calculado na eq.(4.1.15) por outros meios.

A integral acima vai fornecer o número d de vezes que o mapeamento recobre a esfera S^2 (vezes sua área). Para que o mapeamento seja "single-valued", esse número tem

que ser um inteiro (positivo, negativo ou zero) e é conhecido como índice de Kronecker (84) ou “winding number”. A carga magnética é dada então por

$$M = \frac{d}{e}. \quad (4.1.29)$$

O fato de que a carga magnética é conservada, equação (4.1.22), é resultado dela só poder assumir valores de um conjunto discreto, i.e., não há como ela continuamente decair de um valor para outro, o que já era sabido, pois os diferentes valores de M estão associados a diferentes classes de homotopia que não podem ser continuamente deformadas umas nas outras por definição. A importância da existência de classes de homotopia não triviais para as soluções solitônicas foi primeiramente observada nas referências 83, 85 e 86. As diversas classes de homotopia para mapeamentos de S^2 em S^2 podem então ser relacionadas a cada possível d , refletindo o fato de que $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Os integrandos das equações (4.1.27) e (4.1.28) são ainda equivalentes à raiz quadrada do determinante de $\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\nu}$, a métrica das esferas do espaço interno que nós chamamos de $\tau_{\mu\nu}$ (ver, por exemplo, a eq.(2.1.8)). Assim, em geral, podemos escrever

$$|d| = \frac{1}{\omega_N} \int_{S^N} [\det \tau_{\mu\nu}]^{\frac{1}{2}} dx^N, \quad (4.1.30)$$

onde ω_N é a área da esfera N -dimensional.

O interesse dessa equação está implícito, pois conseguimos escrever o índice de Kronecker numa forma válida para qualquer dimensão N do espaço interno.

4.2 - O Teorema de Derrick

Citamos na seção anterior, a existência de uma solução solitônica independente do tempo envolvendo apenas campos escalares, o “kink” (76). Ela é realizada, no entanto, para apenas uma dimensão espacial. Qual o motivo de durante tanto tempo não se ter buscado soluções com simples campos escalares em maior número de dimensões, já que a solução de “kink” já é conhecida desde 1963 ?

A razão para isso está no teorema de Derrick (87). Ele estabelece que só podem existir soluções estáveis, independentes do tempo, de energia finita e não triviais (diferentes da solução de vácuo) em uma dimensão espacial. Iniciamos a sua demonstração com a suposição de que $\hat{\phi}(\vec{r})$ seja uma solução para equação de campo (4.1.5) em D dimensões. Como ela não depende do tempo, ela pode ser obtida da minimização da seguinte integral:

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \hat{\phi} \cdot \partial^\alpha \hat{\phi} + V(\hat{\phi}) \right) dx^D = 0, \quad (4.2.31)$$

que nada mais é que a energia associada a esse sistema. Definiremos $\hat{\phi}_\lambda(\vec{r}) = \hat{\phi}(\lambda\vec{r})$, $I_1 = \int \frac{1}{2} \partial_\alpha \hat{\phi} \cdot \partial^\alpha \hat{\phi} dx^D$ e $I_2 = \int V(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}) dx^D$. Assim, a energia para esses campos $\hat{\phi}_\lambda$ poderá ser determinada em função dessas expressões se fizermos uma mudança de variáveis de \vec{r} para $\lambda\vec{r}$ na integral da eq.(4.2.31):

$$E_\lambda = \lambda^{(2-D)} I_1 + \lambda^{-D} I_2. \quad (4.2.32)$$

Se $\hat{\phi}(\vec{r})$ é de fato solução para a eq.(4.2.31) , então

$$(\delta_\lambda E_\lambda)_{\lambda=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - D)I_1 = DI_2, \quad (4.2.33)$$

e se essa solução é estável,

$$(\delta_\lambda^2 E_\lambda)_{\lambda=1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - D)(2 - D - 1)I_1 + D(D + 1)I_2 \geq 0$$

que, pela (4.2.33), sendo I_1 e I_2 finitos por hipótese, implica que

$$2(2 - D)I_1 \geq 0. \quad (4.2.34)$$

Como I_1 é a energia cinética definida positiva, vemos que somente para $D = 1$ teremos soluções estáveis independentes do tempo, se não quisermos fazer I_1 e, conseqüentemente, I_2 iguais a zero, que é a solução trivial de vácuo, *QED*.

Inclusive, se impusermos que I_2 seja também definido positivo, para garantirmos a positividade da energia total, vemos pela eq.(4.2.33) que para $D \neq 1$ não existirão nunca soluções independentes do tempo, sejam elas estáveis ou não, diferentes das de vácuo (73).

4.3 - A Textura Global

Pela restrição imposta por esse teorema, a busca de soluções solitônicas partiu para as simetrias locais e a introdução de campos de calibre como foi feito a partir da eq.(4.1.5) na solução de monopolo apresentada.

Recentemente, outra forma de contornar o teorema foi proposta. A demonstração do teorema de Derrick, apesar de não deixar isto explícito, parece depender decisivamente do substrato geométrico do espaço. A utilização de espaços curvos pode, por exemplo, alterar o resultado da eq.(4.2.33) e tornar sem sentido as conclusões posteriores.

A hipótese de utilização de um espaço de topologia S^3 foi inicialmente feita por Kibble (88), em 1976, mas somente implementada em 1987 por Davis (89-91). Soluções solitônicas poderão ocorrer se $\pi_3(G/H)$ for não trivial. E isso poderá ocorrer, por exemplo, na quebra de $SO(4)$ em $SO(3)$, quando o espaço do vácuo degenerado terá topologia S^3 . Novamente as diferentes classes de homotopia serão identificadas pelos índices de Kronecker calculados pela eq.(4.1.30) para $N = 3$. O caso por ele escolhido para análise tinha $d = 1$, quando o campo assumia a forma de vácuo (mínimo do potencial)

$$\hat{\phi} = \alpha(\sin\varphi\sin\theta\sin\chi, \cos\varphi\sin\theta\sin\chi, \cos\theta\sin\chi, \cos\chi), \quad (4.3.35)$$

para uma ação contendo o potencial de quebra de simetria ϕ^4 :

$$S = \int \left[\frac{1}{2} \hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu} g^{\mu\nu} + \eta(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} - \alpha^2)^2 \right] \sqrt{-g} \, dx^4 \quad (4.3.36)$$

com o elemento de linha da seção espacial

$$ds^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Como o espaço é finito e não há quaisquer singularidades na solução, a energia é obviamente finita:

$$\begin{aligned}
E &= \int \left(\frac{1}{2} \hat{\phi}_{|a} \cdot \hat{\phi}_{|b} g^{ab} \right) \sqrt{-g} \, dx^3 = \frac{1}{2} \int \alpha^2 \tau \sqrt{-g} \, dx^3 \\
&= \frac{3}{2} \alpha^2 \int_{\chi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \text{sen}^2 \chi \text{sen} \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\chi \\
&= 3\alpha^2 \pi^2.
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Davis argumenta a favor da estabilidade dessa estrutura de uma forma independente da do teorema de Derrick, apesar de acreditar que apenas para $d = 1$ isto ocorreria. Ele credita essa estabilidade à curvatura do espaço e denominou a estrutura de textura.

Na literatura o termo textura é também utilizado num outro sentido, designando estruturas não topológicas e instáveis, onde o campo $\hat{\phi}$ realiza o mapeamento do espaço interno (G/H) num espaço R^D (92). O colapso destas texturas foi proposto como o mecanismo responsável pela formação da estrutura em larga escala do universo (93, 94).

No entanto, a análise realizada por Davis é criticável, pois o campo da eq.(4.3.35) não satisfaz a equação de campo obtida da eq.(4.3.36),

$$\hat{\phi}_{|\mu||\nu} g^{\mu\nu} - 4\eta \hat{\phi} (\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} - \alpha^2) = \tau \hat{\phi} - 4\eta \hat{\phi} (\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} - \alpha^2) = 0, \tag{4.3.38}$$

já que o termo cinético não se anula, contribuindo com $\tau \hat{\phi}$, enquanto a contribuição do potencial é nula, como se observa acima. *

Como o espaço é finito, poderíamos satisfazer essa equação e ainda o critério de finitude de energia se escolhêssemos um campo $\hat{\phi}$ com a mesma dependência espacial da eq.(4.3.35) mas de módulo igual a $\left(\frac{3+2\eta\alpha^2}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$. Esse vetor no espaço interno representaria um mapeamento com $d = 1$, mas não estaria sobre a esfera de vácuo. Como é

* Para escrever a eq.(4.3.38) utilizamos as passagens da seção 2.4; as demais componentes da eq.(4.3.38), além daquela ao longo de \hat{r} , são identicamente nulas, pois $N = D$ (ver eq.(2.4.70)).

de se esperar que o campo assumira um dos mínimos do potencial durante a quebra de simetria, essa solução parece não ter muito interesse físico.

