

Tese de  
MESTRADO

Construção de Modelos  
para um Universo Globalmente Causal  
a partir da Solução de Gödel

Martha Christina Motta da Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, Outubro de 1992

0.44

## Agradecimentos

- Ao professor Mário Novello, não só pelo tema proposto e pela motivação mas, principalmente, pela inesgotável paciência;
- Aos demais professores do DRP que, em vários Pequenos Seminários, contribuíram com observações relevantes;
- A Míriam, da CFC, e Iara, do DRP, pelo “apoio logístico”, e a todos os funcionários do CBPF de modo geral;
- A Regina Arcuri e Maria Emília Xavier Guimarães, pelas discussões de pontos referentes aos seus respectivos trabalhos e por diversas sugestões;
- Aos colegas do CBPF em geral — e os da sala 509-B em particular — pelo excelente clima de trabalho proporcionado e pela ajuda e “dicas” em relação ao uso do editor de texto;
- A todos os professores que, de alguma maneira, contribuíram para a minha formação ( especialmente o professor Jorge A. Vieira — Observatório do Valongo, UFRJ );
- A Rose-Mary e Mercio, meus pais, com muito amor;
- A Mercio Filho e Marcus Eduardo, pela “força”;
- Ao CNPq, pela bolsa recebida.

## Resumo

Um modelo de Universo globalmente causal é construído por meio da junção da métrica de Gödel (região causal) a uma solução exterior. Duas possíveis soluções, com fluxo de calor respectivamente zero e constante, são estudadas e as condições para que a causalidade não seja violada em ponto algum do modelo são também discutidas.

## Abstract

A model for a globally causal Universe is constructed by means of the junction of Gödel's metric (causal region) and an exterior solution. Two possible solutions with zero and constant heat flux are studied and the conditions for no causality violation are also discussed.

# Lista de Tabelas

5.1	As regiões causal, nula e acausal da métrica genérica no caso em que ela descreve todo o espaço-tempo, em função do parâmetro $\lambda$ . . . . .	78
5.2	Valores aceitáveis de $\lambda$ e $\delta$ para o modelo Gödel-solução genérica, com $r_\Sigma = r_c \delta$ e $\lambda^2 = a(2p - \pi_{11} - 2\Lambda)$ . . . . .	78
6.1	Valores aceitáveis para a componente $\pi_{11}$ da matriz de pressão anisotrópica e para a constante cosmológica do fluido gerador da solução genérica. .	93
6.2	Valores aceitáveis de $\pi_{11}$ e $\Lambda$ para o caso especial de um fluido perfeito e fisicamente válido (onde $p = \nu\rho$ , $\rho$ positiva e $0 \leq \nu \leq 1$ ). . . . .	93

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>O Modelo de Gödel</b>	<b>4</b>
2.1	Propriedades da Solução de Gödel . . . . .	5
2.2	Quantidades Relevantes para a Solução de Gödel . . . . .	11
2.3	Métrica de Gödel em um Sistema de Coordenadas Gaussiano . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Condições de Contorno para Junção de Métricas</b>	<b>21</b>
3.1	Conceitos Básicos . . . . .	22
3.2	Hipersuperfície $\Sigma$ e Quantidades Relevantes . . . . .	25
3.3	Equações de Gauss-Codazzi . . . . .	28
3.4	Condições de Junção . . . . .	34
3.5	Uma Aplicação . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Solução Exterior</b>	<b>45</b>
4.1	Métrica Exterior e Equações de Campo . . . . .	46
4.2	Resolução das Equações de Campo . . . . .	50
4.3	Junção de Métricas . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Análise do Problema da Causalidade</b>	<b>58</b>
5.1	A Causalidade para a Solução Genérica . . . . .	59
5.2	Causalidade para o Modelo Gödel-Solução Genérica . . . . .	64
5.3	O Caso $\delta = 1$ . . . . .	75
<b>6</b>	<b>O Fluido Gerador da Solução Genérica</b>	<b>79</b>
6.1	Quantidades Relevantes . . . . .	79
6.2	Caso Especial — Fluido Ideal . . . . .	83
6.3	Quantidades Cinemáticas . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Uma Nova Solução</b>	<b>94</b>
7.1	Solução de <i>String</i> Girante . . . . .	95
7.2	Solução com Fluxo de Calor — <i>String</i> Girante . . . . .	97
7.3	A Causalidade para a Solução de <i>String</i> Girante . . . . .	106
7.4	Condições Fraca e Dominante de Energia . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>119</b>

## Convenções

Neste trabalho são usadas as seguintes convenções:

- Assinatura da métrica:  $(+, -, -, -)$
- Índices gregos:  $\alpha = 0, 1, 2, 3$
- Índices latinos minúsculos:  $i = 1, 2, 3$
- Índices latinos maiúsculos ( de tetradas ):  $A = 0, 1, 2, 3$
- $\eta_{AB} \equiv (+1, -1, -1, -1)$ : os índices de tetradas são abaixados ou levantados por  $\eta_{AB}$
- $F' \equiv \frac{dF}{dr}$
- $F_I(r)$ : função  $F(r)$  para a região  $I$  do modelo
- $F_{II}(r)$ : função  $F(r)$  para a região  $II$  do modelo
- Derivada covariante:  $A_{\beta;\gamma}^\alpha = A_{\beta,\gamma}^\alpha + \Gamma_{\gamma\rho}^\alpha A_\beta^\rho - \Gamma_{\beta\gamma}^\rho A_\rho^\alpha$
- Símbolo de Christoffel:  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})$
- Tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu = \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu + \Gamma_{\lambda\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$$

- Tensor momento-energia em base de tetradas:

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + \pi_{AB} + q_{(A} V_{B)}$$

onde temos

$\rho$  — densidade da matéria

$p$  — pressão isotrópica

$\pi_{AB}$  — componente  $AB$  da matriz de pressão anisotrópica

$q_A$  — componente do vetor fluxo de calor

$V_A$  — vetor velocidade escrito em base de tetradas

$h_{AB}$  — projetor escrito em base de tetradas

- Tensor de Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma} = \begin{cases} +1 & \text{para permutações pares de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{para permutações ímpares de } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{para índices repetidos} \end{cases}$$

- Equação de Einstein com constante cosmológica:

$$R_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} + \frac{T}{2} g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

onde escolhemos  $\frac{8\pi k}{c^2} = 1$ .



*“What we call the beginning is often the end . And to make an end is to make a beginning . The end is where we start from . ”*

( Little Gidding , T. S. Elliot )

# Capítulo 1

## Introdução

A solução de Gödel [1] possui uma série de interessantes propriedades geométricas, as quais constituem fontes para uma melhor compreensão de algumas propriedades “esdrúxulas ” da Teoria da Relatividade Geral. A principal delas é a violação da causalidade em regiões exteriores a um certo “raio crítico ”. Isto acarreta, entre outros efeitos, a impossibilidade de se estabelecer uma coordenada temporal global e por conseguinte, um sistema de coordenadas Gaussiano que cubra toda a variedade a quatro dimensões.

Uma possível solução para este problema seria aproveitar-se somente a região causal descrita pela métrica de Gödel, ligando-a exteriormente a uma outra solução, também sem curvas de tipo tempo fechadas. Desta forma, construir-se-ia um modelo de descrição do espaço-tempo que não apresentaria problemas de causalidade. Na literatura científica encontram-se modelos deste tipo, compostos por várias métricas unidas analiticamente: um exemplo, que não envolve questões referentes à violação da causalidade, é o da solução que une as métricas de Friedmann e de Schwarzschild. Ela descreve um modelo com simetria esférica, envolvendo núcleos atrasados de matéria [25].

Em nosso caso, é realizado um trabalho de junção de métricas para um modelo

com simetria cilíndrica, nas seguintes linhas gerais: em primeiro lugar (Capítulo 2), um resumo e discussão das principais propriedades da solução de Gödel e o cálculo de uma série de quantidades a ela relevantes, bem como uma descrição do estabelecimento de um sistema de coordenadas Gaussianas, válido para a região causal desta solução [11]. No Capítulo 3 é discutido o problema das condições de contorno para a junção de métricas e calculam-se as condições necessárias à ligação de duas métricas com simetria cilíndrica e estacionárias. Estas condições são aplicadas às equações de campo de Einstein para obter-se uma solução exterior a Gödel (no Capítulo 4), sem problemas de causalidade (as condições necessárias são discutidas no Capítulo 5). A matéria fonte desta solução (a qual, como veremos, tem fluxo de calor nulo) é estudada no Capítulo 6. Finalmente, no Capítulo 7, discute-se uma nova solução, com fluxo de calor constante, a qual constitui uma *string* girante. As condições de causalidade e a condição dominante de energia são aplicadas a ela e as consequências daí decorrentes são também analisadas.

## Capítulo 2

# O Modelo de Gödel

Esta solução específica para as equações de campo de Einstein, obtida por K. Gödel (1949) [1], descreve um Universo contendo um fluido perfeito, incoerentemente distribuído no espaço e apresentando rotação não nula e independente do tempo. Este modelo, apesar de não descrever as características observadas em nosso Universo real — já que nele não se constata expansão e, ademais, as simetrias não são tampouco as mesmas — apresenta uma série de interessantes propriedades topológicas, associadas à existência de curvas tipo tempo fechadas (CTC's) e — como consequência — à violação do Princípio de Causalidade. E, como tal, tem sido amplamente estudado na literatura científica: Kundt (1956) [2], Chandrasekhar e Wright (1961) [3], Hiscock (1978) [4], Novello, Soares e Tiomno (1983) [5], Agakov (1984) [6] e Malament (1987) [7], entre outros, abordaram diversos aspectos deste modelo. Adler, Bazin e Schiffer (1975) [8], Hawking e Ellis (1977) [9] e Novello (1982) [10] apresentaram os resultados de Gödel de um ponto de vista mais didático.

Neste capítulo, discutiremos as principais características e propriedades desta solução e suas consequências imediatas, bem como suas quantidades cinemáticas e simetrias (re-

presentadas pelos vetores de Killing). Além disso, definiremos o sistema de coordenadas mais adequado (a ser usado posteriormente ao longo deste trabalho) e analisaremos rapidamente uma nova abordagem: a transformação para um sistema de coordenadas Gaussiano e as condições em que vale um tal sistema [11].

## 2.1 Propriedades da Solução de Gödel

Em coordenadas cartesianas  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  a métrica de Gödel se escreve como [1], [9]:

$$ds^2 = a^2 \left[ dx_0^2 - dx_1^2 + \frac{1}{2} e^{2x_1} dx_2^2 + 2e^{x_1} dx_0 dx_2 - dx_3^2 \right] \quad (2.1)$$

onde  $a$  é uma constante positiva. Conforme mencionamos, esta solução (que possui uma constante cosmológica não nula) é gerada por um fluido em rotação e incoerentemente distribuído e possui — ou, mais especificamente, a variedade a quatro dimensões que é definida pela métrica (2.1) possui — um conjunto de propriedades, as quais passamos a enunciar:

- (a) A solução é estacionária e espacialmente homogênea.

Isto equivale a dizer que, dados dois pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes à variedade 4-dimensional  $S$  que a métrica (2.1) define, existe uma transformação  $T$  do tipo:

$$T : S \mapsto S$$

$$P \mapsto Q$$

Esta propriedade acarreta [1] de imediato a consequência de que quaisquer duas linhas de universo percorridas pela matéria que compõe o fluido gerador da solução são eqüidistantes. Ambas as afirmações podem ser verificadas a partir do fato de que a variedade S admite os seguintes quatro sistemas de transformação, os quais levam S à própria variedade:

$$\begin{cases} x_\alpha = x'_\alpha + b \\ x_i = x'_i \end{cases}$$

onde  $b$  é um número real arbitrário, P e Q têm coordenadas  $(x_\alpha)$  e  $(x'_\alpha)$  respectivamente,  $\alpha$  designa um dos quatro índices (0, 1, 2, 3) e  $i$  assume os três valores restantes (que não o dado por  $\alpha$ ).

(b) O fluido que gera a solução de Gödel possui uma rotação não nula em relação aos observadores co-móveis.

Isto pode ser imediatamente verificado se construirmos o tensor antissimétrico  $A_{\mu\nu\gamma}$ , definido por [1], [11]:

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\gamma} &= V_{[\mu} V_{\nu,\gamma]} \\ &= V_\mu (V_{\nu,\gamma} - V_{\gamma,\nu}) + V_\nu (V_{\gamma,\mu} - V_{\mu,\gamma}) + V_\gamma (V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $\vec{V}$  denota o vetor unitário na direção das linhas  $x_0$  e tem as seguintes componentes contravariantes e covariantes:

$$\begin{cases} V^\mu = \left(\frac{1}{a}, 0, 0, 0\right) \\ V_\mu = (a, 0, ae^{x_1}, 0) \end{cases} \quad (2.3)$$

Substituindo-se (2.3) em (2.2) obtemos as componentes de  $A_{\mu\nu\gamma}$

$$A_{\mu\nu\gamma} = \begin{cases} -\frac{1}{6}a^2 e^{x_1} & \text{para permutações pares de } (0, 1, 2) \\ \frac{1}{6}a^2 e^{x_1} & \text{para permutações ímpares de } (0, 1, 2) \\ 0 & \text{para os casos restantes} \end{cases}$$

De posse destes resultados podemos calcular a vorticidade  $\omega^\alpha$ , definida pela relação abaixo [1]

$$\begin{cases} \omega^\alpha \equiv \frac{\varepsilon^{\alpha,\mu,\nu,\gamma}}{\sqrt{-g}} A_{\mu,\nu,\gamma} \\ \varepsilon^{0,1,2,3} = +1 \end{cases} \quad (2.4)$$

e onde temos  $g \equiv$  determinante da matriz  $(g^{\mu\nu})$ , o que nos dá:

$$\omega^\alpha = \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{a}\right) \quad (2.5)$$

E, já que a rotação  $\Omega$  é definida como a norma do vetor  $\vec{\omega}$ , temos finalmente que

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{-\omega^\alpha \omega_\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta equação nos fornece a interpretação física da constante positiva  $a$ : este parâmetro é inversamente proporcional à taxa de rotação do fluido gerador da solução de Gödel. Além disto, como veremos mais adiante, ele mede também o quanto (2.1) se desvia de uma métrica plana: quando  $a \rightarrow \infty$ , a métrica dada pela equação (2.1) tende à métrica de Minkowskii [1], [11].

(c) A variedade  $S$  possui simetria rotacional.

A equação (2.5) para  $\omega^\sigma$  nos permite constatar imediatamente que a rotação da matéria que compõe o universo de Gödel é uniforme e se dá, em cada ponto, em torno do eixo  $x_3$ . Além disso, se fizermos a seguinte transformação para um sistema de coordenadas cilíndrico  $(t, r, \varphi, z)$ , dado por [1], [9], [11], [12]

$$\begin{cases} e^{x_1} = \cosh(2r) + \cos(\varphi) \sinh(2r) \\ x_2 e^{x_1} = \sqrt{2} \sin(\varphi) \sinh(2r) \\ \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{(x_0 - 2t)}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ x_3 = 2z \end{cases} \quad (2.7)$$

onde

$$\frac{|(x_0 - 2t)|}{2\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2} \quad (2.8)$$

Com (2.7) acima obtemos, por um cálculo direto a partir de (2.1), a seguinte métrica em coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = 4a^2 \left[ dt^2 - dr^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r dt d\varphi + \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\varphi^2 - dz^2 \right] \quad (2.9)$$

a qual exhibe explicitamente a simetria rotacional postulada, visto que os coeficientes métricos  $g_{\mu\nu}$  não dependem da coordenada angular  $\varphi$ .

(d) As linhas de universo das partículas materiais em repouso em um sistema co-movente de coordenadas não podem ser ortogonais, ao longo



de todo o espaço-tempo, a uma família de hipersuperfícies a três dimensões definidas a um parâmetro.

Em outras palavras, isto equivale a dizer que não é possível, para a solução de Gödel, estabelecer-se um sistema de coordenadas que admita uma coordenada temporal global e no qual o fluido que gera esta solução esteja em repouso simultaneamente.

Esta propriedade pode ser provada se lembrarmos que o tensor antissimétrico  $A_{\mu\nu\gamma}$ , definido pela equação (2.2), não é identicamente nulo. Conforme argumentos de Gödel [1], [8], [11] isto é suficiente para garantir que a geometria de Gödel não admite um sistema de coordenadas Gaussiano global. A não existência deste sistema está, portanto, associada à existência de rotação (como comprovamos pela definição de vorticidade, equação (2.4)).

(e) A solução de Gödel admite a existência de curvas tipo tempo fechadas (CTC's).

Para provar esta propriedade vamos escolher a coordenada cíclica e tipo espaço  $\varphi(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$  e verificaremos sob que circunstâncias ela passa a ser tipo tempo.

Deste modo, escolhemos a órbita circular fechada:

$$\begin{cases} t = c^{te} \\ r = c^{te} \\ z = c^{te} \end{cases} \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) na métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas, equação (2.9), temos que a métrica resultante, neste caso, é dada por

$$ds^2 = 4a^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\varphi^2 \quad (2.11)$$

Verifica-se daí que:

(i)  $ds^2 = 0$ , quando

$$\sinh^2 r = 1 \longrightarrow r = \operatorname{arcsinh}(1)$$

O raio para o qual isto ocorre será chamado, daqui por diante, de “raio crítico ” e vamos denotá-lo por  $r_c$

$$r_c = \operatorname{arcsinh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) \quad [13] \quad (2.12)$$

(ii)  $ds^2 < 0$ , quando

$$\sinh^2 r < 1 \longrightarrow r < r_c$$

Ou seja, a curva definida pela equação (2.10) é tipo espaço para raios *menores* do que o raio crítico

$$0 \leq r < r_c \quad (2.13)$$

Esta região será referida, daqui por diante, como a “região causal ”, já que nela o Princípio de Causalidade é sempre válido.

(iii)  $ds^2 > 0$ , quando

$$\sinh^2 r > \longrightarrow r > r_c$$

Neste caso ocorrem CTC's, donde se constata a violação da causalidade na geometria de Gödel. Esta região, para a qual vale

$$r > r_c \tag{2.14}$$

será referida como a “região acausal”. Constata-se que as curvas tipo tempo fechadas descritas por (2.10) não são geodésicas (estas estão confinadas à região causal para curvas que passam pela origem) [2], [3], [5], [11]. Assim, uma partícula que se movimenta sobre curvas do tipo tempo fechadas deve, necessariamente, estar acelerada; e esta aceleração é devida a um campo externo aplicado à partícula [14].

## 2.2 Quantidades Relevantes para a Solução de Gödel

Desde que provamos, na seção anterior, que a métrica de Gödel é simétrica por rotações em torno do eixo  $z$  (pela transformação (2.7)), será mais conveniente que esta solução seja estudada no sistema de coordenadas cilíndrico. Desta maneira, propriedades relevantes como este tipo de simetria, bem como a existência de CTC's tornam-se imediatamente aparentes. Portanto, ao nos referirmos à métrica de Gödel daqui por diante, dever-se-á entender a forma abaixo — em coordenadas cilíndricas e obtida da equação (2.9) por uma mera mudança de escala:

$$ds^2 = a^2 \left[ dt^2 - dr^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r dt d\varphi + \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\varphi^2 - dz^2 \right] \quad (2.15)$$

De (2.15) podemos escrever diretamente as componentes co- e contravariantes do tensor métrico em forma matricial, assim como o seu determinante:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & \sqrt{2}a^2 \sinh^2 r & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}a^2 \sinh^2 r & 0 & a^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\sinh^2 r)}{a^2 \cosh^2 r} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{a^2 \cosh^2 r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{a^2 \cosh^2 r} & 0 & -\frac{1}{a^2 \sinh^2 r \cosh^2 r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$g = \det (g_{\mu\nu}) = -a^8 \sinh^2 r \cosh^2 r$$

Através do Princípio Variacional — que extremiza a distância  $ds$  e é enunciado matematicamente como  $\delta f ds = 0$  — encontramos as quatro equações de Euler-Lagrange em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \ddot{t} + 4 \frac{\sinh r}{\cosh r} \dot{t} \dot{r} + 2\sqrt{2} \frac{\sinh^2 r}{\cosh r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \\ \ddot{r} + 2\sqrt{2} \sinh r \cosh r \dot{t} \dot{\varphi} + \sinh r \cosh r (2 \sinh^2 r - 1) \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} - \frac{2\sqrt{2}}{\sinh r \cosh r} \dot{t} \dot{r} + \frac{2}{\sinh r \cosh r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Com estas equações podemos obter diretamente as conexões não nulas  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = 2 \tanh r \\ \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \sqrt{2} \sinh^2 r \tanh r \\ \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = \sqrt{2} \sinh r \cosh r \\ \Gamma_{22}^1 = \sinh r \cosh r (2 \sinh^2 r - 1) \\ \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sinh r \cosh r} \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\sinh r \cosh r} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Fazendo uso dos tensores de Ricci e do escalar de curvatura calculados no Apêndice A, em base de tetradas, para uma métrica cilíndricamente simétrica e estacionária genérica e aplicando-os às componentes  $g_{\mu\nu}$  de Gödel, (2.15), podemos escrever as equações de campo de Einstein com constante cosmológica

$$R_{AB} = -T_{AB} + \frac{T}{2}\eta_{AB} + \Lambda\eta_{AB} \quad (2.19)$$

onde:  $\eta_{AB} = (+1, -1, -1, -1)$ . Lembrando que, neste modelo, a fonte da geometria é um fluido com densidade de energia  $\rho$  e com pressão e fluxo de calor nulos, temos que a métrica de Gödel é solução das equações de campo acima se e somente se  $\rho$  e  $\Lambda$  assumirem os valores

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = -2\Lambda = \frac{4}{a^2} \\ \Lambda = -\frac{2}{a^2} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

A equação (2.20) nos permite concluir que, quando  $a \rightarrow \infty$  (ou seja, quando a rotação  $\Omega$  dada por (2.6) tende a zero), tanto  $\rho$  quanto  $\Lambda$  se anulam e, portanto, a geometria tende à de um espaço-tempo plano, descrito pela métrica de Minkowskii

(conforme havíamos afirmado anteriormente). Em outras palavras, podemos considerar a constante  $a$  como um parâmetro associado à curvatura: quanto maior for a rotação do fluido gerador da solução de Gödel, maior é a curvatura do espaço-tempo descrito por esta geometria.

Com a equação (2.3), que dá o vetor velocidade no referencial em que a matéria que compõe o fluido está em repouso (referencial co-movente), podemos calcular as quantidades cinemáticas associadas ao modelo de Gödel [10]:

a) Aceleração ( $A^\mu$ ):

$$A^\mu = V_{;\nu}^\mu V^\nu = 0 \quad (2.21)$$

b) Expansão ( $\Theta$ ):

$$\Theta \equiv V_{;\mu}^\mu = 0 \quad (2.22)$$

c) Deformação ou *Shear* ( $\sigma_{\mu\nu}$ ):

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv h_\mu^{(\alpha} h_\nu^{\beta)} V_{(\alpha;\beta)} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.23)$$

d) Rotação ( $\omega^\mu$ ):

$$\begin{aligned} \omega^\mu &\equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} V_\alpha h_\beta^\gamma h_\lambda^\rho V_{\gamma;\rho} = (0, 0, 0, \Omega) \\ &= (0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{a}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

que é o resultado (2.6) obtido anteriormente.

Daí se constata que as partículas do fluido que gera a solução de Gödel seguem geodésicas (já que a aceleração é nula) e apresentam rotação rígida (pois a expansão e a deformação também são zero) em relação ao compasso de inércia local. Em outras palavras, a matéria do universo de Gödel gira em relação à curva tangente ao caminho seguido por uma partícula-teste, ao ser dada a ela uma velocidade radial inicial [8].

Por último vamos enumerar os cinco vetores de Killing que esta métrica admite. Em coordenadas cilíndricas, eles se escrevem como [11], [15], [16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{K}_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{K}_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{K}_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{K}_4 = \frac{\sqrt{2}}{a} \tanh r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{a} \coth 2r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{K}_5 = \frac{\sqrt{2}}{a} \tanh r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{a} \coth 2r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

e confirmam o que já havíamos concluído sobre as simetrias da solução de Gödel:  $\vec{K}_2$  indica simetria rotacional (ou axial),  $\vec{K}_3$  indica simetria cilíndrica e, como  $\vec{K}_1$  é um vetor tipo tempo — não ortogonal a hipersuperfícies tipo espaço [11] — a variedade descrita pela métrica (2.15) é estacionária (os  $g_{\mu\nu}$  não dependem de  $t$ ) [8] mas não é estática (pois a componente  $g_{02}$  é diferente de zero).

## 2.3 Métrica de Gödel em um Sistema de Coordenadas Gaussiano

Vimos, na seção (2.1), que a propriedade (d) implica na impossibilidade de se definir uma coordenada temporal global para o universo de Gödel. Além disso, a existência de CTC's para raios maiores do que o raio crítico  $r_c = \operatorname{arcsinh}(1)$  acarreta que, conforme a referência [5], as geodésicas que passam por um ponto  $O$  arbitrário deste espaço-tempo estarão confinadas em um “cilindro crítico” de raio  $r_c$  e origem  $O$ . Uma vez que (pela propriedade (a)) a solução de Gödel é também espacialmente homogênea, o ponto  $O$  pode — de fato — ser escolhido arbitrariamente. É este caráter confinante da geometria de Gödel que impede o estabelecimento de um sistema de coordenadas Gaussiano para além de uma determinada região.

