

LADÁRIO DA SILVA

CRITICALIDADE E MULTIFRACTALIDADE DO MÓDELO DE POTTS

EM

REDES FRACTAIS HIERÁRQUICAS

TESE

DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

538  
RIO DE JANEIRO

1992



a minha mãe Maria da Penha.  
e a meu irmão Ubaldo.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Evaldo Mendonça Fleury Curado pelo aprendizado, pela orientação, atenção e paciência a mim dedicadas no mestrado.

Ao amigo Welles Antônio Martinez Morgado pelas longas discussões, amizade, apoio, senso de companheirismo e entusiasmo que foram extremamente importantes para o desenvolvimento desta tese.

Ao Prof. Constantino Tsallis pelo apoio e discussões a partir das quais surgiu uma seção desta tese.

A Prof. Aglaé C. N. de Magalhães pelas discussões e atenção.

Aos amigos e colegas do grupo de Mecânica Estatística Anna M. N. Chamme, Daniel Stariolo, Fortunato de Menezes, Francisco Tamarit, Edson P. da Silva, Hélio F. V. de Resende, Marcelo L. Martins e Sérgio A. Cannas pela amizade, ótimo ambiente de trabalho, apoio e discussões que me proporcionaram.

A amiga Celina pelas discussões sobre Pascal e aos amigos Wagner Carvalho e Régio Gomes pelo apoio em computação.

A Vanda W. de Carvalho, Almério V. de Castro, Myrian S. Coutinho, Vera L. T. Carvalho, Denise Coutinho, Júlio Sobral, Luis Reis, Juciário, Wagner, Edson, João, Fátima, Bahiano, Velho, Seu Altino, D. Maria, D. Regina e todos os demais funcionários do CBPF pela atenção e presteza a mim dispensadas.

Aos amigos do CBPF e UFRJ Maria Emília, Liana, Nilton Guedes, Bolinha, André, Prego, Heloísa, Lilian, Marco Antônio,

Dirceu, Barbi, Ila, Diomara, Mioco, Panama, Paulo, Velasco, Edson, Roberto Sarthour, Isaias, Márcia Midori, Oswaldo, Bartô, Carmen, Mônica, CD, Vinicius, Paulo, Jony, Ricardo Paschoal, Fernando, Célia Anteneodo, Célia Maghely, Marco Antônio, Dirceu, Sheila, Jansen, Júnior, Cambraia, Tião, Sônia, Zé Luiz, Nicola, Pardal, Nilson, Paiva, Cabeludo, Hilário, Gérson, Álvaro Nogueira, Leoni, Álvaro Dutra, Magda, Thompson, Collato, Sobral, Soares, Sérgio Duque, André Penna, Guilherme, Catatau, Orlando e outros pelo companheirismo.

Aos amigos do Alojamento meu agradecimento especial pelo rico convívio, apoio e amizade que me proporcionaram nestes últimos anos, em especial a Jorge de Azevedo Freitas, Luiz Carlos C. S. Veiga, Miguel Arcanjo, Ana Paula Damato, Cláudio Barcellos, Lúcio (Itajubá), Estelita, JB, Figueiró, Fatica, Sheila, Airton, Ana Lúcia, Cláudia (Muriaé), Giovanni, Leida, Júlio, Cosme, Edson, Taninha, Fátima Celeman, Sôzinha, Joana, Gaúcho, Pedreira, Big, Rose, Iva, Carmen, Tânia, Icléa, Silvia, Mônica, Agenor, Jurema, Cláudia Baix, Flávio, Eliane, Lucimar, Patrícia, Rose Rupertti, Sônia (Sul), Luís, Márcio, Pimentel, Jackson, Eudes, Lorde, Buché, Ernesto, Gesil, Zé Antônio, Chico, Lúcia, Cláudio (Taubaté), Myrian, Jonhy, Ozana, Salomão, Alfama, Simone, Celi, Sintra, Mariza, Nathaly, Astério...

A amiga Mônica Ramalho pela amizade e apoio inestimável.

Aos meus familiares.

Ao amigo Juan Avila Aguirre pelos desenhos da tese.

Ao CBPF pela oportunidade de desenvolver meus estudos de mestrado e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

## RESUMO

Obtivemos, para o modelo de Potts ferromagnético a campo nulo, as magnetizações - de cada sítio e média por sítio - nas redes fractais hierárquicas diamante (RD) e ponte de wheatstone (RPW), através de equações de recorrência.

Calculamos exatamente alguns expoentes como por exemplo o expoente crítico da magnetização média por sítio ( $\beta$ ),  $\nu$ , etc... assim como o expoente de Lipshitz-Hölder ( $\alpha$ ) máximo e mínimo, relacionando-os com os demais expoentes.

Verificamos que estas redes fractais respeitam a lei de hiperescala para este modelo e ao calcular a função  $f(\alpha)$ , para a medida definida como a magnetização de cada sítio de um perfil da rede diamante dividida pela magnetização total deste perfil, observamos que esta magnetização local apresenta comportamento multifractal na temperatura crítica  $T_c$ .

## ABSTRACT

We obtained, for the zero field ferromagnetic Potts model, the magnetization for each lattice site as well as the per site average one, on the fractal hierarchical lattices a) diamond and b) wheatstone bridge, by means of recurrence equations.

We calculated exactly some exponents as the critical one for the per site average magnetization ( $\beta$ ),  $\nu$ , etc.. and also the maximum and minimum Lipshitz-Hölder exponent ( $\alpha$ ), relating then with the others exponents.

We also verified these fractal lattices obey the hiperscaling law for this model, and calculating the  $f(\alpha)$  function for the measure defined as the per site magnetization of a profile divided by its total magnetization, we observed this magnetization has a multifractal behavior at the critical temperature  $T_c$ .

## SUMÁRIO

Dedicatória.....	ii
Agradecimentos.....	iii
Resumo.....	v
Abstract.....	vi
Sumário.....	vii
Lista de Figuras.....	x
Lista de Tabelas.....	xiii
Introdução.....	1
CAPÍTULO 1: ASPECTOS DE TRANSIÇÃO DE FASES E MODELO DE POTTS.....	6
1.1) Termodinâmica das Transições de Fase.....	6
1.2) Fenômenos críticos.....	16
1.3) Modelo de Potts.....	25
CAPÍTULO 2: FRACTAIS E MULTIFRACTAIS.....	28
2.1) Fractais.....	28
2.1.1) Dimensão Fractal.....	28
2.1.1.1) Conjunto Triádico de Cantor.....	29
2.1.1.2) Conjunto Quártico de Koch.....	31
2.1.2) Dimensão de Similaridade.....	31
2.1.3) Redes Hierárquicas.....	33
2.1.3.1) Definições e Propriedades.....	33

2.2) Multifractais.....	37
2.3.1) Distribuição Binomial Multiplicativa.....	37
2.3.2) O Exponete de Lipshitz-Hölder e a função $f(\alpha)$ .....	39
2.3.3) Expoentes de Massa de uma Distribuição de Ordem $q$ ( $\tau(q)$ ).....	41

CAPÍTULO 3: CRITICALIDADE E MULTIFRACTALIDADE DO MODELO DE

POTTS EM REDES FRACTAIS HIERÁRQUICAS..... 44

3.1) Criticalidade do Modelo de Potts.....	44
3.1.1) Descrição do Problema em Redes Fractais... 44	
3.1.2) Equações de Recorrência para a Magnetização Local.....	49
3.1.3) Equações de Recorrência para a Magnetização Média.....	55
3.1.4) Generalização para uma Família de Redes Diamante.....	61
3.1.5) Comportamento Crítico.....	63
3.1.6) Equação Analítica para o Expoente Crítico $\beta$ .....	69
3.1.7) Magnetização Local de um Perfil da RD.....	70
3.1.8) Relação de Hiperescala.....	75
3.2) Multifractalidade do Modelo de Potts.....	77
3.2.1) Função Multifractal $f(\alpha)$ de um Perfil da RD.....	77
3.2.2) Expoentes de Lipshitz-Hölder ( $\alpha$ ) Máximo e Mínimo.....	80



Conclusões:.....	86
Apêndice A.....	89
Apêndice B.....	90
Apêndice C.....	98
Referências.....	102

## LISTA DE FIGURAS

FIGURAS	PÁGINA
1.1 - Seção PT de um diagrama de fases PVT para um fluido.....	11
1.2 - Seção HT de um diagrama de fases HMT para um magneto.....	11
1.3 - Comportamento do potencial de Gibbs em uma transição de primeira ordem.....	13
1.4 - Comportamento do potencial de Gibbs em uma transição contínua.....	14
1.5 - Rede quadrada com spins de Ising, na qual se aplica o método de Kadanoff.....	23
2.1 - Construção do conjunto triádico de Cantor.....	30
2.2 - Construção do conjunto quártico de Koch.....	31
2.3 - Construção da curva de Mandelbrot-Given.....	32

2.4	- Exemplos de redes hierárquicas e sua construção.....	34
2.5	- Curva $f(\alpha)$ para a distribuição binomial.....	40
3.1	- a) Célula básica da rede diamante sobre a qual são feitos os cálculos para a obtenção das equações de recorrência das magnetizações locais; b) Famílias de redes diamante geradas pela variação do número de coordenação dos terminais da célula básica.....	47
3.2	- Expoente crítico $\beta$ em função do número de estados ( $q$ ) do modelo de Potts ferromagnético para as redes diamante e ponte de wheatstone.....	67
3.3	- Perfil da rede diamante com 3 hierarquias mostrando as classes de equivalência.....	71
3.4	- Comportamento dos spins de um perfil da rede diamante com 10 hierarquias, mostrando a dependência das magnetizações em função dos parâmetros $q$ e $N_c$ .....	72
3.5	- Sequência de spins de menor magnetização local.....	74

3.6	- Curva $f(\alpha)$ para o perfil da rede diamante usual ( $N_c = 2$ ) com 29 hierarquias para diversos valores de $q$ : a) $q = 1.5$ ; b) $q = 4$ .....	79
	b) $q = 10$ .....	80
3.7	- Diversos expoentes da rede diamante em função do número de estados do modelo( $q$ ) para:	
	a) $N_c = 2$ ; b) $N_c = 5$ .....	84
	c) $N_c = 10$ ; d) $N_c = 100$ .....	85
B.1a	- Grafos usados no cálculo da média $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$ para a RD...	92
B.1b	- Grafos usados no cálculo da média $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$ para a RD...	93
B.2a	- Grafos usados no cálculo da média $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$ para a RPW..	96
B.2b	- Grafos usados no cálculo da média $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$ para a RPW..	97

## LISTA DE TABELAS

TABELAS	PÁGINA
1.1 - Sumário das transformadas de Legendre de $U$ mais comuns para um fluido.....	9
1.2 - Sumário com definição dos expoentes críticos mais comuns para sistemas magnéticos.....	17
1.3 - Valores de alguns expoentes críticos.....	19
3.1 - Resultados para o expoente crítico $\beta$ exatos.....	68

## INTRODUÇÃO

Modelos exatamente solúveis em física, como por exemplo o da partícula livre e oscilador harmônico, sempre foram de grande importância para a compreensão de diversos fenômenos físicos, servindo suas soluções exatas, muitas vezes, de guia para soluções aproximadas de problemas mais complexos. Em particular para a Física Estatística, a existência de modelos exatamente solúveis [1] pode revelar aspectos fundamentais das transições de fase em sistemas termodinâmicos, haja visto a relevância e posterior influência exercida pelos resultados exatos obtidos por Onsager [2] para o modelo de Ising bi-dimensional, nos quais, dentre outros resultados, se observou uma discordância entre os valores clássicos e os exatos dos expoentes críticos.

Particularmente em sistemas magnéticos isolantes, diversos modelos têm sido utilizados, entre outros aspectos, para uma melhor compreensão das transições de fase de primeira ordem e contínuas, como por exemplo, os modelos de Ising e Potts. O modelo de Ising [3], que pode ser adequado para descrever diversos sistemas que possuam uma forte anisotropia uniaxial, associa variáveis de spin aos sítios de uma determinada rede, os quais interagem entre si podendo somente ser paralelos ou antiparalelos. O modelo de Potts [4] é uma extensão do modelo de Ising, pois associa a cada sítio da rede uma variável de spin que pode estar em  $q$  diferentes estados, ao invés de somente dois no modelo de Ising. A energia de interação entre

dois spins de Potts que estão no mesmo estado é diferente (menor) que a energia de interação quando estão em estados diferentes. O modelo de Potts se reduz a vários sistemas conhecidos para alguns valores de  $q$  como por exemplo:  $q = 2$ , modelo de Ising;  $q = 1$ , percolação;  $q = 0$ , resistores aleatórios, etc.

Vários sistemas apresentam uma criticalidade (expoentes críticos) que pode ser descrita pelo modelo de Potts, pertencendo assim à mesma classe de universalidade do modelo em questão. Alguns desses sistemas são: polímeros cujo processo de vulcanização pertence à classe de universalidade  $0 \leq q \leq 1$ ; o  $\text{DyPO}_4$  em  $d = 3$  para  $q = 2$ ; adsorção de  $^4\text{He}$  em grafite com  $1/3$  de cobertura ( $d = 2$ ) para  $q = 3$  e  $\text{O}_2$  adsorvido em uma superfície de Ni para  $q = 4$  [5]. Este modelo tem também sido estudado em diversas redes como a cúbica, quadrada, triangular, hexagonal, honeycomb, etc... calculando-se por exemplo o ponto crítico [5] de transição nestas redes.

Ultimamente, diversos modelos magnéticos vêm sendo também estudados em redes fractais hierárquicas [6], as quais têm atraído a atenção dos pesquisadores especialmente após a observação de que as equações de recorrência de Migdal-Kadanoff [7] podiam ser exatamente resolvidas nestas redes. A possibilidade de obtenção de inúmeros resultados exatos [8] estimulou o estudo de vários modelos, dentre os quais o de Ising e Potts nestas redes, a despeito do fato de não serem encontradas na natureza. Por exemplo o cálculo de expoentes críticos dependendo continuamente de um parâmetro, a obtenção

de pontos fixos e de linhas de pontos fixos [9] são facilmente realizados nestas redes para esses modelos.

As redes hierárquicas têm a sua riqueza e relevância teórica reforçada pela sua característica de serem invariantes por escala pertencendo assim a uma classe de objetos geometricamente auto-similares denominada fractais [10], os quais possuem, em geral, dimensão não inteira. A importância de sistemas fractais, que são objetos cuja "massa" cresce algebricamente com uma distância característica do sistema, com expoentes em geral não euclidianos, foi difundida por Mandelbrot [11]. Os fractais têm sido exhaustivamente estudados tanto no contexto teórico quanto experimental. Podem ser encontrados em diversas áreas tais como em percolação [12], agregação por difusão limitada (DLA), que é observada na eletrodeposição de Zn [13], na formação de agregados de proteínas de imunoglobulina [14], no estudo do deslocamento de um fluido viscoso [15] (por exemplo óleo) por outro fluido de menor viscosidade em um meio poroso (por exemplo água), o que tem importância prática para a extração de petróleo, etc... O estudo da estatística de Hurst - Análise R/S - [16,17] e do movimento fracional Browniano [17] são também áreas atuais de interesse em fractais.

A análise da distribuição de uma medida, seja ela uma grandeza física ou não, em um suporte geométrico deu origem ao conceito de multifractais [10] introduzido por Mandelbrot [11] e retomado principalmente por Grassberger [18], Hentshel e Procaccia [19], Frisch e Parisi [20] dentre outros nomes. O



comportamento multifractal têm sido observado em diversos sistemas como na distribuição de correntes em um resistor fractal [21], em processos de crescimento e DLA [22] nas células de Hele-Shaw [23], no escoamento viscoso para um número de capilaridade alto [24], etc... A caracterização da distribuição de uma medida como multifractal pode ser feita calculando-se a função  $f(\alpha)$  [10,17] que determina a gama de dimensões envolvidas no processo de distribuição, onde  $\alpha$  é o expoente de Lipshitz-Hölder [17].

Uma das primeiras caracterizações de uma distribuição multifractal em sistemas magnéticos foi realizada por Morgado et al. [25] para a magnetização local do modelo de Ising em um perfil da rede fractal diamante na temperatura crítica da transição ( $T_c$ ).

Neste trabalho calculamos exatamente as magnetizações locais à qualquer temperatura ( $T$ ) em: a) uma família de redes diamante - gerada pela variação do número de coordenação das raízes na célula básica ( $N_c$ ) - e b) na rede ponte de wheatstone, para o modelo de Potts ferromagnético com um número  $q$  de estados. Para obter as magnetizações locais desenvolvemos um método que obtém, em primeiro lugar, as equações de recorrência da magnetização local da rede, com  $n$  hierarquias, como função da magnetização local e de um tipo especial de "função de correlação entre primeiros vizinhos", ambas de hierarquias anteriores e, posteriormente, as equações de recorrência para a magnetização média por sítio.

Foram obtidos exatamente alguns expoentes do modelo como o

expoente crítico da magnetização média por sítio ( $\beta$ ),  $\alpha$  (expoente do calor específico),  $\nu$ , etc. Isto nos permitiu comparar alguns de nossos resultados com os existentes na literatura, sendo que em alguns casos os nossos resultados divergem dos já publicados [26]. Os valores do expoente do calor específico  $\alpha$  nos permitiram testar a validade da lei de hiperescala para este modelo, lei esta que tem sido objeto de conjecturas e controvérsias na literatura [27].

Nesta tese verificamos também que a magnetização de Potts para um perfil da rede diamante apresenta comportamento multifractal em  $T_c$ . A multifractalidade do modelo na rede diamante foi verificada através da análise da distribuição da magnetização local em um perfil da rede. Esta análise foi realizada calculando-se a função  $f(\alpha)$  para a medida definida como a razão entre a magnetização local do perfil e a magnetização total do mesmo. Calculamos ainda, exatamente, os expoentes de Lipshitz-Hölder ( $\alpha$ ) máximo e mínimo para esta medida relacionando-os com outros expoentes do modelo nesta rede.

Esta tese aborda em seu primeiro capítulo aspectos relevantes das transições de fase e fenômenos críticos; no segundo capítulo definimos fractais e multifractais fornecendo alguns exemplos e no terceiro capítulo descrevemos o estudo da criticalidade e multifractalidade do modelo de Potts ferromagnético nas redes fractais diamante e ponte de wheatstone. Em seguida estão as conclusões e os apêndices.