Acreditamos por isso que, para que uma real solução de textura ocorra, devemos alterar alguma coisa na ação eq.(4.3.36). No entanto, tentaremos evitar a introdução de campos de calibre e manter a simetria global.

Seja como for, a solução com o módulo modificado apresentada é um resultado diverso do que seria previsto pela aplicação do teorema de Derrick do espaço chato. Ela é uma solução de energia finita não nula e independente do tempo utilizando campos escalares em $D = 3$, com energia cinética (I_1) e potencial (I_2) definidas positivas, o que pelo último parágrafo da seção anterior, baseado na eq.(4.2.32), mostra a inaplicabilidade do teorema de Derrick a espaços curvos.

5 - Uma modificação mínima da gravitação de Einstein

5.1 - A Gravitação de Einstein Modificada

A constante cosmológica é uma alteração perfeitamente admissível da gravitação de Einstein original, principalmente por satisfazer, de uma forma até trivial, a identidade de Bianchi (IB). Ela pode surgir, por exemplo, durante uma quebra espontânea de simetria (QES) quando o universo ficaria dominado pelo valor esperado de vácuo do potencial de QES que faria o papel de uma constante cosmológica efetiva (21).

O que proporemos agora é uma modificação da gravitação de Einstein que não seja tão trivial quanto a adição de uma constante cosmológica, mas seja também advinda da estrutura interna de um campo de simetria global durante a QES. Para isso nos basearemos em resultados obtidos nos capítulos 2 e 3.

O tensor de Einstein modificado será dado por

$$I_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - kw(\varphi^2)\varphi^2 H_{\mu\nu}, \quad (5.1.1)$$

onde

$$H_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tau, \quad (5.1.2)$$

com $\tau_{\mu\nu}$ e τ definidos pelas eqs.(2.1.8) e (2.1.11).

Pela análise do $T_{\mu\nu}$ calculado na eq.(2.2.23), percebe-se que o que está sendo feito é passar a contribuição da estrutura interna do campo $\hat{\phi}$ no $T_{\mu\nu}$ para o lado esquerdo das equações de Einstein, como se essa estrutura fornecesse uma contribuição puramente

geométrica. As equações de Einstein poderiam ser escritas então como

$$I_{\mu\nu} = kT'_{\mu\nu}, \quad (5.1.3)$$

onde obviamente $T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - w(\varphi^2)\varphi^2 H_{\mu\nu}$ (ver eq.(2.2.23)).

Supomos, até aqui, apenas que $\hat{\phi} = \varphi\hat{r}$, onde \hat{r} é o vetor normal ao espaço interno em cada ponto e $\varphi = \varphi(t)$. Ainda, admitimos a hipótese de modificação do termo cinético pelo coeficiente $w(\varphi^2)$ como na eq.(2.1.4). Não ficam especificadas a forma do espaço interno, da função $w(\varphi^2)$ e nem da geometria externa.

5.2 - Identidade de Bianchi

Pretendemos que essa alteração responda por uma modificação mínima do tensor de Einstein e, então, para isso precisaríamos que o tensor modificado $I_{\mu\nu}$ satisfizesse a IB.

No entanto, a validade da IB, como sabemos da nossa experiência na seção 2.5, é determinada a partir do conhecimento da equação do campo escalar. Obviamente esta não será a de um campo escalar singlete pois terá também contribuição interna, que acima nós passamos para o lado esquerdo para compor o $I_{\mu\nu}$. Assim fica claro que sob essas condições gerais o $J_{\mu\nu}$ isoladamente não poderá satisfazer a IB; seria necessário levar-se em consideração o resto do tensor energia-momentum do campo escalar presente do lado direito, pois só dessa forma seria possível reproduzir a equação de campo na avaliação da IB.

Devemos então analisar sob que condições o $T_{\mu\nu}$ completo (com a parte em $H_{\mu\nu}$) e

escrito na sua forma geral, eq.(2.2.23), será conservado, para a seguir poderemos procurar as restrições necessárias para a conservação de $I_{\mu\nu}$.

A equação de conservação para o $T_{\mu\nu}$ da eq.(2.2.23) foi apresentada na eq.(2.5.85). Reescrevemo-la aqui fazendo a substituição de um de seus termos calculado na eq.(2.5.84):

$$\begin{aligned}
 & -\dot{\varphi}w\left(\ddot{\varphi} + \varphi\dot{\varphi}^2\frac{w'}{w} + \varphi^3\frac{w'}{w}\tau + \varphi\tau + \dot{\varphi}g^{\mu\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^0\right)\delta_\nu^0 \\
 & + \left(g^{\mu\alpha}\tau_{\mu\nu||\alpha} - \frac{1}{2}\tau_{|\nu}\right)\varphi^2w = 0.
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Sabemos pela seção 2.5 que o 1º termo entre parênteses acima está relacionado com a equação do campo escalar. Esta é a eq.(2.4.56) reproduzida abaixo:

$$\hat{\phi}_{|\mu||\nu}g^{\mu\nu} - \frac{w'}{w}\varphi(\dot{\varphi}^2 + \tau\varphi^2)\hat{r} = 0. \tag{2.4.56}$$

O D'Alembertiano aqui pode ser expresso da seguinte forma, admitindo um referencial síncrono,

$$\hat{\phi}_{|\mu||\nu}g^{\mu\nu} = -\ddot{\varphi}\hat{r} + \varphi\hat{r}_{|\mu||\nu}g^{\mu\nu} - \dot{\varphi}\Gamma_{\mu\nu}^0g^{\mu\nu}\hat{r} - \varphi\hat{r}_{|\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g^{\mu\nu},$$

e a eq.(2.4.56) é escrita como

$$-\left(\ddot{\varphi} + \varphi\dot{\varphi}^2\frac{w'}{w} + \varphi^3\frac{w'}{w}\tau + \dot{\varphi}\Gamma_{\mu\nu}^0g^{\mu\nu}\right)\hat{r} + \varphi\hat{r}_{|\mu||\nu}g^{\mu\nu} - \varphi\hat{r}_{|\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g^{\mu\nu} = 0. \tag{5.2.5}$$

Como o último termo não apresenta componentes ao longo de \hat{r} , para que a componente radial da eq.(5.2.5) reproduza o termo respectivo na eq.(5.2.4) basta que

$$(\varphi\hat{r}_{|\mu||\nu}g^{\mu\nu})\cdot\hat{r} = -\varphi\tau. \tag{5.2.6}$$

Já que

$$\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r} = 0,$$

então

$$(\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r})_{|\nu} = 0,$$

ou

$$\hat{r}_{|\mu|\nu} \cdot \hat{r} = -\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\nu} = -\tau_{\mu\nu}, \quad (5.2.7)$$

que mostra que a eq.(5.2.6) é de fato satisfeita.

Assim, para que o $T_{\mu\nu}$ se conserve, vemos pela eq.(5.2.4) que é necessário que

$$g^{\mu\alpha} \tau_{\mu\nu|\alpha} - \frac{\tau_{|\nu}}{2} = 0. \quad (5.2.8)$$

Analisaremos primeiro a componente temporal dessa equação, lembrando que $\tau_{\mu 0}$ é nulo por definição:

$$-g^{\mu\alpha} \tau_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha 0}^{\beta} = \frac{1}{2} \tau_{|0}. \quad (5.2.9)$$

O lado esquerdo da eq.(5.2.9) pode ser reescrito na forma abaixo, onde utilizou-se o fato de estarmos num referencial síncrono,

$$-g^{\mu\alpha} \tau_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha 0}^{\beta} = -\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\nu} g^{\mu\alpha} \frac{1}{2} g^{\nu\beta} (g_{\alpha\beta})_{|0}. \quad (5.2.10)$$

O lado direito, por sua vez, assume a forma

$$\frac{1}{2}\tau_{|0} = \frac{1}{2}\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\nu}(g^{\mu\nu})_{|0}. \quad (5.2.11)$$

Agora, como

$$(g_{\alpha\beta})_{|\epsilon}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} = -(g^{\nu\mu})_{|\epsilon}, \quad (5.2.12)$$

segue a igualdade entre as expressões (5.2.10) e (5.2.11).