Entretanto prova-se [11], [17] que é possível construir um sistema Gaussiano de coordenadas local, válido somente na região causal do espaço-tempo de Gödel. Vamos apresentar os resultados da referência [11] de um modo resumido. A construção de um sistema Gaussiano local pode ser feita por meio do formalismo matemático de Novello e Costa (1987) [18], no qual busca-se um sistema de coordenadas — denotado por  $(\tilde{t}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{z})$  — onde o tensor métrico satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{00} = 1 \\ \tilde{g}_{0i} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Estas condições nada mais são do que a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre e de massa unitária [11], [18], a qual pode também ser escrita na forma:



$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde  $S$  é uma função das coordenadas  $x^\alpha$  e de três parâmetros arbitrários  $\lambda_i$  adicionais:

$$S \equiv S(x^\alpha, \lambda_i)$$

Reescrevendo as condições (2.26) na forma (2.27), vem

$$\begin{cases} \tilde{g}^{00} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} = 1 \\ \tilde{g}^{0i} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\nu} = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

Derivando a primeira das equações (2.28) em relação a  $\lambda_i$  obtemos:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left( \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} \right) = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \lambda_i} \right) \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} = 0$$

e, comparando este resultado com a equação (2.27) — onde a função  $S$  passa a ser identificada como a coordenada temporal Gaussiana  $\tilde{t}$  — vem finalmente que:

$$\begin{cases} \tilde{t} \equiv S(x^\alpha, \lambda_i) \\ \tilde{x}^i = \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \end{cases} \tag{2.29}$$

onde as equações acima nos permitem calcular as quatro novas coordenadas Gaussianas  $\tilde{x}^\alpha$ .

Isto posto, podemos proceder para dar, em linhas gerais, os resultados do cálculo acima aplicado à região causal do espaço-tempo de Gödel [11], [17]. Empregando as

componentes  $g^{\mu\nu}$  do tensor métrico de Gödel em coordenadas cilíndricas — equação (2.17) — na segunda das equações (2.28), vem:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \sinh^2 r)}{\cosh^2 r} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 r} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \\ - \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = a^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Esta equação é resolvida introduzindo-se o “*Ansatz*” [18] na equação diferencial parcial acima. (2.30):

$$S(x^\alpha, \lambda_i) = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(r) = \tilde{t}$$

Integrando-se em  $r$  a equação resultante, obtemos a função  $F(r)$  e, por substituição direta no “*Ansatz*”, a coordenada temporal Gaussiana  $\tilde{t}$ . As demais coordenadas,  $\tilde{x}^i$ , são obtidas da equação (2.29) por uma diferenciação parcial simples, dando finalmente os resultados que se seguem:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{t} &= \lambda_1 t + \lambda_2 r + \lambda_3 z + F(r) \\ \tilde{\xi} &= t + \frac{\lambda_1}{2sqrt|P|} \arcsin \left( \frac{(2P \sinh^2 r + Q)}{\sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left( \frac{[(Q-2P) \sinh^2 r - 2\lambda_2^2 - Q]}{\cosh^2 r \sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) \\ \tilde{\eta} &= \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{[(Q-2P) \sinh^2 r - 2\lambda_2^2 - Q]}{\cosh^2 r \sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{(Q \sinh^2 r - 2\lambda_2^2)}{\sinh^2 r \sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) \\ \tilde{z} &= z + \frac{\lambda_3}{2\sqrt{\lambda_1 + M^2}} \arcsin \left( \frac{(2P \sinh^2 r + Q)}{\sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) \end{aligned} \right. \quad (2.31)$$

onde definimos as constantes

$$\begin{cases} M^2 \equiv \lambda_3^2 + a^2 \\ P \equiv -(\lambda_1^2 + M^2) \\ Q \equiv 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2 - M^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

e onde a função  $F(r)$  é dada por

$$\begin{aligned} F(r) = & \frac{\sqrt{|P|}}{2} \arcsin \left( \frac{(2P \sinh^2 r + Q)}{\sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) - \frac{\lambda_2}{2} \arcsin \left( \frac{(Q \sinh^2 r - 2\lambda_2^2)}{\sinh^2 r \sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{|Q + \lambda_2^2 - P|}}{2} \arcsin \left( \frac{[(Q - 2P) \sinh^2 r - 2\lambda_2^2 - Q]}{\cosh^2 r \sqrt{Q^2 + 4P\lambda_2^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

E as novas componentes do tensor métrico,  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , são finalmente obtidas da equação (2.27).

Podemos, de posse destes resultados, arbitrar valores para os parâmetros  $\lambda_i$  sem qualquer perda de generalidade. A referência [11] faz uma destas escolhas específicas ( $\lambda_1 = \mu a$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ), mas outras (como, por exemplo:  $\lambda_1 = \mu a$ ,  $\lambda_2 = \nu a$ ,  $\lambda_3 = 0$ ) são também possíveis.

Constata-se também, das equações de transformação (2.31), que existe um limite de validade para os sistemas Gaussianos, qualquer que seja a escolha feita para os parâmetros  $\lambda_i$  (já que, conforme afirmamos anteriormente, o modelo de Gödel admite apenas sistemas Gaussianos locais). Assim, para a escolha

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu a \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

o intervalo de validade é dado por [11], [17]

$$0 \leq \sinh^2 r \leq \left( \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \right)$$

Este domínio é menor do que o raio crítico  $r_c = \operatorname{arcsinh}(1)$  que define a região causal de Gödel, apesar de representarem ambos a mesma situação física: pontos-eventos do espaço-tempo descritos sob o ponto de vista de observadores geodésicos situados na origem do sistema de coordenadas. Além disso, as geodésicas deste sistema Gaussiano específico — definido pela escolha dos parâmetros  $\lambda_i$  [11] — são do tipo tempo, indicando que os observadores não acelerados são massivos. Ou seja, apenas fótons e outras partículas não massivas atingem o limite máximo definido por  $r = r_c$  [5], [11], [17].

## Capítulo 3

# Condições de Contorno para Junção de Métricas

Neste capítulo estudaremos o problema da junção de métricas, o qual pode ser resumido como se segue. Dadas duas regiões do espaço-tempo ( $I$  e  $II$ ), separadas por uma hipersuperfície  $\Sigma$ , deseja-se unir  $I$  e  $II$  através de  $\Sigma$ , de tal maneira que a passagem da região  $I$  — descrita por  $ds_I^2$  — seja realizada continuamente para a região  $II$  — descrita pela métrica  $ds_{II}^2$ .

O problema da formulação das condições de contorno adequadas a esta união de métricas tem sido estudado, entre outros, por Darmois [19] (1927), Lichnerowicz [20] (1955), O'Brien e Synge [21] (1952), Israel [22] (1966), Robson [23] (1972) e Bonnor e Vickers [24] (1981). Aplicações deste formalismo foram exibidas por Arcuri [25] (1982) e Lake [26], entre outros, para métricas com simetria esférica.

Em nosso caso, vamos discutir os principais aspectos deste problema, recorrendo a uma formulação puramente geométrica para chegar aos três principais conjuntos de condições de junção. A equivalência e a aplicabilidade destes conjuntos será discutida e eles serão finalmente aplicados ao caso específico de uma métrica com simetria cilíndrica

e estacionária.

### 3.1 Conceitos Básicos

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos da geometria diferencial necessários a uma visualização preliminar do problema. Define-se, em primeiro lugar, uma base de vetores tangentes, os quais denotaremos por  $\{e_\alpha\}$ , seguindo a notação usual de Israel [22] e de Misner, Thorne e Wheeler [27] (1973). Estes vetores podem ser definidos de uma forma arbitrária mas devem, necessariamente, ser linearmente independentes.

Neste caso, tomamos a base  $\{e_\alpha\}$  como:

$$\{e_\alpha\} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\} \quad (3.1)$$

Isto sempre pode ser feito, já que existe uma correspondência “um-para-um” (o que Misner, Thorne e Wheeler chamam um “isomorfismo completo”) entre um vetor e o operador derivada direcional correspondente. Então, para evitar problemas de definição do vetor  $e_\alpha$ , exploramos este isomorfismo e definimos o vetor tangente como a sua derivada direcional correspondente,  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ .

A vantagem de fazer-se esta escolha específica é que, para uma base  $e_\alpha$  assim definida, temos que dois vetores tangentes quaisquer —  $e_\alpha$  e  $e_\beta$  por exemplo — comutam, ou seja:

$$\begin{cases} [e_\alpha, e_\beta] \equiv c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \\ c_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Neste caso, a base  $e_\alpha$  é dita **coordenada** [25], [27] (ou “*holónoma*”), e uma consequência imediata é que as conexões escritas em termos dos vetores  $e_\alpha$  são totalmente simétricas nos índices inferiores:  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ . Isto simplifica em muito os resultados subseqüentes.

A partir da escolha da base de vetores tangentes podemos escrever outras quantidades relevantes. Um deslocamento infinitesimal é dado por:

$$d\vec{s} = e_\alpha dx^\alpha$$

donde vem imediatamente que:

$$ds^2 = e_\alpha e_\beta dx^\alpha dx^\beta \implies g_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta \quad (3.3)$$

Do mesmo modo, um vetor  $\vec{u}$  arbitrário será escrito, em termos dos vetores  $e_\alpha$ , como:

$$\vec{u} = e_\alpha u^\alpha \quad (3.4)$$

onde  $u^\alpha$  é uma 1-forma, para a qual vale a relação

$$\langle u^\alpha, e_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha \quad (3.5)$$

A equação (3.5) tem uma interpretação geométrica simples [27]:  $e_\beta$  atravessa precisamente uma superfície de  $u^\alpha$ , enquanto os outros três vetores  $e_\gamma$  ( $\gamma \neq \beta$ ) estão paralelos à superfície de  $u^\alpha$ .

Um tensor  $T$ , escrito como:

$$T = T_\beta^\alpha e_\alpha \otimes \omega^\beta \quad (3.6)$$

(onde o símbolo  $\otimes$  denota produto tensorial) e onde  $\omega^\beta$  é a base dual de 1-formas, para a qual vale

$$\langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha \quad (3.7)$$

tem sua derivada covariante dada por:

$$\nabla_{e_\alpha} T \equiv \nabla_\gamma T = (T_{\beta;\gamma}^\alpha) e^\beta \otimes \omega_\alpha \quad (3.8)$$

Os coeficientes de conexão são definidos por [22], [25]:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \langle \omega^\alpha, \nabla_\gamma e_\beta \rangle = e^\alpha \cdot \frac{\partial e_\beta}{\partial x^\gamma} \quad (3.9)$$

ou seja, como a componente  $\alpha$  da mudança no vetor  $e_\beta$ , relativa ao transporte paralelo ao longo de  $e_\gamma$ .

Verifica-se, de (3.9), que estes coeficientes de conexão não são, em geral, simétricos em seus índices inferiores; eles apresentam uma parte simétrica e uma parte antissimétrica não nulas e dadas por [25]:

$$\begin{cases} 2\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} \\ 2\Gamma_{\rho[\mu\nu]} = c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} \end{cases}$$

com  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\epsilon} \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon$ . Constata-se facilmente daí que, ao escolhermos uma base coordenada de vetores tangentes (na qual os coeficientes  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  se anulam) obtemos coeficientes de conexão cuja parte antissimétrica é nula. Portanto, os  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  são, de fato, simétricos nos índices inferiores, conforme havíamos afirmado anteriormente.



As quantidades acima podem ser ditas “intrínsecas”, no sentido em que elas não dependem da natureza da hipersuperfície  $\Sigma$  de separação entre as regiões  $I$  e  $II$  que se deseja unir analiticamente. Elas são, por exemplo, invariantes sob mudanças no espaço-tempo que preservem a métrica intrínseca de  $\Sigma$ . Entretanto, propriedades de caráter extrínseco — relacionadas ao modo específico pelo qual  $\Sigma$  está embebida no espaço-tempo também devem ser consideradas. Isto será feito a seguir.

### 3.2 Hipersuperfície $\Sigma$ e Quantidades Relevantes

Nos cálculos que se seguem será necessário considerarmos a hipersuperfície  $\Sigma$  que separa duas regiões distintas do espaço-tempo a quatro dimensões. Chamando  $u^{(i)}$  as coordenadas intrínsecas de  $\Sigma$  e  $x^\alpha$  as coordenadas do espaço-tempo, a equação geral que descreve  $\Sigma$  é da forma:

$$x^\alpha = x^\alpha(u^{(i)}) \quad (3.10)$$

Como  $\Sigma$  é uma hipersuperfície imersa em um espaço-tempo a quatro dimensões (designadas pelo índice  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ), ela é descrita por apenas três coordenadas intrínsecas  $u^{(i)}$ . E, aplicando a equação (3.3), podemos escrever a projeção do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  sobre a hipersuperfície  $\Sigma$ :

$$\gamma_{(i)(j)} = e_{(i)} \cdot e_{(j)}$$

Os vetores  $e_{(i)}$  podem ser escritos como uma combinação linear dos quatro vetores tangentes  $e_\alpha$ , usando-se a regra da cadeia:

$$e_{(i)} \equiv \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^{(i)}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv e_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = e_{(i)}^\alpha e_\alpha \quad (3.11)$$

onde definimos a nova quantidade:

$$e_{(i)}^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^{(i)}} \equiv \langle \omega^\alpha, e_{(i)} \rangle \quad (3.12)$$

Neste caso, a métrica intrínseca da hipersuperfície  $\Sigma$  é escrita como:

$$\gamma_{(i)(j)} = e_{(i)}^\alpha e_{(j)}^\beta e_\alpha e_\beta \quad (3.13)$$

ou, aplicando a equação (3.2),

$$\gamma_{(i)(j)} = g_{\alpha\beta} e_{(i)}^\alpha e_{(j)}^\beta \quad (3.14)$$

Como foi dito anteriormente, propriedades de caráter extrínseco estão associadas ao modo pelo qual  $\Sigma$  está “curvada” no espaço-tempo. Isto é dado [22] pela variação do vetor unitário normal a  $\Sigma$ , o qual denotaremos por  $\vec{n}$ . Temos que [24], [25], [26]:

$$n_\alpha = f_{,\alpha} (|g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}|)^{-1/2}, \text{ sobre } \Sigma \quad (3.15)$$

onde:  $f(x^\alpha) = 0$  é a equação que define a hipersuperfície e  $|\vec{w}|$  denota a norma do vetor  $\vec{w}$ .

Temos ainda que [25]:

$$\varepsilon \equiv |\vec{n}| = \begin{cases} +1 & (\text{se } \vec{n} \text{ é tipo tempo}) \\ -1 & (\text{se } \vec{n} \text{ é tipo espaço}) \end{cases} \quad (3.16)$$

onde temos:

$$\begin{cases} \vec{n} = n^\alpha e_\alpha \\ \vec{n} \cdot e_{(m)} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

(as setas indicativas de vetores serão omitidas daqui em diante, para uma maior simplicidade de notação). Constata-se daí que este tratamento exclui o caso em que a hipersuperfície  $\Sigma$  é nula, já que, se isto ocorre, o conceito de uma “curvatura extrínseca” de  $\Sigma$  deixa de fazer sentido [22], [25].

Nos casos em que  $\Sigma$  não é nula, o tensor de curvatura extrínseca, denotado por  $K_{(i)(j)}$ , nos diz exatamente como o vetor normal  $\vec{n}$  muda sob o transporte paralelo ao longo de um dos três vetores  $e_{(i)}$ . Desde que a projeção de um vetor qualquer sobre  $\Sigma$  é a sua derivada covariante [22], a definição da curvatura extrínseca se torna imediata [24], [25], [26]:

$$K_{(i)(j)} \equiv n_{\beta;\gamma} e_{(i)}^\gamma e_{(j)}^\beta = (n_{\beta,\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda n_\lambda) e_{(i)}^\gamma e_{(j)}^\beta \quad (3.18)$$

onde  $n_\beta$  é dado pela equação (3.15) acima. No que diz respeito à simetria deste tensor, prova-se que [22], [25]:

$$K_{(i)(j)} = K_{(j)(i)} \quad (3.19)$$

Estas duas quantidades — a projeção do tensor métrico sobre  $\Sigma$  e a curvatura extrínseca de  $\Sigma$  — são relevantes para que as condições de junção de métricas possam ser enunciadas, como veremos mais adiante.

### 3.3 Equações de Gauss-Codazzi

De posse dos resultados das seções anteriores, vamos agora deduzir um conjunto de equações — as de Gauss e Codazzi — que nos levarão a obter uma relação entre o tensor de Eistein  $G_{\alpha\beta}$  e o tensor de curvatura extrínseca obtido na seção (3.2). Esta relação terá um importante papel quando discutirmos a questão da continuidade sobre  $\Sigma$  e as condições que a garantem. A dedução que se segue é baseada especificamente na referência [25], mas [21], [22] e [26] também tratam deste assunto.

O ponto de partida é a definição das componentes do tensor de Riemann; em uma base coordenada — descrita por (3.2) — elas são dadas por:

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \langle \omega^{\alpha}, R(e_{\gamma}, e_{\rho})e_{\beta} \rangle \quad (3.20)$$

onde a quantidade  $R(e_{\gamma}, e_{\rho})$  é definida como

$$\begin{aligned} R(e_{\gamma}, e_{\rho}) &\equiv [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\rho}] - \nabla_{[e_{\gamma}, e_{\rho}]} \\ &= [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\rho}] \end{aligned} \quad (3.21)$$

em uma base coordenada. Os operadores  $\nabla_{\alpha}$  são tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\alpha} e_{\beta} \equiv \nabla_{e_{\alpha}} e_{\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} e_{\rho} \\ \nabla_{(i)} e_{(j)} = \Gamma_{(i)(j)}^{(l)} e_{(l)} - \varepsilon K_{(i)(j)n} \\ \nabla_{(i)} n = K_{(i)}^{(j)} e_{(j)} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

onde a derivada  $\nabla$  é tomada nas quatro dimensões do espaço-tempo e  $\varepsilon$  é dado pela equação (3.17). Daí podemos calcular a quantidade:

$$\begin{aligned}
R(e_{(j)}, e_{(k)})e_{(i)} &= [\nabla_{(j)}, \nabla_{(k)}]e_{(i)} \\
&= \nabla_{(j)} (\nabla_{(k)} e_{(i)}) - \nabla_{(k)} (\nabla_{(j)} e_{(i)}) \\
&= \nabla_{(j)} (\Gamma_{(k)(i)}^{(l)} e_{(l)} - \varepsilon K_{(k)(i)} n) \\
&\quad - \nabla_{(k)} (\Gamma_{(j)(i)}^{(l)} e_{(l)} - \varepsilon K_{(j)(i)} n) \\
&= \Gamma_{(k)(i),(j)}^{(l)} e_{(l)} + \Gamma_{(k)(i)}^{(l)} (\Gamma_{(j)(l)}^{(m)} e_{(m)} - \varepsilon K_{(j)(l)} n) \\
&\quad - \varepsilon [(\nabla_{(j)} K_{(k)(i)}) n + K_{(k)(i)} (\nabla_{(j)} n)] \\
&\quad - \varepsilon [(\nabla_{(k)} K_{(j)(i)}) n - K_{(j)(i)} (\nabla_{(k)} n)] \\
&\quad - \Gamma_{(j)(i),(k)}^{(l)} e_{(l)} - \Gamma^{(l)(j)(i)} (\Gamma_{(k)(l)}^{(m)} e_{(m)} - \varepsilon K_{(k)(l)} n) \\
&= e_{(m)} [\Gamma_{(k)(i),(j)}^{(m)} - \Gamma_{(j)(i),(k)}^{(m)} + \Gamma_{(k)(i)}^{(l)} \Gamma_{(j)(l)}^{(m)} - \Gamma_{(j)(i)}^{(l)} \Gamma_{(k)(l)}^{(m)}] \\
&\quad - \varepsilon n [\Gamma_{(k)(i)}^{(l)} K_{(j)(l)} - \Gamma_{(j)(i)}^{(l)} K_{(k)(l)} + K_{(k)(i),(j)} - K_{(j)(i),(k)}] \\
&\quad - \varepsilon [K_{(k)(i)} K_{(j)}^{(m)} e_{(m)} - K_{(j)(i)} K_{(k)}^{(m)} e_{(m)}] \\
&= R_{(i)(j)(k)}^{(m)} e_{(m)} - \varepsilon e_{(m)} (K_{(k)(i)} K_{(j)}^{(m)} - K_{(j)(i)} K_{(k)}^{(m)}) \\
&\quad + \varepsilon n [K_{(j)(i),(k)} - \Gamma_{(k)(i)}^{(l)} K_{(j)(l)} - K_{(k)(i),(j)} + \Gamma_{(j)(i)}^{(l)} K_{(k)(l)}] \\
&= e_{(m)} [R_{(i)(j)(k)}^{(m)} + \varepsilon (K_{(j)(i)} K_{(k)}^{(m)} - K_{(k)(i)} K_{(j)}^{(m)})] \\
&\quad + \varepsilon n [K_{(j)(i),(k)} - \Gamma_{(j)(k)}^{(l)} K_{(l)(i)} - \Gamma_{(k)(i)}^{(l)} K_{(j)(l)} - K_{(k)(i),(j)}] \\
&\quad + \varepsilon n [\Gamma_{(j)(i)}^{(l)} K_{(k)(l)} + \Gamma_{(j)(k)}^{(l)} K_{(l)(i)}] \\
&= [R_{(i)(j)(k)}^{(m)} + \varepsilon (K_{(j)(i)} K_{(k)}^{(m)} - K_{(k)(i)} K_{(j)}^{(m)})] e_{(m)}
\end{aligned}$$

$$+ \varepsilon n \left[ K_{(j)(i);(k)} - K_{(k)(i);(j)} \right] \quad (3.23)$$

Prova-se facilmente [25] que:

$$R(e_{(j)}, e_{(k)})e_{(i)} = R(e_{\beta}, e_{\gamma})e_{\sigma}e_{(i)}^{\sigma}e_{(k)}^{\gamma}e_{(j)}^{\beta} \quad (3.24)$$

Então, substituindo (3.23) e (3.24) na equação (3.20), encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} e_{(i)}^{\sigma}e_{(k)}^{\gamma}e_{(j)}^{\beta}R_{\beta\gamma\sigma}^{\alpha} &= e_{(i)}^{\sigma}e_{(k)}^{\gamma}e_{(j)}^{\beta} \langle \omega^{\alpha}, R(e_{\gamma}, e_{\beta})e_{\sigma} \rangle \\ &= \langle \omega^{\alpha}, e_{(i)}^{\sigma}e_{(k)}^{\gamma}e_{(j)}^{\beta}R(e_{\gamma}, e_{\beta})e_{\sigma} \rangle \\ &= \langle \omega^{\alpha}, R(e_{(j)}, e_{(k)})e_{(i)} \rangle \\ &= \left[ R_{(i)(j)(k)}^{(m)} + \varepsilon \left( K_{(j)(i)}K_{(k)}^{(m)} - K_{(k)(i)}K_{(j)}^{(m)} \right) \right] e_{(m)} \\ &+ \varepsilon n \left[ K_{(j)(i);(k)} - K_{(k)(i);(j)} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Multiplicando esta equação por  $g_{\alpha\beta}$  e por  $e_{(l)}^{\rho}$ , respectivamente, e considerando que  $ne_{(i)} = 0$  (da equação (3.17)), obtemos finalmente:

$$R_{\rho\sigma\beta\gamma}e_{(l)}^{\rho}e_{(i)}^{\sigma}e_{(j)}^{\beta}e_{(k)}^{\gamma} = R_{(l)(i)(j)(k)} + \varepsilon \left( K_{(j)(i)}K_{(k)(l)} - K_{(k)(i)}K_{(j)(l)} \right) \quad (3.26)$$

que é chamada a *equação de Gauss*.

A equação de Codazzi é obtida diretamente da equação (3.25), multiplicando-a por  $n_{\alpha}$ :

$$R_{\alpha\sigma\beta\gamma}n^{\alpha}e_{(i)}^{\sigma}e_{(j)}^{\beta}e_{(k)}^{\gamma} = K_{(j)(i);(k)} - K_{(k)(i);(j)} \quad (3.27)$$

Outro resultado importante é obtido ao contrair-se a equação de Gauss (3.26) com  $\gamma^{(l)(j)}$  e  $\gamma^{(i)(k)}$ , fazendo uso da equação (3.13) e da equação que define o tensor de projeção,  $h_{\alpha\beta}$ :

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \varepsilon n_\alpha n_\beta = e_\alpha^{(i)} e_{\beta(i)} \quad (3.28)$$

Isto nos dá:

$$R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^{\rho\beta} h^{\sigma\gamma} = R^{(3)} + \varepsilon \left( K_{(i)(j)} K^{(i)(j)} - K^2 \right) \quad (3.29)$$

onde o índice superior (3) denota o tensor de Ricci projetado sobre a hipersuperfície  $\Sigma$  a três dimensões e  $K$  é o escalar construído a partir da curvatura extrínseca  $K_{(i)(j)}$ :

$$K^2 \equiv K_{(i)}^{(j)} K_{(j)}^{(i)}, \text{ onde } K_{(i)}^{(j)} = \gamma^{(i)(l)} K_{(i)(l)}$$

Podemos escrever a equação (3.29) — que resulta das equações de Gauss-Codazzi — em termos do tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$ , dado por:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \quad (3.30)$$

Isto é feito usando-se as equações (3.28) e (3.29), bem como as propriedades de simetria do tensor  $R_{\rho\sigma\beta\gamma}$ , para escrever:

$$R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^{\rho\beta} h^{\sigma\gamma} = h^{\rho\beta} (R_{\rho\beta} - \varepsilon R_{\rho\sigma\beta\gamma} n^\sigma n^\gamma)$$

$$\begin{aligned}
&= R - 2\varepsilon R_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma \\
&= R - 2\varepsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma - \varepsilon g_{\sigma\gamma} R n^\sigma n^\gamma \\
&= R - 2\varepsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma - \varepsilon R n^\sigma n_\sigma \\
&= R - 2\varepsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma - \varepsilon^2 R \\
&= -2\varepsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo-se o resultado (3.31) na equação (3.29) obtém-se finalmente que:

$$-2\varepsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma = R^{(3)} + \varepsilon \left( K_{(i)(j)}^{(i)} K^{(i)(j)} - K^2 \right) \tag{3.32}$$

Este mesmo procedimento pode ser repetido para a equação de Codazzi, (3.27), dando o seguinte resultado:

$$G_{\alpha\beta} n^\alpha e_{(m)}^\beta = K_{(m);(i)}^{(i)} - K_{,(m)} \tag{3.33}$$

Todas as equações obtidas até agora podem ser escritas de uma maneira mais simples, caso se escolha um sistema de coordenadas no qual a equação da hipersuperfície  $\Sigma$  se escreva como:

$$x^{\bar{\alpha}} = \text{constante} \tag{3.34}$$

onde  $\bar{\alpha}$  denota uma das quatro coordenadas  $x^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) que descrevem o espaço-tempo. Se a equação acima vale, temos que (de (3.12)):

$$e_{(i)}^\alpha = \delta_{(i)}^\alpha \tag{3.35}$$



onde os índices latinos denotam, agora, as três outras coordenadas (que não  $x^{\bar{\alpha}}$ ).