## CAPÍTULO 1

### ASPECTOS DE TRANSIÇÃO DE FASE E MODELO DE POTTS

#### 1.1) TERMODINÂMICA DAS TRANSIÇÕES DE FASE

A experiência comum nos diz que os sistemas macroscópicos sempre evoluem para estados estáveis, como aquele que é atingido por um recipiente com paredes impermeáveis ao calor (adiabático), contendo por exemplo 100g de gelo a 0°C mais 200g de água a 50°C: todo o gelo se fundirá abaixando a temperatura da água. Após atingido este estado e sendo o sistema isolado, este estado do sistema não mais se altera, ficando independente do tempo. Ele é chamado de estado de equilíbrio e será determinado unicamente por propriedades intrínsecas do sistema tais como: energia interna ( $U$ ), volume ( $V$ ), número de moles dos constituintes ( $N_i$ ) para fluidos ou quaisquer outras variáveis que sejam necessárias para caracterizar o estado do sistema, como por exemplo o campo magnético externo e a magnetização para sistemas magnéticos. A termodinâmica postula [28] a existência e a descrição desse estado apoiando-se no fato que a experiência concorda com as deduções provenientes de tal postulação. A descrição é realizada assumindo a existência de uma função dos parâmetros extensivos do sistema, homogênea de primeira ordem e monotonamente crescente dita entropia ( $S$ ):

$$S = S(U, V, N_1, \dots, N_n).$$

Os estados atingidos (caracterizados pelos valores dos parâmetros), na ausência de vínculos internos, são aqueles que maximizam a entropia. Esta afirmação é conhecida como postulado da entropia máxima. As propriedades da função entropia, anteriormente citadas, permitem que a energia interna de um fluido seja expressa como:

$$U = U(S, V, N_1, \dots, N_m) .$$

Cada uma destas duas equações contém toda a informação termodinâmica sobre o sistema e é chamada de equação fundamental. A descrição dos estados de equilíbrio é adequadamente feita pelo postulado da energia mínima: o valor de equilíbrio de qualquer parâmetro do sistema é tal que minimiza a energia interna. Estes dois postulados são inteiramente equivalentes e desta forma os estados de equilíbrio podem ser descritos por um postulado ou pelo outro.

Sendo a primeira diferencial de U:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_m} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_m} dV + \sum_j \left( \frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{S, V, N_1, \dots, N_m} dN_j, \quad (1.1)$$

as derivadas parciais, mostradas a seguir, são funções homogêneas de ordem zero dos parâmetros extensivos sendo portanto funções intensivas destes parâmetros; elas são chamadas de equações de estado. Temos assim:

$$T(S, V, N_1, \dots, N_m) \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_m} \quad (1.2)$$

$$-P(S, V, N_1, \dots, N_m) \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_m} \quad (1.3)$$

$$\mu_j(S, V, N_1, \dots, N_m) \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{S, V_1, \dots, V_m} \quad (1.4)$$

Como muitos fenômenos comuns ocorrem em situações particulares, como por exemplo, à temperatura ou à pressão constante, é conveniente descrever seus estados de equilíbrio através de uma equação fundamental que contenha como parâmetros algumas grandezas intensivas como a temperatura e a pressão citadas anteriormente. Isto é proporcionado pelas transformadas de Legendre da função  $U$ . Estas transformadas de Legendre de  $U$  são chamadas de potenciais termodinâmicos e o postulado da energia mínima pode também ser formulado para estes potenciais. Assim para cada tipo de fenômeno, trabalhamos com o potencial que fornece a descrição mais adequada.

Para fenômenos que ocorrem à temperatura  $T$  constante, ou seja, estão em contato com um reservatório térmico à temperatura constante, a transformada de Legendre de  $U$  que substitui  $S$  por  $T$  proporciona uma descrição adequada e é chamada de energia livre de Helmholtz  $F=F(T, V, N_1, \dots, N_m)$ . Este é o potencial minimizado nos estados de equilíbrio, quando  $T$  é constante. Quando o fenômeno ocorre à pressão  $P$  constante, em contato com um reservatório de pressão, a transformada de Legendre de  $U$ , que substitui  $V$  por  $P$ , é chamada de entalpia

$H=H(S,P,N_1,\dots,N_m)$  e quando temos  $T$  e  $P$  constantes ao mesmo tempo, a transformada que substitui  $S$  por  $T$  e  $V$  por  $P$ , simultaneamente é a energia livre de Gibbs, que é a mais apropriada para a descrição dos processos naturais, já que a atmosfera é um bom reservatório de temperatura e pressão.

A tabela (1.1), a seguir, resume as transformadas de Legendre mais comuns da energia  $U$  para um fluido.

Tabela 1.1  
Transformadas de Legendre de  $U$ .

$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots)$ $T = \partial U / \partial S$ $F = U - TS$ $F = F(T, V, N_1, N_2, \dots)$	$F = F(T, V, N_1, N_2, \dots)$ $-S = \partial F / \partial T$ $U = F + TS$ $U = U(S, V, N_1, N_2, \dots)$
$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots)$ $-P = \partial U / \partial V$ $H = U + PV$ $H = H(S, P, N_1, N_2, \dots)$	$H = H(S, P, N_1, N_2, \dots)$ $V = \partial H / \partial P$ $U = H - PV$ $U = U(S, V, N_1, N_2, \dots)$
$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots)$ $T = \partial U / \partial S$ $-P = \partial U / \partial V$ $G = U + TS + PV$ $G = G(T, P, N_1, N_2, \dots)$	$G = G(T, P, N_1, N_2, \dots)$ $-S = \partial G / \partial T$ $V = \partial G / \partial P$ $U = G + TS - PV$ $U = U(S, V, N_1, N_2, \dots)$

Vamos agora analisar sucintamente a estabilidade de um sistema termodinâmico isolado em equilíbrio. Suponha que um agente externo divida este sistema em duas partes idênticas, por uma parede totalmente impermeável, retirando de uma parte uma certa quantidade de sua energia interna e transferindo à outra parte esta energia; logo após a retirada da parede, o sistema em questão deve procurar uma nova configuração, a qual se caracteriza por valores dos parâmetros internos que maximizam a entropia total do sistema. Deste modo, para que a nova configuração seja idêntica àquela do sistema dividido, ou seja, para que o equilíbrio seja estável, a soma das entropias das partes deve ser menor ou igual que a entropia total, em caso contrário ocorrerá uma transição de fase. Usando o mesmo argumento em relação aos outros parâmetros da entropia concluiremos similarmente que há uma exigência sobre a curvatura da função entropia: ela deve ser uma função côncava de seus parâmetros. Usando as propriedades da transformada de Legendre [28] podemos afirmar que os potenciais termodinâmicos (transformadas de U) são funções convexas de seus parâmetros extensivos e funções côncavas de seus parâmetros intensivos. Por exemplo, a função de Gibbs deve respeitar:

$$\left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{P,N} \leq 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right)_{T,N} \leq 0 \quad (1.5)$$

$$\left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right) \left( \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} \right)^2 \geq 0 \quad (1.6)$$

Estes critérios de estabilidade têm como consequência limitações sobre as funções resposta: coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ), calores específicos ( $c_v$  e  $c_p$ ) e as

compressibilidades ( $\kappa_t$  e  $\kappa_s$ ):

$$c_p \geq c_v \geq 0 \text{ e } \kappa_t \geq \kappa_s \geq 0. \quad (1.7)$$

Similarmente para sistemas magnéticos os calores específicos e suscetibilidades devem satisfazer relações análogas.

Quando estes critérios não são satisfeitos ocorre uma transição de fase, que pode ser provocada por exemplo pela mudança de algum parâmetro intensivo ou extensivo como variação de temperatura, compressão, etc...

Na fig. (1.1) observamos a seção PT de um diagrama de fase PVT para um fluido e na fig. (1.2), observamos a seção HT do diagrama HMT para um magneto. As linhas cheias dos gráficos são curvas de separação de fases.

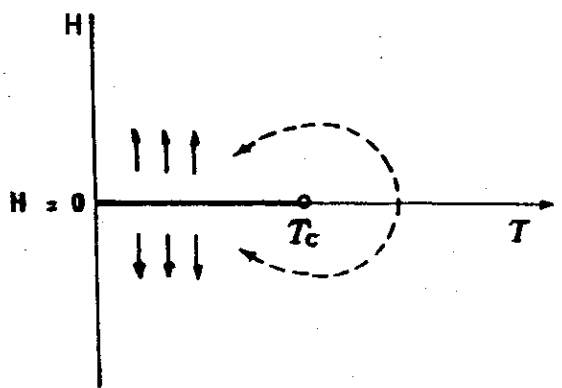
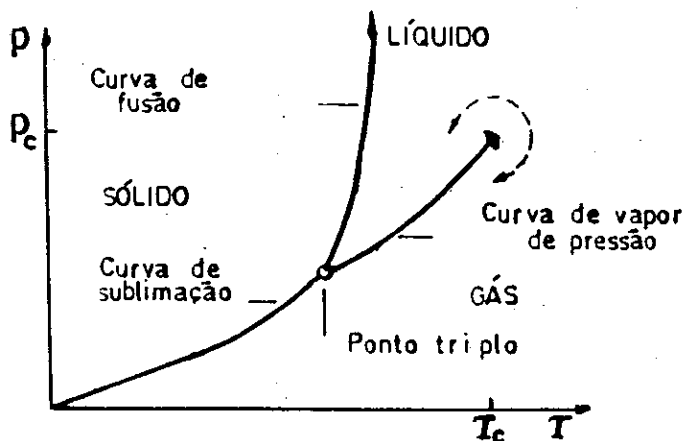


Fig. 1.1) fluido

Fig. 1.2) magneto



Para visualizar o que acontece na vizinhança das curvas de separação de fases, sem perda de generalidade, representaremos o potencial de Gibbs em função de um único parâmetro extensivo, como por exemplo o volume, com dois mínimos locais para temperaturas abaixo de  $T_c$  em um diagrama de transição líquido-gás como aparece nas figuras (1.3) e (1.4) para um fluido. Para alguns ferromagnetos, como o de Ising, o potencial de Gibbs também pode ser representado com dois mínimos locais.

Quando um certo sistema cruza uma curva de separação de fases como mostrado na figura (1.3), por exemplo aumentando sua temperatura, o mínimo do potencial de Gibbs muda da fase mais densa para a menos densa (de maior volume molar) no caso de um fluido. No caso de um ferromagneto, o sistema muda, por exemplo, da fase onde todos os spins estão orientados em uma direção para uma outra fase na qual os spins possuem orientação espacial oposta (transição ordem-ordem) ao cruzar a curva de separação de fases da figura (1.2). As flutuações que ocorrem, neste tipo de transição, são atenuadas pela "força restauradora", devido a forma parabólica dos mínimos, que trazem o sistema de volta ao equilíbrio. Em um fluido a flutuação no volume é limitada pela atuação da "força restauradora" que consiste na derivada do potencial de Gibbs em relação ao volume, responsável por uma diferença de pressão atenuadora; em um ferromagneto a flutuação da magnetização é atenuada pela derivada do potencial em relação a magnetização que corresponde a um campo que tende a diminuir as flutuações.

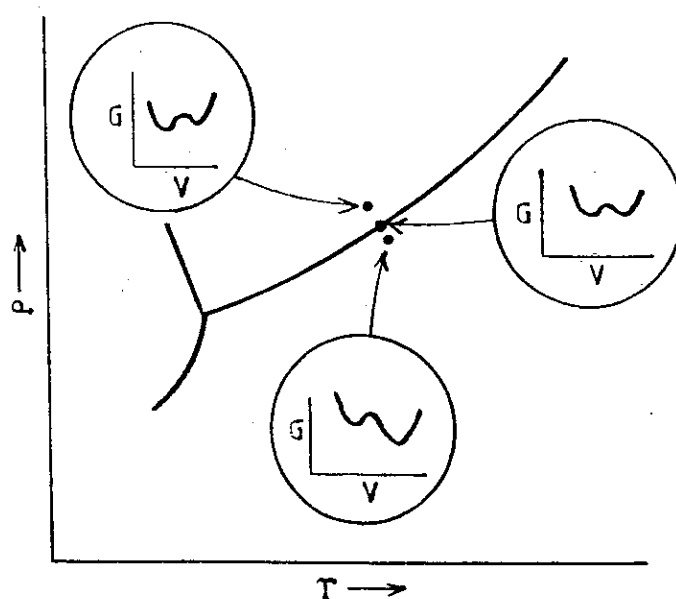


Fig.1.3) Competição entre os mínimos do potencial de Gibbs perto de  $T_c$ , em uma transição de fase de primeira ordem.

Em uma transição de 1ª ordem, as derivadas primeiras do potencial termodinâmico são descontínuas e esta é uma característica usada para a classificação deste tipo de transição (Ehrenfest [29]), que ocorre por exemplo quando o gelo se funde. Durante esta transição a temperatura não muda, há coexistência de fases e o sistema absorve o calor latente de fusão:  $T\Delta S$ , devido a descontinuidade de  $S$ .

Quando, entretanto, percorremos no diagrama  $PT$ , os estados de equilíbrio ao longo da curva de separação de fases, aumentando a temperatura, há um comportamento diferente dos mínimos do potencial de Gibbs: ele vai suavizando o máximo local (central) que vai se aplainando, como mostra a figura (1.4). Isto implica que a "força restauradora" que atenua as flutuações vai se enfraquecendo permitindo que as flutuações termodinâmicas aumentem a ponto de atingir as dimensões do sistema.

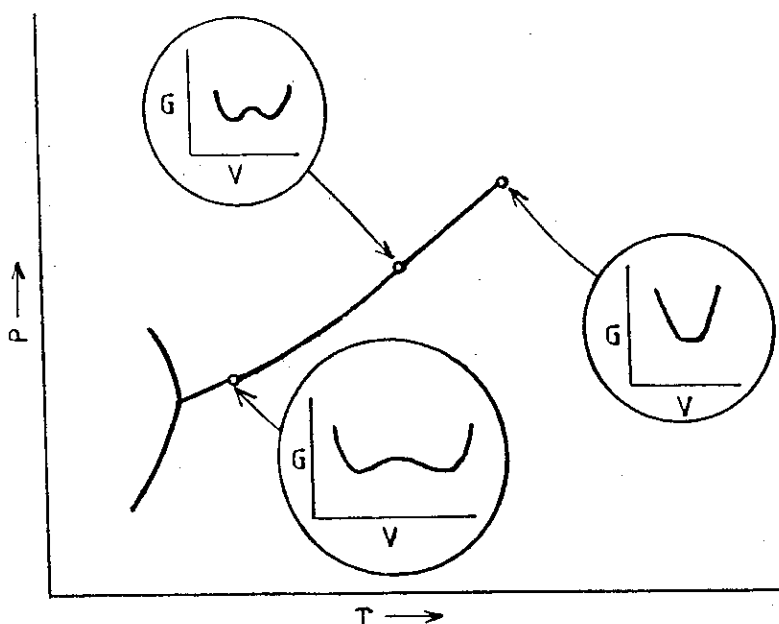


Fig. 1.4) Mudança na forma do potencial de Gibbs à medida que nos aproximamos de  $T_c$ , onde a transição é contínua.

Devido ao aumento das flutuações, aparecem as correlações de longo alcance, que são características das transições contínuas, como as transições ordem-desordem sofridas por alguns sistemas como a liga de CuZn, cuja fase ordenada é uma rede cúbica de corpo centrada e a desordenada é caracterizada pela localização aleatória dos átomos da liga nos pontos da rede. Um outro exemplo de transição contínua são as transições líquido-gás como a que ocorre com o dióxido de carbono, onde foi observado por Andrews [29] o fenômeno de opalescência crítica, no qual a luz é espalhada pelas "gotas" que se formam, ao se abaixar a temperatura, com dimensões laterais da ordem do comprimento da luz. Para um ferromagneto, teremos uma transição contínua por exemplo ao seguirmos ao longo da curva de separação de fases da figura (1.2). Esta curva termina em um ponto similar aquele onde termina a curva de separação de fases

líquido-gás mostrada em (1.4), além do qual não há diferença entre as fases líquida e gasosa. Este ponto é chamado ponto crítico e a temperatura é a temperatura crítica. Neste ponto as funções resposta ( $c_p$ ,  $c_v$ , e  $\alpha$ ) divergem devido ao não obedecimento dos critérios de estabilidade.

Dentre as várias teorias de campo médio [29] que tentaram descrever as transições de fase contínuas, estão a Teoria de Van der Waals para a transição líquido-gás, a Teoria de Weiss para as transições em materiais magnéticos e a Teoria de Landau [30]. Esta última muito contribuiu para o estudo das transições de fase ao introduzir o parâmetro de ordem, uma grandeza que caracteriza as fases do sistema, sendo nulo na fase desordenada (em geral a fase de alta temperatura) e diferente de zero na ordenada (em geral a fase de baixa temperatura). Em uma transição de fase de primeira ordem este parâmetro muda abruptamente de valor quando muda o mínimo do potencial termodinâmico de uma fase para outra, enquanto que este parâmetro muda continuamente em uma transição contínua. Por exemplo para uma transição ordem-desordem sofrida pela liga CuZn [28], já citada, o parâmetro de ordem adequado é a diferença entre as frações de sítios de uma das duas subredes, digamos A e B (ambas cúbicas simples), que constituem a rede de corpo centrado, ou seja  $(N_{Zn}^A - N_{Cu}^A)/N^A$ . Na fase desordenada os pontos da rede estão aleatoriamente ocupados e as frações de ocupação são iguais, o que fornece um parâmetro de ordem nulo. Para um ferromagneto que passa por uma transição para-ferromagnética o parâmetro de ordem adequado é a magnetização - que por exemplo em sistemas que podem ser

modelados por ferromagnetos de Ising é uma medida normalizada do número em excesso dos momentos magnéticos dos átomos e/ou moléculas que apontam no sentido definido como positivo - que vale zero na fase paramagnética e é diferente de zero na fase ferromagnética. Podemos sempre escolher um parâmetro de ordem normalizado como o usado na exemplo da liga CuZn para caracterizar as fases do sistema.

As teorias de campo médio foram oportunas qualitativamente prevendo uma série de propriedades dos diagramas de fase de fluidos e ferromagnetos, entre elas a existência de um ponto crítico, contudo falharam quantitativamente ao fornecer incorretamente os valores dos expoentes críticos, fato sobre o qual discorreremos rapidamente na próxima seção.

## 1.2) FENÔMENOS CRÍTICOS

Nas proximidades do ponto crítico, podemos descrever o comportamento de uma série de grandezas termodinâmicas, como por exemplo o parâmetro de ordem, através dos expoentes críticos. Sendo  $f(\epsilon)$  a grandeza em questão e definindo

$$\epsilon \equiv \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.8)$$

onde  $T_c$  é a temperatura crítica, o expoente crítico  $\lambda$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno é definido como:

$$\lambda \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (1.9)$$

A tabela (1.2) ,a seguir, mostra a definição dos expoentes mais comuns para sistemas magnéticos.

Tabela 1.2

Definição dos expoentes críticos mais comuns para sistemas magnéticos.

Expoentes	Definição:	Condições:			Grandeza:
		$\epsilon$	$H$	$H$	
$\alpha'$	$C_H \sim (-\epsilon)^{-\alpha'}$	< 0	0	0	calor específico a campo magnético constante
$\alpha$	$C_H \sim (\epsilon)^{-\alpha}$	> 0	0	0	
$\beta$	$M \sim (-\epsilon)^\beta$	< 0	0	$\neq 0$	magnetização a campo nulo
$\gamma'$	$\kappa_T \sim (-\epsilon)^{-\gamma'}$	< 0	0	$\neq 0$	susceptibilidade isotérmica a campo nulo
$\gamma$	$\kappa_T \sim (\epsilon)^{-\gamma}$	> 0	0	0	
$\delta$	$H \sim  M ^\delta \text{sgn}(M)$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	isoterma crítica
$\nu'$	$\xi \sim (-\epsilon)^{-\nu'}$	< 0	0	$\neq 0$	comprimento de correlação
$\nu$	$\xi \sim (\epsilon)^{-\nu}$	> 0	0	0	
$\eta$	$\Gamma(r) \sim  r ^{-(d-2+\eta)}$	0	0	0	função de correlação

As teorias de campo médio citadas no final da seção anterior são igualmente conhecidas como clássicas, pois no que diz respeito às transições contínuas elas fornecem os mesmos valores para os expoentes críticos independentemente da dimensão do espaço e da dimensão do parâmetro de ordem. Entretanto, estes valores não coincidem, em geral, com os valores observados experimentalmente nem com os poucos resultados exatos, como o cálculo dos expoentes do modelo de Ising em uma rede quadrada obtido por Onsager [2] e outros, como mostrado na tabela (1.3). O motivo disto é a não consideração da relevância das flutuações neste tipo de teoria.