Restam, então, as componentes espaciais da equação (5.2.8):

$$g^{\mu\nu} \left[\left(\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\alpha} \right)_{|\nu} - \left(\hat{r}_{|\beta}\cdot\hat{r}_{|\alpha} \right) \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \left(\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\beta} \right) \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \right] = \frac{1}{2}(\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\nu}g^{\mu\nu})_{|\alpha}. \quad (5.2.13)$$

A equação (5.2.13) desempenha um papel principal nessa análise. Ela deve ser satisfeita em conjunto com as demais componentes (além de \hat{r}) da equação de campo (5.2.5). Serão essas equações que determinarão a compatibilidade entre as geometrias interna e externa.

Perceba-se agora um detalhe. A impossibilidade de se mostrar que o tensor $I_{\mu\nu}$ satisfazia a IB, recapitulando, era que, para construirmos o $I_{\mu\nu}$, adicionamos ao tensor de Einstein uma contribuição advinda da estrutura interna presente no tensor energia-momentum, eq.(5.1.1). Como o $G_{\mu\nu}$ satisfaz a IB, o $I_{\mu\nu}$ a satisfaria também se $\omega\varphi^2 H_{\mu\nu}$ o fizesse. O problema é que isso em geral não ocorre, como pode ser entendido observando-se as eqs.(5.2.4) e (5.2.5). A conservação do $T_{\mu\nu}$ é obtida utilizando-se a equação do campo escalar para anular o 1º parênteses na eq.(5.2.4). Mas quando tomarmos a divergência do termo de modificação da eq.(5.1.1), além da divergência de $H_{\mu\nu}$, que deve ser nula pela eq.(5.2.8), aparecerão também os termos de estrutura interna

contidos na equação de campo (2.4.56) onde está presente τ . E esses termos não se anulam independentemente em geral.

No entanto existe uma caso particular em que a equação do campo escalar como que ignora a estrutura interna. Quando fazemos $w(\varphi^2) = \frac{c^{te}}{\varphi^2}$, que é a solução para

$$\varphi^3 \frac{w'}{w} \tau + \varphi \tau = 0 \Rightarrow w = \frac{A}{k\varphi^2}, \quad (5.2.14)$$

a eq.(2.4.56) não apresenta termos em τ !

Assim, somente com essa forma funcional para $w(\varphi^2)$ e a garantia que as equações de compatibilidade sejam satisfeitas, i.e., a validade da eq.(5.2.13), é que teremos um tensor de Einstein modificado $I_{\mu\nu}$ que satisfará a identidade de Bianchi!

5.3 - O Termo Cinético

Essa forma $\frac{c^{te}}{\varphi^2}$ para o coeficiente $w(\varphi^2)$ do termo cinético já havia aparecido no capítulo 3, induzida na eq.(3.1.4) e obtida por necessidade na eq.(3.2.22). Novamente nos deparamos aqui com a necessidade de termos essa forma específica para esse coeficiente, agora por um raciocínio completamente independente.

Na verdade, essa conformação do termo cinético já há bastante tempo é conhecida na literatura. Ela primeiro surgiu quando da formulação de uma teoria alternativa de gravitação, a teoria de Jordan-Brans-Dicke (95, 96). Essa teoria propõe uma ação com acoplamento não mínimo de um campo escalar com o escalar de curvatura:

$$S_{BD} = \int \left[\phi R - \frac{w}{\phi} (\phi_{|\mu} \phi^{|\mu}) + L_{mat} \right] \sqrt{-g} \, dx^4, \quad (5.3.15)$$

onde w é um parâmetro livre constante da teoria e L_{mat} não depende de ϕ .

Sob uma transformação conforme

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{\varphi} g^{\mu\nu}, \quad (5.3.16)$$

essa ação assume a forma com acoplamento mínimo (96):

$$\bar{S}_{BD} = \int \left[R - \frac{1}{2}(2w + 3) \frac{\varphi_{|\mu} \varphi^{|\mu}}{\varphi^2} + L_{mat} \right] \sqrt{-g} \, dx^4, \quad (5.3.17)$$

com o termo cinético modificado. Essa é a ação escrita no chamado referencial de Einstein da teoria JBD. A medida que $w \rightarrow \infty$, essa teoria se identifica com a gravitação de Einstein. E, apesar de ter sido criada com a perspectiva de um valor baixo aceitável de w , da ordem de 1, as restrições impostas pelas observações no sistema solar implicaram num $w > 500$ (97). Neste limite, a correção à teoria de Einstein se tornava tão pequena que a formulação de Brans-Dicke passou a ser encarada como uma mera curiosidade.

No entanto, há pouco tempo ela foi resgatada como um possível “background” para uma inflação eficiente, onde os problemas decorridos dos antigos modelos inflacionários pudessem ser corrigidos. Isto foi primeiramente imaginado em 1984 (98) e, posteriormente, em 1989 nos artigos de La e Steinhardt (99, 100), sendo esse modelo denominado inflação estendida.

É interessante observar que se a dependência da ação eq.(5.3.17) no campo φ for apenas através do termo cinético, ela poderá ser colocada na forma padrão equivalente, através de uma simples redefinição do campo φ :

$$\varphi \rightarrow \exp\theta \Rightarrow \frac{\varphi_{|\mu}\varphi_{|\nu}}{\varphi^2} \rightarrow \theta_{|\mu}\theta_{|\nu}. \quad (5.3.18)$$

Obviamente, a presença de um potencial $V(\varphi)$ implicaria que o termo cinético modificado teria repercussão tal que não poderíamos substituí-lo pelo termo padrão sem alterar a forma do potencial. No nosso caso, algo semelhante ocorre, pela presença do termo em τ na ação da eq.(2.1.10). Se fizermos a transformação acima, com

$$\hat{\phi} = \varphi\hat{r} \rightarrow \hat{\theta} = (\exp\theta)\hat{r}, \quad (5.3.19)$$

teremos

$$\frac{\hat{\phi}_{|\mu}\hat{\phi}_{|\nu}}{|\hat{\phi}|^2} \rightarrow \theta_{|\mu}\theta_{|\nu} + \tau_{\mu\nu} \neq \hat{\theta}_{|\mu}\hat{\theta}_{|\nu}. \quad (5.3.20)$$

Após os trabalhos iniciais da inflação estendida percebeu-se que para ocorrer um nível suficiente de inflação seria necessário que o parâmetro w fosse inferior a 25 (101), contrariando as observações astrofísicas (97). A introdução de um potencial para o campo escalar corrigiu esse problema (101), mas fez com que a interpretação da existência de um “background” de Jordan-Brans-Dicke não fosse mais imprescindível. Assim, recentemente, alguns autores têm preferido trabalhar com ações obtidas através de transformações conforme de teorias com acoplamento não mínimo (entre elas a própria JBD), como no caso da eq.(5.3.17), mas interpretando-as no contexto da teoria de Einstein (acoplamento mínimo) (102, 103, 104).

Independente desse desenvolvimento, o estudo de termos cinéticos em gravitação da forma $w(\phi)\phi_{|\mu}\phi^{|\mu}$ foi proposto por Sáez e Ballester como uma forma de resolver os problemas de matéria escura e formação galáctica (105, 106).

Fora do contexto gravitacional, Wiedemann et al.(107) estudaram um termo cinético dessa forma e encontraram soluções solitônicas.

5.4 - A Equação de Compatibilidade

Vimos que para que o tensor de Einstein modificado satisfaça a identidade de Bianchi, é necessário que as equações de compatibilidade sejam satisfeitas. O conjunto dessas equações é formado pela eq.(5.2.13) e pelas componentes não radiais da equação do campo escalar (5.2.5). Estas últimas serão obtidas fazendo-se o produto escalar da eq.(5.2.5) com $\hat{r}_{|a}$, já que $\hat{r} \cdot \hat{r}_{|a} = 0$ e $\hat{r}_{|0} = 0$:

$$(\hat{r}_{|\mu| \nu} g^{\mu\nu}) \cdot \hat{r}_{|a} = (\hat{r}_{|\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} g^{\mu\nu}) \cdot \hat{r}_{|a}. \quad (5.4.21)$$

Quando a equação acima é substituída na eq.(5.2.13) obtemos que

$$-\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\beta} \Gamma_{a\nu}^{\beta} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\nu} (g^{\mu\nu})_{|a}. \quad (5.4.22)$$

Utilizando agora, na expressão acima, a definição do Christoffel e a identidade na eq.(5.2.12), com o índice livre a , chegamos a

$$-\frac{1}{2} \hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\beta} g^{\beta\epsilon} g^{\mu\nu} (g_{a\epsilon|\nu} - g_{a\nu|\epsilon}) = 0. \quad (5.4.23)$$