Aplicando-se (3.35) aos resultados já obtidos, obtém-se respectivamente de (3.14) e (3.15):

$$\gamma_{(i)(j)} = g_{(i)(j)} \quad (3.36)$$

$$n_{\bar{\alpha}} = f_{,\bar{\alpha}} \left( |g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} f_{,\bar{\alpha}} f_{,\bar{\alpha}}| \right)^{-1/2} \quad (3.37)$$

donde se verifica que o vetor normal a  $\Sigma$  tem  $n_{\bar{\alpha}}$  como sua única componente não nula.

Além disto, obtemos de (3.18), (3.26), (3.32) e (3.33), respectivamente, os resultados:

$$K_{(i)(j)} = n_{(j);(i)} \quad (3.38)$$

$$R_{(i)(j)(k)(l)} = R_{(i)(j)(k)(l)}^{(3)} + \varepsilon \left( K_{(i)(j)} K_{(k)(l)} - K_{(j)(l)} K_{(i)(k)} \right) \quad (3.39)$$

$$R_{\bar{\alpha}(i)(j)(k)} = K_{(i)(j);(k)} - K_{(i)(k);(j)} \quad (3.40)$$

$$-2\varepsilon G_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}} = R^{(3)} + \varepsilon \left( K_{(i)(j)} K^{(i)(j)} - K^2 \right) \quad (3.41)$$

$$G_{\bar{\alpha}(i)} n^{\bar{\alpha}} = K_{(i)(j)}^{(j)} - K_{,(i)} \quad (3.42)$$

Obtidos todos estes resultados, podemos então passar à discussão dos três principais conjuntos de condições para junção de métricas, quais sejam: de Darmois [19], Licherowicz [20] e de O'Brien e Synge [21], respectivamente. Isto e mais uma análise de sua equivalência e aplicabilidade será vista a seguir.



### 3.4 Condições de Junção

Nesta seção examinaremos os três conjuntos de condições para junção de métricas que são usados em Relatividade Geral, e que são devidos a Darmois [19], Lichnerowicz [20] e O'Brien e Synge [21]. No que se segue, estes três conjuntos serão referidos como  $D$ ,  $L$  e  $O$ , respectivamente.

As condições  $D$  e  $L$  são semelhantes [22], [23], tendo sido derivadas a partir de um tratamento matemático baseado nas classes de diferenciabilidade dos coeficientes métricos  $g_{\alpha\beta}$ . O terceiro conjunto de condições,  $O$ , baseia-se em um tratamento semelhante ao do Eletromagnetismo: considera-se uma camada hipotética de fronteira, cuja espessura se faz tender a zero. Prova-se [24], [25] que, embora  $D$  e  $L$  sejam completamente equivalentes,  $O$  é mais restritiva do que estas. Desta forma, uma ligação que satisfaça  $O$  será obrigatoriamente válida para  $D$  e  $L$ ; a recíproca, porém, não é necessariamente verdadeira.

Antes de provarmos a afirmação acima, seguindo as linhas gerais do trabalho de Bonnor e Vickers [24], vamos enunciar os três conjuntos de condições de junção. Para isto, chamaremos  $V$  e  $\bar{V}$  as regiões do espaço-tempo que pretendemos ligar (com  $x^\alpha$  e  $\bar{x}^\alpha$  as suas coordenadas correspondentes) e  $\Sigma$ , como nas seções anteriores, será a hipersuperfície que separa  $V$  e  $\bar{V}$ . Tendo isto em mente, as condições são dadas do modo que se segue:

(a) Condições de Darmois ( $D$ ):

Para que  $V$  e  $\bar{V}$  possam ser ligadas, devem ser contínuas através de  $\Sigma$  as seguintes quantidades:

$$\gamma^{(i)(j)} \text{ e}$$

$$K_{(i)(j)},$$

a projeção de  $g_{\alpha\beta}$  sobre  $\Sigma$  e a curvatura extrínseca de  $\Sigma$ . Elas são dadas por (3.14) e (3.18) e são chamadas, respectivamente, a primeira e a segunda forma fundamental de Darboux.

**(b) Condições de Lichnerowicz ( $L$ ):**

Existe ligação entre  $V$  e  $\bar{V}$  se, para um dado ponto  $P$  sobre a hipersuperfície  $\Sigma$ , houver um sistema de coordenadas — ditas “admissíveis” — tal que seu domínio contenha  $P$  e onde  $g_{\alpha\beta}$  e  $g_{\alpha\beta,\gamma}$  sejam contínuas em  $\Sigma$ .

**(c) Condições de O’Brien-Synge ( $O$ ):**

As regiões  $V$  e  $\bar{V}$  podem ser ligadas através de  $\Sigma$ , se esta for descrita pela equação:

$$x^{\bar{\alpha}} = \bar{x}^{\bar{\alpha}} = \text{constante} \quad (\bar{\alpha} \text{ denota apenas um dos quatro índices } \alpha.)$$

Isto, novamente, só vale para alguns sistemas de coordenadas. E, se as quantidades

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} \\ g_{ij,\bar{\alpha}} \\ T_{\beta}^{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

(onde  $T_{\beta}^{\bar{\alpha}}$  é o tensor momento-energia e  $\alpha, \beta \neq \bar{\alpha}$ ) forem contínuas sobre  $\Sigma$ . Prova-se [28] que a continuidade de  $g_{\alpha\beta}$  e de  $g_{ij,\bar{\alpha}}$  implica na continuidade de  $T_{\beta}^{\bar{\alpha}}$ .

Para provarmos a equivalência das condições  $D$  e  $L$ , vamos considerar a hipersuperfície  $\Sigma$  dada por:

$$x^{\bar{\alpha}} = \bar{x}^{\bar{\alpha}} = \text{constante}$$

Das equações (3.36) e (3.38), aplicadas a um sistema de coordenadas Gaussiano, temos:

$$\begin{cases} \gamma_{(i)(j)} = g_{ij} \\ K_{(i)(j)} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

já que, neste caso, vem:

$$\begin{cases} n_{\bar{\alpha}} = 1 = \bar{n}^{\bar{\alpha}} \\ g_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = \pm 1 = \bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \\ g_{\bar{\alpha}i} = 0 = \bar{g}_{\bar{\alpha}i} \end{cases}$$

Isto nos dá:

$$\begin{aligned} K_{(i)(j)} &= -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{2} g^{\bar{\alpha}\beta} (g_{\beta i,j} + g_{\beta j,i} - g_{ij,\beta}) \\ &= -\frac{1}{2} [g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} (g_{\bar{\alpha}i,j} + g_{\bar{\alpha}j,i} - g_{ij,\bar{\alpha}}) + g^{\bar{\alpha}k} (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})] \\ &= -\frac{1}{2} g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} (-g_{ij,\bar{\alpha}}) \\ &= \pm \frac{1}{2} g_{ij,\bar{\alpha}} \\ &= \pm \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Do mesmo modo, já que as condições de Darboux o exigem, temos que:

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{(i)(j)} = \gamma_{(i)(j)} = g_{ij} = \bar{g}_{ij} \\ \bar{K}_{(i)(j)} = K_{(i)(j)} = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \end{cases}$$

Constata-se daí que tanto  $g_{\alpha\beta}$  quanto  $g_{\beta\gamma,\bar{\alpha}}$  são contínuos sobre  $\Sigma$ , caso  $D$  sejam satisfeitas; portanto, as coordenadas Gaussianas constituem um sistema de coordenadas admissível. Logo,  $L$  são também satisfeitas e conclui-se que, se  $D$  são válidas, as condições

$L$  também o serão. A recíproca é também verdadeira, já que a continuidade do tensor métrico e de suas derivadas implica na continuidade das duas formas fundamentais de Darboux (as quais, como vimos, dependem apenas de  $g_{ij}$  e de  $g_{ij,k}$ ).

Vamos agora comparar as condições  $D$  e  $O$ . Supomos, em primeiro lugar, uma forma específica para a parametrização sobre  $\Sigma$ , tal que valha:

$$\begin{cases} x^{\bar{\alpha}} = \text{constante} \\ \bar{x}^{\bar{\alpha}} = \text{constante} \\ x^i = \bar{x}^i = u^{(i)} \end{cases}$$

Neste caso, vem:

$$\begin{cases} ds^2 = g_{(i)(j)} du^{(i)} du^{(j)} \\ \bar{ds}^2 = \bar{g}_{(i)(j)} du^{(i)} du^{(j)} \end{cases}$$

sobre  $\Sigma$ ; e, de  $D$ , temos:

$$g_{(i)(j)} = \bar{g}_{(i)(j)}, \text{ sobre } \Sigma \quad (3.44)$$

o que nos dá a primeira das condições  $O$ :  $g_{(i)(j)}$  é contínuo em  $\Sigma$ .

O vetor normal unitário a  $\Sigma$ , calculado em  $V$  e  $\bar{V}$ , se escreve como:

$$\begin{cases} n_{\beta} = \delta_{\beta}^{\bar{\alpha}} (\varepsilon g^{\bar{\alpha}\alpha})^{-1/2} \\ \bar{n}_{\beta} = \delta_{\beta}^{\bar{\alpha}} (\varepsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\alpha})^{-1/2} \end{cases}$$

sobre  $\Sigma$ . Substituindo este resultado na equação (3.38) e empregando a segunda condição de Darboux — pela qual  $K_{(i)(j)} = \bar{K}_{(i)(j)}$  — vem:

$$\begin{aligned}
K_{(i)(j)} &= \bar{K}_{(i)(j)} = 0 \\
n_{(j),(i)} - \Gamma_{(i)(j)}^{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} - \bar{n}_{(j),(i)} + \bar{\Gamma}_{(i)(j)}^{\bar{\alpha}} \bar{n}_{\bar{\alpha}} &= 0 \\
\bar{n}_{\bar{\alpha}} \bar{\Gamma}_{(i)(j)}^{\bar{\alpha}} - n_{\bar{\alpha}} \Gamma_{(i)(j)}^{\bar{\alpha}} &= 0 \\
(\varepsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \bar{\Gamma}_{(i)(j)}^{\bar{\alpha}} - (\varepsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \Gamma_{(i)(j)}^{\bar{\alpha}} &= 0 \\
(\varepsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \bar{g}^{\bar{\alpha}\rho} \bar{\Gamma}_{\rho,(i)(j)} - (\varepsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} g^{\bar{\alpha}\rho} \Gamma_{\rho,(i)(j)} &= 0 \\
(\varepsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} [\bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \bar{\Gamma}_{\bar{\alpha},(i)(j)} + \bar{g}^{\bar{\alpha}k} \bar{\Gamma}_{k,(i)(j)}] + (\varepsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} [g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \Gamma_{\bar{\alpha},(i)(j)} - g^{\bar{\alpha}k} \Gamma_{k,(i)(j)}] &= 0 \\
(\varepsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \bar{\Gamma}_{\bar{\alpha},(i)(j)} - (\varepsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \Gamma_{\bar{\alpha},(i)(j)} &= 0
\end{aligned}$$

Mas, da equação (3.44), temos imediatamente que:

$$\bar{\Gamma}_{k,(i)(j)} = \Gamma_{k,(i)(j)} \text{ , sobre } \Sigma.$$

Então, substituindo o resultado acima na expressão anterior, obtemos por fim:

$$K_{(i)(j)} - \bar{K}_{(i)(j)} = \left[ (\varepsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} - (\varepsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \right] \Gamma_{\bar{\alpha},(i)(j)} = 0 \quad (3.45)$$

Se as condições  $O$  forem satisfeitas, as equações (3.44) e (3.45) são válidas e, portanto,  $D$  também são satisfeitas. Entretanto, o fato de que  $D$  são satisfeitas não garante necessariamente que  $O$  o sejam também. Isto ocorre porque (3.45) não implica necessariamente em:

$$g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}$$

a qual é uma das condições  $O$ . Isto prova que  $O$  são mais restritivas do que  $D$  e (já que  $D$  e  $L$  são equivalentes) do que  $L$ . Se  $O$  são válidas,  $D$  e  $L$  também o são; a recíproca, contudo, não é verdadeira (conforme afirmado anteriormente).

A demonstração acima foi efetuada supondo-se que não há transformações de coordenadas entre as métricas  $ds^2$  e  $\overline{ds}^2$ . Se, porém, estas transformações são permitidas [23], [29], as condições  $O$  e  $L$  passam a ser equivalentes já que, neste caso, existe um sistema de coordenadas no qual  $O$  e  $L$  se reduzem a um mesmo conjunto de condições.

Para provar esta afirmação, vamos considerar as diferenças básicas entre  $O$  e  $L$ :

1.  $g_{\overline{\alpha}\rho, \overline{\alpha}}$  deve ser contínuo em  $L$  (mas não necessariamente em  $O$ );
2.  $T_{\rho}^{\overline{\alpha}}$  deve ser contínuo em  $O$ .

Em um sistema de coordenadas Gaussianas, por exemplo, temos que os  $g_{\overline{\alpha}\rho, \overline{\alpha}}$  são obrigatoriamente contínuos (visto que os  $g_{\overline{\alpha}\rho}$  são constantes). E, dado que  $g_{\rho\beta}$  e  $g_{\rho\beta, \overline{\alpha}}$  são contínuos, temos que  $T_{\beta}^{\overline{\alpha}}$  também o será [25]. Neste caso, ambos os itens acima são automaticamente válidos e  $O$  e  $L$  reduzem-se às mesmas condições: a continuidade, sobre  $\Sigma$ , de  $g_{\alpha\beta}$  e de  $g_{(i)(k), \overline{\alpha}}$ .

Isto ilustra as principais dificuldades associadas ao emprego das condições  $O$  e  $L$  em um problema de junção de métricas. Nem todo sistema de coordenadas é adequado às condições  $O$  e não é sempre imediato discernir-se a aplicabilidade ou não de  $O$  a um sistema de coordenadas específico. Quanto às condições  $L$  existe uma dificuldade básica, que é a de transformar a métrica para um sistema de coordenadas admissível. Portanto, chega-se à conclusão de que o conjunto de condições de Darboux é o mais conveniente

para a utilização, no âmbito da Relatividade Geral, em problemas que envolvem a junção de métricas.

### 3.5 Uma Aplicação

Aplicaremos as condições de Darmois para junção de métricas ao caso em que tanto a região  $I$  quanto a região  $II$  são descritas por uma métrica estacionária e com simetria cilíndrica, a qual se escreve como:

$$ds^2 = a^2 \left[ dt^2 - dr^2 + 2h(r)dtd\varphi + g(r)d\varphi^2 - dz^2 \right] \quad (3.46)$$

onde  $a$  é uma constante e  $g$  e  $h$  são funções somente de  $r$ . O determinante do tensor métrico é dado por  $-a^8\Delta^2$ , onde  $\Delta(r)$  é uma função definida por:

$$\Delta^2 = h^2 - g \quad (3.47)$$

É mais conveniente trabalhar-se, nos cálculos que se seguem, com as funções  $h(r)$  e  $\Delta(r)$ . Além disso, consideramos que  $\Sigma$  — a hipersuperfície de separação entre as duas regiões — é dada pelo cilindro de raio

$$r \equiv r_\Sigma = \text{constante} \quad (3.48)$$

onde temos então:

$$\begin{cases} x^{\bar{\alpha}} \equiv x^1 \equiv r \\ u^{(i)} = (t, \varphi, z) \end{cases}$$



e onde:  $(i), (j) = 0, 2, 3$ .

Dada  $\Sigma$ , podemos definir a base de vetores tangentes  $\{e_\alpha\}$  como:

$$\{e_\alpha\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

e, de (3.48), temos que a um-forma  $e_{(i)}^\alpha$  se escreve como:

$$e_{(i)}^\alpha = \delta_{(i)}^\alpha \quad (3.49)$$

Isto simplifica os resultados relevantes, como vimos na seção (3.3). Pela equação (3.37) e escrevendo-se (3.48) na forma abaixo,

$$\begin{cases} f = r - r_\Sigma = 0 \\ f_{,1} = 1 \\ f_{,0} = f_{,2} = f_{,3} = 0 \end{cases}$$

temos que o vetor normal a  $\Sigma$  é dado por:

$$\begin{cases} n_0 = n_2 = n_3 = 0 \\ n_1 = (|g^{11} f_{,1} f_{,1}|)^{-1/2} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-1/2} = a \end{cases}$$

donde vem:

$$n_\alpha = (0, a, 0, 0) \quad (3.50)$$

As componentes contravariantes  $n^\alpha$  são facilmente obtidas:

$$n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta$$

de onde vem

$$n^\alpha = \left(0, -\frac{1}{a}, 0, 0\right) \quad (3.51)$$

A primeira forma fundamental de Darboux é dada pela equação (3.36). Suas componentes não nulas são, portanto, as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{(0)(0)} = g_{00} = a^2 \\ \gamma_{(0)(2)} = g_{02} = a^2 h \\ \gamma_{(2)(2)} = g_{22} = a^2 g = a^2 (h^2 - \Delta^2) \\ \gamma_{(3)(3)} = g_{33} = -a^2 \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Usando as equações (3.38) e (3.50) e as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  dadas abaixo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01}^0 = \frac{hh'}{\Delta^2} \\ \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \frac{[h'(h^2 + \Delta^2 - 2h\Delta\Delta')]}{\Delta^2} \\ \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = h' \\ \Gamma_{22}^1 = hh' - \Delta\Delta' \\ \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \frac{h'}{\Delta^2} \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{(hh' + \Delta\Delta')}{\Delta^2} \end{array} \right.$$

obtemos as componentes não nulas da segunda forma fundamental de Darboux — a curvatura extrínseca  $K_{(i)(j)}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{(0)(2)} = -\frac{ah'}{2} \\ K_{(2)(2)} = -\frac{ag'}{2} = -a(hh' - \Delta\Delta') \end{array} \right. \quad (3.53)$$

onde o símbolo (') indica derivada em relação a  $r$ .

Das equações de Gauss-Codazzi e das condições de Darmois — que implicam na continuidade de  $\gamma_{(i)(j)}$  e de  $K_{(i)(j)}$  sobre  $\Sigma$  — verifica-se [25], [26] que a quantidade

$$G_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}n^{\bar{\alpha}}n^{\bar{\alpha}}$$

deve também ser contínua sobre  $\Sigma$  como consequência. Aplicando a equação (3.30) — que define o tensor de Einstein — e substituindo  $R_{11}$  e  $R$  (calculados no Apêndice A), em base de tetradas [26], obtemos:

$$\begin{aligned} G_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}n^{\bar{\alpha}}n^{\bar{\alpha}} &= G_{11}n^1n^1 \\ &= \frac{1}{a^2}G_{11} \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Temos então, aplicando as condições de Darmois, que:

$$\begin{cases} [\gamma_{(i)(j)}]_{\Sigma} = 0 \\ [K_{(i)(j)}]_{\Sigma} = 0 \end{cases} \tag{3.55}$$

juntamente com a consequência

$$[G_{11}n^1n^1]_{\Sigma} = 0 \tag{3.56}$$

(onde definimos  $[A] \equiv A_{\Sigma}^I - A_{\Sigma}^{II}$  como a descontinuidade, sobre  $\Sigma$ , da quantidade  $A$ ) devem ser válidas.

Substituindo-se os resultados (3.52), (3.53) e (3.54) nas condições (3.55) e (3.56), obtém-se imediatamente que as condições de Darmois para o caso de uma métrica cilíndricamente simétrica e estacionária (3.46) se reduzem a:

$$\left\{ \begin{array}{l} [h(r_{\Sigma})] = 0 \\ [\Delta(r_{\Sigma})] = 0 \\ [h'(r_{\Sigma})] = 0 \\ [\Delta'(r_{\Sigma})] = 0 \end{array} \right. \quad (3.57)$$

onde a continuidade de  $g$ ,  $g'$  e  $G_{11}n^1n^1$  sobre  $\Sigma$  está imediatamente assegurada por (3.55) e (3.47).

Verifica-se daí que as métricas associadas às regiões  $I$  e  $II$  podem ser unidas caso as componentes do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  e suas derivadas  $g_{\gamma\beta,\bar{\alpha}}$  sejam contínuas (a componente  $g_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = g_{11}$  é contínua pela própria definição da métrica (3.46) para ambas as regiões). Isto faz com que as condições de Darmois e Lichnerowicz sejam, de fato, equivalentes. Além disto, a continuidade do tensor de Einstein (e, pelas equações de campo de Einstein, do tensor momento-energia  $T_{\alpha\beta}$ ) surge como uma consequência obrigatória da continuidade de  $g_{\alpha\beta}$  e  $g_{\gamma\beta,\bar{\alpha}}$ . Portanto, as condições de O'Brien e Synge são também satisfeitas neste caso.

# Capítulo 4

## Solução Exterior

Como já dissemos na Introdução deste trabalho, é nossa intenção construir um modelo de variedade 4-dimensional que — mesmo tendo por base a solução de Gödel — não apresente CTC's em ponto algum. Com este objetivo, vamos ligar exteriormente a região causal da métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas (equação (2.15)) a uma outra métrica, que também não apresente violação da causalidade, de modo que as condições de contorno de Darmois sejam satisfeitas sobre a hipersuperfície  $\Sigma$  que separa ambas as métricas.

Neste capítulo consideraremos um tipo de métrica passível de ser ligado exteriormente à parte causal da métrica de Gödel. Então, escreveremos as componentes do tensor momento-energia e — com elas e as componentes do tensor de Ricci — as equações de campo de Einstein. Com estas equações integradas e aplicando-se as condições de junção de Darmois, obteremos finalmente uma solução exterior para a região causal de Gödel.

## 4.1 Métrica Exterior e Equações de Campo

Já que estamos trabalhando com a métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas, é conveniente que tentemos ligá-la exteriormente a uma métrica que também apresente o mesmo tipo de simetria. Portanto, como uma simplificação do nosso problema, vamos considerar o caso de uma métrica estacionária e cilíndricamente simétrica, com funções genéricas de  $r$  denotadas por  $h(r)$  e  $g(r)$  e com um fator de escala dado por  $a^2$ :

$$ds^2 = a^2 \left[ dt^2 - dr^2 + 2h(r)dt d\varphi + g(r)d\varphi^2 - dz^2 \right] \quad (4.1)$$

Constata-se de imediato que a métrica de Gödel é um caso especial de (4.1); vimos que esta solução específica era gerada somente pela densidade  $\rho$  e pela constante cosmológica  $\Lambda$ . Mas, para que obtenhamos uma solução mais genérica para as equações de campo — e, portanto, funções  $h(r)$  e  $g(r)$  mais gerais do que as funções de Gödel — vamos escrever o tensor momento-energia em sua forma geral, em uma base de tetradas:

$$T_{AB} = \rho V_A V_B - p h_{AB} + \pi_{AB} + q_{(A} V_{B)} \quad (4.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade;  $p$  é a pressão isotrópica;  $\pi_{AB}$  é uma componente da matriz de pressão anisotrópica (a qual é simétrica,  $\pi_{AB} = \pi_{BA}$ ); e  $q_A$  é uma componente do vetor fluxo de calor. As quantidades  $V_A$  e  $h_{AB}$  são, respectivamente, a velocidade e o projetor escritos em base de tetradas e nossos cálculos serão feitos em um sistema de coordenadas co-movente com o fluido que gera esta solução; temos, então, que:

$$\begin{cases} V_A = \delta_A^0 \\ h_{AB} = \eta_{AB} - \delta_A^0 \delta_B^0 \\ \eta_{AB} = (+1, -1, -1, -1) \end{cases} \quad (4.3)$$

E, aplicando as propriedades abaixo [30],

$$\begin{cases} q_A V^A = 0 \\ \pi_{AB} V^B = 0 \\ \pi_{AB} \eta^{AB} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

obtemos, de imediato, pela substituição de (4.3) nas equações (4.4), que:

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ \pi_{0B} = 0 \quad (B = 0, 1, 2, 3) \\ \pi_{33} = -(\pi_{11} + \pi_{22}) \end{cases} \quad (4.5)$$

De posse dos resultados (4.5) e das equações (4.2) e (4.3), podemos então escrever as componentes do tensor momento-energia como:

$$\begin{cases} T_{00} = \rho \\ T_{0i} = q_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ T_{11} = p + \pi_{11} \\ T_{12} = \pi_{12} \\ T_{13} = \pi_{13} \\ T_{22} = p + \pi_{22} \\ T_{23} = \pi_{23} \\ T_{33} = p - \pi_{11} - \pi_{22} \end{cases} \quad (4.6)$$

e o escalar  $T$  é dado por:

$$T = T_{AB}\eta^{AB} = \rho - 3p \quad (4.7)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci, em base de tetradas, são dadas por (para cálculos mais detalhados, verificar o Apêndice A):

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \\ R_{11} = R_{22} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \right] \\ R_{02} = \frac{1}{2a^2} \left[ -\frac{h''}{\Delta} + \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right] = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)' \end{array} \right. \quad (4.8)$$

onde definimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(r) = \sqrt{h^2 - g} \\ F' \equiv \frac{dF}{dr} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Com as equações (4.6) a (4.8) podemos, finalmente, escrever as equações de campo de Einstein com constante cosmológica, em base de tetradas:

$$R_{AB} = -T_{AB} + \frac{T}{2}\eta_{AB} + \Lambda\eta_{AB}$$

as quais nos dão os seguintes resultados imediatos para as componentes nulas de  $R_{AB}$ :



$$\left\{ \begin{array}{l} R_{01} = -T_{01} = 0 \implies q_1 = 0 \\ R_{03} = -T_{03} = 0 \implies q_3 = 0 \\ R_{12} = -T_{12} = 0 \implies \pi_{12} = \pi_{21} = 0 \\ R_{13} = -T_{13} = 0 \implies \pi_{13} = \pi_{31} = 0 \\ R_{23} = -T_{23} = 0 \implies \pi_{23} = \pi_{32} = 0 \\ R_{33} = -T_{33} - \frac{T}{2} - \Lambda = 0 \implies \rho = p + 2(\pi_{11} + \pi_{22}) - 2\Lambda \end{array} \right. \quad (4.10)$$

e as componentes não nulas se escrevem como:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 = -\frac{1}{2}(\rho + 3p - 2\Lambda) \\ R_{11} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2}(\rho - p + 2\pi_{11} + 2\Lambda) \\ R_{22} = R_{11} = -\frac{1}{2}(\rho - p + 2\pi_{22} + 2\Lambda) \\ R_{02} = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)' = -q_2 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Temos, de  $R_{11} = R_{22}$  e das equações (4.5), que:

$$\pi_{11} = \pi_{22}$$

$$\pi_{33} = -2\pi_{11}$$

donde obtemos a matriz de pressão anisotrópica  $\pi_{AB}$  como:

$$\pi_{AB} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi_{11} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Além disso, constata-se que o vetor fluxo de calor só possui a componente angular ( $q_2$ ) não nula:

$$q_A = (0, 0, q_2, 0) \quad (4.13)$$

e a equação para  $R_{33}$  nos dá a densidade  $\rho$  escrita em termos de  $p$ ,  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$ :

$$\rho = p + 4\pi_{11} - 2\Lambda \quad (4.14)$$

Com isto, as equações de campo de Einstein (4.11) são dadas finalmente por:

$$\begin{cases} \left(\frac{h'}{\Delta}\right)^2 = 4a^2(p + \pi_{11} - \Lambda) \\ \left(\frac{h'}{\Delta}\right)' = 2a^2 q_2 \\ \Delta'' - a^2(2p - \pi_{11} - 2\Lambda)\Delta = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

## 4.2 Resolução das Equações de Campo

Nosso próximo passo é integrar as equações (4.15) para obter as funções  $\Delta(r)$  e  $h(r)$ .

