

FRANCISCO ANTONIO TAMARIT

REDES DE NEURÔNIOS COM MEMÓRIAS
CORRELACIONADAS E DILUIÇÃO
ASSIMÉTRICA DAS SINAPSES: ASPECTOS
ESTÁTICOS E DINÂMICOS

Tese de Doutorado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro - 1992

530.13

Aos meus pais.

Agradecimentos

A Evaldo M. F. Curado, pela orientação, pelo incentivo, pelo apoio constante e pela sua amizade.

A Vicky, por todos estes anos cheios de carinho, apoio, paciência, compreensão e solidariedade.

A Constantino Tsallis, pela sua hospitalidade, suas valiosas discussões e contribuições, e pela sua amizade.

A Sergio Cannas, por tantos anos de amizade, pelos bons momentos compartilhados e pela sua constante ajuda.

A o meu amigo Daniel Stariolo, pelo seu apoio e pelos valiosos aportes ao meu trabalho.

À minha amiga Celia Anteneodo, pelo seu carinho, sua valiosa e constante ajuda, e pelos bons momentos compartilhados.

A Helio V. de Resende e Marcelo L. Martins, pela sua hospitalidade, sua solidariedade e sua amizade.

A Edson P. da Silva, Aglaé Magalhães, Anna Chame, Carmen Ochi, Welles Morgado, Ladario da Silva, Eunice e Fortunato Menezes, pelo apoio e pela amizade.

A Vanda, Miriam e Almerio, pela ajuda, a paciência e a amizade.

Aos meus amigos e colegas do grupo de Teoria da Matéria Condensada da Fa.M.A.F.: Pablo Serra, Pedro Pury, Omar Osenda, Carlos Briozo, D. Prato e Carlos Budde.

A Anibal Caride, pela sua grande colaboração e os seus valiosos conselhos.

A Carla e Eliane, pela sua ajuda, paciência e compreensão, que permitiram realizar grande parte do trabalho numérico desta tese.

Ao LAFEX, por permitir o uso da sua infraestrutura.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e ao Conselho Nacional de Pesquisas Científicas e Tecnológicas do Brasil.

À Facultad de Matemática, Astronomía e Física da Universidad Nacional de Córdoba.

Resumo

Nesta tese estudam-se diferentes aspectos dinâmicos e termodinâmicos de redes de neurônios e modelos de vidro de spin.

Os capítulos 1 e 2 são dedicados a introduzir alguns conceitos gerais sobre redes neuronais, vidros de spin e propagação de danos em sistemas magnéticos, necessários para compreender os trabalhos desenvolvidos.

No capítulo 3, estudamos a termodinâmica do modelo de Hopfield quando o número de memórias armazenadas é finito e elas estão organizadas hierarquicamente em pares: as duas memórias de um par estão estatisticamente correlacionadas, enquanto que duas memórias que pertencem a pares diferentes são estatisticamente independentes. Encontramos que, ao introduzir correlação, surge uma fase a temperaturas intermediárias na qual o sistema reconhece os pares mas não as memórias individualmente.

No capítulo 4, introduzimos uma generalização do modelo de Hopfield com interações multi-sinápticas entre R neurônios e com diluição assimétrica dos acoplamentos sinápticos. Encontramos uma equação de recorrência para o valor da superposição entre o estado do sistema e uma das memórias armazenadas, que nos permite estudar as propriedades de reconhecimento do sistema no limite assintótico $t \rightarrow \infty$.

Nos capítulos 5 e 6, estudamos a estrutura do espaço de fase, utilizando a técnica de propagação de danos, do modelo de van Hemmen de vidro de spin e do modelo de Hopfield, respectivamente. Mostramos que existe uma estreita relação entre os comportamentos dinâmico e termodinâmico. As fases vidro de spin encontradas em ambos modelos apresentam um comportamento muito diferente do observado no modelo Sherrington-Kirkpatrick e em modelos de curto alcance.

Abstract

We study different static and dynamic aspects of neural networks and spin glass models.

Chapters 1 and 2 are devoted to introduce some general concepts concerning neural networks, spin glass and spreading of damage.

In chapter 3, we study the thermodynamics of the Hopfield model when a finite number of memories is stored in the net, and they are hierarchically organized in the following way: the two memories of a pair are statistically correlated, but two memories of different pairs are statistically independent. We find that, as correlation is introduced, it appears a new phase which allows the system to recognize pairs, but not individual memories.

In chapter 4, we introduce a generalization of the Hopfield model with higher order interaction and asymmetric dilution. We obtain an equation for the overlap between the state of the system and a memory, from which we can study the asymptotic behavior and the recalling properties.

In chapters 5 and 6, we study the phase space structure of the van Hemmen model of spin glass and of the Hopfield model, respectively, by using the spreading of damage technics. We find that there exists a close relation between the dynamic and static behaviours of these systems. The spin glass phase displays a different behaviour from that found in the Sherrington-Kirkpatrick and short range models.

Sumário

Resumo	iv
Sumario	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	iv
Introdução	1
1 O modelo de Hopfield de redes neuronais	7
1.1 Elementos de Neurobiologia	8
1.2 A modelagem de um sistema de neurônios	14
1.3 O modelo de Hopfield para armazenamento de memórias	18
1.4 O modelo de Hopfield generalizado	23
1.4.1 Armazenamento de um número finito de memórias	24
1.4.2 Armazenamento de um número extensivo de memórias	26

2	Propagação de danos em sistemas magnéticos	30
2.1	Autômatos Celulares	32
2.2	Propagação de dano em sistemas magnéticos	34
2.2.1	A dinâmica Monte Carlo	34
2.2.2	Propagação de danos: banho térmico vs. Glauber	39
2.3	Vidros de spin	44
2.3.1	Mecânica estatística dos vidros de spin	46
2.3.2	Propagação de danos em vidros de spin	54
3	Padrões Correlacionados aos Pares no Modelo de Hopfield	57
3.1	Armazenamento de memórias correlacionadas	59
3.1.1	Modelo de Hopfield com baixa atividade	59
3.1.2	A pseudo inversa	61
3.1.3	Armazenamento de memórias hierarquicamente organizadas . . .	62
3.2	O modelo de Hopfield com memórias correlacionadas aos pares	63
3.3	A termodinâmica do modelo de Hopfield com um número finito de memórias correlacionadas aos pares	66
3.4	As soluções de campo médio	69
3.4.1	A solução paramagnética	69
3.4.2	As soluções de reconhecimento	70
3.4.3	As soluções simétricas	73
3.4.4	Soluções assimétricas	77
3.5	Estudo da estabilidade das soluções de campo médio	78
3.5.1	Estabilidade da solução paramagnética	79
3.5.2	Estabilidade da solução de reconhecimento de pares	79
3.5.3	Estabilidade das soluções de reconhecimento de padrões	81
3.5.4	Estabilidade das soluções antisimétricas	82
3.5.5	Estabilidade das soluções simétricas	83
3.6	Conclusões	84

4	Dinâmica de uma rede de neurônios diluída e assimétrica com interações multi-sinápticas	86
4.1	Modelo	91
4.2	O limite de infinitas memórias	97
4.3	Conectividade finita para $R = 3$	103
4.4	Conclusões	105
5	Propagação de danos no modelo de van Hemmen de vidro de spin	108
5.1	O modelo de van Hemmen de vidro de spin	108
5.2	Método	112
5.3	Diagrama de fases dinâmico	114
5.4	Conclusões	124
6	Propagação de danos no modelo de Hopfield	127
6.1	Método	129
6.2	Comportamento dinâmico	130
6.2.1	O modelo de Hopfield com uma memória: o modelo de Ising ferromagnético com interações de alcance infinito	130
6.2.2	O caso $\alpha \ll 1$	131
6.2.3	O caso $\alpha \neq 0$	135
6.2.4	Memórias correlacionadas	144
6.3	Conclusões	144
7	Conclusões	147

Lista de Figuras

1.1	Desenho esquemático de um neurônio	10
1.2	Desenho esquemático de uma sinapse química	11
1.3	O diagrama de fases do modelo de Hopfield no plano T vs α obtido por Amit et al.	28
2.1	Distância de Hamming em função da temperatura para o modelo de Ising ferromagnético bidimensional submetido à dinâmica de Glauber	41
2.2	Propagação de danos em função da temperatura para o modelo de Ising tridimensional submetido à dinâmica banho térmico	42
2.3	Esquema de quebra da simetria de réplicas de Parisi	49
2.4	Funções (a) $q(x)$ e (b) $P(q)$ obtidas com quebra de simetria de réplicas .	50
2.5	Diagrama de fases do modelo Sherrington-Kirkpatrick com campo externo nulo	52
2.6	Distância $\langle D \rangle$ versus temperatura no modelo Sherrington Kirkpatrick .	55
2.7	Distância $\langle D \rangle$ versus temperatura para o modelo Edwards-Anderson 3D	56
3.1	Estrutura hierárquica das memórias	65

3.2	Soluções de reconhecimento como função da temperatura.	74
4.1	Desenho esquemático do contato multi-sináptico entre neurônios.	88
4.2	Solução esquemática da equação para os pontos fixos da relação de recorrência (4.13).	100
4.3	Diagrama de fases no plano T vs α para diferentes valores do grau R da interação multi-sináptica.	102
5.1	Diagrama de fases termodinâmico do modelo de van Hemmen	111
5.2	Propagação de danos para $J_0 = 0.25$ em função da temperatura.	116
5.3	Tempo médio necessário para duas configurações se tornarem idênticas em função da temperatura, para $J_0 = 0.25$	117
5.4	Propagação de danos para $J_0 = 0.50$ em função da temperatura.	118
5.5	Tempo médio necessário para duas configurações se tornarem idênticas em função da temperatura, para $J_0 = 0.5$	119
5.6	Valor médio da distância de Hamming calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC vs. temperatura para $J_0 = 1.5$	120
5.7	Propagação de danos para $J_0 = 0$ em função da temperatura.	121
5.8	Valor médio da distância de Hamming para $T = 0.3$ em função de J_0 calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC.	122
5.9	Valor médio da distância de Hamming para $T = 0.7$ em função de J_0 calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC.	122
5.10	Distribuição de $\langle dh \rangle$ para $J_0 = 0.25$ e (a) $T = 0.075$ e (b) $T = 0.25$	125
6.1	Propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 1$ em função da temperatura.	132

6.2	Propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 2$ em função da temperatura: (a) valor médio da distância de Hamming $\langle dh \rangle$ e (b) tempo médio necessário para que as duas configurações se tornem idênticas . . .	134
6.3	Propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 3$ em função da temperatura: (a) valor médio da distância de Hamming $\langle dh \rangle$ e (b) tempo médio necessário para que as duas configurações se tornem idênticas . . .	136
6.4	Histograma das médias temporais da distância de Hamming para (a) $p = 2$ e (b) $p = 3$, em ambos os casos para $T = 0.1$ (fase de reconhecimento).	137
6.5	Diagrama de fases termodinâmico T vs α do modelo de Hopfield. As linhas I, II, III e IV indicam os cortes ao longo dos quais estuda-se a dinâmica do modelo.	138
6.6	$\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.0074$, $N = 1024$, $\tau_3 = 2000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\circ), $d(0) = 1/2$ (\square) e $d(0) = 1$ (\blacksquare). .	140
6.7	$\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.011$, $N = 1024$, $\tau_3 = 4000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\blacktriangledown), $d(0) = 1/2$ (\square) e $d(0) = 1$ (\blacksquare). .	141
6.8	$\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.020$, $N = 1024$, $\tau_3 = 8000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\blacklozenge), $d(0) = 1/2$ (\square) e $d(0) = 1$ (\blacksquare). .	141
6.9	$\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.043$, $N = 1024$, $\tau_3 = 8000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\bullet), $d(0) = 1/2$ (\circ) e $d(0) = 1$ (\blacksquare). .	142
6.10	$\langle dh \rangle$ vs T para $p = 2$ e $\kappa = 0.25$	145
6.11	$\langle dh \rangle$ vs T para $p = 2$ e $\kappa = 0.50$	145
6.12	$\langle dh \rangle$ vs T para $p = 2$ e $\kappa = 0.75$	146

Lista de Tabelas

4.1	Valor crítico da capacidade de armazenamento e os correspondentes valores de ϵ para diferentes valores de R no caso $T = 0$	101
4.2	Temperatura crítica e os correspondentes valores de ϵ para diferentes valores de R no limite $\alpha \rightarrow 0$	103
4.3	Valor mínimo da conectividade para que exista solução de reconhecimento para diferentes valores de p no caso $R = 3$	104
4.4	Valor da temperatura na qual surgem as soluções de reconhecimento para diferentes valores da conectividade K , para o caso $R = 3$ e $p = 2$	105

Introdução

Originalmente restrito à neurobiologia, o estudo das funções cerebrais tem se tornado nos últimos anos um campo de interesse para diferentes áreas do conhecimento científico, como física, matemática aplicada, ciências da computação e engenharia, entre outras. As motivações deste estudo são igualmente variadas, abrangendo desde a curiosidade da neurobiologia por compreender o funcionamento do cérebro até o interesse da engenharia em desenvolver sistemas artificiais capazes de reproduzir diferentes funções cerebrais.

O significativo aporte que a mecânica estatística tem dado nesta área teve início com o modelo apresentado por John Hopfield em 1982 [1] para armazenamento de padrões e a posterior generalização introduzida por Amit et al. [2] em 1985. Em poucos anos, tanto o interesse mostrado pela comunidade científica como os ótimos resultados obtidos, mostraram a importância e transcendência destes trabalhos. Apesar de ignorarem muitos conceitos biologicamente importantes e de apresentarem graves limitações, eles representaram sem dúvida um ponto de partida apropriado para posteriores modi-

ficações.

A conexão entre o problema de memorização em redes de neurônios e a mecânica estatística pode não ser imediata para quem não está muito familiarizado com o estudo da mecânica estatística de sistemas magnéticos. Por um lado, a estrutura de multivales do espaço de fase encontrada em modelos de campo médio de vidro de spin sugere uma forma adequada de modelar o processo de memorização associando, por meio de uma dinâmica Monte Carlo, cada uma das configurações de um dado vale com a sua configuração de mínima energia. Assim, o problema de memorização resume-se a encontrar uma forma de garantir que as memórias que se desejam armazenar coincidam ou sejam muito próximas destes mínimos. Por outro lado, a presença de ruído no processo de transmissão de informação nas células nervosas sugere que a dinâmica da rede pode ser melhor modelada por um processo estocástico, e não por uma dinâmica determinista. Os processos Monte Carlo, comumente utilizados na simulação de sistemas magnéticos [3] (em particular em vidros de spin) a temperatura fixa surgem assim como uma forma simples de modelar a dinâmica da rede, onde a temperatura faz o papel de parâmetro de controle de ruído. Se o sistema pode ser descrito por um hamiltoniano (como acontece no modelo de Hopfield), a dinâmica com ruído térmico é dominada pela função *energia livre de Helmholtz*, sendo portanto possível estudar analiticamente o comportamento do sistema.

O modelo de Hopfield de redes neuronais com um grande número de memórias armazenadas [1,2,4] e o modelo Sherrington-Kirkpatrick [5] de vidro de spin compartilham o fato de terem uma estrutura não trivial do espaço de fase, que está dividido em vales ou estados termodinâmicos separados entre eles por barreiras de energia que, no limite termodinâmico, tornam-se impenetráveis para o sistema. Em ambos os modelos esta estrutura é detalhadamente conhecida a partir de estudos termodinâmicos. Outros sistemas físicos apresentam também espaços de fase igualmente complexos, em particular alguns autômatos celulares e possivelmente vidros de spin de dimensão finita. Uma forma apropriada de estudar esta estrutura do espaço de fase é estudar a propagação de

danos no sistema, isto é, a evolução da distância de Hamming entre duas configurações inicialmente próximas e submetidas ao mesmo ruído térmico. Esta técnica tem sido aplicada nos últimos anos em diversos sistemas magnéticos submetidos à diferentes tipos de dinâmicas Monte Carlo, como por exemplo *banho térmico* (heat bath) e *Glauber* [6]. Estes estudos têm o duplo propósito de determinar, em primeiro lugar, as possíveis relações entre as transições dinâmicas obtidas por este método e as transições termodinâmicas preditas pela mecânica estatística e, em segundo lugar, obter informação sobre o espaço de fase de sistemas para os quais a termodinâmica não foi ainda resolvida. O modelo de Edwards-Anderson [7] para vidros de spin constitui um exemplo destes últimos modelos: ainda hoje não é claro se estes sistemas compartilham com o modelo Sherrington-Kirkpatrick o fato de terem uma estrutura de multivales do espaço de fase. No outro extremo, o modelo de Hopfield representa um raro exemplo no qual a estrutura do espaço de fase, embora complexo, pode ser adequadamente controlada, seja pelo número de memórias armazenadas ou pela correlação entre elas. Sendo assim, ele fornece a oportunidade de estudar por um lado, como a propagação de danos responde às mudanças estruturais e, por outro, a relação entre as transições dinâmicas e estáticas.

Os capítulos 1 e 2 são dedicados a introduzir os conceitos fundamentais usados nesta tese e portanto não apresentam resultados originais, mas apenas uma revisão de resultados prévios.

O capítulo 1 é um breve resumo dos pontos mais importantes no estudo de redes de neurônios, com particular ênfase na mecânica estatística do modelo de Hopfield para armazenamento de padrões. Um estudo completo e atualizado deste tema está fora das possibilidades desta tese, e portanto o primeiro capítulo pretende apenas expor ao leitor, de uma forma simples, como a partir dos princípios biológicos que governam a transmissão de informação no sistema nervoso, é possível modelar um sistema capaz de reproduzir algumas das suas principais funções, em particular a sua habilidade para reconhecer padrões armazenados por associação. Esta descrição limita-se ao modelo de Hopfield na sua versão original [1] (dinâmica determinista) e à generalização introduzida

por Amit et al. [2,4] que leva em conta a presença de ruído na transmissão de informação.

No capítulo 2 introduzimos o conceito de propagação de dano em sistemas magnéticos. Dado que esta técnica originou-se no estudo de autômatos celulares [8,9], o capítulo começa com uma breve revisão da sua definição, para rapidamente passar a descrever os principais resultados obtidos em sistemas magnéticos usando esta técnica [6]. Como dois capítulos desta tese estão relacionados com o estudo de propagação de danos em vidros de spin, este capítulo é encerrado com um resumo dos principais resultados obtidos com estes sistemas [10,11,12].

Os capítulos 3, 4, 5 e 6 apresentam os trabalhos originais desenvolvidos nesta tese.

No capítulo 3 estuda-se a termodinâmica do modelo de Hopfield quando um número finito de memórias é armazenado no sistema, sendo que estas memórias estão hierarquicamente organizadas, mas com uma estrutura hierárquica simples: elas são agrupadas em pares, sendo que duas memórias de um mesmo par estão correlacionadas, enquanto que duas memórias de diferentes pares são estatisticamente independentes. É um resultado já conhecido no estudo do modelo de Hopfield que a superposição entre memórias destrói a estabilidade dos padrões armazenados, impondo sem dúvida uma das maiores limitações deste modelo. Foi com o objetivo de contornar estes problemas que diferentes autores procuraram novas regras de aprendizagem, mais versáteis no que diz respeito à forma na qual podem ser escolhidas as memórias. O enfoque do capítulo 3 foi diferente: estudou-se como a termodinâmica do modelo é afetada pela presença de correlação efetiva entre os padrões (e não somente de uma superposição entre os mesmos) no próprio modelo de Hopfield. Dado que as interações sinápticas no modelo de Hopfield são simétricas e a dinâmica é governada por um processo Monte Carlo, é possível imaginar o sistema como descrito por um hamiltoniano H em contato térmico com um reservatório térmico a temperatura T , onde a temperatura é um parâmetro de controle do nível de ruído da rede. A partir do cálculo da energia livre do sistema obtemos as equações de campo médio, as quais permitem estudar as propriedades de

reconhecimento do sistema. Encontramos que, além das fases paramagnética (para altas temperaturas) e de reconhecimento (para baixas temperaturas) presentes no caso de memórias não correlacionadas, surge uma nova fase para temperaturas intermediárias na qual o sistema associa as configurações iniciais com os diferentes pares.

No capítulo 4 misturam-se num mesmo modelo dois ingredientes muito importantes do ponto de vista biológico: *interações multi-sinápticas* e *diluição assimétrica*. Estes dois elementos foram estudados separadamente nos últimos anos e, em particular, a maioria destes estudos tratou de generalizações e modificações feitas sobre o modelo proposto por Hopfield. Interações multi-sinápticas provaram ser um mecanismo eficiente para aumentar a capacidade de armazenamento em redes de neurônios e, como acontece em vidros de spin com interações multi-spin, levam a transições termodinâmicas de diferentes naturezas que as encontradas em sistemas com interações entre pares de neurônios. Embora possa parecer um ingrediente artificial, estudos biológicos têm provado que no sistema nervoso são comuns os processos de interação entre um axônio e uma sinapse, os quais podem ser modelados por acoplamentos polinomiais de grau maior que dois nos estados dos neurônios. Por outro lado, o conceito de diluição assimétrica é sem dúvida fundamental em qualquer sistema que pretenda modelar o sistema nervoso, dado que é bem conhecido o fato da informação geralmente ser transmitida em um único sentido nas células nervosas [13]. Isto quer dizer que, dados por exemplo dois neurônios quaisquer A e B, se o neurônio A envia um sinal elétrico ao neurônio B é pouco provável que o neurônio B envie um sinal ao neurônio A, e se o envia, a interação sináptica é certamente diferente. Isto também é verdade para o caso de interações axônio-sinapse entre mais de dois neurônios. Nós consideramos então no capítulo 4 um sistema com interações polinomiais de grau maior que dois nos estados dos neurônios, com diluição assimétrica das sinapses. Desde que o sistema seja suficientemente diluído, é possível estudar exatamente a dinâmica do modelo, e em particular o seu comportamento assintótico ($t \rightarrow \infty$). Encontramos uma equação de recorrência para a superposição entre o estado do sistema e as memórias, e a partir dela estudamos as propriedades de reconhecimento do modelo.

Mostramos que estes dois ingredientes não somente são importantes do ponto de vista biológico, mas permitem melhorar a capacidade de armazenamento se comparamos os nossos resultados com os obtidos para modelos simétricos não diluídos com interações multisinápticas.

No capítulo 5 estuda-se a propagação de danos no modelo de van Hemmen [14,15] para vidros de spin. Como o modelo Sherrington-Kirkpatrick, este modelo proposto por L. van Hemmen em 1982 é um modelo de campo médio que inclui tanto frustração como aleatoriedade nos acoplamentos. A diferença entre eles reside precisamente na distribuição de probabilidade para os acoplamentos. Enquanto que no modelo Sherrington-Kirkpatrick todos os acoplamentos são independentes, no modelo van Hemmen eles estão fracamente correlacionados. Provamos que a fase vidro de spin deste modelo tem um comportamento dinâmico muito diferente do encontrado no modelo Sherrington-Kirkpatrick e nos modelos de curto alcance. No capítulo 6 este estudo é estendido ao modelo de Hopfield. Aumentando o número de memórias armazenadas e introduzindo correlação entre elas, estuda-se como a propagação de danos responde ao aumento na complexidade do espaço de fase. A fim de compreender melhor a estrutura do espaço de fase destes modelos, calculamos diferentes grandezas dinâmicas, como a distância de Hamming dh entre duas configurações submetidas ao mesmo ruído térmico, a probabilidade P de que as duas trajetórias no espaço de fase não se juntem e o tempo médio necessário para que as duas configurações se tornem idênticas.

Finalmente no capítulo 7 discute-se os principais resultados desta tese e as suas possíveis extensões.æ

Capítulo 1

O modelo de Hopfield de redes neuronais

Durante séculos o cérebro humano tem suscitado a curiosidade e atraído a atenção de pensadores e cientistas de diferentes áreas do conhecimento, na esperança de poder compreender os mecanismos responsáveis por comportamentos tão variados e complexos. Conceitos tais como *memorização*, *aprendizagem*, *capacidade de abstração*, *capacidade de generalização* e *sentimentos*, entre outros, ficaram durante muito tempo fora do alcance do conhecimento científico. Foi neste século, graças aos grandes avanços na neurobiologia e a uma visão inter e multidisciplinar do problema, que a ciência começou a compreender os princípios básicos que governam o funcionamento do sistema nervoso e, num passo ainda mais audacioso, modelar e construir sistemas artificiais capazes de reproduzir muitas das operações próprias do cérebro.

Formado por aproximadamente 10^{10} pequenas unidades (células nervosas ou neurônios) que interagem entre si numa intrincada arquitetura de conexões, o cérebro surge hoje,

aos olhos dos físicos, como o paradigma de sistema complexo. Segundo este ponto de vista, a capacidade de memorizar, de aprender, de abstrair e generalizar, entre outras, são habilidades obtidas não somente como consequência da especificidade e especialização dos componentes do sistema nervoso, mas também a partir do trabalho cooperativo de milhares de neurônios relativamente simples no que se refere ao processamento e transmissão de informação.

A idéia de que a arquitetura das conexões entre neurônios é responsável por muitas das suas funções é antiga na neurobiologia. Em 1949 o neurobiologista Donald Hebb escreveu no seu livro “The Organization of Behaviour” [16]:

“When an axon of cell A is near enough to excite cell B and repeatedly or persistently takes part in firing it, some growth process or metabolic change takes place in one or both cells such that A’s efficiency, as one of cells firing B, is increased.”

Foi no início da década de oitenta que a física irrompeu definitivamente nas neurociências, a partir do trabalho pioneiro de John Hopfield [1], que soube associar os conceitos neurológicos introduzidos por Hebb à física dos materiais magnéticos desordenados. O estudo da termodinâmica de vidros de spin tinha levado os físicos estatísticos a desenvolverem um grande arsenal de ferramentas matemáticas que foram rapidamente aplicadas com sucesso ao estudo de modelos de redes de neurônios.

Dado que o estudo de modelos de redes de neurônios abarca a maior parte do trabalho desenvolvido nesta tese, neste capítulo vamos apresentar as idéias básicas necessárias para modelar estes sistemas. Começamos discutindo alguns conceitos simples de neurobiologia para depois introduzir o modelo de Hopfield e descrever as suas propriedades mais importantes.

1.1 Elementos de Neurobiologia

Para entender melhor quais são os ingredientes fundamentais a levar em conta na hora de modelar um sistema de neurônios, é importante começar estudando o funcionamento e as propriedades das células nervosas. Embora seja impossível falar de um neurônio

típico, podemos distinguir em quase todos eles três partes bem diferenciadas (indicadas esquematicamente na figura 1.1) segundo sua estrutura e função:

- **corpo celular ou soma** : contém o núcleo celular e a maioria dos ribossomos, lisossomos e retículos endoplasmáticos, e é o responsável pelas principais funções metabólicas da célula;
- **dendrites** : são fibras que partem do corpo celular ramificando-se repetidamente ao redor do soma. São especializados em receber sinais de células sensoriais ou dos axônios de outros neurônios. Estes sinais são convertidos em pequenos impulsos elétricos que se propagam até o corpo celular.
- **axônio** : geralmente é uma única fibra que conduz impulsos elétricos originados na união dele com o corpo celular. A sua longitude pode variar entre 0.01mm e aproximadamente 1m e o seu diâmetro entre 5 e 100μ ($\mu = 10^{-6}\text{m}$). O extremo do axônio apresenta pequenas ramificações que se conectam com outros neurônios ou com células motoras. Nas proximidades dos extremos o axônio possui pequenas vesículas cheias de moléculas neurotransmissoras que, na maioria dos casos, são as responsáveis pela transmissão da informação entre neurônios.

A membrana que recobre o neurônio joga um papel fundamental no processo de transmissão de pulsos elétricos. Na ausência de estímulos elétricos, é responsável por manter uma diferença de potencial entre o interior e o exterior do neurônio, conhecido como *potencial de repouso*. A origem deste potencial transmembranar está na existência de diferenças nas concentrações internas e externas de íons aos quais a membrana é permeável. A concentração de íons de potássio (K^+) no interior da célula é aproximadamente 10 vezes maior que no fluido extracelular, enquanto que as concentrações de íons de sódio (Na^+) e cloro (Cl^-) são muito maiores (aproximadamente 25 e 14 vezes respectivamente) fora do que dentro da célula. Estas diferenças são mantidas graças à ação de proteínas imersas na membrana que transportam ativamente (consumindo energia celular) estes íons em sentido contrário aos gradientes eletroquímicos. Uma outra propriedade importante da membrana celular é a sua permeabilidade seletiva com respeito

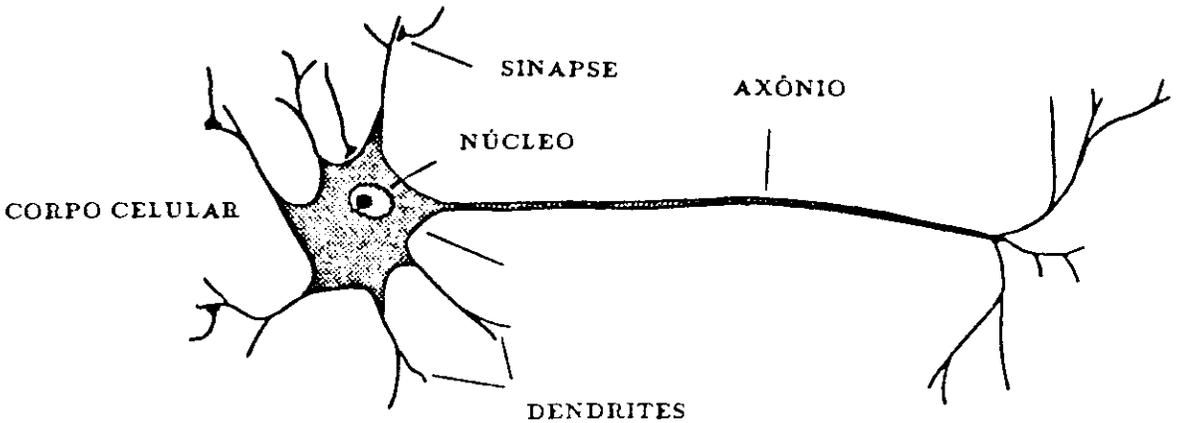


Figura 1.1: Desenho esquemático de um neurônio

aos diversos tipos de íons. Isto faz com que a membrana tente diminuir as diferenças nas concentrações dos diversos íons com diferentes velocidades. Estas duas propriedades, *gradientes de concentração de íons e permeabilidade seletiva*, levam a uma diferença de potencial entre o exterior e o interior da célula de aproximadamente -70 mV , indicando que, no repouso, o interior da membrana está carregada negativamente com respeito ao fluido iônico exterior.

Cada neurônio recebe estímulos de até 10^4 outros neurônios. Da mesma forma, ele envia informação elétrica para um número similar de neurônios ou células musculares. Como foi dito no início do capítulo, acredita-se hoje que seja esta arquitetura de conexões a responsável pela maioria das funções superiores desenvolvidas pelo sistema nervoso.

A região onde dois neurônios interagem é chamada *sinapse*. Neste ponto, o sinal que viajou pelo axônio do neurônio *pré-sináptico* é retransmitido pela dendrite do neurônio *pós-sináptico*. Existem dois tipos de sinapses: químicas e elétricas. Nestas últimas o pulso elétrico passa diretamente de uma célula para outra e caracterizam-se por uma maior eficiência na transmissão. Mas a maioria das conexões entre neurônios são de origem química, e nesta tese serão considerados somente modelos que levam em conta este tipo de sinapse.

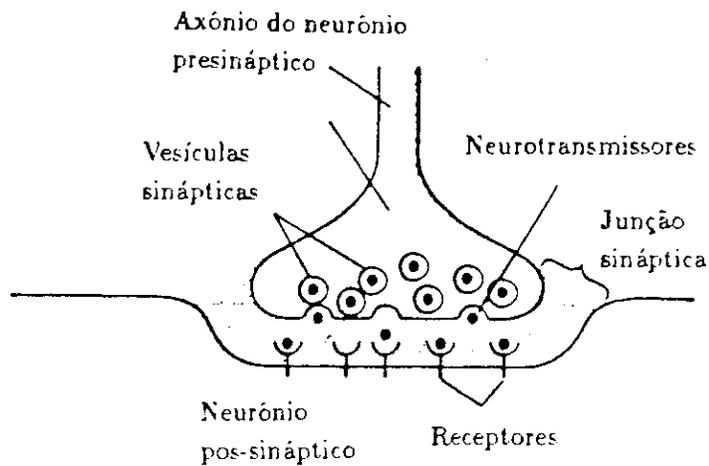


Figura 1.2: Desenho esquemático de uma sinapse química

A dinâmica do processo de transmissão e processamento de informação pode ser descrita da seguinte maneira:

1. Depois de processar a informação coletada pelas dendrites e o próprio corpo celular, o neurônio pode-se encontrar em um dos dois estados: ativo ou passivo. No estado ativo, um sinal elétrico é propagado ao longo do axônio e replicado nas suas ramificações, recebendo todos os terminais aproximadamente a mesma informação. No estado passivo não há propagação de sinal elétrico.
2. Quando este sinal elétrico alcança um dos extremos do axônio, mudanças na permeabilidade aos íons de cálcio induzem a fusão das membranas das vesículas com a membrana celular, liberando-se, assim, moléculas neurotransmissoras na junção sináptica (figura 1.2).
3. Os neurotransmissores difundem-se através do meio sináptico até alcançar a membrana da dendrite pós-sináptica (ver figura 1.2), ligando-se aos sítios receptores dos canais (proteínas transportadoras) da membrana e mudando a sua permeabilidade aos diferentes íons, principalmente potássio e sódio. Esta alteração na permeabilidade induz flutuações no potencial da membrana (conhecido como *potencial pós-sináptico* (PPS)), que podem ser tanto positivas (correspondentes a

estímulos excitatórios) como negativas (correspondentes a estímulos inibitórios), dependendo do tipo de neurotransmissor e canal receptor envolvidos. Em termos eletroquímicos, um estímulo excitatório produz um fluxo de sódio de fora para dentro do neurônio pós-sináptico, e um estímulo inibitório produz um fluxo de potássio no sentido contrário. O primeiro despolariza a membrana enquanto o segundo a hiperpolariza.

4. O PPS difunde-se pela dendrite atenuando-se lentamente, até atingir o corpo celular. A intensidade do sinal que chega ao corpo celular é medida pela *eficiência sináptica*, que depende da distância percorrida e das correntes iônicas induzidas na sinapse.
5. Na região do axônio adjacente ao corpo celular é computada a soma dos PPS que chegam das diferentes dendrites, durante um pequeno intervalo de tempo. Se esta soma ultrapassar um dado limiar próprio de cada neurônio, então existirá uma alta probabilidade de ocorrer um desbalanceamento das concentrações de repouso de sódio e potássio entre o interior e o exterior da membrana. Em termos eletroquímicos, produzir-se-á um significativo aumento da permeabilidade da membrana com respeito aos íons de sódio numa região bem localizada, durante um breve intervalo de tempo e, conseqüentemente, uma entrada de íons de sódio, levando assim a uma forte e rápida despolarização (a diferença de potencial entre os meios separados pela membrana é agora positiva). Esta mudança na permeabilidade é devida a canais protéicos que ficam abertos ou fechados dependendo da diferença de potencial. Quando o potencial atinge o valor de equilíbrio do sódio (o valor de repouso se a membrana fosse somente permeável ao sódio) estes canais se fecham e a permeabilidade da membrana com respeito ao sódio volta ao seu valor normal. Simultaneamente abrem-se os canais de potássio dependentes do potencial, aumentando assim a permeabilidade ao potássio. Durante este período a membrana é hiperpolarizada, isto é, a diferença de potencial é mais negativa que o valor de repouso e alcança quase o valor de equilíbrio com respeito ao potássio. Como aconteceu com o sódio, quando o potencial de membrana atinge este valor,

os canais de potássio dependentes do potencial fecham-se e a diferença de potencial entre o interior e o exterior da membrana retorna ao seu valor de repouso. Esta rápida perturbação no potencial de membrana é chamada *potencial de ação*. As correntes elétricas iônicas induzem uma despolarização nas regiões próximas, iniciando-se o mesmo processo, agora um pouco mais longe do corpo celular. Desta forma a perturbação viaja ao longo do axônio, quase sem decrescer em intensidade e replicando-se nas diferentes ramificações do axônio, fechando assim o ciclo.

O tempo típico requerido para o sinal fechar este ciclo (viajar ao longo do axônio do neurônio pré-sináptico, os neurotransmissores se difundirem através da junção sináptica e alcançarem a membrana pós-sináptica, e o PPS difundir até o soma do próximo neurônio) é da ordem de 2 milisegundos. Após ter emitido um sinal, o neurônio precisa, para se recompor, de um tempo da ordem de 2 milisegundos, durante o qual ele não é ativado, independentemente do valor da soma dos PPS's que alcançam o corpo celular. Este período é conhecido como *tempo refratário curto*.

Finalmente, é importante levar em conta que existem diferentes fatores de aleatoriedade envolvidos na transmissão e processamento da informação. Como já foi dito, quando o potencial de ação atinge o extremo do axônio, os neurotransmissores armazenados nas vesículas são liberados e eventualmente alcançam a membrana pós-sináptica, sendo responsáveis pelo PPS que chega ao soma do neurônio pós-sináptico. É possível identificar neste processo pelo menos três fontes de ruído:

- o número de vesículas liberadas, assim como o seu tamanho, é muito variável;
- na ausência de potencial de ação, existe uma probabilidade não nula de liberação espontânea de neurotransmissores;
- existem flutuações no número de moléculas neurotransmissoras que atingem a membrana pós-sináptica e se ligam aos receptores dos canais.

É difícil imaginar que estes fenômenos sejam apenas ruído aleatório. É mais provável que eles tenham surgido durante o processo evolutivo, na tentativa de melhorar a eficiência do sistema nervoso como sistema capaz de processar informação. Se este

for o caso, é possível que, ao modelar uma rede de neurônios, a sua qualidade melhore se estes processos aleatórios forem levados em conta.

Neste rápido resumo temos ignorado muitas propriedades importantes das células nervosas e da arquitetura das suas conexões, mas uma análise mais detalhada está fora dos objetivos desta tese. Para os leitores interessados neste tema, existem importantes referências que fornecem uma descrição completa e atualizada [13,17].

1.2 A modelagem de um sistema de neurônios

Existem muitos exemplos, em mecânica estatística de equilíbrio e não equilíbrio, de sistemas que, como o cérebro, são formados por unidades relativamente simples mas que ao interagir dão lugar a fenômenos cooperativos não triviais e de alta complexidade. O modelo de Hubbard para férmions interagentes na rede [18,19,20], a convecção de Bénard em um fluido e o modelo de Ising para sistemas magnéticos são apenas alguns exemplos que podem ser citados. O método básico para abordar qualquer um destes problemas do ponto de vista da mecânica estatística, tanto de equilíbrio quanto de não equilíbrio, pode ser resumido nos seguintes passos:

- identificar os elementos ou unidades básicas do sistema e abstrair aquelas propriedades e quantidades que acreditamos sejam as relevantes para descrever o fenômeno de interesse;
- determinar ou propor quais são as interações fundamentais entre os elementos do sistema;
- determinar e resolver as equações;
- para sistemas que envolvem um grande número de graus de liberdade é necessário fazer também uma análise estatística a fim de poder prever propriedades médias e flutuações.

Levando-se em conta que o cérebro é formado por um número muito grande de unidades relativamente simples, que interagem de forma muito especial, apresentando

comportamentos muito complexos, parece lícito tentar modelar algumas das suas propriedades seguindo este roteiro. Vejamos então, rapidamente, alguns pontos que são considerados fundamentais ao se modelar um sistema de neurônios:

1. o neurônio pode estar somente em dois estados: ativo ou passivo;
2. o efeito da interação de um neurônio sobre outro é determinado pelo caráter inibitório ou excitatório da sinapse e pela sua eficiência sináptica;
3. cada neurônio escolhe seu estado comparando a soma dos potenciais sinápticos recebidos com um dado valor próprio de referência;
4. existem diferentes efeitos aleatórios na transmissão da informação.

O primeiro ponto sugere que o estado do i -ésimo neurônio do sistema no tempo t pode ser modelado por uma variável dinâmica tipo Ising $S_i(t) = \pm 1$. Por convenção assumimos que $+1$ corresponde ao estado ativo, e -1 ao estado passivo.

O pulso disparado pelo neurônio pré-sináptico j no tempo $t - \tau$ produz um PPS na soma do neurônio pós-sináptico no tempo t e pode, por exemplo, ser expresso como:

$$V_{ij}(S_j(t - \tau) + 1)/2.$$

Se no tempo $t - \tau$ o neurônio j estiver no estado passivo, o neurônio i não receberá nenhuma influência dele, mas se estiver ativado, então o estímulo recebido será V_{ij} . O sinal de V_{ij} determina o caráter excitatório ou inibitório (maior e menor que zero respectivamente) da sinapse, e o seu módulo mede a eficiência sináptica. O caso $V_{ij} = 0$ indica que não existe conexão entre estes neurônios. O parâmetro τ modela o tempo requerido pelo sinal elétrico para viajar do soma do neurônio pré-sináptico até o soma do neurônio pós-sináptico e vamos supor que ele é o mesmo para todas as células. O estímulo total recebido pelo neurônio i no tempo t é simplesmente a superposição linear de todos os estímulos individuais, ou seja:

$$V_i(t) = \sum_j^{K_i} V_{ij} (S_j(t - \tau) + 1)/2, \quad (1.1)$$

onde a soma é feita sobre os K_i neurônios conectados às dendrites do neurônio i . Ele compara então esta soma com o seu próprio valor de referência V_{0i} . Se o estímulo for igual ou superior a este limiar, então o neurônio dispara um pulso elétrico no tempo t . Se for menor, ele não dispara. Neste ponto foi suposto que o tempo durante o qual ele integra os estímulos recebidos é desprezível se comparado com o tempo τ .

O estado do sistema no tempo t é determinado pelo padrão de atividade da rede, ou seja, pelo conjunto de estados de cada neurônio:

$$S = \{ S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t) \}.$$

Numa primeira aproximação é lícito supor que a evolução temporal do sistema é governada por uma dinâmica determinista da forma:

$$S_i(t) = \text{sinal}(h_i(t - \tau)),$$

onde h_i é a função de ativação do neurônio i , definida como

$$h_i(t) = V_i - V_{0i} = \sum_{j \neq i}^N V_{ij} (S_j(t) + 1)/2 - V_{0i}.$$

Mas se pretendemos tornar o modelo mais realista precisamos levar em conta os efeitos aleatórios descritos na seção anterior. Como a contribuição de cada dendrite ao potencial de membrana é uma variável aleatória e dado o grande número de dendrites de cada neurônio, podemos supor que a soma V dos PPS é também uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade é dada pela função gaussiana:

$$Pr(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta^2} \exp\left\{-\frac{(V - V_i)^2}{2\delta^2}\right\},$$

onde δ é a largura da distribuição associada às diferentes fontes de ruído do processo e o valor médio V_i é a soma dos potenciais pós-sinápticos dada por (1.1). A probabilidade do neurônio i disparar um sinal é dada pela probabilidade da soma dos PPS ser maior que o seu limiar de referência, ou seja

$$Pr(S_i = +1) = \int_{V_{0i}}^{\infty} dV P(V) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf}\left(\frac{V_i - V_{0i}}{\delta\sqrt{2}}\right) \right),$$

onde $\text{erf}(x)$ é a função erro definida como:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}.$$

Da mesma forma

$$Pr(S_i = -1) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{V_i - V_{i0}}{\delta \sqrt{2}} \right) \right).$$

Usando o fato da função erro ser ímpar, podemos finalmente escrever:

$$Pr(S_i) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{S_i (V_i - V_{i0})}{\delta \sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{S_i h_i}{\delta \sqrt{2}} \right) \right).$$

Esta última expressão pode ser aproximada com um erro menor que 1 % por

$$P(S_i) = \frac{1}{2} \{1 + \tanh(\beta h_i S_i)\}, \quad (1.2)$$

onde $\beta = (2\sqrt{2}\delta)^{-1}$ é o parâmetro de controle de ruído.

Neste ponto, o leitor familiarizado com a mecânica estatística de sistemas magnéticos pode perceber a estreita relação entre este modelo de rede de neurônios e o bem conhecido modelo de Ising. Para isto temos simplesmente que associar o estado do neurônio com o momento magnético, as eficiências sinápticas com as interações de troca e o parâmetro β^{-1} , que controla o nível de ruído, com a temperatura. A principal diferença entre os dois modelos está no fato das interações de troca satisfazerem a terceira lei de Newton, enquanto que, como já foi dito, as conexões sinápticas são, em geral, assimétricas.

Quando se estuda um sistema magnético, o problema consiste em poder descrever as propriedades do sistema para uma dada topologia e para um determinado tipo de interação entre os momentos magnéticos. No caso de uma rede de neurônios o problema é o contrário: dado um conjunto de propriedades cerebrais que se deseja modelar, procuram-se a arquitetura da rede e a forma das eficiências sinápticas que permitam o melhor desempenho do sistema. Dentre as diferentes funções do cérebro vamos somente considerar nesta tese a sua capacidade de armazenar informação de forma associativa.