Escrevendo agora que

$$g^{\beta\epsilon} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g^{\beta\epsilon} g^{\mu\nu} + g^{\mu\epsilon} g^{\beta\nu}) + \frac{1}{2} (g^{\beta\epsilon} g^{\mu\nu} - g^{\mu\epsilon} g^{\beta\nu}),$$

e substituindo na eq (5.4.23), obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\beta}(g^{\beta\epsilon}g^{\mu\nu}+g^{\mu\epsilon}g^{\beta\nu})(g_{\alpha\epsilon|\nu}-g_{\alpha\nu|\epsilon}) \\
& -\frac{1}{4}\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\nu}(g^{\beta\epsilon}g^{\mu\nu}-g^{\mu\epsilon}g^{\beta\nu})(g_{\alpha\epsilon|\nu}-g_{\alpha\nu|\epsilon})=0.
\end{aligned}
\tag{5.4.24}$$

O 1º termo na equação acima é identicamente nulo, já que o 1º parênteses é simétrico pela troca $\epsilon \leftrightarrow \nu$ e o 2º é anti-simétrico. O 2º termo também é identicamente nulo, já que $\hat{r}_{|\mu}\cdot\hat{r}_{|\beta}$ é simétrico pela troca $\mu \leftrightarrow \beta$ enquanto o primeiro parênteses é anti-simétrico.

Com isso concluímos que a expressão na eq.(5.4.22) é na verdade uma identidade. Em outras palavras, as restrições advindas da eq.(5.2.13), conservação do $T_{\mu\nu}$, são as mesmas que as da eq.(5.4.21), campo escalar, sempre!

5.5 - O Corte da Curvatura Espacial

A eq.(5.4.21), como vimos, representa as restrições que devem ser impostas à estrutura interna, vetor \hat{r} , quando é fornecida a estrutura externa, $g^{\mu\nu}$, e vice-versa.

Ela nos diz que as componentes em $\hat{r}_{|\alpha}$ dos dois vetores dos membros direito e esquerdo são idênticas. Assim, a igualdade dos dois vetores fica determinada a menos de uma componente em \hat{r} , já que esse unitário compõe com os $\hat{r}_{|\alpha}$ uma base completa para o espaço formado pela superfície do espaço interno e sua normal em cada ponto.

Assim,

$$g^{\mu\nu}\hat{r}_{|\mu|\nu} = \alpha\hat{r} + \hat{r}_{|\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}g^{\mu\nu}.$$
(5.5.25)

O coeficiente α é facilmente determinado em termos dos vetores $\hat{r}_{|\alpha}$. Pela eq.(5.2.7) vemos que

$$\alpha = -\hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\nu} g^{\mu\nu} = -\tau. \quad (5.5.26)$$

A eq.(5.5.25), com α determinado na eq.(5.5.26), é apenas suficiente no preenchimento das condições na eq.(5.4.21). Ela é considerada como apta a determinar uma estrutura a partir da outra. Assim, fazemos a hipótese que a estrutura interna seja responsável pelo corte da curvatura espacial externa de forma que o tensor de Einstein $I_{\mu\nu}$ represente uma geometria com curvatura nula.

Para isso reescrevemos aqui as componentes do tensor de Einstein utilizando as componentes do Ricci apresentados nas eqs.(1.6) a (1.8) para uma métrica síncrona (19), e utilizando as eqs.(1.9) a (1.11):

$$G_0^0 = \frac{1}{2}(K_b^a K_a^b - K^2) - \frac{1}{2}{}^{(3)}R, \quad (5.5.27)$$

$$G_a^0 = -K_{a||b}^b + K_{|a}, \quad (5.5.28)$$

$$G_b^a = -\frac{1}{2}\left(K_d^c K_c^d + K^2 + 2\dot{K}\right)h_b^a + KK_b^a + \dot{K}_b^a + {}^{(3)}R_b^a - \frac{{}^{(3)}R h_b^a}{2}. \quad (5.5.29)$$

As curvaturas das seções espaciais aparecem nos termos em ${}^{(3)}R_a^b$ e ${}^{(3)}R$, as componentes do Ricci espacial e seu traço. O que queremos é que esses termos sejam eliminados

na eq.(5.1.1), e pela expressão de $H_{\mu\nu}$ na eq.(5.1.2) e de $w(\varphi^2)$ na eq.(5.2.14) vemos que para isso basta que a equação abaixo seja satisfeita:

$${}^{(3)}R_{ab} = A\tau_{ab}. \quad (5.5.30)$$

Como $\tau_{\mu\nu} = \hat{r}_{|\mu} \cdot \hat{r}_{|\nu}$, vemos pela eq.(5.5.26) que essa hipótese é justamente suficiente para especificar a componente radial na eq.(5.5.25) em termos da geometria das seções espaciais. Essa equação fica na forma (lembrando que $\hat{r}_{|0} = 0$, e pelo fato de estarmos num referencial síncrono: $\Gamma_{\mu\nu}^c g^{\mu\nu} = \Gamma_{ab}^c h^{ab}$)

$$\hat{r}_{|\alpha|b} h^{ab} = -\left(\frac{{}^{(3)}R_{ab}}{A} \hat{r} - \hat{r}_{|c} \Gamma_{ab}^c\right) h^{ab}, \quad (5.5.31)$$

e podemos observar que ela estabelece a igualdade entre os traços de tensores nos dois membros. No entanto, utilizaremos a partir daqui uma equação de melhor manipulação que a eq.(5.5.31), impondo a igualdade entre as próprias componentes dos dois tensores:

$$\hat{r}_{|\alpha|b} = -\frac{{}^{(3)}R_{ab}}{A} \hat{r} + \hat{r}_{|c} \Gamma_{ab}^c. \quad (5.5.32)$$

Obviamente, as soluções para a equação acima o serão também para a eq.(5.5.31). Além disso, seu uso é fortemente indicado quando aplicada aos casos FLRW e Kantowski-Sachs degenerado que já conhecemos. No primeiro caso, utilizando os Christoffels puramente espaciais da eq.(1.35), e construindo o Ricci D-dimensional

$${}^{(D)}R_{\gamma_j \gamma_i} = (D-1) \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \quad ; \quad R_{\gamma_i \gamma_i} = 0 \quad , \quad j \neq l, \quad (5.5.33)$$

podemos montar a eq.(5.5.32) para o caso de uma geometria com seção espacial de topologia S^D , generalização $(D+1)$ -dimensional de um FLRW fechado. Ela assumirá a

forma (lembrando que neste caso concluímos que a constante A da eq.(5.2.14) era igual a $D - 1$ pela eq.(3.1.4))

$$\hat{r}_{|\gamma_j|\gamma_j} = -\prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \hat{r} - \sum_{l=j+1}^D \frac{\cos \gamma_l}{\text{sen} \gamma_l} \prod_{k=l}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \hat{r}_{|\gamma_l}, \quad (5.5.34)$$

que nada mais é que a eq.(2.4.58) que havíamos induzido a partir das expressões nas eqs.(2.1.1) e (2.1.5) para o vetor \hat{r} e suas derivadas $\hat{r}_{|\gamma}$, respectivamente, para o caso $D = N$. Obviamente, o vetor da eq.(2.1.1) é a solução para a equação acima, e com isso mostramos como a eq.(5.5.32) é efetiva na procura de geometrias para um espaço interno compatíveis com uma geometria espacial previamente fornecida e que possam anular os efeitos da curvatura desse espaço externo na dinâmica do campo gravitacional.

E percebemos também que os indícios da existência de um espaço interno tornam-se imperceptíveis. Não só eles desaparecem das equações de Einstein como também da equação para o campo escalar (ver eq.(5.2.14) e comentários subsequentes). Isto é, a dinâmica de um universo espacialmente fechado na presença desse campo multipletto é totalmente indistinguível da dinâmica de um universo espacialmente chato com um campo escalar singleto!