A função  $g(r)$  é obtida diretamente da equação (4.9):

$$g(r) = h^2(r) - \Delta^2(r) \quad (4.16)$$

Para que possamos integrar (4.5) temos que escolher  $q_2$  e  $a^2(2p - \pi_{11} - 2\Lambda)$  da maneira mais simples possível. Neste caso, vamos fazer a escolha específica abaixo:

$$\begin{cases} q_2 \equiv \text{constante} = 0 \\ a^2(2p - \pi_{11} - 2\Lambda) \equiv \lambda^2 \equiv \text{constante positiva e real} \end{cases} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.15) obtemos a seguinte equação diferencial parcial para a função  $\Delta(r)$ :

$$\Delta'' - \lambda^2 \Delta = 0$$

a qual pode ser, agora, facilmente integrada [31] para dar a função  $\Delta$  como uma combinação linear de senos e cossenos hiperbólicos (o que é consequência direta de termos imposto  $\lambda^2/a^2 > 0$ ):

$$\Delta(r) = \alpha_1 \sinh(\lambda r + \beta) + \alpha_2 \cosh(\lambda r + \beta) \quad (4.18)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta$  são constantes de integração (a serem determinadas posteriormente pelas condições de contorno de Darmois).

A escolha (4.17), que implica em uma solução sem fluxo de calor, acarreta — pelas equações (4.15) — que a quantidade  $(p + \pi_{11} - \Lambda)$  é também constante. Neste caso, substituindo a função  $\Delta(r)$  (dada por (4.18)) na equação (4.15) e integrando em  $r$ , obtemos:

$$h(r) = \frac{2a}{\lambda} \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} [\alpha_1 \cosh(\lambda r + \beta) + \alpha_2 \sinh(\lambda r + \beta) + \alpha_3] \quad (4.19)$$

onde  $\alpha_3$  é uma nova constante de integração, a ser também determinada pelas condições de junção de métricas de Darmois, conforme será visto na próxima seção.

### 4.3 Junção de Métricas

A solução para a métrica cilíndricamente simétrica e estacionária, dada pelas equações (4.18) e (4.19) deve ser, agora, unida analiticamente à região causal da solução de Gödel. Vimos, no Capítulo (2), que esta região é definida pelo seguinte intervalo em  $r$ :

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq r_c \\ r_c = \operatorname{arcsinh} 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

Nossa primeira idéia seria a de efetuar a união sobre a hipersuperfície determinada por  $r_c$ , o raio crítico de Gödel; entretanto, conforme será provado mais adiante (Capítulo (5)), esta escolha implica na existência de uma pequena região acausal no modelo. Portanto, vamos definir uma hipersuperfície de separação genérica, cujo raio (denotado daqui em diante por  $r_\Sigma$ ) é dado por:

$$\begin{cases} r_\Sigma = \delta \operatorname{arcsinh} 1 \\ 0 < \delta \leq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

e onde  $\delta$  é um parâmetro constante que define a hipersuperfície sobre a qual se faz a junção das métricas de Gödel (2.15) e a solução genérica obtida na seção anterior. O caso específico  $\delta = 0$  não será considerado no momento, visto implicar na eliminação, da variedade, da solução de Gödel (em outras palavras, a solução genérica ocupa todo o espaço-tempo quando  $\delta = 0$ ; este caso será considerado em maior detalhe posteriormente).

Conforme mencionamos antes, a métrica de Gödel é um caso especial da métrica (3.46). Na verdade, pode-se provar (o que fazemos no Apêndice B) que esta solução é um caso especial da solução genérica dada por (4.18) e (4.19), na qual o parâmetro  $\lambda$  assume o valor específico 2. A solução de Gödel, como sabemos, é dada por:

$$\begin{cases} h_I(r) = \sqrt{2} \sinh^2 r \\ g_I(r) = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) \\ \Delta_I(r) = \sqrt{h_I^2 - g_I} = \sinh r \cosh r \end{cases}$$

O índice inferior  $I$  denota a região interior do espaço-tempo, onde vale:  $0 \leq r \leq r_\Sigma$ ; a solução genérica — a parte exterior, com  $r \geq r_\Sigma$  — será, da mesma maneira, denotada pelo índice inferior  $II$  daqui por diante.

Portanto, os valores que as funções  $h_I(r)$ ,  $\Delta_I(r)$  e suas derivadas primeiras em  $r$  assumem sobre a hipersuperfície  $\Sigma$  de separação são os seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_I(r_\Sigma) = \sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \\ \Delta_I(r_\Sigma) = \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \\ h'_I(r_\Sigma) = 2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \\ \Delta'_I(r_\Sigma) = \cosh^2 r_\Sigma + \sinh^2 r_\Sigma = 2 \sinh^2 r_\Sigma + 1 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

para a região interior (a região causal de Gödel), com  $r_\Sigma$  dado pela equação (4.21).

Podemos, agora, aplicar as condições de junção de Darmois, equações (3.57) aos resultados (4.22) acima, para obter:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{II}(r_\Sigma) - h_I(r_\Sigma) = 0 \implies h_{II}(r_\Sigma) = \sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \\ h'_{II}(r_\Sigma) - h'_I(r_\Sigma) = 0 \implies h'_{II}(r_\Sigma) = 2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \\ \Delta_{II}(r_\Sigma) - \Delta_I(r_\Sigma) = 0 \implies \Delta_{II}(r_\Sigma) = \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \\ \Delta'_{II}(r_\Sigma) - \Delta'_I(r_\Sigma) = 0 \implies \Delta'_{II}(r_\Sigma) = 2 \sinh^2 r_\Sigma + 1 \end{array} \right.$$

onde os termos no lado esquerdo de cada uma das equações acima são dados pelas equações (4.18) e (4.19):

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{II}(r_\Sigma) = \frac{2a}{\lambda} \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} \{ \alpha_1 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_3 \} \\ h'_{II}(r_\Sigma) = 2a \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} \{ \alpha_1 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \cosh \lambda r_\Sigma \} \\ \Delta_{II}(r_\Sigma) = \alpha_1 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) \\ \Delta'_{II}(r_\Sigma) = \lambda \{ \alpha_1 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) \} \end{array} \right.$$

As condições completas de Darboux se escrevem então como:

$$\frac{2a}{\lambda} \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} \{ \alpha_1 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_3 \} = \sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \quad (4.23)$$

$$2a \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} \{ \alpha_1 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) \} = 2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (4.24)$$

$$\{ \alpha_1 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) \} = \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (4.25)$$

$$\lambda \{ \alpha_1 \cosh(\lambda r_\Sigma + \beta) + \alpha_2 \sinh(\lambda r_\Sigma + \beta) \} = 2 \sinh^2 r_\Sigma + 1 \quad (4.26)$$

Um resultado imediato é facilmente obtido ao substituir-se (4.25) em (4.24):

$$2a \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma = 2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma$$

$$a \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} = \sqrt{2}$$

$$p + \pi_{11} - \Lambda = \frac{2}{a^2} \quad (4.27)$$

Por outro lado, podemos escolher a constante  $\beta$  como:

$$\beta = -\lambda r_\Sigma \quad (4.28)$$

o que não altera em nada o resultado, visto que sempre podemos escrever os termos  $\sinh \lambda r + \beta$  e  $\cosh \lambda r + \beta$  como combinações de  $[(c^{te})_1 \sinh \lambda r + (c^{te})_2 \cosh \lambda r]$ . Substituindo (4.27) e (4.28) nas equações (4.23) a (4.26), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\lambda} (\alpha_1 + \alpha_3) = \sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \quad (4.29)$$

$$2\sqrt{2}\alpha_2 = 2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (4.30)$$

$$\alpha_2 = \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (4.31)$$

$$\lambda \alpha_1 = 2 \sinh^2 r_\Sigma + 1 \quad (4.32)$$

As equações (4.30) e (4.31) acima são equivalentes e dão a constante de integração  $\alpha_2$  como:

$$\alpha_2 = \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (4.33)$$

Do mesmo modo, (4.32) fornece a constante  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda} (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \quad (4.34)$$

a qual pode ser substituída na equação (4.29) para fornecer a terceira constante de integração,  $\alpha_3$ :

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{\lambda \sinh^2 r_\Sigma}{2} - \alpha_1 \\ &= \frac{\lambda \sinh^2 r_\Sigma}{2} - \frac{1}{\lambda} (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \{ (\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma - 2 \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Podemos, agora, substituir as constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\beta$  — dadas pelas equações (4.28) e (4.33) a (4.35) — na solução exterior (equações (4.18) e (4.19)) para obter-se finalmente uma solução genérica válida, unida exteriormente à métrica de Gödel:

$$\begin{aligned}
h_{II}(r) &= \frac{2\sqrt{2} (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{\lambda^2} \cosh[\lambda(r - r_\Sigma)] \\
&+ \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \sinh[\lambda(r - r_\Sigma)] \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} \{(\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma - 2\}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\Delta_{II}(r) = \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{\lambda} \sinh[\lambda(r - r_\Sigma)] + (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cosh[\lambda(r - r_\Sigma)] \tag{4.37}$$

É facilmente provado (vide cálculos no Apêndice B) que as condições de junção de Darmois são, de fato, satisfeitas ao substituir-se  $r = r_\Sigma$  nas equações (4.36) e (4.37) e nas suas primeiras derivadas em relação a  $r$ . Além disso, a solução (4.36) e (4.37) recai na solução de Gödel para o caso especial em que  $\lambda = 2$ .

A solução (4.36) e (4.37) pode, ainda, ser escrita de uma maneira mais compacta:

$$\begin{aligned}
h_{II}(r) &= \frac{2\sqrt{2} \cosh(2r_\Sigma)}{\lambda^2} \cosh[\lambda(r - r_\Sigma)] \\
&+ \frac{\sqrt{2} \sinh(2r_\Sigma)}{\lambda} \sinh[\lambda(r - r_\Sigma)] \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} \{(\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma - 2\}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\Delta_{II}(r) = \frac{\cosh(2r_\Sigma)}{\lambda} \sinh[\lambda(r - r_\Sigma)] + \frac{\sinh(2r_\Sigma)}{2} \cosh[\lambda(r - r_\Sigma)] \tag{4.39}$$

a qual pode ser considerada uma “solução tipo Gödel generalizada” (já que recai nesta solução específica quando  $\lambda = 2$ ). Nos capítulos que se seguem estudaremos as condições para que esta solução não apresente CTC’s em nenhum ponto da variedade e as características do seu fluido gerador, bem como as suas quantidades cinemáticas. Deve ser



notado que a solução (4.38) e (4.39) não é, de modo algum, a única possível: soluções com fluxo de calor não nulo, por exemplo, são também consideradas neste trabalho (solução para uma *string* girante).

## Capítulo 5

# Análise do Problema da Causalidade

No capítulo anterior obtivemos uma solução exterior para a métrica de Gödel na forma de uma métrica estacionária e com simetria cilíndrica. Ao obtê-la escolhemos uma forma simples para o fluxo de calor associado ao fluido gerador da métrica em questão:  $q_A = 0, \forall A$ . Tomando a densidade e as pressões isotrópica e anisotrópica como constantes e considerando, ainda, a constante cosmológica como não nula, as equações de campo foram então facilmente integradas. Finalmente, aplicando-se as condições de Darmois para junção de métricas, obtivemos uma solução genérica que apresenta continuidade em relação à solução de Gödel, através da hipersuperfície de separação entre ambas as métricas (definida pela equação  $r = r_\Sigma$ ), equações (4.38) e (4.39). Constatou-se ainda que a solução de Gödel é um caso especial da solução exterior genérica, quando  $\lambda$  assume o valor 2 ( $\lambda$  sendo uma constante escrita em termos de  $a^2$ ,  $p$ ,  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$ ).

Resta-nos, agora, garantir que não ocorram CTC's em ponto algum do espaço-tempo.

Para tanto, as desigualdades abaixo:

$$\begin{cases} g_{II}(r) < 0 \text{ para } 0 \leq r \leq r_\Sigma \\ g_{II}(r) < 0 \text{ para } r \geq r_\Sigma \end{cases} \quad (5.1)$$

devem ser, ambas, válidas. Neste capítulo, portanto, analisaremos as condições sob as quais isto acontece; elas envolvem necessariamente uma escolha dos parâmetros  $r_\Sigma$  (o raio onde se faz a junção das duas métricas que compõem este modelo) e  $\lambda$  (que, como vimos acima, está associado às quantidades características do fluido que gera a solução exterior e à constante  $a$  que foi considerada no Capítulo (2). Determinaremos os valores aceitáveis de  $r_\Sigma$  e  $\lambda$  para que ambas as regiões de nosso modelo sejam causais. Antes disso, porém, estudaremos em maior detalhe a solução genérica (4.38) e (4.39) em si, considerando o caso em que ela cobre totalmente o espaço-tempo — ou seja, o caso no qual  $r_\Sigma = 0$  e a solução de Gödel não está presente — conforme a seção abaixo.

## 5.1 A Causalidade para a Solução Genérica

Para estudar o caso em que a solução genérica obtida é válida para qualquer valor de  $r$ , devemos escolher

$$r_\Sigma = 0 \quad (5.2)$$

e, substituindo (5.2) na solução genérica dada por (4.38) e (4.39), obtemos:

$$\begin{cases} \Delta(r) = \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda r \\ h(r) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda^2} (\cosh \lambda r - 1) \end{cases} \quad (5.3)$$

com  $\lambda$  dado pela equação (4.17). Neste caso, a função  $g(r)$  é escrita como:

$$\begin{aligned}
g(r) &= h^2(r) - \Delta^2(r) \\
&= \frac{1}{\lambda^4} \left[ -(\lambda^2 - 8) \cosh^2 \lambda r - 16 \cosh \lambda r + (\lambda^2 + 8) \right]
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por uma questão de simplicidade vamos introduzir a notação abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \equiv mx^2 + nx + s \\ x \equiv \cosh \lambda r \\ m \equiv -(\lambda^2 - 8) \\ n \equiv -16 \\ s \equiv (\lambda^2 + 8) \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Neste caso, a função  $g(r)$  passa a ser escrita em termos da nova variável  $x$ :

$$g(x) = \frac{1}{\lambda^4} f(x) \tag{5.6}$$

e a condição de existência ou não de CTC's para a solução genérica passa a ser determinada pelo sinal assumido por  $f(x)$ :

$$\begin{aligned}
f(x) < 0 &\implies \text{não há CTC's (a causalidade não é violada)} \\
f(x) = 0 &\implies \text{função nula} \\
f(x) > 0 &\implies \text{a causalidade é violada}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

As condições em que cada sinal é assumido devem, portanto, ser estudadas. Temos, para  $\lambda$  positivo e tomando a equação (5.5), que:

$$\begin{cases} m < 0 \text{ para } \lambda > 2\sqrt{2} \\ m = 0 \text{ para } \lambda = 2\sqrt{2} \\ m > 0 \text{ para } \lambda < 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (5.8)$$

onde temos  $n < 0$  e  $s > 0$ . Além disto, um cálculo simples nos fornece os dois zeros de  $f(x)$ , se  $m \neq 0$ , como:

$$\begin{cases} x_1 = -\left(\frac{\lambda^2+8}{\lambda^2-8}\right) \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

ou, em termos de  $r$ ,

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh}\left(\frac{\lambda^2+8}{\lambda^2-8}\right) \longrightarrow \text{a qual não é definida se } \lambda > 2\sqrt{2} \\ r_2 = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

O sinal de  $f(x)$  fica, desta forma, associado ao sinal de  $m$  — e, por extensão, também ao valor do parâmetro  $\lambda$ . Os resultados abaixo são, portanto, obtidos diretamente das equações (5.5) a (5.10) para cada valor (ou intervalo de valores) de  $\lambda$ .

1º caso:  $\lambda > 2\sqrt{2} \implies m < 0$

A função  $f(x)$  tem concavidade voltada para baixo e o seu sinal é dado então por:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ para: } x < x_1 \text{ e } x > x_2 \\ f(x) = 0 \text{ para: } x = x_1 \text{ e } x = x_2 \\ f(x) > 0 \text{ para: } x_1 < x < x_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Tendo em mente que  $x = \cosh \lambda r$  e utilizando (5.10), os resultados acima equivalem a:

$$\begin{cases} f(r) < 0 \implies r > r_2 \implies r > 0 \\ f(r) = 0 \implies r = r_2 = 0 \\ f(r) > 0 \implies r < r_2 \implies r < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

para as regiões causal, nula e acausal, respectivamente. Já que  $r$  assume necessariamente valores positivos, conclui-se daí que a solução genérica dada por (5.3) será causal para qualquer valor de  $r$  quando ocorrer  $\lambda > 2\sqrt{2}$ .

$$2^\circ \text{ caso: } \lambda = 2\sqrt{2} \implies m = 0$$

Neste caso, a função  $f(r)$  é dada por:

$$f(r) = -16 \cosh(2\sqrt{2}r) + 16 = 16 [1 - \cosh(2\sqrt{2}r)] \quad (5.13)$$

a qual possui apenas um zero, que denotaremos por  $r_0$  e que é dado por:

$$r_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arccosh} 1 = 0 \quad (5.14)$$

Logo, o sinal de  $f(r)$  quando  $\lambda = 2\sqrt{2}$  é:

$$\begin{cases} f(r) < 0 \text{ para } r > r_0 \\ f(r) = 0 \text{ para } r = r_0 \\ f(r) > 0 \text{ para } r < r_0 \end{cases} \quad (5.15)$$

e a causalidade é novamente garantida para todo o espaço-tempo se  $\lambda = 2\sqrt{2}$ .

$$3^\circ \text{ caso: } \lambda < 2\sqrt{2} \implies m > 0$$

Neste caso, a função  $f(x)$  tem concavidade voltada para cima e, utilizando-se a equação (5.10), obtêm-se os seguintes resultados:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ para } x_2 < x < x_1 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = x_1 \text{ e } x = x_2 \\ f(x) > 0 \text{ para } x < x_2 \text{ e } x > x_1 \end{cases} \quad (5.16)$$

Mudando-se para a variável  $r$ , isto equivale a escrever-se:

$$\begin{cases} f(r) < 0 \text{ para } 0 < r < \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{8+\lambda^2}{8-\lambda^2} \right) \\ f(r) = 0 \text{ para } r = 0 \text{ e } r = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{8+\lambda^2}{8-\lambda^2} \right) \\ f(r) > 0 \text{ para } r < 0 \text{ e } r > \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{8+\lambda^2}{8-\lambda^2} \right) \end{cases} \quad (5.17)$$

o que nos dá uma região acausal para valores de  $r$  maiores do que um “raio crítico”, escrito em termos de  $\lambda$ . No caso especial em que  $\lambda = 2$  (a solução de Gödel, como já vimos) reobtemos:

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{1}{2} \operatorname{arccosh} 3 \\ &= \operatorname{arcsinh} 1 \simeq 0.881 \end{aligned} \quad (5.18)$$

o raio crítico que havíamos calculado no Capítulo (2) deste trabalho, equação (2.12).

Os três casos analisados acima podem ser resumidos na tabela 5.1 abaixo.

Temos, em resumo, que as soluções com  $\lambda \geq 2\sqrt{2}$  são causais para todo  $r$ , enquanto aquelas com  $\lambda < 2\sqrt{2}$  apresentam uma região causal “confinada” entre a origem e um dado “raio crítico” — que também depende de  $\lambda$  — além do qual ocorrem CTC’s.

## 5.2 Causalidade para o Modelo Gödel-Solução Genérica

Nesta seção analisaremos a causalidade do modelo composto pela junção das métricas de Gödel (região I, intervalo  $0 \leq r \leq r_\Sigma$ ) e da solução genérica (região II, intervalo  $r \geq r_\Sigma$ ). Para que não ocorra violação da causalidade em nenhum valor de  $r$ , temos de impor que as funções  $g(r)$  sejam negativas para os valores de  $r$  correspondentes às regiões I e II, conforme vimos na introdução a este capítulo. Isto nos dá, então, duas condições:

(i)  $g_I(r) < 0$ : Isto implica em que

$$0 < r_\Sigma \leq r_c \quad (5.19)$$

e, portanto, esta desigualdade pode ser escrita como:

$$0 < \delta \leq 1 \quad (5.20)$$

se definirmos

$$r_\Sigma \equiv (\operatorname{arcsinh} 1) \delta = r_c \delta \quad (5.21)$$

onde a constante  $\delta$  especifica em que ponto da região causal de Gödel se está fazendo a junção das duas métricas.

(ii)  $g_{II}(r) < 0$ : Isto leva a

$$\Delta_{II}^2(r) > 0 \implies (\Delta_{II} + h_{II})(\Delta_{II} - h_{II}) > 0 \quad (5.22)$$



Considerando a solução (4.38) e (4.39) e lembrando que:

$$\begin{cases} \sinh x > 0 \\ \cosh x > 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

para qualquer valor positivo de  $x$  — donde vem necessariamente que  $(\Delta_{II} + h_{II}) > 0$

— a condição acima se reduz a:

$$\Delta_{II}(r) - h_{II}(r) > 0, \text{ para } r \geq r_{\Sigma} \quad (5.24)$$

A condição (5.24) deve, agora, ser investigada. Substituindo a solução (4.38) e (4.39) em (5.24), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} [2 - (\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_{\Sigma}] &+ \frac{1}{\lambda} [\cosh(2r_{\Sigma}) - \sqrt{2} \sinh(2r_{\Sigma})] \sinh[\lambda(r - r_{\Sigma})] \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{2} \sinh(2r_{\Sigma}) - 2\sqrt{2} \cosh(2r_{\Sigma}) \right] \cosh[\lambda(r - r_{\Sigma})] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Por uma questão de simplicidade vamos mudar a notação, redenominando as constantes acima:

$$\begin{cases} \psi \equiv \lambda(r - r_{\Sigma}) \\ A \equiv \frac{1}{\lambda} [\sqrt{2} \sinh(2r_{\Sigma}) - \cosh(2r_{\Sigma})] \\ B \equiv \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda^2}{2} \sinh(2r_{\Sigma}) - 2\sqrt{2} \cosh(2r_{\Sigma}) \right] \\ C \equiv \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} [2 - (\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_{\Sigma}] \end{cases} \quad (5.26)$$

de modo que a condição (5.24) possa ser escrita como:

$$B \cosh \psi + C > A \sinh \psi \quad (5.27)$$

O passo seguinte é escrever a desigualdade acima em termos de  $\cosh \psi$ ; para isto é necessário elevá-la ao quadrado — o que só pode ser feito se ambos os lados de (5.27) forem positivos ou zero (caso contrário, o sentido da desigualdade deveria ser invertido). Para assegurar que isto realmente aconteça, devemos antes estudar os possíveis sinais dos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Consideraremos, em primeiro lugar, os valores do parâmetro  $\delta$  compreendidos entre:

$$0 < \delta < 1 \quad (5.28)$$

O valor-limite  $\delta = 1$  (que equivale a  $r = r_c$ , o “cilindro crítico” de Gödel) será analisado na próxima seção deste capítulo.