Finalmente, antes de nos restringirmos ao problema de memorização, é importante destacar que existem outras alternativas na modelagem de um sistema de neurônios. Em particular, uma variante muito importante consiste em descrever o estado do neurônio como uma variável contínua e supor que a dinâmica da rede envolve tempos contínuos (equações diferenciais) ou tempos discretos (mapas acoplados). Esta abordagem do problema supõe que a codificação da informação não é feita somente pelo estado

do neurônio, mas pela sua *frequência de disparo*. Os sistemas contínuos são muito importantes e eficientes na modelagem de diferentes propriedades e funções cerebrais [21, 87] mas nesta tese estudamos somente sistemas modelados por variáveis tipo Ising.

1.3 O modelo de Hopfield para armazenamento de memórias

Uma dinâmica determinista associada a uma rede de neurônios define um mapeamento entre as 2^N possíveis configurações iniciais e os atratores. O espaço de fase é assim dividido em subconjuntos caracterizados pelo fato de que todas as configurações que pertencem a um dado subconjunto evoluem dinamicamente para um mesmo atrator. O problema de armazenamento de memórias por associação pode ser descrito nos seguintes termos: dado um conjunto de p configurações fixas da rede $\{\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \dots, \xi_N^\mu\}$ ($\mu = 1 \dots, p$), procuramos um conjunto de eficiências sinápticas e uma regra de atualização para as variáveis de estado dos neurônios tais que as p configurações escolhidas sejam atratores da dinâmica. A configuração inicial é interpretada como um estímulo externo ao qual a rede é submetida momentaneamente e que contém informação parcial de uma das memórias. A rede faz automaticamente a associação entre a configuração inicial e o correspondente atrator desde que deixemos o sistema evoluir.

Dentre todos os modelos propostos para armazenamento de memórias, nenhum teve tanta repercussão entre os físicos quanto o modelo introduzido por John Hopfield em 1982 [1]. Ele consiste de N neurônios, cada um modelado por uma variável tipo Ising, $S_i(t)$, que pode tomar os valores $+1$ e -1 , representando respectivamente os estados ativo e passivo do neurônio i no instante t . Cada neurônio interage com todos os outros neurônios da rede por meio de uma matriz J , sendo que o sinal do elemento J_{ij} está associado ao caráter excitatório ou inibitório e o seu módulo à eficiência sináptica.

O estado do neurônio i na memória μ é uma variável aleatória independente ξ_i^μ que pode valer ± 1 com igual probabilidade. A prescrição para construir a matriz J é:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad J_{ii} = 0. \quad (1.3)$$

A evolução temporal do sistema é governada por uma dinâmica Monte Carlo seqüencial à temperatura nula: a cada intervalo de tempo Δt , um único neurônio é escolhido aleato-

riamente e o seu estado atualizado segundo a regra:

$$S_i(t+1) = \text{sinal}(h_i(t)), \quad (1.4)$$

onde $h_i(t)$ é o campo local ou função de ativação do neurônio i no instante t , definida por

$$h_i = \sum_{j \neq i} J_{ij} S_j.$$

A matriz J e a matriz V para as eficiências sinápticas estão relacionadas da seguinte forma:

$$J_{ij} = \frac{V_{ij}}{2}.$$

Notemos que ao definir h_i fixamos também o limiar de potencial de cada neurônio como sendo:

$$V_{0i} = \sum_{j \neq i}^N \frac{V_{ij}}{2}.$$

Segundo a regra (1.4), os pontos fixos da dinâmica estão determinados pela condição

$$S_i h_i > 0 \quad \text{para todo } i.$$

Quando o estado do sistema coincide com uma das memórias armazenadas, por exemplo a ν -ésima, esta condição pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \xi_i^\nu h_i &= \xi_i^\nu \sum_{j \neq i}^N J_{ij} \xi_j^\nu \\ &= \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\nu \xi_i^\mu \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \xi_j^\nu \xi_j^\mu \\ &= \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \sum_{\mu \neq \nu}^p \xi_i^\nu \xi_i^\mu \xi_j^\nu \xi_j^\mu. \end{aligned}$$

O primeiro termo é o sinal produzido pelo próprio padrão ν e o segundo é um termo de ruído devido à contribuição das restantes $(p-1)$ memórias. Este último é a soma de $(p-1)(N-1)$ variáveis aleatórias independentes e no limite $N \rightarrow \infty$ é uma variável aleatória com valor médio zero e variância $(p-1)(N-1)$ (pelo teorema do limite central). Levando-se em conta o fator $1/N$ na frente da soma, podemos aproximar:

$$\xi_i^\nu h_i \approx 1 + \sqrt{\frac{(p-1)}{N}}.$$

Isto quer dizer que, no limite $N \rightarrow \infty$ e p finito, o sinal do campo local é igual ao sinal da variável de estado e, portanto, o padrão armazenado é um ponto fixo da dinâmica. Mas, se o número de padrões armazenados cresce com N , eventualmente o ruído produzido pelos outros padrões destrói a estabilidade da memória. Na próxima seção analisaremos em mais detalhes estes dois casos. Vamos provar agora que a função

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N J_{ij} S_i S_j \quad (1.5)$$

é uma função de Liapunov da dinâmica. Isto é, ela é limitada inferiormente e o seu valor (função de $\{S_i(t)\}$) decresce monotonicamente com o tempo à medida que o sistema evolui. Seja k o neurônio atualizado no tempo t e $\Delta_k E$ a mudança em E produzida pela atualização

$$\Delta_k E = -\Delta S_k(t) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N J_{kj} S_j + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N J_{jk} S_j \right\}.$$

Usando o fato da matriz de acoplamento ser simétrica, podemos reescrever:

$$\Delta_k E = -\Delta S_k \sum_{j \neq k}^N J_{jk} S_j = -\Delta S_k h_k.$$

Pela própria regra de atualização, $h_k \geq 0$ implica $\Delta S_k \geq 0$ enquanto que $h_k < 0$ implica $\Delta S_k \leq 0$. Então

$$\Delta_k E \leq 0 \quad \text{para todo } k.$$

Provar que a função é limitada inferiormente é imediato. O sistema deve então percorrer o espaço de fase de forma tal que o valor desta função decresça, até atingir um mínimo local. Notemos que para obter este resultado somente usamos o fato da matriz de acoplamentos ser simétrica, mas não sua forma particular.

Uma vez definido o modelo, o próximo passo é estudar a sua qualidade. As principais propriedades que determinam a qualidade do sistema para armazenamento de memórias são :

- o tamanho das bacias atratoras das memórias armazenadas, que é uma medida da mínima informação parcial requerida pelo sistema para associar corretamente uma configuração inicial com a correspondente memória;

- a capacidade de armazenamento, definida como a razão entre o número máximo de memórias que é possível armazenar, sem que o sistema perca a capacidade de recuperar os padrões com um erro pequeno, e o número de neurônios da rede;
- o número e as propriedades dos estados espúrios dinamicamente estáveis, isto é, aqueles estados que não correspondem às memórias armazenadas mas são criados pela prescrição. Quanto maior o número destes estados e o tamanho das suas bacias atratoras, maior será a probabilidade do sistema ficar preso em um destes atratores antes de atingir o atrator correto;
- as restrições que possam existir sobre os padrões a serem armazenados;
- o tempo de convergência, definido como o tempo médio necessário para que o sistema alcance o ponto fixo de reconhecimento.
- a robustez do sistema, definida como a capacidade do sistema de preservar suas habilidades ainda que a sua matriz de sinápsese seja parcialmente danificada.

Os diferentes atratores do sistema podem ser encontrados estudando a evolução temporal da distância de Hamming

$$\Delta^\mu(t) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |S_i(t) - \xi_i^\mu|$$

entre um padrão armazenado (no caso o μ -ésimo) e o estado da rede. Assim definido, Δ^μ é a fração de neurônios da rede em que as duas configurações diferem. Mas, como veremos no próximo capítulo, é mais útil trabalhar com a superposição m_μ entre o estado do sistema e o padrão, definida como

$$m_\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu S_i(t).$$

Δ_μ e m_μ estão relacionados pela expressão:

$$\Delta_\mu = \frac{(1 - m_\mu)}{2}.$$

O sistema é caracterizado então pelo conjunto de p variáveis $\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$. Quando o sistema atinge um atrator estas variáveis mantêm-se constantes no tempo. Se o atrator

não tem nenhuma correlação com um dado padrão, então a sua superposição será nula. Se o atrator é próximo de uma memória, então a correspondente superposição será próxima de um e as demais próximas de zero, e nós diremos que o sistema associou a configuração inicial com esta memória.

Vamos descrever brevemente as principais propriedades do modelo de Hopfield. Elas se referem exclusivamente ao limite de redes de tamanho infinito com um número finito de memórias armazenadas:

- os p padrões armazenados são pontos fixos da dinâmica;
- devido à simetria de inversão dos estados dos neurônios da função E , o estado oposto a uma dada memória também é armazenado;
- os p padrões armazenados e os obtidos por inversão são os únicos mínimos absolutos da função de Liapunov (1.5);
- as bacias atratoras das memórias são muito grandes;
- existe um grande número de atratores espúrios, os quais apresentam uma superposição não nula com diferentes memórias;
- Uma classe importante de atratores espúrios é aquela que envolve uma mesma superposição com mais de um padrão. Eles são chamados estados simétricos. Aqueles atratores que têm a mesma superposição não nula com um número par de memórias são instáveis, enquanto que aqueles que têm uma mesma superposição não nula com um número ímpar de memórias são estáveis;
- existem aproximadamente $3^p/2$ estados termodinâmicos simétricos e estáveis.

Após ter apresentado o modelo de Hopfield e algumas das suas principais propriedades é importante discutir a sua validade como modelo de rede de neurônios. Levando-se em conta o dito na seção 1.1, fica claro que certas suposições do modelo ignoram algumas características biológicas:

- a regra (1.3) implica que a matriz J é simétrica, ou seja, a influência do neurônio i sobre o j é igual à influência do neurônio j sobre o i ;
- a priori, cada neurônio pode interagir com todos os outros;
- a atualização seqüencial não tem nenhuma justificativa biológica.

Embora pouco realistas, estas suposições são de grande utilidade do ponto de vista matemático, pois como veremos na próxima seção, elas permitem, ao introduzir ruído no sistema, usar todas as ferramentas da mecânica estatística dos modelos de campo médio para vidros de spin [5,14,15]. Neste sentido, o modelo de Hopfield deve ser entendido como um excelente ponto de partida para posteriores complicações mais realistas. Em particular, muitas propriedades encontradas neste modelo simétrico, completamente conectado e seqüencial, têm provado ser robustas frente a mudanças na sua definição.

1.4 O modelo de Hopfield generalizado

Como já foi dito na seção 1.1, o processo biológico de transmissão de informação envolve diferentes efeitos aleatórios, os quais nos levaram até a expressão (1.2) para a evolução dinâmica do sistema. Por outro lado, na seção anterior provamos que a função (1.5) é uma função de Liapunov do sistema, evidenciando assim a analogia entre o modelo de Hopfield e os modelos de campo médio para vidros de spin. Estes dois ingredientes levaram D. Amit, H. Gutfreund e H. Sompolisky [4] a propor, em 1985, uma generalização do modelo original que leva em conta a existência de ruído. O sistema é descrito pelo hamiltoniano:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N J_{ij} S_i S_j,$$

e a dinâmica é governada por um processo Monte Carlo banho térmico a temperatura finita:

$$S_i(t + \Delta t) = \begin{cases} +1 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}[1 + \tanh(2\beta h_i(t))] \\ -1 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}[1 - \tanh(2\beta h_i(t))] \end{cases},$$

onde β é o parâmetro que controla o nível de ruído da rede e depende dos diversos fatores envolvidos no processo sináptico. Por analogia com sistemas termodinâmicos β^{-1}

é chamado de *temperatura generalizada*. Notemos que, no limite $\beta \rightarrow \infty$, recuperamos o modelo determinista original. A relação entre este modelo para memória associativa e os modelos tipo Ising para vidro de spin fica agora mais clara.

Dado que o ruído permite ao sistema evoluir sem que necessariamente o valor da função de Liapunov decresça, não existem mais pontos fixos. Estes são substituídos por trajetórias dinâmicas que ficam confinadas, após um certo transiente, ao redor de uma memória ou de um estado espúrio. Para estudar este fenômeno calculamos então a média temporal das superposições entre o estado e as memórias. A dinâmica usada satisfaz a condição de balanço detalhado (ver capítulo 2 para uma discussão mais detalhada), e portanto, para tempos suficientemente grandes, o sistema visita o espaço de fase segundo a distribuição de equilíbrio de Gibbs. A sua dinâmica é então dominada pela função energia livre de Helmholtz e o cálculo da média temporal pode ser substituído no equilíbrio termodinâmico por

$$m_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi^\mu \langle S_i \rangle,$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota a média térmica.

Amit, Gutfreund e Sompolinsky estudaram a termodinâmica de equilíbrio de modelo de Hopfield generalizado em duas situações: (i) quando um número finito p de memórias não correlacionadas é armazenado e (ii) quando este número cresce linearmente com o tamanho da rede ($p = \alpha N$). Dedicaremos o final deste capítulo à descrição dos principais resultados obtidos por estes autores [2,4].

1.4.1 Armazenamento de um número finito de memórias

Começamos calculando a energia livre por neurônio para uma dada realização da desordem:

$$f(\beta, m_\mu, \{J_{ij}\}) = -\frac{1}{\beta N} \ln Z(\beta, \{J_{ij}\}),$$

onde Z é a função de partição definida por:

$$Z(\beta, \{J_{ij}\}) = \text{Tr}_{S_i} \exp(-\beta H) = \text{Tr}_{S_i} \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j\right).$$

Substituindo a expressão de J_{ij} , calculando cuidadosamente o traço e tomando o limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$ mantendo p finito, obtêm-se finalmente as equações autoconsistentes para as superposições m_μ :

$$m_\mu = \langle \langle \xi^\mu \tanh \left(\beta \sum_{\mu} m_\mu \xi^\mu \right) \rangle \rangle$$

e a expressão para a energia livre:

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^p m_\mu^2 - \frac{1}{\beta} \langle \langle \ln 2 \cosh \left(\beta \sum_{\mu=1}^p m_\mu \xi^\mu \right) \rangle \rangle,$$

onde $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ denota a média na desordem. No próximo capítulo deduziremos explicitamente estas relações.

Amit et al. [2] estudaram detalhadamente as soluções destas equações, e os resultados principais obtidos são os seguintes:

- Para $T \equiv \beta^{-1} > 1$ o comportamento dinâmico é ergódico e, portanto, os valores médios das superposições com os padrões armazenados são nulos. Por analogia com os sistemas magnéticos chama-se esta fase de paramagnética. Isto quer dizer que, para níveis suficientemente altos de ruído, o sistema não é capaz de reconhecer as memórias.
- Em $T_c = 1$ o sistema sofre uma transição de fase de segunda ordem para uma fase não ergódica, na qual existem $2p$ estados termodinamicamente estáveis e degenerados, que correspondem a uma superposição não nula com uma única memória ou anti-memória (configuração oposta a uma memória). Estes estados são chamados de *estados de reconhecimento*.
- No intervalo $0.46 < T < 1$ os estados de reconhecimento são os únicos estados termodinamicamente estáveis. Embora neste intervalo a superposição com as memórias não é próxima de 1 (o sistema reconhece com muito erro), o ruído suprime os estados espúrios encontrados em $T = 0$.
- Em $T = 0.46$ surgem estados simétricos espúrios dinamicamente estáveis. Eles correspondem a uma mesma superposição não nula do estado termodinâmico do

sistema com três memórias. À medida que o nível de ruído decresce, aparecem outras soluções correspondentes a uma mesma superposição não nula com um número ímpar de memórias. Quanto maior é o número de memórias envolvidas, menor a temperatura na qual elas aparecem, e maior e a sua energia livre.

- Em todo o intervalo $0 \leq T \leq 1$ as soluções de reconhecimento são as de menor energia. Embora surjam outras soluções, o sistema não sofre então outra transição de fase termodinâmica.
- Existem também soluções das equações de campo médio que correspondem a uma mesma superposição não nula com um número par de memórias, mas elas são sempre termodinamicamente instáveis.
- Além das soluções espúrias simétricas, existem soluções mais gerais que envolvem diferentes superposições com diferentes memórias e são chamadas de soluções assimétricas. Elas têm sempre energia maior que as soluções de reconhecimento.

Resumindo, a solução do modelo generalizado mostra que a presença de ruído, além de ser um ingrediente biológico experimentalmente verificado, é muito importante como mecanismo capaz de suprimir estados espúrios que atrapalham o processo de reconhecimento. Mas, por outro lado, tanto na construção de circuitos como na simulação numérica, esta classe de sistemas é extremamente mais complicada de tratar do que o modelo Hopfield determinista originalmente proposto.

1.4.2 Armazenamento de um número extensivo de memórias

O armazenamento de um número extensivo de memórias implica em complicações adicionais quando comparado com o caso anterior. Isto porque a condição de auto-mediação:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\xi_i^1, \dots, \xi_i^p) \approx \langle \langle g(\xi_i^1, \dots, \xi_i^p) \rangle \rangle$$

usada para calcular a função de partição no caso p finito é válida somente se $2^p \ll N$ [23]. Mas quando queremos estudar a termodinâmica no limite $N \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow \infty$ com

$\alpha = p/N$ constante, esta condição não é mais satisfeita. A energia livre por neurônio é dada por

$$f(\beta) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} \langle \ln Z \rangle,$$

e o cálculo do valor médio do $\ln Z$ é muito complicado. Uma forma de contorná-lo é usar o truque de réplicas [5], que permite calcular esta média a partir do cálculo exato de $\langle \langle Z^n \rangle \rangle$ usando a seguinte relação:

$$\langle \ln Z \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle \langle Z^n \rangle \rangle - 1}{n}.$$

$\langle \langle Z^n \rangle \rangle$, quando n é um inteiro positivo, é a função de partição de um conjunto de n réplicas exatas não interagentes do sistema. Usando este método, Amit et al. [4] calcularam, em 1985, a termodinâmica do modelo de Hopfield generalizado para valores arbitrários de α . Para $T = 0$ os principais resultados encontrados foram:

- Existe um intervalo de valores de α no qual o sistema reconhece eficientemente as memórias armazenadas, ou seja, existem estados metaestáveis que têm uma superposição não nula com um único padrão cuja bacia atratora é muito grande.
- A máxima capacidade de armazenamento depende da precisão exigida no reconhecimento. Se requeremos que a recuperação seja perfeita, então o número de padrões armazenados tem que ser menor que $N/2 \ln N$. Mas, se é permitido que o atrator tenha uma pequena fração de neurônios desalinhados com a memória armazenada, então o número de memórias pode crescer linearmente com N desde que

$$\alpha < \alpha_c \approx 0.138.$$

Neste valor crítico, a superposição com uma memória é aproximadamente 0.97, o que corresponde a um erro menor que 1.5%. Para valores de α maiores, as soluções de reconhecimento desaparecem abruptamente e o sistema perde a capacidade de reconhecer as memórias.

- Para $0.03 < \alpha < 0.138$ as únicas soluções que existem são as de reconhecimento e soluções vidro de spin.

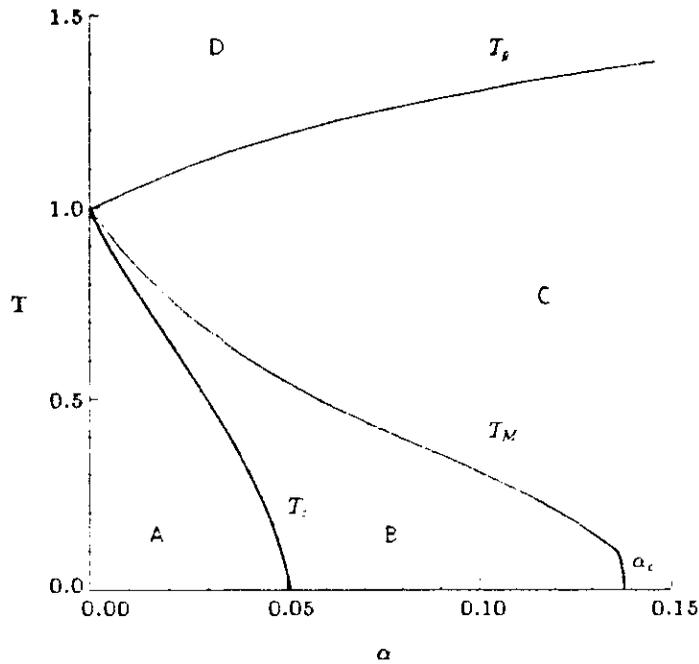


Figura 1.3: O diagrama de fases do modelo de Hopfield no plano T vs α obtido por Amit et al.

- Para $\alpha > 0.051$ o mínimo global corresponde às soluções vidro de spin enquanto que, para $\alpha < 0.051$, corresponde às $2p$ soluções de reconhecimento.
- Para $\alpha < 0.03$ surgem soluções espúrias misturando diferentes memórias.
- Em $\alpha = \alpha_c$ os estados de reconhecimento desaparecem abruptamente.

Quando o sistema é submetido a ruído térmico, eles encontraram os seguintes comportamentos:

- Existem soluções de reconhecimento desde que $T < T_M(\alpha)$. Esta temperatura decresce monotonicamente desde $T = 1$ (para $\alpha = 0$) até $T = 0$ para ($\alpha = \alpha_c$);
- o sistema apresenta também uma fase vidro de spin;
- as soluções de reconhecimento desaparecem descontinuamente mas a descontinuidade é menor à medida que o nível de ruído aumenta.

Na figura 1.3 apresentamos o diagrama de fases separando os diferentes regimes no plano T vs α [4]. Nas regiões A e B, o sistema é capaz de armazenar um número extensivo de memórias. Fora desta região, o sistema perde esta habilidade: na linha crítica as superposições caem abruptamente a zero, exceto no eixo T onde a transição é contínua. Na região C o sistema é um vidro de spin. Existem muitos mínimos mas nenhum correlacionado com os padrões. Aumentando o ruído térmico, entramos na região D (paramagnética) onde o sistema é ergódico. Nas regiões A e B, existem soluções próximas das de reconhecimento e vidro de spin. Na região A, as primeiras são os mínimos globais, enquanto que, em B, estes mínimos correspondem às soluções vidro de spin. Para valores suficientemente pequenos de T e α , existem também soluções simétricas correlacionadas com um número ímpar de memórias.

Neste capítulo pretendemos apenas introduzir os conceitos fundamentais e os principais resultados obtidos com o modelo de Hopfield. A partir do modelo original e das extensões introduzidas por Amit et al., uma grande quantidade de trabalhos dedicaram-se a completar este estudo e, principalmente, a tentar superar suas limitações. Dentre estas limitações, aquela que se refere ao fato das memórias serem variáveis aleatórias não correlacionadas merece particular interesse e, no capítulo 3, abordaremos este problema em particular. Para aqueles leitores interessados em trabalhos de revisão, os livros *Modeling brain function* de D. Amit [23] e *Introduction to the theory of neural computation* de H. Hertz, A. Krogh e R. Palmer [24] apresentam uma descrição completa e atualizada dos principais avanços da mecânica estatística na área de redes de neurônios.

Capítulo 2

Propagação de danos em sistemas magnéticos

Neste capítulo introduzimos o conceito de *propagação de danos* e os resultados mais importantes obtidos nos últimos anos. Esta técnica, originalmente usada para estudar a estrutura do espaço de fase de sistemas complexos, como autômata celulares e redes de neurônios assimétricas, entre outros, tem sido muito aplicada também nos últimos anos ao estudo de sistemas magnéticos.

Autômata celulares, redes neuronais e modelos magnéticos compartilham o fato de serem sistemas descritos por um número muito grande de unidades simples, dispostas numa rede espacialmente discreta, as quais interagem entre si e com campos externos, dando origem a fenômenos coletivos de extrema complexidade, dos quais atratores caóticos e transições de fase sofisticadas são exemplos ilustrativos.

A diferença fundamental entre eles reside, como veremos neste capítulo, nos seguintes fatos:

1. Os modelos magnéticos são sempre governados por uma função hamiltoniana; no entanto, isto não é necessário para autômatos celulares ou redes de neurônios. Sendo assim, a mecânica estatística de equilíbrio ensina como estudar a termodinâmica de um sistema magnético, mas isto não faz sempre sentido para um autômato celular ou uma rede de neurônios.
2. Autômatos celulares e redes de neurônios são definidos por meio de regras dinâmicas para a evolução temporal do sistema, enquanto que os modelos clássicos de sistemas magnéticos são versões tão simplificadas dos materiais reais que carecem de uma dinâmica própria.

Embora estejamos interessados no estudo de sistemas descritos por uma função hamiltoniana, na seção 2.1 introduzimos o conceito de autômato celular, dado que a técnica de propagação de danos popularizou-se a partir da necessidade de achar uma forma de estudar a sensibilidade destes sistemas às condições iniciais. Na seção 2.2 discutimos brevemente o modelo de Ising para sistemas magnéticos e mostramos que, embora ele não possua uma dinâmica própria, é possível definir um processo estocástico (processo Monte Carlo) no seu espaço de fase, que permite percorrer as configurações microscópicas com a distribuição de equilíbrio de Gibbs. Provamos que um modelo tipo Ising provido de uma dinâmica Monte Carlo é também um autômato celular, sendo então interessante se perguntar sobre a sua sensibilidade às condições iniciais. Descrevemos porque, embora do ponto de vista termodinâmico elas são equivalentes, as dinâmicas banho térmico (heat bath) e de Glauber apresentam um comportamento radicalmente oposto quando se estuda o comportamento assintótico de duas configurações inicialmente muito próximas. Apresentamos os resultados mais importantes no que se refere ao estudo da propagação de danos em sistemas magnéticos e dedicamos especial atenção ao estudo da dinâmica de vidros de spin.

2.1 Autômatos Celulares

Um autômato celular (AC) é um sistema dinâmico caracterizado por ter um número muito grande de graus de liberdade e pela discretização do espaço, do tempo e dos estados.

O sistema é formado por N unidades ou *células* que representam cada elemento discreto do espaço. O estado de cada unidade é representado por uma variável σ_i que pode tomar r valores diferentes $\sigma_i = 0, 1, \dots, r - 1$. Cada unidade tem associada um conjunto de K unidades (chamadas *entradas*). O estado do sítio i no tempo t é determinado por uma regra dinâmica f_i que é função do estado das suas entradas em tempos anteriores (geralmente em $t-1$). Este processo de atualização é simultaneamente aplicado a todas as unidades do sistema a cada intervalo de tempo Δt . Embora não seja necessário, vamos supor, por simplicidade, o AC como um conjunto de variáveis associadas aos sítios de uma rede regular. Notemos que não existe, a priori, nenhuma limitação sobre os K sítios que interagem com uma unidade mas na maioria dos AC estudados, cada uma interage com algum conjunto próximo e, algumas vezes, também com ela própria.

A definição de AC é tão ampla que é importante poder classificá-los. A primeira grande diferenciação a fazer é entre autômatos celulares *deterministas* e *probabilistas*. Um autômato celular é determinista se o estado de cada unidade no tempo t depende somente do estado das suas entradas em tempos anteriores:

$$\sigma_i(t) = f_i(\{\sigma_j(t)\}, \dots, \{\sigma_j(t - m\Delta t)\}), \quad j = 1, \dots, K, \quad (2.1)$$

onde a função f_i pode tomar r valores. Um autômato celular é probabilista se o estado de cada unidade no tempo t não só depende do estado em tempos anteriores das suas entradas, mas também de uma ou mais variáveis aleatórias:

$$\sigma_i(t) = f_i(\{\sigma_j(t)\}, \dots, \{\sigma_j(t - m\Delta t)\}, \{z\}), \quad j = 1, \dots, K, \quad (2.2)$$

onde $\{z\}$ representa o conjunto de variáveis aleatórias.

Um dos mais completos estudos de AC foi realizado por S. Wolfram [25], que os classificou sistematicamente e introduziu quantidades mensuráveis, como transientes,

entropias e expoentes de Liapunov. Um estudo completo de AC está fora da área de interesse desta tese, mas os leitores interessados encontrarão na referência [6] um estudo completo e atualizado.

A generalidade das definições (2.1) e (2.2) faz dos autômatos celulares um instrumento de grande utilidade não só no estudo de diversos sistemas físicos, mas também em outras ciências, como por exemplo biologia, onde o nível de descrição dos sistemas leva a modelos cuja evolução temporal não tem que estar restrita às leis da física microscópica. Foi precisamente para modelar um sistema de genes que Kauffman introduziu o conceito de autômatos celular, criando um modelo que se tornaria muito estudado [8,9] e que leva atualmente o seu nome.

Nós estamos particularmente interessados no estudo da sensibilidade às condições iniciais dos AC. Para tal fim foram introduzidas diferentes quantidades, como entropia espacial, entropia temporal e expoente de Liapunov [6,25], as quais permitiram realizar um estudo sistemático em uma grande variedade de autômatos celulares. Mas, o cálculo destas quantidades requer muito trabalho numérico e a sua convergência é, em geral muito lenta, além de não serem facilmente implementáveis em autômatos celulares complexos. Uma outra maneira (mais operacional) de estudar a sensibilidade às condições iniciais é introduzir o conceito de propagação de danos. Para isso definimos a *distância de Hamming* entre duas configurações binárias (que podem tomar os valores ± 1) quaisquer $\sigma_i(t)$ e $\rho_i(t)$:

$$d(t) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N | \sigma_i(t) - \rho_i(t) | .$$

Notemos que d mede a fração de sítios *danificados* no tempo t , ou seja, a fração de sítios em que $\sigma_i(t) \neq \rho_i(t)$. Esta definição é facilmente generalizável para autômatos de mais de dois estados.

Deixando evoluir duas configurações de um mesmo AC que inicialmente diferem numa fração pequena de sítios (infinitesimal no limite no limite $N \rightarrow \infty$), podemos classificar os comportamentos assintóticos como:

- caótico : se $d(\infty) \rightarrow cte \neq 0$ para $d(0) \rightarrow 0$;
- congelado : se $d(\infty) \rightarrow 0$ para $d(0) \rightarrow 0$.



Para implementar o limite $d(0) \rightarrow 0$ usamos o seguinte truque: deixamos evoluir três configurações σ_A , σ_B e σ_C que, em $t = 0$ satisfazem

$$d_{AB} = s/N, \quad d_{BC} = s/N, \quad d_{AC} = 2s/N,$$

onde s é um número inteiro pequeno. O limite $d(0) \rightarrow 0$ é obtido calculando :

$$d(t) = d_{AB}(t) + d_{BC}(t) - d_{AC}(t).$$

A técnica de propagação de danos tem sido muito aplicada em diferentes autômatos celulares, como por exemplo o modelo de Kauffman [98,27], o autômato de Domani-Kinzel [28] e o modelo Q2R, entre outros, permitindo o estudo da estrutura do espaço de fase destes sistemas. Sendo esta técnica a forma mais simples de estudar a sensibilidade às condições iniciais em sistemas discretos, nas próximas seções mostraremos como aplicá-la ao estudo de sistemas magnéticos e alguns resultados importantes.

2.2 Propagação de dano em sistemas magnéticos

2.2.1 A dinâmica Monte Carlo

Consideremos um sistema magnético formado por N spins, cada um modelado por uma variável de dois estados $S_i = \pm 1$ e governados pelo Hamiltoniano

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j)} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i^e S_i, \quad (2.3)$$

onde J_{ij} é a interação de troca entre os momentos magnéticos dos spins situados nos sítios i e j , e h_i^e é o campo magnético externo no sítio i . Apesar da sua extrema simplicidade, este modelo, conhecido como *modelo de Ising* [29], tem sido muito importante no estudo de materiais magnéticos e, mais do que isso, na compreensão de fenômenos cooperativos em sistemas interagentes com um grande número de graus de liberdade.

Este modelo não possui uma regra dinâmica própria, mas, se estamos somente interessados em estudar a termodinâmica de equilíbrio do sistema, isso não deve nos

preocupar, dado que a mecânica estatística garante que [23,30] :

se conhecemos a energia H para todos os estados do sistema, então as propriedades deste sistema, em equilíbrio termodinâmico à temperatura T , podem ser calculadas como se tivéssemos um conjunto de sistemas idênticos e a probabilidade de encontrar qualquer um deles em um estado dado pode ser expressa por:

$$P_{eq}(S) = Z^{-1} \exp(-H(S)/k_B T), \quad (2.4)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e Z é a função partição do sistema

$$Z = \sum_{\{S\}} \exp(-H(S)/k_B T). \quad (2.5)$$

Este é o *ensemble canônico*. Seja por exemplo $A(S)$ uma quantidade mensurável do sistema. Então, o valor desta quantidade no equilíbrio termodinâmico a temperatura T é dado por

$$\langle A \rangle = \sum_S A(S) P_{eq}(S).$$

A grande importância deste enunciado e sua relação com a dinâmica do sistema é dada pela *hipótese ergódica*, segundo a qual, se um sistema evolui dinamicamente durante um tempo suficientemente grande à temperatura fixa T , então a média temporal de qualquer observável é igual ao valor médio calculado com a distribuição canônica (2.4). Isto quer dizer que:

$$\bar{A} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} A(S(t)) dt = \langle A \rangle.$$

Assim, sempre que trabalharmos no equilíbrio termodinâmico, enquanto o instrumento no laboratório faz uma média temporal, nós poderemos prever o resultado fazendo

uma média no ensemble canônico desde que conheçamos o seu hamiltoniano e sejamos capazes de calcular a sua função de partição.

Mas pode acontecer que a soma da sua função partição seja impossível de calcular, e portanto desejemos simular num computador a sua evolução temporal microscópica no equilíbrio termodinâmico. Ou que não estejamos interessados nas propriedades de equilíbrio do sistema, e sim nas suas propriedades dinâmicas. Então, um modelo simplificado como o modelo de Ising (que carece de uma dinâmica própria) perde a sua utilidade, a menos que o dotemos de uma dinâmica microscópica compatível com os enunciados da mecânica estatística. Para isso é preciso definir um processo estocástico que permita ao sistema evoluir no seu espaço de fase de forma tal que, para tempos suficientemente longos, cada estado do sistema seja visitado com probabilidade P_{eq} . Vejamos agora como introduzir uma dinâmica.

Denotemos por S um estado microscópico do sistema (S_1, S_2, \dots, S_N) e suponhamos que o sistema atualiza o seu estado a cada intervalo de tempo Δt . Seja $W(S, S')$ a probabilidade de transição do estado S' no instante t ao estado S no instante $t + \Delta t$ e $P_t(S)$ a probabilidade de encontrar o sistema no estado S no instante t . Então :

$$P_{t+\Delta t}(S) = \sum_{S'} W(S, S') P_t(S'), \quad (2.6)$$

onde a soma é realizada sobre os 2^N possíveis estados microscópicos. Por se tratar de probabilidades, W e $P(S)$ satisfazem a condição de normalização:

$$\sum_S P_t(S) = 1, \quad \sum_{S'} W(S, S') = \sum_S W(S, S') = 1.$$

Usando esta última condição, podemos reescrever a equação (2.6) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_{t+\Delta t}(S) &= \sum_{S'} W(S, S') P_t(S'), \\ &= \sum_{S' \neq S} W(S, S') P_t(S') + W(S, S) P_t(S) \\ &= \sum_{S' \neq S} W(S, S') P_t(S') + \left[1 - \sum_{S' \neq S} W(S', S) \right] P_t(S) \\ &= P_t(S) + \sum_{S' \neq S} [W(S, S') P_t(S') - W(S', S) P_t(S)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esta é a equação mestre [30] que permite obter a distribuição de probabilidade $P_t(S)$ a partir da distribuição de probabilidade inicial $P_0(S)$.

A equação (2.7) leva à distribuição de equilíbrio de Gibbs

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(S) = P_{eq}(S) = Z^{-1} \exp(-H(S)/k_B T) .$$

se os elementos de W satisfazem a condição de *balanço detalhado*

$$W(S, S') F(S') = W(S', S) F(S) . \quad (2.8)$$

com $F(S) = P_{eq}(S)$. Dotar o modelo de Ising de uma dinâmica microscópica consiste então em encontrar uma matriz W cujos elementos satisfazam a condição de balanço detalhado (2.8). Existem muitas maneiras de definir uma matriz de transição com esta propriedade e cada uma define uma dinâmica diferente. Mas, elas são termodinamicamente equivalentes dado que, no equilíbrio, todas levam ao mesmo resultado no cálculo do valor médio termodinâmico de uma quantidade física mensurável. Nós nos concentraremos somente em duas: a dinâmica *banho térmico* e a dinâmica de *Glauber*, embora existam outras dinâmicas comumente usadas na mecânica estatística, como as de Metropolis [31] e Kawasaki [32], entre outras.

Começando de uma configuração inicial S_0 , fazemos o sistema evoluir de uma configuração S no instante t a uma configuração S' no instante $t + \Delta t$ seguindo os seguintes passos :

- **Dinâmica banho térmico**

1. escolhemos aleatoriamente um sítio; seja este o sítio i ;
2. calculamos a probabilidade

$$p_i(t) = \frac{1}{2} [1 + \tanh(2\beta h_i(t))] ,$$

onde $h_i = \sum_{j \neq i}^N J_{ij} S_j + h_i^e$ é o campo magnético local no sítio i no tempo t ;

3. escolhemos um número aleatório z entre 0 e 1 com distribuição uniforme;
4. atualizamos o estado do sistema segundo a seguinte regra:

$$\begin{aligned} S_i(t + \Delta t) &= \text{sinal}(p_i(t) - z) \\ S_j(t + \Delta t) &= S_j(t) \quad \text{para } j \neq i, \end{aligned} \quad (2.9)$$

ou seja, fixamos $S_i(t + \Delta t) = 1$ com probabilidade p_i .

• **Dinâmica de Glauber**

1. escolhemos aleatoriamente um sítio; seja este o sítio i ;
2. calculamos a probabilidade

$$\bar{p}_i(t) = \frac{e^{-\beta\Delta E}}{1 + e^{-\beta\Delta E}}, \quad (2.10)$$

onde ΔE é a diferença de energia entre a configuração que resultaria de virar o i -ésimo spin e a configuração no instante t ;

3. escolhemos um número aleatório z entre 0 e 1 com distribuição uniforme;
4. atualizamos o estado do sistema segundo a seguinte regra :

$$\begin{aligned} S_i(t + \Delta t) &= S_i(t) \operatorname{sign}(z - \bar{p}_i(t)) \\ S_j(t + \Delta t) &= S_j(t) \quad \text{para } j \neq i, \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou seja, viramos o i -ésimo spin com probabilidade $\bar{p}_i(t)$.

Notemos que com estas definições o estado do sistema no tempo $t + \Delta t$ depende somente do estado no tempo t e do ruído externo, neste caso representado pela temperatura $T = \beta^{-1}$. Aliás, os dois diferem no máximo num sítio da rede, sendo então natural escolher $\Delta t = \frac{1}{N}$, de modo que, em média, cada spin seja escolhido uma vez por unidade de tempo.

Com estas definições temos então que

$$\begin{aligned} W(S, S') &= \bar{p}_i && \text{para Glauber.} \\ W(S, S') &= \begin{cases} 0 & \text{se } S_i = +1 \\ p_i & \text{se } S_i = -1 \end{cases} && \text{para banho termico,} \end{aligned} \quad (2.12)$$

se S e S' só diferem no sítio i , e $W(S, S') = 0$ em qualquer outro caso, independentemente da dinâmica escolhida.

Partindo desta definição pode-se provar, para as duas dinâmicas, que as matrizes W satisfazem a condição de balanço detalhado:

$$W(S, S')P_{eq}(S') = W(S', S)P_{eq}(S),$$

e portanto,

$$P_{eq}(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(S).$$

Na prova desta propriedade das matrizes W , a condição de simetria da matriz de acoplamentos J é fundamental [3].

É possível acelerar o algoritmo atualizando simultaneamente mais de um sítio. Pode-se provar que, desde que os spins atualizados não interajam, as duas dinâmicas levarão à distribuição de Gibbs. No caso particular de uma dinâmica completamente paralela, na qual todos os spins são atualizados simultaneamente, a distribuição de equilíbrio não é mais a de Gibbs (2.4), mas tem a forma [33]

$$\overline{P}_{eq}(S) = \exp \left(\sum_{j \neq i}^N \ln 2 \cosh \left(\beta \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} S_j + h_i^e \right) \right) \right).$$

Nos capítulos 5 e 6 estudaremos a dinâmica do modelo de van Hemmen de vidro de spin e do modelo de Hopfield para memória associativa, nos quais cada spin interage com todos os outros spins da rede, ou seja, são modelos de alcance infinito. Obviamente, qualquer dinâmica que permita a atualização simultânea de mais de um spin não leva à distribuição de equilíbrio de Gibbs. Já no estudo da propagação de danos em sistemas de curto alcance é comum o uso de regras de atualização em paralelo. Mas no caso de modelos de alcance infinito não se conhecem algoritmos paralelos que permitam obter um ganho significativo no tempo de computação. Por tudo isto, nós implementamos somente dinâmicas seqüenciais nas nossas simulações.

2.2.2 Propagação de danos: banho térmico vs. Glauber

Agora que dotamos o modelo de Ising de uma dinâmica Monte Carlo, fica claro que ele é um típico exemplo de autômato celular probabilista. Sem dúvida o mais usado em mecânica estatística. Para compreender melhor isto é suficiente fazer as seguintes

analogias entre a definição de autômato probabilístico (2.2) e as definições (2.9) e (2.11) quando o spin escolhido para atualizar é o i -ésimo:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &\rightarrow S_i(t), \\ r &\rightarrow 2, \\ f_i &\rightarrow \begin{cases} \text{sinal}(p_i(t) - z_i) & \text{para banho termico} \\ S_i(t) \text{ sinal}(z_i - \bar{p}_i(t)) & \text{para Glauber} \end{cases} \\ f_j &\rightarrow S_j(t) \quad \text{para } j \neq i. \end{aligned}$$

Então é possível também estudar o comportamento dinâmico de um sistema magnético da mesma forma que se estuda a dinâmica de um autômato celular. Em particular, é interessante estudar qual o comportamento assintótico da distância de Hamming entre duas configurações inicialmente diferentes e que evoluem submetidas ao mesmo ruído térmico (com mesma seqüência de números aleatórias $\{z_i\}$). Esta questão foi estudada em 1987 por dois grupos em forma simultânea e independente.

O primeiro grupo, formado por H. Stanley, D. Stauffer, J. Kertész e H. Herrmann, estudou o comportamento do modelo de Ising bidimensional na rede quadrada com interações entre primeiros vizinhos quando é submetido à dinâmica de Glauber [34]. Para isso, eles partiram de duas configurações previamente termalizadas e muito próximas uma da outra ($d(t=0) \approx \frac{1}{N}$) e calcularam a distância de Hamming após 10^4 unidades de tempo de Monte Carlo (UTMC). É importante notar que, por se tratar sempre de sistemas finitos, a distância de Hamming se anula após um tempo finito da ordem de $\exp(L^2)$ (tempo de Poincaré), onde L é o tamanho linear do sistema. Por isto, o tempo no qual a distância de Hamming é calculada tem que ser muito menor que o tempo de Poincaré. Na figura 2.1 apresenta-se o resultado obtido por eles [34]. Para altas temperaturas o sistema está numa fase caótica, enquanto que para baixas temperaturas o seu comportamento é congelado. Os dados indicam que a temperatura de transição T_d é muito próxima da temperatura crítica termodinâmica do modelo de Ising bidimensional. Costa [35] estudou o comportamento da distância de Hamming para o modelo de Ising ferromagnético 3D e obteve o mesmo comportamento qualitativo que no caso 2D, mas encontrou que a temperatura de transição é levemente inferior à temperatura

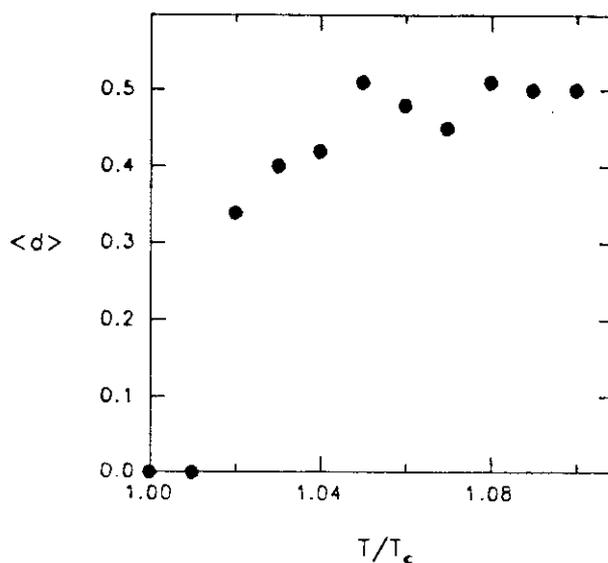


Figura 2.1: Distância de Hamming em função da temperatura para o modelo de Ising ferromagnético bidimensional submetido à dinâmica de Glauber após 10^4 unidades de tempo de Monte Carlo para $d(0) = 0$

crítica termodinâmica do modelo obtida por meio de simulações numéricas. Le Caer calculou o diagrama de fases dinâmico do modelo de Ising tridimensional com campo externo homogêneo [36] e encontrou que, ao contrário do que acontece com o diagrama de fases termodinâmico, existe uma linha crítica que separa uma fase congelada a baixas temperaturas de uma fase caótica a altas temperaturas.