5.6 - Aplicação aos Universos de Kantowski-Sachs e Bianchi - IX

Na seção 3.2 lidamos com a generalização $(D + 1)$ -dimensional da métrica Kantowski-Sachs no caso degenerado (58-61). Aqui nos restringiremos ao caso de três dimensões espaciais, mas com os dois fatores de escala diferentes como no elemento de linha da eq.(3.2.36), abaixo reapresentada:

$$ds^2 = -dt'' + a^2 d\gamma_3^2 + b^2 (d\gamma_2^2 + \text{sen}^2 \gamma_2 d\gamma_1^2). \quad (5.6.35)$$

As equações de compatibilidade para essa métrica obtidas a partir da eq.(5.5.32) são

$$\hat{r}_{|\gamma_3|\gamma_3} = 0, \quad (5.6.36)$$

$$\hat{r}_{|\gamma_2|\gamma_2} = -\frac{\hat{r}}{A}, \quad (5.6.37)$$

$$\hat{r}_{|\gamma_1|\gamma_1} = -\frac{\text{sen}^2 \gamma_2}{A} \hat{r} - \text{cos} \gamma_2 \text{sen} \gamma_2 \hat{r}_{|\gamma_2}, \quad (5.6.38)$$

$$\hat{r}_{|\gamma_1|\gamma_2} = \frac{\text{cos} \gamma_2}{\text{sen} \gamma_2} \hat{r}_{|\gamma_1}, \quad (5.6.39)$$

$$\hat{r}_{|\gamma_1|\gamma_3} = \hat{r}_{|\gamma_2|\gamma_3} = 0. \quad (5.6.40)$$

As condições de integrabilidade para esse sistema

$$(\hat{r}_{|\gamma_i|\gamma_j})_{|\gamma_k} = (\hat{r}_{|\gamma_i|\gamma_j})_{|\gamma_i} \quad (5.6.41)$$

e

$$(\hat{r}_{|\gamma_i|\gamma_j})_{|\gamma_k} = (\hat{r}_{|\gamma_j|\gamma_k})_{|\gamma_i} = (\hat{r}_{|\gamma_k|\gamma_i})_{|\gamma_j} \quad (5.6.42)$$

implicam em que \hat{r} não pode ser função de γ_3 e $A = 1$. Considerando esses resultados, a eq.(5.6.37) indica que

$$\hat{f} = f_0(\gamma_1)\text{sen}\gamma_2 + f_1(\gamma_1)\text{cos}\gamma_2. \quad (5.6.43)$$

A eq.(5.6.43), quando substituída na eq.(5.6.38), fornece a forma abaixo para \hat{f} :

$$\hat{f} = A_0\text{sen}\gamma_1\text{sen}\gamma_2 + B_0\text{cos}\gamma_1\text{sen}\gamma_2 + C_0\text{cos}\gamma_2 + D_0\gamma_1\text{cos}\gamma_2, \quad (5.6.44)$$

que ainda é restringida pela eq.(5.6.39), pois esta obriga o coeficiente D_0 a se anular.

A forma final mais geral admitida pelo sistema é, então,

$$\hat{f} = A_0\text{sen}\gamma_1\text{sen}\gamma_2 + B_0\text{cos}\gamma_1\text{sen}\gamma_2 + C_0\text{cos}\gamma_2. \quad (5.6.45)$$

Devemos interpretar cada constante de integração acima como um grau de liberdade, uma dimensão no espaço onde está o vetor \hat{f} , que sabemos ser de dimensão $N + 1$. Com isso vemos que \hat{f} assume a forma geral da eq.(2.1.1) com $N=2$, que era a determinada para o Kantowski-Sachs degenerado com $D = 3$. Inclusive a constante A advinda da eq.(5.2.14) assume o valor 1, pela eq.(5.6.41), que era o valor obtido na eq.(3.2.22).

Já para o Bianchi-IX, temos o elemento de linha (4)

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dt^2 + (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \text{sen}^2 \psi) d\theta^2 + 2(a^2 - b^2) \cos \psi \text{sen} \psi \text{sen} \theta d\theta d\phi \\ & + (a^2 \text{sen}^2 \psi \text{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \psi \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta) d\phi^2 + 2c^2 \cos \theta d\phi d\psi + c^2 d\psi^2. \end{aligned} \quad (5.6.46)$$

No entanto, por simplicidade, trabalharemos com uma forma degenerada do Bianchi IX quando fazemos $a = b$. Essa métrica aparece na literatura, por exemplo, tratada para o caso da presença de um campo eletromagnético e um fluido perfeito (108). O elemento de linha acima assume a forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -dt^2 + a^2 d\theta^2 + (a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \operatorname{cos}^2 \theta) d\phi^2 \\
 & + 2c^2 \operatorname{cos} \theta d\phi d\psi + c^2 d\psi^2.
 \end{aligned}
 \tag{5.6.47}$$

Para a métrica obtida a partir da expressão acima, a eq.(5.5.32) implica em:

$$\hat{r}_{|o|o} = -\left(1 - \frac{c^2}{2a^2}\right) \frac{\hat{r}}{A},
 \tag{5.6.48}$$

$$\hat{r}_{|\phi|\phi} = \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \theta \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) \hat{r}_{|o} - \frac{c^4 \operatorname{cos}^2 \theta + 2a^4 \operatorname{sen}^2 \theta - a^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2a^4} \frac{\hat{r}}{A},
 \tag{5.6.49}$$

$$\hat{r}_{|\psi|\psi} = -\frac{c^4}{2a^4} \frac{\hat{r}}{A},
 \tag{5.6.50}$$

$$\hat{r}_{|o|\psi} = \frac{c^2}{2a^2 \operatorname{sen} \theta} (\operatorname{cos} \theta \hat{r}_{|\psi} - \hat{r}_{|\phi}),
 \tag{5.6.51}$$

$$\hat{r}_{|\phi|\psi} = \frac{c^2 \operatorname{sen} \theta}{2a^2} \hat{r}_{|o} - \frac{c^4 \operatorname{cos} \theta}{2a^4} \frac{\hat{r}}{A},
 \tag{5.6.52}$$

$$\hat{r}_{|\phi|o} = \frac{\operatorname{cos} \theta (2a^2 - c^2)}{2a^2 \operatorname{sen} \theta} (\hat{r}_{|\phi} - \operatorname{cos} \theta \hat{r}_{|\psi}) - \frac{\operatorname{sen} \theta}{2} \hat{r}_{|\psi},
 \tag{5.6.53}$$

Aqui surge algo de diferente em relação ao caso do Kantowski-Sachs recém tratado. Os fatores de escala, funções do tempo, aparecem nas equações de compatibilidade que não podem depender do tempo. A única forma de eliminar esse problema, como pode ser obviamente concluído da análise das eqs.(5.6.48) a (5.6.53), é aceitar que os dois fatores de escala são proporcionais, i.e.:

$$c = \alpha a,
 \tag{5.6.54}$$

com α uma constante. No entanto, as condições de integrabilidade, eqs.(5.6.41) e (5.6.42), quando a este caso aplicadas, após algumas manipulações um pouco laboriosas nos levam a concluir que

$$\alpha^2 = 1 \quad e \quad A = 2, \quad (5.6.55)$$

e com esta prescrição vemos que recaímos no caso isotrópico com $a = b = c$ que caracteriza o universo FLRW fechado, inclusive obtendo o valor correto para o coeficiente A da eq.(5.2.14), se comparamos com a eq.(3.1.4) para $D = 3$.

É interessante observarmos que as únicas hipóteses das quais partimos eram a existência de um espaço interno descrito pelo vetor ortonormal \hat{r} , função dos ângulos do espaço externo, que esse vetor gerasse um $T_{\mu\nu}$ conservado e que contribuísse com um termo de curvatura adequado para a geometria externa. Mas quando tratamos um universo Bianchi IX, vemos que essas hipóteses são suficientes para restringir a geometria ao caso particular isotrópico. Isso indica que se esse tipo de estrutura é esperado na evolução do universo, a sua isotropização pode ser uma consequência natural.

6 - Texturas, Gravitação Modificada e o Teorema “No-Hair” Cosmológico

6.1 - Soluções de Energia Finita para Campos Escalares em D Dimensões

Terminamos o capítulo anterior argumentando que os modelos homogêneos fechados podem ser sempre isotropizados desde que apareça um mapeamento adequado entre o espaço interno de um campo escalar multipletto e a seção espacial do espaço-tempo.

Vimos também no capítulo 3 como a equação de estado de um fluido escalar multipletto em $D=3$ evolui até a relação $P = -\frac{1}{3}\rho$, i.e., $\gamma = \frac{2}{3}$, eq.(3.1.15), que nada mais é que a equação de estado de uma textura (89, 90).

Em D dimensões espaciais, é facilmente obtida a equação de estado $P = \frac{2-D}{D}\rho$ para a textura de Davis, de onde observamos que a evolução assintótica para um universo dominado por uma textura é independente do número de dimensões espaciais segundo a mesma eq.(3.1.15). É interessante compararmos essa equação de estado com a equação de radiação em D dimensões espaciais $P = \frac{1}{D}\rho$. Neste caso, a generalização D -dimensional é feita pela troca do fator 3 no denominador, do caso tri-dimensional, para D ; este tipo de raciocínio obviamente não funciona para a textura.