Dadas as equações (5.20) e (5.28), obtém-se de imediato que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \sinh r_\Sigma < 1 \\ 1 < \cosh r_\Sigma < \sqrt{2} \\ 0 < \sinh(2r_\Sigma) < 2\sqrt{2} \\ 1 < \cosh(2r_\Sigma) < 3 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

e, usando as equações (5.26), podem-se escrever as condições sobre  $\lambda$  e  $r_\Sigma$  para cada possível sinal dos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

(a) Coeficiente  $A$ :

$$A = 0 \implies \sqrt{2} \sinh(2r_\Sigma) = \cosh(2r_\Sigma) \quad (5.30)$$

$$4 \sinh^4 r_\Sigma + 4 \sinh^2 r_\Sigma - 1 = 0$$

esta equação de segundo grau para  $(\sinh^2 r_\Sigma)$  tem como raízes:

$$\begin{cases} \sinh_1^2 r_\Sigma = -\frac{(\sqrt{2}+1)}{2} \\ \sinh_2^2 r_\Sigma = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \end{cases} \quad (5.31)$$

onde a primeira delas, negativa, deve ser descartada; isto nos dá, então, que:

$$\begin{cases} A < 0 \implies 0 < \sinh r_\Sigma < \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} \\ A = 0 \implies \sinh r_\Sigma = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} \\ A > 0 \implies \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} < \sinh r_\Sigma < 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

**(b) Coeficiente B:** Dado por

$$B = 0 \implies \frac{\lambda^2}{2} \sinh(2r_\Sigma) = 2\sqrt{2} \cosh(2r_\Sigma) \quad (5.33)$$

$$(\lambda^4 - 32) \sinh^4 r_\Sigma + (\lambda^4 - 32) \sinh^2 r_\Sigma - 8 = 0$$

resolvendo-se esta equação de segundo grau para  $(\sinh^2 r_\Sigma)$  obtêm-se novamente duas raízes, uma das quais é descartada por ser negativa; resta então:

$$B = 0 \implies \sinh^2 r_\Sigma = \frac{-(\lambda^4 - 32) + \lambda^2 \sqrt{\lambda^4 - 32}}{2(\lambda^4 - 32)} \quad (5.34)$$

onde, para que o valor desta raiz seja real, deve ocorrer obrigatoriamente:

$$\lambda^4 \geq 32 \quad (5.35)$$

donde vem, portanto, que:

$$\begin{cases} B > 0 \implies \sinh^2 r_\Sigma > \frac{-(\lambda^4-32)+\lambda^2\sqrt{\lambda^4-32}}{2(\lambda^4-32)} \\ B < 0 \implies \sinh^2 r_\Sigma < \frac{-(\lambda^4-32)+\lambda^2\sqrt{\lambda^4-32}}{2(\lambda^4-32)} \end{cases} \quad (5.36)$$

(c) **Coefficiente C:** Este coeficiente é dado por:

$$C = 0 \implies (\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma = 2 \implies \sinh r_\Sigma = \sqrt{\frac{2}{(\lambda^2 - 4)}} \quad (5.37)$$

sabendo que  $0 < \sinh^2 r_\Sigma < 1$ , obtém-se uma condição sobre o parâmetro  $\lambda$ :

$$\lambda^4 > 36 \implies \lambda^2 > 6 \quad (5.38)$$

a qual, se satisfeita, equivale à condição (5.35) obtida acima; os possíveis sinais de  $C$  são, portanto,

$$\begin{cases} C < 0 \implies \sinh r_\Sigma > \sqrt{\frac{2}{(\lambda^2-4)}} \\ C = 0 \implies \sinh r_\Sigma = \sqrt{\frac{2}{(\lambda^2-4)}} \\ C > 0 \implies \sinh r_\Sigma < \sqrt{\frac{2}{(\lambda^2-4)}} \end{cases} \quad (5.39)$$

De posse destes resultados, voltamos à condição (5.27); constata-se dela que — para que a desigualdade possa ser elevada ao quadrado — deve ocorrer:

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \cosh \psi + C > 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

e os casos  $A = 0$  e  $A > 0$  são analisados separadamente.

(1) Caso  $A = 0$

Este caso dá os seguintes resultados:

$$\begin{cases} \sinh r_{\Sigma} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} \\ \cosh r_{\Sigma} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})}{2}} \end{cases} \quad (5.41)$$

E os coeficientes  $B$  e  $C$ , neste caso, se escrevem como:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\lambda^2}(\lambda^2 - 8) \\ C &= \frac{\sqrt{2}}{2\lambda^2} [4\sqrt{2} - \lambda^2(\sqrt{2} - 1)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

e a condição  $B \cosh \psi + C > 0$  se reduz a:

$$\cosh \psi > -\frac{C}{B} > \sqrt{2} \frac{[\lambda^2(\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2}]}{(\lambda^2 - 8)} \quad (5.43)$$

E daí vem então que:

$$r > r_{\Sigma} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left\{ \sqrt{2} \frac{[\lambda^2(\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2}]}{(\lambda^2 - 8)} \right\} \quad (5.44)$$

Já que nos interessa que a causalidade seja válida para a região  $r > r_{\Sigma}$ , a equação acima implica necessariamente em:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh} \left\{ \sqrt{2} \frac{[\lambda^2(\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2}]}{(\lambda^2 - 8)} \right\} &= 0 \\ \lambda^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

um valor que não satisfaz a condição (5.39) obtida anteriormente. Conclui-se daí que o coeficiente  $A$  deve ser, obrigatoriamente, não nulo — o que nos leva à segunda possibilidade:

(2) Caso  $A > 0$

Isto leva a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} < \sinh r_{\Sigma} < 1 \\ \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}} < \cosh r_{\Sigma} < \sqrt{2} \\ \lambda^2 > 6 \end{array} \right. \quad (5.46)$$

o que nos dá imediatamente, por (5.34) a (5.39):

$$\left\{ \begin{array}{l} C < 0 \implies \sinh r_{\Sigma} > \sqrt{\frac{2}{(\lambda^2-4)}} \\ B > 0 \implies \lambda^2 > \frac{2\sqrt{2}(2\sinh^2 r_{\Sigma}+1)}{\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}} \end{array} \right. \quad (5.47)$$

Substituindo (5.46) na segunda das equações (5.47), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{2}(2\sinh^2 r_{\Sigma}+1)}{\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}} < 6 \\ \frac{2\sqrt{2}(2\sinh^2 r_{\Sigma}+1)}{\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}} > 8 \end{array} \right. \quad (5.48)$$

donde vem:  $\lambda^2 > 8$ . Além disso, para que a primeira das equações (5.47) faça sentido, deve também valer:

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} < \sqrt{\frac{2}{(\lambda^2-4)}} < 1 \quad (5.49)$$

portanto, vem daí que:

$$6 < \lambda^2 < \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} \quad (5.50)$$

o que confirma o resultado anterior.

Por (5.26), prova-se facilmente que:

$$B + C > 0 \quad (5.51)$$

donde vem, já que  $\cosh \psi \geq 1, \forall \psi$ ,

$$B \cosh \psi + C > 0 \quad (5.52)$$

conforme queríamos. Podemos, portanto, elevar ambos os lados da desigualdade (5.27) ao quadrado, o que nos dá então:

$$(B^2 - A^2) \cosh^2 \psi + 2BC \cosh \psi + (C^2 + A^2) > 0 \quad (5.53)$$

Introduzindo a notação

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv \cosh \psi \equiv \cosh [\lambda(r - r_\Sigma)] \\ m \equiv (B^2 - A^2) \\ n \equiv 2BC \\ s \equiv (C^2 + A^2) \end{array} \right. \quad (5.54)$$

a condição para que a causalidade não seja violada se escreve, então, como:

$$f(x) \equiv mx^2 + nx + s > 0 \quad (5.55)$$

onde temos de imediato que:

$$\begin{cases} n < 0 \\ s > 0 \\ m > 0 \text{ se } B > A \\ m < 0 \text{ se } B < A \end{cases} \quad (5.56)$$

De (5.26) temos que  $(B - A)$  é dado por:

$$(B - A) = \frac{(\lambda - 2\sqrt{2})}{\lambda^2} \left[ \lambda \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma + (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \right] \quad (5.57)$$

donde vem:

$$\begin{cases} (B - A) > 0 \text{ se } \lambda^2 > 8 \\ (B - A) < 0 \text{ se } \lambda^2 < 8 \end{cases} \quad (5.58)$$

Dada (5.50), verifica-se que  $m$  é, necessariamente, **positivo**.

Para analisar-se o sinal de  $f(x)$  é preciso ainda calcular-se o  $\Delta$  desta função:

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv n^2 - 4ms \\ &= 4A^2 (A^2 - B^2 + C^2) \\ &= -\frac{4A^2}{\lambda^2} \left[ (\lambda^2 - 8) \sinh^2 r_\Sigma \cosh^2 r_\Sigma + 10 \sinh^4 r_\Sigma + 4 \sinh^2 r_\Sigma - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

Temos, então, que:

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad (5.60)$$



donde  $f(x)$  possui duas raízes imaginárias. O ponto extremo de  $f(x)$ , definido como  $(x_M, f_M(x_M))$  e dado pela equação

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ para } x = x_M \quad (5.61)$$

é escrito como:

$$\begin{cases} x_M = -\frac{n}{2m} \\ f_M = -\frac{\Delta}{4m} \end{cases} \quad (5.62)$$

onde tanto  $x_M$  quanto  $f_M$  são positivos. Além disto, já que

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 2m > 0 \quad (5.63)$$

para  $x = x_M$ , constata-se que  $(x_M, f_M)$  é um mínimo de  $f(x)$ . Isto nos possibilita concluir:

$$f(x) > 0 \forall x > 0 \quad (5.64)$$

e, portanto, a condição para que a solução genérica (4.38) e (4.39) não apresente CTC's é:

$$r > r_\Sigma \quad (5.65)$$

como queríamos. As condições sobre  $\lambda$  e  $r_\Sigma$  (ou, equivalentemente,  $\delta$ ) para que (5.64) seja satisfeita e a região *II* não apresente violação de causalidade são, portanto, dadas por:

$$\begin{cases} 8 < \lambda^2 < \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} \\ \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}} < \sinh r_\Sigma < 1 \implies \frac{1}{2} < \delta < 1 \end{cases} \quad (5.66)$$

Os casos-limite —  $\lambda^2 = 8$  e  $\lambda^2 = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}$  respectivamente — são facilmente calculados, repetindo-se o procedimento desta seção. No primeiro caso, verifica-se que (de (5.26)):

$$\begin{cases} A = B = \frac{1}{2} [2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma - (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)] \\ C = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - 2 \sinh^2 r_\Sigma) \end{cases} \quad (5.67)$$

e a condição  $g_{II}(r) < 0$  se escreve:

$$A(\cosh \psi - \sinh \psi) + C > 0 \quad (5.68)$$

a qual só é satisfeita se ocorrer  $\delta = \frac{1}{2}$ . Para  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  temos que a solução exterior só é causal para  $r < r_\Sigma$  (o que não é aceitável); se  $\frac{1}{2} < \delta < 1$ , a condição para que a causalidade não seja violada se escreve:

$$r > r_\Sigma + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arccosh}[\Theta] \quad (5.69)$$

onde  $\Theta \neq 0$ . Isto tampouco é aceitável, já que implica — como já vimos — na existência de uma região acausal ( $r_\Sigma < r \leq r_\Sigma + \frac{1}{2} \operatorname{arccosh} [\Theta]$ ) localizada entre duas regiões causais ( $0 \leq r \leq r_\Sigma$  e  $r > r_\Sigma + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arccosh} [\Theta]$ ).

O segundo caso —  $\lambda^2 = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}$  — é um pouco mais complexo. De (5.26) obtêm-se os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$ :

$$\begin{cases} A = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}}} \left[ 2\sqrt{2} \sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma} - (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) \right] \\ B = \frac{(\sqrt{2}-1)}{4\sqrt{2}} \left[ \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} \sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma} - 2\sqrt{2} (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) \right] \\ C = \frac{(\sqrt{2}-1)}{4} \left[ 2 (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) - \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} \sinh^2 r_{\Sigma} \right] \end{cases} \quad (5.70)$$

e a condição (5.27) é dada por:

$$- A \sinh \psi + B \cosh \psi + C > 0 \quad (5.71)$$

a qual é sempre válida se ocorrer  $\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ . Resta, agora, proceder-se ao estudo do caso especial em que  $\delta = 1$  (isto é, o caso em que a junção das duas métricas é efetuada exatamente sobre o cilindro crítico de Gödel). Isto será feito na próxima seção.

### 5.3 O Caso $\delta = 1$

Este valor para o parâmetro  $\delta$  implica em que  $r_{\Sigma} = r_c = \operatorname{arcsinh} 1$ , donde vem então que:

$$\begin{cases} (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) = 3 \\ (\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}) = \sqrt{2} \end{cases} \quad (5.72)$$

e, neste caso, os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são escritos como:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\lambda} \\ B = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} (\lambda^2 - 6) \\ C = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} (\lambda^2 - 6) \end{cases} \quad (5.73)$$

Substituindo (5.73) em (5.26), a condição para que a causalidade não seja violada é dada por:

$$\sqrt{2} (\lambda^2 - 6) [\cosh \psi - 1] > \lambda \sinh \psi$$

Se  $\lambda^2 > 6$ , podemos elevar ambos os lados da desigualdade ao quadrado, o que nos dá:

$$(2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72) \cosh^2 \psi - 4(\lambda^4 - 12\lambda^2 + 36) \cosh \psi + (2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72) > 0$$

Modificando a notação, por uma questão de simplicidade, escrevemos:

$$\begin{cases} m \equiv 2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72 \\ n \equiv -4(\lambda^4 - 12\lambda^2 + 36) \\ s \equiv 2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72 \\ \psi \equiv \lambda(r - r_\Sigma) \end{cases} \quad (5.74)$$

e a condição para a não violação da causalidade se escreve como:

$$m \cosh^2 \psi + n \cosh \psi + s > 0 \quad (5.75)$$

onde, para  $\lambda^2 > 6$ , temos os seguintes sinais para os coeficientes  $m$ ,  $n$  e  $s$ :

(1)  $6 < \lambda^2 < 8$  —  $m$  e  $s$  positivos;  $n$  negativo

(2)  $\lambda^2 > 8$  —  $m$  e  $n$  negativos;  $s$  positivo

No caso (1), as raízes de (5.75) são:

$$\begin{cases} \cosh \psi_1 = 1 \\ \cosh \psi_2 = \left( \frac{2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72}{2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72} \right) \end{cases} \quad (5.76)$$

logo, (5.75) é satisfeita para:

$$r > r_{\Sigma} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72}{2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72} \right)$$

o que não é válido para os valores possíveis de  $\lambda$ , já que existe uma região acausal em

$$r_{\Sigma} < r \leq r_{\Sigma} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72}{2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72} \right)$$

Já o caso (2) acima, nos dá que a causalidade não é violada se  $r$  estiver no intervalo:

$$r_{\Sigma} < r < r_{\Sigma} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72}{2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72} \right)$$

donde se verifica a existência de CTC's para a região em que vale:

$$r \geq r_{\Sigma} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2\lambda^4 - 23\lambda^2 + 72}{2\lambda^4 - 25\lambda^2 + 72} \right)$$

Esta região tem um domínio menor do que o das duas regiões causais que o cercam. De fato, podemos sempre fazer com que ele tenda a zero (fazendo com que  $\lambda \rightarrow \infty$ ). Entretanto, este domínio nunca pode assumir o valor nulo. Conclui-se, portanto, que não se pode efetuar a junção de métricas através do “cilindro crítico” de Gödel. O valor  $\delta = 1$  deve, então, ser descartado. Isto pode estar ligado ao fato de que somente fótons e outras partículas sem massa alcançam o raio crítico  $r_c$  [11].

Os resultados obtidos até este ponto são resumidos na tabela 5.3 abaixo. Ela dá os valores de  $\lambda^2$  e de  $\delta$  para que nunca ocorra violação da causalidade no modelo Gödel-solução genérica.

Região	$\lambda < 2\sqrt{2}$	$\lambda = 2\sqrt{2}$	$\lambda > 2\sqrt{2}$
Causal ( $g(r) < 0$ )	$0 < r < \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh}\left(\frac{8+\lambda^2}{8-\lambda^2}\right)$	$r > 0$	$r > 0$
Nula ( $g(r) = 0$ )	$r = 0$ ou $r = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh}\left(\frac{8+\lambda^2}{8-\lambda^2}\right)$	$r = 0$	$r = 0$
Acausal ( $g(r) > 0$ )	$r > \frac{1}{\lambda} \operatorname{arccosh}\frac{8+\lambda^2}{8-\lambda^2}$	-----	-----

Tabela 5.1: As regiões causal, nula e acausal da métrica genérica no caso em que ela descreve todo o espaço-tempo, em função do parâmetro  $\lambda$ .

Valor de $\lambda$	Valores aceitáveis de $\delta$
$= \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$	$\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$
$= 2\sqrt{2}$	$= \frac{1}{2}$
$2\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$	$\frac{1}{2} < \delta < 1$

Tabela 5.2: Valores aceitáveis de  $\lambda$  e  $\delta$  para o modelo Gödel-solução genérica, com  $r_\Sigma = r_c \delta$  e  $\lambda^2 = a(2p - \pi_{11} - 2\Lambda)$ .

## Capítulo 6

# O Fluido Gerador da Solução Genérica

Obtida uma solução exterior à métrica de Gödel e verificadas as condições para que não ocorra violação de causalidade, passamos a estudar as características do fluido que gera uma tal solução, equações (4.39). Para isto calculamos as quantidades dinâmicas e cinemáticas relevantes, além de analisarmos o caso especial em que a pressão isotrópica  $p$  é proporcional à densidade  $\rho$  (fluido ideal). Isto é feito para todos os valores aceitáveis da constante  $\lambda$ , a qual — conforme vimos no Capítulo (4) — está associada às características dinâmicas do fluido que gera a solução genérica em questão.

### 6.1 Quantidades Relevantes

As quantidades dinâmicas — densidade, pressões isotrópica e anisotrópica e fluxo de calor — e a constante cosmológica  $\Lambda$  já foram escritas em termos do parâmetro  $\lambda$  no Capítulo (4) deste trabalho. Temos, de início, que:

$$\begin{cases} \lambda = a\sqrt{2p - \pi_{11} - 2\Lambda} \\ q_2 = 0 \\ q_0 = q_1 = q_3 = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

onde o parâmetro  $\lambda$  é real; temos, além disso, que:

$$\pi_{AB} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi_{11} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

onde as duas primeiras equações (6.1) representam uma escolha realizada para que as equações de campo (4.15) pudessem ser facilmente integradas e a última equação (6.1), juntamente com (6.2), são originadas pelas características específicas da métrica com a qual estivemos trabalhando (simetria cilíndrica e estacionariedade). A densidade  $\rho$ , escrita em termos de  $p$ ,  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$  é, como já vimos,

$$\rho = p + 4\pi_{11} - 2\Lambda \quad (6.3)$$

e, das condições de contorno de Darmois, obtivemos (de (4.27)):

$$p = \frac{2}{a^2} - \pi_{11} + \Lambda \quad (6.4)$$

Podemos substituir (6.4) em (6.1) e (6.3), de modo a eliminar a pressão isotrópica  $p$ ; isto nos dá então que:

$$\rho = \frac{2}{a^2} + 3\pi_{11} - \Lambda \quad (6.5)$$

e, ainda,



$$\lambda^2 = a^2 \left( \frac{4}{a^2} - 3\pi_{11} \right) \quad (6.6)$$

Sabemos que a densidade deve ser, necessariamente, positiva para que o fluido seja fisicamente válido. Então, (6.5) dá a seguinte condição:

$$\Lambda < \frac{2}{a^2} + 3\pi_{11} \quad (6.7)$$

Além disto, a condição de que  $\lambda$  seja real implica em que a condição adicional

$$2p - \pi_{11} - 2\Lambda > 0 \quad (6.8)$$

deve ser, também, válida. Ela está associada, como discutimos anteriormente, à escolha feita para que as equações de campo (4.15) fossem integradas como funções de senos e cossenos hiperbólicos (a outra escolha possível, que dá soluções na forma de senos e cossenos, será analisada no Capítulo (7)).

De posse destes resultados gerais, vamos obter os valores (ou intervalos de valores) aceitáveis para as quantidades  $\rho$ ,  $p$ ,  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$ , dados os valores possíveis do parâmetro  $\lambda$ , obtidos da Tabela 5.3:

(1) Caso  $\frac{1}{2} < \delta < 1$ :

Neste caso, os valores aceitáveis de  $\lambda$  se encontram no intervalo:

$$8 < \lambda^2 < \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} \quad (6.9)$$

o que, de (6.6), implica em uma condição sobre a pressão anisotrópica  $\pi_{11}$ :

$$-\frac{4}{3(\sqrt{2}-1)a^2} < \pi_{11} < -\frac{4}{3a^2} \quad (6.10)$$

E a condição (6.8), neste caso, se escreve como:

$$\pi_{11} < \frac{4}{3a^2} \quad (6.11)$$

o que é consistente com a condição (6.10) acima.

(2) Caso  $\delta = \frac{1}{2}$ :

Neste caso, só há um valor possível para  $\lambda$ :

$$\lambda^2 = 8 \quad (6.12)$$

Repetindo o procedimento do caso (1), a equação (6.6) nos dá que:

$$\pi_{11} = -\frac{4}{3a^2} \quad (6.13)$$

e a condição (6.7),  $\rho > 0$ , se escreve:

$$\Lambda < -\frac{2}{a^2} \quad (6.14)$$

Estes resultados são, novamente, compatíveis com a condição (6.11), a qual garante  $\lambda$  real.

(3) Caso  $\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ :

O parâmetro  $\lambda$  tem, novamente, apenas um valor possível:

$$\lambda^2 = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)} \quad (6.15)$$

Substituindo a equação acima em (6.6), vem:

$$\pi_{11} = -\frac{4}{3a^2(\sqrt{2} - 1)} \quad (6.16)$$

consistente com a condição (6.11). A densidade será positiva se (6.7) for válida, ou seja, se ocorrer:

$$\Lambda < -\frac{2}{a^2} \left( \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right) \quad (6.17)$$

Estes resultados são resumidos na tabela 6.1. Deve ser notado que, embora a exigência de não violação da causalidade fixe um valor ou intervalo de valores possíveis para a componente  $\pi_{11}$  da pressão anisotrópica, a constante cosmológica  $\Lambda$  possui apenas um intervalo de valores limitado superiormente (estabelecido pelo valor ou valores de  $\pi_{11}$  e pela condição necessária de que a densidade seja positiva). E estes resultados também dependem do ponto, localizado dentro da região causal de Gödel, em que se faz a junção das duas métricas (designado pelo parâmetro  $\delta$ ); eles são compatíveis com uma solução causal em toda a variedade quadridimensional estudada e com um fluido de densidade positiva e fluxo de calor nulo.

## 6.2 Caso Especial — Fluido Ideal

Neste caso, a pressão isotrópica  $p$  é proporcional à densidade  $\rho$ ,

$$p = \nu\rho \quad (6.18)$$

com a constante de proporcionalidade  $\nu$  assumindo os valores:

$$0 \leq \nu \leq 1 \quad (6.19)$$

para que o fluido gerador seja fisicamente aceitável [32]. Devemos, então, descobrir se isto é compatível com os resultados que obtivemos na seção anterior.

A equação (6.4), juntamente com (6.5), dá:

$$p = \frac{2}{a^2} - \pi_{11} + \Lambda = \rho - 4\pi_{11} + 2\Lambda$$

e, igualando este resultado à equação (6.18), obtém-se:

$$\rho = \frac{2(\Lambda - 2\pi_{11})}{(\nu - 1)} \quad (6.20)$$

onde  $\rho$  deve ser, necessariamente, positiva.

No caso em que  $\pi_{11}$  assume os valores do intervalo dado pela equação (6.10), temos que — conforme (6.7) —

$$\Lambda < \frac{2}{a^2} + 3\pi_{11} \implies (\Lambda - 2\pi_{11}) < \frac{2}{a^2} + \pi_{11} \quad (6.21)$$

e, ainda, que:

$$-\frac{2}{3a^2} \left( \frac{5 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right) < \left( \frac{2}{a^2} + \pi_{11} \right) < \frac{2}{3a^2} \quad (6.22)$$

Isto nos dá dois casos possíveis:

**Caso 1:**

Temos que:

$$-\frac{2}{3a^2} \left( \frac{5 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right) < \left( \frac{2}{a^2} + \pi_{11} \right) < 0$$

o que nos leva facilmente a:

$$(\Lambda - 2\pi_{11}) < 0 \implies \Lambda < 2\pi_{11}$$

Neste caso,  $\rho$  é positiva, por (6.20), se ocorrer:

$$0 \leq \nu \leq 1$$

o que é fisicamente válido, por (6.19).

**Caso 2:**

Este caso leva a:

$$0 < \left( \frac{2}{a^2} + \pi_{11} \right) < \frac{2}{3a^2}$$

O sinal de  $(\Lambda - 2\pi_{11})$  não é completamente determinado neste caso, já que — por (6.21) — esta quantidade tem de ser somente menor do que  $\left( \frac{2}{a^2} + \pi_{11} \right)$ . Temos, então, três possibilidades:

(i)  $\Lambda > 2\pi_{11}$

(ii)  $\Lambda = 2\pi_{11}$

$$(iii) \Lambda < 2\pi_{11}$$

No caso (i), a densidade só será positiva quando ocorrer  $\nu = 1$ . Isto, como já vimos, não é um resultado que tenha sentido físico e, portanto, deve ser descartado. A segunda possibilidade pode ser aplicada às equações (6.18) e (6.20) para dar:

$$\rho = p = 0$$

ou seja, o fluido gerador terá somente pressão anisotrópica e constante cosmológica não nulas. O terceiro caso dá resultados similares ao primeiro: a densidade será positiva quando tivermos

$$0 \leq \nu \leq 1$$

Quando  $\lambda$  assume o valor limite,  $\lambda = 2\sqrt{2}$ , temos de (6.13) e (6.14) que:

$$\begin{cases} \pi_{11} = -\frac{4}{3a^2} \\ \Lambda < -\frac{2}{a^2} \end{cases} \quad (6.23)$$

Substituindo em (6.20) obtém-se que:

$$\rho = 2 \frac{\left(\Lambda + \frac{8}{3a^2}\right)}{(\nu - 1)} \quad (6.24)$$

Temos então que, no caso em que (6.19) é válida (e o fluido gerador é portanto fisicamente aceitável), temos obrigatoriamente que:

$$\Lambda + \frac{8}{3a^2} < 0 \implies \Lambda < -\frac{8}{3a^2} \quad (6.25)$$

para que a densidade seja positiva. Isto é consistente com o resultado (6.14) acima e, em consequência, completamente aceitável.

Se considerarmos o outro valor limite de  $\lambda$ , dado por

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$$

temos, de (6.16) e (6.17):

$$\begin{cases} \pi_{11} = -\frac{4}{3a^2(\sqrt{2}-1)} \\ \Lambda < -\frac{2}{a^2} \left( \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right) \end{cases} \quad (6.26)$$

Substituindo (6.16) em (6.20) obtemos:

$$\rho = 2 \frac{\left( \Lambda + \frac{8}{3a^2(\sqrt{2}-1)} \right)}{(\nu - 1)} \quad (6.27)$$

e, se (6.19) é válida, a densidade só será positiva se:

$$\Lambda < -\frac{8}{3a^2(\sqrt{2}-1)} \quad (6.28)$$

o que é totalmente aceitável e coerente com a condição (6.17) acima.