Simultaneamente, o segundo grupo, integrado por B. Derrida e G. Weisbuch [11], abordou o mesmo problema estudando a dinâmica do modelo de Ising tridimensional sem campo magnético e submetido à dinâmica banho térmico. O método usado foi levemente diferente: eles partiram com duas configurações não termalizadas e estudaram a probabilidade $P(500)$ de que elas não se encontrem no espaço de fase em 500 UTMC (i.e., de que a sua d não seja zero). Para aqueles pares que sobreviveram, ou seja, que não se tornaram idênticos, calcularam o valor médio da distância de Hamming após 500 UTMC, $D(500)$. Eles também estudaram a dependência de P e D com o distância de Hamming inicial entre as configurações. A relação entre estas quantidades e a calculada

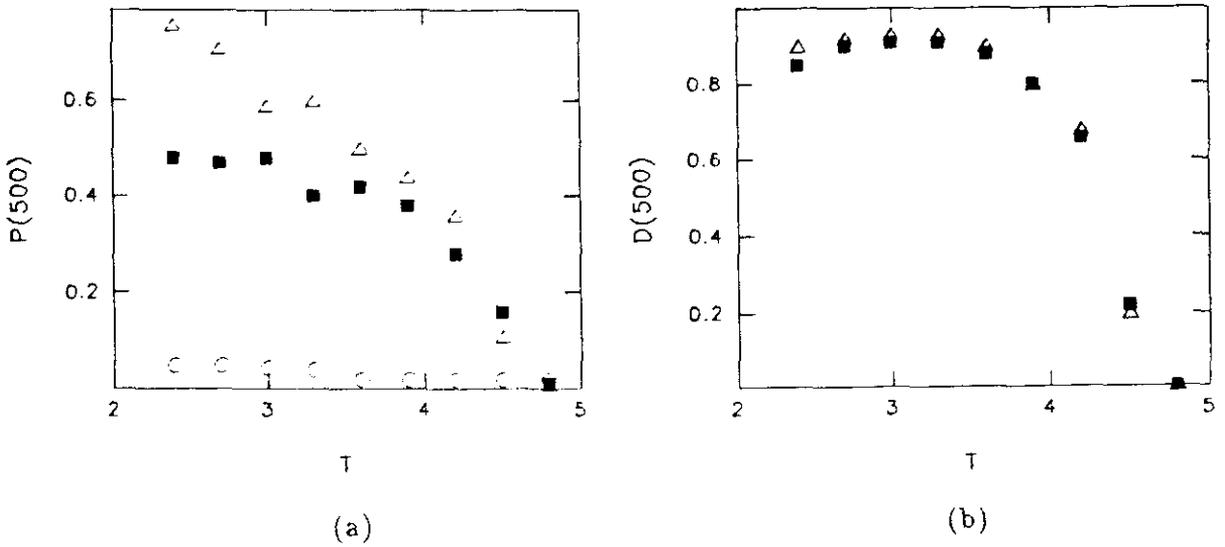


Figura 2.2: Propagação de danos após 500 UTMC para o modelo de Ising tridimensional submetido à dinâmica banho térmico, para $L = 12$ e para diferentes distâncias iniciais: $d(0) \rightarrow 0$ (○), $d(0) = 1/2$ (■) e $d(0) = 1$ (△); (a) fração $P(t)$ de configurações não idênticas e (b) distância entre configurações diferentes.

pelo primeiro grupo é dada por:

$$\langle d(500) \rangle = P(500) \langle D(500) \rangle,$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota uma média nas configurações iniciais e nas seqüências de números aleatórios. Os resultados obtidos são apresentados na fig. 2.2. Surpreendentemente, a dinâmica banho térmico apresenta um comportamento totalmente oposto àquele encontrado para a dinâmica de Glauber. Na fase paramagnética o sistema apresenta um comportamento congelado, enquanto que na fase de baixa temperatura D é diferente de zero e P depende sensivelmente da distância de Hamming inicial. Em particular, quando a distância inicial vai a zero, o sistema apresenta o mesmo resultado que a dinâmica de Glauber dado que $P(500) \rightarrow 0$ para $N \rightarrow \infty$.

As dinâmicas de Glauber e banho térmico são apenas dois exemplos de um conjunto muito grande de processos estocásticos usados no estudo da termodinâmica de sistemas físicos. É óbvio que eles percorrem o espaço de fase com trajetórias diferentes, mas, desde que todos acabem visitando os estados com a distribuição de equilíbrio (2.4), isto nunca tinha preocupado os físicos. Duas questões surgem imediatamente:

- por que as dinâmicas banho térmico e Glauber apresentam um comportamento, em grandezas dinâmicas, tão drasticamente diferente na fase de altas temperaturas?
- existe alguma relação entre estas transições dinâmicas e as transições termodinâmicas?

A resposta à primeira pergunta foi dada por D. Stauffer [37] e vamos apresentar aqui o argumento. Começamos notando que é possível expressar a diferença de energia ΔE entre duas configurações $S(t)$ e $S'(t + \Delta t)$ que diferem somente no sítio i em função do campo local no tempo t :

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= -\frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^N J_{ki} (S_k(t+1) S_i(t+1) - S_k(t) S_i(t)) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{k \neq i}^N S_k(t) (J_{ki} + J_{ik}) (S_i(t + \Delta t) - S_i(t)) \\
 &= 2 S_i(t) \sum_{k \neq i}^N J_{ik} S_k(t) = 2 S_i(t) h_i(t).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Este resultado é válido para qualquer matriz de acoplamento desde que seja simétrica. Podemos agora usar (2.13) e reescrever a probabilidade $\bar{p}_i(t)$ de virar o i -ésimo spin no tempo t na dinâmica de Glauber em função da probabilidade $p_i(t)$ de fazer o i -ésimo spin igual a 1 no tempo t na dinâmica banho térmico:

$$\bar{p}_i(t) = \begin{cases} 1 - p_i(t) & \text{se } S_i(t) = +1 \\ p_i & \text{se } S_i(t) = -1. \end{cases}$$

Num computador, a dinâmica de Glauber pode ser implementada então com o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned}
 S_i(t + \Delta t) &= \text{sinal}(z - (1 - p_i(t))) & \text{se } S_i(t) = +1 \\
 S_i(t + \Delta t) &= \text{sinal}(p_i(t) - z) & \text{se } S_i(t) = -1,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

enquanto que, para a dinâmica banho térmico, o algoritmo é

$$S_i(t + \Delta t) = \text{sinal}(p_i(t) - z).$$

Isto mostra que, embora as duas dinâmicas tenham a mesma probabilidade p_i de que $S_i(t + 1)$ seja 1, elas usam o número aleatório z de maneira diferente. Suponhamos

agora que temos duas configurações S^A e S^B submetidas ao mesmo ruído térmico e que, no tempo t , tenhamos $S_i^A(t) = 1$ e $S_i^B(t) = -1$, mas com os campos locais $h_i^A(t)$ e $h_i^B(t)$ iguais. Se a regra escolhida é banho térmico, então no tempo $t + \Delta t$ os dois sítios são iguais, enquanto que, se a dinâmica é a de Glauber, existe uma probabilidade não nula de que os dois sítios continuem diferentes em $t + \Delta t$. Assim, para altas temperaturas, é de se esperar que um dano inicialmente localizado em somente um sítio possa propagar-se pela rede toda se a dinâmica é a de Glauber.

A resposta à segunda pergunta não é ainda muito clara, dado que existem poucos resultados teóricos que permitam avaliar possíveis conexões entre as transições dinâmicas e estáticas. Coniglio et al [38] provaram que, para o modelo de Ising ferromagnético com dinâmica banho térmico, a distância de Hamming está relacionada com a magnetização m e a suscetibilidade χ pela expressão

$$d = \frac{\chi}{2(1 - m)}.$$

Mariz [39] estendeu estes resultados para o modelo Ashkin-Teller.

Diferentes modelos têm sido estudados numericamente com esta técnica, como por exemplo o modelo xy , o modelo ANNNI bidimensional [41], o modelo de Ising ferromagnético de campo médio [42] e vidros de spin (ver seção 2.3.2), entre outros, sem que ainda seja totalmente claro se existe uma relação geral entre as transições dinâmicas e as transições termodinâmicas. Nos capítulos 5 e 6 estudaremos a dinâmica do modelo de van Hemmen de vidro de spin e o modelo de Hopfield para memória associativa, com o objetivo de obter assim mais informação sobre (a) a relação entre o comportamento da distância de Hamming e a estrutura do espaço de fase e (b) a relação entre as transições dinâmicas e estáticas nestes modelos. Antes de descrever os resultados obtidos em vidros de spin usando a propagação de danos, na próxima seção discutiremos brevemente as principais propriedades destes sistemas.

2.3 Vidros de spin

Os vidros de spin são materiais magnéticos desordenados nos quais a desordem introduz frustração nos acoplamentos. Uma grande variedade de materiais apresentam fase vidro

de spin, sendo os mais comuns os metais nobres com uma pequena percentagem (entre 1 e 10 %) de íons magnéticos diluídos, como por exemplo ferro em ouro ($AuFe$) ou manganês em cobre ($CuMn$).

Um momento magnético colocado numa matriz metálica polariza os elétrons de condução, os quais por sua vez influenciam os outros momentos magnéticos e induzem uma interação efetiva entre eles, conhecida como interação de Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (RKKY) [43,44,45]. A sua principal propriedade, no que diz respeito ao comportamento vidro de spin, está dada pelo fato dela oscilar entre valores positivos e negativos como função da distância r entre as impurezas, sendo o período destas oscilações da ordem do espaçamento da rede. Dado que as amostras são preparadas esfriando rapidamente o material inicialmente a alta temperatura, é razoável pensar que as impurezas magnéticas ficam fixas em sítios aleatórios da matriz metálica, e portanto a interação entre duas impurezas quaisquer é também uma variável aleatória, tanto na sua magnitude como no seu sinal, sendo este último quem determina se elas vão favorecer um alinhamento paralelo ou antiparalelo dos seus momentos magnéticos. Uma vez determinada a posição de todas as impurezas, nem todas as interações entre dois momentos vão poder ser satisfeitas simultaneamente, ou seja, o sistema tem frustração. Frustração e aleatoriedade no sinal da interação entre os momentos magnéticos são os dois principais ingredientes em qualquer modelo que pretenda dar conta dos fenômenos observados experimentalmente em vidros de spin.

A altas temperaturas o comportamento magnético destes materiais é similar ao observado em um paramagneto ordinário, mas a baixas temperaturas, na fase vidro de spin, as propriedades magnéticas dependem fortemente do tempo e da história da amostra. O sistema não tem ordem de longo alcance convencional ferromagnética ou antiferromagnética, mas a curva da susceptibilidade apresenta um máximo a uma temperatura T_f , sinalizando uma possível transição para uma fase na qual os momentos magnéticos ficam congelados em direções aleatórias [46,47,48]. Existem diferentes artigos de revisão publicados nos últimos anos [49,50] que brindam uma análise atualizada e completa dos principais resultados experimentais.

2.3.1 Mecânica estatística dos vidros de spin

Em 1975 Edwards e Anderson [7] propuseram um modelo que leva em conta frustração e desordem, e que é uma versão aleatória do modelo de Ising com interações entre primeiros vizinhos:

$$H_{EA} = - \sum_{\langle ij \rangle}^N J_{ij} S_i S_j - h \sum_i^N S_i. \quad (2.15)$$

h é um campo magnético externo uniforme e os acoplamentos J_{ij} são variáveis aleatórias independentes, todas elas escolhidas com a mesma distribuição de probabilidades $P(J_{ij})$, geralmente gaussiana ou $J_{ij} = \pm J$ com igual probabilidade (é comum trabalhar também com distribuições que têm valor médio positivo, dado que altas concentrações de impurezas favorecem a ordem ferromagnética).

Na fase vidro de spin e na ausência de campo magnético externo, $\langle S_i \rangle$ pode ser diferente de zero, variando de sítio a sítio e tomando tanto valores negativos como positivos, mas a magnetização total do sistema $M = \sum_i \langle S_i \rangle$ é nula. Este comportamento é diferente do observado numa fase paramagnética, na qual cada termo $\langle S_i \rangle$ se anula separadamente, e portanto a magnetização não é um bom parâmetro para caracterizar a fase vidro de spin. Foi isto que levou Edwards e Anderson a propor a quantidade

$$q_{EA} = \frac{1}{N} \sum_i^N \langle S_i \rangle^2 \quad (2.16)$$

como parâmetro de ordem para os vidros de spin. Na fase paramagnética q_{EA} é zero, tornando-se diferente de zero para temperaturas menores que T_f , a partir da qual os momentos magnéticos são congelados em direções aleatórias. À temperatura nula $\langle S_i \rangle = \pm 1$ e portanto $q_{EA} = 1$.

Seguindo o roteiro tradicional na mecânica estatística, em 1975 Sherrington e Kirkpatrick [5] estudaram a aproximação de campo médio do modelo Edwards-Anderson com o objetivo de obter um ponto de partida para posteriores aproximações. Eles substituíram as interações entre primeiros vizinhos no Hamiltoniano (2.15) por acoplamentos de alcance infinito:

$$H_{SK} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N J_{ij} S_i S_j - h \sum_i^N S_i. \quad (2.17)$$

A distribuição de probabilidade dos acoplamentos é, por exemplo, uma gaussiana com a variância agora escalada com o número de spins da rede, a fim de obter uma função energia bem definida:

$$P(J_{ij}) dJ_{ij} = \frac{dJ_{ij}}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{N J_{ij}^2}{2}\right).$$

É possível provar que as propriedades deste modelo não dependem do tipo de distribuição escolhida, mas do valor médio e da variância.

Ao contrário do esperado, a solução do modelo Sherrington-Kirkpatrick (SK) mostrou ser um dos problemas mais difíceis já abordados pela mecânica estatística. Dado que uma descrição detalhada da resolução do modelo SK está fora dos objetivos desta tese, somente resumimos os resultados mais importantes.

Por ser um sistema aleatório, todas as quantidades termodinâmicas de interesse poderiam, em princípio, depender da realização da desordem. Mas, é de se esperar que se o sistema é suficientemente grande, estas quantidades dependam somente dos parâmetros da distribuição, no caso a variância e eventualmente também do valor médio $\langle J_{ij} \rangle$. A receita para calcular a energia livre de um sistema com desordem congelada como o modelo SK é calcular a energia livre $f(J_{ij})$ para uma dada realização dos acoplamentos $\{J_{ij}\}$

$$f(\{J_{ij}\}) = -\{k_B T\} \ln Z(\beta, \{J_{ij}\}),$$

onde Z é a função de partição do sistema, e posteriormente fazer a média sobre a distribuição dos acoplamentos

$$f(J) \equiv \langle \langle f(\{J_{ij}\}) \rangle \rangle = -\frac{1}{k_B T} \langle \langle \ln Z(\beta, \{J_{ij}\}) \rangle \rangle. \quad (2.18)$$

A complicação de (2.18) está no cálculo do valor médio do logaritmo natural da função de partição, e foi para contornar esta dificuldade que Edwards e Anderson propuseram o famoso *truque das réplicas* para o cálculo da energia livre. O truque é baseado no fato de ser muito mais simples calcular a média de uma potência positiva n de $Z(\{J_{ij}\})$ que a média do seu logaritmo natural. Desde que n seja um inteiro positivo, podemos pensar Z^n como a função de partição de uma coleção de n réplicas idênticas e não interagentes

do sistema original. O logaritmo natural pode ser calculado usando a seguinte expressão:

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(Z^n - 1)}{n} \quad (2.19)$$

Este último cálculo esconde muitas sutilezas matemáticas (como por exemplo, fazer a continuação analítica de uma função definida para os inteiros positivos ao domínio dos números reais), nenhuma justificável a priori. Sherrington e Kirkpatrick [5] abordaram o modelo e obtiveram uma funcional $F(\{q_{ab}\})$ para a energia livre cujo parâmetro não é um escalar mas uma matriz $\{q_{ab}\}$ ($a, b = 0, 1, \dots, n$) que tem os seus elementos determinados pela condição de extremo

$$\frac{\partial F(\{q_{ab}\})}{\partial q_{ab}} = 0, \quad (2.20)$$

junto com as condição de estabilidade que, neste caso, requer que todos os autovalores da matriz

$$\frac{\partial^2 F(\{q_{ab}\})}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \quad (2.21)$$

sejam positivos.

Não existem, a priori, restrições aos parâmetros q_{ab} , além do fato da matriz ter que ser simétrica e os elementos da diagonal nulos, restando então $\frac{1}{2}n(n-1)$ parâmetros independentes a serem determinados. Na falta de qualquer outra informação, Sherrington e Kirkpatrick fizeram a suposição mais simples e fisicamente mais intuitiva: dado que as réplicas surgem de um recurso matemático artificial, o mais natural é supor que não existem distinções entre elas, e portanto a solução fisicamente relevante é aquela que corresponde à prescrição $q_{ab} = q$ para $a \neq b$ (solução com simetria de réplicas), com o qual a funcional F passa a ser função de um único parâmetro q . Eles obtiveram a energia livre e com ela todas as quantidades termodinâmicas de interesse do modelo, mas a entropia desta solução é negativa a baixas temperaturas, sinalizando um erro no cálculo da energia livre. Em 1978 Almeida e Thouless [51] mostraram que a origem deste resultado está na condição de estabilidade da solução com simetria de réplicas e calcularam a curva no plano h vs T a partir da qual a solução com simetria de réplicas perde a estabilidade. Finalmente, em 1979 G. Parisi [52] encontrou a solução que hoje é aceita como correta. Ele propôs que a simetria entre as réplicas devia ser muito mais complexa que a considerada na solução de Sherrington-Kirkpatrick. A sua receita para

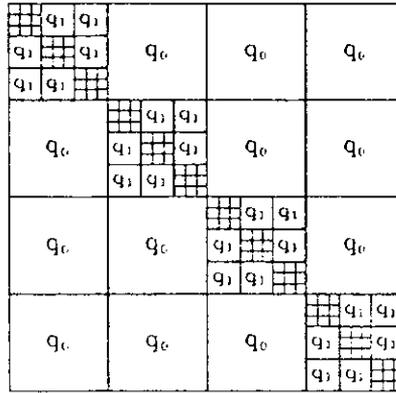


Figura 2.3: Esquema de quebra da simetria de réplicas de Parisi

a construção da matriz q_{ab} com quebra de simetria de réplicas é mostrada esquematicamente na figura 2.3. A estrutura da matriz q_{ab} está determinada por dois conjuntos de números $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ ($k = 1, \dots, R$), onde o primeiro refere-se ao tamanho de cada bloco, o segundo ao valor do parâmetro em cada bloco e R é o número de partições realizadas. No limite $R \rightarrow \infty$, tanto p_k como q_k tornam-se funções contínuas $p(x)$ e $q(x)$ no intervalo $(0, 1)$. A solução obtida com esta receita resolve o problema da entropia à baixas temperaturas e coincide com resultados numéricos obtidos com simulações Monte Carlo. O parâmetro $q(x)$ apresenta o seguinte comportamento (ver figura 2.4a): é constante até um ponto x_0 dependente do campo externo h ; entre x_0 e um segundo ponto x_1 dependente da temperatura cresce monotonamente e a partir deste último ponto é novamente constante. Aumentando o campo magnético externo, x_0 aproxima-se de x_1 e, para valores de h dados pela curva de estabilidade $h(T)$ encontrada por de Almeida e Thouless, eles colapsam num único ponto, recuperando-se assim a solução de simetria de réplicas. A interpretação desta função foi dada pelo próprio Parisi em 1983 [54] e está ligada à estrutura do espaço de fase do modelo SK. Para uma dada realização dos acoplamentos J_{ij} , o espaço de fase é dividido em um número muito grande de regiões com baixa energia livre, separadas umas das outras por barreiras de energia muito altas que, no limite termodinâmico, tornam-se impenetráveis para o sistema. Isto é, uma vez

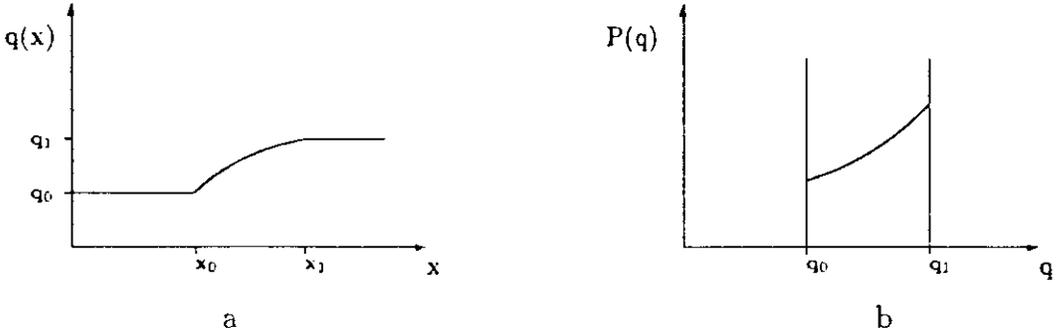


Figura 2.4: Funções (a) $q(x)$ e (b) $P(q)$ obtidas com quebra de simetria de réplicas

esfriada a amostra, ela é confinada numa região limitada do seu espaço de fase. Esta quebra da ergodicidade requer extremo cuidado no cálculo da média térmica de uma quantidade física x qualquer: deve ser uma média pesada das médias realizadas em forma separada em cada vale ou estado termodinâmico γ :

$$\langle x \rangle = \sum_{\gamma} P_{\gamma} \langle x \rangle_{\gamma},$$

onde P_{γ} é o peso estatístico do γ -ésimo vale. Os estados termodinâmicos ou vales podem ser caracterizados individualmente pelo valor médio da magnetização sobre as configurações de cada vale, mas é preferível descrever o sistema de forma estatística. O grau de ordem em cada vale pode ser descrito pela quantidade

$$q_{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i^{\gamma} \rangle^2,$$

que é diferente do parâmetro (2.16) dado por:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{\gamma \delta} P_{\gamma} P_{\delta} \langle S_i \rangle_{\gamma} \langle S_i \rangle_{\delta} \\ q &= \sum_{\gamma \delta} P_{\gamma} P_{\delta} \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle_{\gamma} \langle S_i \rangle_{\delta}. \end{aligned}$$

As quantidades

$$q_{\gamma \delta} = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle_{\gamma} \langle S_i \rangle_{\delta}$$

caracterizam a superposição entre dois vales γ e δ . É possível caracterizar a estrutura de multivales do espaço de fase por meio da distribuição de probabilidades $P_J(q)$ para as superposições $q_{\gamma\delta}$

$$P_J(q) = \sum_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \delta(q - q_{\gamma\delta}).$$

Parisi provou [54] que a média de P_J sobre a desordem $P(q) = \langle\langle P(q)_J \rangle\rangle$ está relacionada com a função $q(x)$ encontrada usando quebra de simetria de réplicas, por meio da relação:

$$P(q) = \frac{dx}{dq} \quad (2.22)$$

Esta expressão permite interpretar a função $q(x)$ e prova que ela contém a informação sobre a estrutura do espaço de fase do sistema. Na figura 2.4b mostra-se a distribuição $P(q)$ obtida a partir de $q(x)$. Ela tem dois picos, um no mínimo $q(x_0)$ e outro no máximo $q(x_1)$, e entre estes dois picos a distribuição é contínua. Cada possível realização dos acoplamentos contribui infinitesimalmente à distribuição, e a persistência destes dois picos após a média na desordem indica que sua posição é a mesma para todas as realizações. A posição dos outros picos varia para diferentes realizações e representam a parte contínua de $P(q)$. Um aspecto muito importante desta análise é o fato de que $P(q)$ pode ser calculada numericamente. Simulações Monte Carlo realizadas por P. Young [55] confirmaram, dentro das limitações impostas pelo tamanho finito dos sistemas estudados, a estrutura de multivales do espaço de fase encontrado usando quebra de simetria de réplicas.

A riqueza e complexidade do modelo SK está longe de se esgotar nos resultados descritos nesta seção e neste resumo foram ignoradas outras importantes propriedades do modelo SK (como por exemplo ultrametricidade e perda de automédia de q) e também outras aproximações de campo médio que confirmaram os resultados obtidos no modelo SK (método da cavidade [56] e equações TAP [57]). Para concluir, na figura 2.5 apresenta-se o diagrama de fases termodinâmico do modelo SK com quebra de simetria de réplicas.

As linhas críticas paramagneto-vidro de spin e paramagneto-ferromagneto são as mesmas que se obtém com simetria de réplicas e a fase mista é uma fase ferromagnética

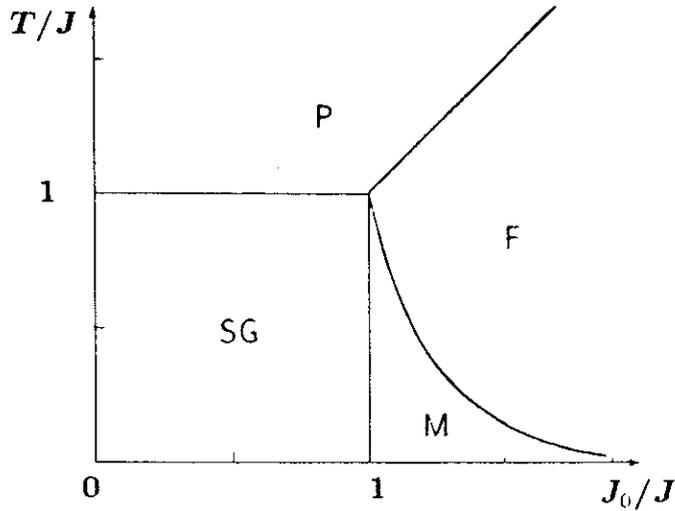


Figura 2.5: Diagrama de fases do modelo Sherrington-Kirkpatrick com campo externo nulo com simetria de réplicas que surge quando é usada a quebra de simetria de réplicas.

Duas questões importantes ainda precisam ser esclarecidas:

- Qual é a relação entre o modelo de Edwards-Anderson e a sua versão campo médio?
- Qual é a relação entre o modelo de Edwards-Anderson e os vidros de spin reais?

A primeira pergunta não tem resposta muito clara até hoje. Quase tudo o que se conhece são resultados obtidos com simulações numéricas (Monte Carlo) muito cuidadosas, feitas em computadores especialmente desenhados [58,59,60,61]. Nestes trabalhos foi estudado o modelo Edwards-Anderson com interações entre primeiros vizinhos em redes hipercúbicas com $d=2$, $d=3$ e $d=4$, com distribuições gaussianas e $\pm J$. Diferentes funções de correlação dinâmica foram estudadas, entre elas a função auto-correlação de spin definida por:

$$q(t) = \frac{1}{N} \langle \langle \sum_i S_i(t_0) S_i(t_0 + t) \rangle \rangle.$$

Se existe ordem de longo alcance, no limite termodinâmico e para tempos suficientemente longos, $q(t)$ tem que atingir um valor limite q independente do tamanho. Este

valor limite q tem que escalar a zero na temperatura crítica na qual desaparece a ordem de longo alcance. Trabalhando com diferentes tamanhos de rede e realizando um cuidadoso estudo da dependência dos resultados com o tamanho, estes trabalhos permitiram concluir, entre outras coisas, que :

- para $d = 2$ a transição ocorre em $T = 0$ e o comportamento crítico depende da distribuição escolhida;
- para $d = 3$ o sistema apresenta três regimes dinâmicos diferentes. Para temperaturas maiores que $T_c \approx 4.51$. (temperatura de Curie do modelo de Ising $3d$ ferromagnético) o sistema é um paramagneto e a função de auto-correlação decai a zero exponencialmente. Para temperaturas menores que T_c e maiores que $T_g \approx 1.17$ (onde a longitude de correlação estática e o tempo de correlação divergem) $q(t)$ decai com o tempo segundo a lei empírica

$$q(t) = ct^{-x} \exp(-\omega t^\beta), \quad (2.23)$$

onde os expoentes β e x dependem da temperatura. Para temperaturas menores que T_g observa-se decaimento com lei de potência. Os expoentes críticos que caracterizam o comportamento dinâmico perto de T_g coincidem muito bem com os dados experimentais, e os resultados não dependem da distribuição escolhida.

Estes trabalhos criaram um consenso geral com relação à existencia de uma verdadeira transição de fase em equilíbrio termodinâmico para o modelo Edwards-Anderson em $d = 3$. A dimensão crítica superior acredita-se seja 6 [3]. Para dimensões menores o comportamento do sistema afasta-se daquele obtido pela aproximação de campo médio, e não é claro ainda se as propriedades encontradas no modelo SK (estrutura de multivales, ultrametricidade, estrutura de $P(q)$, entre outras) também estão presentes em sistemas de menor dimensão, em particular em $d = 3$.

No que diz respeito à segunda questão, parece certo que embora o modelo de Edwards-Anderson não reflita a estrutura microscópica dos materiais reais, ele descreve muito bem algumas das principais propriedades dinâmicas e estáticas observadas experimentalmente.

2.3.2 Propagação de danos em vidros de spin

A falta de um modelo matematicamente solúvel para sistemas de dimensão finita fez da simulação numérica a mais importante ferramenta usada no estudo destes modelos e, em particular, durante os últimos anos muitos trabalhos têm usado a técnica de propagação de danos em vidros de spin, com o duplo propósito de obter informação sobre a estrutura do espaço de fase destes modelos e estudar a relação entre os comportamentos dinâmico e termodinâmico.

Vamos começar descrevendo os resultados obtidos por Derrida no modelo SK [10] submetido à dinâmica banho térmico. Embora se trate de uma aproximação de campo médio, o fato de ser exatamente solúvel faz com que seja possível comparar os resultados termodinâmicos com os resultados dinâmicos. Ele considerou o caso sem campo magnético externo, com acoplamentos $J_{ij} = \pm 1$ aleatórios e igualmente prováveis, e estudou a dependência da distância de Hamming final com o dano inicial e com a temperatura do sistema. Termodinamicamente, o sistema sofre uma transição de fase de paramagneto a vidro de spin à temperatura $T_c = 1$ (ver figura 2.5). Os resultados obtidos mostram que o modelo tem duas fases dinâmicas diferentes (ver figura 2.6): na fase de baixas temperaturas a distância de Hamming final depende do dano inicial mas para altas temperaturas independe dele. Notamos que $\langle D \rangle$ é sempre diferente de zero, inclusive na fase paramagnética, ao contrário do que ocorre no modelo de Ising ferromagnético. A temperatura crítica na qual o sistema sofre esta transição dinâmica parece ser muito próxima da temperatura crítica termodinâmica, embora não seja possível, a partir das simulações realizadas por Derrida, afirmar que elas coincidem. Estudos detalhados do comportamento para altas temperaturas sugerem que $\langle D \rangle$ se anula para $T \rightarrow \infty$ como $\langle D \rangle \approx 1/T^2$ e que a probabilidade de duas configurações se tornarem idênticas é sempre 1, independente da temperatura e do dano inicial.

Cálculos similares foram realizados para o modelo Edwards-Anderson 3d com acoplamentos $\pm J$. Quando submetido a uma dinâmica banho térmico [11] o sistema apresenta três fases dinâmicas diferentes (ver figura 2.7):

- a altas temperaturas, $T > T_1$, a distância de Hamming sempre se anula,

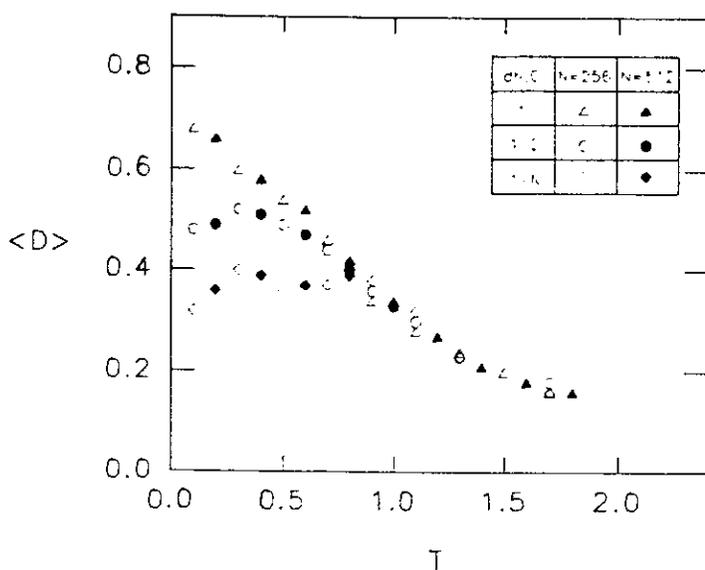


Figura 2.6: Distância $\langle D \rangle$ versus temperatura no modelo Sherrington Kirkpatrick

- a temperaturas intermediárias $T_2 < T < T_1$, a distância de Hamming é diferente de zero e independente do dano inicial,
- a baixas temperaturas $T < T_2$ a distância de Hamming é diferente de zero e o seu valor depende do dano inicial entre as configurações.

As temperaturas críticas estimadas são $T_1 \approx 4.0$ e $T_2 \approx 1.5$, próximas das temperaturas encontradas nas simulações descritas na seção anterior ($T = 1.75$ e 4.5) [58]. Parece então existir alguma relação entre os três regimes encontrados para o comportamento de $\langle D \rangle$ e os que surgem do estudo da função de auto-correlação dinâmica. Estudos feitos em duas dimensões [62] mostraram que estes sistemas apresentam o mesmo comportamento dinâmico que o modelo 3d, sendo este resultado diferente do obtido via simulações Monte Carlo [58]. Quando submetido à dinâmica de Glauber, o modelo Edwards-Anderson 3d com dano inicial $1/N$ apresenta somente duas fases dinâmicas [12]: para baixas temperaturas o dano final é aproximadamente zero, enquanto que para altas temperaturas o dano final é aproximadamente $1/2$, sendo a temperatura crítica dinâmica estimada muito próxima da temperatura crítica obtida nas simulações de Ogielsky [58,60].

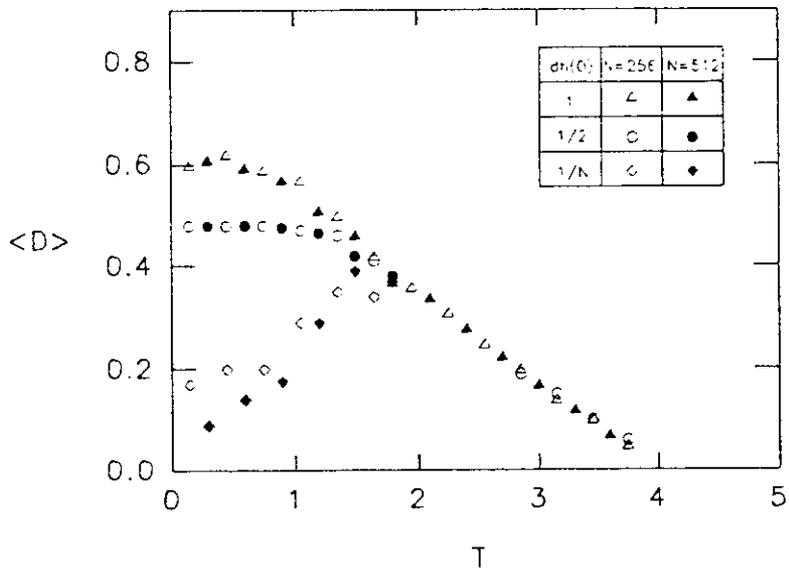


Figura 2.7: Distância $\langle D \rangle$ versus temperatura para o modelo Edwards-Anderson 3D

Capítulo 3

Padrões Correlacionados aos Pares no Modelo de Hopfield

Uma das maiores limitações do modelo de Hopfield é sem dúvida a falta de flexibilidade na escolha das memórias. Sendo o estado do neurônio i na memória μ representado por uma variável aleatória independente ξ_i^μ , que pode tomar os valores ± 1 com a mesma probabilidade, não existe nenhuma correlação, seja entre os estados de diferentes neurônios num dado padrão ou entre os estados de um mesmo neurônio em diferentes padrões. Isto traz graves conseqüências, tanto no desenho de sistemas artificiais como na modelagem de sistemas biológicos, algumas das quais são as seguintes:

- não é possível armazenar nenhum padrão que possua estrutura própria;
- não é possível dotar às memórias armazenadas de nenhuma estrutura hierárquica complicada;

- durante o processo de reconhecimento, 50% dos neurônios (em média) devem estar ativados, sendo que existem evidências neurobiológicas que indicam que nas regiões do cérebro responsáveis pelas funções associativas, apenas uma pequena fração (aproximadamente 4%) das células nervosas, estão simultaneamente ativadas. Por outro lado, o processo de armazenamento geralmente envolve padrões nos quais a informação vem dada por um foreground muito menor que o background, fato que é particularmente importante no caso de armazenamento de imagens.

Para entender melhor estas limitações, reescrevemos a expressão do campo local no sítio i quando o estado da rede coincide com a ν -ésima memórias:

$$\xi_i^\nu h_i \approx 1 + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \sum_{\mu \neq \nu}^p \xi_i^\nu \xi_i^\mu \xi_j^\nu \xi_j^\mu \quad (3.1)$$

Vimos no capítulo 1 que, quando a rede armazena um número finito de memórias não correlacionadas, no limite termodinâmico, o segundo termo desta expressão (o termo de ruído) não consegue desestabilizar o sinal produzido pela própria memória. Mas, se as memórias são escolhidas com uma distribuição tal que o valor médio deste termo é diferente de zero, então, eventualmente, o termo de ruído pode ter módulo maior que 1 e, assim, desestabilizar a memória em consideração. Nos últimos anos uma grande quantidade de trabalhos analíticos e numéricos têm procurado introduzir modificações na regra de aprendizagem (na matriz sináptica) do modelo de Hopfield com o propósito de superar estas restrições [66,67,68,69,70].

Embora seja um resultado bem estabelecido na literatura o fato de que no modelo de Hopfield a superposição entre memórias destroi a estabilidade das configurações armazenadas, muito pouco se conhecia sobre a forma em que a termodinâmica é afetada por estas superposições. Neste capítulo apresentamos um estudo analítico detalhado da termodinâmica do modelo de Hopfield com um número finito de memórias, as quais estão organizadas numa estrutura hierárquica simples [71].

É comum na literatura de redes de neurônios dizer que duas configurações estão correlacionadas para indicar que existe uma superposição não nula entre elas,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu \neq 0,$$

embora esta última condição não requeira necessariamente que as distribuições sejam *estatisticamente independentes* (na próxima seção voltaremos sobre este ponto). Neste trabalho vamos nos referir sempre ao conceito de correlação do ponto de vista estatístico, e por isso, sempre que as memórias sejam obtidas a partir de distribuições independentes, diremos que não existe correlação, ainda quando a superposição seja diferente de zero. Esta observação é importante na hora de compararmos a nomenclatura deste trabalho com a usada por outros autores.

3.1 Armazenamento de memórias correlacionadas

Nesta seção vamos discutir brevemente alguns resultados importantes obtidos no estudo da termodinâmica de redes de neurônios com memórias correlacionadas. Esta discussão limita-se a uma descrição dos modelos e à enumeração dos principais resultados. Para os leitores interessados, os capítulos IV e VIII da referência [23] apresentam uma análise completa destes modelos.

3.1.1 Modelo de Hopfield com baixa atividade

A forma mais simples de gerar memórias aleatórias com superposição não nula entre elas é supor que os ξ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes, escolhidas segundo a seguinte distribuição de probabilidades:

$$p(\xi_i^\mu) = \frac{(1+a)}{2} \delta(\xi_i^\mu - 1) + \frac{(1-a)}{2} \delta(\xi_i^\mu + 1). \quad (3.2)$$

Isto garante que

$$\begin{aligned} \langle\langle \xi_i^\mu \xi_j^\nu \rangle\rangle &= \delta^{ij} (\delta^{\nu\mu} + a^2 (1 - \delta^{\nu\mu})), \\ \langle\langle \xi_i^\mu \rangle\rangle &= a. \end{aligned}$$

O parâmetro a ($-1 \leq a \leq 1$) é chamado de *atividade* da rede, dado que $(1+a)/2$ é a fração (em média) de neurônios ativos numa memória. Com esta distribuição, o termo de ruído da expressão (3.1) pode valer até $(p-1)a^2$ e, portanto, a condição de estabilidade perfeita da memória é garantida somente para $a^2 < 1/(p-1)$. Amit et

al. [66] propuseram uma maneira simples de modificar os acoplamentos sinápticos de forma tal que o valor médio do termo de ruído seja zero (como acontece no caso $a = 0$). A nova prescrição é definida pela seguinte expressão:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p (\xi_i^\mu - a) (\xi_j^\mu - a). \quad (3.3)$$

O campo local no sítio i na memória ν agora tem a forma:

$$h_i = (\xi_i^\nu - a)(1 - a^2) + \sum_{\mu=2}^p (x_i^\mu - a) \frac{1}{N} \sum_j (\xi_j^\mu - a) \xi_j^\nu. \quad (3.4)$$

Embora neste caso o valor médio do termo de ruído é zero e a sua variância $p(1 - a^2)^2/N$, o valor do sinal diminui e o menor valor que o seu módulo pode tomar é $(1 - a^2)(1 - |a|)$. Comparando os dois termos, concluímos que todos os padrões são estáveis desde que:

$$\alpha(a) = \frac{p}{N} \ll 1.38 (1 - |a|). \quad (3.5)$$

No caso p finito e $T = 0$ provaram que, para $a \neq 0$, as soluções simétricas que envolvem um número par de memórias tornam-se estáveis, duplicando desta forma o número de soluções espúrias do problema. Também encontraram que, à medida que a cresce, o mínimo global não corresponde às soluções de reconhecimento, mas às diferentes soluções simétricas: quanto maior o valor de a , maior é o número de memórias que têm superposição não nula com o estado de menor energia. Amit et al. estudaram também o modelo na presença de ruído, tanto para p finito [2] como para $p = \alpha N$ [4] e encontraram que, ao contrário do que sucede no caso $a = 0$, a temperatura não melhora o desempenho do sistema.

Fontanari e Theumann [70] estudaram o modelo de Hopfield quando as memórias são escolhidas com a distribuição (3.2) no limite $N \rightarrow \infty$ e $p/N \rightarrow 0$. Posteriormente Erichsen e Theumann [72] estenderam este estudo ao caso de armazenamento de um número extensivo de memórias, dentre as quais um subconjunto finito é escolhido com a distribuição (3.2), enquanto que as restantes são escolhidas sem atividade. Estes trabalhos contêm um estudo detalhado da termodinâmica do modelo e, em particular, das suas propriedades de reconhecimento. Na referência [70] Fontanari e Theumann propuseram uma outra regra de aprendizagem para memórias com atividade. Ela tem

a forma:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \left[\xi_i^\mu \xi_j^\mu + \frac{2}{p-1} \sum_{\nu \neq \mu}^p \xi_i^\mu \xi_j^\nu + \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{\nu \neq \mu}^p \sum_{\lambda \neq \mu}^p \xi_i^\nu \xi_j^\lambda \right]. \quad (3.6)$$

Embora esta regra seja muito mais complicada que a regra proposta por Amit et al. [66] (notar que não é aditiva, isto é, o armazenamento de uma nova memória requer mais que simplesmente reforçar ou enfraquecer uma sinapse), ela desestabiliza as soluções simétricas e não requer do conhecimento prévio da correlação entre os padrões (ao contrário do que acontece com a regra (3.3)).

Finalmente, Fontanari e Köberle [73] estudaram a capacidade de armazenamento do modelo de Hopfield quando somente duas memórias estão correlacionadas. Eles encontraram que, dependendo do valor de α e da correlação entre as duas memórias, o sistema apresenta três regimes diferentes: no primeiro ele não reconhece, no segundo pode reconhecer somente o par, e no terceiro reconhece cada memória individualmente.

3.1.2 A pseudo inversa

Em 1985 Personnaz et al [67], seguindo as idéias introduzidas por Kohonen e colaboradores [74], propuseram uma regra de aprendizagem que permite armazenar padrões com superposições e atividades arbitrárias. Eles substituíram a prescrição original de Hopfield pela seguinte matriz sináptica:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu\nu}^p \xi_i^\mu (Q^{-1})_{\mu\nu} \xi_j^\nu,$$

onde Q é a matriz $p \times p$ das superposições entre as memórias:

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \sum_i^N \xi_i^\mu \xi_i^\nu.$$

O campo local no sitio i , quando o estado coincide com a memória λ , está dado por:

$$\begin{aligned} \xi_i^\lambda h_i^\lambda &= \xi_i^\lambda \sum_{j \neq i}^N J_{ij} \xi_j^\lambda = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \sum_{\mu\nu}^p \xi_i^\lambda \xi_i^\mu (Q^{-1})_{\mu\nu} \xi_j^\nu \xi_j^\lambda \\ &= \sum_{\mu\nu}^p \xi_i^\lambda \xi_i^\mu (Q^{-1})_{\nu\mu} Q_{\nu\lambda} \\ &= \xi_i^\lambda \sum_{\mu} \xi_i^\mu \delta_{\mu\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Então, todas as memórias armazenadas com esta regra são estáveis, independente da superposição entre elas e da percentagem de neurônios ativos. Para poder aplicar esta prescrição, a única condição necessária é que os padrões armazenados sejam linearmente independentes, para garantir assim que a matriz Q seja inversível. Embora seja possível armazenar até $p = N - 1$ configurações estáveis, as bacias de atração desaparecem para $p > N/2$. Para que estas condições sejam satisfeitas é necessário que o termo de auto-interação J_{ii} seja diferente de zero. Mas então a função energia deixa de ser uma função de Liapunov e resulta impossível fazer um estudo termodinâmico do problema. Kanter et al. [75] provaram que é possível fazer os termos de auto-interação nulos e realizar um estudo sistemático do modelo.