No entanto, no final do capítulo 4 observamos que a textura apresentada nas referências 89 e 90 não era de fato solução da equação de campo escalar (4.3.38) e argumentamos que uma alteração na ação na eq.(4.3.36) poderia corrigir esse problema. A alteração que propomos é a que vem sendo sugerida ao longo deste trabalho. Escrevendo a ação com o coeficiente $\frac{A}{k_{\varphi}^3}$ para o termo cinético, temos que a eq.(4.3.36) será escrita agora como (para o caso geral de $D + 1$ dimensões espaço-temporais)

$$S = \int \left[\frac{A}{2k(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi})} \hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu} g^{\mu\nu} + \eta(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} - \alpha^2)^2 \right] \sqrt{-g} dx^{D+1}. \quad (6.1.1)$$

Com isso, a eq.(4.3.38) transforma-se em

$$\frac{A}{k} \frac{\hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu}}{\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}} g^{\mu\nu} - \frac{2A}{k(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi})^2} (\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}_{|\mu}) \hat{\phi}_{|\nu} g^{\mu\nu} + \frac{A\hat{\phi}}{k(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi})^2} (\hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu}) g^{\mu\nu} - 4\eta\hat{\phi}(\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} - \alpha^2) = 0, \quad (6.1.2)$$

que nada mais é que a equação (2.4.54) com a forma da eq.(5.2.14) para $w(\varphi^2)$, e com a presença agora do potencial de quebra de simetria.

O desenvolvimento subsequente na seção 2.4, para quaisquer dos casos $N \geq D$ ou $N < D$, se aplica integralmente aqui (apenas realçando que estamos falando de um substrato geométrico curvo para o espaço, mas que ainda não introduzimos o fator de escala dependente do tempo como em um modelo FLRW ou Kantowski-Sachs, respectivamente).

Agora, admitindo o vetor $\hat{\phi}$ no mínimo do potencial:

$$\hat{\phi} = \alpha \hat{r}, \quad (6.1.3)$$

com \hat{r} sendo o vetor unitário $(N + 1)$ -dimensional ortogonal ao espaço interno de N dimensões, vemos que a eq.(6.1.2) é identicamente satisfeita.

A energia para esse campo $\hat{\phi}$ advém totalmente do termo cinético e é calculada por

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{1}{2} \frac{\hat{\phi}_{|\mu} \cdot \hat{\phi}_{|\nu}}{\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^D \\ &= \int \frac{1}{2} \tau \sqrt{-g} dx^D = \frac{\tau}{2} \int \sqrt{-g} dx^D, \end{aligned}$$

i.e., a energia será igual a,

$$E = \frac{\min(N, D)}{2} V,$$

onde V é o volume do espaço D -dimensional. Quando $N \geq D$, esse espaço será uma esfera e obviamente V será finito. Quando $N < D$, esse espaço terá a topologia * de $S^1 \times S^1 \times S^1 \times \dots \times S^N$, sendo o número de fatores S^1 igual a $D - N$, e novamente V será finito.

Portanto, todas essas soluções independentes do tempo a D dimensões possuem energia finita e não nula. Como elas utilizam apenas campos escalares, todas elas representam violações ao teorema de Derrick; por este teorema a existência de tais soluções seria impossível, já que a energia é sempre definida positiva. Observe-se que a modificação do termo cinético na eq.(6.1.1) não altera em nada as passagens e conclusões da seção 4.3. Isto mostra definitivamente que a validade deste teorema se restringe a espaços chatos, como havíamos sugerido ao final do capítulo 4.

A novidade em relação à solução que foi apresentada no capítulo 4 é que agora essas soluções, eq.(6.1.3), estão no mínimo do potencial, e podem ser esperadas durante a quebra de simetria.

Quanto à estabilidade dessas estruturas, provada a inutilidade do teorema de Derrick para o caso presente, pode-se argumentar que pelo menos no caso $N = D$, quando as classes de homotopia $\pi_D(S^N)$ são não triviais, teremos soluções estáveis. Os índices de Kronecker d a elas associados poderão ser calculados pela fórmula geral da eq.(4.1.30).

Além disso, no caso particular $N = D = 3$, obtemos a solução usualmente conhecida como textura, que pelo menos para $d = 1$ é comprovadamente estável (89, 90).

* essa topologia pode ser obtida de uma estrutura $R^1 \times R^1 \times \dots \times S^N$ por identificação de pontos, como mencionamos na seção 3.2.

A conclusão que mapeamentos não triviais entre o espaço interno e a seção espacial do espaço-tempo são esperáveis durante estágios da evolução do universo fornece subsídios para a nossa conjectura acerca da isotropização de cosmologias fechadas. E é isso que exploraremos agora.

6.2 - A Gravitação de Einstein Modificada e o Teorema “No-Hair” para Cosmologias Fechadas.

No capítulo 5 propomos que a estrutura interna de campos escalares pudesse ser responsável por contribuições efetivas para as equações de Einstein além da simples constante cosmológica, e como vimos na seção anterior essas contribuições são esperáveis, assim como a constante cosmológica, quando de uma quebra espontânea de simetria.

Podemos então usar essas contribuições na demonstração do teorema “no-hair” exposta no capítulo 1, da mesma forma como é utilizada a constante cosmológica. Das equações (1.6) a (1.8), a única que será modificada pela eq.(5.1.1) é a eq.(1.8):

$$R_a^b = {}^{(3)}R_a^b + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{h} \chi_a^b) = k \left(T_a^b - \frac{1}{2} \delta_a^b T^v \right) - \delta_a^b \lambda + A \tau_a^b,$$

e com a expressão da eq.(5.5.30) vemos que a demonstração do teorema “no-hair” do capítulo 1 pode prosseguir analogamente sem que precisemos impor a condição da eq.(1.19) que a restringia para cosmologias abertas.

É interessante observarmos que a constante cosmológica viola claramente a condição de energia forte e por isso na formulação do teorema é necessário supor que o tensor energia-momentum satisfaça tal condição quando dele retiramos a constante cosmológica

efetiva. O mesmo poderíamos impor com relação às contribuições da estrutura interna, pois quando as retiramos do tensor energia-momentum o que resta é apenas um campo escalar singleto que trivialmente satisfaz a condição forte. Isso garante a realização do teorema “no-hair” em um número qualquer de dimensões. Mas, como vimos no final da seção 2.3, todas as condições de energia são satisfeitas mesmo com a presença dos termos da estrutura interna no $T_{\mu\nu}$, e, assim, a imposição dessas condições a uma parte isolada do tensor energia-momentum torna-se desnecessária.

Analisemos como o estágio de Sitter surgirá naturalmente nas cosmologias FLRW fechada e Kantowski-Sachs tratadas no capítulo 3, independentemente da relação entre a curvatura espacial e a constante cosmológica efetiva. Esta pode surgir quando da QES se adicionarmos ao potencial $V(\hat{\phi})$ da ação na eq.(6.1.1), por exemplo, um termo constante positivo λ , de forma que os seus mínimos correspondam a um valor esperado de vácuo não nulo. As equações de Einstein para esses modelos são as eqs.(3.1.1) e (3.1.2), e (3.2.19) a (3.2.21), respectivamente. Nelas devemos acrescentar o potencial citado. Levando em consideração a forma de w , das eqs.(3.1.4) e (3.2.22),

$$w(\varphi^2) = \frac{\min(N, D) - 1}{k\varphi^2} = \frac{A}{k\varphi^2}, \quad (6.2.4)$$

podemos escrevê-las numa forma única:

$$\frac{D(D-1)\dot{a}^2}{2a^2} = \frac{A\dot{\varphi}^2}{2\varphi^2} + \lambda + k\eta(\varphi^2 - \alpha^2)^2, \quad (6.2.5)$$

$$(D-1)\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(D-2)(D-1)}{2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{A\dot{\varphi}^2}{2\varphi^2} + \lambda + k\eta(\varphi^2 - \alpha^2)^2. \quad (6.2.6)$$

A equação do campo escalar (2.4.78) independe de N :

$$\ddot{\varphi} + D \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi} + \frac{4k\eta\varphi^3}{\Lambda} (\varphi^2 - \alpha^2) = 0. \quad (6.2.7)$$

A solução imediata para esse sistema é dada por

$$\varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad \hat{\phi} = \alpha \hat{r} \quad (6.2.8)$$

e

$$a(t) = a_0 \exp \left[\left(\frac{2\lambda}{D(D-1)} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \right] \quad (6.2.9)$$

O campo escalar se encontra no mínimo do potencial, como na eq.(6.1.3). Assim, comprovamos que estruturas topológicas, que denominaremos de uma forma geral por texturas, formando-se naturalmente quando da QES são capazes de, em conjunto com uma constante cosmológica de valor arbitrário, gerarem um estágio de expansão exponencial no universo. A consideração de um valor crítico para a constante cosmológica pode ser totalmente evitada aqui, e isso determina a vantagem do tratamento feito.