Para maior clareza, os resultados acima vêm escritos em forma de tabela. Este fluido gera uma solução que, se ligada exteriormente à métrica de Gödel (com os valores adequados do parâmetro  $\delta$ ), é causal em todo o espaço-tempo.

### 6.3 Quantidades Cinemáticas

As quantidades cinemáticas — aceleração, expansão, deformação (ou *shear*) e rotação — são aqui calculadas em uma base de tetradas. Para tanto, precisaremos de  $V_A$  (a

velocidade em um sistema de coordenadas co-movente) e de  $\gamma_{BC}^A$  (os coeficientes de Ricci na base de tetradas, obtidos no Apêndice A):

$$V_A = V^A = (1, 0, 0, 0) \quad (6.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{012} = -\gamma_{102} = \frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} \\ \gamma_{021} = -\gamma_{201} = -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} \\ \gamma_{120} = -\gamma_{210} = -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta} \\ \gamma_{122} = -\gamma_{212} = \frac{1}{a} \frac{\Delta'}{\Delta} \end{array} \right. \quad (6.30)$$

(a) Aceleração ( $A^B$ ):

$$A^B = -\gamma_{DE}^C V_C \eta^{BD} V_E$$

Calculando as quatro componentes deste vetor obtemos:

$$A^B = 0 \quad (6.31)$$

para  $B = (0, 1, 2, 3)$ .

(b) Expansão ou dilatação ( $\Theta$ ):

$$\Theta = -\gamma_{BC}^0 \eta^{BC}$$

Aplicando a equação acima vem, de imediato,

$$\Theta = -\gamma_{00}^0 + \gamma_{11}^0 + \gamma_{22}^0 + \gamma_{33}^0 = 0 \quad (6.32)$$



(c) *Shear* ou deformação ( $\sigma_{AB}$ ):

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \left( -\gamma_{AB}^0 - \gamma_{BA}^0 + \gamma_{A0}^0 \eta_{B0} + \gamma_{B0}^0 \eta_{A0} \right)$$

onde o tensor  $\sigma_{AB}$  é simétrico:

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$$

Prova-se facilmente que:

$$\sigma_{AB} = 0 \quad \forall A, B = 0, 1, 2, 3 \quad (6.33)$$

(d) Matriz de rotação ( $\omega_{AB}$ ):

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} \left( -\gamma_{AB}^0 + \gamma_{BA}^0 + \gamma_{A0}^0 \delta_B^0 - \gamma_{B0}^0 \delta_A^0 \right)$$

onde esta matriz é antissimétrica:

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA}$$

Os únicos termos não nulos desta matriz são:

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{2} \left( -\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 \right) = -\gamma_{12}^0 = -\frac{1}{2a} \frac{h'}{\Delta}$$

Mas, de (4.15) e (4.27), vem que:

$$\frac{h'}{\Delta} = 2a \sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} = 2\sqrt{2}$$

donde vem então:

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{a} \quad (6.34)$$

O vetor de rotação pode ser facilmente calculado como:

$$\omega^k = \frac{1}{2}\omega_{ij}\varepsilon^{ijk}$$

onde  $\varepsilon^{ijk}$  é o tensor de Levi-Civita. Isto nos dá, então,

$$\begin{cases} \omega^0 = \omega^1 = \omega^2 = 0 \\ \omega^3 = \frac{1}{2}(\omega_{12}\varepsilon^{123} + \omega_{21}\varepsilon^{213}) = \omega_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{a} \end{cases} \quad (6.35)$$

ou, em forma compacta,

$$\begin{cases} \omega^A = \left(0, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{a}\right) \\ \omega_A = \left(0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{a}\right) \end{cases} \quad (6.36)$$

donde vem, finalmente, que:

$$\omega^2 = -\omega_A\omega^A = \frac{2}{a^2} \quad (6.37)$$

Esta é a mesma rotação  $\Omega$  obtida para a solução de Gödel (equação (2.6)).

De posse dos resultados (6.36) e (6.37), construímos a matriz diagonal de rotação, denotada por  $\Omega_{AB}$  e dada por:

$$\Omega_{AB} = \omega_A\omega_B + \frac{1}{3}\omega^2 h_{AB} \quad (6.38)$$

onde  $h_{AB}$  é o projetor dado por:  $h_{AB} = \eta_{AB} - \delta_A^0 \delta_B^0$ . Daí vem então:

$$\begin{cases} \Omega_{00} = \frac{1}{3}\omega^2 h_{00} = 0 \\ \Omega_{11} = \Omega_{22} = -\frac{1}{3}\omega^2 = -\frac{2}{3a^2} \\ \Omega_{33} = (\omega_3)^2 - \frac{1}{3}\omega^2 = \frac{4}{3a^2} = -2\Omega_{11} \end{cases} \quad (6.39)$$

Isto nos sugere a existência de uma relação entre  $\Omega_{AB}$  e a matriz de pressão anisotrópica  $\pi_{AB}$ , que é do tipo:

$$\pi_{AB} = \gamma^2 \Omega_{AB} \quad (6.40)$$

onde temos, pelos resultados deste capítulo, que:

$$\Omega_{11} < 0 \implies \pi_{11} < 0$$

e, portanto, deve ocorrer necessariamente:

$$\gamma^2 > 0 \quad (6.41)$$

O coeficiente  $\gamma$  pode ser interpretado como um coeficiente de viscosidade [32] do fluido, causado pela existência de uma pressão anisotrópica não nula.

A equação (6.38) define o que se denomina um fluido não Stokesiano [33] e a presença de viscosidade leva a propriedades interessantes, entre as quais temos a questão da conservação ou não da entropia. Para isto define-se, de acordo com Novello e d'Olival [33], uma função característica  $\phi$  como:

$$\phi = \pi_j^i \Theta_i^j \quad (6.42)$$

onde  $\pi_j^i$  é a pressão anisotrópica e  $\Theta_i^j$  denota as componentes do tensor de dilatação, cujo traço  $\Theta$  foi calculado como nulo, por (6.32). A variação ou não da entropia é definida pela função característica e pela Segunda Lei da Termodinâmica:

$$\begin{aligned}\phi = 0 &\implies \text{entropia conservada} \\ \phi > 0 &\implies \text{entropia varia com o tempo}\end{aligned}$$

E, da equação que dá a conservação do tensor momento-energia projetado no referencial co-movente com o observador, temos [33]:

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \Theta - \phi = 0 \tag{6.43}$$

Aplicando-se (6.32) obtém-se:

$$\dot{\rho} = \phi$$

E como o fluido gerador, no caso da solução genérica, tem densidade constante, temos que a entropia associada a esta solução, (4.39), é conservada.

$\lambda$	$\delta$	$\pi_{11}$	$\Lambda$
$= \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$	$\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$	$= -\frac{4}{3a^2(\sqrt{2}-1)}$	$< -\frac{2}{a^2} \left( \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right)$
$= 2\sqrt{2}$	$= \frac{1}{2}$	$= -\frac{4}{3a^2}$	$< -\frac{2}{a^2}$
$2\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$	$\frac{1}{2} < \delta < 1$	$-\frac{4}{3a^2(\sqrt{2}-1)} < \pi_{11} < -\frac{4}{3a^2}$	$< \frac{2}{a^2} + 3\pi_{11}$

Tabela 6.1: Valores aceitáveis para a componente  $\pi_{11}$  da matriz de pressão anisotrópica e para a constante cosmológica do fluido gerador da solução genérica.

Valores de $\lambda$	Valores de $\pi_{11}$	Valores de $\Lambda$
$= \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$	$= -\frac{4}{3a^2(\sqrt{2}-1)}$	$< -\frac{8}{3a^2(\sqrt{2}-1)}$
$= 2\sqrt{2}$	$= -\frac{4}{3a^2}$	$< -\frac{8}{3a^2}$
$2\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}}$	$-\frac{4}{3a^2(\sqrt{2}-1)} < \pi_{11} < -\frac{4}{3a^2}$	$\leq 2\pi_{11}$

Tabela 6.2: Valores aceitáveis de  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$  para o caso especial de um fluido perfeito e fisicamente válido (onde  $p = \nu\rho$ ,  $\rho$  positiva e  $0 \leq \nu \leq 1$ ).

# Capítulo 7

## Uma Nova Solução

Como já havíamos afirmado anteriormente, a escolha  $q_2 = 0$  foi feita para que as equações de campo da métrica (4.1) pudessem ser facilmente integradas. Entretanto, é possível obter-se uma solução para as equações de campo com fluxo de calor não nulo, na forma de uma combinação linear de senos e cossenos, a qual pode ser ligada exteriormente à região causal da solução de Gödel. Uma importante característica desta solução é a ocorrência de uma rotação  $\Omega$  que varia com  $r$ . Desta forma, podemos unir ambas as soluções de forma a apresentar uma rotação que seja igual à de Gödel no raio de junção  $r_\Sigma$  e caia até zero em um raio  $r_S > r_\Sigma$ . Esta característica é muito interessante porque permite que se faça uma segunda junção de métricas — mais especificamente entre a nova solução exterior a Gödel, com fluxo de calor não nulo, e uma solução plana de tipo Minkowskii, porém com uma topologia global diferente (apresentando o que se costuma chamar “deficit angular ” ou “defeito topológico ” [34]). Desta forma, a nova solução obtida pode ser identificada como um caso mais geral de uma *string* cósmica girante, conforme os trabalhos de Jensen (1992) [35] e de Jensen e Soleng (1992) [36]. Neste capítulo obteremos esta solução específica e analisaremos as condições necessárias

para que o espaço-tempo, agora composto por três métricas, seja globalmente causal, quando a condição dominante de energia é satisfeita.

## 7.1 Solução de *String* Girante

Nesta seção são apresentados alguns resultados referentes à solução para *strings* cósmicas ditas “retas ”(ou *straight*), tanto sem rotação como girantes. Tais resultados são relevantes para a compreensão do restante deste capítulo.

A solução para *strings* cósmicas sem rotação foi primeiramente obtida para a aproximação de campo fraco (Villenkin, 1981) [38]; posteriormente encontrou-se uma solução exata [39], [40] como:

$$\begin{cases} ds^2 = dt^2 - r_0^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) - dz^2 \\ ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1 - 4\mu)^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2 \end{cases} \quad (7.1)$$

para as regiões interior e exterior, respectivamente, de um modelo de string cósmica com densidade uniforme  $\rho = \frac{1}{8\pi r_0^2}$ , massa por unidade de comprimento  $\mu$  (no sistema de unidades no qual vale  $G = c = \hbar = 1$ ) e componente axial da pressão isotrópica  $p_z = -\rho$ . Verifica-se facilmente [34] que a geometria de uma seção com  $t$  e  $z$  constantes é a de um cone com *deficit* angular igual a  $8\pi\mu$  na região exterior (o vácuo), unido a uma capa esférica na região interior. Além disto, por meio de uma mudança na coordenada angular  $\varphi$ :

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = (1 - 4\mu)\varphi$$

prova-se que a métrica para a região exterior se reduz à de Minkowskii com um defeito topológico. Ou seja, a coordenada  $\varphi'$  não varia de 0 a  $2\pi$  como a coordenada  $\varphi$  original;

ao invés, ela varia entre 0 e  $2\pi(1 - 4\mu)$  e os pontos com coordenadas  $(r, \varphi' = 0, z, t)$  e  $(r, \varphi' = 2\pi(1 - 4\mu), z, t)$  são identificados. Estas soluções da equação de campo de Einstein foram obtidas como tais antes de qualquer interpretação física relacionando-as a *strings* cósmicas.

A solução para *strings* girantes, conforme obtida por Deser, Jackiw e 't Hooft (1984) [41] é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 + 8GJ dt d\varphi - [r^2(1 - 4Gm)^2 - 16G^2 J^2] d\varphi^2 - dz^2$$

onde  $J$  é o momento angular por unidade de comprimento e  $m$  a massa por unidade de comprimento. E, do mesmo modo que para *strings* cósmicas sem rotação, esta métrica pode ser escrita na forma plana:

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

mediante a seguinte transformação de coordenadas [42], singular em  $r = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = t + \frac{4GJ}{(1-4Gm)}\varphi' \\ \varphi' = (1 - 4Gm)\varphi \\ X = r \cos \varphi' \\ Y = r \sin \varphi' \\ Z = z \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Isto, segundo Mazur, leva a duas interpretações possíveis: (i) a coordenada  $T$  é periódica no tempo, com período  $8\pi GJ$ ; (ii)  $T$  não é periódica, mas existe violação da causalidade na região  $r < r_0$ . E esta estrutura “tipo hélice” de  $T$  — saltando de  $8\pi GJ$  quando  $t$  é



constante e  $\varphi$  chega a  $2\pi$ , valor este identificado com  $\varphi = 0$  — tem consequências interessantes em termos quantum-mecânicos. Por exemplo, ela tem um efeito importante na quantização de campos sob a ação do campo gravitacional da *string* girante.

No trabalho de Jensen e Soleng [36] são propostos dois modelos puramente clássicos para uma *string* girante, no âmbito da Teoria da Relatividade Geral. Em um deles, a fonte de curvatura é um anel em um raio finito (*flower pot model*); no outro, a curvatura está distribuída sobre uma calota esférica (*ballpoint pen model*). O primeiro tipo exclui violação da causalidade, enquanto o segundo — mesmo satisfazendo as condições fraca e dominante de energia — pode apresentar CTC's ou não, dependendo da escolha de dois parâmetros livres. Um deles é o raio da *string* e o outro está associado às propriedades físicas do fluido gerador da *string* e à sua rotação. A solução de Jensen e Soleng para o segundo modelo é obtida impondo-se que a *string* tenda à solução de Minkowskii em sua origem. Em nosso cálculo imporemos que ela tenda à solução de Gödel neste ponto, obtendo assim um resultado mais geral.

## 7.2 Solução com Fluxo de Calor — *String* Girante

Nosso ponto de partida é, como antes, o conjunto de equações de campo em base de tetradas, (4.15). Como primeiro passo para integrá-las, devemos escolher uma forma simples para a componente  $\varphi$  do fluxo de calor,  $q_2$ . Na solução genérica havíamos escolhido  $q_2 = 0$  mas, agora, tomaremos ao invés:

$$q_2 = \text{constante não nula}$$

Então, a segunda das equações (4.15) pode ser imediatamente integrada em  $r$ , dando:

$$\frac{h'}{2a^2\Delta} = q_2(\tau + \xi) \quad (7.3)$$

onde  $\xi$  é uma constante de integração a ser determinada.

Para que esta nova solução possa ser dada na forma de uma string girante, é necessário que efetuemos uma redefinição no parâmetro  $\lambda$ ; desta forma, tomamos:

$$\lambda^2 \equiv a^2(-2p + \pi_{11} + 2\Lambda) \quad (7.4)$$

com  $\lambda^2 > 0$  como antes. Então, a terceira das equações (4.15) passa a ser escrita como:

$$\Delta'' + \lambda^2\Delta = 0 \quad (7.5)$$

a qual é facilmente integrada se  $\lambda$  for uma constante. Devemos, portanto, analisar sob que condições isto ocorre, dado  $q_2 \neq 0$ .

A constante  $\xi$  em (7.3) pode ser facilmente obtida se impusermos que a solução de *string* girante seja ligada, no seu exterior (em  $\tau = r_S$ , onde  $r_S$  denota o raio da string), a uma geometria plana — mais especificamente à solução de Minkowskii com defeito topológico, conforme foi visto na seção anterior. Esta geometria é dada por [35], [36]:

$$\begin{cases} h(\tau > r_S) = 4GJ \\ \Delta(\tau > r_S) = (1 - 4G\mu)(\tau + r_0) \end{cases} \quad (7.6)$$

onde  $J$  é o momento angular por unidade de comprimento,  $\mu$  é a massa por unidade de comprimento e  $r_0$  é uma constante que determinaremos a seguir.

Impondo-se as condições de Darmois para junção de métricas, equações (3.57), de modo a que haja continuidade sobre  $r = r_S$ , vem:

$$[h(r_S)] = [h'(r_S)] = [\Delta(r_S)] = [\Delta'(r_S)] = 0$$

onde  $[F(r_S)] = F_{string}(r_S) - F_{plana}(r_S)$ . Isto nos dá então que:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{h'}{2a^2\Delta}(r_S) \right] &= 0 \\ r_S + \xi &= 0 \\ \xi &= -r_S \end{aligned} \tag{7.7}$$

Portanto, a equação de campo (7.3) se escreve como:

$$\frac{h'}{2a^2\Delta} = q_2(r - r_S) \tag{7.8}$$

Este resultado pode ser substituído na equação de campo restante, a primeira das (4.15), dando:

$$p + \pi_{11} - \Lambda = a^2 q_2^2 (r_S - r)^2 \tag{7.9}$$

o que, aplicando-se (4.14), nos dá a seguinte equação para a densidade:

$$\rho = 3\pi_{11} - \Lambda + a^2 q_2^2 (r_S - r)^2 \tag{7.10}$$

Voltemos agora à equação (7.5); como já foi dito, é conveniente que o parâmetro  $\lambda$ , dado por (7.4), seja constante. Então, impondo que isto seja verdade, temos desta equação e de (7.9) que:

$$\lambda^2 = a^2 \{3\pi_{11} - 2a^2 q_2^2 (r_S - r)^2\} \quad (7.11)$$

a qual é escolhida como uma constante em  $r$ . Daí, substituindo (7.11) em (7.10), obtemos finalmente:

$$\rho = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 - \Lambda + 3a^2 q_2^2 (r_S - r)^2 \quad (7.12)$$

o qual é o mesmo resultado obtido em [36] por Jensen e Soleng para o caso em que  $a^2 = 1$ , a menos da constante cosmológica  $\Lambda$ .

Podemos, agora, integrar facilmente (7.5) para obter:

$$\Delta(r) = A \sin[\lambda(r - w)] + B \cos[\lambda(r - w)] \quad (7.13)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $w$  são constantes de integração. A função restante,  $h(r)$ , é determinada pela substituição de (7.13) na equação de campo (7.8),

$$h' = -2a^2 q_2 (r_S - r) \Delta$$

e, integrando-se em  $r$ , obtemos:

$$\begin{aligned} h(r) &= 2a^2 q_2 \left\{ A \int (r - r_S) \sin[\lambda(r - w)] dr + B \int (r - r_S) \cos[\lambda(r - w)] dr \right\} \\ &\equiv 2a^2 q_2 \{A I_1 + B I_2\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são integrais indefinidas, as quais são facilmente calculadas por meio de uma mudança de variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \lambda(r - w) \\ ds = \lambda dr \\ (r - r_S) = \left(\frac{1}{\lambda} s + w - r_S\right) \end{array} \right.$$

Isto nos dá, mediante um cálculo simples, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} h(r) = & \frac{2a^2 A q_2}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} \sin[\lambda(r - w)] + (r_S - r) \cos[\lambda(r - w)] \right) \\ & + \frac{2a^2 B q_2}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} \cos[\lambda(r - w)] - (r_S - r) \sin[\lambda(r - w)] \right) + \alpha \end{aligned} \quad (7.15)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de integração que também será determinada a partir das condições de continuidade das métricas a serem unidas.

As equações (7.13) e (7.15) dão uma solução de *string* girante ([35], [36]) mais geral do que a obtida por Jensen e Soleng, já que não foi imposta ainda a condição para a região interior da *string*. Isto será feito agora, pela aplicação das condições de Darmois para junção de métricas ao seguinte modelo:

1. Região I ( $0 \leq r \leq r_\Sigma$ ), a solução de Gödel, com:

- $h_I(r) = \sqrt{2} \sinh^2 r$
- $\Delta_I(r) = \sinh r \cosh r$

2. Região II ( $r_\Sigma \leq r \leq r_S$ ) a solução de *string* girante, com equações (7.13) e (7.15) dadas acima.

3. Região III ( $r \geq r_S$ ) a solução de Minkowskii com defeito topológico:

- $h_{III}(r) = 4GJ$
- $\Delta_{III}(r) = (1 - 4G\mu)(r + r_0)$

Para que as três regiões acima possam ser unidas analiticamente, as condições de Darmois devem ser satisfeitas sobre as duas hipersuperfícies de separação,  $r = r_\Sigma$  e  $r = r_S$  respectivamente (com  $r_\Sigma < r_S$ ). Logo, temos novamente de (3.57) que:

$$\begin{cases} [h(r_\Sigma)] = [h'(r_\Sigma)] = 0 \\ [\Delta(r_\Sigma)] = [\Delta'(r_\Sigma)] = 0 \\ [h(r_S)] = [h'(r_S)] = 0 \\ [\Delta(r_S)] = [\Delta'(r_S)] = 0 \end{cases}$$

as quais devem valer simultaneamente. São estas condições, dados  $r_\Sigma$ ,  $r_S$  e  $\lambda$ , que irão determinar as constantes de integração  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $r_0$  e  $w$  em função das outras quantidades relevantes do fluido gerador da string ( $J$ ,  $\mu$ ,  $q_2$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$ ).

As condições de Darmois são escritas de uma maneira muito mais simples se escolhermos:

$$w = 0 \tag{7.16}$$

Isto pode ser feito sem perda de generalidade, já que podemos sempre escrever:

$$\begin{cases} \sin[\lambda(r - w)] = (\cos \lambda w) \sin \lambda r - (\sin \lambda w) \cos \lambda r \\ \cos[\lambda(r - w)] = (\cos \lambda w) \cos \lambda r + (\sin \lambda w) \sin \lambda r \end{cases}$$

onde os fatores constantes  $(\sin \lambda w)$  e  $(\cos \lambda w)$  são absorvidos nas constantes multiplicativas da solução (7.13) – (7.15). Isto posto, as condições de Darmois acima — juntamente com (7.16) — nos dão os seguintes resultados:

(1)  $[h(r_S)] = 0 \implies h_{III}(r_S) = h_{II}(r_S)$  Daí vem que:

$$\frac{2a^2 q_2}{\lambda^2} (A \sin \lambda r_S + B \cos \lambda r_S) + \alpha = 4GJ \quad (7.17)$$

(2)  $[h'(r_S)] = 0 \implies h'_{III}(r_S) = h'_{II}(r_S)$  Esta condição é identicamente nula em ambos os lados e, portanto, é sempre válida.

(3)  $[\Delta(r_S)] = 0 \implies \Delta_{III}(r_S) = \Delta_{II}(r_S)$  Isto nos dá:

$$r_0 = \frac{1}{(1 - 4G\mu)} (A \sin \lambda r_S + B \cos \lambda r_S) - r_S \quad (7.18)$$

(4)  $[\Delta'(r_S)] = 0 \implies \Delta'_{III}(r_S) = \Delta'_{II}(r_S)$  Daí vem que:

$$(A \cos \lambda r_S - B \sin \lambda r_S) = \frac{1}{\lambda} (1 - 4G\mu) \quad (7.19)$$

(5)  $[h(r_\Sigma)] = 0 \implies h_{II}(r_\Sigma) = h_I(r_\Sigma)$  Então vem:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 q_2}{\lambda} (A \cos \lambda r_\Sigma - B \sin \lambda r_\Sigma) + \frac{2a^2 q_2}{\lambda^2} (A \sin \lambda r_\Sigma + B \cos \lambda r_\Sigma) \\ + \alpha \\ = \sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \end{aligned} \quad (7.20)$$

(6)  $[h'(r_\Sigma)] = 0 \implies h'_{II}(r_\Sigma) = h'_I(r_\Sigma)$  o que nos dá:

$$a^2 q_2 (r_S - r_\Sigma) (A \sin \lambda r_\Sigma + B \cos \lambda r_\Sigma) = -\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (7.21)$$

(7)  $[\Delta(r_\Sigma)] = 0 \implies \Delta_{II}(r_\Sigma) = \Delta_I(r_\Sigma)$  e isto dá:

$$(A \sin \lambda r_\Sigma + B \cos \lambda r_\Sigma) = \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (7.22)$$

(8)  $[\Delta'(r_\Sigma)] = 0 \implies \Delta'_{II}(r_\Sigma) = \Delta'_I(r_\Sigma)$  E isto finalmente nos dá que:

$$(A \cos \lambda r_\Sigma - B \sin \lambda r_\Sigma) = \frac{1}{\lambda} (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \quad (7.23)$$

Isto nos dá um sistema com sete equações, (7.17) a (7.23), que devem ser válidas simultaneamente e sete incógnitas:  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $\mu$ ,  $J$  e  $q_2$  (onde as quatro primeiras são constantes de integração e as outras três são quantidades características da *string*: massa e momento angular por unidade de comprimento e fluxo de calor).