Para compreendermos um pouco melhor o que ocorre com estas teorias vejamos, rapidamente, o cálculo do expoente crítico da magnetização ( $\beta$ ) utilizando a Teoria de Landau aplicada a um cristal magnético uniaxial sem campo externo que sofre uma transição contínua [28]. Neste exemplo o potencial de Gibbs, cujo parâmetro de ordem é o escalar  $\phi$  (magnetização), é expandido perto de  $T_c$  em potências de  $\phi$ , onde  $\phi$  é suficientemente pequeno. Para que o potencial seja simétrico em relação a  $\phi$ , eliminamos as potências ímpares, podendo assim expressar  $G$  na seguinte forma:

$$G = G_0 + G_1 \phi^2 + G_2 \phi^4 + \dots, \quad (1.10)$$

onde os  $G_i$ ,  $i = 0, 1, 2 \dots$  são funções dos parâmetros do sistema como  $T, P, N_1 \dots$ . Esta expansão entretanto não consegue descrever a singularidade do ponto crítico pois as flutuações crescem muito e o potencial real não é analítico perto de  $T_c$ . Para que o ponto  $\phi = 0$  seja um máximo local para  $T < T_c$  e um mínimo absoluto para  $T \geq T_c$ , o termo quártico deve ser sempre positivo, o quadrático deve ser positivo para  $T > T_c$ , negativo para  $T < T_c$  e portanto deve se anular em  $T = T_c$ . Desprezando os demais termos obtemos:

$$\phi = 0 \text{ para } T > T_c \text{ e } \phi \propto |T_c - T|^{1/2} \text{ para } T < T_c,$$

de onde se obtém o expoente crítico da magnetização  $\beta = 1/2$ . A tabela (1.3) abaixo mostra para os expoentes  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\gamma'$  os valores clássicos, experimentais para o  $CO_2$  e o Ni, exatos para o modelo de Ising em duas dimensões feito por Onsager [2] e por fim valores numéricos para o modelo de Ising em três dimensões. Podemos assim observar a discrepância entre os resultados clássicos e os demais.

Tabela 1.3

Valores de alguns expoentes criticos.

Expoentes	T < T <sub>c</sub>			T > T <sub>c</sub>	
	$\alpha'$	$\beta$	$\gamma'$	$\alpha$	$\gamma$
Clássicos:	0	1/2	1	0	1
CO <sub>2</sub> (fluido, d=3)	~ 0.1	0.34	~ 1.0	~ 0.1	1.35
Ni (magneto, d=3)	< 0.2	0.35	~ 1.2	-	1.3
Modelo de Ising (exato, d=2)	0	1/8	~ 7/4	0	~ 7/4
Modelo de Ising (numérico, d=3)	~ 1/8 ou 1/16	~ 5/16	~ 5/4 ou 21/16	- 1/8	~ 5/4

Podemos entender a origem da diferença entre os valores clássicos dos expoentes criticos e os valores experimentais, como mostrado na tabela (1.3), se notarmos que, para temperaturas bem abaixo de T<sub>c</sub> por exemplo, a distribuição de probabilidade da energia é simétrica e estreita, mas perto de T<sub>c</sub> o mínimo da energia livre de Gibbs se torna muito pequeno, tornando a sua distribuição de probabilidade larga e assimétrica. Como no limite termodinâmico o valor mais provável de uma grandeza é igual ao seu valor médio, somente se a sua distribuição de probabilidade for simétrica, perto de T<sub>c</sub> teremos problemas já que usualmente identificamos o valor mais provável e o valor médio de uma grandeza como sendo iguais. Como experimentalmente medimos o valor médio e o identificamos com o valor mais provável calculado através da função de



partição, os valores dos expoentes críticos teóricos desta teoria não concordam, em geral, com os experimentais [28].

Assim, por exemplo para o expoente do parâmetro de ordem temos que à medida que nos aproximamos de  $T_c$ , por baixo, a diferença entre os valores mais prováveis do parâmetro de ordem tomados em duas temperaturas diferentes porém próximas de  $T_c$  é maior que a diferença entre os respectivos valores médios. Isto devido à assimetria de sua distribuição de probabilidade. Uma vez que ambos escalam com  $|T_c - T|^\beta$  o valor teórico  $\beta = 1/2$  é maior que o experimental  $\beta = 0.34$  ( $\sim 1/3$ ). Deste modo podemos compreender a origem dos problemas nas teorias clássicas que não levam em conta os efeitos das flutuações de longo alcance. Todavia, existe uma dimensão do espaço acima da qual as flutuações são pouco relevantes, caracterizada pelo critério de Ginzburg-Landau [31]; deste modo os expoentes passam a apresentar os valores clássicos, por exemplo  $d = 4$  para Teoria de Landau para materiais magnéticos. Nota-se também que com o aumento da dimensão do parâmetro de ordem diminui  $T_c$ , já que esse aumento favorece as flutuações.

A importância das flutuações foi apropriadamente levada em consideração pela hipótese de escala e pela teoria de grupo de renormalização.

A hipótese de escala supõe que na vizinhança do ponto crítico a parte dominante (singular) do potencial de Gibbs (ou outro potencial adequado) é uma função homogênea generalizada de seus parâmetros, ou seja, que o espaço de parâmetros é invariante sob uma transformação de escala, assim como um fractal.

Por exemplo para o potencial de Gibbs a hipótese de escala propõe a forma:

$$G_s \sim |T-T_c|^{2-\alpha} f^{\pm} \left( \frac{B^{1+1/\delta}}{|T-T_c|^{2-\alpha}} \right), \quad (1.11)$$

onde  $f^+$  é definido para  $T > T_c$  e  $f^-$  para  $T < T_c$ . Aplicando esta hipótese também à função de correlação podemos obter expressões universais que relacionam todos os expoentes críticos com  $\alpha$  e  $\delta$ , o que nos permite, ao usar os expoentes críticos mais comuns definidos na tabela (1.2) juntamente com a dimensão do espaço, encontrar as relações de escala:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 && \text{Lei de Rushbrook,} \\ \gamma &= \beta(\delta - 1) && \text{Lei de Widom,} \\ \gamma &= (2 - \eta)\nu && \text{Lei de Fisher,} \\ d\nu &= 2 - \alpha && \text{Lei de Josephson ou Hiperescala.} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Muitos sistemas, cujas forças interatômicas são de curto alcance, que possuem principalmente a mesma dimensão do espaço e a mesma dimensão do parâmetro de ordem, apresentam os mesmos valores para os expoentes críticos, pertencendo ao que denominamos de mesma classe de universalidade, um importante conceito que permite relacionar diferentes sistemas aparentemente sem relação entre si, que possuem diferentes tipos de transição de fase, de interação, de estrutura da rede, etc...

A Teoria de Grupo de Renormalização é uma técnica adequada

para tratar dos efeitos das correlações de longo alcance que surgem em uma transição contínua devido ao domínio das flutuações porque elimina os graus de liberdade que se tornam sem importância quando as correlações atingem dimensões macroscópicas. Ela foi iniciada por Kadanoff e desenvolvida por Wilson (Para uma revisão, ver os referências [32,33,34]). Kadanoff [35] propôs um método, conhecido como método de soma de blocos de spin que foi decisivo para a teoria e Wilson e Fisher [36] com o desenvolvimento epsilon tornaram a teoria extremamente poderosa.

O método de Kadanoff se decompõe em três etapas fundamentais que exemplificaremos a seguir (vide fig.1.5), usando uma rede quadrada com spins de Ising, os quais podem assumir dois estados: para cima ou para baixo. Primeiro dividimos a rede em blocos com alguns spins, no nosso exemplo eles são 9. Em seguida fixamos uma regra para calcular o spin "médio" de cada bloco e substituímos cada um dos blocos por este spin "médio". Para fazer esta média, devemos fixar uma regra como por exemplo a regra da maioria onde colocamos no bloco o spin (o sentido) da maioria.

Após estas duas operações obtemos uma nova rede cujo parâmetro de rede é, no nosso exemplo, 3 vezes maior que o original. Reescalamos agora o parâmetro de rede para que ele tenha o valor inicial. Estas três etapas definem as transformações do grupo de renormalização. Deste modo eliminamos as flutuações de sentido do spin em uma escala inferior ao tamanho do bloco formado. Contudo o que precisamos

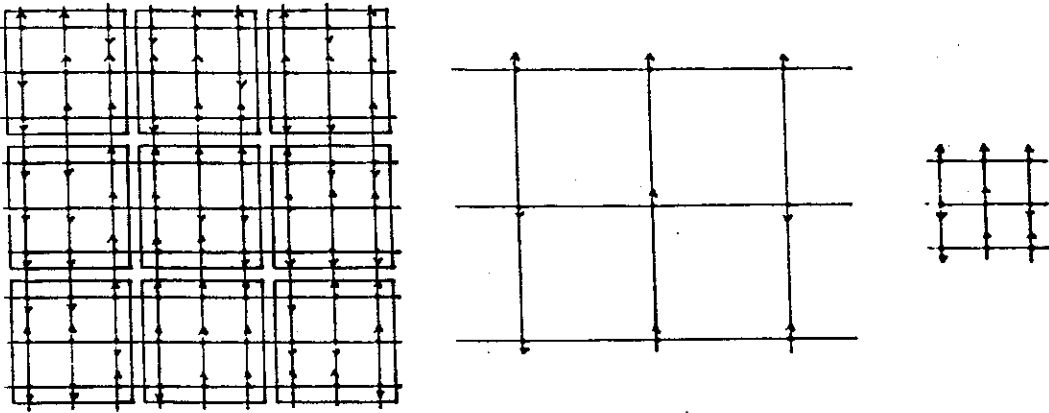


Fig.1.5) Primeiro vemos a rede original com blocos que abrangem 9 spins que serão assimilados. Eles são, então, substituídos pelo spin "médio", aqui, escolhido pela regra da maioria. Por fim, reescalamos a nova rede, 3 vezes maior que a original, para o tamanho original. Estas três operações definem as transformações do grupo de renormalização.

é encontrar a nova distribuição de probabilidade dos spins dos blocos em função da distribuição original.

No nosso exemplo usamos o modelo de Ising numa rede quadrada com as variáveis de spin  $\mu_i = \pm 1$ , cuja interação entre primeiros vizinhos está representada pelo Hamiltoniano adimensional:

$$H = -K/k_B T = K \sum_{\langle ij \rangle} \mu_i \mu_j, \quad K \equiv J/k_B T \quad (1.13)$$

que fornece a distribuição de probabilidade:

$$P(K) = Z^{-1} \exp[H(K)], \quad (1.14)$$

sendo Z a função partição. Em seguida impomos que:

$$P(K') = \sum_{\mu} P(K) = Z'^{-1} \exp[H'(K')], \quad (1.15)$$

o que implica em obter uma relação entre o hamiltoniano da etapa anterior e o atual com um novo parâmetro:

$$H'(K') = f\{H(K)\}, \quad (1.16)$$

de onde obtemos:

$$K' = g(K), \quad (1.17)$$

que chamamos de equação de recorrência do grupo de renormalização, uma para cada parâmetro no caso geral. Normalmente cada vez que aplicamos as transformações do grupo de renormalização, novos parâmetros são gerados na etapa seguinte, e não somente um como  $K'$  no nosso exemplo. O comportamento à grande escala da nova rede é equivalente àquele que a rede inicial teria a uma outra temperatura. Estas transformações, isto é, mapeamentos do espaço dos parâmetros do Hamiltoniano nele mesmo se tornam a principal ferramenta para a nossa investigação e toda a técnica de fluxos, pontos fixos, autovalores, etc... pode ser aplicado para o cálculo dos expoentes críticos.

O método foi aplicado em um grande número de problemas de transições de fase possibilitando o cálculo de diversos expoentes para uma variada gama de redes, como por exemplo Niemeijer e Van Leeuwen [37], que utilizaram um método de blocos para estudar spins de Ising em uma rede triangular.

Berker e Ostlund [38] e Bleher e Zaly [39] observaram que alguns métodos de grupo de renormalização, que são aproximados quando os modelos são aplicados em redes de Bravais [40], são exatos quando estes mesmos modelos são aplicados em redes hierárquicas. Este resultado iniciou uma série de trabalhos - [8],[41], [42], [43], etc... - que usavam redes hierárquicas

estimulados com a possibilidade que os resultados exatos possam esclarecer um pouco mais as características das transições de fase e para se obter resultados aproximados de rede de Bravais.

### 1.3) MODELO DE POTTS

As teorias clássicas de transição de fases, em geral, não levam em consideração as particularidades dos sistemas termodinâmicos nos quais ocorrem as transições de fase como por exemplo a dimensão da rede na qual estão situados os átomos, detalhes da interação, etc... A importância dessas peculiaridades para as transições de fase dos magnetos foi melhor compreendida com a construção de modelos mais completos das interações entre os constituintes como o de Ising, Potts, Heisenberg  $Z(N)$  entre outros. A relevância do estudo desses modelos pode ser ressaltada quando nos lembramos do profundo efeito dos cálculos exatos dos expoentes críticos para o modelo de Ising [2] na compreensão das transições de fase. O estudo de soluções exatas [1] para esses modelos em diversas redes tem sido objeto ainda atual de muitas pesquisas.

O modelo de Potts [4,5] é a generalização do modelo de Ising [3] para mais de duas componentes de spins. Ele admite transições de fase de primeira ordem e contínuas observadas experimentalmente em alguns sistemas [5]. Se olharmos o modelo de Ising como um sistema de spins que interagem na mesma direção, uma generalização apropriada deste modelo seria considerar o modelo de Potts um sistema de spins confinados num plano, com cada spin apontando para quaisquer direções

igualmente separadas por ângulos:

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{q}, \quad n = 0, 1, \dots, q-1, \quad (1.18)$$

deste modo o Hamiltoniano de interação pode ser escrito genericamente como:

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} J(\theta_{ij}), \quad (1.19)$$

onde  $J(\theta_{ij})$  é uma função periódica de período  $2\pi$  e  $\theta_{ij} = \theta_{n_i} - \theta_{n_j}$  é o ângulo entre os dois spins em sítios vizinhos  $i$  e  $j$ . A escolha de  $J$  na forma:

$$J(\theta) = \varepsilon_1 \cos(\theta) \quad (1.20)$$

é conhecida como Modelo Planar de Potts [5].

Em 1952, Potts [4] calculou o ponto crítico deste modelo para a rede quadrada para  $q = 2, 3$  e  $4$  e para qualquer  $q$  para o seguinte modelo:

$$J(\theta_{ij}) = -\varepsilon_2 \delta_{kr}(n_i, n_j) \quad (1.21)$$

que ficou conhecido como Modelo Padrão de Potts ou simplesmente Modelo de Potts. Este modelo é ferromagnético para  $\varepsilon_2 > 0$  e antiferromagnético para  $\varepsilon_2 < 0$  ( $\delta_{kr}$  é a delta de Kronecker). Podemos alterar a formulação do modelo de Potts de modo que sua simetria use um espaço de  $q-1$  dimensões, assim:

$$\delta_{kr}(\alpha, \beta) = \frac{1}{q} \left[ 1 + (q-1)e^\alpha e^\beta \right], \quad (1.22)$$

onde  $e^\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, q-1$  são  $q$  vetores unitários apontando em  $q$  direções simétricas de um hipertetraedro em  $q-1$  dimensões. Pode-se pensar também em interações a segundos vizinhos,  $n$ -vizinhos e com campos externos, mas para o nosso trabalho só consideraremos interações a primeiros vizinhos. O hamiltoniano

deste modelo na presença de um campo magnético pode ser escrito como:

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{ij} \delta_{kr}(\sigma_i, \sigma_j) + L \sum_i (q \delta_{kr}(\sigma_i, 0) - 1) / (q - 1), \quad (1.23)$$

onde  $\beta = 1/kT$ ,  $L$  é um campo externo aplicado ao estado de spin 0,  $K = \beta \epsilon_2$ ,  $\sigma_i = 0, 1, \dots, q-1$  especifica o estado do spin do  $i$ -ésimo sítio e  $\delta_{kr}(\sigma_i, \sigma_j)$  é a função delta de Kronecker que vale 1 se os spins  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  são iguais e zero em caso contrário. Finalmente podemos escrever a função partição:

$$Z(q; L, K) = \sum_{\langle \sigma_i \rangle} e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (1.24)$$

a partir da qual as propriedades físicas do sistema são derivadas, no limite termodinâmico, usando a energia livre de Helmholtz por sítio:

$$f(q; L, K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(q; L, K). \quad (1.25)$$

Por último, usando a energia livre de Helmholtz a magnetização por sítio é dada pela expressão:

$$m(q; 0, K) = - \frac{\partial f(q; L, K)}{\partial L}, \quad (1.26)$$

que assume valores 0 e 1 nas fases completamente desordenada e ordenada (parâmetro de ordem do sistema).

O modelo de Potts está relacionado com outros problemas em estatística de redes como por exemplo redes de resistores no limite  $q \rightarrow 0$ , vidro de spin de Mattis no limite  $q \rightarrow 1/2$ , percolação no limite  $q \rightarrow 1$  e modelo de Ising para  $q=2$  [44].



## CAPÍTULO 2

### FRACTAIS E MULTIFRACTAIS

#### 2.1) FRACTAIS

Os fractais [10] são objetos geométrica ou estatisticamente auto-similares que possuem uma estrutura particular, caracterizada pela sua invariância de escala e por apresentarem, em geral, dimensões não inteiras.

Benoit B. Mandelbrot reuniu uma série de suas propriedades e exemplos em principalmente dois de seus livros: *Les Objects Fractals: Forme, Hazard et Dimension* e *The Fractal Geometry of Nature* [11], que despertaram a curiosidade atual para o estudo exaustivo das propriedades fractais de muitos objetos e fenômenos.

##### 2.1.1) DIMENSÃO FRACTAL ( $d_f$ )

Seja um determinado conjunto de pontos A, embebido no espaço E-dimensional. Sua dimensão fractal é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch [17], que é definida como a dimensão crítica para o conjunto A cuja medida  $M_d$ , para o conjunto de pontos A, muda de zero para infinito.

A medida  $M_d$  é definida como:

$$M_d = \sum \gamma(d) \delta^d = \gamma(d) N(\delta) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > d_f \\ \infty, & d < d_f \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $\gamma(d)$  é um fator geométrico,  $N(\delta)$  o número de abertos (caixinhas) de tamanho  $\delta$  usado para cobrir o conjunto A. Em  $d = d_f$ , a medida se mantém finita e diferente de zero. Da expressão (2.1), podemos ver que:

$$N(\delta) \sim \delta^{-d_f} \quad (2.2)$$

Uma maneira de se calcular diretamente a dimensão fractal de um objeto é usar a relação (2.2) da seguinte forma: fazemos um gráfico em um papel di-log do número de abertos necessários para cobrir a extensão do objeto versus a extensão do aberto usado. Obteremos assim uma reta cujo coeficiente angular é a dimensão fractal do objeto. Esta dimensão  $d$  obtida contando o número de abertos como função do tamanho das caixas é chamada de dimensão de contagem de caixas. Veremos a seguir alguns exemplo de fractais.