Resumindo, podemos dizer que esta prescrição é muito poderosa dado que: (i) não impõe nenhuma restrição às superposições entre padrões e às atividades, (ii) tem uma maior capacidade de armazenamento que o modelo de Hopfield e (iii) o reconhecimento é feito sem nenhum erro. Mas, por outro lado, ao contrário do que acontece com a regra de Hopfield, ela é não local: o cálculo da sinapse J_{ij} exige conhecer todos os ξ_k^μ . Do ponto de vista biológico é de se esperar que a conexão se desenvolva em resposta à frequência de disparo entre o neurônio pré-sináptico e o neurônio pós-sináptico, sem levar em conta a atividade do resto da rede, como acontece no modelo de Hopfield.

3.1.3 Armazenamento de memórias hierarquicamente organizadas

A possibilidade de armazenar memórias organizadas hierarquicamente é muito importante, tanto do ponto de vista biológico como no desenho de sistemas artificiais. Assim, as memórias podem agrupar-se em conjuntos, cada um deles definido por uma dada superposição fixa entre os seus elementos. As superposições entre os diferentes conjuntos permitem construir uma árvore hierárquica na qual os ramos finais identificam os padrões armazenados. Um exemplo pode ajudar a entender estes conceitos. Consideremos p configurações $\{\xi^\mu\}$ escolhidas aleatoriamente. Para cada uma delas podemos construir q_μ descendentes $\{\xi^{\mu,\nu}\}$ ($\nu = 1, \dots, q_\mu$) segundo a regra

$$\xi_i^{\mu,\nu} = \xi_i^\mu \eta_i^{\mu,\nu},$$

onde $\eta^{\mu,\nu} = \pm 1$ é uma variável aleatória escolhida com a seguinte distribuição:

$$Pr(\eta^{\mu,\nu} = \pm 1) = \frac{1}{2} (1 \pm a_\mu).$$

Dois descendentes de um mesmo ancestral têm superposição a_μ^2 , enquanto que dois descendentes de diferentes ancestrais têm superposição nula. Este procedimento pode ser facilmente generalizado para gerar uma estrutura hierárquica muito mais complicada. Parga e Virasoro [68,76] propuseram uma regra de aprendizagem que permite ao sistema reconhecer os padrões armazenados. Para o exemplo escolhido, a matriz de acoplamentos sinápticos tem a forma:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \left(1 + \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{q_\mu} (\eta_i^{\mu,\nu} - a_\mu) (\eta_j^{\mu,\nu} - a_\mu) \right).$$

Feigelman e Ioffe [77] analisaram a termodinâmica deste modelo com $a_\mu = a$. Eles encontraram que, para $\Delta > (1 - a)$, os estados de mínima energia são os descendentes, enquanto que, para $\Delta < (1 - a)$, são os ancestrais. Eles provaram também que a capacidade de armazenamento do sistema é a mesma que a do modelo de Hopfield $\alpha_c \approx 0.14$, onde α envolve os ancestrais e os descendentes.

3.2 O modelo de Hopfield com memórias correlacionadas aos pares

Neste capítulo estuda-se a termodinâmica do modelo de Hopfield quando as memórias armazenadas estão hierarquicamente organizadas, porém com uma estrutura simples. O nosso objetivo não é obter uma nova regra de aprendizagem capaz de contornar os problemas apresentados pela prescrição de Hopfield, mas sim entender em detalhe como a termodinâmica do modelo muda à medida que introduzimos correlação entre as memórias. Como já foi dito no capítulo 1, o sistema consiste em N neurônios modelados por variáveis tipo Ising $S_i = \pm 1$, cada um interagindo com todos os outros neurônios via a matriz sináptica J , e cuja dinâmica é um processo Monte Carlo banho térmico seqüencial governado pelo Hamiltoniano

$$H = - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N J_{ij} S_i S_j. \quad (3.7)$$

As memórias $\{\xi_i^{\mu l}\}$ são escolhidas com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(\{\xi\}) = \prod_i^N \prod_\mu^r p(\xi_i^{\mu,1}, \xi_i^{\mu,2}),$$

onde

$$\begin{aligned} p(\xi_i^{\mu,1}, \xi_i^{\mu,2}) = & \frac{(1+\kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} + 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} + 1) + \frac{(1-\kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} + 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} - 1) + \\ & \frac{(1-\kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} - 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} + 1) + \frac{(1+\kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} - 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} - 1), \end{aligned} \quad (3.8)$$

com $0 \ll \kappa \ll 1$. A matriz sináptica J é definida por:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 \xi_i^{\mu,l} \xi_j^{\mu,l}. \quad (3.9)$$

A rede armazena então p memórias agrupadas em r pares ($p = 2r$), indicados com letras gregas $\mu = 1, \dots, r$, enquanto que as duas memórias de cada par são indicadas por letras latinas $l = 1, 2$. A figura 3.1 representa esquematicamente a estrutura hierárquica das memórias. As duas memórias de um par qualquer estão estatisticamente correlacionadas, com correlação κ , enquanto que duas memórias pertencentes a pares diferentes são estatisticamente independentes. Isto é,

$$\langle\langle \xi_i^{\mu,l} \xi_j^{\nu,m} \rangle\rangle = \delta^{ij} \delta^{\mu\nu} (\kappa + \delta^{lm} (1 - \kappa)), \quad (3.10)$$

$$\langle\langle \xi_i^{\mu,l} \rangle\rangle = 0, \quad (3.11)$$

onde $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ denota uma média na desordem, ou seja, na distribuição $P(\{\xi\})$,

$$\langle\langle g(\{\xi\}) \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i,\mu,l} d\xi_i^{\mu,l} P(\{\xi\}) g(\{\xi\}).$$

É importante destacar algumas diferenças com respeito ao caso de armazenamento de memórias com atividade:

- enquanto que no caso de padrões com atividade [66] as memórias são estatisticamente independentes, no nosso caso as duas memórias de um par são estatisticamente dependentes;

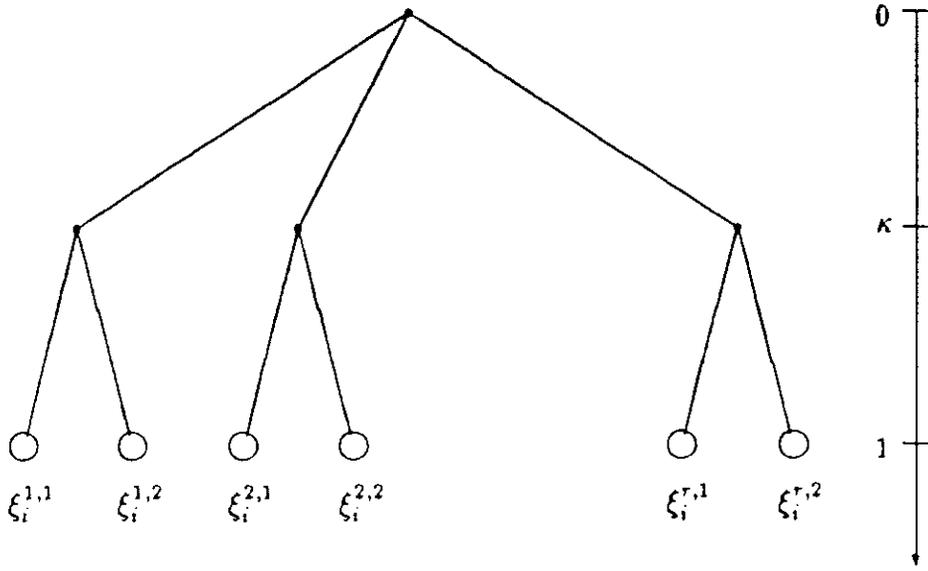


Figura 3.1: Estrutura hierárquica das memórias

- com a nossa distribuição a atividade da rede é zero (ver expressão (3.11));
- com a prescrição (3.2) usada para gerar memórias com atividade não é possível gerar uma estrutura hierárquica.

Para estudar a estabilidade das memórias armazenadas na ausência de ruído térmico, calculamos o potencial pós-sináptico (campo local) no neurônio i quando a configuração da rede coincide com uma delas, no caso, a primeira do ν -ésimo par:

$$\begin{aligned}
 h_i &= \sum_{j \neq i}^N J_{ij} \xi_j^{\nu,1} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 \sum_{j \neq i}^N \xi_i^{\mu,l} \xi_j^{\mu,l} \xi_j^{\nu,1} \\
 &= \xi_i^{\nu,1} + \xi_i^{\nu,2} \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \xi_i^{\nu,1} \xi_i^{\nu,2} + \sum_{\mu \neq \nu}^r \sum_{l=1}^2 \xi_i^{\mu,l} \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \xi_i^{\mu,l} \xi_i^{\nu,1}.
 \end{aligned}$$

O ruído é formado agora por dois termos: um devido à memória $\xi_i^{\nu,2}$ e outro devido aos pares restantes. O primeiro termo pode tomar os valores $\pm \kappa$, enquanto que o segundo tem valor médio zero e variância $N(p-1)(1+\kappa^2)$. Podemos então aproximar esta

última expressão por:

$$h_i = \xi_i^{\nu,1} + \xi_i^{\nu,2} \kappa + \sqrt{\frac{p-1}{N}},$$

e se tomamos o limite $N \rightarrow \infty$ mantendo p finito, temos que

$$h_i = \xi_i^{\nu,1} + \xi_i^{\nu,2} \kappa.$$

Notemos então que a estabilidade dos padrões armazenados está garantida na ausência de ruído térmico dado que $0 \leq \kappa < 1$. Este é um resultado válido somente para o caso de uma estrutura hierárquica com duas memórias correlacionadas em cada ramo da árvore. Para mais de duas memórias correlacionadas existe um valor κ_c da correlação a partir do qual as memórias perdem a estabilidade. Quanto maior o número de memórias envolvidas, menor é este valor crítico ($\kappa_c = 1/(s-1)$, onde s é o número de memórias correlacionadas).

3.3 A termodinâmica do modelo de Hopfield com um número finito de memórias correlacionadas aos pares

Nesta seção calculamos detalhadamente a função de partição do modelo de Hopfield com um número finito de memórias agrupadas em pares, como foi descrito na seção anterior, e a partir dela estudaremos em detalhe como a correlação modifica a termodinâmica do sistema.

Vimos no capítulo 2 que, quando a evolução temporal é dada por um processo Monte Carlo seqüencial, governado por um hamiltoniano da forma (3.7), para tempos suficientemente grandes o sistema visita as diferentes configurações no espaço de fase com a distribuição de equilíbrio de Gibbs e a dinâmica é dominada pela função *energia livre de Helmholtz*. Vamos supor então que o sistema esteja em contato térmico com um reservatório a temperatura fixa T e, a partir da expressão (3.7), calcularemos esta função.

Para uma dada realização das memórias, a energia livre é definida por:

$$f(\beta, \xi, h) \equiv -\frac{1}{\beta N} \ln Z(\beta, \xi, h), \quad (3.12)$$

onde Z é a função de partição do sistema

$$Z(\beta, \xi, h) = \text{Tr}_{S_i} \exp(-\beta H(S_i, \xi, h)) = \text{Tr}_{S_i} \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j}^N J_{ij} S_i S_j + \beta \sum_{i=1}^N h_i S_i\right).$$

h_i é um campo externo no sítio i que, em breve, será muito útil. Usando a definição (3.9) da matriz sináptica podemos reescrever Z como:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr}_{S_i} \exp\left[\frac{\beta}{2N} \sum_{i \neq j}^N \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 \xi_i^{\mu,l} \xi_j^{\mu,l} S_i S_j + \beta \sum_{i=1}^N h_i S_i\right] \\ &= \exp(-\beta p/2) \text{Tr}_{S_i} \exp\left[\frac{\beta N}{2} \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu,l} S_i\right)^2 + \beta \sum_{i=1}^N h_i S_i\right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na última expressão temos somado e subtraído os termos com $i = j$ a fim de levar o expoente a uma forma quadrática. O próximo passo consiste em fazer o traço sobre as variáveis dinâmicas S_i , mas para isso é conveniente transformar o expoente para uma forma linear em S_i usando a seguinte igualdade :

$$e^{\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}ay+axy}.$$

Introduzindo então $2r$ parâmetros $m_{\mu l}$, a expressão para Z pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z &= \exp(-\beta p/2) \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{p/2} \text{Tr}_{S_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu}^r \prod_{l}^2 dm^{\mu,l}\right] \exp\left[-\frac{\beta N}{2} \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 m_{\mu l}^2\right] \times \\ &\quad \exp\left[\beta \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 m_{\mu l} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu,l} S_i + \beta \sum_{i=1}^N h_i S_i\right] \\ &= \exp(-\beta p/2) \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{p/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{\mu}^r \prod_{l}^2 dm^{\mu,l}\right] \exp\left[-\frac{\beta N}{2} \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 m_{\mu l}^2\right] \times \\ &\quad \prod_{i=1}^N \sum_{S_i=\pm 1} \exp\left[\beta \sum_{\mu=1}^r \sum_{l=1}^2 m_{\mu l} \xi_i^{\mu,l} S_i + \beta h_i S_i\right] \\ &= \exp(-\beta p/2) \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{p/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{m} \exp\left[-\frac{\beta N}{2} \vec{m}^2\right] \prod_{i=1}^N 2 \cosh\left(\beta(\vec{m} \cdot \vec{\xi}_i + h_i)\right). \end{aligned}$$

Nesta última fórmula temos introduzido a seguinte notação vetorial:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{r1}, m_{r2}), \\ \vec{\xi}_i &= (\xi_i^{11}, \xi_i^{12}, \xi_i^{21}, \xi_i^{22}, \dots, \xi_i^{r1}, \xi_i^{r2}),\end{aligned}$$

Podemos assim escrever Z da seguinte forma:

$$\begin{aligned}Z &= \exp(-\beta p/2) \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{p/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{m} \exp\left[-\frac{\beta N}{2}\vec{m}^2\right] \times \\ &\quad \exp\left[\sum_{i=1}^N \ln 2\cosh(\beta(\vec{m}\cdot\vec{\xi}_i + h_i))\right].\end{aligned}$$

Temos reescrito a função de partição, em forma exata, substituindo a soma sobre configurações discretas por uma integral sobre p variáveis reais contínuas:

$$Z = \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{p/2} e^{-\beta p/2} \int d\vec{m} e^{-\beta N f(\vec{m})} \quad (3.14)$$

com

$$f(\vec{m}) = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - \frac{1}{N\beta} \sum_{i=1}^N \ln 2\cosh(\beta(\vec{m}\cdot\vec{\xi}_i + h_i)).$$

No limite $N \rightarrow \infty$, a integral (3.14) é dominada pelos mínimos da função $f(\vec{m})$, os quais são determinados pela condição de que as suas derivadas sejam nulas:

$$m_{\mu l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu, l} \tanh(\beta(\vec{m}\cdot\vec{\xi}_i + h_i)) \quad (3.15)$$

e de que a matriz das segundas derivadas

$$A_{\mu l, \nu m} \equiv \frac{\partial f(\beta)}{\partial m_{\mu l} \partial m_{\nu m}} \quad (3.16)$$

seja definida positiva. A função de partição pode ser aproximada então por:

$$Z \approx e^{-\beta p/2} \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{p/2} e^{-\beta N f(\vec{m})},$$

com f calculada com os valores de \vec{m} determinados pelas equações auto-consistentes (3.15). Usando (3.12) obtemos a expressão para a energia livre de Helmholtz e as equações auto-consistentes para os parâmetros \vec{m} na ausência de campo externo:

$$f(\vec{m}) = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - \frac{1}{\beta} \langle \langle \ln 2 \cosh(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \rangle \rangle \quad (3.17)$$

$$\vec{m} = \langle \langle \vec{\xi} \tanh(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}) \rangle \rangle, \quad (3.18)$$

onde temos usado também a propriedade de auto-mediação :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\vec{\xi}_i) \approx \frac{1}{2^p} \sum_{\vec{\xi}} f(\vec{\xi}) \equiv \langle \langle f(\vec{\xi}) \rangle \rangle \quad (3.19)$$

válida para $N \rightarrow \infty$ e p finito.

Finalmente, antes de estudar as soluções das equações (3.18), calculamos a média térmica do estado do neurônio i :

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}_{S_i} S_i e^{-\beta H} = \frac{\partial \ln Z}{\partial h_i} = \tanh(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i).$$

Usando agora a forma da equação (3.18) e a propriedade de auto-mediação no sentido contrário, obtemos:

$$m_{\mu,l} = \langle \langle \xi^{\mu,l} \langle S_i \rangle \rangle \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi^{\mu,l} \langle S_i \rangle.$$

Isto prova que os parâmetros de ordem introduzidos no cálculo da energia livre são exatamente aqueles que, como vimos no capítulo 1, determinam o comportamento dinâmico do sistema na presença de ruído térmico!

3.4 As soluções de campo médio

3.4.1 A solução paramagnética

Desenvolvendo a expressão (3.17) da energia livre em potências de \vec{m} obtemos

$$f(\beta) = -\frac{\ln 2}{\beta} + \frac{1}{2}(1 - \beta) \vec{m}^2 - \beta \kappa \sum_{\mu=1}^r m_{\mu 1} m_{\mu 2} + O(\vec{m}^4). \quad (3.20)$$

Para temperaturas suficientemente altas o termo quadrático é positivo e a única solução (o único mínimo) corresponde a $\vec{m} = 0$. Por analogia com o problema magnético esta solução é chamada de *paramagnética* e a sua energia livre está dada por

$$f(\beta) = -\frac{\ln 2}{\beta}.$$

Nesta fase a rede não consegue reconhecer nenhum padrão: o sistema tem um comportamento ergódico e, independente da condição inicial, o estado de equilíbrio termodinâmico tem superposição igual a zero com todos os padrões armazenados.

Em $T_1 = (1 + \kappa)$ surgem as primeiras soluções não nulas. Elas correspondem a uma mesma superposição m do estado do sistema com as duas memórias de n pares ($1 \leq n \leq p$). A energia livre tem a forma:

$$f(\beta) = -\frac{\ln 2}{\beta} + n m^2 (1 + \beta(1 - \kappa)) + O(\vec{m}^4).$$

Em T_1 o termo quadrático muda de sinal, indicando que a solução paramagnética perde a estabilidade e o sistema sofre uma transição de segunda ordem. Nas próximas seções provaremos que estas soluções formam parte de um conjunto mais geral de soluções simétricas.

3.4.2 As soluções de reconhecimento

No estudo do modelo de Hopfield com memórias não correlacionadas se diz que o sistema reconhece a μ -ésima memória armazenada se, no equilíbrio termodinâmico, o estado do sistema tem somente superposição não nula com ela, ou seja, se o parâmetro m^μ é diferente de zero, enquanto as restantes componentes de \vec{m} são nulas. Em particular, à temperatura nula, a solução de reconhecimento da μ -ésima memória tem a forma:

$$\vec{m} = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^\mu, 0, \dots, 0).$$

No caso de armazenamento de memórias correlacionadas, estas soluções tipo *Mattis* [104] obviamente não existem. Devemos então generalizar o conceito de solução de reconhecimento e levar em conta que, quando o estado de equilíbrio do sistema tem uma superposição não nula com um dado padrão, ele tem que ter, necessariamente, uma superposição não nula com o outro padrão do seu par. Procuramos então soluções com a seguinte forma:

$$\vec{m} = (0, \dots, 0, m^{\mu 1}, m^{\mu 2}, 0, \dots, 0). \quad (3.21)$$

As equações de campo médio para $m^{\mu 1}$ e $m^{\mu 2}$ são :

$$m_{\mu 1} = \langle \langle \xi^{\mu 1} \tanh \left(\beta (\xi^{\mu 1} m_{\mu 1} + \xi^{\mu 2} m_{\mu 2}) \right) \rangle \rangle,$$

(3.22)

$$m_{\mu 2} = \langle \langle \xi^{\mu 2} \tanh(\beta(\xi^{\mu 1} m_{\mu 1} + \xi^{\mu 2} m_{\mu 2})) \rangle \rangle,$$

e, após fazer a média sobre a desordem usando a distribuição (3.8), elas podem ser escritas como :

$$m_{\mu 1} = \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh(\beta(m_{\mu 1} + m_{\mu 2})) + \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh(\beta(m_{\mu 1} - m_{\mu 2})),$$

$$m_{\mu 2} = \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh(\beta(m_{\mu 1} + m_{\mu 2})) - \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh(\beta(m_{\mu 1} - m_{\mu 2})).$$

Somando e subtraindo estas duas equações obtemos :

$$m_{\mu 1} + m_{\mu 2} = (1 + \kappa) \tanh(\beta(m_{\mu 1} + m_{\mu 2})),$$

$$m_{\mu 1} - m_{\mu 2} = (1 - \kappa) \tanh(\beta(m_{\mu 1} - m_{\mu 2})).$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$u_{\mu} = m_{\mu 1} + m_{\mu 2}, \quad v_{\mu} = m_{\mu 1} - m_{\mu 2}, \quad (3.23)$$

obtemos duas equações desacopladas:

$$u_{\mu} = (1 + \kappa) \tanh(\beta u_{\mu}), \quad v_{\mu} = (1 - \kappa) \tanh(\beta v_{\mu}). \quad (3.24)$$

A expressão da energia livre tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{m_{\mu 1}^2}{2} + \frac{m_{\mu 2}^2}{2} - \frac{1}{\beta} \langle \langle \ln 2 \cosh(\beta(\xi^{\mu 1} m_{\mu 1} + \xi^{\mu 2} m_{\mu 2})) \rangle \rangle \\ &= \frac{u_{\mu}^2}{2} + \frac{v_{\mu}^2}{2} - \frac{\ln 2}{\beta} - \frac{(1 + \kappa)}{2\beta} \ln \cosh(\beta u_{\mu}) - \frac{(1 - \kappa)}{2\beta} \ln \cosh(\beta v_{\mu}). \end{aligned}$$

Vamos estudar agora as diferentes soluções das equações (3.24).

- **Soluções de reconhecimento de pares**

Em $T_1 = (1 + \kappa)$ surgem r soluções com $u_\mu \neq 0$ e $v_\mu = 0$. Em termos das superposições, elas correspondem às soluções simétricas da forma:

$$m_{\mu 1} = m_{\mu 2} = m_p \neq 0.$$

Elas existem para toda temperatura menor que T_1 , mas veremos numa próxima seção que elas perdem a estabilidade em $T_2 = (1 - \kappa)$, e que no intervalo (T_1, T_2) são as únicas soluções estáveis. Nesta fase, que chamamos de *fase de reconhecimento de pares*, o sistema é capaz de associar uma configuração inicial com um dos pares de memórias armazenados, mas não com uma memória. A energia livre está dada por

$$f(\beta) = m_p^2 - \frac{(1 + \kappa)}{2\beta} \ln \cosh(2\beta m_p) - \frac{\ln 2}{\beta}$$

- **Soluções de reconhecimento de padrões**

Em T_2 surgem $2r$ novas soluções com $u_\mu \neq 0$, $v_\mu \neq 0$ e $v_\mu \neq u_\nu$, ou em termos das superposições com as memórias,

$$m_{\mu 1} \neq 0, \quad m_{\mu 2} \neq 0, \quad m_{\mu 1} \neq m_{\mu 2}.$$

Quando existe uma solução desta forma o sistema reconhece a memória cuja superposição tem o maior valor absoluto. Assim, se $|m_{\mu l}| \geq |m_{\mu m}|$, o sistema reconhece a l -ésima memória do μ -ésimo par.

Na Seção 3.5 provaremos que estas soluções são estáveis no intervalo $[0, T_2)$. Usando que $\tanh x \rightarrow \text{sign}(x)$ para $x \rightarrow \infty$, e supondo que $|m_{\mu l}| > |m_{\mu m}| > 0$, sem por isso perder a generalidade, obtemos o limite de temperatura nula das soluções de reconhecimento:

$$m_{\mu l} = \pm 1, \quad m_{\mu m} = \pm \kappa, \quad f(T = 0) = -\frac{1}{2} (1 + \kappa)^2. \quad (3.25)$$

- **Soluções antisimétricas**

Em T_2 surgem $2r$ soluções com $u_\mu = 0$ e $v_\mu \neq 0$, ou $m_{\mu 1} = -m_{\mu 2} = m_a \neq 0$. Embora elas possam ser consideradas também soluções de reconhecimento de pares, provaremos na seção 3.5 que são sempre instáveis.

Na figura 3.2 apresentamos a solução numérica das equações (3.22).

3.4.3 As soluções simétricas

Existe uma família de soluções das equações (3.18) que generaliza as soluções simétricas pares estudadas na referência [2] e das quais as soluções de reconhecimento do par e as antisimétricas são casos particulares. Elas têm a forma

$$\vec{m} = m_{n,k} \left(\overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^{k \text{ pares}}, \overbrace{(1, -1, \dots, -1)}^{n-k \text{ pares}}, \overbrace{(0, 0, \dots, 0)}^{r-n \text{ pares}} \right), \quad (3.26)$$

ou seja, o estado termodinâmico do sistema associado com estas soluções tem :

- superposição $m_{n,k}$ com as duas memórias de k pares,
- superposição $m_{n,k}$ com uma das memórias de $(n - k)$ pares e $-m_{n,k}$ com a outra,
- superposição nula com as restantes $2(r - n)$ memórias.

Notamos que existem

$$2^n \binom{p}{k} \binom{p-k}{n-k}$$

soluções equivalentes, mas nos concentraremos no estudo da solução (3.26), sendo os resultados válidos também para as outras.

As equações de campo médio podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$2n m_{n,k} = \langle \langle (Z_k + \bar{Z}_{n-k}) \tanh(\beta m_{n,k} (Z_k + \bar{Z}_{n-k})) \rangle \rangle, \quad (3.27)$$

$$f(\beta) = n m_{n,k}^2 - \frac{1}{\beta} \langle \langle \ln 2 \cosh(\beta m_{n,k} (Z_k + \bar{Z}_{n-k})) \rangle \rangle, \quad (3.28)$$

onde

$$Z_k = \sum_{\mu=1}^k (\xi_i^{\mu,1} + \xi_i^{\mu,2}) = \sum_{\mu=1}^k \alpha_i^\mu,$$

$$\bar{Z}_{n-k} = \sum_{\mu=k+1}^n (\xi_i^{\mu,1} - \xi_i^{\mu,2}) = \sum_{\mu=k+1}^n \bar{\alpha}_i^\mu.$$

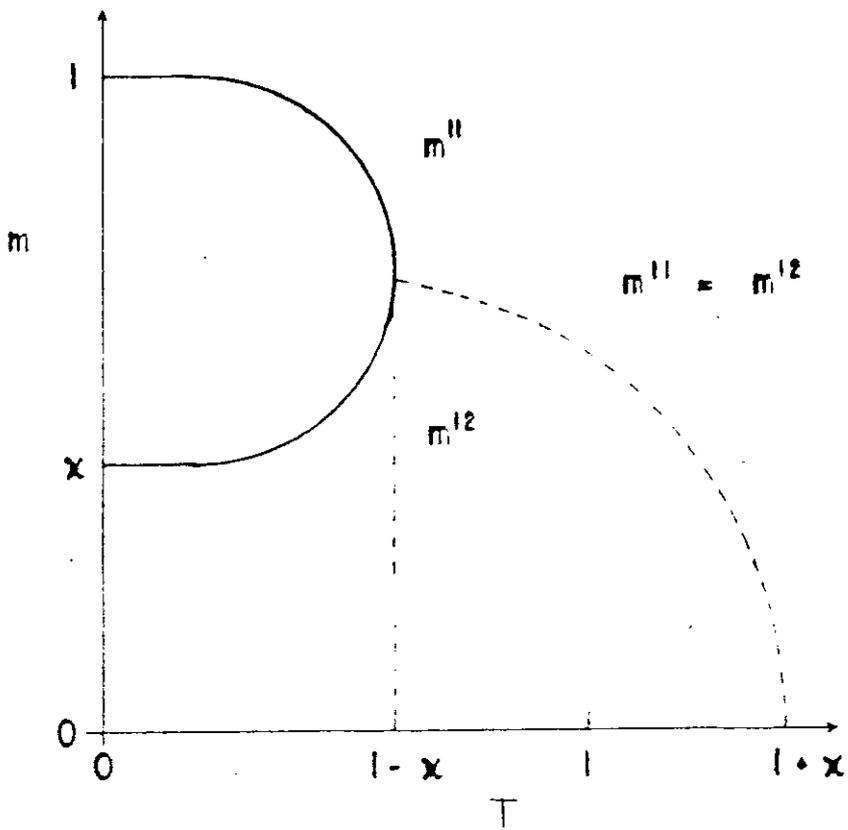


Figura 3.2: Soluções de reconhecimento como função da temperatura.

Z_k e \bar{Z}_{n-k} são somas das variáveis aleatórias independentes α_i^μ e $\bar{\alpha}_i^\mu$ respectivamente. α_i^μ pode tomar os valores 2 e -2 com probabilidade $(1 + \kappa)/4$ e 0 com probabilidade $(1 - \kappa)/2$, enquanto que $\bar{\alpha}_i^\mu$ pode tomar os valores 2 e -2 com probabilidade $(1 - \kappa)/4$ e 0 com probabilidade $(1 + \kappa)/2$. Podemos então calcular a probabilidade $P_{n,k}$ da soma $Z_k + \bar{Z}_{n-k}$ ser igual a $2j$

$$P_{n,k}(Z_k + \bar{Z}_{n-k} = 2j) = \sum_{l=-k}^k P(Z_k = 2l)P(\bar{Z}_{n-k} = 2j - 2l)$$

onde a soma é restrita àqueles valores de k para os quais $|2l - 2j| \leq 2(n - k)$ e $P(Z_k = 2j)$ e $P(\bar{Z}_{n-k} = 2j)$ são dados por

$$P(Z_k = 2j) = \sum_{i=|j|}^{(k+|l|)/2} \frac{k!}{i!(i-|j|)!(k+|j|-2i)!} \frac{(1+\kappa)^{2i-|j|} (1-\kappa)^{k+|j|-2i}}{2^{k-|j|+2i}}$$

$$P(\bar{Z}_n = 2j) = \sum_{i=|j|}^{(n+|l|)/2} \frac{n!}{i!(i-|j|)!(n+|j|-2i)!} \frac{(1-\kappa)^{2i-|j|} (1+\kappa)^{n+|j|-2i}}{2^{n-|j|+2i}}$$

Podemos finalmente reescrever as equações (3.28) e (3.27) da seguinte forma

$$2n m_{n,k} = \sum_{j=-n}^n P_{n,k}(2j) 2j \tanh(\beta m_{n,k} 2j),$$

$$f(\beta) = n m_{n,k}^2 - \frac{1}{\beta} \sum_{j=-n}^n P_{n,k}(2j) \ln 2 \cosh(\beta m_{n,k} 2j),$$

Usando que

$$\ln \cosh(x) \approx \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

desenvolvemos a expressão (3.17) para a energia livre até segunda ordem no parâmetro $m_{n,k}$ e obtemos

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln 2 + m_{k,n}^2 \left(n - \frac{\beta}{2} \langle \langle (Z_k + \bar{Z}_{n-k})^2 \rangle \rangle \right)$$

A solução simétrica $m_{n,k}$ surge então à temperatura

$$T_{nk} = \frac{\langle\langle (Z_k + \bar{Z}_{n-k})^2 \rangle\rangle}{2n} = \left[1 + \kappa \left(\frac{2k}{n} - 1 \right) \right],$$

na qual o termo quadrático troca de sinal. Para obter estes resultados usamos que

$$\langle\langle (Z_k + \bar{Z}_{n-k})^2 \rangle\rangle = 2n \left[1 + \kappa \left(\frac{2k}{n} - 1 \right) \right].$$

Notemos que as soluções simétricas pares, que no caso de memórias sem correlação surgem todas à temperatura crítica $T_c = 1$, agora aparecem a diferentes temperaturas T_{nk} , dependendo do quociente k/n e da correlação κ

$$T_1 = (1 + \kappa) \geq T_{nk} \geq (1 - \kappa) = T_2.$$

Desenvolvendo as equações de campo médio (3.27) em potências do parâmetro $m_{n,k}$ até a quarta ordem obtemos

$$m_{n,k}^2 \approx - \frac{6n T_{nk}^2}{\Delta} (T_{nk} - T),$$

e substituindo na expressão (3.17)

$$\begin{aligned} f(\beta) + \frac{1}{\beta} \ln 2 &\approx n m_{k,n}^2 T_{n,k} + \frac{\beta^3 m_{k,n}^4}{12} \langle\langle (Z_k + \bar{Z}_{n-k})^4 \rangle\rangle, \\ &\approx - \frac{3n^2 T_{nk}}{\Delta} (T_{nk} - T)^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_{nk} &= \langle\langle (Z_k + Z_{n-k})^4 \rangle\rangle = 8n - \kappa 8(n - 2k) + 12k(k - 1)(1 + \kappa)^2 \\ &\quad + 12(n - k)(n - k - 1)(1 - \kappa)^2 + 48k(n + k)(1 - \kappa^2), \end{aligned} \quad (3.30)$$

As soluções com $k = n$ surgem todas à mesma temperatura T_1 , sendo importante então saber qual delas corresponde à menor energia livre. A partir das expressões (3.29) e (3.30) podemos provar que

$$f_{n,n} - f_{n+1,n+1} = - \frac{12 T_{nn} n (n+1) (1 + 4\kappa + 3\kappa^2)}{\Delta_{nn} \Delta_{n+1,n+1}} (T_{nn} - T)^2 < 0 \quad \text{para } T < T_1.$$

Isto quer dizer que a solução de reconhecimento de pares ($k = n = 1$) é a solução que surge com a menor energia em T_1 . Na próxima seção provaremos que ela é também a única solução estável perto da temperatura crítica.

3.4.4 Soluções assimétricas

Existe uma família de soluções que generalizam as soluções de reconhecimento de padrões já estudadas e, no limite $\kappa \rightarrow 0$, coincidem com as soluções simétricas com superposição com um número ímpar de memórias encontradas na referência [2]. Elas têm a forma:

$$\vec{m} = (\overbrace{a, b}^{1 \text{ par}}, \overbrace{b, b, \dots}^{k \text{ pares}}, \overbrace{b, -b, \dots}^{n-k-1 \text{ pares}}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{r-n \text{ pares}}),$$

As equações para a e b têm a seguinte forma:

$$a = \sum_{j=-n+1}^{n-1} P_{n-1}(2j) \left(\frac{(1+\kappa)}{4} \tanh(\beta[a + b(2j+1)]) + \frac{(1-\kappa)}{4} \tanh(\beta[a + b(2j-1)]) + \frac{(1-\kappa)}{4} \tanh(\beta[a - b(2j+1)]) + \frac{(1+\kappa)}{4} \tanh(\beta[a - b(2j-1)]) \right)$$

$$b = \sum_{j=-n+1}^{n-1} P_{n-1}(2j) \left((2j+1) \frac{(1+\kappa)}{4} \tanh(\beta[a + b(2j+1)]) + (2j-1) \frac{(1-\kappa)}{4} \tanh(\beta[a + b(2j-1)]) + (2j+1) \frac{(1-\kappa)}{4} \tanh(\beta[a - b(2j+1)]) + (2j-1) \frac{(1+\kappa)}{4} \tanh(\beta[a - b(2j-1)]) \right),$$

onde $P_{n-1}(2j)$ é a probabilidade de $Z_k + \bar{Z}_{n-k-1}$ valer $2j$.

Estas soluções são estudadas somente a temperatura nula. O principal interesse reside em soluções da forma

$$a = 1, \quad b = \kappa,$$

dado que elas podem ser também consideradas soluções de reconhecimento. A condição necessária para a existência desta soluções está dada pela relação:

$$\kappa < \frac{1}{(2n - 1)}.$$

Isto é, à medida que a correlação entre as memórias aumenta, surgem novas soluções de reconhecimento. Outra família muito importante de soluções destas equações corresponde ao caso $|a| < |b|$. Elas correspondem à generalização das soluções mistas com superposição não nula com número ímpar de memórias.

3.5 Estudo da estabilidade das soluções de campo médio

Como foi visto na seção (3.3), as equações de campo médio foram obtidas pelo método de ponto de sela. Assim, no limite termodinâmico e para p finito, a integral no espaço dos parâmetros \vec{m} é dominada pelos mínimos do expoente. Na seção anterior estudamos somente as soluções das equações de campo médio obtidas a partir da condição de que as derivadas primeiras sejam nulas. Temos ainda que estudar a estabilidade local das soluções, determinada pelos autovalores da matriz das derivadas segundas (3.16). Para que uma solução seja estável, é preciso que a matriz seja definida positiva, isto é, que todos os seus autovalores sejam positivos.

Usando que f é uma quantidade auto-mediada obtemos

$$A_{\mu l, \nu m} = \delta^{\mu\nu} \delta^{lm} - \beta \left(\langle \langle \xi_i^{\mu, l} \xi_i^{\nu, m} \rangle \rangle - q_{\mu l \nu m} \right),$$

onde

$$q_{\mu l \nu m} = \langle \langle \xi_i^{\mu, l} \xi_i^{\nu, m} \tanh^2 \left(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i \right) \rangle \rangle.$$

Nas próximas subseções estudaremos as condições de estabilidade das soluções obtidas na seção anterior.

3.5.1 Estabilidade da solução paramagnética

A fase desordenada (paramagnética) do sistema é caracterizada pela solução $\vec{m} = 0$ com $f(\beta) = -T \ln 2$, e por tanto $q_{\mu\nu m} = 0$. Esta solução existe para todas as temperaturas, sendo a única para temperaturas maiores que T_1 , a partir da qual surgem as soluções simétricas. A matriz A é então decomposta em r blocos 2×2 da forma

$$A^\mu = \begin{bmatrix} 1 - \beta & -\beta\kappa \\ -\beta\kappa & 1 - \beta \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Ela tem dois autovalores diferentes, cada um deles com degenerescência r :

$$\lambda_1 = 1 - \beta(1 - \kappa) \quad (3.32)$$

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1 + \kappa) \quad (3.33)$$

A solução paramagnética é estável somente para temperaturas maiores que T_1 , dado que para $T < T_1$ temos que $\lambda_2 < 0$.

3.5.2 Estabilidade da solução de reconhecimento de pares

Estudamos a solução da forma:

$$\vec{m} = (m, m, 0, \dots, 0)$$

sem por isso perder a generalidade nos resultados. Os parâmetros q podem tomar os seguintes valores :

$$\begin{aligned} q &= q_{\mu\mu\mu} = \langle \langle \tanh^2(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \rangle \rangle = \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh^2(\beta 2m) \\ q_{1112} &= q_{1211} - \langle \langle \xi_i^{11} \xi_i^{12} \tanh^2(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \rangle \rangle = q \\ q_{\mu 1 \mu 2} &= q_{\mu 2 \mu 1} = \langle \langle \xi_i^{\mu 1} \xi_i^{\mu 2} \tanh^2(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \rangle \rangle = \kappa q \quad \text{para } \mu \neq 1 \end{aligned}$$

e a matriz A pode ser decomposta em um bloco 2×2

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 - \beta(1 - q) & \beta(q - \kappa) \\ \beta(q - \kappa) & 1 - \beta(1 - q) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

mais $(r - 1)$ blocos ao longo da diagonal da forma

$$A^\mu = \begin{bmatrix} 1 - \beta(1 - q) & \beta\kappa(q - 1) \\ \beta\kappa(q - 1) & 1 - \beta(1 - q) \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

A solução tem então quatro autovalores diferentes, dois deles com degenerescência 1

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \beta(1 - \kappa) \\ \lambda_2 &= 1 - \beta(1 + \kappa - 2q) = 1 - \beta(1 + \kappa)(1 - \tanh^2(2\beta m)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

e dois com degenerescência $(r - 1)$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 1 - \beta(1 + \kappa)(1 - q) \\ &= 1 - \beta(1 + \kappa) \left(1 - \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh^2(2\beta m) \right) \\ \lambda_4 &= 1 - \beta(1 - \kappa)(1 - q) \\ &= 1 - \beta(1 - \kappa) \left(1 - \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh^2(2\beta m) \right). \end{aligned}$$

Definindo

$$g(m) = \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh(2\beta m),$$

a equação (3.27) pode ser interpretada como a equação dos pontos fixos de $m = g(m')$.

Notamos então que

$$\lambda_2 = 1 - \left. \frac{dm}{dm'} \right|_{m=m^*}, \quad (3.37)$$

onde m^* é o ponto fixo.

Como foi estudado na seção (3.4), para temperaturas menores que T_1 esta equação tem duas soluções diferentes de zero, e o valor da derivada de g nesses pontos é menor que 1, sendo então $\lambda_2 > 0$ para $T < T_1$. Da expressão (3.36) vemos que $\lambda_1 > 0$ se $T > T_2$. Finalmente, dado que

$$\lambda_3 - \lambda_4 = -2\beta\kappa(1 - q) < 0,$$

estudamos numericamente apenas o valor de λ_3 , encontrando que ele é positivo para $T_1 < T < T_2$, independente do valor da correlação. Isto prova então que as soluções de reconhecimento de pares são estáveis neste intervalo de temperatura.

3.5.3 Estabilidade das soluções de reconhecimento de padrões

Novamente, vamos considerar a solução da forma $\vec{m} = (m_1, m_2, 0, \dots, 0)$, levando em conta que os resultados são válidos para todas as soluções de reconhecimento de padrões.

Neste caso os parâmetros q podem tomar os valores:

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv q_{\mu l \mu l} = \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh^2(\beta(m_1 + m_2)) + \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh^2(\beta(m_1 - m_2)) \\ q_2 &\equiv q_{1112} = q_{1211} \\ &= \frac{(1 + \kappa)}{2} \tanh^2(\beta(m_1 + m_2)) - \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh^2(\beta(m_1 - m_2)) \\ q_{\nu 1 \nu 2} &= \kappa q_1 \end{aligned}$$

e a matriz A tem um bloco 2×2 da seguinte forma:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 - \beta(1 - q_1) & \beta(q_2 - \kappa) \\ \beta(q_2 - \kappa) & 1 - \beta(1 - q_1) \end{bmatrix}$$

e $(r - 1)$ blocos ao longo da diagonal principal da forma:

$$A^\mu = \begin{bmatrix} 1 - \beta(1 - q_1) & \beta\kappa(q_1 - 1) \\ \beta\kappa(q_1 - 1) & 1 - \beta(1 - q_1) \end{bmatrix}$$

Os quatro autovalores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \beta(1 + \kappa) + \beta(q_1 + q_2) \\ &= 1 - \beta(1 + \kappa)(1 - \tanh^2(\beta(m_1 + m_2))) \\ \lambda_2 &= 1 - \beta(1 + \kappa) + \beta(q_1 - q_2) \\ &\quad 1 - \beta(1 - \kappa)(1 - \tanh^2(\beta(m_1 - m_2))) \\ \lambda_3 &= 1 - \beta(1 + \kappa)(1 - q_1) \\ \lambda_4 &= 1 - \beta(1 - \kappa)(1 - q_1) \end{aligned}$$

Usando as variáveis definidas em (3.23) podemos reescrever λ_1 e λ_2 como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \left. \frac{dU}{du} \right|_{u=u^*} \\ \lambda_2 &= 1 - \left. \frac{dV}{dv} \right|_{v=v^*} \end{aligned}$$

onde

$$U(u) = (1 + \kappa)\tanh(\beta u), \quad V(v) = (1 - \kappa)\tanh(\beta v),$$

e u^* e v^* são os pontos fixos não nulos das equações $u = U(u')$ e $v = V(v')$. Dado que por construção a derivada é menor que 1, λ_1 e λ_2 são positivos para temperaturas menores que T_1 e T_2 respectivamente. Usando o fato de que $\lambda_3 < \lambda_4$, estudamos numericamente o valor de λ_3 , e achamos que ele é sempre positivo para $T < T_2$, provando que estas soluções são estáveis no intervalo de temperatura em que existem.

3.5.4 Estabilidade das soluções antisimétricas

Na temperatura T_2 , onde a solução simétrica perde a estabilidade, além das soluções de reconhecimento de padrões, surgem as soluções antisimétricas da forma

$$\vec{m} = (m, -m, 0, \dots, 0),$$

as quais também permitem reconhecer pares. Neste caso a matriz tem a mesma forma que para as soluções de reconhecimento de pares (expressões (3.34) e (3.35)), com

$$q = \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh^2(2\beta m).$$

Os quatro autovalores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \beta(1 + \kappa) \\ \lambda_2 &= 1 - \beta(1 - \kappa - 2q) \\ &= 1 - \beta(1 - \kappa)(1 - \tanh^2(2\beta m)) \\ \lambda_3 &= 1 - \beta(1 - \kappa)(1 - q) \\ &= 1 - \beta(1 - \kappa) \left(1 - \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh^2(2\beta m) \right) \\ \lambda_4 &= 1 - \beta(1 - \kappa)(1 - q) \\ &= 1 - \beta(1 - \kappa) \left(1 - \frac{(1 - \kappa)}{2} \tanh^2(2\beta m) \right). \end{aligned}$$

Da expressão (3.38) obtemos que $\lambda_1 < 0$ para $T < T_1$. Isto prova que estas soluções são instáveis em todo o intervalo de temperatura onde elas existem.