6.3 - A Formulação do Teorema “No-Hair” para Cosmologias Fechadas

Encerramos este trabalho enunciando a formulação do teorema “no-hair” aqui proposta para a inclusão de universos com curvatura espacial positiva:

- O universo, na presença de uma constante cosmológica λ e de uma textura, e sendo válidas as condições de energia, evolui assintoticamente para um estágio localmente de Sitter, livre de matéria e “shear”.

REFERÊNCIAS

1. A. Einstein - "O princípio da relatividade"; 3ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian (1983), pp. 225-241.
2. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler - "Gravitation"; W. H. Freeman and Company (1973), p.704.
3. J. D. Barrow, F. J. Tipler - "The anthropic cosmological principle"; Clarendon Press (1986), pp.423, 490.
4. J. D. Barrow - "The premature recollapse problem in closed inflationary universes"; Nucl. Phys. B 296 (1988) 697.
5. G. W. Gibbons, S. W. Hawking - "Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation"; Phys. Rev. D 15 (1977) 2738.
6. S. W. Hawking, I. G. Moss - "Supercooled phase transitions in the very early universe"; Phys. Lett. B 110 (1982) 35.
7. R. M. Wald - "Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant"; Phys. Rev. D 28 (1983) 2118.
8. E. Weber - "Kantowski-Sachs cosmological models approaching isotropy"; J. Math. Phys. 25 (1984) 2379.
9. E. Weber - "Kantowski-Sachs cosmological models as big-bang models"; J. Math. Phys. 26 (1985) 1308.
10. Ø. Grøn - "Transition of a Kantowski-Sachs cosmological model into an inflationary era"; J. Math. Phys. 27 (1986) 1490.
11. Ø. Grøn, E. Eriksen - "A dust filled Kantowski-Sachs universe with $\lambda > 0$ "; Phys. Lett. A 121 (1987) 217.

12. H. Baofa - "Kantowski-Sachs cosmological model and an inflationary era"; *Int. J. Theor. Phys.* 30 (1991) 1121.
13. A.A. Starobinski - "Isotropization of arbitrary cosmological expansion given an effective cosmological constant"; *JETP Lett.* 37 (1983) 66.
14. J. D. Barrow, J. Stein-Schabes - "Inhomogeneous cosmologies with cosmological constant"; *Phys. Lett. A* 103 (1984) 315.
15. Φ . Grøn - "Isotropization and homogenization of an anisotropic and inhomogeneous cosmological model during the inflationary era"; *Phys. Rev. D* 32 (1985) 1586.
16. J. D. Barrow, Φ . Grøn - "Homogenization and isotropization of an inflationary cosmological model"; *Phys. Lett. B* 182 (1986) 25.
17. L. G. Jensen, J. A. Stein-Schabes - "Is inflation natural?"; *Phys. Rev. D* 35 (1987) 1146.
18. S. W. Hawking, G. F. R. Ellis - "The large scale structure of space-time"; Cambridge University Press (1973), pp. 88, 139.
19. L. D. Landau, E. M. Lifshitz - "Teoria do Campo"; Ed. Mir (1980), p. 378.
20. R. M. Wald - "General relativity"; The University of Chicago Press (1984), pp. 48, 72, 94, 219-220.
21. A. Guth - "Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problem"; *Phys. Rev. D* 23 (1981) 347.
22. L. G. Jensen, J. A. Stein-Schabes - "Effect of inflation on anisotropic cosmologies"; *Phys. Rev. D* 34 (1986) 931.
23. M. S. Turner, L. M. Widrow - "Homogeneous cosmological models and new inflation"; *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 2237.
24. J. D. Barrow, G. Götz - "The asymptotic approach to de Sitter space-time"; *Phys.*

- Lett. B 231 (1989) 228.
25. J. A. Frieman, M. S. Turner - "Evolution of density perturbations through cosmological phase transitions"; Phys. Rev. D 30 (1984) 265.
 26. I. Moss, V. Sahni - "Anisotropy in the chaotic inflationary universe"; Phys. Lett. B 178 (1986) 159.
 27. Y. Kitada, K. Maeda - "Cosmic no-hair theorem in power-law inflation"; Phys. Rev. D 45 (1992) 1416.
 28. K. Nakao, T. Nakamura, K. Oohara, K. Maeda - "Numerical study of cosmic no-hair conjecture: formalism and linear analysis"; Phys. Rev. D 43 (1991) 1788.
 29. K. Maeda - "Inflation as a transient attractor in R^2 cosmology"; Phys. Rev. D 37 (1988) 858.
 30. M. Mijić, J. A. Stein-Schabes - "A no-hair theorem for R^2 cosmologies"; Phys. Lett. B 203 (1988) 353.
 31. A. Berkin - " R^2 inflation in anisotropic universes"; Phys. Rev. D 42 (1990) 1016.
 32. C. B. Collins, S. W. Hawking - "Why is the universe isotropic?"; Astrop. J. 180 (1973) 317.
 33. M. S. Turner - "Inflation in the universe, circa 1986", in Proceedings of the 11th International Conference on General Relativity and Gravitation, Cambridge University Press (1987).
 34. Ya. B. Zel'dovitch, L. P. Grischuk - "Structure and future of the "new" universe"; Mon. Not. R. Astr. Soc. 207 (1984) 23P.
 35. R. A. Matzner, L. C. Shepley, J. B. Warren - "Dynamics of $SO(3, R)$ - homogeneous cosmologies"; Ann. Phys. 57 (1970) 401.
 36. S. P. Novikov - "Some properties of cosmological models"; Sov. Phys. JETP 35

(1972) 1031.

37. J. E. Marsden, F. J. Tipler - "Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity"; *Phys. Rep.* 66 (1980) 109.
38. J. D. Barrow, F. J. Tipler - "Closed universes: their future evolution and final state"; *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 216 (1985) 395.
39. J. D. Barrow - "Cosmic no-hair theorems and inflation"; *Phys. Lett. B* 187 (1987) 12.
40. X. Lin, R. M. Wald - "Proof of the closed-universe-recollapse conjecture for diagonal Bianchi type-IX cosmologies"; *Phys. Rev. D* 40 (1989) 3280.
41. X. Lin, R. M. Wald - "Proof of the closed-universe recollapse conjecture for general Bianchi type-IX cosmologies"; *Phys. Rev. D* 41 (1990) 2444.
42. Φ . Grøn - "Expansion isotropization during the inflationary era"; *Phys. Rev. D* 32 (1985) 2522.
43. G. Götz - "On the cosmological "no-hair"conjecture"; *Phys. Lett. A* 128 (1988) 129.
44. A. B. Henriques, J. M. Mourão, P. M. Sá - "Inflation in a Bianchi-IX cosmological model. The roles of primordial shear and gauge fields"; *Phys. Lett. B* 256 (1991) 359.
45. J. Yokayama, K. Maeda - "Quantum cosmological approach to the cosmic no-hair conjecture in the Bianchi type-IX spacetime"; *Phys. Rev. D* 41 (1990) 1047.
46. J. D. Barrow - "The deflationary universe: an instability of the de Sitter universe"; *Phys. Lett. B* 180 (1986) 335.
47. J. D. Barrow - "Deflationary universes with quadratic lagrangians"; *Phys. Lett. B* 183 (1987) 285.