#### 2.1.1.1) CONJUNTO TRIÁDICO DE CANTOR

O conjunto triádico de Cantor é construído partindo-se de uma reta de tamanho unitário, chamada "iniciador", que é o conjunto suporte. Dividimos a reta em três partes iguais e removemos a parte central. Em seguida, repetimos as transformações anteriores para cada uma das duas partes restantes e assim sucessivamente. O conjunto triádico de Cantor é o conjunto de pontos não removidos neste processo. A seguir, mostramos a construção do conjunto até a terceira geração.

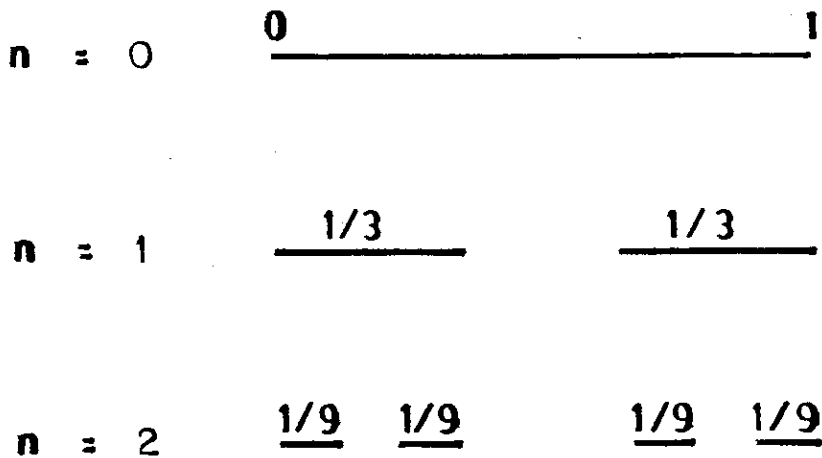


Fig. 2.1) Construção do conjunto triádico de Cantor. Em  $n = 0$ , vemos a reta que será partida em três partes iguais; em  $n = 1$ , retiramos a parte central. Em seguida, repetimos o processo para cada um das partes restantes sucessivamente.

Para cobrir o conjunto de Cantor na  $n$ -ésima geração usamos:

$$\delta = (1/3)^n \text{ e } N(\delta) = 2^n.$$

Da primeira equação, podemos obter a seguinte relação:

$$n = \ln(\delta) / \ln(1/3),$$

a qual substituída na segunda equação e usando-se a expressão abaixo:

$$N(\delta) = \delta^{-d_f}, \tag{2.3}$$

obtemos diretamente que:

$$2^n = \left[ (1/3)^n \right]^{-d_f},$$

de onde obtemos a dimensão fractal do conjunto triádico de Cantor:

$$d_f = \log(2) / \log(3).$$

### 2.1.1.2) CONJUNTO QUÁRTICO DE KOCH

Construímos este conjunto, substituindo o lado do quadrado pelo "gerador" constituído de  $N = 8$  partes cada um com comprimento  $\delta = 1/4$  como mostrado na fig. (2.3).

Usando a equação (2.2), obtemos diretamente que:

$$d_f = -\ln[N(\delta)]/\ln(\delta), \quad (2.4)$$

logo:

$$d_f = -\ln(8)/\ln(1/4) = 3/2.$$

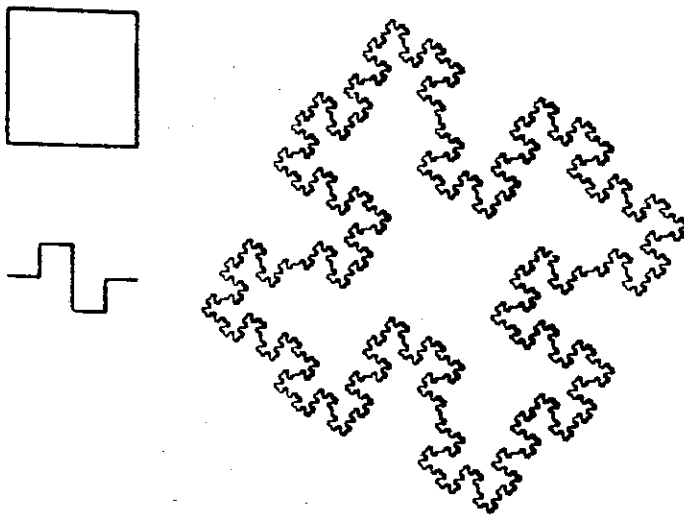


Fig 2.2) Construção do Conjunto Quártico de Koch

### 2.1.2) DIMENSÃO DE SIMILARIDADE ( $d_s$ )

Um grande número de fractais são também autosimilares em relação a um determinado fator de escala ( $r < 1$ ); por exemplo, sendo  $S$  um conjunto limitado de pontos, podemos gerar um novo conjunto  $S' = r(S)$  que é um pequeno pedaço de  $S$ . Escolhendo  $r$  apropriadamente podemos cobrir o conjunto  $S$  com  $N$  segmentos não

sobrepostos. Dizemos então que o conjunto  $S$  é auto-similar em relação ao fator de escala  $r$ . Deste modo, definimos a dimensão de similaridade  $d_s$ :

$$d_s = -\ln(N)/\ln[r(n)] . \quad (2.5)$$

Para fractais auto-similares  $d_s$  é igual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch, ou seja a dimensão fractal do conjunto. Podemos aplicar esta definição para o conjunto quártico de Koch, já que ele é autosimilar, com  $r = 1/4$  e reobtemos diretamente  $d_s = 3/2$ . Um outro exemplo deste tipo de fractal é dado pela curva de Mandelbrot-Given, mostrada a seguir.

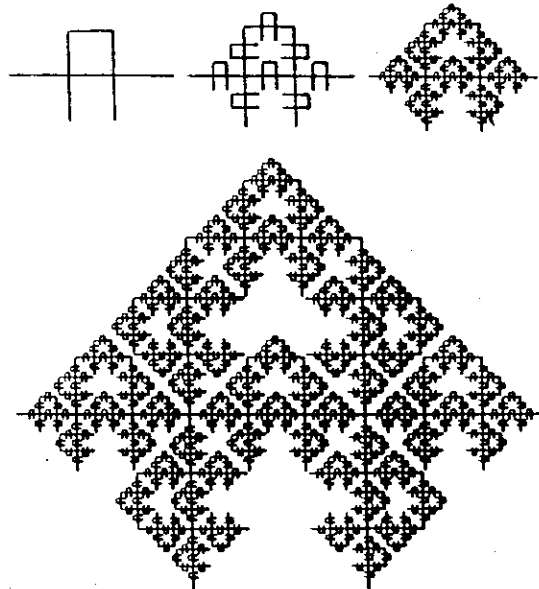


Fig. 2.3) Construção da Curva de Mandelbrot-Given.

A cada iteração substituímos cada segmento de linha no iniciador por 8 segmentos reduzidos por um fator de escala  $r = 1/3$ . Assim a dimensão fractal é obtida diretamente:

$$d_s = \ln(8)/\ln(3) = 1.89.$$

### 2.1.3) REDES HIERÁRQUICAS

As redes hierárquicas (RH) são um exemplo especial de fractais porque têm tido um papel importante no estudo das transições de fase, desde que Berker e Ostlund [38] observaram que as relações de recorrência de Migdal-Kadanoff [7] podiam ser exatamente resolvidas nestas redes. As RH podiam, assim, servir de guia para os resultados obtidos aproximadamente nas redes de Bravais. Por este motivo, descreveremos algumas outras propriedades além de sua dimensão fractal.

Uma vez que podemos associar a cada vértice (sítio) da rede um spin, por exemplo tipo Ising ou Potts, as redes hierárquicas podem apresentar transições de fase de primeira ordem, transições contínuas, coexistência de fases, pontos críticos a temperatura finita e expoentes contínuos, etc...

#### 2.1.3.1) DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

A rede hierárquica é uma rede gerada iterativamente por um processo [6] - agregação ou miniaturização - no limite em que o número de iterações tende a infinito. Este processo envolve sempre partes finitas da rede.

No processo conhecido como agregação, por exemplo para a rede hierárquica diamante mostrada na figura (2.4a), quatro unidades da rede inicial, de hierarquia zero, são agregadas para formar a rede com uma hierarquia. Para formar a rede com duas hierarquias agregamos quatro unidades da rede com uma hierarquia da mesma forma. O número de partes agregadas a cada

hierarquia para formar a seguinte é chamada de número de agregação ( $N_a$ ). Um outro processo de geração da rede chama-se miniaturização. Na primeira figura (2.4a) vemos a rede com  $n$  ( $n > 2$ ) hierarquias e não vemos detalhes de sua estrutura, imediatamente em seguida vemos a rede com um pouco mais de detalhes, aparecendo as ligações de hierarquia ( $n - 1$ ), onde cada ligação se separa em quatro com dois spins que não víamos. Os dois processo são equivalentes.

Por construção, as redes hierárquicas são invariantes de escala, mas não são invariantes de translação.

A seguir, vemos alguns exemplos de redes hierárquicas.

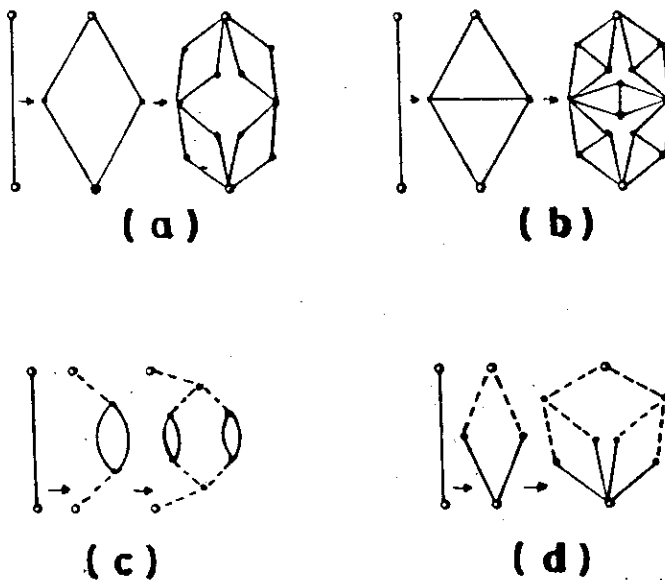


Fig. 2.4) Vemos a construção de redes hierárquicas. Em a) a rede diamante, em b) a rede ponte de wheatstone; em c) e d) temos redes construídas com diferentes constantes de acoplamento. Cada uma representada por um tipo de linha: pontilhada ou cheia.

No limite  $n \rightarrow \infty$ , a rede hierárquica é um fractal com dimensão fractal  $d_f$ :

$$d_f = \ln(N_a) / \ln(b), \quad (2.5)$$

onde  $b$  é a distância química [27] entre as raízes na célula básica (hierarquia 1). Esta dimensão é também chamada de dimensão intrínseca para as redes hierárquicas, por exemplo para a rede hierárquica diamante (RD) - fig. (2.4a) - com  $b = 2$  esta dimensão vale  $d_f = \ln(4) / \ln(2) = 2$  e para a rede hierárquica ponte de wheatstone (RPW) - fig. (2.4b) - com  $b = 2$  vale  $d_f = \ln(5) / \ln(2) = 2.32$ .

Há outros parâmetros importantes para a descrição das redes hierárquicas como por exemplo o número de coordenação, a conectividade e a ordem de ramificação.

A ordem de ramificação ( $R$ ) fornece uma medida do número de ligações que precisam ser cortadas para que um determinado ponto  $P$  fique isolado. Gefen et al. [8] definiu e usou a ordem de ramificação para classificar a temperatura crítica para modelos tipo Ising da seguinte forma: se  $R_{\min}$  é infinito  $T_c > 0$  e se  $R_{\min}$  é finito  $T_c = 0$ .

O número de coordenação ( $Z_1$ ) é o número de ligações que chegam a um determinado spin  $i$  e a conectividade ( $Q$ ) é definida como:

$$Q = \ln(q) / \ln(b), \quad (2.6)$$

onde  $q$  é o número de ligações que precisam ser cortadas na célula básica para separar as raízes e  $b$  a distância química. Assim, a conectividade é o expoente que mede como o número mínimo de cortes nas redes cresce em potências de  $b^n$ .



Um ponto importante sobre as redes hierárquicas, o qual versa sobre a convexidade das funções termodinâmicas, foi analisado por Martin e Tsallis [45], Kaufman e Griffiths [46] e Tsallis [47]. Eles observaram que, em alguns casos, as equações de renormalização quando resolvidas exatamente nas redes hierárquicas - e não nas de Bravais - conduziam a comportamentos que desrespeitavam a convexidade de funções termodinâmicas como por exemplo a energia livre, o que implicava em calores específicos negativos, levando a expoentes incorretos. Tsallis, em um artigo, vide ref.[47], estabeleceu um critério que garantia a convexidade correta.

Concluindo, devido as suas propriedades as redes hierárquicas podem ser convenientemente usadas para ajudar na compreensão de fenômenos de transição de fase. Recentemente um comportamento multifractal [25], cujo conceito será abordado no próximo capítulo, da magnetização de Ising foi observado para a rede diamante. Nesta tese observamos esse mesmo comportamento para a magnetização de Potts nesta mesma rede.

## 2.3) MULTIFRACTAIS

O conceito de multifractais [10,17] está relacionado com a distribuição de uma certa medida em um conjunto suporte. Este conjunto pode ser fractal como o conjunto de Cantor ou euclideano como por exemplo uma reta. O que importa é como a medida se distribui no conjunto suporte, ou seja, a sua estrutura. A análise multifractal fornece informações sobre a estrutura da distribuição da medida em um determinado conjunto suporte. Iremos, a seguir, desenvolver o conceito de multifractal usando como exemplo a distribuição binomial multiplicativa.

### 2.3.1) DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL MULTIPLICATIVA

Seja uma distribuição binomial multiplicativa [17] de uma determinada medida normalizada que se espalha sobre um suporte geométrico, por exemplo, um segmento de reta  $S = [0,1]$ . No processo binomial multiplicativo a medida é distribuída da seguinte forma: dividimos o suporte em 2 pedaços de comprimento  $\delta = 2^{-1}$ , nos quais estão espalhados a medida de modo que a medida  $\mu_0$  se encontra no segmento da esquerda e  $\mu_1$  no segmento da direita. No nosso exemplo  $\mu_1$  será uma probabilidade  $p$ , de forma que  $\mu_0 = p$  e  $\mu_1 = 1 - p$ . Na próxima geração, dividimos cada um dos segmentos de comprimento  $\delta = 2^{-1}$  em dois segmentos iguais de tamanho  $\delta = 2^{-2}$  e repetimos o processo anterior de espalhamento da medida  $\mu_1$ .

Podemos definir a medida de uma parte  $\ell$  do segmento de

reta  $S$  como sendo  $M(\mathcal{L}) = \sum_{i \in \mathcal{L}} \mu_i$ . Esta medida fornece uma descrição da distribuição sobre o suporte para  $\delta$  suficiente pequeno. Como a nossa distribuição tem propriedade de escala, podemos estender a nossa análise. Assim, na  $n$ -ésima geração teremos uma população de  $N = 2^n$  membros em um suporte constituído de segmentos de tamanho  $\delta = 2^{-n}$ , cujas respectivas medidas são dadas por  $\mu_i = \mu_0^k \mu_1^{(n-k)}$ , onde  $k$  é o número de zeros na representação binária da fração  $i/2^n$ , variando de 0 a  $n$ , e  $i$  é o índice da célula (segmento) que varia de 0 até  $N - 1$  e contém a medida  $\mu_i$ . Podemos ver que células com o mesmo  $k$  possuem a mesma medida. Definindo  $\xi = k/n$ ,  $\xi \in [0, 1]$ , observamos que na hierarquia  $n$  há:

$$N_n(\xi) = \binom{n}{\xi n} \quad (2.8)$$

segmentos de tamanho  $\delta = 2^{-n}$  com mesma medida:

$$\mu_\xi = \mu_0^\xi \mu_1^{(1-\xi)}. \quad (2.9)$$

A medida total  $M$  é portanto dada por:

$$M = \sum_{\xi=0}^1 N_n(\xi) \mu_\xi = (\mu_0 + \mu_1)^n = 1.$$

Estes segmentos do suporte que contêm a mesma medida formam um subconjunto  $S_n(\xi)$  do conjunto suporte  $S = [0, 1]$ . No limite  $n \rightarrow \infty$ , o subconjunto  $S_n(\xi)$  é um conjunto fractal. Usando a definição da medida  $M_d(S_\xi)$  - eq.(2.1) - podemos calcular a dimensão fractal  $d(\xi)$  do subconjunto  $S_n(\xi)$ :

$$M_d(S_\xi) = \sum_{S_\xi} \delta^d = N_n(\xi) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > d_f(\xi), \\ \infty, & d < d_f(\xi). \end{cases} \quad (2.10)$$

Reescrevendo  $N_n(\xi)$  do processo binomial adequadamente, ver apêndice A, podemos expressar a medida  $M_d(S_\xi)$  na forma:

$$M_d(S_\xi) \sim \delta^{-f(\xi)} \delta^d, \quad (2.11)$$

sendo:

$$f(\xi) = - \frac{\xi \ln(\xi) + (1 - \xi) \ln(1 - \xi)}{\ln(2)}. \quad (2.12)$$

Assim podemos interpretar  $f(\xi)$  como a dimensão fractal do subconjunto  $\xi$ , ao compararmos a eq. (2.11) com (2.10) e concluirmos que  $f(\xi) = d(\xi)$ .

Estes subconjuntos com dimensões fractais diferentes são a razão do nome multifractais.

### 2.3.2) O EXPOENTE DE LIPSCHITZ-HÖLDER $\alpha$ E A FUNÇÃO $f(\alpha)$

A medida  $M$  pode também ser caracterizada pelo expoente de Lipschitz-Hölder  $\alpha$  definido por:

$$\mu_\xi = \delta^\alpha,$$

de onde obtemos:

$$\alpha = \ln(\mu_\xi) / \ln(\delta). \quad (2.13)$$

Substituindo a expressão de  $\mu_\xi$ , dada pela eq. (2.9) em (2.13), encontramos uma relação entre  $\alpha$  e  $\xi$ , o que nos permite substituir  $\xi$  por  $\alpha$  em (2.12), ver apêndice A, e encontrar a expressão de  $f(\alpha)$  - cuja curva típica se encontra na figura (2.5) exemplificada para o processo binomial multiplicativo.