3.5.5 Estabilidade das soluções simétricas

A matriz A associada às soluções simétricas da forma (3.26) pode ser decomposta em um bloco $2n \times 2n$ que envolve as componente não nulas do vetor \vec{m} mais $(p - n)$ blocos 2×2 ao longo da diagonal principal da forma

$$A^\mu = \begin{bmatrix} 1 - \beta(1 - q) & \beta(q - \kappa) \\ \beta(q - \kappa) & 1 - \beta(1 - q) \end{bmatrix}$$

Embora a forma do primeiro bloco seja muito complicada, afortunadamente é suficiente estudar os autovalores associados aos blocos pequenos para provar que as soluções simétricas com $n > 1$ são instáveis perto da temperatura crítica e à temperatura nula.

Independentemente dos autovalores associados ao bloco maior, a matriz tem dois autovalores associados aos blocos 2×2 , cada um com degenerescência $r - n$:

$$\lambda_1 = 1 - \beta(1 - q)(1 + \kappa)$$

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1 - q)(1 - \kappa)$$

onde

$$q = \langle \langle \tanh^2 (\beta m_{n,k} (Z_k + \bar{Z}_{n-k})) \rangle \rangle$$

Para temperaturas próximas e inferiores à temperatura crítica T_{nk} , podemos desenvolver esta última expressão em potências de \vec{m} :

$$q \approx \beta^2 m_{n,k}^2 \langle \langle (Z_k + \bar{Z}_{n-k})^2 \rangle \rangle = \frac{12 n^2 T_{nk}}{\Delta} (T_{nk} - T)$$

Substituindo agora na expressão de λ_1 obtemos

$$\lambda_1 \approx \frac{2\kappa}{n T_{nk}} (k - n) - \frac{(\Delta_{nk} - 12 n^2 T_{nk}^2)}{T_{nk} \Delta_{nk}} (T_{nk} - T) < 0 \quad \text{para } n > 1, k \text{ arbitrário.}$$

Isto prova que todas as soluções simétricas com $n > 1$ surgem como soluções instáveis. Os casos $n = 1$ e $k = 0$ e 1 já foram estudados nas seções anteriores.

Para $T \rightarrow 0$ podemos escrever

$$\begin{aligned} q &= \sum_{j=-n}^n P_{nk}(2j) \tanh^2 (\beta m_{n,k} 2j) \\ &= 1 - 2 \sum_{j=-n}^n P_{nk}(2j) e^{-2\beta m_{n,k} 2j} \end{aligned}$$

Dado que existe uma probabilidade não nula de que a soma $(Z_k + \bar{Z}_{n-k})$ seja nula, o único termo que contribui nesta última soma é o correspondente a $j = 0$:

$$q = 1 - P_{nk}(0)$$

Substituindo na expressão dos autovalores λ_1 e λ_2 obtemos, no limite $T \rightarrow 0$:

$$\lambda_1 = -\beta(1 + \kappa)P_{nk}(0) < 0$$

$$\lambda_2 = -\beta(1 - \kappa)P_{nk}(0) < 0$$

Provamos então que todas as soluções simétricas são instáveis à temperatura nula.

3.6 Conclusões

O principal resultado do estudo do modelo de Hopfield com um número finito de memórias correlacionadas aos pares é a existência de três regimes diferentes, dependentes do nível de ruído do sistema:

- para $T > T_1 = (1 + \kappa)$ o sistema não possui capacidade de reconhecimento. A sua dinâmica tem um comportamento ergódico e o estado de equilíbrio termodinâmico tem uma superposição nula com todas as memórias;
- para $T_1 > T > T_2 = (1 - \kappa)$ o sistema associa uma dada configuração inicial com um dos r pares, mas não é capaz de distinguir entre as duas memórias do par;
- para $T < T_2$ o sistema reconhece as memórias armazenadas, isto é, o estado de equilíbrio termodinâmico tem uma superposição 1 com uma das memórias armazenadas.
- As mudanças nos regimes estão caracterizadas, em ambos os casos, por transições de segunda ordem.

Uma outra propriedade importante é o fato das soluções simétricas neste modelo surgirem a diferentes temperaturas críticas, dependendo de κ e do quociente k/n . Elas correspondem, no limite $\kappa \rightarrow 0$, às soluções simétricas com superposição

com um número par de memórias. Neste limite todas as temperaturas críticas colapsam em 1. Com exceção da solução de reconhecimento de pares, todas estas soluções parecem preservar a instabilidade apresentada no caso sem correlação. Embora a nossa análise limita-se ao estudo da estabilidade perto da temperatura crítica e a $T = 0$, nós acreditamos que este comportamento seja válido em todo o intervalo de temperatura no qual elas existem.

Capítulo 4

Dinâmica de uma rede de neurônios diluída e assimétrica com interações multi-sinápticas

Nos últimos anos foram estudadas diferentes generalizações do modelo de Hopfield que introduzem o conceito de interação polinomial de grau maior que dois entre os neurônios da rede [78]-[83]. Estudos prévios em modelos de campo médio de vidros de spin com interações multi-spin [84]-[87] tinham mostrado que algumas propriedades importantes destes sistemas mudam com relação ao modelo com interações de pares, em particular, a natureza da transição à fase vidro de spin.

As motivações que levaram à inclusão deste tipo de interação em sistemas neuronais têm origem tanto na modelagem de sistemas biológicos, como também no interesse

por desenvolver sistemas artificiais capazes de simular algumas funções cerebrais. Do ponto de vista biológico, estudos feitos na região cortical do cérebro têm provado que a suposição de que os neurônios interagem somente em pares é muito simplificada [88,89]. Em particular, estes estudos mostraram que processos de interação axônio-axônio podem modificar o potencial de membrana de outras sinapses axônio-dendrite (ver referências [90,91,92]). Um neurônio k pode fazer contato por meio da sinapse (ijk) com a sinapse (ij) entre os neurônios i e j . A eficiência da sinapse (ij) é J_{ij} quando o neurônio k está no estado passivo ($S_k = -1$) e $J_{ij} + J_{ijk}$ quando está no estado ativo ($S_k = 1$). A contribuição deste processo ao potencial pós-sináptico do neurônio i pode ser escrito então da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}(1 + S_j) \left(J_{ij} + \frac{1}{2} J_{ijk}(1 + S_k) \right).$$

Supondo que todas as sinapses podem, em princípio, ser modificadas por qualquer outro neurônio, o potencial pós-sináptico no neurônio i tem a forma:

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{1}{2} \sum_j (J_{ij} + \frac{1}{2} \sum_k J_{ijk}(1 + S_k))(1 + S_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j J_{ij}(1 + S_j) + \frac{1}{4} \sum_{jk} J_{ijk}(1 + S_j)(1 + S_k). \end{aligned}$$

Esta última suposição é pouco realista do ponto de vista biológico, e por isso a diluição destas interações surge como um ingrediente fundamental na hora de modelar sistemas biológicos reais. Por outro lado, dado três neurônios interagentes quaisquer i, j e k , em geral o neurônio k não modifica da mesma forma as sinapses J_{ij} e J_{ji} . Isto requer então que seja possível considerar sinapses não simétricas, ou seja, com $J_{ijk} \neq J_{jik}$. Na figura 4.1a apresenta-se esquematicamente o desenho de um contato multi-sináptico entre três neurônios, onde J_{ijk} é a sinapse axônio-axônio-dendrite por meio da qual a atividade do neurônio k modifica a eficiência sináptica J_{ij} entre os neurônios i e j . Ele foi obtido a partir de estudos de microscopia eletrônica numa pequena região do cérebro de rato [13]. Estudos similares têm mostrado que existem processos ainda mais complexos nos quais o número de neurônios interagentes é maior que três (ver figura 4.1b). Nestes casos, a expressão do potencial pós-sináptico é facilmente generalizável. Finalmente, do

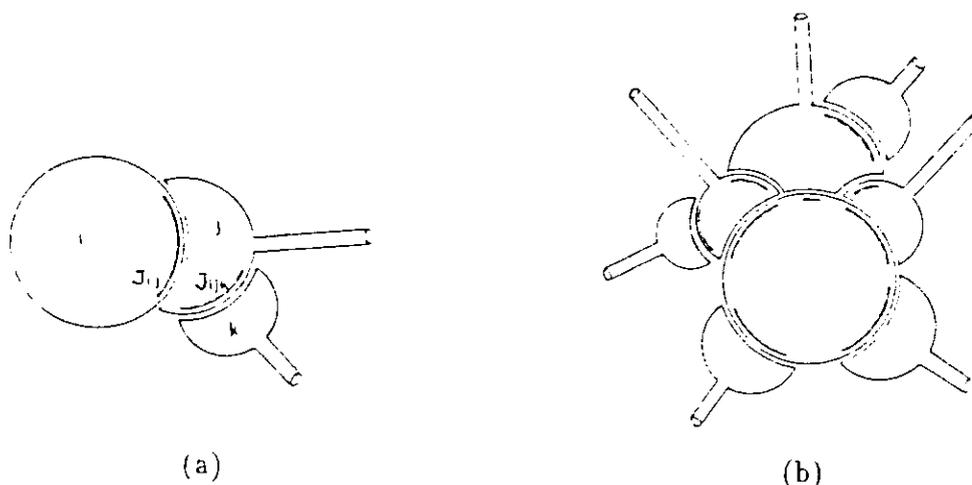


Figura 4.1: Desenho esquemático do contato multi-sináptico entre neurônios, obtido a partir de estudos de microscopia eletrônica no tecido nervoso central de um rato: (a) J_{ijk} é a eficiência da sinapse axônio-axônio-dendrite por meio da qual a atividade do neurônio k modifica a eficiência sináptica axônio-dendrite J_{ij} e (b) esquema obtido a partir de processos mais complexos que envolvem interações entre mais de três neurônios

ponto de vista de sistemas artificiais, as interações multi-sinápticas têm mostrado ser muito importantes no desenho de sistemas óticos capazes de reconhecer padrões [93].

A maioria dos trabalhos com interações multi-sinápticas consideram somente interações simétricas, e portanto a dinâmica destes sistemas está sempre governada por um hamiltoniano (uma função de Liapunov), sendo possível, a partir do cálculo da função de partição, estudar a termodinâmica do modelo, isto é, as suas propriedades na presença de ruído. Embora interações polinomiais impliquem em um aumento considerável tanto no número como na complexidade dos acoplamentos entre neurônios, em compensação elas aumentam a capacidade de armazenamento da rede com respeito ao modelo de Hopfield. Dentre estas generalizações do modelo de Hopfield com interações polinomiais, a introduzida nas referências [79]-[81] está estreitamente ligada ao modelo estudado neste capítulo. O hamiltoniano do sistema é um monômio de grau R nas variáveis de estado dos neurônios ($S_i = \pm 1$), com a forma:

$$H = - \sum_{i_1, \dots, i_R} J_{i_1, i_2, \dots, i_R} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_R}, \quad (4.1)$$

onde os acoplamentos estão dados pela seguinte generalização da regra de Hopfield para

padrões não correlacionados:

$$J_{i_1, i_2, \dots, i_R} = \frac{R!}{N^{R-1}} \sum_{\mu=1}^p \xi_{i_1}^{\mu} \xi_{i_2}^{\mu} \cdots \xi_{i_R}^{\mu} \quad (4.2)$$

e a dinâmica é governada por um processo Monte Carlo banho térmico seqüencial. O número de memórias que podem ser armazenadas sem erro cresce com R e N como $N^{R-1}/(2(R-1)!\ln N)$ para $N \gg 1$. Como acontece no modelo de Hopfield ($R = 2$), a termodinâmica do modelo prediz dois valores críticos do parâmetro $\alpha = R!p/2N^{R-1}$. Para $\alpha(R, T) < \alpha_c(R, T)$ o sistema tem um estado metaestável perto dos padrões armazenados (o sistema reconhece com um pequeno erro ϵ), enquanto que para $\alpha(R, T) < \alpha_1(R, T) < \alpha_c(R, T)$ estes estados são os mínimos globais. A transição de fase termodinâmica que ocorre em $\alpha_1(R, T)$ é de primeira ordem. É importante notar que o parâmetro α usado é a fração entre o número de bits armazenados (pN) e o número de acoplamentos independentes que é necessário calcular ($\approx N^R/R!$ para $N \gg 1$), e portanto leva em conta o fato das interações serem simétricas. Gardner [79] provou que $\alpha_c(R, 0)$ cresce com R , e que $\alpha_c(R, 0) \rightarrow \infty$ para $R \rightarrow \infty$ da seguinte forma:

$$\alpha_c(R, 0) = \frac{R}{4 \ln R}$$

Uma propriedade negativa do modelo está dada pelo tamanho das bacias atratoras dos estados próximos às memórias armazenadas, que diminui à medida que R cresce.

Uma outra forma de medir a qualidade da rede é calcular a fração a_c entre o número máximo de bits que a rede é capaz de armazenar e o *número total* de acoplamentos que é necessário calcular:

$$a_c = \frac{\alpha_c}{R!}.$$

Em particular, quando os acoplamentos são assimétricos, a_c é o parâmetro apropriado para caracterizar a qualidade do modelo. Gardner [79] encontrou que, ao contrário de α_c , a_c decresce com R , e que para $R \rightarrow \infty$ vai para zero como

$$a_c \sim \frac{1}{2(R-1) \ln R}.$$

Numa outra linha independente de trabalho, o conceito de diluição assimétrica tem permitido resolver exatamente a dinâmica de diferentes sistemas, e em particular [94], a dinâmica de uma rede de neurônios com a matriz sináptica J_{ij} definida pela regra:

$$J_{ij} = C_{ij} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu},$$

onde C_{ij} é uma variável aleatória independente que pode tomar os valores 0 e 1 com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\rho(C_{ij}) = \frac{C}{N} \delta(C_{ij} - 1) + \left(1 - \frac{C}{N}\right) \delta(C_{ij})$$

e ξ_i^{μ} é uma variável aleatória independente que representa o estado do neurônio i na memória μ . A constante C é a conectividade média da rede. Dado que as variáveis C_{ij} e C_{ji} são independentes, os acoplamentos J_{ij} e J_{ji} são diferentes (assimétricos) com probabilidade $2(1 - C/N)(C/N)$. É possível provar [95,98] que se a constante C satisfaz a condição :

$$C \ll \ln N,$$

no limite termodinâmico não existem circuitos neuronais fechados e, para qualquer tempo t , dois neurônios quaisquer são independentes com probabilidade 1, ou seja, cada neurônio possui uma árvore temporal de ancestrais que não compartilha neurônios com a árvore de outros neurônios. Isto quer dizer que, no limite $N \rightarrow \infty$, o modelo temperado (quenched) no qual a desordem (neste caso as memórias) é congelada (fixa) pode ser tratado como um sistema recozido (annealed), no qual as variáveis aleatórias flutuam na mesma escala de tempo com que flutuam as variáveis dinâmicas. Usando esta propriedade, Derrida et al. [94] encontraram uma equação de recorrência para a superposição entre uma das p memórias armazenadas e o estado do sistema quando o estado inicial tem uma somente superposição não nula com esta memória. A partir desta equação estudaram as propriedades de reconhecimento do sistema, provando que, no limite $C \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow \infty$ com $\alpha \equiv p/C = \text{cte.}$, o sistema sofre uma transição dinâmica de uma fase de reconhecimento ($\alpha < \alpha_c$) a uma fase de não reconhecimento ($\alpha > \alpha_c$). Na ausência de ruído o valor crítico de α é:

$$\alpha_c = \frac{2}{\pi} \approx 0.636.$$

É importante notar que, ao contrário do que acontece na termodinâmica do modelo de Hopfield sem diluição, esta transição é de segunda ordem e que a capacidade de reconhecimento é maior quando o modelo é diluído. Esta mesma técnica foi também usada em vidros de spin assimétricos [96], em ferromagnetos [97] e em redes aleatórias de autômata [98], entre outros, sendo possível para todos eles estudar exatamente importantes propriedades dinâmicas.

Neste capítulo estuda-se a dinâmica de um sistema no qual estão presentes os dois elementos discutidos nesta seção: interações polinomiais de ordem maior que dois e diluição assimétrica. Seguindo as idéias introduzidas na referência [94] encontra-se uma equação de recorrência para a superposição entre uma memória e o estado do sistema e, a partir dela, estudam-se as propriedades de reconhecimento do modelo. Na próxima seção é introduzido o modelo, e nas duas seções seguintes são estudados dois casos particulares: (a) o limite C e $p \rightarrow \infty$ e (b) o caso de conectividade finita para interações entre três neurônios. Finalmente, na última seção discute-se os principais resultados obtidos.

4.1 Modelo

O sistema estudado neste capítulo é formado por N neurônios, cada um deles modelado por uma variável tipo Ising S_i que pode tomar os valores $+1$ e -1 , representando os estados ativo e passivo respectivamente. As interações entre pares de neurônios do modelo de Hopfield são substituídas por interações polinomiais de ordem $R > 2$, como está descrito na seção anterior. O potencial pós-sináptico no neurônio i no tempo $t + \Delta t$ é dado pela soma das contribuições de todos os possíveis conjuntos (que chamaremos plaquetas) de R neurônios dos quais ele faz parte, ou seja:

$$h_i(t + \Delta t) = \sum_{j_2, \dots, j_R}^N J_{i, j_2, \dots, j_R} S_{j_2}(t) \dots S_{j_R}(t). \quad (4.3)$$

A eficiência sináptica J_{i_1, i_2, \dots, i_R} é função das p memórias armazenadas e está dada pela expressão:

$$J_{i_1, i_2, \dots, i_R} = C_{i_1, i_2, \dots, i_R} \sum_{\mu=1}^p \xi_{i_1}^{\mu} \xi_{i_2}^{\mu} \dots \xi_{i_R}^{\mu}, \quad (4.4)$$

onde os ξ 's são variáveis aleatórias independentes que podem tomar os valores ± 1 com igual probabilidade e ξ_i^{μ} é o estado do neurônio i no μ -ésimo padrão armazenado. Os C_{i_1, i_2, \dots, i_R} são também variáveis aleatórias independentes que representam a diluição nos acoplamentos. Para uma dada plaqueta de R neurônios, C_{i_1, i_2, \dots, i_R} é escolhida com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\rho(C_{i_1, i_2, \dots, i_R}) = \frac{C}{N^{R-1}} \delta(C_{i_1, i_2, \dots, i_R} - 1) + \left(1 - \frac{C}{N^{R-1}}\right) \delta(C_{i_1, i_2, \dots, i_R}).$$

C_{i_1, i_2, \dots, i_R} pode tomar então só os valores 0 ou 1, representando respectivamente a diluição ou não da interação da plaqueta.

Para cada uma das plaquetas de R neurônios da qual o i_1 -ésimo neurônio faz parte, o potencial pós-sináptico neste último pode ser afetado por até $(R - 1)!$ acoplamentos diferentes, correspondentes a todas as possíveis permutações de sub-índices na definição (4.4). Na ausência de diluição, a eficiência de todas as permutações é a mesma, e coincide com a generalização da regra de Hopfield (4.4) introduzida nas referências [79], [80] e [81], mas a variável C_{i_1, i_2, \dots, i_R} depende de cada permutação de sub-índices, e não somente introduz diluição nos acoplamentos de plaquetas, mas também generaliza o conceito de assimetria comumente usado em interações entre dois neurônios:

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_R} \neq C_{per[i_1, i_2, \dots, i_R]},$$

onde $per[i_1, i_2, \dots, i_R]$ indica uma permutação nos sub-índices. A eficiência sináptica de uma dada plaqueta com uma ordem determinada dos sub-índices pode então tomar dois valores: 0, se a interação for cortada ou J_{i_1, i_2, \dots, i_R} no caso contrário.

A dinâmica do sistema é governada por um processo Monte Carlo banho térmico com atualização paralela, isto é, a cada intervalo de tempo Δt os estados de todos os neurônios da rede são atualizados simultaneamente segundo a regra:

$$S_i(t + \Delta t) = \begin{cases} +1 & \text{com probabilidade } (1 + \exp(-2h_i(t)/T_0))^{-1} \\ -1 & \text{com probabilidade } (1 + \exp(+2h_i(t)/T_0))^{-1}, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $h_i(t)$ é o potencial pós-sináptico no neurônio i dado por (4.3), e T_0 é uma *temperatura* generalizada que controla o nível de ruído do sistema (para $T_0 = 0$ a dinâmica é determinista). Dado que a atualização é paralela, a escala de tempo escolhida é $\Delta t = 1$.

Este sistema pode ser pensado também como uma versão diluída do sistema magnético governado pelo hamiltoniano (4.1) e submetido à dinâmica banho térmico paralela, com J_{i_1, i_2, \dots, i_R} dado pela expressão (4.4). Mas, dado que a diluição introduz também assimetria nos acoplamentos e que o processo de atualização é paralelo, a dinâmica (4.5) não leva à distribuição de Gibbs. O cálculo das propriedades do sistema em equilíbrio termodinâmico torna-se impossível, dado que não é conhecida a distribuição com a qual o sistema percorre o espaço de fase para $t \rightarrow \infty$.

Vamos encontrar agora a equação de recorrência que permite estudar as propriedades de reconhecimento do sistema. Seja a configuração inicial $\{S_i(0)\}$ tal que a sua superposição com a memória ν é m_0 enquanto que a superposição com as memórias restantes é nula. Isto quer dizer que

$$m_\mu(0) = \begin{cases} m_0 & \text{se } \mu = \nu \\ O(1/\sqrt{N}) & \text{se } \mu \neq \nu, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde a superposição $m^\mu(t)$ está definida por:

$$m_\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \xi_i^\mu S_i(t) \rangle, \quad (4.7)$$

e $\langle \dots \rangle$ denota uma média térmica a temperatura T_0 e uma média sobre todas as possíveis configurações iniciais compatíveis com a condição (4.6).

O primeiro passo é calcular o valor de $m_\nu(t = 1)$ como função de m_0 para posteriormente tentar generalizar este procedimento para tempos arbitrários.

Seja K_i o número de plaquetas às quais o neurônio i pertence após o sistema ter sido diluído. É importante notar que um dado neurônio j pode interagir com o neurônio i em muitas plaquetas diferentes, como também na mesma plaqueta, com diferentes permutações de sub-índices. O potencial pós-sináptico no neurônio i no tempo $t = 0$

pode ser escrito da seguinte forma:

$$h_i(t=0) = \sum_{\delta=1}^{K_i} J_\delta S_{j_2^\delta}(t=0) \dots S_{j_R^\delta}(t=0),$$

onde δ é um índice que percorre as K_i plaquetas das quais o neurônio i faz parte após a diluição, e $\{j_2^\delta, \dots, j_R^\delta\}$ é o conjunto de neurônios que, junto ao neurônio i formam a plaqueta δ . Nesta soma já foram consideradas as diferentes permutações de sub-índices.

Usando a expressão de J_δ o campo local pode ser reescrito como :

$$h_i = \sum_{\delta=1}^{K_i} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_{j_2^\delta}^\mu S_{j_2^\delta} \dots \xi_{j_R^\delta}^\mu S_{j_R^\delta},$$

onde por simplicidade foi omitido o tempo $t=0$. Separando o termo $\mu = \nu$ dos restantes obtém-se:

$$h_i = \xi_i^\nu \left(\sum_{\delta=1}^{K_i} \xi_{j_2^\delta}^\nu S_{j_2^\delta} \dots \xi_{j_R^\delta}^\nu S_{j_R^\delta} + v_i^\nu \right), \quad (4.8)$$

com

$$v_i^\nu = \sum_{\delta=1}^{K_i} \sum_{\mu \neq \nu}^p \xi_i^\mu \xi_{j_2^\delta}^\mu S_{j_2^\delta} \dots \xi_{j_R^\delta}^\mu S_{j_R^\delta} = \sum_{\delta=1}^{K_i} \sum_{\mu \neq \nu}^p \phi_{i,\delta}^{\nu,\mu}$$

Os dois termos da expressão (4.8) são somas de K_i e $K_i(p-1)$ termos respectivamente, e cada um pode valer $+1$ e -1 . Seja n o número de termos negativos na primeira soma e s o número de termos negativos na segunda. O campo local pode tomar então os valores:

$$h_i = K_i p - 2(n + s),$$

com $n = 0, \dots, K_i$ e $s = 0, \dots, K_i(p-1)$. Usando que a configuração inicial está correlacionada com a ν -ésima memória armazenada, obtém-se a probabilidade Pr de $S_i \xi_i^\mu$ ser $+1$ e -1 :

$$Pr(S_i \xi_i^\nu = \pm 1) = \frac{(1 \pm m_0)}{2},$$

e, por conseguinte, que a probabilidade da primeira soma em (4.8) ter n termos negativos está dada por

$$Pr(n) = \binom{K_i}{n} q^{K_i-n} (1-q)^n,$$

com

$$q = \sum_{z=0}^{R-1} \binom{R-1}{z} \frac{(1+m_0)^{R-z-1} (1-m_0)^z}{2^{R-1}}.$$

Σ' indica que a soma é feita somente sobre valores pares de z , e q é a probabilidade do coeficiente $(\xi_{j_2}^\mu S_{j_2} \dots \xi_{j_R}^\mu S_{j_R})$ ser positivo. O cálculo da probabilidade de que a segunda soma tenha s termos negativos é mais simples, dado que a configuração inicial não tem nenhuma correlação com as memórias restantes ($\mu \neq \nu$). Assim, ela está dada simplesmente por :

$$Pr(s) = \frac{1}{2^{K_i(p-1)}} \binom{K_i(p-1)}{s}.$$

Dado que as duas somas são independentes (não compartilham nenhuma das variáveis aleatórias ξ), a probabilidade da primeira soma do potencial pós-sináptico ter n termos negativos e a segunda soma ter s termos negativos está dada pela expressão:

$$Pr(n, s) = \frac{1}{2^{K_i(p-1)}} \binom{K_i(p-1)}{s} \binom{K_i}{n} q^{K_i-n} (1-q)^n. \quad (4.9)$$

Usando a definição (4.7) obtém-se:

$$\begin{aligned} m_\nu(t=1) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \langle S_i(t=1) \rangle = \langle \langle \xi_i^\nu \langle S_i(t=1) \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \xi_i^\nu Pr(S_i(t=1)=1) - \xi_i^\nu Pr(S_i(t=1)=-1) \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \xi_i^\nu \tanh(h_i(t=0)/T_0) \rangle \rangle \end{aligned}$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa uma média térmica a temperatura T_0 e sobre as condições iniciais e $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ uma média nas variáveis ξ . Para fazer esta última média usa-se a expressão (4.9), obtendo-se assim finalmente:

$$\begin{aligned} m_\nu(1) &= f(m_0) \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} P_K \sum_{n=0}^K \sum_{s=0}^{K(p-1)} \frac{q^{K-n} (1-q)^n}{2^{K(p-1)}} \binom{K}{n} \binom{K(p-1)}{s} \tanh\left(\frac{Kp-2s-2n}{T_0}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nesta expressão a soma é feita sobre todos os possíveis números de plaquetas, dado que este número é uma variável aleatória, e P_K é a probabilidade do neurônio i formar parte de K plaquetas após a diluição :

$$P_K = \binom{N^{R-1}}{K} \left(\frac{C}{N^{R-1}}\right)^K \left(1 - \frac{C}{N^{R-1}}\right)^{N^{R-1}-K}$$

O próximo passo é tentar generalizar esta fórmula para tempos arbitrários. Até agora não foi necessário usar o fato do sistema ser diluído, mas para calcular $m_\nu(t=2)$

em função de $m_\nu(t = 1)$ é preciso calcular a distribuição de probabilidade do potencial pós-sináptico no neurônio i no instante $t = 1$. Se o sistema não estiver suficientemente diluído surgem correlações entre os diferentes termos v_i^t e entre estes e os da primeira soma em (4.8), dado que eles podem compartilhar ancestrais na árvore gerada pela evolução temporal, o cálculo destas correlações é extremamente complicado para uma rede completamente conectada [99,100]. Para poder generalizar a expressão (4.10) para tempos arbitrários é necessário que:

- quase todos os circuitos fechados de neurônios sejam eliminados;
- todos os neurônios sejam independentes para todo t com probabilidade 1, isto é, que dois neurônios quaisquer tenham árvores de ancestrais temporais diferentes que não compartilhem nenhum neurônio.

Esta condição é satisfeita desde que :

$$(R - 1)C \ll \ln N . \quad (4.11)$$

Supondo então que o sistema satisfaz esta condição, a expressão (4.10) pode ser generalizada para tempos arbitrários :

$$\begin{aligned} m_\nu(t + 1) &= f(m_\nu(t)) \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{C^K e^{-C}}{K!} \sum_{n=0}^K \sum_{s=0}^{K(p-1)} \frac{q^{K-n} (1-q)^n}{2^{K(p-1)}} \\ &\quad \binom{K}{n} \binom{K(p-1)}{s} \tanh \left(\frac{Kp - 2s - 2n}{T_0} \right) . \end{aligned}$$

Nesta última expressão foi usado que, no limite termodinâmico, P_K tem a forma

$$P(K) = \frac{C^K e^{-C}}{K!} .$$

Dado que não é possível realizar esta soma, o estudo limita-se a dois casos particulares que serão analisados nas próximas seções : o caso C e $p \rightarrow \infty$ e o caso de conectividade finita é fixa para $R = 3$.

4.2 O limite de infinitas memórias

Nesta seção obtém-se a forma da função $f(m)$ quando, após efetuar o limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, tomam-se os limites $C \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow \infty$, mantendo a fração $\alpha \equiv (p-1)/C$ constante e, posteriormente, estuda-se a capacidade de reconhecimento do sistema. É muito importante respeitar esta ordem nos limites a fim de assegurar que a condição (4.11) seja sempre satisfeita. Seja $T \equiv T_0/C$ uma temperatura reduzida. Neste limite, o termo v_i^ν da expressão (4.8) é uma soma de infinitas variáveis aleatórias $\phi_{i,\delta}^{\nu,\mu}$, cada uma delas com valor médio nulo e variância igual a um. Pelo teorema do limite central, a distribuição de probabilidade para v_i^ν é então uma gaussiana com valor médio zero e variância $\sigma = \sqrt{C(p-1)}$:

$$p_{v_i^\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(p-1)}} e^{-\frac{x^2}{2C(p-1)}}.$$

Com este resultado, a distribuição de probabilidade para o campo local é simplesmente a mesma gaussiana deslocada em $C m_\nu^{R-1}(t)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(p-1)}} e^{-\frac{(C m_\nu^{R-1} - x)^2}{2C(p-1)}},$$

onde foi usado que:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\frac{(p-1)}{C} \rightarrow \alpha} \sum_{\delta=1}^{K_i} \xi_{j_2^\delta}^\nu S_{j_2^\delta}(t) \dots \xi_{j_R^\delta}^\nu S_{j_R^\delta}(t) = C m_\nu^{R-1}(t).$$

É possível calcular novamente a superposição entre o estado do sistema e a ν -ésima memória:

$$m_\nu(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \langle S_i(t+1) \rangle = \langle \langle \xi_i^\nu \tanh(h_i(t)/T) \rangle \rangle.$$

Usando a distribuição do campo local no cálculo da média sobre a desordem obtém-se:

$$\begin{aligned}
 m_\nu(t+1) &= f(m_\nu(t)) \\
 &= - \int_{-\infty}^{-m_\nu(t)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi C(p-1)}} e^{-\frac{(C m_\nu^{R-1}(t)-x)^2}{2C(p-1)}} \tanh(x/T) \\
 &\quad + \int_{-m_\nu(t)}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi C(p-1)}} e^{-\frac{(C m_\nu^{R-1}(t)-x)^2}{2C(p-1)}} \tanh(x/T) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi C(p-1)}} e^{-\frac{(C m_\nu^{R-1}(t)-x)^2}{2C(p-1)}} \tanh(x/T).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Realizando a seguinte mudança de variáveis:

$$y = \frac{C m_\nu^{R-1}(t) - x}{\sqrt{2C(p-1)}},$$

obtém-se

$$m_\nu(t+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \tanh\left[\frac{m_\nu^{R-1}(t) - y\sqrt{2\alpha}}{T}\right]. \tag{4.13}$$

Os pontos fixos deste mapa e a análise da sua estabilidade determinam as propriedades de recuperação do sistema neste limite. Vamos então estudar as soluções desta equação de recorrência para o caso $R > 2$, dado que o caso $R = 2$ já foi estudado na referência [94]. O ponto $m_\nu = 0$ é sempre um ponto fixo estável do mapa (4.13), dado que a sua derivada primeira na origem é sempre nula. Para altas temperaturas, este é o único ponto fixo do sistema. Isto quer dizer que um nível alto de ruído na rede impede o reconhecimento, independente da distância de Hamming entre a configuração inicial e a memória. A uma temperatura crítica T_c que depende de α e de R , o sistema sofre uma transição de primeira ordem. Para temperaturas menores que T_c o sistema está numa fase de reconhecimento. Neste regime, o mapa (4.13) tem dois novos pontos fixos, m_A e m_B , como é mostrado esquematicamente na figura 4.2. Para todas a temperaturas menores que T_c , m_A é sempre instável enquanto m_B é sempre estável. Isto significa que todas aquelas configurações iniciais que têm uma superposição com o ν -ésimo padrão

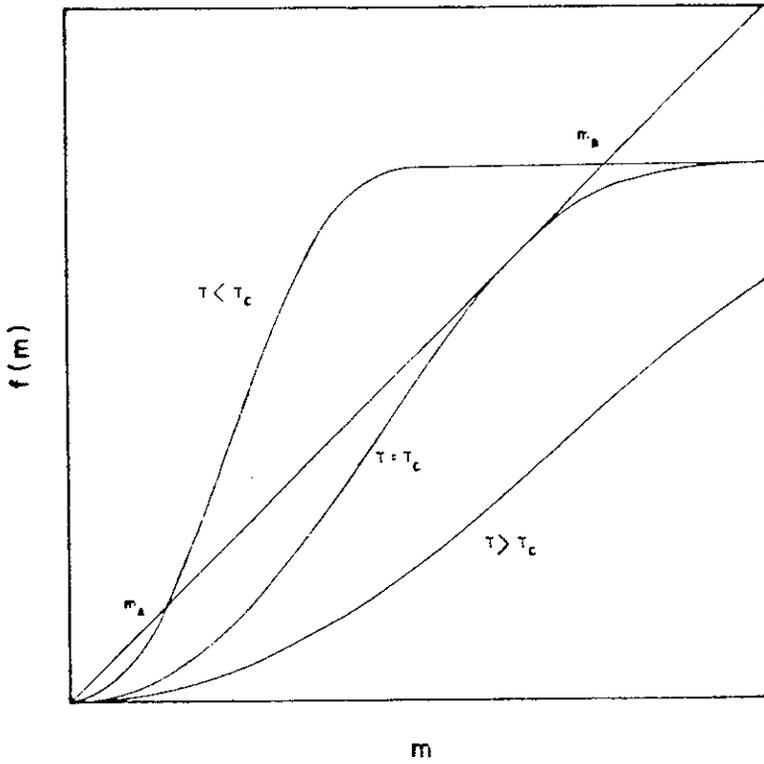


Figura 4.2: Solução esquemática da equação para os pontos fixos da relação de recorrência (4.13). O sistema sofre uma transição de fase de primeira ordem à $T = T_c$. Para $T > T_c$, $m = 0$ é o único ponto fixo estável, enquanto que para $T < T_c$ existem dois pontos fixos estáveis, $m = 0$ e $m = m_B$, e um instável, $m = m_A$.

R	α_c	% de erro
3	0.2525	7.65
4	0.1975	3.55
5	0.1725	2.25
6	0.1575	1.65
10	0.1285	0.65
100	0.0765	0.45
1000	0.0565	$2.5 \cdot 10^{-2}$
10000	0.0525	$1.5 \cdot 10^{-3}$
100000	0.0522	$5.0 \cdot 10^{-4}$

Tabela 4.1: Valor crítico da capacidade de armazenamento e os correspondentes valores de ϵ para diferentes valores de R no caso $T = 0$.

Para diferentes valores de R , a tabela 4.2 apresenta os respectivos valores da temperatura crítica sob a qual o sistema está na fase de reconhecimento. Apresenta-se também os correspondentes valores de ϵ na temperatura crítica. No limite $R \gg 1$, m satisfaz:

$$m = 1 - \frac{2}{R} \quad \text{desde que } T < \frac{1}{e^2 \ln R}.$$

Na figura 4.3 mostra-se o diagrama de fases para diferentes valores de R . O tamanho da fase de reconhecimento diminui à medida que a ordem das iterações aumenta. Para $R \rightarrow \infty$, tanto T_c quanto α_c vão para zero logaritmicamente. O diagrama é muito similar com o diagrama de fases termodinâmico do modelo de Hopfield generalizado para interações multi-spin sem diluição [80].

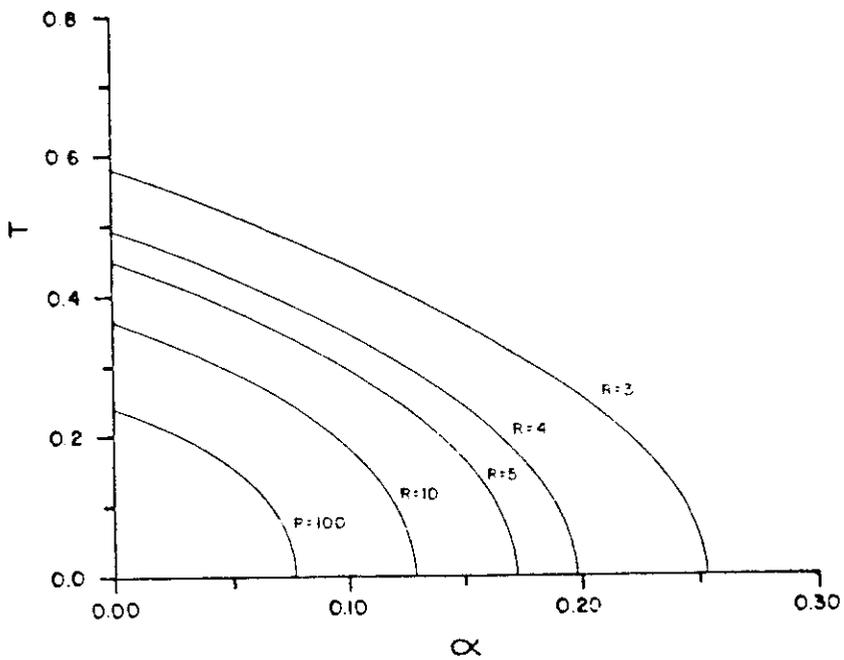


Figura 4.3: Diagrama de fases no plano T vs α , para diferente valores de R . Para cada valor de R o sistema apresenta uma linha de transição que separa a fase paramagnética (valores grandes de T e α) da fase de reconhecimento.

R	T_c	% de erro
3	0.5825	9.37
4	0.4955	6.17
5	0.4515	3.92
6	0.4215	0.51
10	0.3645	$7.5 \cdot 10^{-2}$
100	0.2395	$5.0 \cdot 10^{-3}$
1000	0.1825	$0.5 \cdot 10^{-4}$
10000	0.0525	$0.5 \cdot 10^{-5}$
100000	0.0522	$0.5 \cdot 10^{-6}$

Tabela 4.2: Temperatura crítica e os correspondentes valores de ϵ para diferentes valores de R no limite $\alpha \rightarrow 0$

4.3 Conectividade finita para $R = 3$

Nesta seção estuda-se o modelo com interações entre três neurônios ($R = 3$) e com a conectividade de cada sítio K fixa e comum a todos eles. Neste modelo, a conectividade refere-se ao número de plaquetas que afetam o potencial pós-sináptico de cada neurônio após o sistema ter sido diluído.

Quando a conectividade é fixa, o mapa (4.13) tem a seguinte forma

$$m_\nu(t+1) = \sum_{n=0}^K \sum_{s=0}^{K(p-1)} \frac{q^{K-n} (1-q)^n}{2^{K(p-1)}} \binom{K}{n} \binom{K(p-1)}{s} \tanh \left[\frac{Kp - 2s - 2n}{T} \right]. \quad (4.14)$$

Aqui a soma sobre as diferentes conectividades foi suprimida, e portanto é possível agora resolver este mapa numericamente, o que não é possível no caso de conectividade variável.

O lado direito desta última expressão é uma função que tem uma forma similar à mostrada na figura 4.2. Para valores fixos de p e R existe um valor mínimo K_c da conectividade a partir do qual (e para valores maiores que ele) o sistema apresenta uma temperatura crítica que separa uma fase de reconhecimento (baixas temperaturas) de

p	K_c
1	3
2	7
3	11
4	15
5	19
6	23

Tabela 4.3: Valor mínimo da conectividade para que exista solução de reconhecimento para diferentes valores de p no caso $R = 3$.

uma fase de não reconhecimento (altas temperaturas). Na tabela 4.3 apresenta-se o mínimo valor de K_c para diferentes valores de p com $R = 3$. O critério para decidir se o sistema reconhece ou não reconhece foi fixado pela condição de que o erro de reconhecimento seja menor que 5 %. Estes resultados mostram que à medida que a quantidade de informação armazenada aumenta, é necessário aumentar a conectividade da rede.

Para um dado valor de p e R , e para valores da conectividade iguais ou maiores que a conectividade crítica K_c , existe uma temperatura de transição T_c . Ela corresponde ao nível de ruído no qual o mapa (4.14) deixa de ter um ponto fixo estável diferente de zero, e portanto o sistema perde a habilidade de reconhecer os padrões. Na tabela 4.4 apresenta-se o valor de T_c para o caso $R = 3$ e $p = 2$. É importante notar que o valor de T_c cresce quase linearmente com a conectividade da rede. Este resultado pode parecer surpreendente, dado que é conhecido que o modelo com interações simétricas multi-sinápticas sem diluição tem uma transição de fase a temperatura finita. É preciso lembrar que no modelo considerado nesta seção está sempre presente o conceito de diluição e principalmente de assimetria, e que embora a conectividade divirja, ela tem que satisfazer a condição (4.11) para que a equação de recorrência (4.14) seja válida.

K	T_c
7	1.59
8	2.31
9	2.97
10	3.60
11	4.25
12	4.85
20	9.57
40	21.00

Tabela 4.4: Valor da temperatura na qual surgem as soluções de reconhecimento para diferentes valores da conectividade K , para o caso $R = 3$ e $p = 2$

Resultados similares foram encontrados no modelo ferromagnético diluído com conectividade finita [97].

4.4 Conclusões

Neste capítulo estudou-se um sistema que inclui dois ingredientes importantes do ponto de vista biológico, mas que não haviam sido considerados num mesmo modelo: (a) interações multi-sinápticas entre neurônios e (b) diluição assimétrica das sinápses. O fato de ser possível estudar as propriedades de reconhecimento do sistema a partir de um tratamento exato da sua dinâmica é um ponto muito importante. Em particular, até onde sabemos, este trabalho [101] é o primeiro a estudar a dinâmica de uma rede com interações multi-sinápticas diluídas. Trabalhos posteriores na mesma linha têm estudado a interação simultânea de pares de neurônios e plaquetas de três neurônios, encontrando que, para valores adequados das eficiências sinápticas, o sistema apresenta um comportamento caótico. É importante notar que esta última classe de sistemas é mais realista que o modelo tratado aqui, dado que não suprime as interações entre dois

neurônios, mas inclui os efeitos das interações axônio-axônio-sinapse.

No que diz respeito aos resultados obtidos, alguns pontos merecem ser destacados:

- para comparar com os resultados obtidos no estudo da termodinâmica de sistemas simétricos [79] é importante levar em conta que, devido ao fato de ser este sistema assimétrico, o parâmetro $\alpha \equiv (p - 1)/C$ tem que ser comparado com o parâmetro $a_c = \alpha/2R!$ definido na introdução deste capítulo, pois ele não leva em conta a simetria dos acoplamentos. Quando comparados com os valores críticos na ausência de ruído apresentados na referência [79] ($a_c = 0.13$ para $R = 3$ e $a_c = 0.10$ para $R = 4$), observa-se que os correspondentes valores de α_c obtidos para o modelo diluído são maiores ($\alpha_c = 0.25$ para $R = 3$ e $\alpha_c = 0.19$ para $R = 4$). Ou seja, como acontece no caso $R = 2$ [94], a capacidade de reconhecimento da rede aumenta consideravelmente. Em compensação, o erro de reconhecimento no valor crítico de α é maior que o obtido no caso simétrico, mas isto não é muito importante dado que este erro continua sendo pequeno;
- a natureza da transição entre as fase de reconhecimento e não reconhecimento é diferente da obtida no caso $R = 2$, mas coincide com a dos resultados encontrados em sistemas simétricos. O fato de se tratar de uma transição descontínua tem importantes conseqüências do ponto de vista dinâmico. Neste caso as soluções de reconhecimento convivem com a solução paramagnética (superposição nula com a memória), e portanto, é necessário que a configuração inicial tenha uma superposição com a memória maior que um dado limiar (dado por m_B na figura 4.2) para que o estado do sistema evolua a um estado final de reconhecimento. No caso $R = 2$, onde a transição é contínua, para qualquer superposição inicial não nula com a memória, o sistema é capaz de reconhecê-la. Isto que dizer então que, no modelo diluído, as bacias atratoras associadas as soluções de reconhecimento são menores que no caso $R = 2$;
- à medida que o grau da interação polinomial aumenta, a fase de reconhecimento diminui. Isto sugere que, embora as interações multi-sinápticas e a diluição

assimétrica sejam elementos importantes do ponto de vista biológico e no desenvolvimento de sistemas óticos, não produzem um aumento na capacidade de armazenamento da rede quando são tratados simultaneamente num mesmo modelo.