48. L. F. Abbott, M. B. Wise - "Constraints on generalized inflationary cosmologies"; Nucl. Phys. B 244 (1984) 541.
49. R. P. Mondaini, L. C. Q. Vilar - "Elementary analysis of the recollapse and no-hair conjectures in closed (D+1)-dimensional FLRW cosmologies"; preprint IPRJ-31/92.
50. R. P. Mondaini, L. C. Q. Vilar - "Multiplet SO(N+1) scalar fields driving eternal expansion in closed (D+1)-dimensional FLRW cosmologies"; preprint IPRJ-34/92.
51. Ya. B. Zel'dovitch - "The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations"; Sov. Phys. JETP 14 (1962) 1143.
52. J. D. Barrow - "Quiescent cosmology"; Nature 272 (1978) 211.
53. V. A. Belinskii, L. P. Grischuk, Ya. B. Zel'dovitch, I. M. Khalatnikov - "Inflationary stages in cosmological models with a scalar field"; Sov. Phys. JETP 62 (1985) 195.
54. V. A. Belinskii, L. P. Grischuk, I. M. Khalatnikov, Ya. B. Zel'dovitch - "Inflationary stages in cosmological models with a scalar field"; Phys. Lett. B 155 (1985) 232.
55. C. Eckart - "The thermodynamics of irreversible processes"; Phys. Rev. 58 (1940) 919.
56. M. Özer, M. O. Taha - "A possible solution to the main cosmological problems"; Phys. Lett. B 171 (1986) 363.
57. M. Özer, M. O. Taha - "A model of the universe free of cosmological problems"; Nucl. Phys. B 287 (1987) 776.
58. A. S. Kompaneets, A. S. Chernov - "Solution of the gravitation equations for a homogeneous anisotropic model"; Sov. Phys. JETP 20 (1965) 1303.
59. R. Kantowski, R. K. Sachs - "Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models"; J. Math. Phys. 7 (1966) 443.

60. J. P. Vajk, P. G. Eltgroth - "Spatially homogeneous anisotropic cosmological models containing relativistic fluid and magnetic field"; *J. Math. Phys.* 11 (1970) 2212.
61. C. B. Collins - "Global structure of the "Kantowski-Sachs" cosmological models"; *J. Math. Phys.* 18 (1977) 2116.
62. S. Weinberg - "Gravitation and cosmology"; J. Wiley and Sons (1972) , Cap. XIII.
63. J. L. Synge, A. Schild - "Tensor calculus"; Dover Publications (1978), p. 112.
64. G. F. R. Ellis - "Topology and cosmology"; *Gen. Rel. Grav.* 2 (1971) 7.
65. L. P. Eisenhart - "Riemannian geometry"; Princeton University Press (1949), §§ 26,70.
66. C. P. C. Crawford do Nascimento - "Modelos cosmológicos com campos não-abelianos"; Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa (1987) .
67. L. D. Landau, E. M. Lifshitz - "Fluid Mechanics"; Pergamon Press (1959), Cap. XV.
68. W. G. Dixon - "Special relativity: the foundation of macroscopic physics"; Cambridge University Press (1978) pp. 175-183.
69. W. Israel- "Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory"; *Ann. Phys.* 100 (1976) 310.
70. W. Israel, J. M. Stewart - "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory"; *Ann. Phys.* 118 (1979) 341.
71. D. Pavón, D. Jou, J. Casas-Vázquez - "On a covariant formulation of dissipative phenomena"; *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 36 (1982) 79.
72. D. Jou, J. Casas-Vázquez, G. Lebon - "Extended irreversible thermodynamics"; *Rep. Prog. Phys.* 51 (1988) 1105.
73. S. Coleman - "Classical lumps and their quantum descendants" in "Aspects of sym-

- metry, selected Erice lectures"; Cambridge University Press (1985) .
74. A. M. Polyakov - "Gauge fields and strings"; Harwood Academic Publishers (1987), p. 86, 93.
75. G. Toulouse, M. Kléman - "Principles of a classification of defects in ordered media"; J. Physique Lettres 37 (1976) L-149.
76. U. Enz - "Discrete mass, elementary length, and a topological invariant as a consequence of a relativistic invariant variational principle"; Phys. Rev. 131 (1962) 1392.
77. A. M. Polyakov - "Particle spectrum in quantum field theory"; JETP Lett. 20 (1974) 194.
78. G. 't Hooft - "Magnetic monopoles in unified gauge theories"; Nucl. Phys. B 79 (1974) 276.
79. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin - "Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations"; Phys. Lett. B 59 (1975) 85.
80. K. Huang - "Quarks and Leptons"; World Scientific Publishing (1982) , p. 87.
81. P. W. Higgs - "Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons"; Phys. Rev. 145 (1966) 1156.
82. S. Coleman - "Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields" in "Aspects of symmetry, selected Erice lectures"; Cambridge University Press (1985) .
83. J. Arafune, P. G. O. Freund, C. J. Goebel - "Topology of Higgs fields"; J. Math. Phys. 16 (1975) 433.
84. C. B. Allendoerfer - "The Euler number of a Riemann manifold"; Am. J. Math. 62 (1940) 243.

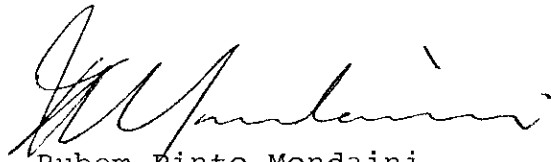
85. Yu. S. Tyupkin, V. A. Fateev, A. S. Shvartz - "Existence of heavy particles in gauge field theories"; JETP Lett. 21 (1975) 42.
86. M. I. Monastyrskii, A. M. Perelomov - "Concerning the existence of monopoles in gauge field theories"; JETP Lett. 21 (1975) 43.
87. G. H. Derrick - "Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles"; J. Math. Phys. 5 (1964) 1252.
88. T. W. B. Kibble - "Topology of domain walls and strings"; J. Phys. A 9 (1976) 1387.
89. R. L. Davis - "Cosmological textures"; Gen. Rel. Grav. 19 (1987) 331.
90. R. L. Davis - "Texture: a cosmological topological defect"; Phys. Rev. D 35 (1987) 3705.
91. R. L. Davis - "Cosmic texture and the microwave background"; Phys. Rev. D 36 (1987) 997.
92. T. Prokopec - "Formation of topological and nontopological defects in the early universe"; Phys. Lett. B 262 (1991) 215.
93. N. Turok - "Global texture as the origin of cosmic structure"; Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 2625.
94. N. Turok - "Global texture as the origin of cosmic structure"; Physica Scripta T36 (1991) 135.
95. C. Brans, R. H. Dicke - "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation"; Phys. Rev. 124 (1961) 925.
96. R. H. Dicke - "Mach's principle and invariance under transformation of units"; Phys. Rev. 125 (1962) 2163.
97. C. M. Will - "The confrontation between general relativity and experiment: an

- update”; Phys. Rep. 113 (1984) 345.
98. C. Mathiazhagan, V. B. Johri - “An inflationary universe in Brans-Dicke theory: a hopeful sign of theoretical estimation of the gravitational constant”; Class. Quantum Grav. 1 (1984) L29.
99. D. La, P. J. Steinhardt - “Extended inflationary cosmology”; Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 376.
100. D. La, P. J. Steinhardt - “Bubble percolation in extended inflationary models”; Phys. Lett. B 220 (1989) 375.
101. P. J. Steinhardt, E. W. Bertschinger - “Prescription for successful extended inflation”; Phys. Lett. B 231 (1989) 231.
102. A. Linde - “Eternal extended inflation and graceful exit from old inflation without Jordan-Brans-Dicke”; Phys. Lett. B 249 (1990) 18.
103. D. La - “Inflationary cosmology based on Weyl-scaled induced gravity”; Phys. Rev. D 44 (1991) 1680.
104. A. L. Berkin, K. Maeda - “Inflation in generalized Einstein theories”; Phys. Rev. D 44 (1991) 1691.
105. D. Sáez, V. J. Ballester - “A simple coupling with cosmological implications”; Phys. Lett. A 113 (1986) 467.
106. T. Singh, A. K. Agrawal - “Some Bianchi-type cosmological models in a new scalar-tensor theory”; Astrop. Spac. Sc. 182 (1991) 289.
107. A. Wiedemann, H. J. W. Müller-Kirsten, D. H. Tchrakian - “Investigation of a theory with soliton-like configurations”; Int. J. Mod. Phys. A 3 (1988) 2349.
108. D. Lorenz - “Exact Bianchi type-VIII and type-IX cosmological models with matter and electromagnetic fields”; Phys. Rev. D 22 (1980) 1848.

"TEXTURAS GLOBAIS E A EXTENSÃO DO TEOREMA NO-HAIR
PARA COSMOLOGIAS FECHADAS"

LUIZ CLAUDIO QUEIROZ VILAR

Tese de Mestrado apresentada ao Cen
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvi-
mento Científico e Tecnológico, fa-
zendo parte da Banca Examinadora os
seguintes Professores:



Rubem Pinto Mondaini
Presidente



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira
Co-orientador



Patricio Anibal Letelier Sotomayor



Luiz Alberto Rezende de Oliveira



Bartolomeu Donatila Bonorino Figueiredo
Suplente