Analisando a derivada de  $f(\alpha)$

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\ln(\xi) - \ln(1 - \xi)}{\ln(p) - \ln(1 - p)}. \quad (2.14)$$

Notamos que quando a derivada é nula - o que corresponde ao máximo de  $f(\alpha)$  -  $\xi$  vale  $1/2$  para a distribuição binomial multiplicativa e a função  $f(\alpha)$  vale 1, sendo esta também a dimensão fractal do suporte da medida  $\mu$ . Uma outra situação interessante ocorre para  $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1$ , quando  $\xi = p$ ; neste caso  $f(\alpha) = \alpha$  e  $f(\alpha)$  é igual a entropia do processo binomial multiplicativo [17]:

$$f(\alpha) = S = - (p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p)) / \ln(2). \quad (2.14)$$

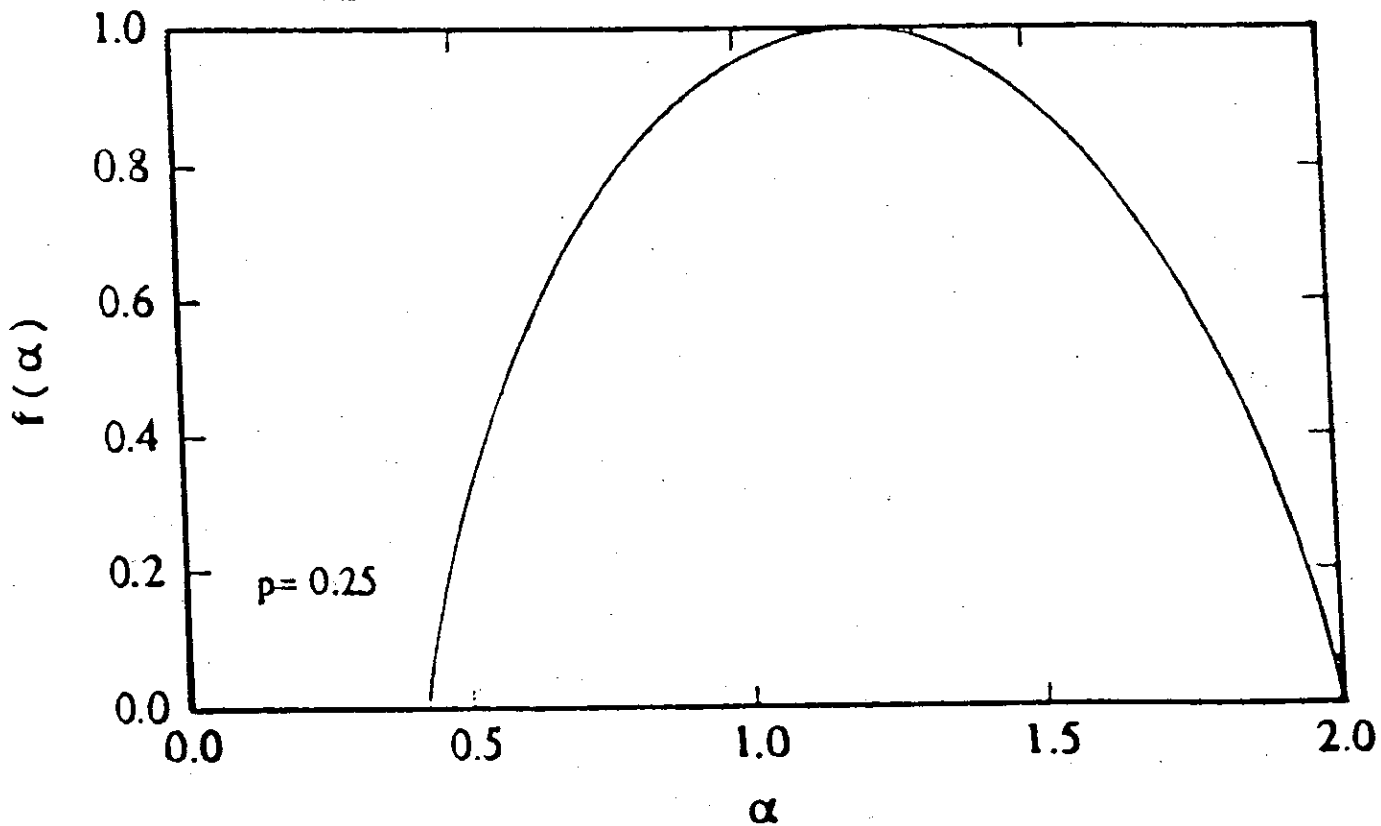


Figura 2.5) Curva  $f(\alpha)$  para a distribuição binomial com  $p=0.25$ .

### 2.3.3) EXPOENTES DE MASSA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE ORDEM $q$ ( $\tau(q)$ )

Utilizando os momentos da distribuição de ordem  $q$  ( $\mu_1^q$ ), podemos construir uma nova medida [17] que nos auxilie na análise da estrutura dos subconjuntos fractais presentes da seguinte forma:

$$M_d(q, \delta) = \sum_{i=1}^N \mu_1^q \delta^d = N(q, \delta) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q), \end{cases} \quad (2.15)$$

onde  $\tau(q)$  é chamado de expoente de massa e pode ser expresso pela relação:

$$N(q, \delta) = \sum_{i=1}^N \mu_1^q \delta^{-\tau(q)}, \quad (2.16)$$

Obtemos desta relação que os expoentes de massa são dados por:

$$\tau(q) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}. \quad (2.17)$$

A informação sobre a estrutura da distribuição se explicita quando notamos que para  $q = 0$  o expoente  $\tau(0)$  é a dimensão fractal de conjunto e podemos ver que sendo as medidas normalizadas  $\tau(1)$  vale 0. Os valores de  $q$  grandes favorecem os maiores valores da medida ( $\mu_+$ ), enquanto que valores de  $q$  pequenos favorecem os menores valores da medida ( $\mu_-$ ). Assim, podemos ver que:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu_-)}{\ln(\delta)} = -\alpha_{\max}, \quad (2.18)$$

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu_+)}{\ln(\delta)} = -\alpha_{\min}.$$

Podemos ver também que para  $q = 1$  a derivada vale:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_q = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S(\delta)}{\ln(\delta)}, \quad (2.19)$$

onde  $S(\delta)$  é a entropia de partição da medida  $M$ .

A relação entre o expoente de massa  $\tau(q)$  e a curva  $f(\alpha)$  é obtida quando calculamos a medida  $M$  para o suporte  $S$ , formado pela união dos subconjuntos fractais  $S_\alpha$  de dimensão  $f(\alpha)$ . Sendo  $\rho(\alpha)d\alpha$  o número de conjuntos entre  $S_\alpha$  e  $S_{\alpha+d\alpha}$ , o número de abertos de comprimento  $\delta$  necessários para cobrir os conjuntos  $S_\alpha$  de  $\alpha$  até  $\alpha + d\alpha$  é dado por:

$$N(\alpha, \delta) = \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)},$$

assim a medida  $M$  pode ser escrita como:

$$M_d(q, \delta) = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{q\alpha - f(\alpha) + d}. \quad (2.20)$$

Como  $\delta \rightarrow 0$ , a integral é dominada pelos termos que maximizam o integrando, caracterizados por:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} (q\alpha - f(\alpha)) \right|_{\alpha=\alpha(q)} = 0. \quad (2.21)$$

Assintoticamente podemos expressar a medida na forma:

$$M_d(q, \delta) = \delta^{q\alpha(q) - f(\alpha(q)) + d}.$$

No limite  $\delta \rightarrow 0$ , a medida fica finita se  $d$  igualar o expoente de massa  $\tau(q)$ . Sendo  $\alpha(q)$  a solução da equação (2.21), temos que:

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q). \quad (2.22)$$

Podemos expressar  $f(\alpha)$  e  $\alpha$  como funções de  $\tau(q)$  e  $q$  usando a equação acima (2.22), obtendo:

$$\alpha(q) = -\frac{d\tau(q)}{dq}, \quad (2.23)$$

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q).$$

Estas relações são uma transformação de Legendre das variáveis  $\tau$  e  $q$  para  $f$  e  $\alpha$ , o que explicita sua equivalência na descrição de multifractais.



### CAPÍTULO 3

#### CRITICALIDADE E MULTIFRACTALIDADE DO MODELO DE POTTS EM REDES FRACTAIS HIERÁRQUICAS

##### 3.1) CRITICALIDADE DO MODELO DE POTTS

##### 3.1.1) DESCRIÇÃO DO PROBLEMA EM REDES FRACTAIS

Estudaremos neste capítulo algumas grandezas relacionadas com a criticalidade do modelo de Potts ferromagnético a campo nulo nas redes fractais hierárquicas diamante (RD) e ponte de wheatstone (RPW), mostradas na figura (2.4), como alguns de seus expoentes críticos, grandezas termodinâmicas, etc... O modelo consiste em associar a cada sítio da rede uma variável de spin tipo Potts ( $\sigma_i$ ) que possui  $q$  estados ( $0, 1, 2, \dots, q - 1$ ) que interagem somente com seus primeiros vizinhos em uma dada hierarquia e cujo Hamiltoniano pode ser escrito como:

$$\mathcal{H} = -qJ \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j), \quad (3.1)$$

isto é, soma-se  $-qJ$  à energia do sistema quando dois de seus spins mais próximos se encontram no mesmo estado. Precisamos estabelecer certas condições de contorno [25,48,49] pois torna-se necessário quebrar a simetria do modelo com o uso de um campo magnético externo ou pela fixação de spins em um estado particular do modelo de Potts para que a magnetização local para este modelo,

$$m_1 = \frac{q \langle \delta(\sigma_i, 0) \rangle - 1}{q - 1}, \quad (3.2)$$

e a magnetização média por sitio da rede,

$$m = \sum_i^N \left( \frac{q \langle \delta(\sigma_i, 0) \rangle - 1}{q - 1} \right) / N_s, \quad (3.3)$$

onde  $N_s$  é o número de sitios da rede e  $\delta$  é a delta de Kronecker, sejam definidos corretamente no limite termodinâmico. Em particular, queremos que estas duas grandezas apresentem valores não nulos na fase ordenada. Assim, o campo externo ou as condições de contorno são necessários porque há uma simetria entre os estados termodinâmicos associados a cada um dos estados do modelo, o que se traduz pelo fato de a média térmica somar sobre todas as configurações do sistema. De fato o sistema fica confinado a um dos  $q$  mínimos da energia do modelo, pois a probabilidade de o sistema sofrer uma flutuação nos seus parâmetros internos que o conduza a um outro mínimo é praticamente nula no limite termodinâmico. Deste modo precisamos quebrar esta simetria para que possamos avaliar corretamente as médias térmicas. Para quebrar a simetria do modelo nas redes hierárquicas como a RD e a RPW, fixamos os dois únicos spins da rede na hierarquia zero (raízes) no estado zero do modelo de Potts. A fixação de apenas um dos spins das raízes é suficiente para se obter médias térmicas corretas, embora a magnetização local deixe de apresentar as simetrias da rede. Mesmo com ambos spins localizados nas raízes congelados em estados fixos, verificamos ainda uma grande não-homogeneidade da magnetização, o que se deve a grande não-homogeneidade da própria rede, como observaram Morgado et al [25].

Em nosso método, desejamos obter uma equação de recorrência que forneça a magnetização local dos sítios de última hierarquia da rede como função de magnetizações locais dos sítios e de tipos especiais de "funções de correlação entreprimeiros vizinhos" de hierarquias anteriores. Com este interesse isolamos nesta uma célula básica (ver figura 3.1a) e discriminamos os spins (sítios) da célula básica em dois tipos: os spins " $\sigma$ " que são aqueles que aparecem na n-ésima hierarquia da rede e os spins " $\mu$ " que são aqueles que conectam os spins de última hierarquia da célula básica (" $\sigma$ ") com os demais spins, ou seja os spins que pertencem ao "restante da rede", como mostra a figura (3.1a) para rede diamante. Finalmente, para se obter a equação de recorrência, precisamos expressar os termos do tipo  $\langle \delta_{\sigma 0} \rangle$  (médias envolvendo spins da hierarquia n) como função dos termos tipo  $\langle \delta_{\mu 0} \rangle$  (médias envolvendo somente spins de hierarquias anteriores).

A simetria da rede diamante nos permite incluir um de seus spins " $\sigma$ " no "restante da rede" possibilitando generalizações, uma vez que há uma família de redes diamante que pode ser definida variando-se o número de coordenação dos spins " $\mu$ " na hierarquia um ( $N_c$ ); estas novas redes também permitem sua descrição pela inclusão dos seus  $N_c - 1$  spins " $\sigma$ " no "restante da rede" (ver figura 3.1b) de modo a admitir as mesmas equações de recorrência para a magnetização local que a RD usual ( $N_c = 2$ ).

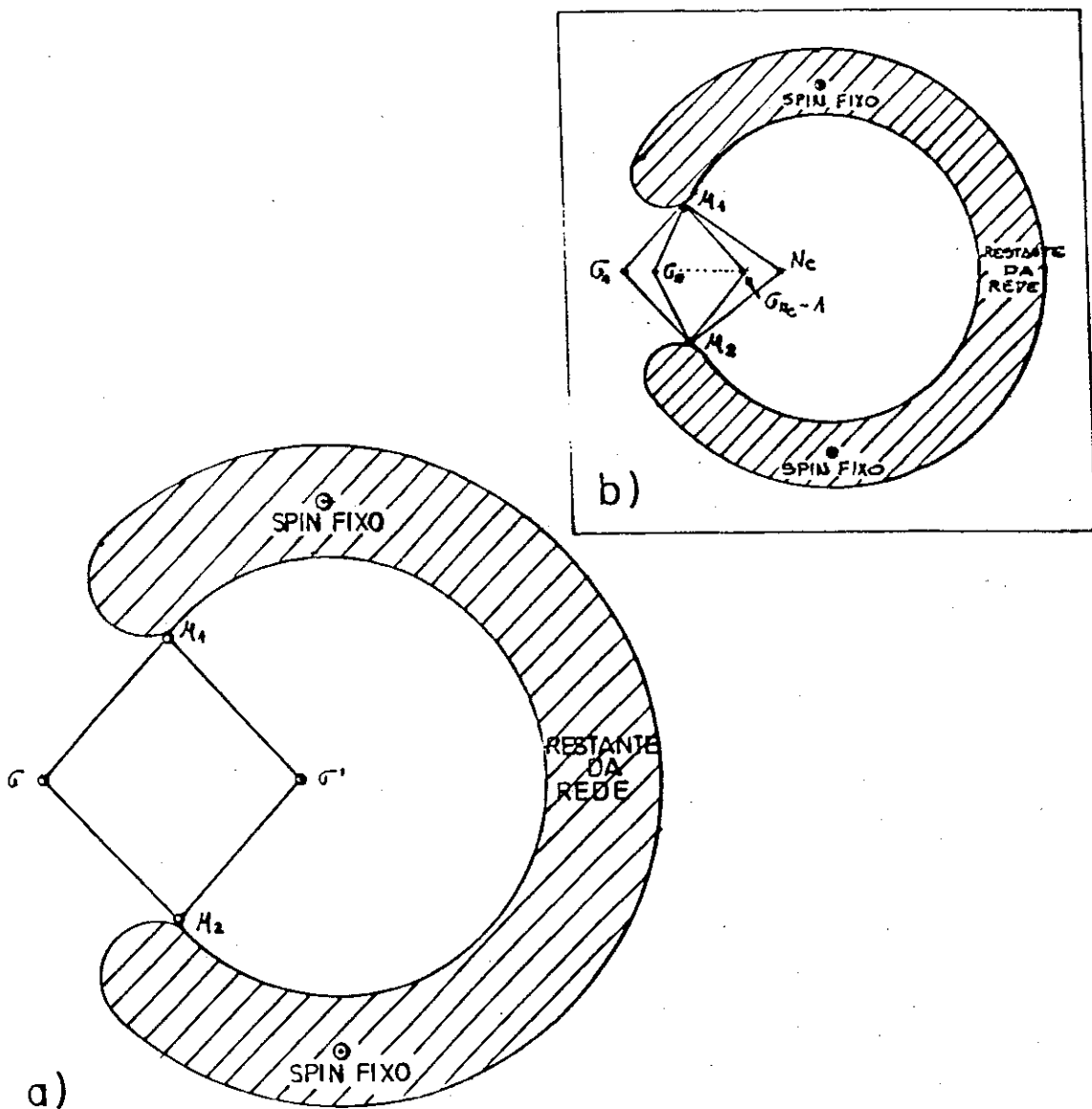


Figura 3.1) Em a) vemos a célula básica destacada da rede na n-ésima hierarquia assim como os spins " $\sigma$ " e " $\mu$ ". Em b) vemos a célula básica para uma família de redes, as quais permitem a inclusão de seus  $N - 1$  spins no "restante da rede" e admitem a mesma equação de recorrência da magnetização local.

Podemos calcular a função de partição realizando primeiro o traço sobre os spins do "restante da rede" e podemos considerar a influência do "restante da rede" sobre a célula básica em forma de campos e acoplamentos efetivos. Para mostrar isto, inicialmente, podemos ver que para o modelo de Potts a campo nulo (eq. 3.1), a função de partição pode ser escrita na forma [1]:

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{(i,j)} \left[ 1 + (A - 1) \delta(\sigma_i, \sigma_j) \right], \quad (3.4)$$

onde utilizamos a propriedade de que a delta de Kronecker vale zero ou um; a variável A é definida como:

$$A = e^{qK} \text{ e } K = J / K_B T.$$

Assim, calculando o traço sobre os spins do "restante da rede" obtemos polinômios de funções delta [1] mais uma constante que resultam, para rede diamante, apenas em:

$$e + f \delta_{\mu_1 \mu_2} + g \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} + h_1 \delta_{\mu_1 0} + h_2 \delta_{\mu_2 0},$$

sendo os coeficientes e, f, g, h<sub>1</sub> e h<sub>2</sub> polinômios desconhecidos em A e q. Podemos ainda expressar este resultado na forma de uma exponencial de um hamiltoniano equivalente  $\mathcal{H}'$ , onde  $-\beta \mathcal{H}'$  vale:

$$\vartheta + qK' \delta_{\mu_1 \mu_2} + qL \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} + qH_1 \delta_{\mu_1 0} + qH_2 \delta_{\mu_2 0},$$

e os parâmetros  $\vartheta$ , K', L, H<sub>1</sub> e H<sub>2</sub> são desconhecidos. Assim, podemos reescrever o hamiltoniano equivalente para, por exemplo, toda a rede diamante  $-\beta \mathcal{H}'$  com n hierarquias na forma:

$$(3.5)$$

$$\vartheta + qK(\delta_{\sigma \mu_1} + \delta_{\sigma \mu_2}) + qK' \delta_{\mu_1 \mu_2} + qL \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} + qH_1 \delta_{\mu_1 0} + qH_2 \delta_{\mu_2 0},$$

onde o segundo termo pertence à célula básica e os demais provêm da equação anterior. Vemos aqui a influência do "restante da rede" na forma de campos e acoplamentos efetivos.