Capítulo 5

Propagação de danos no modelo de van Hemmen de vidro de spin

5.1 O modelo de van Hemmen de vidro de spin

O modelo de van Hemmen de vidro de spin [14,15] consiste em N spins totalmente conectados (cada spin interage com todos os outros spins), modelados por variáveis de Ising $S_i = \pm 1$ e governados pelo Hamiltoniano

$$H = -\frac{J_0}{2N} \sum_{i,j} S_i S_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - h \sum_i S_i, \quad (5.1)$$

onde J_0 representa um acoplamento ferromagnético, h é um campo magnético externo homogêneo, e os J_{ij} 's são os acoplamentos aleatórios que descrevem em forma simplifi-

cada a interação RKKY [43,44,45] entre os momentos magnéticos e são dados por:

$$J_{ij} = \frac{J}{N} (\xi_i \eta_j + \xi_j \eta_i), \quad J_{ii} = 0. \quad (5.2)$$

Os ξ_i 's e η_i 's formam um conjunto de $2N$ variáveis aleatórias independentes com valor médio zero e variância um. Neste trabalho considera-se o caso particular em que elas podem tomar os valores $+1$ e -1 com a mesma probabilidade. A relação deste modelo com o modelo de Hopfield com duas memórias armazenadas é evidente. Não entanto, veremos neste e no próximo capítulo que eles apresentam um diagrama termodinâmico e dinâmico muito diferentes.

É importante notar que este também é um modelo de campo médio, mas com uma distribuição de acoplamentos J_{ij} diferente da usada do modelo SK. Em particular, os acoplamentos não são independentes, mas é possível provar [15] que eles são fracamente correlacionados.

Vamos descrever, brevemente, a termodinâmica do modelo, estudada por L. van Hemmen nas referências [14] e [15]. Seguindo o roteiro introduzido no capítulo 2 para sistemas com desordem temperada, calcula-se a função de partição do sistema para uma dada configuração da desordem:

$$Z(\xi, \eta) = \text{Tr}_{S_i} \exp(-\beta H(S, \xi, \eta)),$$

e a partir dela a energia livre, definida como

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta N} \langle \langle \ln Z(\xi, \eta) \rangle \rangle,$$

onde novamente $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ denota uma média na desordem, isto é, sobre $\{\xi\}$ e $\{\eta\}$. Introduzindo os parâmetros :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i, \\ q_1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i S_i, \\ q_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i S_i, \end{aligned}$$

o hamiltoniano (5.1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$H = NQ(m, q_1, q_2) = -N \left(\frac{1}{2} J_0 m^2 + J q_1 q_2 + h m \right).$$

Nesta expressão, m é a magnetização do sistema e q_1 e q_2 são as superposições com as configurações $\{\xi\}$ e $\{\eta\}$ respectivamente. No limite termodinâmico, a energia livre é dada por [14]:

$$f(\beta) = \max \left(\frac{1}{2} J_0 m^2 + J q_1 q_2 - \langle \langle \ln \cosh(m + \xi q_2 + \eta q_1) \rangle \rangle \right),$$

onde \max indica que a função deve ser calculada com os valores dos parâmetros (m, q_1, q_2) que maximizam o argumento. Isto leva às seguintes equações de campo médio:

$$\begin{aligned} m &= \langle \langle \tanh(\beta[J_0 m + J(\xi q_2 + \eta q_1)]) \rangle \rangle, \\ q_1 &= \langle \langle \xi \tanh(\beta[J_0 m + J(\xi q_2 + \eta q_1)]) \rangle \rangle, \\ q_2 &= \langle \langle \eta \tanh(\beta[J_0 m + J(\xi q_2 + \eta q_1)]) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

É possível provar [15], usando a convexidade da função Q , que as soluções que minimizam a energia livre satisfazem a condição $q_1 = q_2 = q$, sendo as equações então

$$\begin{aligned} m &= \langle \langle \tanh(\beta[J_0 m + Jq(\xi + \eta)]) \rangle \rangle \\ q &= \langle \langle (\xi + \eta) \tanh(\beta[J_0 m + Jq(\xi + \eta)]) / 2 \rangle \rangle. \end{aligned}$$

A figura 5.1 mostra o diagrama de fases obtido na referência [14]. O sistema apresenta quatro fases termodinâmicas diferentes. Na fase paramagnética (P) tanto q como m são nulos. Na fase vidro de spin (VS) $q \neq 0$ e $m = 0$ e na fase ferromagnética (F) $q = 0$ e $m \neq 0$. Finalmente, existe uma quarta fase, que chamamos de fase mista (M), na qual o mínimo de energia corresponde às soluções com $q \neq 0$ e $m \neq 0$.

Os N sítios da rede podem ser divididos em duas subredes distintas segundo o valor do sinal de $\xi_i \eta_i$: os sítios com $\xi_i \eta_i = 1$ pertencem à subrede A, enquanto que os sítios com $\xi_i \eta_i = -1$ pertencem à subrede B. Reescrevendo a interação aleatória (5.2) entre os sítios i e j da seguinte forma

$$J_{ij} = \frac{J}{N} \xi_i \eta_j (1 + \xi_i \eta_i \xi_j \eta_j),$$

observa-se que esta interação somente conecta sítios da mesma subrede.

Se a interação ferromagnética está ausente, a rede é dividida em duas subredes não interagentes com aproximadamente $N/2$ sítios cada uma, e o hamiltoniano pode ser

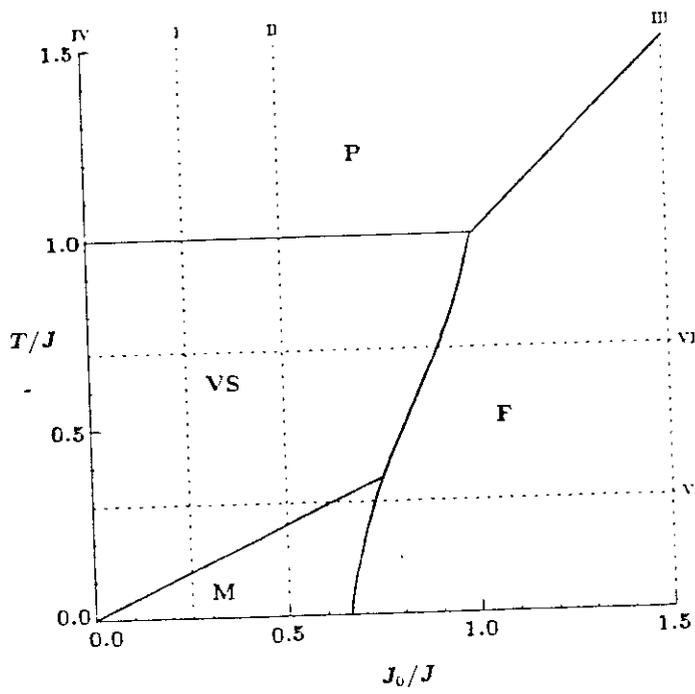


Figura 5.1: Diagrama de fases termodinâmico do modelo de van Hemmen. As linhas I,II,III,IV,V e VI indicam os cortes ao longo dos quais estuda-se a dinâmica do modelo.

reescrito como:

$$H = -\frac{N}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in A)} \xi_i S_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in A)} \eta_i S_i \right) - \frac{N}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in B)} \xi_i S_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in B)} \eta_i S_i \right).$$

Uma transformação de Mattis $S_i \rightarrow \xi_i S_i$ transforma o primeiro termo em um hamiltoniano ferromagnético e o segundo num hamiltoniano antiferromagnético. Para temperaturas menores que $T_c = 1$ a subrede A está ordenada, enquanto que a subrede B permanece sempre desordenada, devido à grande frustração da rede. Aproximadamente metade dos sítios da rede estão então frustrados. À medida que J_0/J aumenta, o termo ferromagnético começa a competir com a interação aleatória em ambas subredes, dando origem às diferentes fases encontradas.

Na próxima seção estudaremos a propagação de danos neste modelo de campo médio, a fim de obter informações sobre a estrutura do seu espaço de fase e poder comparar com os resultados obtidos no modelo SK e nos modelos de curto alcance.

5.2 Método

Nesta seção é descrito detalhadamente o método usado para estudar a propagação de danos no modelo de van Hemmen submetido à dinâmica Monte Carlo banho térmico. O trabalho limita-se ao caso com campo magnético externo nulo ($h = 0$). Devido ao esforço numérico requerido para obter o diagrama de fases completo, o trabalho limita-se ao estudo da dinâmica do sistema ao longo dos seis cortes mostrados na figura 5.1. Quatro cortes correspondem a valores fixos de J_0/J (I,II,III e IV) e dois a valores de T/J fixos (V e VI). O valor de J foi escolhido sempre 1, e a partir de agora os eixos J_0/J e T/J serão chamados por simplicidade de J_0 e T respectivamente.

Para uma dada temperatura T e para um dado valor J_0 do acoplamento ferromagnético realizamos sempre os seguintes passos:

1. partindo de uma configuração inicial aleatória $\{S_i(0)\}$ e para uma dada matriz de acoplamento J_{ij} , deixa-se termalizar o sistema durante um transiente de τ_1 unidades de tempo de Monte Carlo (UTMC) até a configuração $\{S_i(\tau_1)\}$;

2. cria-se uma réplica de $\{S_i(\tau_1)\}$ e vira-se aleatoriamente uma fração $d(0)$ dos seus sítios. Esta segunda configuração é chamada $\{S'_i(\tau_1)\}$;
3. deixa-se evoluir as duas configurações durante $\tau_2 + \tau_3$ UTMC, ambas submetidas ao mesmo ruído térmico, ou seja, usando a mesma seqüência de números aleatórios $\{z_i\}$. Durante as últimas τ_3 UTMC é calculada a média temporal da distância de Hamming entre as duas configurações

$$\bar{d} = \frac{1}{\tau_3} \sum_{t=\tau_1+\tau_2+1}^{\tau_1+\tau_2+\tau_3} \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |S_i(t) - S'_i(t)| \right);$$

4. para calcular a média configuracional este procedimento é repetido M vezes com diferentes matrizes de acoplamentos, diferentes configurações iniciais e diferentes seqüências de números aleatórios. Para cada ponto do diagrama são calculadas as seguintes quantidades :

- $\langle dh \rangle$: valor médio de \bar{d} calculado somente sobre os pares de configurações que não se tornaram idênticas em $\tau_2 + \tau_3$ UTMC;
- $P(\tau_2 + \tau_3)$: probabilidade de que duas configurações submetidas ao mesmo ruído térmico não se tornem idênticas em $\tau_2 + \tau_3$ UTMC;
- $\langle t \rangle$: tempo médio requerido para duas configurações se tornarem idênticas

Consideram-se somente dois tipos diferentes de danos iniciais:

- CIO : $S'_i(\tau) = -S_i(\tau)$ para todo i ($d(0) = 1$);
- CIA : $S'_i(\tau) = -S_i(\tau)$ com probabilidade $1/2$ ($d(0) = 0.5$).

Para todos os pontos do diagrama estudados se trabalhou com redes de três tamanhos diferentes: $N = 128, 256$ e 512 . Embora fosse desejável trabalhar com sistemas maiores a fim de poder fazer um estudo mais detalhado dos efeitos do tamanho da rede, isto

não foi possível por se tratar de um modelo de campo médio, o que faz com que os algoritmos numéricos sejam extremamente lentos.

O tempos usados são os seguintes:

- o transiente τ_1 escolhido é da ordem do tamanho N do sistema. Este tempo é suficiente para o sistema alcançar o equilíbrio térmico longe das temperaturas de transição, mas é insuficiente perto delas. Mas, como o principal interesse deste trabalho é estudar as propriedades dinâmicas, isto não parece ser muito importante, dado que resultados não são sensíveis ao valor do transiente escolhido. Em particular, quando trabalhamos com a condição inicial CIA, a cópia da configuração previamente termalizada não está em equilíbrio termodinâmico, mesmo longe das temperaturas de transição;
- o tempo τ_2 é sempre igual ao transiente τ_1 . Ele evita que seja incluído nas médias temporais o transiente durante o qual a distância entre as duas configurações flutua fortemente;
- o tempo τ_3 durante o qual é feita a média temporal da distância de Hamming foi de 500 UTMC para todas as amostras utilizadas. Simulações feitas com tempos maiores mostraram que para este sistema o resultado não depende fortemente deste parâmetro.

O número de amostras M usadas para fazer as médias configuracionais depende do tamanho da rede: 200 para $N = 128$, 100 para $N = 256$ e 50 para $N = 512$.

5.3 Diagrama de fases dinâmico

Nesta seção apresenta-se os resultados obtidos ao longo dos seis cortes no plano (T, J_0) (figura 5.1) utilizando o método descrito na seção anterior.

As figuras 5.2a, 5.2b e 5.3 mostram os resultados obtidos para o corte I, correspondente a $J_0 = 0.25$ fixo e temperatura T variável.

Da figura 5.2a surge claramente que, dependendo da temperatura, o sistema apresenta três comportamentos dinâmicos diferentes :

- na fase de baixa temperatura, $T < T_1 \approx 0.11$, $\langle dh \rangle$ é diferente de zero e o seu valor depende da distância de Hamming inicial entre as duas configurações;
- para temperaturas intermediárias $T_1 < T < T_2 \approx 0.975$, $\langle dh \rangle \neq 0$ mas o seu valor independe da distância inicial;
- na fase de altas temperaturas, $T > T_2$, as duas configurações encontram-se sempre no espaço das fase, independentemente da distância inicial. Isto é, $\langle dh \rangle = 0$.

A temperatura crítica T_1 coincide muito bem com a temperatura crítica correspondente à transição termodinâmica entre as fases mista e vidro de spin calculada por van Hemmen [14] ($T_c \approx 0.12$) e não parece depender sensivelmente do tamanho N do sistema. Já o cálculo da temperatura crítica T_2 apresenta maiores problemas. Perto dela, a probabilidade P de duas configurações sobreviverem (não se tornarem idênticas) cai abruptamente a zero independentemente das condições iniciais, o que faz com que seja necessário um tempo de computação muito grande para se obter um número adequado de amostras. É importante notar que, à medida que o tamanho do sistema aumenta, T_2 aproxima-se da temperatura crítica termodinâmica correspondente à transição vidro de spin-paramagneto, $T_c = 1$. Na figura 5.2b mostra-se que a probabilidade de duas configurações inicialmente opostas se encontrarem é próxima de um nos regimes de baixa temperatura e de temperaturas intermediárias, e cai a zero perto de T_2 .

Na figura 5.3 apresenta-se $\langle t \rangle$ vs T . Notemos que nas temperaturas críticas $\langle t \rangle$ parece divergir. Novamente vemos que o valor de T_1 independe do tamanho do sistema, mas que T_2 varia sensivelmente com N , aproximando-se da temperatura de transição termodinâmica $T_c = 1$ à medida que N cresce.

Lamentavelmente não é possível, a partir dos dados obtidos, concluir se a temperatura T_2 coincide ou não com a temperatura de transição termodinâmica $T_c = 1$ obtida por L. van Hemmen [14], nem se a descontinuidade observada no valor de $\langle dh \rangle$ nesta

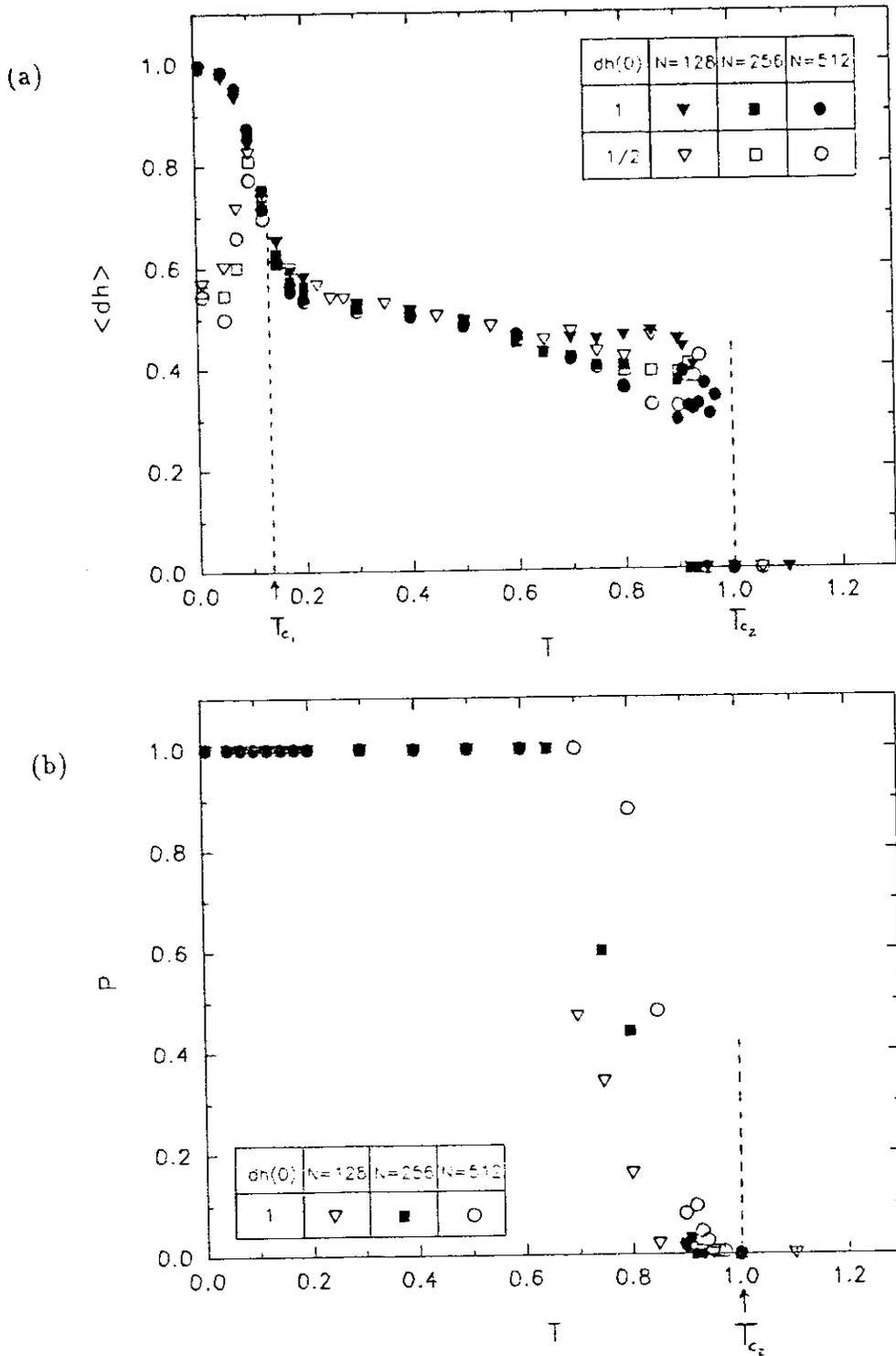


Figura 5.2: Propagação de danos para $J_0 = 0.25$ em função da temperatura; (a) valor médio da distância de Hamming calculado sobre os pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC e (b) fração P de pares de configurações que não se tornaram idênticas após 500 UTMC.

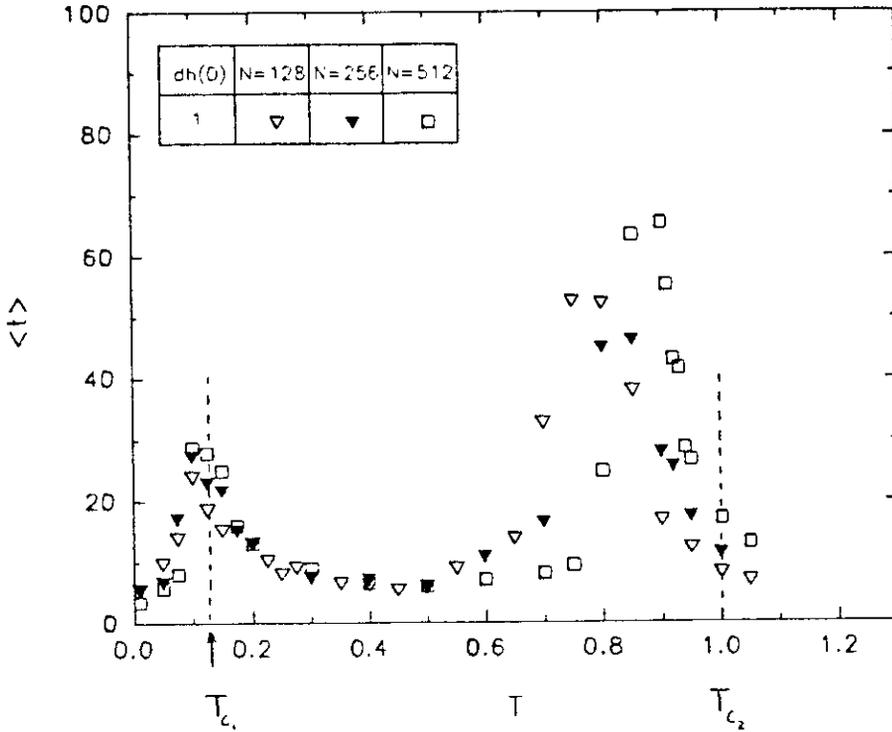


Figura 5.3: Tempo médio necessário para duas configurações se tornarem idênticas em função da temperatura, para $J_0 = 0.25$

temperatura é somente um efeito do tamanho finito da rede, dado que à medida que N aumenta o valor desta descontinuidade cai sensivelmente.

Nas figuras 5.4a, 5.4b e 5.5 apresentam-se os mesmos cálculos realizados ao longo do corte II ($J_0 = 0.5$). O sistema apresenta o mesmo comportamento que o encontrado no caso anterior, sendo que a temperatura crítica inferior $T_1 \approx 0.23$ coincide com a temperatura crítica termodinâmica correspondente à transição mista-vidro de spin calculada por van Hemmen, enquanto que a temperatura T_2 depende fortemente do tamanho do sistema, mas se aproxima à temperatura de transição termodinâmica vidro de spin-paramagneto ($T_c = 1$) quando o tamanho aumenta.

A figura 5.6 apresenta os resultados ao longo do corte III, correspondente a $J_0 = 1.5$. O sistema tem o comportamento próprio do modelo de Ising ferromagnético na aproximação de campo médio. Na fase de baixa temperatura a distância de Hamming é diferente de zero e independente do dano inicial. Na fase de alta temperatura, a distância de Hamming é sempre nula. Notemos que não temos nesta região do diagrama

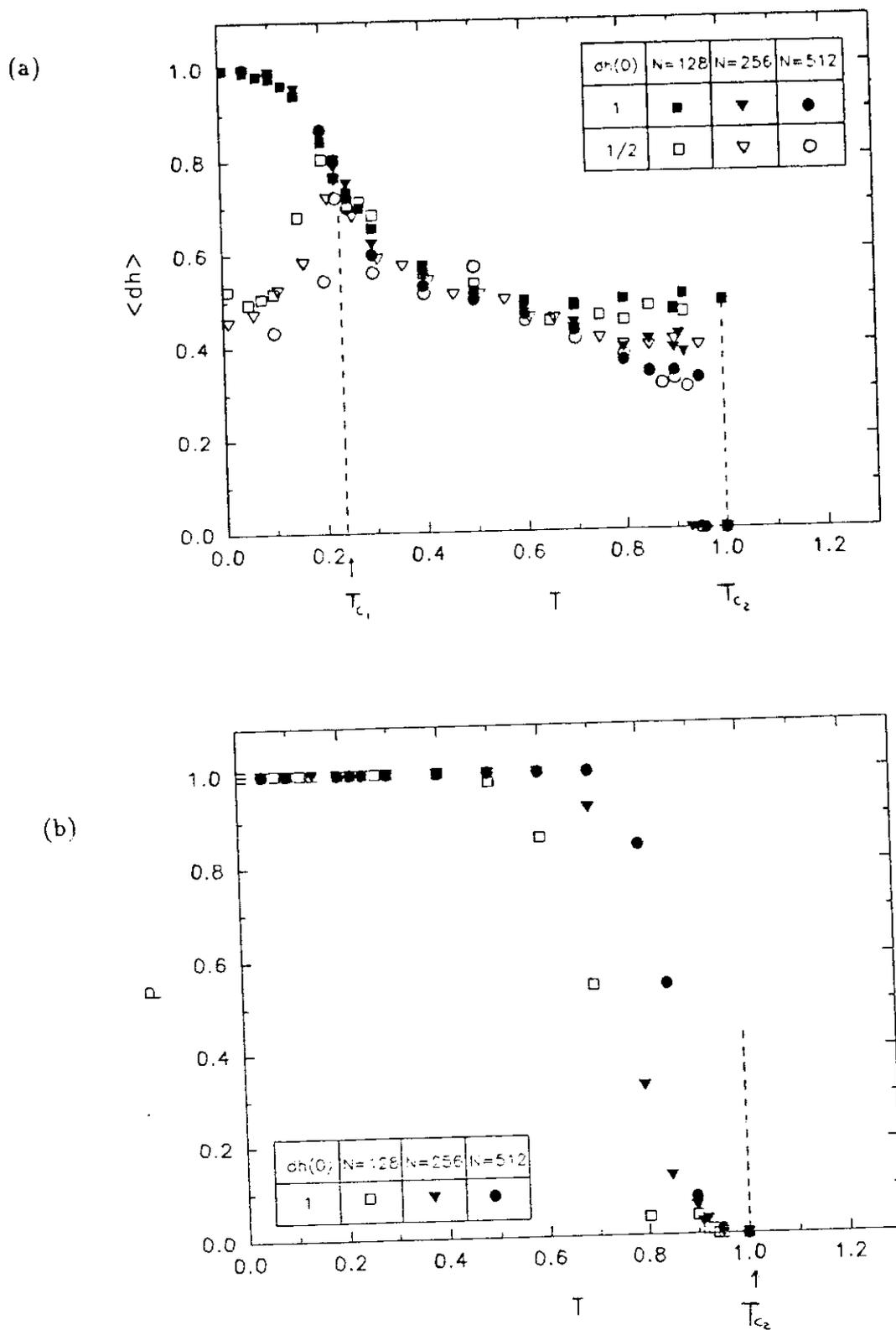


Figura 5.4: Propagação de danos para $J_0 = 0.50$ em função da temperatura; (a) valor médio da distância de Hamming calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC e (b) fração P de pares de configurações que não se tornaram idênticas após 500 UTMC.

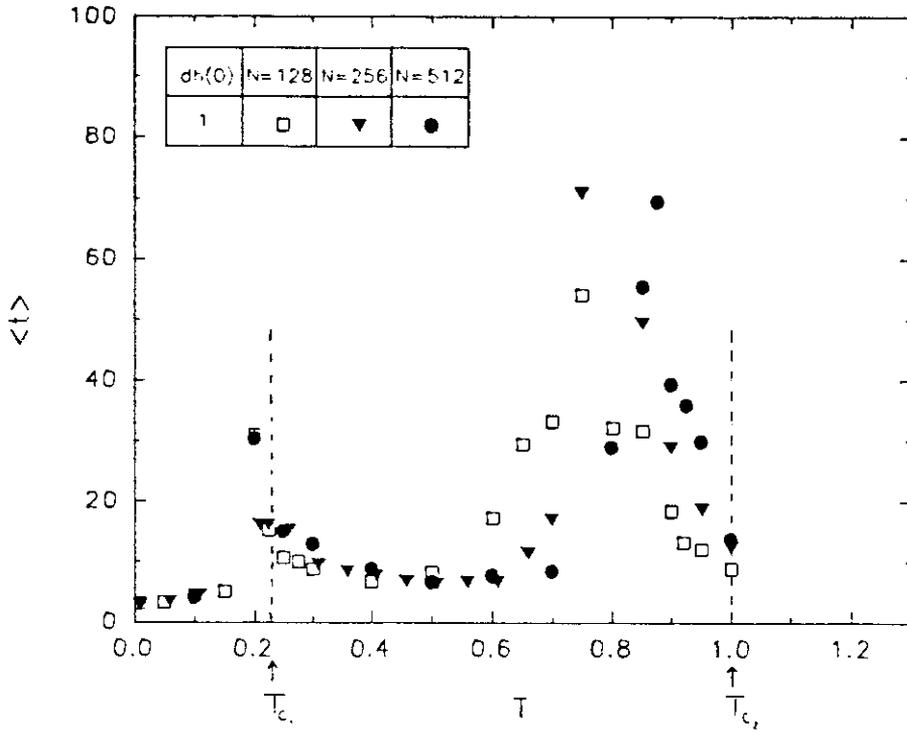


Figura 5.5: Tempo médio necessário para duas configurações se tornarem idênticas em função da temperatura, para $J_0 = 0.5$

a fase com distância de Hamming diferente de zero e dependente do dano inicial. A temperatura crítica depende fortemente do tamanho do sistema, mas aproxima-se do valor da temperatura crítica termodinâmica correspondente a transição ferromagneto-paramagneto, $T_c = 1.5$.

Os resultados correspondentes ao corte IV, com $J_0 = 0$, são apresentados nas figuras 5.7a e 5.7b. Na primeira delas notamos que o sistema apresenta somente duas fases dinâmicas a temperatura finita, em concordância com o diagrama termodinâmico. Embora estejam originalmente opostas, duas configurações sempre acabam em vales diferentes, separados por uma distância de Hamming $1/2$. Na figura 5.7b vemos que o sistema sofre uma transição de fase dinâmica à temperatura nula, dado que o valor de $\langle t \rangle$ parece divergir à medida que nos aproximamos de este valor. Ao longo deste corte o sistema pode ser dividido em duas subredes, como foi visto na seção anterior.

Na figura 5.8 apresentam-se os resultados correspondentes ao corte V ($T = 0.3$). Novamente observa-se que o sistema apresenta transições dinâmicas caracterizadas pelo

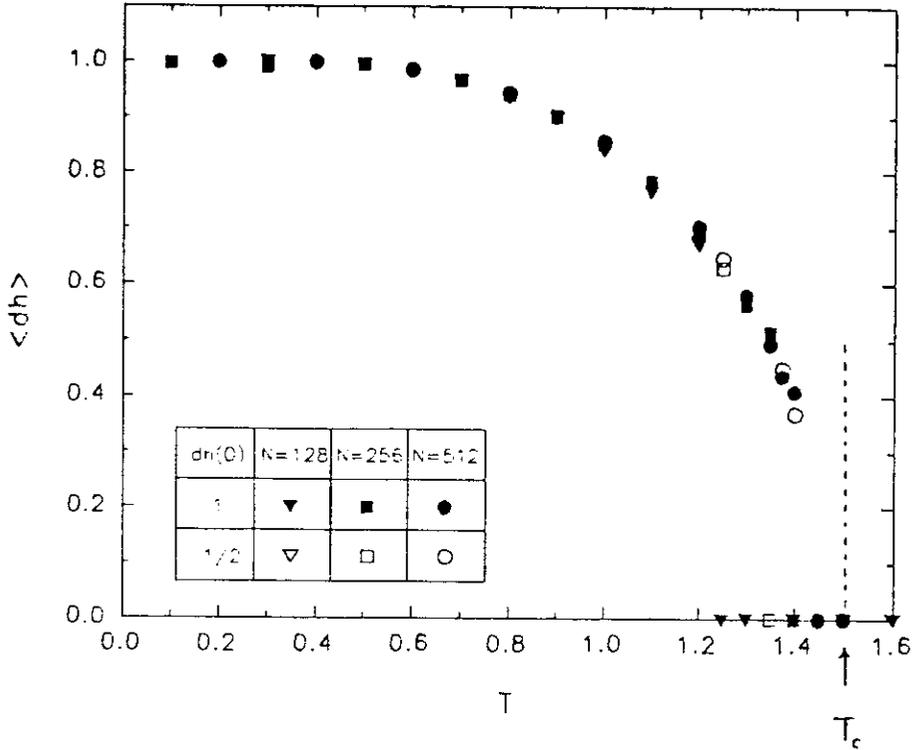


Figura 5.6: Valor médio da distância de Hamming calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC vs. temperatura para $J_0 = 1.5$

comportamento de $\langle dh \rangle$. A primeira transição ocorre para $J_0 \approx 0.6$, valor próximo da correspondente temperatura de transição termodinâmica entre as fases vidro de spin e mista. A segunda transição é difícil de determinar com precisão. Notemos que o valor crítico do acoplamento ferromagnético depende fortemente do tamanho. Isto está ligado ao fato desta transição ser de primeira ordem. A linha crítica termodinâmica corresponde aos valores dos parâmetros a partir dos quais uma solução tem menor energia livre do que outra, mas ambas soluções coexistem. Já o método dinâmico não é muito sensível a estas transições se as bacias de atração das soluções são de tamanhos comparáveis, como ocorre perto da linha crítica.

Finalmente na figura 5.9 mostram-se os resultados obtidos ao longo do corte VI, com $T = 0.7$. A transição dinâmica acontece em $J_0 \approx 0.8$, valor muito próximo da transição termodinâmica correspondente.

Os resultados obtidos ao longo dos diferentes cortes mostram que parece existir uma relação muito estreita entre os comportamentos dinâmico e termodinâmico do modelo

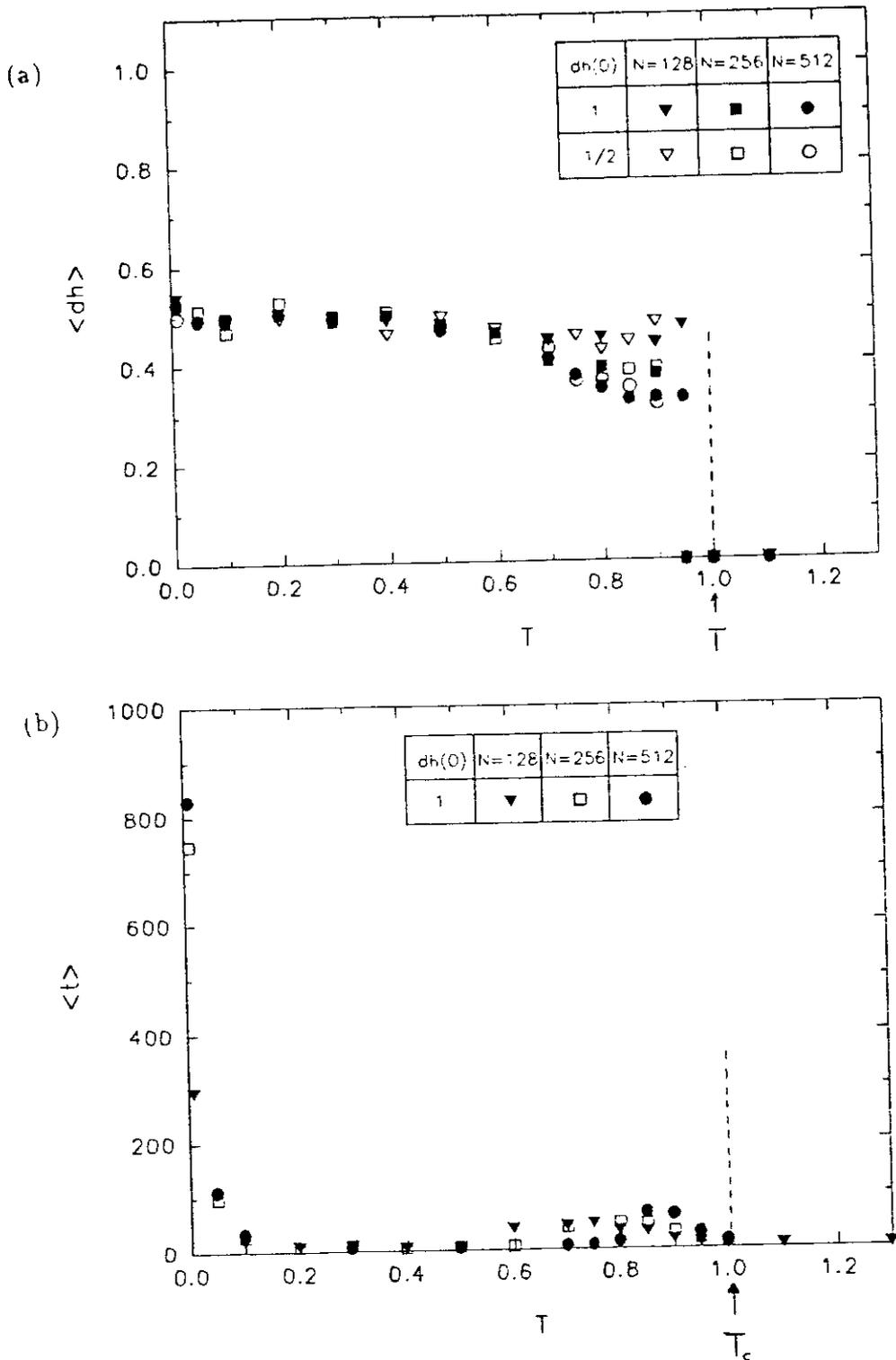


Figura 5.7: Propagação de danos para $J_0 = 0$ em função da temperatura; (a) valor médio da distância de Hamming calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC e (b) tempo médio necessário para duas configurações se tornarem idênticas após 500 UTMC.

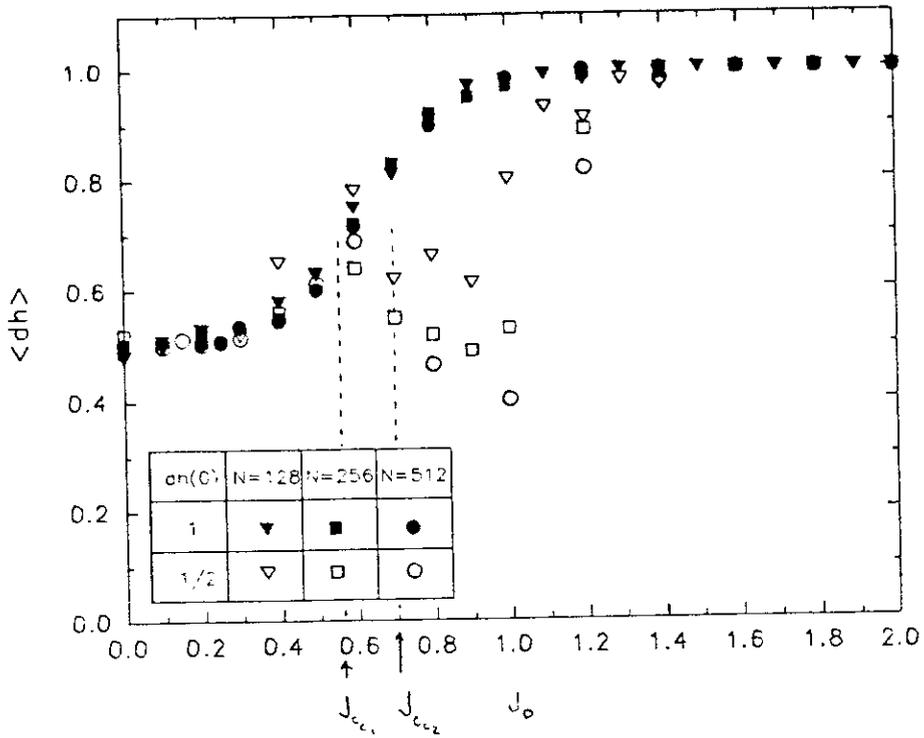


Figura 5.8: Valor médio da distância de Hamming para $T = 0.3$ em função de J_0 calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC.

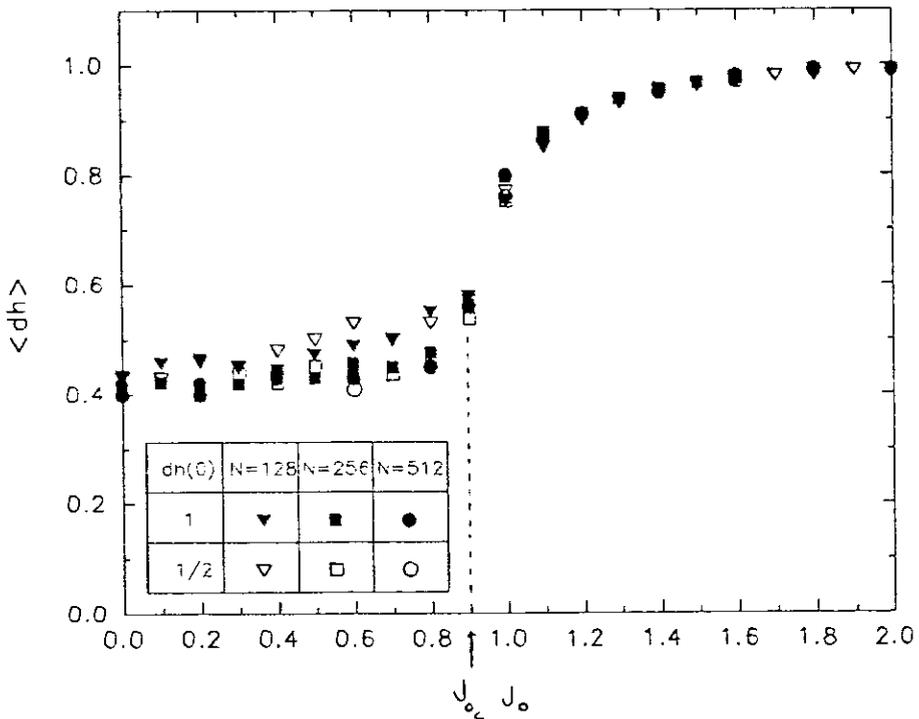


Figura 5.9: Valor médio da distância de Hamming para $T = 0.7$ em função de J_0 calculado sobre aqueles pares de configurações que são diferentes após 500 UTMC.

de van Hemmen. Podemos então caracterizar as diferentes fases termodinâmicas da seguinte maneira:

- **paramagnética** : a distância de Hamming $\langle dh \rangle$ é zero independente da distância inicial entre as duas configurações;
- **ferromagnética** : a distância de Hamming $\langle dh \rangle$ é diferente de zero e independe do dano inicial. Diminuindo a temperatura desde a fase paramagnética, ela surge continuamente na temperatura crítica e atinge rapidamente um valor próximo de 1;
- **vidro de spin** : a distância de Hamming $\langle dh \rangle$ é diferente de zero e independe do dano inicial. Ao contrário do que acontece com a fase ferromagnética ela surge descontinuamente e parece ser sempre aproximadamente 1/2;
- **mista** : a distância de Hamming $\langle dh \rangle$ é diferente de zero e o seu valor depende da distância inicial entre as configurações.

O comportamento dinâmico nas fases paramagnéticas e ferromagnética coincide com o observado em outros modelos (por exemplo no modelo de Ising 3D [11]), mas o comportamento na fase vidro de spin é diferente de outros obtidos previamente. Como foi discutido no capítulo 2, os modelos SK [10] e Edwards-Anderson [11] apresentam, na fase vidro de spin, o mesmo comportamento encontrado na fase mista do modelo van Hemmen.

A fim de obter mais informação da estrutura do espaço de fase do sistema nos diferentes regimes, calculamos a distribuição das médias temporais da distância de Hamming calculada somente com aqueles pares de configurações que sobreviveram após $\tau_2 + \tau_3$ UTMC quando o dano inicial entre elas é 1/2 (CI1).

Na figura 5.10a apresenta-se os resultados obtidos num ponto da fase mista ($J_0 = 0.25$, $T = 0.08$). O histograma tem dois picos, um deles e centrado em de $\langle dh \rangle = 1/2$, e outro (mais estreito) próximo de $\langle dh \rangle = 1.0$. Na figura 5.10b mostra-se os resultados para um ponto na fase vidro de spin ($J_0 = 0.25$ e $T = 0.2$). Agora o histograma apresenta uma forma completamente diferente, com um único pico estreito, e centrado em de

$\langle dh \rangle = 0.5$. Este comportamento indica que nesta fase a função energia livre está dominada por diferentes vales separados todos eles por uma distância de aproximadamente $1/2$, enquanto que na fase mista existe uma estrutura mais complicada, caracterizada pela largura do pico central e pela existência do pico menor próximo de 1.

5.4 Conclusões

Os resultados apresentados permitem extrair algumas conclusões importantes. Em primeiro lugar, os diagramas dinâmico e termodinâmico do modelo de van Hemmen parecem coincidir. Embora (como já foi dito muitas vezes) para se poder afirmar que as linhas críticas coincidem seja necessário um estudo numérico muito mais detalhado, tudo indica que o método permite calcular com boa precisão a linha crítica entre as fases vidro de spin e mista, mas que as linhas vidro de spin-paramagneto e ferromagneto-paramagneto dependem fortemente do tamanho da rede, aproximando-se, à medida que N aumenta, do valor termodinâmico. Em segundo lugar, é importante destacar que as diferentes fases termodinâmicas são caracterizadas, neste modelo, por comportamentos bem diferentes dos obtidos no modelo SK e no modelo 3d com interação entre primeiros vizinhos.