Vamos resolver este sistema de equações para obter cada uma das incógnitas acima, as quais serão escritas em termos de  $\lambda$ ,  $r_\Sigma$  e  $r_S$ . A componente  $\varphi$  do fluxo de calor é obtida das equações (7.21) e (7.22) como:

$$q_2 = -\frac{\sqrt{2}}{a^2(r_S - r_\Sigma)} \quad (7.24)$$

A constante  $\alpha$  é obtida por meio da substituição de (7.22) a (7.24) em (7.20):

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2(r_S - r_\Sigma)} \left\{ 2 \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma + 2(r_S - r_\Sigma) (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) + \lambda^2(r_S - r_\Sigma) \sinh^2 r_\Sigma \right\} \quad (7.25)$$

As constantes de integração  $A$  e  $B$  podem ser calculadas a partir de (7.22) e (7.23), se fizermos:

$$(7.22) \sin \lambda r_\Sigma + (7.23) \cos \lambda r_\Sigma$$



donde vem:

$$A = \frac{1}{\lambda} \left\{ \lambda(\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}) + (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) \cos \lambda r_{\Sigma} \right\} \quad (7.26)$$

E ainda:

$$(7.22) \cos \lambda r_{\Sigma} - (7.23) \sin \lambda r_{\Sigma}$$

o que nos dá:

$$B = \frac{1}{\lambda} \left\{ \lambda(\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}) - (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) \sin \lambda r_{\Sigma} \right\} \quad (7.27)$$

Substituindo (7.26) e (7.27) em (7.19), obtemos a massa da string por unidade de comprimento:

$$\mu = \frac{1}{4G} \left\{ 1 - (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) \cos [\lambda(r_S - r_{\Sigma})] + \lambda(\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}) \sin [\lambda(r_S - r_{\Sigma})] \right\} \quad (7.28)$$

O momento angular por unidade de comprimento,  $J$ , é calculado pelo uso de (7.24) a (7.27) em (7.17):

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sqrt{2}}{2G\lambda^2(r_S - r_{\Sigma})} (\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}) [1 - \cos [\lambda(r_S - r_{\Sigma})]] \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2G\lambda^3(r_S - r_{\Sigma})} (2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1) [\lambda(r_S - r_{\Sigma}) - \sin [\lambda(r_S - r_{\Sigma})]] \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4G} \lambda^3 (r_S - r_{\Sigma}) \sinh^2 r_{\Sigma} \end{aligned} \quad (7.29)$$

A última constante de integração,  $r_0$ , é finalmente obtida substituindo-se (7.26) a (7.28) em (7.18):

$$r_0 = \frac{\left\{ \lambda (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cos [\lambda(r_S - r_\Sigma)] + (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sin [\lambda(r_S - r_\Sigma)] \right\}}{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \cos [\lambda(r_S - r_\Sigma)] - \lambda (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \sin [\lambda(r_S - r_\Sigma)]} - r_S \quad (7.30)$$

Neste caso, as funções  $\Delta(r)$  e  $h(r)$  que se escrevem como:

$$\begin{cases} \Delta(r) = A \sin \lambda r + B \cos \lambda r \\ h(r) = \frac{2a^2 q_2}{\lambda} \left\{ A \left[ \frac{\sin \lambda r}{\lambda} + (r_S - r) \cos \lambda r \right] + B \left[ \frac{\cos \lambda r}{\lambda} - (r_S - r) \sin \lambda r \right] \right\} + \alpha \end{cases} \quad (7.31)$$

e válidas para  $r_\Sigma \leq r \leq r_S$  nos dão, portanto, uma solução do tipo *string* cósmica girante, a qual é analiticamente ligada às soluções de Gödel (interiormente,  $r = r_\Sigma$ ) e plana, com defeito topológico (exteriormente,  $r = r_S$ ) quando as constantes de integração  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  e  $r_0$  e mais  $\mu$ ,  $J$  e  $q_2$  são dados pelas equações (7.24) a (7.30), resultantes das condições de contorno de Darmois. Resta-nos, então, descobrir os valores (ou intervalos de valores) que os parâmetros  $\lambda$ ,  $r_\Sigma$  e  $r_S$  podem assumir, para que o modelo descrito nesta seção seja causal para todos os valores da coordenada  $r$ . Isto será feito a seguir, a exemplo do Capítulo (5).

### 7.3 A Causalidade para a Solução de *String* Girante

Como foi visto no Capítulo (5), a condição para que a causalidade não seja violada (para uma região do espaço-tempo descrita pela métrica (4.1)) é dada por:

$$g(r) < 0$$

Para o modelo descrito neste capítulo, esta condição deve ser válida nas três regiões envolvidas; isto nos dá, então, que:

(I) Gödel ( $0 \leq r \leq r_\Sigma$ )

$$0 \leq r_\Sigma \leq \operatorname{arcsinh} 1 \quad (7.32)$$

(II) String girante ( $r_\Sigma \leq r \leq r_S$ )

$$h_{II}^2 - \Delta_{II}^2 < 0 \quad (7.33)$$

(III) Minkowskii com defeito topológico ( $r \geq r_S$ )

$$(r + r_0)^2 > \left( \frac{4GJ}{1 - 4G\mu} \right)^2 \quad (7.34)$$

Estas condições estão estreitamente interligadas e, por conseguinte, serão apresentadas aqui apenas considerações qualitativas em relação à sua validade.

Vamos considerar primeiro a condição (7.34). Ela deve ser válida para todo  $r \geq r_S$ . Então, se o valor mínimo de  $(r + r_0)$  satisfizer esta desigualdade, a condição será automaticamente válida em toda a região *III*. Neste caso, (7.34) pode ser escrita como:

$$(r_S + r_0)^2 > \left( \frac{4GJ}{1 - 4G\mu} \right)^2 \quad (7.35)$$

Da condição de Darmois (7.18) temos, porém, que:

$$(r_S + r_0) = \frac{1}{(1 - 4G\mu)} (A \sin \lambda r_S + B \cos \lambda r_S)$$

então, (7.35) dá:

$$\left\{ \lambda (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cos [\lambda(r_S - r_\Sigma)] + (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sin [\lambda(r_S - r_\Sigma)] \right\}^2 > (4GJ)^2 \quad (7.36)$$

O termo no lado direito de (7.36) é sempre positivo por (7.29), já que  $\cos x \leq 1$  e  $\sin x \leq x$ ,  $\forall x$ . Portanto, o termo à esquerda deve ser, obrigatoriamente, maior do que zero. Então podemos tirar a raiz quadrada desta desigualdade sem problemas e a condição para que a região *III* seja causal se escreve como:

$$r_0 > \frac{4GJ}{(1 - 4G\mu)} - r_S \quad (7.37)$$

o que, substituindo-se (7.28) a (7.30) em (7.37), dá — após um rearranjo dos termos —

$$\begin{aligned} (\lambda^3 + 2\sqrt{2}) \left\{ \lambda (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cos \lambda R + (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sin \lambda R \right\} - \sqrt{2} \lambda \left[ (\lambda^2 + 4) \sinh^2 r_\Sigma + 2 \right] I \\ > 2\sqrt{2} \lambda \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \quad (7.38) \end{aligned}$$

onde  $R \equiv (r_S - r_\Sigma)$  pode ser descrita como a “espessura” do domínio de validade da solução de string girante.

A segunda condição, (7.33), pode ser escrita de uma maneira diferente se utilizarmos as equações (7.24) e (7.31) para escrever  $h(r)$  em função de  $\Delta(r)$  e de sua derivada primeira,  $\Delta'(r)$ :

$$\begin{cases} h(r) = -\frac{2\sqrt{2}}{\lambda^2(r_S - r_\Sigma)} [\Delta + (r_S - r)\Delta'] + \alpha \\ (h^2 - \Delta^2) = \alpha^2 + \frac{8}{\lambda^4(r_S - r_\Sigma)^2} [\Delta + (r_S - r)\Delta']^2 - \frac{4\sqrt{2}}{\lambda^2(r_S - r_\Sigma)} [\Delta + (r_S - r)\Delta'] - \Delta^2 \end{cases} \quad (7.39)$$

Então (7.33) acarreta que:

$$\frac{4\sqrt{2}}{\lambda^2(r_S - r_\Sigma)} [\Delta + (r_S - r)\Delta'] + \Delta^2 > \alpha^2 + \frac{8}{\lambda^4(r_S - r_\Sigma)^2} [\Delta + (r_S - r)\Delta']^2 \quad (7.40)$$

Os termos no lado direito da desigualdade (7.40) estão ambos elevados ao quadrado e são, portanto, positivos. Logo, o lado esquerdo de (7.40) deve ser, também, positivo e — já que tem de ser, além disto, maior do que a soma destes quadrados — deve assumir o maior valor possível. Para que isto ocorra, tanto  $\Delta$  quanto  $\Delta'$  devem ser maiores do que zero para o intervalo  $r_\Sigma \leq r \leq r_S$ .

De (7.31) temos que:

$$\begin{cases} \Delta(r) > 0 \text{ se } r > \frac{1}{\lambda} \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) \implies r > -\frac{1}{\lambda} \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \\ \Delta'(r) > 0 \text{ se } r > \frac{1}{\lambda} \arctan\left(\frac{A}{B}\right) \end{cases} \quad (7.41)$$

E (7.26) junto com (7.27) dá:

$$\begin{cases} \left(\frac{A}{B}\right) = \left\{ \frac{\lambda \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right) \tan \lambda r_\Sigma + 1}{\lambda \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right) - \tan \lambda r_\Sigma} \right\} \\ \left(-\frac{B}{A}\right) = \left\{ \frac{\tan \lambda r_\Sigma - \lambda \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right)}{1 + \lambda \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right) \tan \lambda r_\Sigma} \right\} \end{cases}$$

Donde se conclui pela existência de três possibilidades:

1ª possibilidade:

$$\frac{1}{\lambda} \tan \lambda r_{\Sigma} < \left( \frac{\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}}{2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1} \right)$$

Isto implica em:

$$\begin{cases} \left( -\frac{B}{A} \right) < 0 \\ \left( \frac{A}{B} \right) > 0 \end{cases}$$

donde, por (7.41), a condição que garante  $\Delta$  e  $\Delta'$  simultaneamente positivos se escreve como:

$$r > \frac{1}{\lambda} \arctan \left( \frac{A}{B} \right)$$

o que, dado que  $r_{\Sigma} \leq r \leq r_S$ , leva a:

$$r_{\Sigma} > \frac{1}{\lambda} \arctan \left( \frac{A}{B} \right)$$

Neste caso, a condição (7.32) aplicada à equação acima dá:

$$\frac{1}{\lambda} \arctan \left( \frac{A}{B} \right) < r_{\Sigma} \leq \operatorname{arcsinh} 1 \quad (7.42)$$

2ª possibilidade:

$$\frac{1}{\lambda} \tan \lambda r_{\Sigma} > \left( \frac{\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}}{2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1} \right)$$

Isto nos dá:

$$\begin{cases} \left(-\frac{B}{A}\right) > 0 \\ \left(\frac{A}{B}\right) < 0 \end{cases}$$

e um raciocínio similar ao empregado acima resulta em:

$$\frac{1}{\lambda} \arctan \left(-\frac{B}{A}\right) < r_{\Sigma} \leq \operatorname{arcsinh} 1 \quad (7.43)$$

3ª possibilidade:

$$\frac{1}{\lambda} \tan \lambda r_{\Sigma} = \left( \frac{\sinh r_{\Sigma} \cosh r_{\Sigma}}{2 \sinh^2 r_{\Sigma} + 1} \right)$$

Isto dá:

$$\begin{cases} \left(-\frac{B}{A}\right) = 0 \implies \arctan \left(-\frac{B}{A}\right) = 0 \\ \left(\frac{A}{B}\right) \rightarrow \infty \implies \arctan \left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e então temos:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \text{ se } r > 0 \\ \Delta' > 0 \text{ se } r > \frac{\pi}{2\lambda} \end{cases}$$

para  $r_{\Sigma} \leq r \leq r_S$ .

Logo,  $\Delta$  e  $\Delta'$  são simultaneamente positivos se:

$$\frac{\pi}{2\lambda} < r_{\Sigma} \leq \operatorname{arcsinh} 1 \quad (7.44)$$

Em qualquer dos casos acima — (7.42) a (7.44) — verifica-se que a ligação Gödel-String girante não pode ser realizada em raios próximos a zero. Este resultado é similar

àquele obtido para a solução sem fluxo de calor (Capítulo (5) deste trabalho). As condições (7.42) a (7.44) só fazem sentido se ocorrer, para cada um dos possíveis valores de  $\frac{1}{\lambda} \tan \lambda r_\Sigma$ , respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda > \frac{\arctan(\frac{A}{B})}{\operatorname{arcsinh} 1} \\ \lambda > \frac{\arctan(-\frac{B}{A})}{\operatorname{arcsinh} 1} \\ \lambda > \frac{\pi}{2\operatorname{arcsinh} 1} \end{array} \right. \quad (7.45)$$

as quais são consequência direta de (7.44).

A terceira das equações (7.45) é simultaneamente válida com a expressão

$$\frac{1}{\lambda} \tan \lambda r_\Sigma = \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right)$$

se ocorrer:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda r_\Sigma > \frac{\pi}{2\operatorname{arcsinh} 1} \\ \lambda r_\Sigma = \frac{1}{\lambda} \arctan \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right) \end{array} \right.$$

donde vem então:

$$\lambda < \frac{2}{\pi r_\Sigma} (\operatorname{arcsinh} 1) \arctan \left( \frac{\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma}{2 \sinh^2 r_\Sigma + 1} \right) \quad (7.46)$$

Desde que  $(A/B)$  e  $(-B/A)$  dependem ambos de  $\lambda$  e  $r_\Sigma$ , as equações análogas a (7.46) — obtidas a partir das duas primeiras equações (7.45), juntamente com as suas respectivas condições sobre  $\frac{1}{\lambda} \tan \lambda r_\Sigma$  — são muito mais complexas. Entretanto pode-se ver imediatamente que o resultado final é um conjunto de três desigualdades envolvendo os três parâmetros  $(\lambda, r_\Sigma$  e  $r_S)$ . Uma das equações (7.44) nos dá uma condição para



$r_\Sigma$ ; ela pode ser aplicada a (7.46) — ou a uma de suas análogas — para fornecer uma condição consistente para  $\lambda$ . E ambas podem ser aplicadas a (7.38) para obter-se a condição correspondente para  $r_S$ . Estas “aplicações” não são imediatas; pode-se concluir delas, porém, que uma escolha judiciosa dos dois raios de ligação  $r_\Sigma$  e  $r_S$ , bem como das quantidades dinâmicas do fluido que gera a *string* girante  $(\rho, p, \pi_{11})$ , juntamente com a constante cosmológica, nos fornece uma solução globalmente causal. Isto é consistente tanto com os resultados do Capítulo (5) para uma solução com  $q_2 = 0$ , quanto com os resultados de Jensen e Soleng [36].

No que diz respeito à rotação  $\Omega$  temos o seguinte comportamento:

**Região I:** rotação constante e não nula

$$\Omega = \frac{2}{a^2} \text{ para } 0 \leq r \leq r_\Sigma$$

**Região II:** rotação variando com  $r$

Por (7.9) e (7.24) temos, para a matriz de rotação,

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -\frac{h'}{2a\Delta} = -\sqrt{p + \pi_{11} - \Lambda} = -q_2(r_S - r) = \frac{\sqrt{2}(r_S - r)}{a(r_S - r_\Sigma)}$$

donde:

$$\Omega = -\omega_A \omega^A = \frac{2(r_S - r)^2}{a^2(r_S - r_\Sigma)^2}$$

para  $r_\Sigma \leq r \leq r_S$ .

**Região III:** rotação nula

$$\Omega = 0$$

Deve ser observado que a rotação é *contínua* sobre todo o espaço-tempo, ou seja,

$$\begin{cases} \Omega_s(r = r_\Sigma) = \frac{2}{a^2} = \Omega_G \\ \Omega_s(r = r_S) = 0 = \Omega_M \end{cases}$$

onde os índices  $s$ ,  $G$  e  $M$  denotam as métricas de *string* girante, Gödel e Minkowskii, respectivamente.

## 7.4 Condições Fraca e Dominante de Energia

Resta-nos ainda estudar as condições fraca e dominante de energia, as quais devem, obrigatoriamente, ser satisfeitas pela matéria que gera a solução de *string* girante. Estas condições são enunciadas como [43]:

(a) **Fraca**  $\longrightarrow$  A densidade de energia, medida por qualquer observador, é não negativa, ou seja:

$$T_{AB}W^AW^B \geq 0$$

onde  $W^A$  é um vetor tipo tempo ou nulo.

(b) **Dominante**  $\longrightarrow$  A condição fraca deve ser válida e, além disso, exige-se que a pressão não exceda a densidade de energia. Matematicamente isto equivale a:

$$T^{00} \geq |T^{AB}|$$

O tensor momento-energia para a métrica estacionária e cilíndricamente simétrica é, por (4.6), dado em forma matricial por:

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & p + \pi_{11} & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p + \pi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p - 2\pi_{11} \end{bmatrix}$$

A matriz inversa  $T^{AB}$  é, neste caso, escrita como:

$$T^{AB} = \begin{bmatrix} \frac{(\rho + \pi_{11})}{[\rho(p + \pi_{11}) - q_2^2]} & 0 & \frac{-q_2}{[\rho(p + \pi_{11}) - q_2^2]} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(p + \pi_{11})} & 0 & 0 \\ \frac{-q_2}{[\rho(p + \pi_{11}) - q_2^2]} & 0 & \frac{\rho}{[\rho(p + \pi_{11}) - q_2^2]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(p - 2\pi_{11})} \end{bmatrix}$$

e as equações que nos dão a condição dominante de energia são, portanto, dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{00} \geq |T^{01}| \implies (p + \pi_{11}) \geq 0 \\ T^{00} \geq |T^{02}| \implies (p + \pi_{11}) \geq |-q_2| \\ T^{00} \geq |T^{11}| \implies (p + \pi_{11})^2 \geq \rho(p + \pi_{11}) - q_2^2 \\ T^{00} \geq |T^{22}| \implies (p + \pi_{11}) \geq |\rho| \\ T^{00} \geq |T^{33}| \implies (p + \pi_{11}) \geq \frac{[\rho(p + \pi_{11}) - q_2^2]}{|p + \pi_{11}|} \end{array} \right. \quad (7.47)$$

Substituindo (7.4) e (7.9) em (7.12) obtemos:

$$\rho = p + 4\pi_{11} - 2\Lambda \quad (7.48)$$

Como  $\rho$  deve ser obrigatoriamente positiva, vem daí que:

$$\Lambda < \frac{1}{2}(p + 4\pi_{11})$$

E, da condição  $\lambda^2 > 0$ , (7.4) dá:

$$\Lambda > p - \frac{1}{2}\pi_{11}$$

Vem daí então:

$$p - \frac{1}{2}\pi_{11} < \Lambda < \frac{1}{2}p + 2\pi_{11} \quad (7.49)$$

Para que (7.49) faça sentido devemos ter:

$$p - \frac{1}{2}\pi_{11} < \frac{1}{2}p + 2\pi_{11} \implies p < 5\pi_{11} \quad (7.50)$$

donde, pela primeira das desigualdades (7.47), vem:

$$0 \leq (p + \pi_{11}) < 6\pi_{11} \implies \pi_{11} > 0 \quad (7.51)$$

A segunda desigualdade (7.47) pode ser elevada ao quadrado, já que ambos os seus lados são positivos. Somando este resultado à terceira condição (7.47), obtém-se:

$$(p + \pi_{11}) \geq \frac{1}{2}\rho$$

um resultado que é imediatamente válido se a quarta condição (7.47) for satisfeita. Neste caso, conclui-se daí que a segunda e a terceira desigualdades (7.47) são completamente equivalentes à quarta — a qual é a única das três que precisa ser considerada daqui por diante. Podemos então substituir o resultado (7.48) na quarta desigualdade (7.47) acima, para obter:

$$3\pi_{11} - 2\Lambda < 0 \implies \pi_{11} < \frac{2}{3}\Lambda \quad (7.52)$$

Este resultado, juntamente com (7.51), dá:

$$0 \leq \pi_{11} < \frac{2}{3}\Lambda \quad (7.53)$$

donde se conclui que  $\Lambda$  é necessariamente positiva. Logo, de (7.49), vem:

$$p - \frac{1}{2}\pi_{11} > 0 \implies p > \frac{1}{2}\pi_{11}$$

e finalmente, com (7.50), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\pi_{11} < p < 5\pi_{11} \quad (7.54)$$

onde, por (7.51), constata-se que  $p$  é também positiva.

Rearranjando a terceira condição (7.47) para:

$$(p + \pi_{11})|p - 2\pi_{11}| \geq \rho(p + \pi_{11}) - q_2^2$$

e somando novamente com a segunda desigualdade (7.47), elevada ao quadrado, vem:

$$p + \pi_{11} + |p - 2\pi_{11}| \geq \rho \implies |p - 2\pi_{11}| \geq \rho - (p + \pi_{11})$$

o que, dado  $\rho > 0$  e valendo a quarta desigualdade (7.47), implica em:

$$|p - 2\pi_{11}| \geq \text{quantidade negativa}$$

Isto é sempre válido, já que estamos tratando aqui do módulo de  $(p - 2\pi_{11})$ .

Conclui-se daí que a condição dominante de energia, (7.47), é sempre satisfeita se (7.53) e (7.54) forem válidas — com  $\rho$ ,  $p$ ,  $\pi_{11}$  e  $\Lambda$  positivos e  $q_2$  negativo. E, destas condições, obtemos para o parâmetro  $\lambda$  dado por (7.4):

$$-9\pi_{11} + 2\Lambda < \lambda^2 < 2\Lambda \implies -4\pi_{11} < -9\pi_{11} + 2\Lambda < 2\Lambda$$

donde vem, lembrando que  $\lambda^2$  é positivo por definição:

$$0 < \lambda^2 < 2\Lambda \tag{7.55}$$

Esta condição deve ser, necessariamente, satisfeita para que a solução de *string* girante seja válida. As condições (7.53) e (7.55) são, portanto, compatíveis com as condições de causalidade global — (7.38), (7.44) e (7.46). É necessária apenas uma escolha adequada de  $r_\Sigma$  e  $r_S$  para que isto ocorra.

Com estes resultados é, portanto, possível unir uma solução com fluido incoerente em rotação (Gödel) a uma solução de vazio (Minkowskii), de um modo indireto, através da solução de *string* girante. Esta junção é analítica e, dada a escolha adequada dos parâmetros  $\lambda$ ,  $r_\Sigma$  e  $r_S$ , dá um modelo globalmente causal para o espaço-tempo a quatro dimensões, conforme esperávamos.

# Capítulo 8

## Conclusão

Apresentaremos aqui, resumidamente, os resultados obtidos neste trabalho, juntamente com algumas questões que têm possibilidades de uma análise posterior.

Em primeiro lugar, obteve-se um espaço-tempo globalmente causal, o qual envolve a solução de Gödel. Em outras palavras, a possibilidade de violação da causalidade não descarta, por si só, esta solução, visto que se pode desconsiderar a região exterior ao “cilindro causal” de Gödel, substituindo-a por uma outra solução cuja métrica — no caso em que o fluxo de calor é nulo — constitui-se em uma generalização da métrica de Gödel. Que esta solução é, de fato, Gödel generalizada é comprovado por um exame do parâmetro crítico  $\lambda$ , em termos do qual ela é escrita. Este parâmetro, como vimos, é dado em termos de quantidades associadas à matéria-fonte da solução exterior e assume valores bem específicos quando esta solução genérica é ligada exteriormente a Gödel, determinados pela condição de que não ocorram CTC's.

Além disso, no que concerne à junção de métricas em si, constatou-se que ela não pode ser efetuada em qualquer ponto da região causal de Gödel. Raios próximos a zero, assim como o próprio raio crítico  $r_c$  estão descartados (pois dão um modelo no qual

aparece uma pequena região onde ocorrem CTC's, localizada entre duas outras regiões — comparativamente maiores — que são causais). Estes resultados valem para ambas as soluções obtidas neste trabalho; entretanto, no caso da *string* girante, não se dispõe ainda de informação conclusiva acerca da possibilidade de união para o raio crítico de Gödel.

Estes resultados levam a certos pontos que poderiam ser estudados em maior profundidade. O primeiro deles seria o exame da teoria quântica de campos para o espaço-tempo descrito por qualquer dos modelos aqui estudados. Isto não apresentaria problemas conceituais, já que ambos os modelos são totalmente causais. Um outro tópico para estudo seria o estabelecimento de um sistema de coordenadas Gaussiano para esta variedade 4-dimensional, nos moldes do procedimento descrito na seção (2.3), para a região causal de Gödel. Também poderiam ser mais detalhadamente analisadas as condições para não ocorrência de CTC's para a solução de tipo *string* girante. Os resultados da seção (7.3) dão apenas condições gerais — envolvendo os três parâmetros críticos  $\lambda$ ,  $r_\Sigma$  e  $r_S$  simultaneamente — as quais tornam difícil escrever os valores ou intervalos de valores aceitáveis para estes parâmetros (já que não se conseguiu escrever uma condição ou conjunto de condições específicas para cada parâmetro isoladamente), conforme foi feito para o caso  $q_2 = 0$ , seção (5.2). Um outro estudo passível de ser efetuado seria também o de possíveis soluções não estacionárias, juntamente com uma análise de sua estabilidade — o que levaria a uma Cosmologia de *string* girante completamente causal.

Uma outra possível abordagem estaria ligada à própria possibilidade de existência de



CTC's para certos valores dos parâmetros  $\lambda$ ,  $r_\Sigma$  e  $r_S$ . A questão da não ocorrência detectada de CTC's em situações físicas reais tem motivado várias diferentes interpretações. Na visão de Hawking [44], por exemplo, as leis da Física não permitem a existência de CTC's (a isto ele denomina a "Conjectura de Proteção Cronológica"). Outros, incluindo Thorne, [45] [46] [47], discutiram o assunto sob um outro ponto de vista (análise do problema de Cauchy, por exemplo) e desenvolveram o conceito de uma "máquina do tempo", associada, por sua vez, a "*wormholes*" com topologia não trivial. Uma visão alternativa, proposta por Jensen e Soleng [36], apresenta, no entanto, soluções (como o cilindro de poeira girante a quatro dimensões) que — embora produzam CTC's para determinados valores de alguns parâmetros relevantes, em estreita analogia com os resultados deste trabalho — podem ser consideradas como fisicamente aceitáveis. Isto ocorre porque as suas fontes são fisicamente válidas. Mais do que isto, as condições fraca e dominante de energia são satisfeitas. Isto poderia estar ligado ao fato de que o surgimento de CTC's é encarado como uma questão topológica [42], [41] ao invés de uma questão geométrica.

Tendo isto em mente, as soluções globalmente causais obtidas ao longo deste trabalho poderiam levar a uma interpretação alternativa à de Hawking. Uma vez que a geometria de Gödel produz um confinamento para as geodésicas que passam pela origem do sistema de coordenadas [5] (a qual, como já vimos, pode ser escolhida arbitrariamente), poderíamos — ao invés de meramente descartar esta solução das equações de Einstein, de acordo com a "Conjectura de Proteção Cronológica" — considerar esta geometria como válida apenas em uma região restrita do espaço-tempo. Além do raio máximo

de validade desta solução, que definiria o que poderíamos denominar uma “*Cápsula de Proteção Causal*”, o espaço-tempo passaria a ser descrito continuamente por uma segunda solução, também sem problemas de causalidade. Este processo poderia ser estendido à construção de modelos englobando mais de duas soluções analiticamente unidas, como já vimos.