### 3.1.2) EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA PARA A MAGNETIZAÇÃO LOCAL

Necessitamos agora calcular as médias a partir das quais podemos derivar as equações de recorrência para a magnetização local. Assim, partindo da definição de média:

$$\langle \delta_{\sigma 0} \rangle = \frac{\sum_{\text{todas as configur.}} \delta_{\sigma 0} e^{-\beta \mathcal{H}'}}{Z},$$

vemos que podemos obter qualquer média que desejarmos como função de  $K$  e dos parâmetros desconhecidos  $K'$ ,  $L$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  e  $\vartheta$ . Entretanto podemos eliminar a constante  $\vartheta$  do problema através de uma renormalização, pois a função de partição (eq. 3.4) se escreve, por exemplo, para a célula básica da rede diamante:

(3.6)

$$\begin{aligned} Z = \psi \sum_{(\sigma, \mu)} & \left[ 1 + (A - 1) \delta(\sigma, \mu_1) \right] \left[ 1 + (A - 1) \delta(\sigma, \mu_2) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ 1 + (B - 1) \delta(\mu_1, \mu_2) \right] \left[ 1 + (C - 1) \delta(\mu_1, 0) \delta(\mu_2, 0) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ 1 + (D_1 - 1) \delta(\mu_1, 0) \right] \left[ 1 + (D_2 - 1) \delta(\mu_2, 0) \right], \end{aligned}$$

onde  $A = e^{qK}$ ,  $B = e^{qK'}$ ,  $C = e^{qL}$ ,  $D_1 = e^{qH_1}$ ,  $D_2 = e^{qH_2}$  e  $\psi = e^{\vartheta}$ . Deste modo podemos renormalizar  $Z$  e obter a "nova função de partição" renormalizada:

$$Z' \equiv Z/\psi.$$

Podemos agora calcular as médias que envolvem somente os spins " $\mu$ " (que apareceram na rede em hierarquias anteriores aos spins " $\sigma$ " ) em função dos parâmetros anteriormente citados. Obtemos e devemos inverter as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mu_1 0} \rangle &= f_1(K', H_1, H_2, L), \\ \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle &= f_2(K', H_1, H_2, L), \\ \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle &= f_3(K', H_1, H_2, L), \\ \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle &= f_4(K', H_1, H_2, L), \end{aligned} \tag{3.7}$$

cujas as funções  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  estão listadas no apêndice B após a explicação do método utilizado para o cálculo das médias. Devemos agora inverter este sistema de equações para obtermos os parâmetros em função das médias que envolvem somente os spins " $\mu$ ", o que não necessariamente se consegue fazer em qualquer modelo, pois poderíamos, por exemplo, a cada hierarquia gerar mais parâmetros ou correlações entre mais corpos. No nosso modelo isto não ocorre. Assim, não criando termos adicionais a cada geração, o número de parâmetros permanece constante e podemos inverter o sistema de equações (3.7) possibilitando encontrar as relações:

$$\begin{aligned} K' &= g_1(\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ L &= g_2(\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ H_1 &= g_3(\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ H_2 &= g_4(\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Veremos entretanto, no apêndice B, que os parâmetros realmente importantes são uma combinação dos parâmetros iniciais e são essas relações que efetivamente utilizamos. Há ainda outras médias que envolvem spins " $\sigma$ " e spins " $\mu$ " que são necessárias já que na equação de recorrência para a magnetização local aparece um tipo especial de "função de correlação entre primeiros vizinhos"  $\Delta_{\mu_1\mu_2}$  definida como:

$$\Delta_{\mu_1\mu_2} = q \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle - \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle. \quad (3.9)$$

Similarmente  $\Delta_{\sigma\mu_i}$  se escreve:

$$\Delta_{\sigma\mu_i} = q \langle \delta_{\sigma 0} \delta_{\mu_i 0} \rangle - \langle \delta_{\sigma\mu_i} \rangle$$

onde  $i$  pode assumir os valores 1 ou 2. Por isso, precisamos também das médias:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\sigma 0} \rangle &= p_1 (\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ \langle \delta_{\sigma\mu_1} \rangle &= p_2 (\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ \langle \delta_{\sigma\mu_2} \rangle &= p_3 (\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ \langle \delta_{\sigma 0} \delta_{\mu_1 0} \rangle &= p_4 (\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \\ \langle \delta_{\sigma 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle &= p_5 (\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle, \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle, \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle), \end{aligned} \quad (3.10)$$

que são facilmente obtidas pelo método descrito no apêndice B.

Deste modo, ao substituirmos na expressão de  $\langle \delta_{\sigma 0} \rangle$  os parâmetros  $K'$ ,  $L$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  (os quais são funções das médias que envolvem somente spins " $\mu$ "), usando a definição de magnetização local (eq.3.2) e da "função de correlação entre primeiros vizinhos" (eq.3.9), obtemos a equação de recorrência para a



magnetização local da rede diamante com n hierarquias:

(3.11)

$$m_{\sigma} = C_n^{10} \left( m_{\mu_1 0} + m_{\mu_2 0} \right) + C_n^{20} \frac{q}{(q-1)} \Delta_{\mu_1 \mu_2},$$

$$\Delta_{\sigma \mu_i} = C_n^{30} (q-1) \left( m_{\mu_i} \right) + C_n^{40} \Delta_{\mu_1 \mu_2}, \quad (i=1,2),$$

sendo que os coeficientes são dados pelas seguintes expressões:

$$C_n^{10} \equiv \frac{A_n - 1}{2A_n + q - 2},$$

$$C_n^{20} \equiv \frac{(A_n - 1)^2}{(A_n^2 + q - 1)(2A_n + q - 2)},$$

$$C_n^{30} \equiv \frac{A_n}{(2A_n + q - 2)},$$

$$C_n^{40} \equiv \frac{A_n (A_n - 1) (A_n + q - 1)}{(A_n^2 + q - 1) (2A_n + q - 2)},$$

onde  $A_n \equiv e^{qK_n}$ , sendo  $K_n$  o acoplamento da n-ésima hierarquia.

Os acoplamentos das hierarquias se relacionam através de uma equação de renormalização para  $K_n$  do tipo:  $K_{n-1} = f(K_n)$  [1].

Para  $q = 2$ , situação na qual o modelo de Potts equivale ao modelo de Ising, estas relações reproduzem as equações de recorrência para a magnetização local do modelo de Ising na rede diamante obtidas por Morgado et al, ver refs. [25,48].

---

[1] - Entretanto, podemos realcionar diretamente  $A_n$  com a transmissividade  $t_n$ , ver seção (3.1.5), e assim trabalhar com a equação de recorrência para esta grandeza.

$$C_n^{3W} \equiv \frac{A_n (A_n^2 + A_n + q - 2)}{2A_n^3 + 2A_n^2 + (q - 2)(5A_n + q - 3)}$$

$$C_n^{4W} \equiv \frac{A_n^5 + A_n^2(q - 1)}{A_n^5 + (q - 1)(2A_n^2 + A_n + q - 2)} - \frac{A_n (A_n^2 + A_n + q - 2)}{2A_n^3 + 2A_n^2 + (q - 2)(5A_n + q - 3)}$$

$$C_n^{5W} \equiv \frac{A_n^3 - A_n}{2A_n^3 + 2A_n^2 + (q - 2)(5A_n + q - 3)}$$

$$C_n^{6W} \equiv \frac{A_n^5 - A_n}{A_n^5 + (q - 1)(2A_n^2 + A_n + q - 2)} + \frac{2A_n - 2A_n^3}{2A_n^3 + 2A_n^2 + (q - 2)(5A_n + q - 3)}$$

$A_n = e^{qK_n}$  e  $K_n$  é o acoplamento da rede na n-ésima hierarquia. Notamos o aumento do número de equações de recorrência porque na rede ponte de wheatstone há uma ligação diferente que envolve somente spins " $\sigma$ " o que não ocorre na rede diamante. Isto cria mais uma equação para descrever a evolução da "função de correlação entre primeiros vizinhos" associada a esta ligação. Devido à sua simetria a rede ponte de wheatstone não permite a inclusão de um de seus spins " $\sigma$ " no restante da rede.

### 3.1.3) EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA PARA A MAGNETIZAÇÃO MÉDIA

Necessitamos agora obter as equações de recorrência para a magnetização média por sítio da rede. Deste modo, precisamos somar para cada sítio e ligação, convenientemente, as equações locais de recorrência. Ao somarmos a equação de recorrência para a magnetização local sobre todos os sítios, que aparecem na última hierarquia (spins " $\sigma$ ") nos deparamos com o problema de somar as "funções de correlação entre primeiros vizinhos" que são definidas sobre ligações. A situação contrária também ocorre, ou seja, quando somamos a "função de correlação entre primeiros vizinhos" sobre todas as ligações, como somar os termos de magnetização local que envolvem somente sítios? Para resolver isto, levamos em conta a estrutura da rede para estabelecer certas equivalências entre um tipo de soma e outro. Primeiramente precisamos fazer algumas definições: a magnetização média por sítio da rede, quando esta se encontra na  $n$ -ésima hierarquia ( $m_n$ ) é definida como:

$$m_n = \frac{1}{N_{sn}} \sum_s^{(n)} m_s, \quad (3.14)$$

onde  $N_{sn}$  é o número total de sítios (spins) da rede,  $m_s$  é a magnetização local do sítio  $s$ , o somatório é realizado na  $n$ -ésima hierarquia (por convenção doravante isto será indicado pelo índice  $n$ , entre parênteses, em cima do somatório). A "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos na  $n$ -ésima hierarquia ( $\Delta_n$ ) é definida como:

$$\Delta_n = \frac{1}{N_{bn}} \sum_b^{(n)} \Delta_{\mu\sigma} \quad (3.15)$$

$N_{bn}$  é o número de ligações da rede presentes na n-ésima hierarquia e a soma das funções  $\Delta_{\mu\sigma}$  é realizada sobre todas as ligações presentes na n-ésima hierarquia. A energia média por ligação na n-ésima hierarquia ( $E_n$ ) é definida da seguinte forma:

$$E_n = \frac{1}{N_{bn}} \sum_b^{(n)} \langle \delta_{\mu_i \mu_j} \rangle \quad (3.16)$$

Podemos reescrever a equação (3.14) multiplicando ambos os membros por  $N_{sn}$  e separando de seu membro direito um termo que é a soma somente sobre a magnetização local de todos os sítios " $\sigma$ ", ou seja, a soma somente dos sítios que aparecem na hierarquia n (indicada pelo símbolo  $\sum_{s=\sigma}^{(n)}$ ):

$$m_n N_{sn} = \sum_{s=\sigma}^{(n)} m_\sigma + m_{n-1} N_{sn-1}, \quad (3.17)$$

o segundo termo do membro direito é o produto da magnetização média por sítio da rede com n-1 hierarquias pelo número de sítios naquela hierarquia. Vamos definir uma função  $\theta$  que nos ajudará a simplificar o cálculo da relação de recorrência,

$$\theta(n) = \sum_s^{(n)} Z_s^{(n)} m_s, \quad (3.18)$$

onde o parênteses sobre Z significa que o número de coordenação é aquele da hierarquia n, ou seja, somamos, sobre todos os sítios presentes na hierarquia n, o produto da magnetização local do sítio s por seu número de coordenação nesta hierarquia. Separando na definição de  $\theta$  (eq. 3.18) a soma sobre

os sítios de última geração (spins " $\sigma$ ") dos demais, substituindo este termo pelo seu similar na eq. (3.17) e reutilizando a definição de  $\theta$  (eq. 3.18) podemos encontrar a relação de recorrência para  $\theta$  na rede diamante na forma:

$$2(m_{n-1} N_{sn-1} - m_{n-2} N_{sn-2}) = \theta(n-1) - 2\theta(n-2). \quad (3.19)$$

Vale ressaltar que para verificar os resultados das somas sobre sítios de grandezas definidas para ligações e das somas sobre ligações de grandezas definidas para sítios, é preciso abrir a soma para uma dada hierarquia, em uma rede específica. Para a rede diamante obtivemos que a soma sobre os sítios " $\sigma$ " resulta, para o primeiro termo da equação de recorrência da magnetização local (sem seus coeficientes):

$$\sum_{s=\sigma}^{(n)} (m_{\mu_1} + m_{\mu_j})$$

o seguinte resultado:

$$2 \sum_{s=\mu}^{(n-1)} Z_1 m_{\mu_1}. \quad (3.20)$$

A soma sobre o segundo termo da equação de recorrência da magnetização local:

$$\sum_{s=\sigma}^{(n)} \Delta_{\sigma\mu_j},$$

resulta em:

$$2 \left( \sum_b^{(n-1)} \Delta_{\mu_1\mu_j} \right). \quad (3.21)$$

Somando sobre ligações, os termos da equação de recorrência para a "função de correlação entre primeiros vizinhos"

estabelecemos uma relação entre a soma sobre ligações das magnetizações locais que aparecem no primeiro termo da equação de recorrência para a "função de correlação entre primeiros vizinhos"

$$\sum_b^{(n)} m_{\mu_1} = 2 \left( \sum_S^{(n-1)} Z_i^{(n-1)} m_{\mu_1} \right) \quad (3.22)$$

e realizando a soma sobre o segundo termo, obtemos simplesmente  $4\Delta_{n-1} N_{bn-1}$ . O resultado da soma do primeiro membro da equação de recorrência da magnetização local é a equação de recorrência fornecida pela (eq. 3.17) e a soma sobre ligações da equação de recorrência da "função de correlação entre primeiros vizinhos" é a definição da "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos. Usando as definições e relações anteriores para realizar a soma sobre sítios e ligações no par de equações (3.11), encontramos uma equação que relaciona  $\theta$  com a magnetização média por sítio da rede e  $\Delta$ :

$$\theta(n-1) = \frac{1}{2C_n^{1D}} (m_n N_{sn} - m_{n-1} N_{sn-1}) - N_{bn-1} \frac{C_n^{2D}}{C_n^{1D}} \Delta_{n-1}, \quad (3.23)$$

e outra que relaciona  $\theta$  com a "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos:

$$\theta(n-1) = \frac{1}{2(q-1)C_n^{3D}} (N_{bn} \Delta_n - 4N_{bn-1} C_n^{4D} \Delta_{n-1}) \quad (3.24)$$

Assim substituindo adequadamente as equações de  $\theta$  acima para  $m_n$  e  $\Delta_n$  na equação de recorrência para  $\theta$  (eq. 3.19), encontramos as equações de recorrência para a magnetização média por sítio e para a "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos na hierarquia  $n$  da rede diamante:

(3.25)

$$\begin{aligned}
 m_n &= \frac{N_{sn-1}}{N_{sn}} \left( 4 C_n^{1D} + 1 + 2 \frac{C_n^{1D}}{C_{n-1}^{1D}} \right) m_{n-1} + \\
 &- \frac{N_{sn-2}}{N_{sn}} \left( 4 C_n^{1D} + 2 \frac{C_n^{1D}}{C_{n-1}^{1D}} \right) m_{n-2} + \\
 &+ 2 \frac{N_{bn-1}}{N_{sn}} \frac{q}{q-1} C_n^{2D} \Delta_{n-1} + \\
 &- 4 \frac{N_{bn-2}}{N_{sn}} \frac{q}{q-1} C_n^{2D} \frac{C_n^{1D}}{C_{n-1}^{1D}} \Delta_{n-2} . \\
 \Delta_n &= 4 \frac{N_{sn-1}}{N_{bn}} (q-1) C_n^{3D} m_{n-1} + \\
 &- 4 \frac{N_{sn-2}}{N_{bn}} (q-1) C_n^{3D} m_{n-2} + \\
 &+ \left( C_n^{4D} + 2 \frac{C_n^{3D}}{C_{n-1}^{3D}} \frac{N_{bn-1}}{N_{bn}} \right) \Delta_{n-1} + \\
 &- 8 C_{n-1}^{4D} \frac{C_n^{3D}}{C_{n-1}^{3D}} \frac{N_{bn-2}}{N_{bn}} \Delta_{n-2} .
 \end{aligned}$$

Os coeficientes  $C_n^{1D}$ ,  $C_n^{2D}$ ,  $C_n^{3D}$  e  $C_n^{4D}$  são os coeficientes anteriormente definidos para as equações de recorrência da magnetização local para a rede diamante e o sub-índice  $n$  indica em qual hierarquia eles são calculados.

Refazendo os mesmos cálculos para a rede ponte de wheatstone, verificamos que as relações expressas nas eqs. (3.20), (3.21) e (3.22) continuam válidas, mas a equação de recorrência para  $\theta$  (eq. 3.19) se modifica. A relação agora se escreve:

$$3(m_{n-1} N_{sn-1} - m_{n-2} N_{sn-2}) = \theta(n-1) - 2\theta(n-2). \quad (3.26)$$

Assim podemos obter as equações de recorrência para a magnetização média por sítio e para a "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos da ponte de wheatstone na hierarquia n:

$$\begin{aligned} m_n = & \frac{N_{sn-1}}{N_{sn}} \left( 6 C_n^{1W} + 1 + 2 \frac{C_n^{1W}}{C_{n-1}^{1W}} \right) m_{n-1} \\ & - \frac{N_{sn-2}}{N_{sn}} \left( 6 C_n^{1W} + 2 \frac{C_n^{1W}}{C_{n-1}^{1W}} \right) m_{n-2} + \\ & + 2 \frac{N_{bn-1}}{N_{sn}} \frac{q}{q-1} C_n^{2W} \Delta_{n-1} \\ & - 4 \frac{N_{bn-2}}{N_{sn}} \frac{q}{q-1} C_n^{2W} \frac{C_n^{1W}}{C_{n-1}^{1W}} \Delta_{n-2} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \Delta_n = & 3 \frac{N_{sn-1}}{N_{bn}} (q-1) (2C_n^{3W} + C_n^{5W}) m_{n-1} + \\ & - 3 \frac{N_{sn-2}}{N_{bn}} (q-1) (2C_n^{3W} + C_n^{5W}) m_{n-2} + \\ & + \frac{N_{bn-1}}{N_{bn}} \left( (4C_n^{4W} + C_n^{6W}) + 2 \frac{(2C_n^{3W} + C_n^{5W})}{(2C_{n-1}^{3W} + C_{n-1}^{5W})} \right) \Delta_{n-1} + \\ & - \frac{N_{bn-2}}{N_{bn}} \left( 2(4C_{n-1}^{4W} + C_{n-1}^{6W}) \frac{(2C_n^{3W} + C_n^{5W})}{(2C_{n-1}^{3W} + C_{n-1}^{5W})} \right) \Delta_{n-2} . \end{aligned}$$

Os coeficientes são aqueles definidos para a equação de recorrência para a magnetização local da ponte de wheatstone e o subíndice indica a hierarquia à qual eles pertencem.