Começamos comparando com o modelo SK. Por se tratar também de um modelo de campo médio, é de se esperar que os dois apresentem um comportamento similar. A única diferença entre o sistema tratado no corte IV e aquele que estudou Derrida e cujos resultados foram mostrados na figura 2.6 está dada pela forma em que foram construídos os acoplamentos. Enquanto no modelo SK estudado por Derrida eles são independentes e podem tomar dois valores, no modelo van Hemmen existe correlação entre os acoplamentos e eles podem ser zero com probabilidade $\frac{1}{2}$ e $\pm \frac{2J}{N}$ com probabilidade $\frac{1}{4}$. O comportamento dinâmico dos dois modelos é totalmente diferente. No modelo SK a fase paramagnética está caracterizada por uma distância $\langle dh \rangle \neq 0$ e independente do dano inicial, enquanto no modelo van Hemmen ela tem o mesmo comportamento encontrado em modelos de curto alcance, com $\langle dh \rangle = 0$ qualquer que seja o dano inicial. Na fase vidro de spin o comportamento é também surpreendentemente diferente:

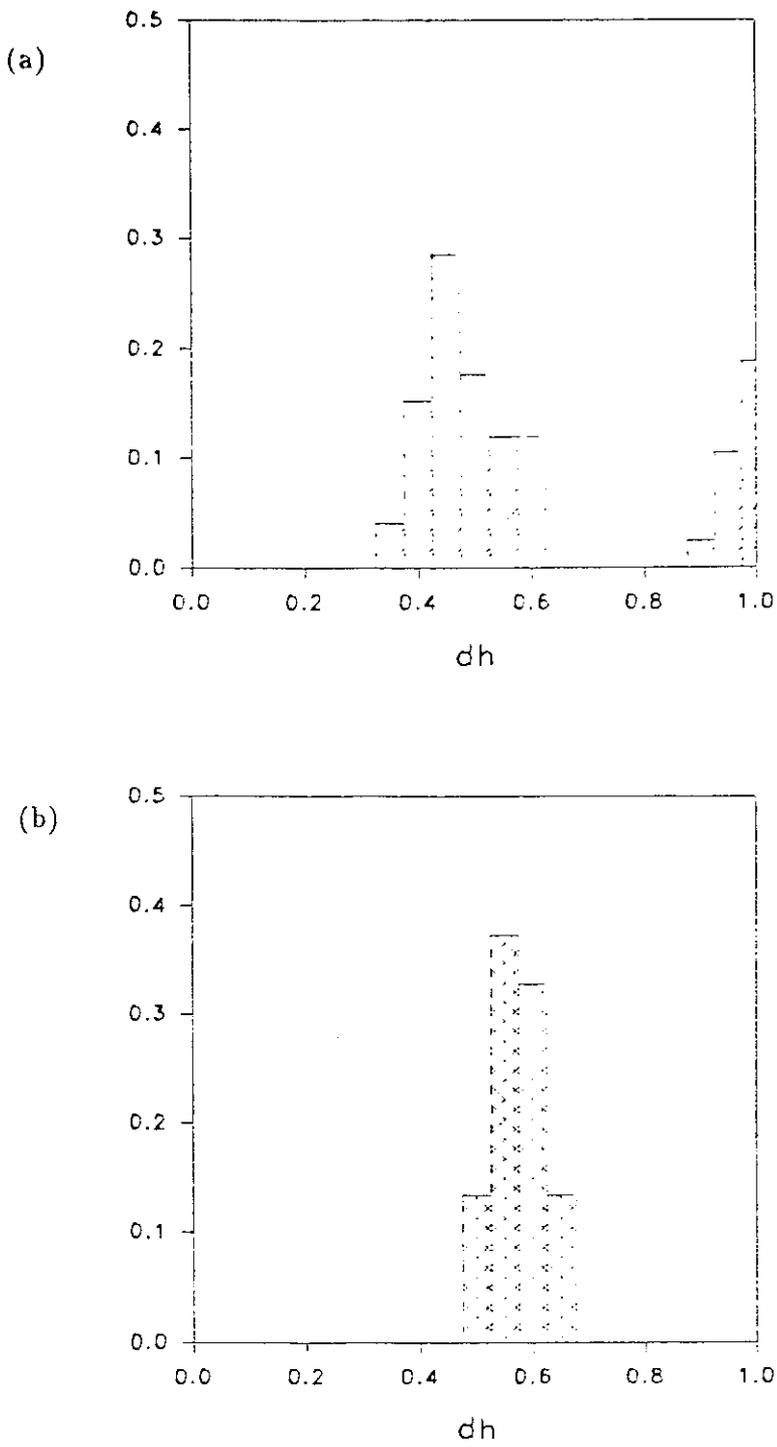


Figura 5.10: Distribuição de $\langle dh \rangle$ para $J_0 = 0.25$ e (a) $T = 0.075$ e (b) $T = 0.25$.

no modelo SK (dh) depende do dano inicial, refletindo uma estrutura de muitos vales, mas no modelo van Hemmen ela é independente da distância inicial, e próxima de $1/2$, inclusive muito perto de $T = 0$.

Se comparado com o modelo vidro de spin de Ising em 3D isto também ocorre para o caso da fase vidro de spin. O comportamento no modelo de van Hemmen parece ser o mesmo que o encontrado na fase intermediária do modelo 3d, que é comumente associada à fase de Griffiths. O comportamento mostrado na figura 2.7 é muito similar ao apresentado nos cortes I e II se associamos a fase vidro de spin do modelo 3d com a fase mista do modelo van Hemmen e a fase intermediária com a fase vidro de spin. Mas a diferença fundamental reside em que, enquanto no modelo 3d acredita-se que a fase intermediária surja somente por efeitos dinâmicos associados aos grandes tempos de relaxação, no modelo van Hemmen este comportamento têm uma relação muito forte com a termodinâmica do modelo.

Capítulo 6

Propagação de danos no modelo de Hopfield

O modelo de Hopfield de rede de neurônios é um exemplo raro na física estatística de sistema cujo espaço de fase, embora não trivial, pode ser controlado no que se refere à estrutura. Como foi visto no capítulo 2, na ausência de ruído (dinâmica determinista) e quando um número finito p de memórias são armazenadas, o seu espaço de fase está dominado por:

- $2p$ estados termodinâmicos ou vales associados às memórias e às antimemórias armazenadas, e que são também as soluções de mínima energia do sistema;
- aproximadamente $3^p/2$ estados metaestáveis correspondentes às soluções simétricas que têm superposição não nula com um número ímpar de memórias.

Além destas soluções existem também soluções mais gerais, chamadas assimétricas, mas elas são muito menos importantes que as soluções de reconhecimento e as soluções simétricas ímpares, dado que as suas bacias de atração são consideravelmente menores.

No outro extremo, como foi visto no capítulo 2, o modelo Sherrington-Kirkpatrick para vidros de spin apresenta um espaço de fase altamente complexo e não controlável. Com isto queremos indicar que, para uma dada realização das constantes de interação entre os momentos magnéticos $\{J_{ij}\}$ é praticamente impossível, no limite termodinâmico, determinar quais são as configurações de mínima energia do sistema. Ainda para sistemas finitos, o problema de encontrar os mínimos globais do modelo SK é extremamente complicado. Embora o modelo SK tenha sido muito estudado, pouco se conhece sobre a estrutura do espaço de fase para o modelo Edward-Anderson, e ainda hoje existe uma grande polémica em torno da existência ou não de uma estrutura de multivales no caso $d = 3$.

Até que ponto o método de propagação de danos permite realmente estudar a estrutura do espaço de fase de um sistema magnético na presença de ruído térmico dominado por uma dinâmica Monte Carlo banho térmico?; qual a relação entre as transições termodinâmicas previstas pela mecânica estatística e as transições dinâmicas observadas estudando o comportamento assintótico da distância de Hamming entre configurações submetidas ao mesmo ruído térmico?; e se existe alguma relação entre estas transições, então como caracterizar o comportamento dinâmico do sistema em cada uma das fases?. Estas são algumas perguntas que estudamos neste capítulo, e para isto escolhemos o modelo de Hopfield dado que ele satisfaz algumas propriedades importantes:

- a termodinâmica pode ser exatamente resolvida, e a estrutura do seu espaço de fase é bem conhecida;
- aumentando o número de memórias aumenta gradativamente a complexidade do espaço de fase, indo desde o modelo de Ising de campo médio ($p = 1$) cuja estrutura é trivial, até o modelo Sherrington-Kirkpatrick ($\alpha \equiv p/N \rightarrow \infty$).
- apesar do sistema ser frustado, na fase de reconhecimento (para $\alpha < 0.14$ e temperaturas suficientemente baixas) conhecem-se aproximadamente as configurações

de mínima energia, ao contrário do que acontece com o modelo SK;

- introduzindo-se a correlação entre as memórias é possível controlar também a estrutura do espaço de fase.

6.1 Método

O método usado no estudo do modelo de Hopfield é basicamente o mesmo descrito no capítulo anterior e usado no estudo do modelo de van Hemmen. Partindo de uma configuração previamente termalizada, cria-se uma cópia, inverte-se uma fração $d(0)$ dos seus sítios e deixa-se as duas configurações evoluírem com a dinâmica banho térmico e submetidas ao mesmo ruído térmico, isto é, usando a mesma seqüência de números aleatórios. Após um transiente que depende do tamanho do sistema, calcula-se a média temporal da distância de Hamming d entre as duas configurações durante $\tau_2 + \tau_3$ UTMC. Finalmente, este procedimento é repetido para M amostras diferentes a fim de calcular o valor médio configuracional da distância de Hamming $\langle dh \rangle$. Este valor médio é calculado usando somente aqueles pares de configurações que não se tornam idênticas em τ_3 UTMC. Também calcula-se o tempo médio $\langle t \rangle$ requerido para duas configurações que estão num mesmo vale se tornarem idênticas.

Os programas desenvolvidos foram escritos na linguagem FORTRAN 77 e usou-se a técnica de “multi-spin coding” a fim de otimizar o uso da memória do computador e aumentar a velocidade de cálculo. Embora não seja possível desenvolver um algoritmo que permita a atualização em paralelo de mais de um spin, o método usado [102] permite evitar o armazenamento da matriz de acoplamentos J_{ij} .

Dado que o tempo de computação cresce linearmente com N e com p , à medida que estes parâmetros crescem a simulação se torna mais difícil. Por sua vez, a complexidade da estrutura de espaço de fase aumenta consideravelmente com o número de memórias armazenadas p . Por estes dois motivos, os tamanhos, os tempos e o número de amostras sobre os quais foram realizadas as médias configuracionais variaram com o número de memórias armazenadas, e serão explicitados em cada caso.

Neste capítulo nos referiremos à *temperatura* para indicar o parâmetro de controle

de ruído da rede.

6.2 Comportamento dinâmico

6.2.1 O modelo de Hopfield com uma memória: o modelo de Ising ferromagnético com interações de alcance infinito

Quando no modelo de Hopfield é armazenada apenas uma memória $\xi_i = \pm 1$, o Hamiltoniano tem a forma:

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j}^N \xi_i \xi_j S_i S_j,$$

e por meio da seguinte transformação (transformação de Mattis) [104] :

$$S'_i = \xi_i S_i, \quad (6.1)$$

o hamiltoniano pode ser mapeado no hamiltoniano do modelo de Ising ferromagnético com interações de alcance infinito:

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j}^N S'_i S'_j.$$

Na temperatura crítica $T_c = 1$ o sistema sofre uma transição de fase termodinâmica de segunda ordem. Para $T > T_c$ o sistema está numa fase paramagnética, e a dinâmica tem um comportamento ergódico. Para $T < T_c$ o sistema está numa fase ferromagnética: a ergodicidade é perdida e o espaço de fase é dividido em duas regiões separadas por barreiras de energia muito altas (que divergem para $N \rightarrow \infty$). No limite termodinâmico esta perda de ergodicidade confina o sistema em uma das duas regiões do espaço de fase, uma caracterizada por uma magnetização positiva e a outra por uma magnetização negativa.

Na figura 6.1a apresenta-se o valor médio da distância de Hamming $\langle dh \rangle$ entre duas configurações submetidas ao mesmo ruído térmico, para simulações com $N = 256, 512, 1024$ e 2048 neurônios, e $\tau_3 = 500, 1000, 2000$ e 4000 UTMC respectivamente. O sistema tem dois regimes dinâmicos diferentes, dependendo da temperatura:

- para $T > T_d$, a distância de Hamming $\langle dh \rangle$ é sempre zero, independente da distância inicial entre as configurações;
- para $T < T_d$, a distância de Hamming $\langle dh \rangle$ é diferente de zero e independe da distância inicial.

O valor da temperatura crítica T_d depende sensivelmente do tamanho do sistema e aproxima-se da temperatura crítica termodinâmica $T_c = 1$ como pode observar-se na figura 6.1b na qual apresentase $\langle t \rangle$ vs T . Para poder determinar se elas coincidem ou não, seria preciso uma análise numérica mais detalhada, mas lamentavelmente isso está fora das nossas possibilidades de computação.

6.2.2 O caso $\alpha \ll 1$

Nesta seção estuda-se a propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 2$ e $p = 3$ e com memórias não correlacionadas. Embora trabalhamos sempre com sistemas finitos, nestes dois casos o espaço de fase é suficientemente simples para poder considerá-los uma boa aproximação ao caso $\alpha = 0$.

Em ambos casos o sistema sofre uma transição de fase termodinâmica em $T_c = 1$. Para $T > 1$ o sistema é paramagnético caracterizada por $\vec{m} = 0$, enquanto que para $T < 1$ o sistema está na fase de reconhecimento, caracterizada por soluções da forma:

$$\vec{m} = (0, \dots, m_\mu, \dots, 0).$$

No caso $p = 2$ e na fase de reconhecimento o sistema tem somente quatro mínimos degenerados, correspondentes às duas memórias e duas antimagórias. É importante lembrar que neste caso não existem outras soluções estáveis, ou seja, outros mínimos locais da energia livre. O sistema pode ser dividido em duas subredes distintas segundo o valor de $\xi_i^1 \xi_i^2$, como acontece no modelo de van Hemmen sem acoplamento ferromagnético: os sítios com $\xi_i^1 \xi_i^2 = 1$ pertencem à subrede A, enquanto que os sítios com $\xi_i^1 \xi_i^2 = -1$ pertencem à subrede B. As constantes de acoplamento podem ser escritas da seguinte forma:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \xi_i^1 \xi_j^2 (1 + \xi_i^1 \xi_i^2 \xi_j^1 \xi_j^2).$$

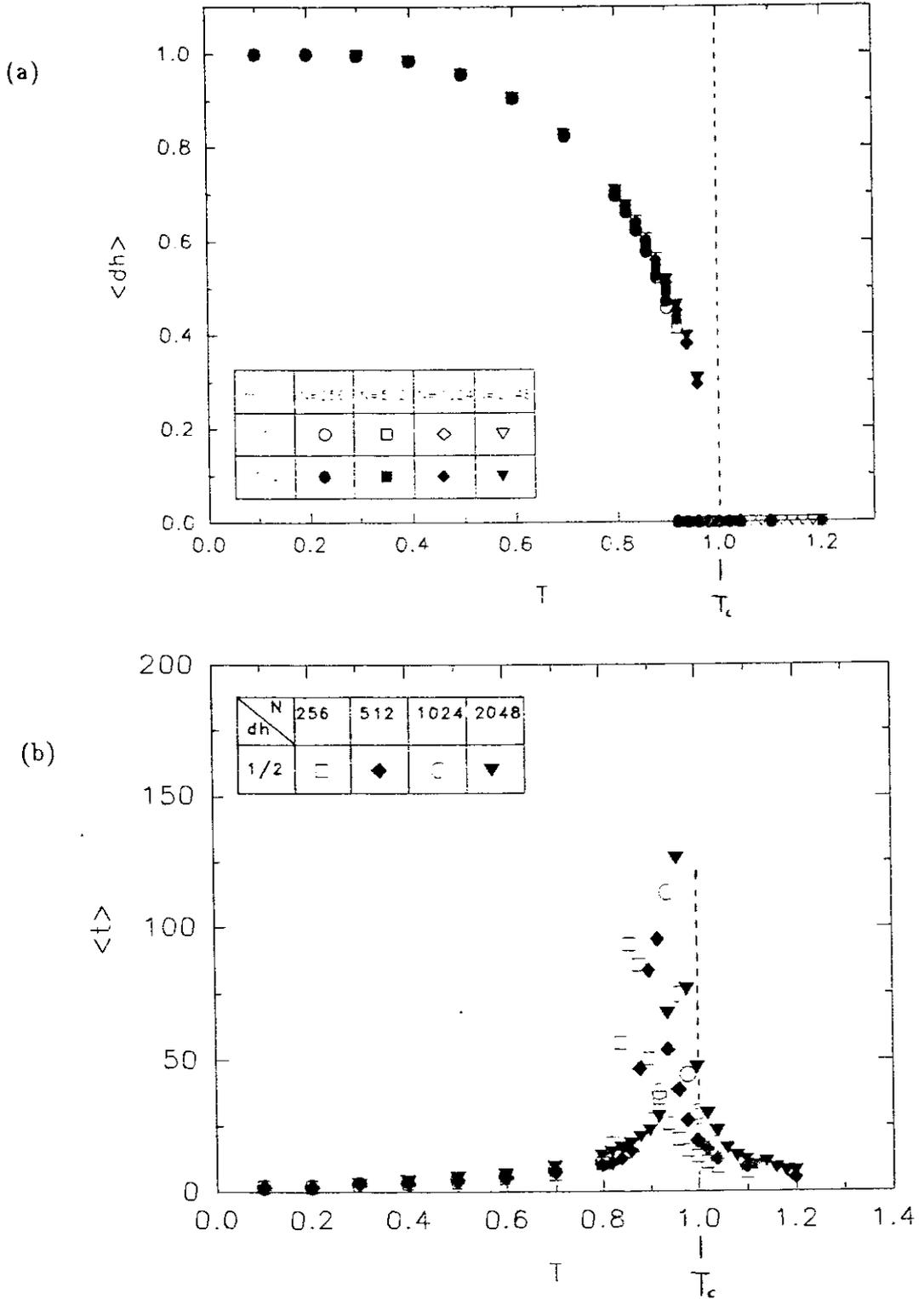


Figura 6.1: Propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 1$ em função da temperatura; (a) valor médio da distância de Hamming (dh) e (b) tempo médio necessário para que as duas configurações se tornem idênticas

Isto prova que estas interações somente conectam sítios de uma mesma subrede. O hamiltoniano do sistema pode ser reescrito como:

$$H = -\frac{N}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in A)} \xi_i^1 S_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in A)} \xi_i^2 S_i \right) + \frac{N}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in B)} \xi_i^1 S_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{(i \in B)} \xi_i^2 S_i \right),$$

e uma transformação de Mattis $S_i \rightarrow S_i \xi_i^1$ transforma ambos termos em hamiltonianos ferromagnéticos. Isto prova então que, ao contrário do indicado na referência [2], o modelo de Hopfield com duas memórias armazenadas não tem frustração. Cada subrede possui em média metade dos sítios do sistema, e para temperaturas menores que $T_c = 1$ ambas se ordenam.

Nas figuras 6.2a e b apresentam-se os resultados obtidos para sistemas de $N = 1024$ e 2048 neurônios, com $\tau_3 = 2000$ e 4000 respectivamente. Trabalhou-se com três condições iniciais diferentes: $d(0) = 1, 0.5$ e $1/N$, mas para este último caso obteve-se sempre $\langle dh \rangle = 0$ independente da temperatura, e portanto não são apresentados estes resultados. Para fazer as médias configuracionais usaram-se 200 amostras com $N = 1024$ e 100 com $N = 2048$.

O sistema apresenta dois regimes dinâmicos diferentes: para $T > T_d^{(2)}$ a distância de Hamming é sempre nula, independente da distância inicial, enquanto que na fase de baixa temperatura $T < T_d^{(2)}$ a distância de Hamming é diferente de zero e depende das condições iniciais. A temperatura crítica dinâmica $T_d^{(2)}$ é muito próxima da temperatura crítica termodinâmica, e a pequena diferença pode ser atribuída a efeitos de tamanho finito do sistema. Na figura 6.2b observa-se que $\langle t \rangle$ diverge na transição termodinâmica e que o valor de $T_d^{(2)}$ depende sensivelmente de N , aproximando-se de $T_c = 1$ à medida que N cresce.

Quando são armazenadas três memórias na rede o comportamento termodinâmico do sistema é o mesmo descrito para o caso $p = 2$. Porém, a estrutura do espaço de fase é diferente. Em toda a fase de reconhecimento o sistema tem 6 estados termodinâmicos (mínimos) degenerados correspondes às memórias e às antimemórias, e para temperaturas menores que $T_3 \approx 0.456$ surgem 8 novos mínimos locais, todos eles com a mesma energia (maior que a energia das soluções de reconhecimento), os quais correspondem às soluções simétricas com igual superposição com as três memórias (como foi descrito

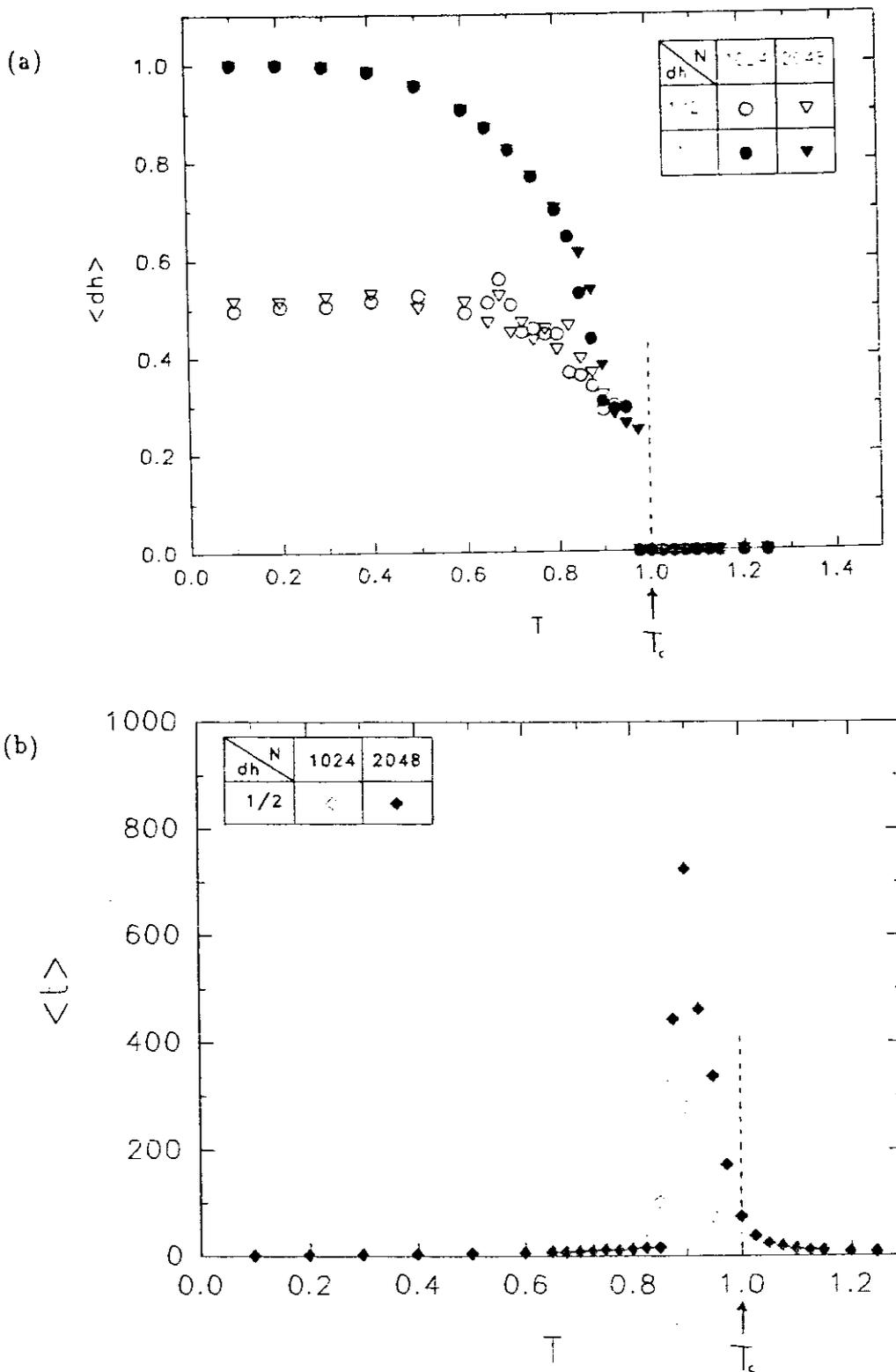


Figura 6.2: Propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 2$ em função da temperatura: (a) valor médio da distância de Hamming (dh) e (b) tempo médio necessário para que as duas configurações se tornem idênticas

no capítulo 1).

Na figura 6.3a apresenta-se o gráfico $\langle dh \rangle$ vs T obtido para sistemas de $N = 512$ e 1024 neurônios respectivamente. Notamos que o comportamento dinâmico é similar ao descrito para o caso $p = 2$, com dois regimes diferentes e com uma temperatura de transição dinâmica $T_d^{(3)}$ muito próxima da temperatura crítica termodinâmica. Da figura 6.3b obtém-se que esta temperatura também depende do tamanho N e que ela se aproxima de T_c quando N cresce.

Embora as figuras 6.2 e 6.3 não permitam identificar as diferenças descritas na estrutura do espaço de fase, esta informação pode ser obtida pela técnica de propagação de danos. Na figuras 6.4 apresentam-se os histogramas das médias temporais da distância de Hamming. Notamos que para o caso $p = 2$ a distribuição tem três picos estreitos, correspondentes a $d = 0$ (quando as duas configurações são confinadas num mesmo vale), $d = 1$ (quando uma configuração é confinada no vale de uma memória e a outra na correspondente antimemória) e $d = 0.5$ (quando as duas configurações são confinadas em vales correspondentes a memórias diferentes). Já no caso $p = 3$ notamos que o sistema apresenta, além dos mesmos picos encontrados no caso $p = 2$, dois novos picos centrados em $d = 0.25$ e $d = 0.75$, que correspondem ao caso em que uma configuração é confinada no estado de uma memória e a outra num vale correspondente a uma solução simétrica. As duas configurações poderiam também ficar presas em vales correspondentes a duas soluções simétricas diferentes, mas, dado que a configuração inicial é uma das memórias, estes eventos são poucos prováveis e não foram observados nas simulações.

6.2.3 O caso $\alpha \neq 0$

Nesta seção estuda-se a propagação de danos no modelo de Hopfield quando um número extensivo de memórias é armazenado, ou seja, com $\alpha \neq 0$. Como foi descrito no capítulo 1, o sistema tem um diagrama de fases termodinâmico muito rico no plano T vs α , apresentando agora uma fase vidro de spin, além das fases paramagnética e de reconhecimento presentes no limite $\alpha = 0$. Na figura 6.5 mostramos novamente o diagrama de fases obtido por Amit et al. [4], e nele marcamos os quatro cortes com valores de α fixo ($\alpha = 0.0074, 0.011, 0.020$ e 0.0430) ao longo dos quais estuda-se a dinâmica do modelo

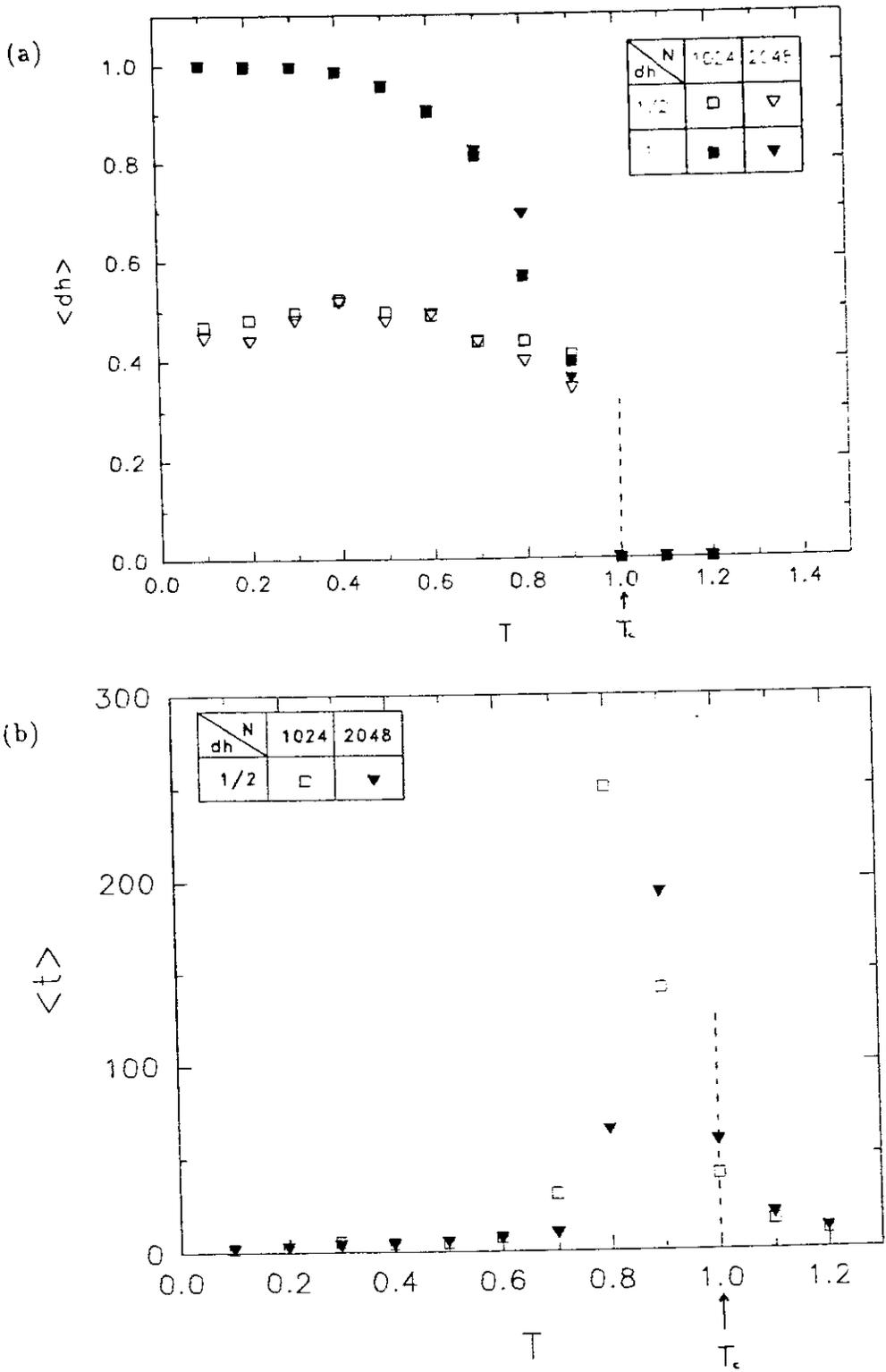


Figura 6.3: Propagação de danos no modelo de Hopfield com $p = 3$ em função da temperatura: (a) valor médio da distância de Hamming $\langle dh \rangle$ e (b) tempo médio necessário para que as duas configurações se tornem idênticas

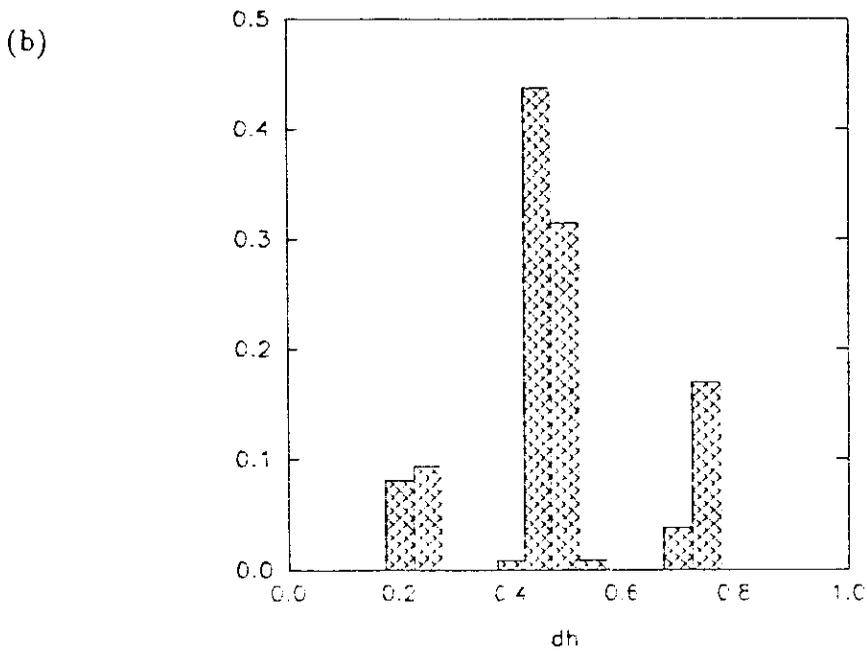
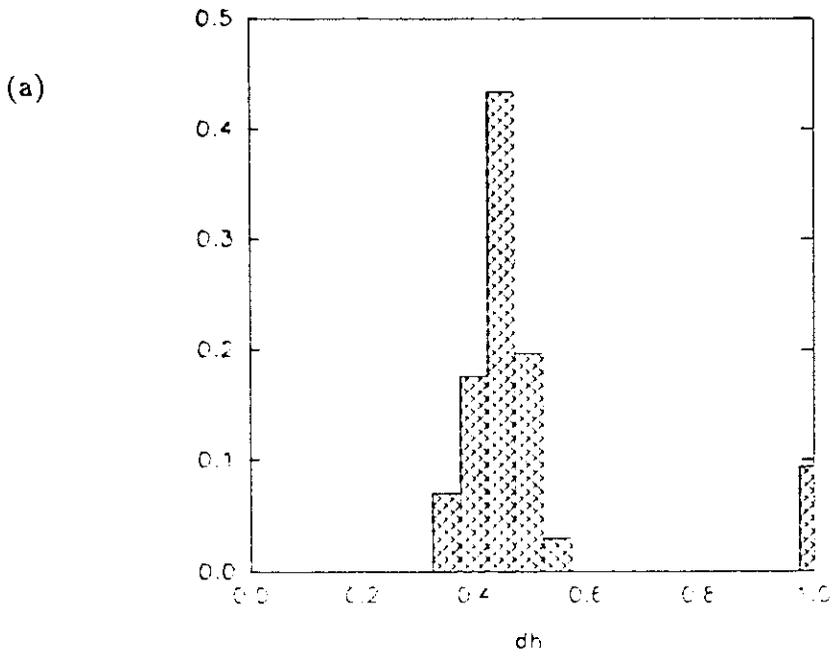


Figura 6.4: Histograma das médias temporais da distância de Hamming para (a) $p = 2$ e (b) $p = 3$, em ambos os casos para $T = 0.1$ (fase de reconhecimento).

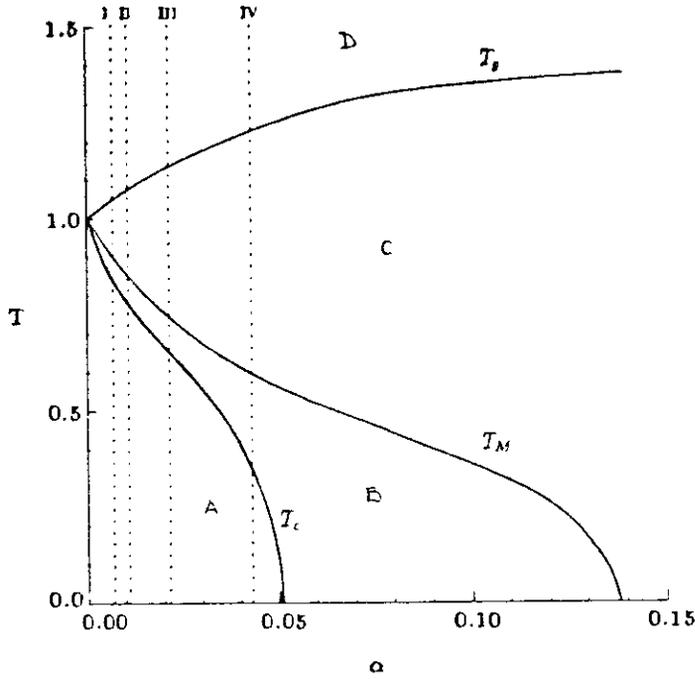


Figura 6.5: Diagrama de fases termodinâmico T vs α do modelo de Hopfield. As linhas I, II, III e IV indicam os cortes ao longo dos quais estuda-se a dinâmica do modelo.

em função da temperatura.

A termodinâmica do modelo com simetria de réplicas está descrita pelas equações de campo médio:

$$q = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \langle \langle \tanh^2(\beta(m + \sqrt{\alpha r} z)) \rangle \rangle$$

$$\bar{m} = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \langle \langle \bar{\xi} \tanh(\beta(\bar{m} \cdot \bar{\xi} + \sqrt{\alpha r} z)) \rangle \rangle$$

$$r = \frac{q}{(1 - \beta(1 - q))^2},$$

e pela expressão da energia livre de Helmholtz [4]:

$$f = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} (m_\nu)^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \left(\ln 1 - \beta(1 - q) - \frac{\beta q}{1 - \beta(1 - q)} \right)$$

$$\frac{\alpha\beta r}{2} (1 - q) - \beta^{-1} \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \langle \langle \ln 2 \cosh(\beta(\bar{m} \cdot \bar{\xi} + \sqrt{\alpha r} z)) \rangle \rangle.$$

Nestas expressões $\langle \dots \rangle$ denota uma média na desordem. Resolvendo este sistema de equações numericamente é possível então construir o diagrama de fases do sistema [4].

Na figura 6.5 foram indicadas as cinco principais linhas do diagrama, as quais não estão restritas às linhas que correspondem a transições de fase termodinâmica. Elas assinalam também o surgimento de estados metaestáveis, dado que são estes estados os responsáveis pela qualidade do reconhecimento.

A linha T_g sinaliza uma transição de fase termodinâmica entre uma fase ergódica ou paramagnética para alto nível de ruído e uma fase vidro de spin, e tem a seguinte dependência com o parâmetro α :

$$T_g(\alpha) = 1 + \sqrt{\alpha}.$$

A fase paramagnética (região C) está caracterizada pelos valores $q = 0$ e $\vec{m} = 0$. Diminuindo o nível de ruído o sistema entra na região C na qual as únicas soluções são as soluções vidro de spin caracterizadas por $\vec{m} = 0$ e $q \neq 0$ (soluções com simetria de réplicas). O sistema não é mais completamente ergódico e surgem muitos vales ou estados termodinâmico, mas eles não estão correlacionados com as memórias. O valor de q surge continuamente sinalizando uma transição de segunda ordem, e cresce à medida que a temperatura diminui.

Diminuindo o nível de ruído com $\alpha > 0.138$ não surgem soluções de reconhecimento, e o sistema não é capaz de reconhecer as memórias, independente da temperatura. Mas para $\alpha < 0.138$ o sistema atravessa a linha T_M e entra na região B. Por baixo da linha T_M surgem inúmeras novas soluções metaestáveis, cada uma com superposição macroscópica com uma única memória. Estas novas soluções surgem descontinuamente, exceto para $\alpha = 0$, e o valor da descontinuidade depende de α . Estas soluções de reconhecimento coexistem com a solução vidro de spin mas as suas energias são maiores.

Quando diminuimos o nível de ruído com $\alpha < 0.051$ acontece uma nova transição ao longo da linha T_c e o sistema entra à região A. Ao longo desta linha as soluções que têm superposição não nula com uma das memórias (que chamamos de soluções de reconhecimento) tornam-se os mínimos absolutos da energia livre, ou seja, o sistema sofre uma transição de fase termodinâmica de primeira ordem. Do ponto de vista dinâmico esta linha não é muito importante.

Para valores de α menores que 0.03 surgem novas soluções estáveis espúrias corre-

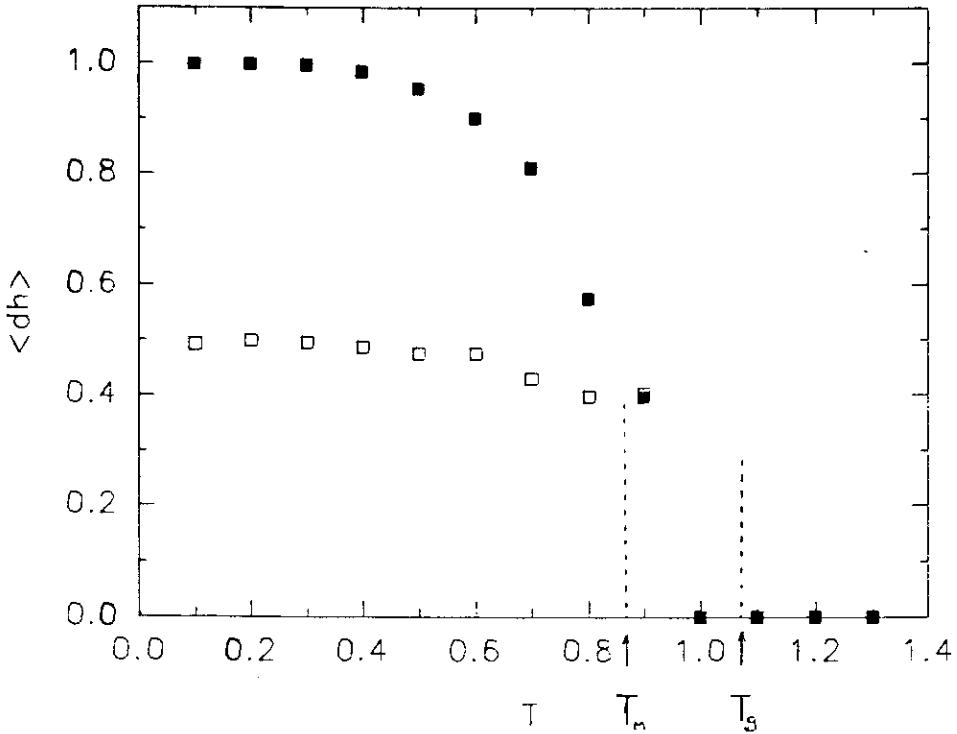


Figura 6.6: $\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.0074$, $N = 1024$, $\tau_3 = 2000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\circ), $d(0) = 1/2$ (\square) e $d(0) = 1$ (\blacksquare).

spondentes a superposições simétricas com um número ímpar de memórias. As primeiras a surgir são as soluções que misturam 3 memórias. Finalmente, por baixo da linha T_R a solução simetria de réplicas perde a estabilidade.

Neste capítulo não estamos interessados na qualidade de reconhecimento do sistema, mas apenas no comportamento da distância de Hamming. Em todos os casos trabalhou-se com sistemas de $N = 1024$ neurônios, e com as mesmas três condições usadas na seção anterior: $d(0) = 1$, 0.5 e $1/N$. Os valores de τ_3 utilizados variam com o valor de α e são indicados em cada figura.

Nas figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 apresentam-se os valores de $\langle dh \rangle$ em função da temperatura ao longo dos quatro cortes, com $\alpha = 0.0074$, 0.011 , 0.020 e 0.043 respectivamente.

O comportamento mostrado pelo sistema é similar ao longo dos quatro cortes. Ao contrário do que acontece com os casos $p = 2$ e 3 o sistema apresenta agora três fases dinâmicas bem diferenciadas:

1. para níveis altos de ruído ($T > T_{d1}(\alpha)$) a distância de Hamming é sempre nula independente do dano inicial entre as configurações;

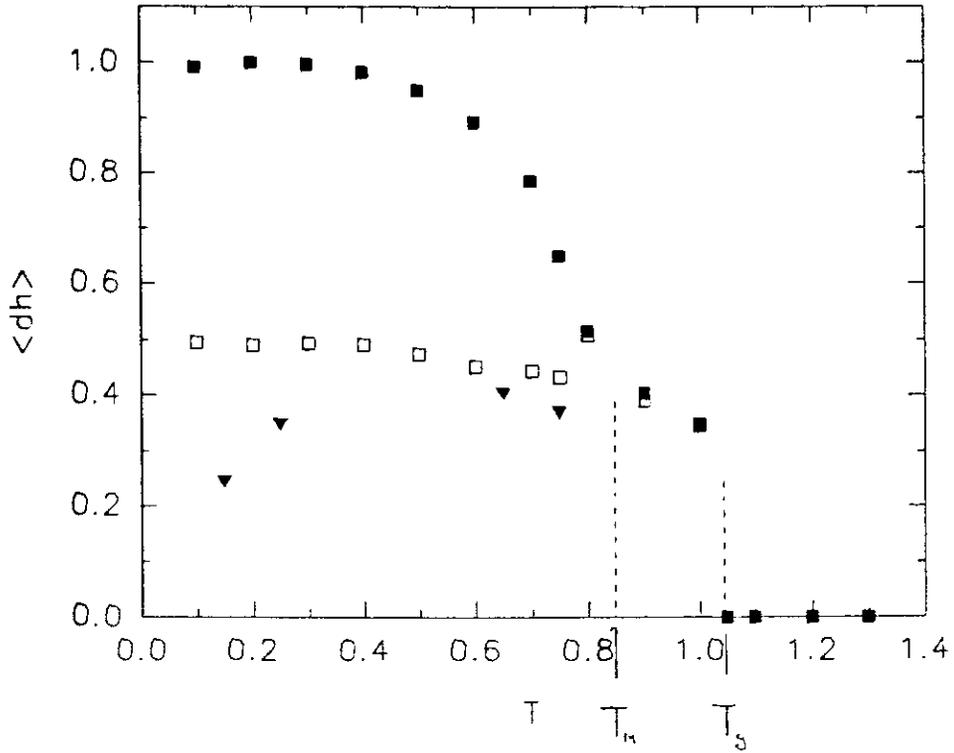


Figura 6.7: $\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.011$, $N = 1024$, $\tau_3 = 4000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\blacktriangledown), $d(0) = 1/2$ (\square) e $d(0) = 1$ (\blacksquare).