# Apêndice A

## Formalismo de Tetradas

Calcularemos aqui os tensores de Ricci, bem como outras quantidades relevantes, em formalismo de tetradas. Para isto será feita a escolha específica de Novello (1979) [48] de uma base de tetradas para a métrica estacionária e com simetria cilíndrica abaixo:

$$ds^2 = a^2 \left[ dt^2 - dr^2 + 2h(r)d\varphi dt + g(r)d\varphi^2 - dz^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

onde definimos a função auxiliar:

$$\Delta(r) = \sqrt{h^2(r) - g(r)} \quad (\text{A.2})$$

A base de tetradas a que nos referimos acima é escolhida de forma a que se possa escrever (A.1) sob a forma Minkowskiana:

$$ds^2 = \eta_{AB} \Theta^A \Theta^B$$

$$\eta_{AB} = (+, -, -, -)$$

onde os  $\Theta^A$  são as 1-formas diferenciáveis, escolhidas como [48]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta^0 = a(dt + hd\varphi) \\ \Theta^1 = adr \\ \Theta^2 = a\Delta d\varphi \\ \Theta^3 = adz \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Estas 1-formas possibilitam a obtenção da base inercial local de tetradas, a partir da relação:

$$\Theta^A = e_{(\alpha)}^A dx^{(\alpha)}$$

Daí as equações (A.3) nos dão os  $e_{(\alpha)}^A$  como:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{(0)}^0 = a \\ e_{(2)}^0 = ah \\ e_{(1)}^1 = a \\ e_{(2)}^2 = a\Delta \\ e_{(3)}^3 = a \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

As tetradas inversas podem ser imediatamente obtidas de:

$$e_{(\alpha)}^A e_{A(\beta)} = g_{(\alpha)(\beta)}$$

ou, ainda, da relação:

$$dx^{(\alpha)} = e_A^{(\alpha)} \Theta^A$$

Invertendo as equações (A.3), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} dt = \frac{1}{a}\Theta^0 - \frac{h}{a\Delta}\Theta^2 \\ dr = \frac{1}{a}\Theta^1 \\ d\varphi = \frac{1}{a\Delta}\Theta^2 \\ dz = \frac{1}{a}\Theta^3 \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

e as tetradas inversas,  $e_A^{(\alpha)}$ , se escrevem então como:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_0^{(0)} = \frac{1}{a} \\ e_2^{(0)} = -\frac{h}{a\Delta} \\ e_1^{(1)} = \frac{1}{a} \\ e_2^{(2)} = \frac{1}{a\Delta} \\ e_3^{(3)} = \frac{1}{a} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

As 1-formas  $\Theta^A$  podem ser derivadas exteriormente, dando:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Theta^0 = ah' dr \wedge d\varphi = \frac{h'}{a\Delta}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^1 = 0 \\ d\Theta^2 = a\Delta' dr \wedge d\varphi = \frac{\Delta'}{a\Delta}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^3 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Fazendo-se uso da relação:

$$d\Theta^A = -\omega_B^A \wedge \Theta^B$$

obtêm-se imediatamente os elementos não nulos do tensor  $\omega_B^A$ :

$$\begin{cases} \omega_1^0 = \frac{h'}{2a\Delta} \Theta^2 \\ \omega_2^0 = -\frac{h'}{2a\Delta} \Theta^1 \\ \omega_2^1 = \frac{h'}{2a\Delta} \Theta^0 - \frac{\Delta'}{a\Delta} \Theta^2 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Os coeficientes de Ricci,  $\gamma_{BC}^A$ , são obtidos de:

$$\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \Theta^C$$

donde vem então:

$$\begin{cases} \gamma_{12}^0 = \frac{h'}{2a\Delta} \\ \gamma_{21}^0 = -\frac{h'}{2a\Delta} \\ \gamma_{20}^1 = \frac{h'}{2a\Delta} \\ \gamma_{22}^1 = -\frac{\Delta'}{a\Delta} \end{cases}$$

Daí vem ( dado que  $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$  ):

$$\begin{cases} \gamma_{012} = -\gamma_{102} = \frac{h'}{2a\Delta} \\ \gamma_{021} = -\gamma_{201} = -\frac{h'}{2a\Delta} \\ \gamma_{120} = -\gamma_{210} = -\frac{h'}{2a\Delta} \\ \gamma_{122} = -\gamma_{212} = \frac{\Delta'}{a\Delta} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

As 2-formas de curvatura,  $\Omega_B^A$ , são dadas pela relação:

$$\Omega_B^A = d\omega_B + \omega_C^A \wedge \omega_B^C$$

Temos então, de (A.8), os seguintes resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega_1^0 = \frac{h'}{2a^2\Delta} \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\omega_2^0 = 0 \\ d\omega_2^1 = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} - \frac{h''}{\Delta} \right) \Theta^0 \wedge \Theta^1 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{h'^2}{2\Delta^2} - \frac{\Delta''}{\Delta} \right) \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ \omega_2^0 \wedge \omega_1^2 = -\frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \Theta^0 \wedge \Theta^1 - \frac{h'\Delta'}{2a^2\Delta^2} \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ \omega_1^0 \wedge \omega_2^1 = -\frac{h'^2}{4a^2\Delta^2} \Theta^0 \wedge \Theta^2 \\ \omega_0^1 \wedge \omega_2^0 = \frac{h'^2}{4a^2\Delta^2} \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{array} \right.$$

e, neste caso, vem finalmente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1^0 = -\frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \Theta^0 \wedge \Theta^1 + \frac{1}{2a^2} \left( \frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right) \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ \Omega_2^0 = -\frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \Theta^0 \wedge \Theta^2 \\ \Omega_2^1 = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right) \Theta^0 \wedge \Theta^1 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{3}{4} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 - \frac{\Delta''}{\Delta} \right) \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

As curvaturas de Riemann  $R_{BCD}^A$  na base de tetradas (A.4) podem ser então obtidas imediatamente da relação:

$$\Omega_B^A = -\frac{1}{2} R_{BCD}^A \Theta^C \wedge \Theta^D$$

Portanto, os resultados (A.10) dão:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{101}^0 = \frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \\ R_{112}^0 = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right) \\ R_{202}^0 = \frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \\ R_{201}^1 = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{h''}{\Delta} - \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} \right) \\ R_{212}^1 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{3}{4} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

e os tensores de Ricci não nulos em base de tetradas podem ser imediatamente calculados:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -\frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \\ R_{11} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{h'^2}{2\Delta^2} \right) \\ R_{22} = R_{11} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{h'^2}{2\Delta^2} \right) \\ R_{02} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'\Delta'}{\Delta^2} - \frac{h''}{\Delta} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

O escalar de curvatura  $R$  é portanto:

$$R = R_{00} - 2R_{11} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 - \frac{2\Delta''}{a^2\Delta} \quad (\text{A.13})$$

e a componente  $G_{11}$  do tensor de Einstein — a única que será necessária para as considerações acerca da continuidade das métricas a serem unidas — é dada por:

$$G_{11} = R_{11} + \frac{1}{2}R = -\frac{1}{4a^2} \left( \frac{h'}{\Delta} \right)^2 \quad (\text{A.14})$$



Estes resultados são os empregados no Capítulo (4) deste trabalho para se escrever o conjunto de equações de campo para a métrica (A.1) ( equações (4.15) ).

# Apêndice B

## Testes para a Solução Exterior

Vamos, neste Apêndice, aplicar dois tipos de testes à solução exterior (4.39) obtida anteriormente, para o caso específico em que  $q_2 = 0$  e  $\lambda^2 > 0$ . Em primeiro lugar, verificaremos que esta solução satisfaz as condições de junção de Darmois; em seguida, provaremos que a solução definida por (4.39) é equivalente à solução de Gödel para um fluido gerador com:

$$\begin{cases} p = \pi_{11} = 0 \\ \Lambda = -\frac{2}{a^2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Para provarmos a validade das condições de junção de Darmois, vamos obter as derivadas primeiras de (4.39) em relação a  $r$  e calcular, em seguida, os valores das funções e de suas derivadas em  $r = r_\Sigma$ . Dados  $h(r)$  e  $\Delta(r)$  definidos pela equação (4.39), suas derivadas são facilmente obtidas:

$$h'(r) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \left\{ (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sinh [\lambda(r - r_\Sigma)] + \lambda(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cosh [\lambda(r - r_\Sigma)] \right\} \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta'(r) = (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \cosh [\lambda(r - r_\Sigma)] + \lambda(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \sinh [\lambda(r - r_\Sigma)] \quad (\text{B.16})$$

Lembrando que [31]:

$$\begin{cases} \sinh 0 = 0 \\ \cosh 0 = 1 \end{cases}$$

podemos, de (4.39) e de (B.15) e (B.16), obter facilmente os valores  $h(r_\Sigma)$ ,  $\Delta(r_\Sigma)$ ,  $h'(r_\Sigma)$

e  $\Delta'(r_\Sigma)$ :

$$\begin{aligned} h(r_\Sigma) &= \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \left\{ \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{\lambda} \cosh 0 + (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \sinh 0 + \frac{1}{2\lambda} [(\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma - 2] \right\} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \left\{ \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} [(\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma - 2] \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} \{4 \sinh^2 r_\Sigma + 2 + (\lambda^2 - 4) \sinh^2 r_\Sigma - 2\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2} \lambda^2 \sinh^2 r_\Sigma \\ &= \sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \Delta(r_\Sigma) &= \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{\lambda} \sinh 0 + (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cosh 0 \\ &= \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} h'(r_\Sigma) &= \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \{ (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sinh 0 + \lambda(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cosh 0 \} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \lambda(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \\ &= 2\sqrt{2} \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned}
\Delta'(r_\Sigma) &= (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \cosh 0 + \lambda(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \sinh 0 \\
&= 2 \sinh^2 r_\Sigma + 1
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Comparando os resultados (B.17) a (B.20), as condições de junção de Darmois — equações (4.22) — são realmente válidas e, portanto, a solução exterior (4.39) pode, de fato, ser ligada à solução de Gödel através da hipersuperfície  $\Sigma$ .

Vamos agora considerar o caso especial de um fluido gerador sem pressão e apresentando apenas densidade e a constante cosmológica, dado por:

$$\begin{cases} p = \pi_{11} = 0 \\ \Lambda = -\frac{2}{a^2} \end{cases} \tag{B.21}$$

Substituindo (B.21) na segunda das equações (4.17), obtemos o valor específico para  $\lambda$  como:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sqrt{a^2 (2p - \pi_{11} - 2\Lambda)} \\
&= \sqrt{2a^2 \left(\frac{2}{a^2}\right)} \\
&= 2
\end{aligned} \tag{B.22}$$

A solução com  $\lambda = 2$  se escreve como:

$$\Delta(r) = \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{2} \sinh [2(r - r_\Sigma)] + (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \cosh [2(r - r_\Sigma)] \tag{B.23}$$

$$h(r) = \sqrt{2} \left\{ \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{2} \cosh [2(r - r_\Sigma)] + (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \sinh [2(r - r_\Sigma)] - \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{B.24})$$

Lembrando, agora, que [31]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh(2x) = 2 \sinh^2 x + 1 \end{array} \right. \quad (\text{B.25})$$

e, mediante um cálculo simples e substituindo (B.25) na solução dada por (B.23) e (B.24), obtemos:

$$\begin{aligned} \sinh[2(r - r_\Sigma)] &= 2 \sinh(r - r_\Sigma) \cosh(r - r_\Sigma) \\ &= 2(\sinh r \cosh r_\Sigma - \cosh r \sinh r_\Sigma)(\cosh r \cosh r_\Sigma \\ &\quad - \sinh r \sinh r_\Sigma) \\ &= 2(\sinh r \cosh r \cosh^2 r_\Sigma - \sinh^2 r \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \\ &\quad - \cosh^2 r \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma + \sinh r \cosh r \sinh^2 r_\Sigma) \\ &= 2 \left[ \sinh r \cosh r (\cosh^2 r_\Sigma + \sinh^2 r_\Sigma) - (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma)(\sinh^2 r + \cosh^2 r) \right] \\ &= 2(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sinh r \cosh r \\ &\quad - 2(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma)(\sinh^2 r + \cosh^2 r) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\cosh[2(r - r_\Sigma)] = 2 \sinh^2(r - r_\Sigma) + 1$$

$$\begin{aligned}
&= 2(\sinh r \cosh r_\Sigma - \cosh r \sinh r_\Sigma)^2 + 1 \\
&= 1 + 2(\sinh r \cosh r_\Sigma - \cosh r \sinh r_\Sigma)^2 \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

E, então, a solução para o caso em que  $\lambda = 2$  é calculada, para  $\Delta(r)$ , como:

$$\begin{aligned}
\Delta(r) &= \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{2} 2 \left[ (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sinh r \cosh r - (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma)(\sinh^2 r + \cosh^2 r) \right] \\
&+ \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \left[ 1 + 2(\sinh r \cosh r_\Sigma - \cosh r \sinh r_\Sigma)^2 \right] \\
&= \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \left[ 1 + 2(\sinh r \cosh r_\Sigma - \cosh r \sinh r_\Sigma)^2 - (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)(\sinh^2 r + \cosh^2 r) \right] \\
&+ (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)^2 \sinh r \cosh r \\
&= (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)^2 \sinh r \cosh r \\
&+ \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \left[ 1 + 2 \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + 2 \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma - 4 \sinh r \cosh r \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \right] \\
&- \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \left[ 2 \sinh^2 r \sinh^2 r_\Sigma - 2 \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma - \sinh^2 r - \cosh^2 r \right] \\
&= (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)^2 \sinh r \cosh r \\
&+ \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \left[ -2 \sinh^2 r + 2 \sinh^2 r (\cosh^2 r_\Sigma - \sinh^2 r_\Sigma) - 4 \sinh r \cosh r \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma \right] \\
&= (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)^2 \sinh r \cosh r - 4 \sinh r \cosh r \sinh^2 r_\Sigma \cosh^2 r_\Sigma \\
&= \sinh r \cosh r \left[ 4 \sinh^4 r_\Sigma + 1 + 4 \sinh^2 r_\Sigma - 4 \sinh^2 r_\Sigma \cosh^2 r_\Sigma \right] \\
&= \sinh r \cosh r \left[ 4 \sinh^4 r_\Sigma + 1 + 4 \sinh^2 r_\Sigma (1 - \cosh^2 r_\Sigma) \right] \\
&= \sinh r \cosh r \left[ 4 \sinh^4 r_\Sigma + 1 - 4 \sinh^2 r_\Sigma \right] \\
&= \sinh r \cosh r \quad (\text{B.28})
\end{aligned}$$

e, para  $h(r)$ , temos que:

$$\begin{aligned}
h(r) &= \frac{(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1)}{\sqrt{2}} \left[ 1 + 2(\sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma - 2 \sinh r \cosh r \sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma) \right] \\
&+ 2\sqrt{2}(\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma) \left[ (2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \sinh r \cosh r - (\sinh r_\Sigma \cosh r_\Sigma)(\sinh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r_\Sigma) \right] \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \left[ \frac{1}{2} + (\sinh r \cosh r_\Sigma - \cosh r \sinh r_\Sigma)^2 \right] \\
&- 2\sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \cosh^2 r_\Sigma (\sinh^2 r + \cosh^2 r) - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}(2 \sinh^2 r_\Sigma + 1) \left[ \frac{1}{2} + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma \right] \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \cosh^2 r_\Sigma (\sinh^2 r + \cosh^2 r) \\
&= 2\sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \left[ \frac{1}{2} + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma \right] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(\sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma - \frac{1}{2} - 2 \sinh^2 r_\Sigma \cosh^2 r_\Sigma (\sinh^2 r + \cosh^2 r)) \\
&= 2\sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \left[ \frac{1}{2} + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma - \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma - \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma \right] \\
&+ \sqrt{2}(\sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma) . \\
&= 2\sqrt{2} \sinh^2 r_\Sigma \left[ \frac{1}{2} - \cosh^2 r (\cosh^2 r_\Sigma - \sinh^2 r_\Sigma) \right] \\
&+ \sqrt{2}(\sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma) \\
&= \sqrt{2} \left\{ \sinh^2 r_\Sigma - 2 \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma + \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma \right\} \\
&= \sqrt{2} \left\{ \sinh 6r_\Sigma - \cosh^2 r \sinh^2 r_\Sigma + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma \right\} \\
&= \sqrt{2} \left\{ \sinh^2 r_\Sigma (1 - \cosh^2 r) + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma \right\} \\
&= \sqrt{2} \left\{ -\sinh^2 r \sinh^2 r_\Sigma + \sinh^2 r \cosh^2 r_\Sigma \right\} \\
&= \sqrt{2} \sinh^2 r \left( \cosh^2 r_\Sigma - \sinh^2 r_\Sigma \right) \\
&= \sqrt{2} \sinh^2 r
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Os resultados (B.28) e (B.29) são, exatamente, a solução de Gödel em coordenadas cilíndricas, conforme (2.15). A solução genérica (4.39), portanto, tem como caso especial a solução de Gödel para  $\lambda = 2$ . Como vimos, no Capítulo (5), o parâmetro  $\lambda$  é que define a existência — ou não — de CTC's na variedade definida pela solução genérica (4.39), quando escolhemos  $r_\Sigma = 0$ .



# Referências

- [1] Gödel, K. "*An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation.*" *Rev. Mod. Phys.* **21**, 3 (1949).
- [2] Kundt, W. "*Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen kosmologischen Modell.*" *Zeitschrift für Physik* **145**, 611 (1956).
- [3] Chandrasekhar, S. e Wright, J. P. "*The Geodesics in Gödel's Universe.*" *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **47**, 341 (1961).
- [4] Hiscock, W. A. "*Scalar Perturbations in the Gödel's Universe.*" *Phys. Rev. D*, **17**(6), 1947 (1978).
- [5] Novello, M. , Soares, I. D. e Tiomno, J. "*Geodesic Motion and Confinement in Gödel's Universe.*" *Phys. Rev. D*, **27**(4), 779 (1983).
- [6] Agakov, V. G. "*The Nonstationary Generalization of the Gödel Cosmological Model.*" *Gen. Rel. and Grav.* , **16**(4), 317 (1984).
- [7] Malament, D. "*A Note about Closed Timelike Curves in Gödel Space-Time.*" *J. Math. Phys.* , **28**(10), 2427 (1987).

- [8] Adler, R. , Bazin, M. e Schiffer, M. "*Introduction to General Relativity.* " Mc Graw-Hill, 2ª edição (1975).
- [9] Hawking, S. e Ellis, G. F. R. "*The Large Scale Structure of Space-Time.* " Cambridge University Press (1977), pgs. 168-170.
- [10] Novello, M. (Editor) "*IIª Escola de Cosmologia e Gravitação.* " CBPF (1982). pg. 326.
- [11] Guimarães, M. E. X. "*Sistemas Sincrônicos de Coordenadas no Universo de Gödel.* " Tese de Mestrado, CBPF (1991).
- [12] Rodrigues, Ligia M. C. S. "*Um Estudo do Acoplamento Gravitacional de Neutrinos com a Vorticidade da Matéria.* " Capítulo II. Tese de Doutorado, CBPF (1987).
- [13] Spiegel, M. R. "*Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas.* " Coleção Schaum (1973).
- [14] Novello, M. , Svaiter, N. F. e Guimarães, M. E. X. "*Backwards Time Travel Induced by Combined Magnetic and Gravitational Fields.* " Mod. Phys. Letters A, 7, 5 (1992), 381-386.
- [15] Calvão, M. O. "*Geodésicas em Universos do tipo de Gödel.* " Tese de Mestrado, CBPF (1982).
- [16] Leahy, D. A. "*Scalar and Neutrino Fields in the Gödel Universe.* " International Journal of Theoretical Physics 21, 8/9 (1982).

- [17] Novello, M. , Svaiter, N. F. e Guimarães, M. E. X. “*Synchronized Frames for Gödel’s Universe.* ”CBPF (1991) — aceito para publicação.
- [18] Novello, M. e Costa, I. “*Sistema de Coordenadas Gaussianas.* ”Estudo. CBPF (1987).
- [19] Darmais. G. “*Mémorial des Sciences Mathématiques.* ”Gauthier-Villars, Paris (1927). Fasc. 25.
- [20] Lichnerowicz, A. “*Théories Relativistes de la Gravitation et de l’Électromagnétisme.* ”Masson, Paris (1955).
- [21] O’Brien, S. e Synge, J. L. “*Jump Conditions at Discontinuities in General Relativity.* ”Commun. of the Dublin Institute for Advanced Studies (1952). Series A, 9.
- [22] Israel, W. “*Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity.* ” Nuovo Cimento, 44 (1966), 1.
- [23] Robson, E. H. “*Junction Conditions in General Relativity Theory.* ”Ann. Inst. Henri Poincaré, 16 (1972), 41.
- [24] Bonnor, W. B. e Vickers, P. A. “*Junction Conditions in General Relativity.* ” G. R. G. , 13 (1981), 29.
- [25] Arcuri, R. C. “*Núcleos Atrasados de Matéria no Universo de Friedmann.* ”Tese de Mestrado, CBPF (1982).

- [26] Lake, K. "*Some Notes on the Propagation of Discontinuities in Solutions to the Einstein Equations.*" *V<sup>th</sup> Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, CBPF; Mário Novello (Editor). World Scientific (1987).
- [27] Misner, C. W., Thorne, K. S. e Wheeler, J. A. "*Gravitation.*" W. H. Freeman & Company (1973), capítulo 8, 3<sup>a</sup> edição.
- [28] Kumar, M. M. e Singh, B. P. "*A Note on the Boundary Condition of O'Brien and Synge.*" *Prog. Theor. Phys.*, **52** (1974), 1068.
- [29] Israel, W. "*Discontinuities in Spherically Symmetric Gravitational Fields and Shells of Radiation.*" *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **248** (1958), 404.
- [30] Novello, M. (Editor) "*II<sup>a</sup> Escola de Cosmologia e Gravitação.*" CBPF (1982), pgs. 226-227.
- [31] Spiegel, M. R. "*Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas.*" Coleção Schaum; pgs. 26-31.
- [32] Novello, M. (Editor) "*II<sup>a</sup> Escola de Cosmologia e Gravitação.*" CBPF (1982); pgs. 280-281.
- [33] Novello, M. e d'Olival, J. B. S. "*Nonlinear Viscous Cosmology.*" *Acta Physica Polonica*, *n<sup>o</sup> 1*, B 11 (1980), 3-13.
- [34] Gott III, R. J. "*Closed Timelike Curves Produced by Pairs of Moving Cosmic Strings: Exact Solutions.*" *Phys. Rev. Letters* **66**, 9 (1991), 1126-1129.

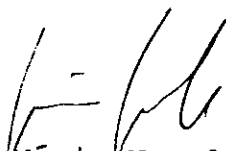
- [35] Jensen, B. "*Notes on Spinning Strings.*" *Class. Quantum Grav.* **9** (1992).
- [36] Jensen, B. e Soleng, H. H. "*General-Relativistic Model of a Spinning Cosmic String.*" *Phys. Rev. D* **45**, 8 (1992).
- [37] Kibble, T. W. B. "*Topology of Cosmic Domains and Strings.*" *J. Phys. Math. Gen.* **9**, 8 (1976) , 1387-1398.
- [38] Villenkin, A. *Phys. Rev. D* **23**, 852 (1981).
- [39] Gott III, R. J. "*Gravitational Lensing Effects of Vacuum Strings: Exact Solutions.*" *Astrophys. J.* , **288** (1985), 422-427.
- [40] Hiscock, W. A. "*Exact Gravitational Field of a String.*" *Phys. Rev. D*, **31** , 12 (1985), 3288-3290.
- [41] Deser, S. , Jackiw, R. e 't Hooft, G. *Ann. Phys.* **152**, 220 (1984).
- [42] Mazur, P. O. "*Spinning Cosmic Strings and Quantization of Energy.*" *Phys. Rev. Letters*, **57**, 8 (1986), 929-932.
- [43] Hawking, S. e Ellis, G. F. R. "*The Large Scale Structure of Space-Time.*" Cambridge University Press (1977); pgs. 88-96.
- [44] Hawking, S. W. "*The Chronology Protection Conjecture.*" University of Cambridge (1991), Preprint.
- [45] Thorne, K. S. "*Do the Laws of Physics Permit Closed Timelike Curves ?*" Caltech (1991), Preprint.

- [46] Friedmann, J. , Morris, M. S. , Novikov, I. D. , Echeverria, F. , Klinkhammer, G. , Thorne, K. S. , Yurtsever, U. "*Cauchy Problem in Spacetimes with Closed Timelike Curves.*" Phys. Rev. D, **42**, 6 (1990), 1915-1930.
- [47] Morris, M. S. , Thorne, K. S. , Yurtsever, U. "*Wormholes, Time Machines and the Weak Energy Condition.*" Phys. Rev. Letters, **61**, 13 (1988), 1446-1449.
- [48] Novello, M. (Editor) "*IIª Escola de Cosmologia e Gravitação.*" CBPF (1982); pg. 326.

"CONSTRUÇÃO DE MODELOS PARA UM UNIVERSO GLOBALMENTE CAUSAL  
A PARTIR DA SOLUÇÃO DE GÖDEL"

MARTHA CHRISTINA MOTTA DA SILVA

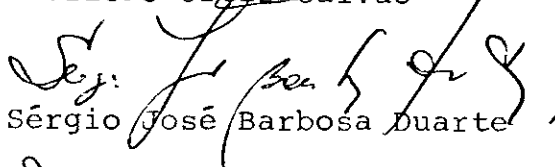
Tese de Mestrado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



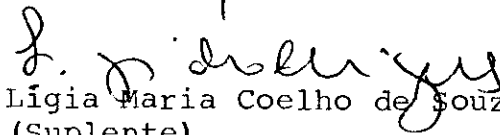
Mário Novello  
(Presidente)



Maurício Ortiz Calvão



Sérgio José Barbosa Duarte



Lígia Maria Coelho de Souza Rodrigues  
(Suplente)

Rio de Janeiro, 11 de dezembro de 1992