### 3.1.4) GENERALIZAÇÃO PARA UMA FAMÍLIA DE REDES DIAMANTE

Devido à simetria da rede e ao método que utilizamos para a obtenção do hamiltoniano equivalente para a rede diamante, que inclui um spin " $\sigma$ " no "restante da rede", podemos ver que as equações de recorrência local se mantêm para toda uma família de redes diamante gerada pela variação do número de coordenação das raízes da célula básica ( $N_c$ ), ver figura (3.1b). A rede diamante usual possui  $N_c = 2$  (fig 2.4a e fig. 3.1a). Agora podemos trabalhar com qualquer valor de  $N_c$  e iremos calcular as equações de recorrência para a magnetização média por sítio para esta família de redes em função do parâmetro  $N_c$ . Por causa da sua estrutura diferente, mudam as relações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) dentre outras que passam a depender explicitamente de  $N_c$ . A equação (3.19) se torna:

$$2(m_{n-1} N_{sn-1} - m_{n-2} N_{sn-2}) = \theta(n-1) - N_c \theta(n-2) \quad (3.28)$$

e as demais são dadas respectivamente pelas seguintes equações:

$$\sum_{s=\sigma}^{(n)} (m_{\mu_1} + m_{\mu_j}) = N_c \sum_S^{(n-1)} Z_1 m_{\mu_1} \quad (3.29)$$

$$\sum_{s=\sigma}^{(n)} \Delta_{\mu_1 \mu_j} = N_c \left( \sum_b^{(n-1)} \Delta_{\mu_1 \mu_j} \right)$$

$$\sum_b^{(n)} m_{\mu_1} = N_c \left( \sum_S^{(n-1)} Z_1 m_{\mu_1} \right).$$

Podemos então calcular a equação de recorrência para a magnetização média por sítio da rede  $m_n$  e para a "função de

correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos na hierarquia n:

$$\begin{aligned}
 m_n &= \frac{N_{s_{n-1}}}{N_{s_n}} \left( (2N_c) C_n^{1D} + 1 + (N_c) \frac{C_n^{1D}}{C_{n-1}^{1D}} \right) m_{n-1} + \\
 &- \frac{N_{s_{n-2}}}{N_{s_n}} \left( (2N_c) C_n^{1D} + N_c \frac{C_n^{1D}}{C_{n-1}^{1D}} \right) m_{n-2} + \\
 &+ (N_c) \frac{N_{b_{n-1}}}{N_{s_n}} \frac{q}{q-1} C_n^{2D} \Delta_{n-1} + \\
 &- (N_c)^2 \frac{N_{b_{n-2}}}{N_{s_n}} \frac{q}{q-1} C_n^{2D} \frac{C_n^{1D}}{C_{n-1}^{1D}} \Delta_{n-2} \\
 \Delta_n &= (2N_c) \frac{N_{s_{n-1}}}{N_{b_n}} (q-1) C_n^{3D} m_{n-1} + \\
 &- (2N_c) \frac{N_{s_{n-2}}}{N_{b_n}} (q-1) C_n^{3D} m_{n-2} + \\
 &+ \left( C_n^{4D} + (N_c) \frac{C_n^{3D}}{C_{n-1}^{3D}} \frac{N_{b_{n-1}}}{N_{b_n}} \right) \Delta_{n-1} + \\
 &- (2N_c^2) C_{n-1}^{4D} \frac{C_n^{3D}}{C_{n-1}^{3D}} \frac{N_{b_{n-2}}}{N_{b_n}} \Delta_{n-2} .
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Os coeficientes são os mesmos definidos para a rede diamante usual e os subíndices também indicam a hierarquia na qual os coeficientes são usados. Obviamente quando  $N_c = 2$  reobtemos a eq. (3.25). O que é alterado é a forma como os acoplamentos de hierarquias vizinhas estão relacionadas, isto é a equação  $K_{n-1} = f_{N_c}(K_n)$  ou  $t_{n-1} = g_{N_c}(t_n)$  depende de  $N_c$ .

### 3.1.5) COMPORTAMENTO CRÍTICO

As equações de recorrência que obtivemos nos permitem calcular a magnetização local e a magnetização média por sítio em qualquer temperatura, em particular na temperatura crítica ( $T_c$ ), na vizinhança da qual podemos definir os expoentes críticos do modelo. A transmissividade do modelo de Potts ( $t$ ), definida por Tsallis [44] como:

$$t = \frac{1 - \exp(-qJ/k_B T)}{1 + (q - 1)\exp(-qJ/k_B T)} . \quad (3.31)$$

onde  $T$  é a temperatura e  $k_B$  a constante de Boltzmann, pode ser convenientemente utilizada para se calcular a temperatura crítica ( $T_c$ ) de transição de fase contínua nas redes hierárquicas, em particular para as redes diamante e ponte de wheatstone. A vantagem primordial em se usar a variável  $t$  reside no fato de  $t$  variar entre 0 e 1 ( $J > 0$ ), enquanto  $K = J/k_B T$  varia de 0 a  $\infty$  quando o sistema passa da fase completamente desordenada para a fase completamente ordenada. No processo de dizimação da rede diamante, a relação entre as transmissividades de duas hierarquias sucessivas é fornecida pela expressão:

$$t_{n-1} = \frac{2t_n^2 + (q - 2)t_n^4}{1 + (q - 1)t_n^4} . \quad (3.32)$$

A transmissividade crítica  $t_c$  é aquela para a qual  $t_n = t_{n-1} = t_c$ . Deste modo podemos calcular  $T_c$ , uma vez que a transmissividade crítica a determina univocamente. Esta relação também conduz a uma equação do terceiro grau que admite as soluções listadas no

apêndice C, contudo podemos calcular numericamente suas raízes. O termo  $A = \exp(qK)$ ,  $K = J/k_B T$ , pode ser rescrito em função da transmissividade na forma:

$$A = \frac{1 + (q - 1)t}{1 - t} \quad (3.33)$$

Como  $t$  varia de zero a um (ferromagneto de Potts),  $A$  varia de um a infinito quando o sistema passa da fase desordenada para a fase ordenada. Para calcularmos a magnetização média por sítio em uma temperatura  $T$  onde a transmissividade vale  $t_n$ , precisamos dizimar a rede para obtermos  $t_0$  e usar as equações de recorrência para se obter  $m_n(t_n)$ . Se estamos em uma temperatura para a qual  $t_c < t_n \leq 1$  (fase ferro), na dizimação [48]  $t_0 \rightarrow 1$  ( $A = \infty$ ), os coeficientes  $C^{1D}$  e  $C^{1W}$  tendem a  $1/2$  e  $C^{2D}$  e  $C^{2W}$  tendem a zero. Isto desacopla da equação de recorrência para a "função de correlação entre primeiros vizinhos" a magnetização local e a mantém com um valor não nulo. Entretanto se estamos na fase paramagnética  $0 \leq t_n \leq t_c$  ocorre que  $t_0 \rightarrow 0$  ( $A = 1$ ) e os quatro coeficientes acima citados tendem a zero o que conduz a um valor nulo para a magnetização média por sítio. Para se estimar os comportamentos críticos da magnetização média por sítio e da "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos supomos, para temperaturas muito próximas de  $T_c$ , o mesmo comportamento crítico para ambas as grandezas a menos de uma constante:

$$m_n \approx \lambda_1 (\epsilon_n)^\beta \quad \text{e} \quad \Delta_n \approx \lambda_2 (\epsilon_n)^\beta \quad (3.34)$$

onde  $\epsilon_1$  vale  $(T_c - T_1)/T_c$  e  $\lambda_1$  é uma constante (amplitude). Isto pode ser entendido ao verificarmos que se supomos para o

par  $m$  e  $\Delta$  acoplados pela equação de recorrência (3.30) por exemplo que os seus respectivos expoentes críticos são diferentes, seremos levados inevitavelmente à resultados contraditórios.

Para obter o expoente crítico da magnetização média por sítio ( $\beta$ ), precisamos avaliar as equações de recorrência suficientemente próximas de  $T_c$ , permitindo-nos usar as equações (3.34) e assumir os valores dos coeficientes em  $T_c$ . Usando  $A(T_c)$ ,  $N_{sn} = (2/3)(4^n + 2)$  e  $N_{bn} = 4^n$  nas razões que envolvem estes números, temos que:

$$\frac{m_{n-1}}{m_n} = \frac{\lambda_1(\epsilon_{n-1})^\beta}{\lambda_1(\epsilon_n)^\beta},$$

portanto:

$$\beta = \frac{\ln(m_{n-1}/m_n)}{\ln(\epsilon_{n-1}/\epsilon_n)} \quad (3.35)$$

Sendo a razão do denominador

$$(\epsilon_{n-1}/\epsilon_n) \approx \left. \frac{dt_{n-1}}{dt_n} \right|_{t_c} = (r_c) \quad (3.36)$$

onde  $r_c$  vale para a rede diamante ( $N_c=2$ ):

$$r_c = 2 + \frac{2(q-2)t_c^2}{2 + (q-2)t_c^2} + \frac{4(q-1)t_c^4}{1 + (q-1)t_c^4} \quad (3.37)$$

O mesmo método foi utilizado para o cálculo do expoente crítico da magnetização por sítio na rede ponte de wheatstone e na rede diamante generalizada. Para a rede ponte de wheatstone, as expressões para os números de sítios e ligações na hierarquia  $n$  são respectivamente:

$$N_{sn} = (5^n + 3)/2 \quad \text{e} \quad N_{bn} = 5^n \quad (3.38)$$

A equação de recorrência para a transmissividade nesta rede é:

$$t_{n-1} = \frac{2t_n^2 + 2t_n^3 + 5(q-2)t_n^4 + (q-2)(q-3)t_n^5}{1 + (q-1)[2t_n^3 + t_n^4 + (q-2)t_n^5]}, \quad (3.39)$$

enquanto que para a rede diamante generalizada temos:

$$N_{sn} = (1/(2N_c + 1))[2^n(N_c^{n+1}) + 3N_c - 2] \text{ e} \quad (3.40)$$

$$N_{bn} = (2N_c)^n.$$

Para o cálculo da transmissividade é conveniente usarmos a rede dual [44] da rede diamante generalizada com  $n$  hierarquias. Sendo  $t_n^d$  a transmissividade dual para esta rede, a equação de recorrência para  $t_n^d$  é:

$$t_{n-1}^d = \left( \frac{2t_n^d + (q-2)(t_n^d)^2}{1 + (q-1)(t_n^d)^2} \right)^{N_c}$$

e a transmissividade usual tem a forma:

$$t_n = \frac{1 - t_n^d}{1 + (q-1)t_n^d}. \quad (3.41)$$

No apêndice C se encontram as expressões para  $t_c$  e  $r_c$  para a rede diamante, a rede ponte de wheatstone e para a rede diamante generalizada. A partir desses dados fizemos um gráfico de  $\beta$  da rede versus  $q$  para a rede diamante usual ( $N_c = 2$ ) e para a rede ponte de wheatstone, como está mostrada na figura (3.2). Os valores do expoente  $\beta$  para  $q = 2$  reobtem os resultados obtidos por Morgado et al [25, 48] para o modelo de Ising:  $\beta_0 = 0.161734$  e  $\beta_w = 0.180$ . Entretanto os nossos resultados estão em desacordo com aqueles obtidos por Caride e Tsallis [26], à exceção do ponto  $q = 2$ , pois eles preveem uma curva

monotonamente crescente para estes expoentes exatamente o contrário do que observamos. Ambos os expoentes calculados por nós (para RD e para RPW) tendem a zero no limite  $q \rightarrow \infty$  e no limite  $q \rightarrow 0$  para  $q$  igual a  $10^{-4}$  o  $\beta$  vale 0.1667... para a rede diamante e 0.1999... para a rede ponte de wheatstone.

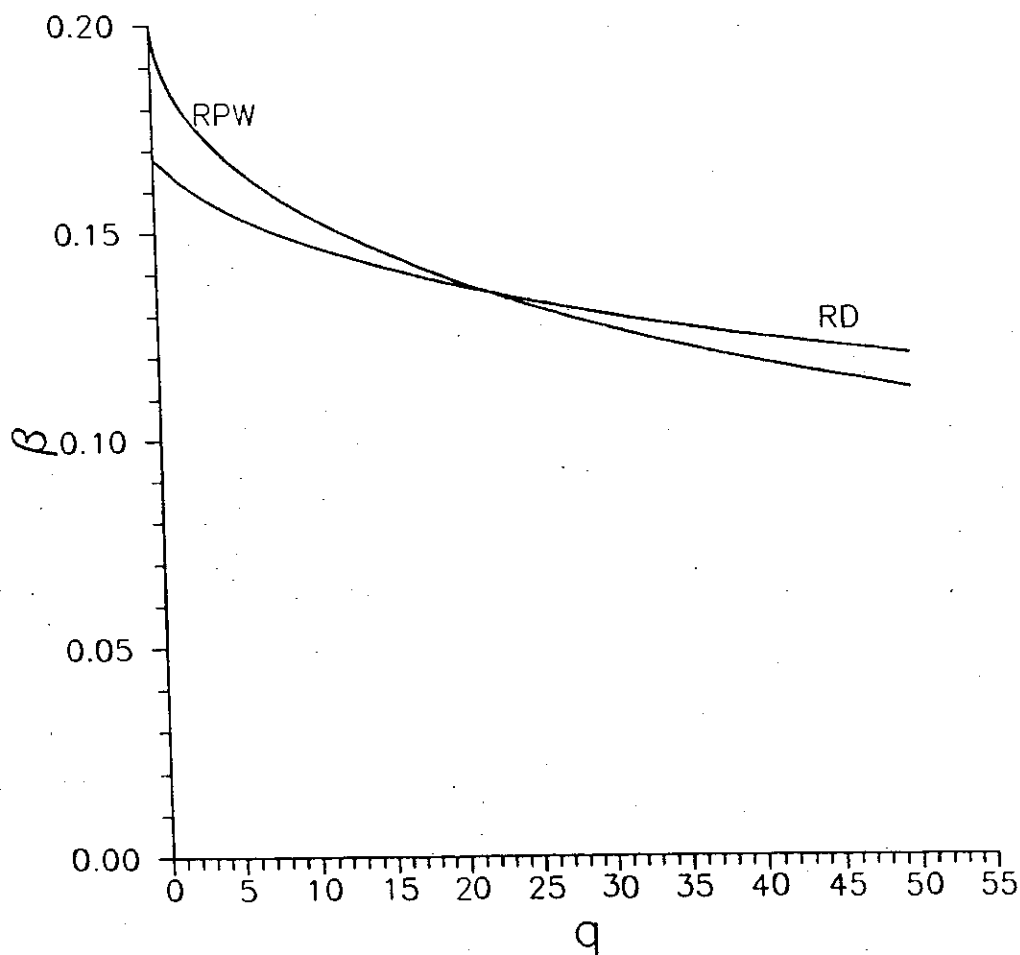


Fig.3.2) Gráfico  $\beta$  x  $q$  para as redes diamante e ponte de wheatstone

O expoente  $\beta$  como função de  $q$  e  $N_c$  obtido por nós foi comparado com os cálculos de Bleher e Žalys [50] realizados para  $q = 2$ , na rede diamante com  $N_c = 2$ ,  $N_c = 5$ ,  $N_c = 10$ ,  $N_c = 50$  e  $N_c = 100$ . Nossos resultados estão em total acordo com aqueles obtidos por eles, se usarmos suas equações e não fizermos aproximações numéricas nas fases iniciais do cálculo. Por este motivo a tabela apresentada no artigo de Bleher e Žalys apresenta pequenos erros nos últimos dígitos. A tabela (3.3), a seguir, reproduz a tabela (2) do artigo de Bleher e Žalys [50] ( $\beta_{\text{artigo}}$ ) e adiciona os valores reais ( $\beta_{\text{exato}}$ ), obtidos através das equações do mesmo artigo sem aproximações numéricas, os quais concordam com os nossos cálculos.

Tabela 3.1) Resultados de Bleher e Zalys.

$N_c$	2	3	4	5
$\beta_{\text{artigo}}$	0.161743	0.343271	0.463242	0.546752
$\beta_{\text{exato}}$	0.161743	0.343270	0.463241	0.546752
$N_c$	10	50	100	
$\beta_{\text{artigo}}$	0.745762	0.943172	0.970517	
$\beta_{\text{exato}}$	0.745754	0.943794	0.971526	



### 3.1.6) EQUAÇÃO ANALÍTICA PARA EXPOENTE CRÍTICO $\beta$

Observamos que também é possível encontrar equações analíticas para o expoente crítico da magnetização média por sítio ( $\beta$ ) para as redes hierárquicas, supondo que a função  $\theta$  introduzida na expressão (3.18) possui o mesmo comportamento crítico que a "função de correlação entre primeiros vizinhos". Eliminando as magnetizações média por sítio na eq. (3.23) com o auxílio da eq. (3.18) podemos obter a equação:

$$\bar{\theta}(n) = \bar{\theta}(n-1)[C_n^{1D} + 1/2] + C_n^{2D}\Delta_{n-1}, \quad (3.42)$$

onde  $\bar{\theta}(n) \equiv \theta(n)/N_{bn}$ . Da eq. (3.24) tem-se:

$$\bar{\theta}(n-1) = \frac{2}{(q-1)C_n^{3D}} (\Delta_n - C_n^{4D}\Delta_{n-1}). \quad (3.43)$$

Supondo para  $\bar{\theta}$  e  $\Delta$  um mesmo comportamento crítico, ou seja, com o mesmo expoente  $\beta$ , nos moldes da equação (3.34), obtemos um sistema de duas equações e duas incógnitas; uma equação para a variável  $r_c^\beta$  e uma outra para a variável dada pela razão entre as amplitudes relativas a  $\bar{\theta}$  e  $\Delta$ . A solução leva à seguinte equação do segundo grau para incógnita  $r_c^\beta$ :

$$r_c^{2\beta} - r_c^\beta(C^{1D} + C^{4D} + 1/2) + C^{4D}(C^{1D} + 1/2) - \frac{(q-1)}{2}C^{2D}C^{3D} = 0. \quad (3.44)$$

Deste modo facilmente obtemos  $\beta = \ln(\text{solução})/\ln(r_c)$  como função do número de estado  $q$  do modelo de Potts. Refazendo os mesmos cálculos para rede diamante generalizada, reobtemos as mesmas equações; a dependência em  $N_c$  está implícita no cálculo de  $t_c$ ,  $r_c$ ,  $A(t_c)$ . Para a rede ponte de wheatstone, fizemos os cálculos seguindo o mesmo raciocínio e obtivemos a seguinte equação do segundo grau para  $r_c^\beta$ :

$$r_c^{2\beta} - r_c^\beta (2/5) \left[ (1 + 3C^{1W}) + \frac{4C^{4W} + C^{6W}}{2} \right] + \frac{(1 + 3C^{1W})(4C^{4W} + C^{6W}) - 3qC^{2W}(2C^{3W} + C^{5W})}{(25/2)} = 0, \quad (3.45)$$

o que também conduz a uma solução exata para  $\beta$ . Os resultados numéricos desses cálculos estão em total concordância com aqueles obtidos via equação de recorrência para ambas as redes.

Os gráficos de  $\beta$  em função de  $q$  e  $N_c$  para rede diamante são apresentados nas figuras (3.7), juntamente com outros expoentes cujos cálculos serão explicitados nas próximas seções.