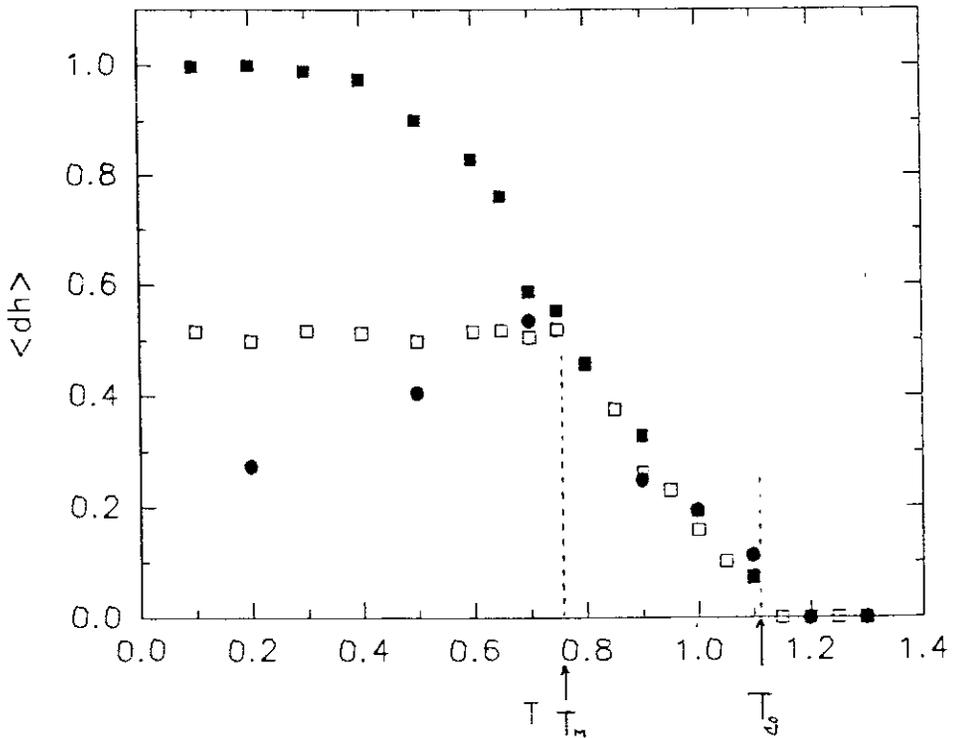


Figura 6.8: $\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.020$, $N = 1024$, $\tau_3 = 8000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (\bullet), $d(0) = 1/2$ (\square) e $d(0) = 1$ (\blacksquare).

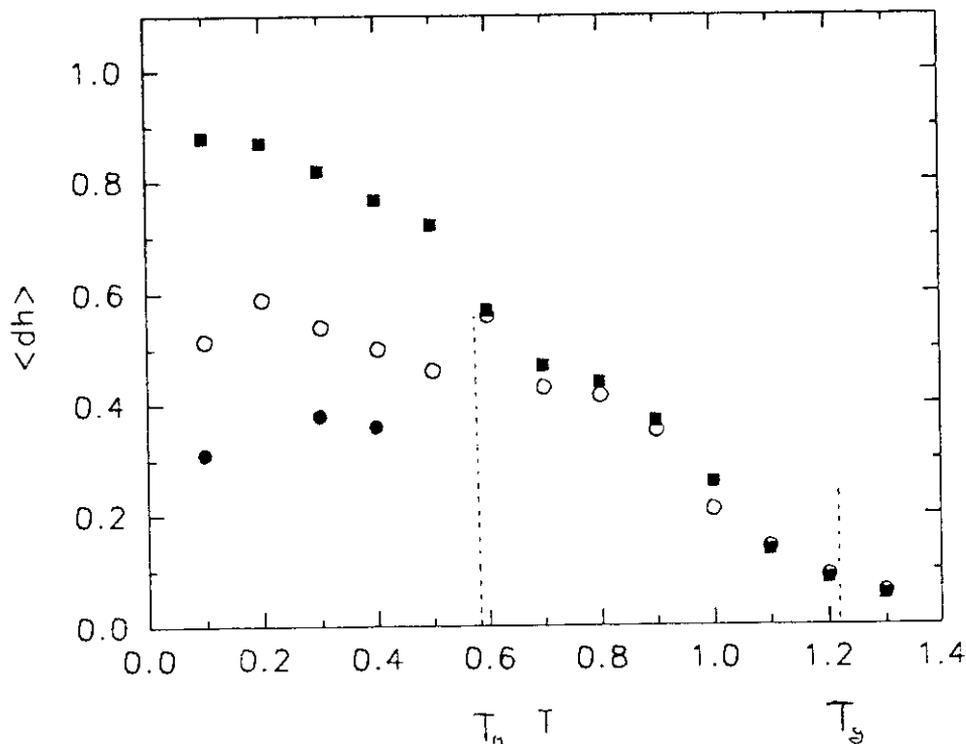


Figura 6.9: $\langle dh \rangle$ vs T ao longo do corte I para $\alpha = 0.043$, $N = 1024$, $\tau_3 = 8000$ e diferentes danos iniciais: $d(0) = 1/N$ (•), $d(0) = 1/2$ (◦) e $d(0) = 1$ (■).

2. para temperaturas intermediárias $T_{d2}(\alpha) < T < T_{d1}(\alpha)$, a distância de Hamming é diferente de zero e independe da distância de Hamming inicial;
3. para baixas temperaturas ($T < T_{d2}(\alpha)$) a distância de Hamming é diferente de zero e depende da distância inicial.

O ponto mais importante a destacar destes resultados é a estreita relação entre os comportamentos dinâmico e termodinâmico do sistema ao longo dos cortes escolhidos, e que provavelmente se estende ao longo de todo o diagrama de fases. Podemos associar então as fase dinâmica 1 com a fase paramagnética, a fase dinâmica 2 com a região na qual somente existe a solução vidro de spin, e a fase dinâmica 3 com a região na qual existem as soluções de reconhecimento.

A temperatura crítica dinâmica $T_{d1}(\alpha)$ é muito próxima da temperatura crítica termodinâmica que marca a transição de fase de segunda ordem entre a fase paramagnética e a fase vidro de spin, e os valores de $T_{d2}(\alpha)$ obtidos coincidem muito bem com as correspondentes temperaturas $T_M(\alpha)$. As figuras mostram que a distância de Hamming $\langle dh \rangle$

não é sensível à transição termodinâmica de primeira ordem que ocorre ao longo de T_c .

Na fase paramagnética os resultados confirmam um comportamento ergódico do sistema, como acontece na fase paramagnética do modelo de Ising ferromagnético com $d = 2$ e 3 , no modelo de Ising com interações de alcance infinito e no modelo de van Hemmen estudado no capítulo anterior. Porém, este comportamento é muito diferente do encontrado por Derrida no modelo Sherrington-Kirkpatrick de vidro de spin. Este é um resultado surpreendente, dado que os dois modelos compartilham muitas propriedades importantes (por exemplo o fato de envolver interações de alcance infinito aleatórias com valor médio zero e apresentarem frustração), e em particular eles coincidem no limite $\alpha \rightarrow \infty$.

A fase intermediária, que coincide com a fase vidro de spin, apresenta um resultado diferente dos comportamentos encontrados tanto no modelo SK como nos modelos de dimensão finita, nos quais a distância de Hamming depende das condições iniciais. Na fase vidro de spin do modelo de Hopfield ao longo dos cortes estudados a distância de Hamming tem um comportamento similar ao encontrado na fase vidro de spin do modelo van Hemmen e também em vidros de spin diluídos [105]. A interpretação deste resultado é direta, dado que no modelo de Hopfield e na região estudada do diagrama T vs α a solução de mínima energia corresponde à solução com simetria de réplicas. O sistema sofre uma quebra de ergodicidade e o espaço de fase é dividido em muitos estados termodinâmicos ou vales que no limite termodinâmico confinam o sistema, sendo que a distância de Hamming entre quaisquer dois estados termodinâmicos é sempre a mesma. Notamos que esta estrutura é bem diferente da observada no modelo SK, como foi visto no capítulo 2.

Na fase dinâmica de baixa temperatura o sistema apresenta o mesmo comportamento encontrado na fase vidro de spin do modelo SK e do modelo Edwards-Anderson em $d = 2, 3$ e 4 , e na fase mista do modelo van Hemmen. Dado que a configuração inicial escolhida é sempre uma das memórias armazenadas, assim que elas surgem elas dominam o comportamento da distância de Hamming. Quando uma nova configuração danificada evolui, ela pode ser confinada no vale correspondente a outra memória ($d = 0.5$), a alguma das múltiplas soluções simétricas ou a solução vidro de spin. Isto explica

porque, dependendo da distância inicial entre as configurações, a distância $\langle dh \rangle$ alcança diferentes valores.

6.2.4 Memórias correlacionadas

Nesta seção estudamos o comportamento da distância de Hamming quando são armazenadas duas memórias, escolhidas com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$p(\xi_i^{\mu,1}, \xi_i^{\mu,2}) = \frac{(1 + \kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} + 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} + 1) + \frac{(1 - \kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} + 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} - 1) + \\ \frac{(1 - \kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} - 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} + 1) + \frac{(1 + \kappa)}{4} \delta(\xi_i^{\mu,1} - 1) \delta(\xi_i^{\mu,2} - 1).$$

As simulações foram feitas com sistemas de $N = 1024$ e 2048 neurônios, e com $\tau_3 = 2000$ e 4000 respectivamente. Como foi visto no capítulo 3, os sistema sofre duas transições de fase de segunda ordem. Para temperaturas maiores que $1 + \kappa$ o sistema está numa fase paramagnética; para temperaturas intermediárias $(1 - \kappa) < T < (1 + \kappa)$ o sistema está na fase de reconhecimento do par, na qual o estado do sistema tem a mesma superposição com as duas memórias, e finalmente para $T < (1 - \kappa)$ o sistema está na fase de reconhecimento.

Nas figuras 6.10, 6.11 e 6.12 apresentam-se os resultados obtidos para $\kappa = 0.25$, 0.5 e 0.75 respectivamente.

Notamos que existe uma grande concordância entre o diagrama dinâmico e a termodinâmica do modelo.

6.3 Conclusões

A partir dos resultados apresentados neste capítulo podemos concluir que existe uma estreita relação entre os comportamentos termodinâmico e dinâmico, quando a dinâmica usada é banho térmico. Isto pode ser observado variando a correlação entre as memórias ou o parâmetro $\alpha = p/N$.

A fase vidro de spin ao longo dos cortes estudados neste capítulo apresenta um comportamento dinâmico diferente do observado no modelo Sherrington-Kirkpatrick e

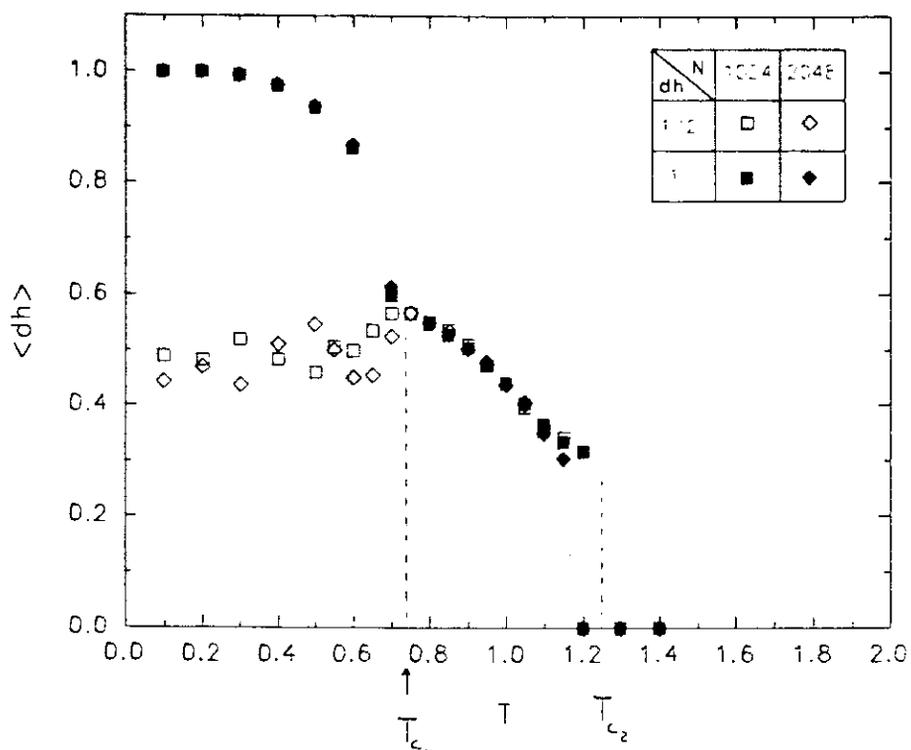


Figura 6.10: $\langle dh \rangle$ vs T para $p = 2$ e $\kappa = 0.25$.

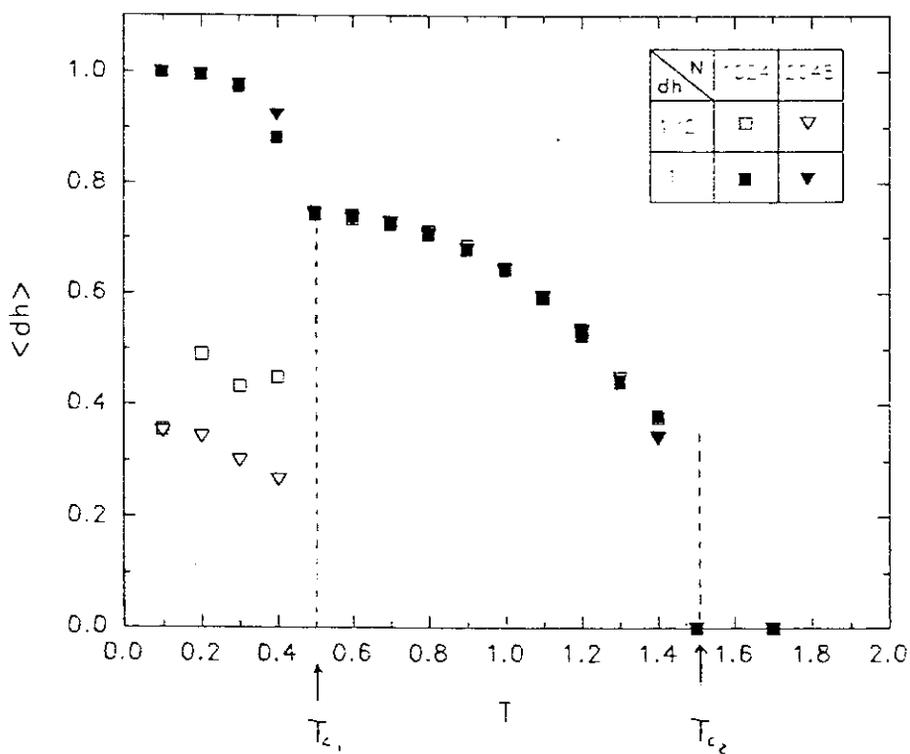


Figura 6.11: $\langle dh \rangle$ vs T para $p = 2$ e $\kappa = 0.50$.

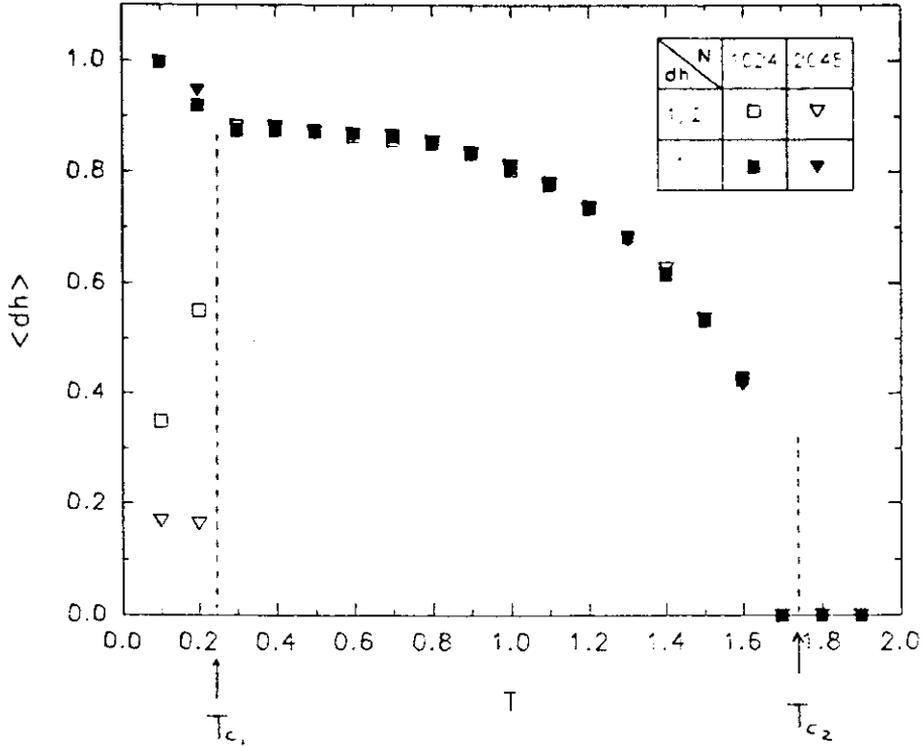


Figura 6.12: $\langle dh \rangle$ vs T para $p = 2$ e $\kappa = 0.75$.

no modelo Edwards-Anderson em dimensão 3. A distância de Hamming ($\langle dh \rangle$) é diferente de zero e independe do dano inicial entre as configurações, como acontece na fase vidro de spin no modelo van Hemmen e na fase intermediária encontrada no modelo Edwards-Anderson. No caso do modelo de Hopfield, este comportamento pode estar associado ao fato do espaço de fase do sistema estar dominado por uma estrutura de multivales, sendo que todos eles estão separados pela mesma distância de Hamming. Esta estrutura é obtida também estudando analiticamente a termodinâmica do modelo, dado que a fase vidro de spin com simetria de réplicas é estável ao longo dos cortes considerados. A fase de reconhecimento tem o mesmo comportamento observado na fase vidro de spin de modelo SK e Edwards-Anderson $d = 3$ e na fase mista do modelo van Hemmen. Este comportamento é próprio de uma estrutura de multivales na qual os vales ou estados termodinâmicos estão separados por diferentes distâncias de Hamming.

Finalmente, é importante notar que a sensibilidade ao dano inicial não indica necessariamente que o sistema tem uma estrutura do espaço de fase complexa. O caso $p = 2$ possui apenas quatro vales e apresenta uma sensibilidade ao dano inicial que, a fase vidro de spin, apesar de possuir uma estrutura muito mais rica e complexa, não tem.

Capítulo 7

Conclusões

Apresentamos neste capítulo um resumo dos resultados e das conclusões gerais mais importantes deste trabalho.

No capítulo 3 estudou-se a termodinâmica do modelo de Hopfield quando é armazenado um número finito de memórias, sendo que elas estão agrupadas em pares, de forma tal que duas memórias de um mesmo par são estatisticamente correlacionadas com correlação κ enquanto que duas memórias que pertencem a diferentes pares são estatisticamente independentes. Embora esta estrutura hierárquica seja muito simples, ela garante que, independente do valor da correlação entre as memórias de um mesmo par, para temperaturas suficientemente baixas existe sempre fase de reconhecimento.

Encontrou-se que, dependendo do nível de ruído T , o sistema apresenta três regimes diferentes no que diz respeito às suas propriedades de reconhecimento. Para altos níveis de ruído ($T > (1 + \kappa)$) o sistema está numa fase ergódica, e portanto de não

reconhecimento. Diminuindo o nível de ruído, o sistema sofre uma transição de fase termodinâmica de segunda ordem a uma fase não ergódica. Esta nova fase está caracterizada por soluções que correspondem a uma superposição não nula do estado de equilíbrio do sistema com as duas memórias de um dado par, e superposição nula com as memórias restantes. Existem $2r$ soluções equivalentes com esta forma (onde r é o número de pares), todas elas degeneradas. Provou-se também que, perto da temperatura crítica $T_1 = (1 + \kappa)$, estas são as únicas soluções estáveis. Finalmente, diminuindo ainda mais o nível de ruído, à temperatura $T_2 = (1 - \kappa)$ o sistema sofre uma segunda transição de fase de segunda ordem à uma fase de reconhecimento dos padrões armazenados. Nesta fase, o estado termodinâmico do sistema $\langle S_i \rangle$ tem superposição não nula com as duas memórias de um par e zero com as restantes, mas, ao contrário do que acontece na fase intermediária, estas duas superposições não são iguais. Generalizando o conceito de solução de reconhecimento utilizada no caso de armazenamento de memórias sem correlação, dizemos que o sistema reconhece a memória do par que tiver a maior superposição (em módulo) com o estado do sistema. Em particular, para $T \rightarrow 0$, provamos que a solução de reconhecimento corresponde a superposição igual a 1 com uma memória, indicando que o sistema reconhece sem erro. Este comportamento é diferente do observado no caso em que as memórias não são correlacionadas, em que o sistema apresenta somente duas fases: a fase paramagnética para níveis altos de ruído ($T > 1$) e a fase de reconhecimento de memórias para baixos níveis de ruído ($T < 1$). Resumindo, a presença de correlação entre os padrões faz com que seja necessário menos ruído para desestabilizar as soluções de reconhecimento, mas em compensação, o sistema passa para uma nova fase, de muito interesse tanto biológico como prático, em que o sistema é capaz de associar uma configuração inicial com um dado par, mas não com uma memória. Pode-se pensar então que, nesta fase, o sistema cria uma nova solução ou conceito que, embora diferente dos elementos do par, possui as suas propriedades comuns. Trabalhos posteriores com estruturas hierárquicas mais complicadas mostraram que o estudo das soluções simétricas é de extrema importância quando se estuda a capacidade de generalização do modelo de Hopfield [107,87,108].

Uma outra propriedade encontrada no estudo da termodinâmica do modelo, refere-se

às soluções simétricas, isto é, soluções que correspondem a uma mesma superposição do estado termodinâmico do sistema com várias memórias. Estas soluções, que no caso de memórias não correlacionadas surgem todas na mesma temperatura (que aliás coincide com a temperatura de transição entre as fases paramagnética e de reconhecimento), surgem a diferentes temperaturas no caso de memórias correlacionadas aos pares. As únicas soluções simétricas que existem agora têm superposição com um número par de memórias, generalizando as soluções simétricas pares estudadas por Amit et al. na referência [2], e foi provado que elas são instáveis perto da temperatura crítica e a temperatura nula. Este resultado é importante, pois significa que, ao contrário do que acontece no caso de memórias estatisticamente independentes mas com atividade diferente de zero, o número de soluções espúrias na ausência de ruído é basicamente o mesmo que no caso sem correlação.

Uma possível extensão deste trabalho é considerar o problema de armazenamento de um número extensivo de memórias correlacionadas aos pares. Nas referências [73,72], estudou-se o caso de armazenamento de um número extensivo de memórias independentes, com e sem ruído, quando um subconjunto finito delas é escolhido com atividade não nula e as restantes sem atividade; embora esse modelo não possua uma estrutura hierárquica, as propriedades de reconhecimento (as soluções de reconhecimento de memórias e de pares) do sistema são basicamente as mesmas encontradas por estes autores no caso em que somente duas memórias são escolhidas com atividade diferente de zero. Uma outra extensão seria estudar o comportamento do modelo de Hopfield para uma estrutura hierárquica mais geral. Embora sejam introduzidas diferentes modificações na prescrição para a construção da matriz sináptica, não se conhece como é afetada a termodinâmica do modelo por uma estrutura mais geral.

No capítulo 4 introduzimos um modelo que leva em conta dois elementos importantes, geralmente considerados separadamente no estudo de redes de neurônios: interações multi-sinápticas (entre R neurônios) por um lado, e diluição assimétrica das sinapses por outro. Obteve-se, para o caso em que as memórias armazenadas são não correlacionadas, uma equação de recorrência para a superposição entre o estado do sistema no tempo t e uma das memórias armazenadas. A partir desta equação estudamos

o comportamento assintótico ($t \rightarrow \infty$) do sistema no que se refere a suas propriedades de reconhecimento. Esta equação de recorrência, embora muito geral, foi estudada em dois casos particulares: (a) no limite em que a conectividade média de cada neurônio e o número de memórias armazenadas divergem, mas mantendo a razão $\alpha = (p - 1)/C$ constante e (b) no caso em que a conectividade de cada neurônio é igual a três e o número de memórias armazenadas é finito.

No caso (a), provou-se que, para níveis de ruído e valores de α suficientemente baixos, o sistema tem uma fase de reconhecimento. Calculamos a linha crítica $T_R(\alpha)$ que separa as fases de reconhecimento e não reconhecimento, encontrando que, à medida que o grau R da interação polinomial entre os estados dos neurônios aumenta, a fase de reconhecimento diminui, isto é, $T_{R+1}(\alpha) < T_R(\alpha)$ e $\alpha_c(R + 1, T = 0) < \alpha_c(R, T = 0)$. Foi possível estudar analiticamente os limites $\alpha = 0$ e $T = 0$ e, em ambos os casos, obter expressões para o comportamento da superposição entre o estado do sistema e uma memória no limite $R \rightarrow \infty$. Ao contrário do que acontece com o modelo de Hopfield diluído assimetricamente, encontramos que a transição paramagneto-reconhecimento é de primeira ordem. Isto traz importantes conseqüências do ponto de vista dinâmico: enquanto no modelo de Hopfield qualquer superposição macroscópica inicial do sistema com uma única memória leva o sistema a um atrator de reconhecimento (dado que a fase de reconhecimento não coexiste com a fase paramagnética), no caso de interações polinomiais é preciso que a superposição inicial supere um dado valor crítico dependente de R e T para garantir que o sistema reconheça a memória, pois as soluções paramagnética e de reconhecimento coexistem agora e, portanto, a primeira tem uma bacia de atração própria. Finalmente, provamos que, como ocorre no modelo de Hopfield, a versão com diluição assimétrica tem maior capacidade de armazenamento que as generalizações do modelo de Hopfield com interações multi-sinápticas simétricas [79,81,80]. No caso (b) estudou-se o comportamento do sistema quando a conectividade de todos os neurônios é 3. Embora seja um caso muito particular, o comportamento qualitativo deve ser similar para outros valores fixos e finitos da conectividade. Provou-se que, para um dado número de memórias armazenadas p , existe um valor mínimo da conectividade K_c a partir do qual o sistema apresenta um fase de reconhecimento para baixos níveis

de ruído. Este resultado é importante, dado que não são muitos os resultados obtidos com redes de neurônios com conectividade finita. Embora possa não ser um ingrediente muito realista do ponto de vista biológico, a conectividade finita e a assimetria são sem dúvida elementos importantes no desenho de sistemas artificiais.

Uma possível extensão deste trabalho consiste em considerar a versão diluída e assimétrica do modelo RS [83]. Neste modelo, o conceito de interação multi-sináptica surge a partir da definição de um hamiltoniano conceitualmente mais simples que o introduzido no modelo de Hopfield, mas, em compensação, leva em conta simultaneamente interações polinomiais de diferentes graus nos estados dos neurônios. É provável que as propriedades de reconhecimento do sistema sejam descritas não por uma equação de recorrência, mas por um conjunto de equações, que por sua vez envolveriam funções sigmóides de polinômios e não já de monômios nas superposições. Neste caso, seria importante estudar a possibilidade de comportamento caótico na dinâmica do modelo RS diluído assimetricamente.

Nos capítulos 5 e 6 estudou-se a propagação de danos em dois modelos de alcance infinito com aleatoriedade e frustração, submetidos à dinâmica banho térmico. Embora no estudo de sistemas magnéticos os sistemas de alcance infinito sejam apenas aproximações pouco realistas dos sistemas reais, o fato de ser possível estudar exatamente a sua termodinâmica, faz com que eles sejam importantes para se poder comparar comportamentos estáticos e dinâmicos. Isto é particularmente importante no caso de vidros de spin, para os quais não foi possível ainda estudar exatamente a termodinâmica de modelos de dimensão finita. Por outro lado, no estudo de redes de neurônios, as interações de alcance infinito não são um ingrediente pouco realista. Pelo contrário, a arquitetura do sistema nervoso faz supor que modelos de alcance infinito são um ponto de partida mais realista que sistemas de dimensão finita.

No capítulo 5 apresenta-se um estudo da propagação de danos no modelo de van Hemmen [14] para vidros de spin. A partir do diagrama de fases termodinâmico estudamos a dinâmica ao longo de diferentes cortes. Os principais resultados obtidos são:

- embora não seja possível concluir, a partir do estudo numérico realizado, que

ambos coincidem, parece existir uma forte correlação entre os diagramas dinâmico e estático do modelo;

- na fase vidro de spin, a distância de Hamming apresenta um comportamento muito diferente do observado tanto no modelo Edwards-Anderson com dimensão três como no modelo Sherrington-Kirkpatrick.

Na fase vidro de spin a distância de Hamming é diferente de zero e o seu valor depende da distância de Hamming inicial entre as duas configurações submetidas ao mesmo ruído térmico. Na ausência de acoplamento ferromagnético o sistema pode ser dividido em duas subredes distintas. Uma delas sofre uma transição de fase termodinâmica de uma fase paramagnética para altas temperaturas a uma fase ferromagnética para baixas temperaturas, e a outra mantém-se desordenada para qualquer temperatura, inclusive $T = 0$. É de se esperar então que, ao deixar evoluir duas configurações inicialmente diferentes à temperatura não nula, uma subrede apresente o mesmo comportamento dinâmico que o modelo de Ising ferromagnético de alcance infinito (que corresponde a um dos cortes estudados), enquanto a outra tenha o comportamento próprio de uma fase paramagnética. Se este fosse o caso, deveria observar-se que o valor de $\langle dh \rangle$ é a metade do valor que se obteria se o sistema fosse paramagnético. Mas o comportamento é um pouco diferente, dado que $\langle dh \rangle$ não vai para zero continuamente na temperatura crítica, mas apresenta uma descontinuidade. Seria importante poder fazer um estudo mais detalhado deste comportamento, em particular a sua dependência com o tamanho do sistema e o tempo de observação, a fim de determinar se esta descontinuidade observada é apenas um efeito de tamanho finito. Este resultado contrasta com os resultados obtidos no capítulo 6 para o modelo de Ising ferromagnético de alcance infinito, no qual a curva $\langle dh \rangle$ apresenta um comportamento contínuo. Finalmente encontrou-se que, na fase mista, o modelo van Hemmen tem o mesmo comportamento dinâmico que apresentam o modelo SK e o modelo Edwards-Anderson $d = 3$ na fase vidro de spin.

No capítulo 6 estudou-se a propagação de danos no modelo de Hopfield submetido à dinâmica banho térmico. Novamente, a conclusão mais importante é que, nos três casos estudados ($\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \neq 0$ e duas memórias correlacionadas) parece existir uma

estreita relação entre os comportamentos dinâmico e termodinâmico. É importante destacar que, na fase vidro de spin ao longo dos cortes estudados do diagrama T vs α do modelo, encontrou-se o mesmo comportamento que na fase vidro de spin do modelo van Hemmen, mas, neste caso, não é possível separar o sistema em duas subredes. Este comportamento pode se dever ao fato do sistema ser dominado por uma estrutura de multivales (não ergódica) na qual todos os vales estão separados pela mesma distância de Hamming, a qual por sua vez depende da temperatura. Isto concorda com os estudos analíticos, segundo os quais a fase vidro de spin com simetria de réplicas é estável, e provavelmente seja a que domina o comportamento dinâmico do sistema, pelo menos ao longo dos cortes estudados.

Resumindo os resultados obtidos nestes dois últimos capítulos, podemos dizer que existe uma forte correlação entre os comportamentos dinâmico e estático dos modelos estudados e que, a sensibilidade da distância de Hamming ao dano inicial não necessariamente significa uma estrutura do espaço de fases complicada como alguns autores supõem. Por exemplo, o modelo de Hopfield com duas memórias na fase de reconhecimento, além de não ter frustração, tem uma estrutura trivial, mas mesmo assim apresenta sensibilidade ao dano inicial, enquanto que sua fase vidro de spin, tem uma estrutura de multivales e mesmo assim $\langle dh \rangle$ independe da distância inicial. Neste sentido, é importante destacar que o cálculo da distribuição das médias temporais da distância de Hamming oferece uma descrição mais apropriada da estrutura do sistema que o simples cálculo de $\langle dh \rangle$. Da mesma forma, mostrou-se nesta tese que as quantidades $\langle t \rangle$ e P , definidas no capítulo 5, permitem caracterizar com maior precisão os valores das temperaturas críticas em que o sistema sofre mudanças no seu comportamento dinâmico.æ

Bibliografia

- [1] J. J. Hopfield, *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **79**, 2554 (1982).
- [2] D. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. A* **32**, 1007 (1985).
- [3] *Monte Carlo Methods in Statistical Physics* Vol. I e II, editado por K. Binder, Springer-Verlag, Heidelberg, (1979 e 1984).
- [4] D. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1530 (1985); *Annals of Physics* **173**, 30 (1987)
- [5] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792 (1975).
- [6] J. H. Herrmann, em *Nonlinear Phenomena in Complex System*, editado por A. Proto, North Holland (1989).
- [7] S. F. Edwards and P. W. Anderson, *J. Phys. F* **5**, 965 (1975).
- [8] S. A. Kauffman, *J. Theor. Biol.* **22**, 437 (1969).
- [9] S. A. Kauffman, *Physica D* **10**, 145 (1984).

- [10] B. Derrida, *Summer School on Statistical Mechanics Proc.*, Altenberg, (1989).
- [11] B. Derrida and G. Weisbuch, *Europhys. Lett.* **4**, 657 (1987).
- [12] H. da Cruz, U. Costa and E. M. F. Curado, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L651 (1989).
- [13] B. Alberts, D. Bray, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts and J. Watson, *Molecular Biology of the Cell*, Garland Publishing Inc., New York, 1983.
- [14] J. L. van Hemmen, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 409 (1982).
- [15] J. L. van Hemmen, A. C. D. van Enter and J. Canisius, *Z Phys. B* **50** 311 (1983).
- [16] D. O. Hebb, *The Organization of Behaviour: A Neuropsychological Theory*, Wiley, New York, 1949.
- [17] J. Darnell, H. Lodish and D. Baltimore, *Molecular Cell Biology*, Scientific American Books, New York, 1990.
- [18] J. Hubbard, *Proc. R. Soc. A* **276**, 238 (1963).
- [19] S. A. Cannas, F. A. Tamarit and C. Tsallis, *Solid State Communications* **78**, 685 (1991).
- [20] S. A. Cannas, F. A. Tamarit and C. Tsallis, *Phys. Rev. B* **45** (1992).
- [21] C. M. Marcus, F. R. Waugh and R. M. Westervelt, *Phys. Rev. A* **41**, 3355 (1990).
- [22] D. A. Stariolo and F. A. Tamarit, *Phys. Rev. A*, aceito para publicação.
- [23] D. J. Amit, *Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks*, Cambridge University Press, New York, 1989.
- [24] J. Hertz, A. Krogh e R. Palmer, *Introduction to the Theory of Neural Computation*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [25] S. Wolfram, *Physica D* **10**, 1 (1984); S. Wolfram, em *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1986).

- [26] B. Derrida and G. Weisbuch, *J. Physique* **47**, 1297 (1986).
- [27] B. Derrida and Y. Pomeau, *Europhys. Lett.* **1**, 45 (1986).
- [28] M. L. Martins, H. F. V. de Rezende, C. Tsallis and A. Magalhães, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 2045 (1991).
- [29] E. Ising, *Zeitschrift Für Physik* **31**, 253 (1925).
- [30] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, (1963).
- [31] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller, *J. Chem. Phys.* **21**, 1087 (1953).
- [32] K. Kawasaki, *Prog. Theor. Phys.* **39**, 1133 (1968).
- [33] P. Peretto, *Biol. Cybern.* **50**, 51 (1984).
- [34] H. Stanley, D. Stauffer, J. Kertés and H. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2326 (1987).
- [35] U. M. S. Costa, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, L-583 (1987).
- [36] G. Le Caer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** L-647 (1989).
- [37] D. Stauffer, não publicado.
- [38] A. Coniglio, L. de Arcangelis, H. Herrmann and N. Jan, *Europhys. Lett.* **8**, 315 (1989).
- [39] A. Mariz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 987 (1990).
- [40] Y. Leroyer and K. Rouidi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, 1931 (1991).
- [41] M. Barber and B. Derrida, *J. Stat. Phys.* **51**, 877 (1988).
- [42] O. Golinelli and B. Derrida, *J. Phys. France* **49**, 1663 (1988).
- [43] M. A. Ruderman and C. Kittel, *Phys. Rev.* **96**, 99 (1954).

- [44] T. Kasuya, *Prog. Theor. Phys.* **16**, 45 (1956).
- [45] K. Yosida, *Phys. Rev.* **106**, 893 (1957).
- [46] V. Cannela, J. A. Mydosh and J. I. Budnick, *J. Appl. Phys.* **42**, 1689 (1971).
- [47] V. Cannela and J. A. Mydosh, *Phys. Rev. B* **6**, 4220 (1972).
- [48] V. Cannela and J. A. Mydosh, *A.I.P. Conf. Proc.*, **10**, 785 (1973).
- [49] Alguns importantes trabalhos experimentales de revisão são: R. Rammal and J. Souletie, *Magnetism of Metals and Alloys*, ded. M. Cyrout, North Holland; J. A. Midosh, *Mag. Magn. Mat.* **7** 237 (1978).
- [50] K. Binder and A. P. Young, *Rev. Modern Phys* **58**, 801 (1986).
- [51] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, *J. Phys. A: Math. Gen.* **11**, 983 (1978).
- [52] G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1754 (1979).
- [53] G. Parisi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**, L115 (1980).
- [54] G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1946 (1983).
- [55] A. P. Young, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1206 (1983).
- [56] M. Mézard, G. Parisi and M. A. Virasoro, *Europhys. Lett.* **1**, 77 (1986).
- [57] D. J. Thouless, P. W. Anderson and R. G. Palmer, *Phil. Mag.* **35**, 593 (1977).
- [58] A. T. Ogielski, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 928 (1985).
- [59] A. T. Ogielski and I. Morgenstein, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 928 (1985).
- [60] R. N. Bhatt and A. P. Young, *Phys. Rev. Lett* **54**, 924 (1985).
- [61] R. N. Bhatt and A. P. Young, *Phys. Rev. B* **37**, 5606 (1988).
- [62] A. Neumann and B. Derrida, *J. Phys. France* **49**, 1647 (1988).

- [63] I. A. Campbell and L. de Arcangelis, *Europhys. Lett.* **13**, 587 (1990); *J. Mgn. Mater.* **90-91**, 322 (1990).
- [64] A. J. Bray and M. A. Moore *J. Phys. C: Solid State Phys.* **17** L-463, L-613.
- [65] A. J. Bray, *Comment Cond. Mat. Phys.* **14**, 21 (1988).
- [66] D. J. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. A* **35**, 2293 (1987).
- [67] L. Personnaz, I. Guyon and G. Dreyfus, *J. Physique Lett.* **46**, 359 (1985).
- [68] N. Parga and M. Virasoro, *J. Physique* **47**, 1857 (1986).
- [69] H. Gutfreund, *Phys. Rev. A* **37**, 570 (1988).
- [70] J. F. Fontanari and W. K. Theumann, *J. Phys. France* **51**, 375 (1990).
- [71] F. A. Tamarit and E. M. F. Curado, *J. Stat. Phys.* **62**, 473 (1991).
- [72] R. Erichsen and W. K. Theumann, Preprint IF-UFRGS (1990); em *Neural Networks and Spin Glasses*, editado por W. Theumann e R. Köberle, World Scientific (1989).
- [73] J. F. Fontanari and R. Köberle, *J. Phys. A* **21**, 2477 (1988).
- [74] T. Kohonen and M. Rouhonen, *IEEE Trans. Comput.* **22**, 1007 (1985).
- [75] I. Kanter and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. A* **35**, 380 (1986).
- [76] M. Virasoro, em *Disordered Systems and Biological Organization*, editado por E. Bienenstocck, F. Fogelman and G. Weisbuch, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [77] M. V. Feigelman and L. B. Ioffe, *Int. Jour. of Mod. Phys. B* **1**, 51 (1987).
- [78] P. Baldi and S. S. Venkatesh, *Phy. Rev. Lett* **58**, 913 (1987).
- [79] E. Gardner, *J. Phys. A* **20**, 3453 (1987).
- [80] L. Aboot and Y. Arian, *Phys. Rev. A* **36**, 5091 (1987).

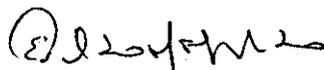
- [81] D. Horn and M. Usher, *J. Phys. France* **49**, 389 (1988).
- [82] R. P. Bajpai and P. Shukla, *Phys. Rev. A* **42**, 5006 (1990).
- [83] R. M. C. de Almeida and J. R. Iglesias, *Phys. Lett A* **146**, 239 (1990).
- [84] B. Derrida, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 79 (1980) e *Phys. Rev. B* **24**, 2613 (1981).
- [85] D. J. Gross and M. Mezard, *Nucl. Phys. B* **240**, 431 (1984).
- [86] E. Gardner, *Nucl. Phys. B* **257**, [FS14] 747 (1985).
- [87] D. Stariolo, *Physica A* **166**, 622 (1990).
- [88] K. J. Roney, A.B. Scheibel and G. L. Shaw, *Brain Res. Rev.* **1**, 225 (1979).
- [89] G. L. Shaw, E. Harth and A. B. Sheibel, *Exp. Neurol.* **77**, 324 (1982).
- [90] P. Peretto and J. J. Niez, *Biol. Cybernetics* **54**, 53 (1986).
- [91] E. R. Kandel, em *Cellular basis of behaviour*, Freeman, San Francisco; E. R. Kandel and L. Tauc, *J. Physiol.* **181**, 1 (1965).
- [92] T. J. Carew, V. F. Castellucci and E. R. Kandel, *Int. J. Neurosci* **2**, 79 (1971).
- [93] Y. Owechko, G. J. Dunning, E. Marom and B. H. Soffer, *J. Appl. Opt* **26**, 1900 (1987).
- [94] B. Derrida, E. Gardner and A. Zippelius, *Europhys. Lett.* **4**, 167 (1987).
- [95] H. J. Hilhorst and M. Nijmijer, *J. Physique* **48**, 185 (1987).
- [96] B. Derrida, *J. Phys. A* **20**, L-721 (1987).
- [97] O. Golinelli, *Physica A* **167**, 736 (1990).
- [98] B. Derrida and G. Weisbuch, *J. Physique* **47**, 1297 (1986).
- [99] A. E. Patrick and V. A. Zagrebnoy, *J. Physique* **51**, 1129 (1990).
- [100] A. E. Patrick and V. A. Zagrebnoy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, L1323 (1990).

- [101] F. Tamarit, D. Stariolo and E. M. F. Curado, *Phys. Rev. A* **43**, 7083 (1991).
- [102] T. Penna and P. M. C. Oliveira, *J. Phys. A* **22**, L-719 (1989).
- [103] G. Parisi, *J. Phys. A* **19**, L675 (1986).
- [104] D. C. Mattis, *Phys. Lett. A* **56**, 421 (1976).
- [105] R. de Almeida e I. A. Campbell, comunicação privada.
- [106] J. L. van Hemmen, *Phys. Rev. A* **34**, 3435 (1986).
- [107] J. F. Fontanari, *J. Phys. France* **51**, 2421 (1991).
- [108] P. Krebs e W. Theumann, comunicação privada.

"REDES DE NEURÔNIOS COM CORRELAÇÃO ENTRE OS PADRÕES E DILUIÇÃO
ASSIMÉTRICA DAS SINAPSES: ASPECTOS ESTÁTICOS E DINÂMICOS"

FRANCISCO ANTONIO TAMARIT

Tese de Doutorado apresentada no Cen-
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvi-
mento Científico e Tecnológico, fa-
zendo parte da banca examinadora, os
seguintes professores:



Evaldo Mendonça Fleury Curado
Presidente



Paulo Múriilo Castro de Oliveira



Sérgio Galvão Coutinho



Constantino Tsallis



Paulo Mascarello Bisch



Oscar Leonel Nóbrega Telles de Menezes
Suplente

Rio de Janeiro, 31 de agosto de 1992