### 3.1.7) MAGNETIZAÇÃO LOCAL DE UM PERFIL DA RD

Uma vez que sabemos analisar as equações em  $T_c$ , podemos observar localmente o comportamento da magnetização dos sítios de um perfil da rede diamante generalizada em  $T_c$  à medida que variamos o número de estados  $q$  do modelo de Potts e  $N_c$ . Definimos um perfil [25,48] como um caminho mais curto entre as raízes, que são os sítios de hierarquia zero. Devido à simetria da rede, há diversos caminhos equivalentes entre as raízes, o que permite definir classes de equivalência [6,25,48]. Os sítios pertencentes às mesmas classes podem ser identificados pelos índices  $(s,l)$  para os quais  $(l = 1, 2, \dots, N$  e  $s = 0, 1, 2, \dots, 2^l - 1)$ ; esses sítios, no nosso modelo, possuem o mesmo valor para a magnetização local, onde  $s$  é a distância, em ligações, até um dos sítios da primeira hierarquia tomado como referência e  $l$  é a hierarquia na qual o

sítio aparece. Assim, as raízes (terminais) são identificadas por  $(0,0)$  e  $(1,1)$ . A figura (3.3) mostra a rede diamante usual ( $N_c = 2$ ) com 3 hierarquias, destacando os seus spins do perfil; os gráficos da figura (3.4) mostram curvas cuja ordenada é a magnetização do sítio e cuja abscissa é a posição do sítio no perfil em relação a um dos terminais tido como referência. O que estes últimos gráficos mostram é que embora em  $T_c$  a magnetização média por sítio seja nula, para um número finito de hierarquias, no nosso exemplo 10, observamos que alguns sítios possuem magnetização local não nula. Entretanto, a medida que aumentamos a hierarquia, indo em direção ao limite termodinâmico, as magnetizações locais dos sítios vão a zero rapidamente. Este efeito se acentua a medida que  $q$  aumenta, com  $N_c$  fixo, ocorrendo ainda mais rápido com o aumento de  $N_c$ . Vemos na figura (3.4e) para  $N_c = 1000$  e  $q$  pequeno ( $q = 1.01$ ), que logo nas primeiras hierarquias, todos os sítios possuem magnetização local praticamente nula.

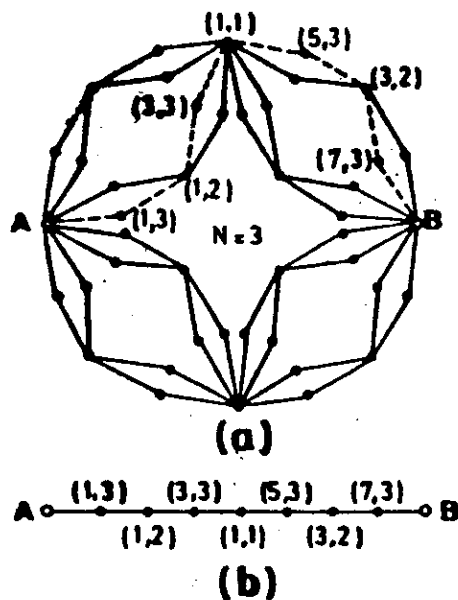


Figura 3.3) Em a) vemos a rede diamante com  $N_c = 2$  com 3 hierarquias e um dos seus perfis é destacado (linha tracejada); em b) vemos os spins deste perfil.

MAGNETIZACAO DE UM PERFIL  
DA REDE DIAMANTE  
COM 10 HIERARQUIAS

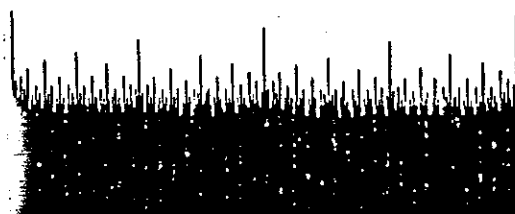
$N_c=2, Q=1.01$



a)

MAGNETIZACAO DE UM PERFIL  
DA REDE DIAMANTE  
COM 10 HIERARQUIAS

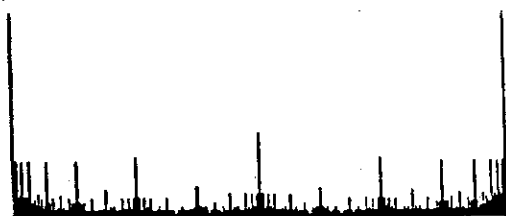
$N_c=2, Q=1000$



b)

MAGNETIZACAO DE UM PERFIL  
DA REDE DIAMANTE  
COM 10 HIERARQUIAS

$N_c=5, Q=1.01$



c)

MAGNETIZACAO DE UM PERFIL  
DA REDE DIAMANTE  
COM 10 HIERARQUIAS

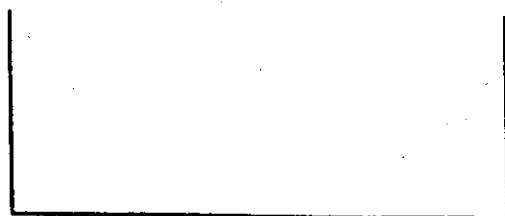
$N_c=5, Q=1000$



d)

MAGNETIZACAO DE UM PERFIL  
DA REDE DIAMANTE  
COM 10 HIERARQUIAS

$N_c=1000, Q=1.01$



e)

MAGNETIZACAO DE UM PERFIL  
DA REDE DIAMANTE  
COM 10 HIERARQUIAS

$N_c=1000, Q=1000$



f)

Figura 3.4) Comportamento dos spins mais externos em  $T_c$  para as 10 primeiras hierarquias de um perfil da rede diamante para diversos valores de  $N_c$ . A ordenada dos gráficos é a magnetização local e a abscissa é a posição relativa a raiz situada em 0.

Se observarmos uma sequência especial de spins, aquela formada pelos spins que possuem a menor magnetização local como mostrado na figura (3.5), os spins dessa sequência tendem a zero com o expoente crítico  $\beta_{\max}$  da rede. Para calcularmos esse expoente precisamos reescrever as equações de recorrência local para estes spins, explicitando nestas os spins que geram a sequência que queremos, temos:

$$m_{\sigma}^{(n)} = C_n^{1D} \left( m_{\mu_1}^{(n-1)} + m_{\mu_2}^{(n-2)} \right) + C_n^{2D} \frac{q}{(q-1)} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(n-1)}, \quad (3.46)$$

$$\Delta_{\sigma \mu_1}^{(n-1)} = C_n^{3D} (q-1) \left( m_{\mu_1}^{(n-1)} \right) + C_n^{4D} \Delta_{\mu_1 \mu_2}^{(n-1)}.$$

onde o  $n$  entre parênteses indica a hierarquia do sítio ou da "função de correlação entre primeiros vizinhos" referidos (usados).

Usando em  $T_c$  o comportamento crítico da eq. (3.34) no par de equações imediatamente anterior, encontramos um sistema de duas equações e duas incógnitas: uma para  $r_c^{\beta_{\max}}$  e uma outra para a razão entre as amplitudes da magnetização média por spin e da "função de correlação entre primeiros vizinhos" no limite assintótico. Resolvendo o sistema de equações para  $r_c^{\beta_{\max}}$  encontramos a equação cúbica:

$$(3.47)$$

$$r_c^{3\beta_{\max}} - r_c^{2\beta_{\max}} (C^{1D} + C^{4D}) - r_c^{\beta_{\max}} [qC^{2D}C^{3D} + C^{1D}(1 - C^{4D})] + C^{4D}C^{1D} = 0,$$

que pode ser resolvida usando-se as equações de Cardan [51].

Obtemos assim  $\beta_{\max}$  em função de  $q$  e  $N_c$ . As figuras (3.8) exibem as curvas obtidas para  $\beta_{\max}$  dentre outros expoentes. Para  $q = 2$ , reobtemos o valor de  $\beta_{\max}$  para o modelo de Ising calculado por Morgado et al. [25]:  $\beta_{\max} = 0.22355$ .

A rede ponte de wheatstone admite formalmente a mesma equação cúbica para  $\beta_{\max}$ . Isto ocorre porque nas equações para a sequência das menores magnetizações não contribui a equação de recorrência para a ligação central que possui uma topologia diferente. Mudam, no entanto, os coeficientes, que devem ser substituídos pelos seus similares da rede ponte de wheatstone de mesmo sub-índice.

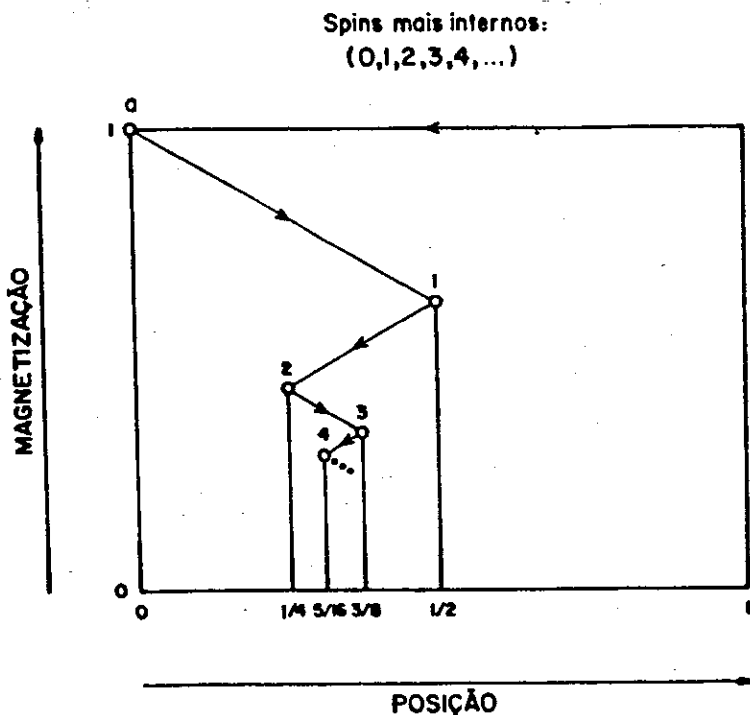


Fig.3.5) Sequência de spins de menor magnetização local que fornece o  $\beta_{\max}$ , cuja posição é dada sobre o perfil em relação à raiz de referência de abscissa 0.

### 3.1.3) RELAÇÃO DE HIPERESCALA

Nesta seção verificamos numericamente a Lei de hiperescala em uma família de redes hierárquicas diamante (ver figura 3.1b), e na rede hierárquica ponte de wheatstone. Existe uma controvérsia na literatura sobre a validade destas (e de outras) leis de escala em redes fractais [27]. Testamos aqui para diversos valores dos parâmetros  $q$  (número de estados do modelo de Potts) e  $N_c$  (número de coordenação das raízes) a validade desta lei calculando exatamente o expoente  $\alpha$  de duas maneiras independentes. A primeira maneira consiste em calcular o expoente crítico do calor específico ( $\alpha$ ) e verificar se ele satisfaz a relação:

$$\alpha = (2 - d_f \nu), \quad (3.48)$$

onde  $d_f$  é a dimensão fractal da rede dada por:

$$d_f = \frac{\ln(N_a)}{\ln(b)},$$

$N_a$  é o número de agregação da rede e  $b$  é distância química entre os terminais da rede. O expoente  $\nu$  é obtido diretamente por:

$$\nu = \frac{\ln(b)}{\ln(r_c)}, \quad (3.49)$$

onde  $b$  é a distância química entre os terminais da rede ( $b = 2$ ) para a RD e para RPW e  $r_c$  foi definido na eq. (3.36).

A outra maneira utiliza o resultado que para as redes hierárquicas diamante e ponte de wheatstone, no modelo de Potts ferromagnético a campo nulo, a correlação entre dois corpos (primeiros vizinhos) é dada na forma das equações (3.10), precisamente para a rede diamante:

$$\langle \delta_{\sigma\mu_1} \rangle = C^{3D} + C^{4D} \langle \delta_{\mu_1\mu_2} \rangle, \quad (3.50)$$

onde  $C^{3D}$  e  $C^{4D}$  são os polinômios listados na página 52. Somando para todas as ligações da rede e dividindo pelo número destas, obtemos a equação de recorrência para a energia média por ligação

$$E_n = A_1 + A_2/E_{n-1}.$$

Assumindo para o comportamento crítico da energia média por ligação na hierarquia n:

$$E_n \cong E_c + \lambda(\epsilon_n)^\sigma, \quad (3.51)$$

podemos encontrar a expressão para o expoente  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{\ln(1/A_2)}{\ln(r_c)}. \quad (3.52)$$

como o calor específico está relacionado com a derivada da energia média com relação à temperatura, podemos obter  $\alpha$  através da relação:

$$\alpha = 1 - \sigma. \quad (3.53)$$

Por fim calculamos numericamente a razão os valores de  $\alpha$  obtidos por (3.48) e por (3.53) para as redes ponte de wheatstone (RPW) - o que exige um cálculo análogo e possui uma outra equação similar a eq. (3.51) devido a ligação central - para a rede diamante generalizada (RDG), para diversos valores



de  $N_c$  e  $q$ , e verificamos que estas redes respeitam, para o modelo de Potts ferromagnético à campo nulo, a relação de hiperescala. Embora isto não prove que a lei de hiperescala é respeitada para um modelo em geral em redes fractais, o fato de termos mostrado a sua validade para diversas redes fractais, com diversos valores de  $q$  e  $N_c$ , sugere que esta deve ser o caso genérico nestas redes.

### 3.2) MULTIFRACTALIDADE DO MODELO DE POTTS

#### 3.2.1) FUNÇÃO MULTIFRACTAL $f(\alpha)$ DE UM PERFIL DA RD

Vamos analisar alguns aspectos multifractais de um perfil da rede diamante usual ( $N_c = 2$ ). Como vimos na seção (3.1.7) a rede diamante possui classes de equivalência, que no nosso modelo, implica que diferentes sítios possuem a mesma magnetização local. Assim, podemos definir como medida normalizada a magnetização local dos spins do perfil dividida pela magnetização total dos spins deste mesmo perfil. Representaremos este perfil  $[0,1]$  de modo que a raiz de referência esteja situada em 0 e a outra raiz em 1. Nesta representação, a medida normalizada se espalha uniformemente em seguimentos situados na distância média entre os spins do perfil onde se encontra o spin responsável pela medida. Deste modo na  $n$ -ésima hierarquia cada seguimento tem comprimento  $\delta = 2^{-n}$ .

Para caracterizarmos como multifractal o espalhamento da medida normalizada (magnetização média por spin normalizada)

Para caracterizarmos como multifractal o espalhamento da medida normalizada (magnetização média por spin normalizada) calculamos numericamente a função  $f(\alpha)$  para esta medida. O método utilizado consistiu em obter a magnetização local de cada sítio do perfil (com um certo número de hierarquias, no nosso caso foram 29) em  $T_c$ , através da equação de recorrência para a magnetização local e para a "função de correlação entre primeiros vizinhos" (eq. 3.11). A magnetização total do perfil é o produto do número de spins do perfil nesta hierarquia ( $N_{sn}^p \cong 2^{29}$ ) pela magnetização média por spin da RD.

Podemos agora calcular o expoente de Lipshitz-Hölder ( $\alpha$ ) - eq. (2.13) - associado à  $i$ -ésima medida, ou seja à magnetização local normalizada associada ao  $i$ -ésimo spin do perfil:

$$\frac{m_{\sigma_i}}{(2^{29})m_n} = (\delta)^\alpha, \quad (3.54)$$

onde o denominador é a magnetização total.

A partir de  $\alpha$  podemos fazer um histograma acumulando quantas vezes -  $N(\alpha)$  - as medidas fornecem o mesmo valor de  $\alpha$  dentro de um limite de precisão estabelecido previamente. Assim fizemos o gráfico  $f(\alpha)$  versus  $\alpha$  para os seguintes números de estados do modelo de Potts:  $q = 1.5$ ,  $q = 4$  e  $q = 10$  mostrados a seguir.

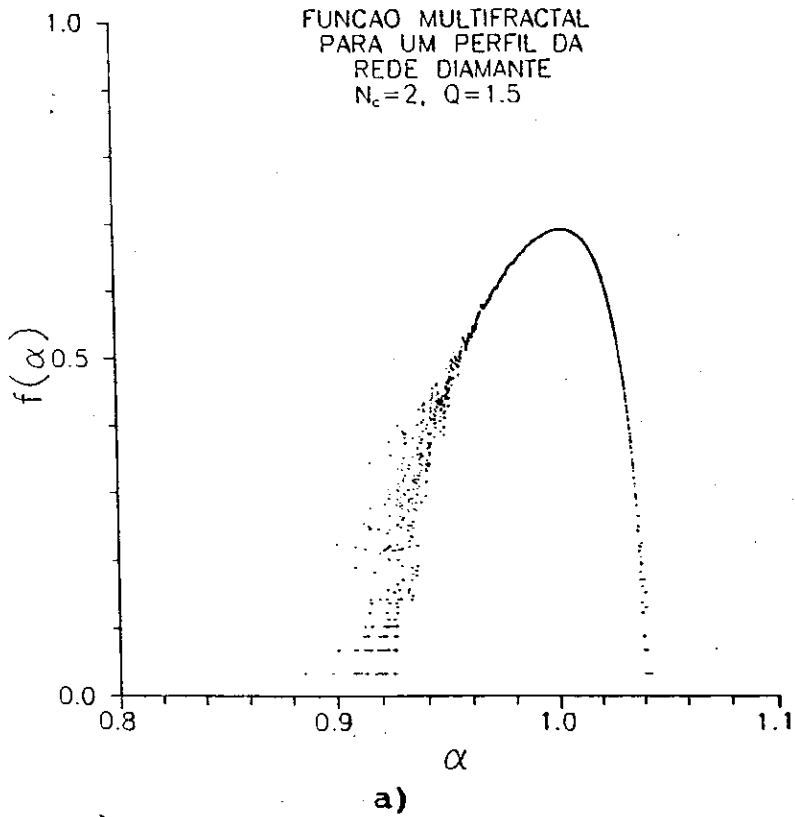


Figura 3.6a) Curva  $f(\alpha)$  para o perfil da rede diamante com 29 hierarquias para  $q = 1.5$  e  $N_c = 2$ .

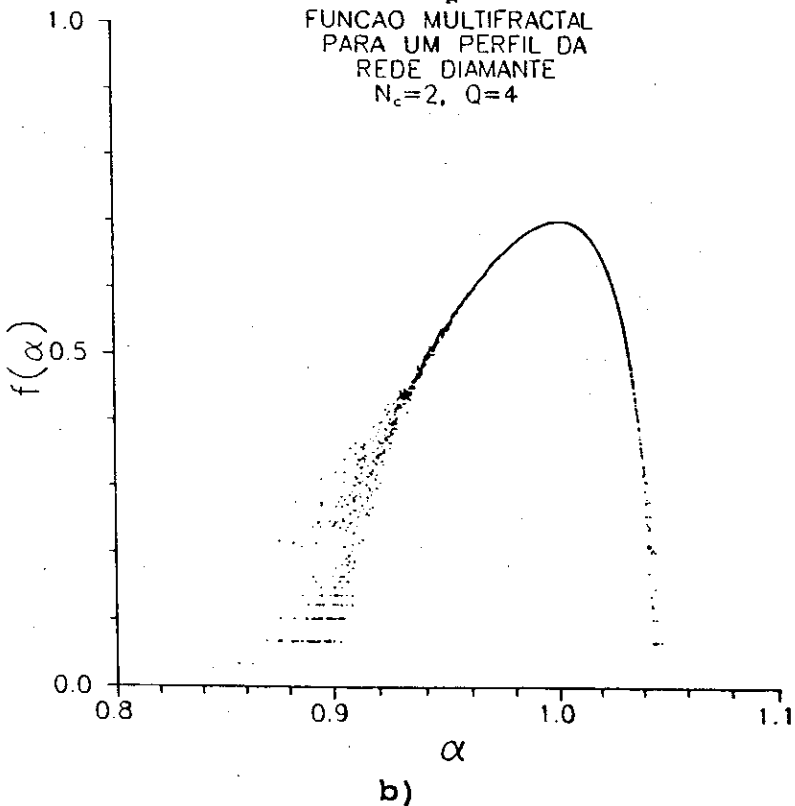
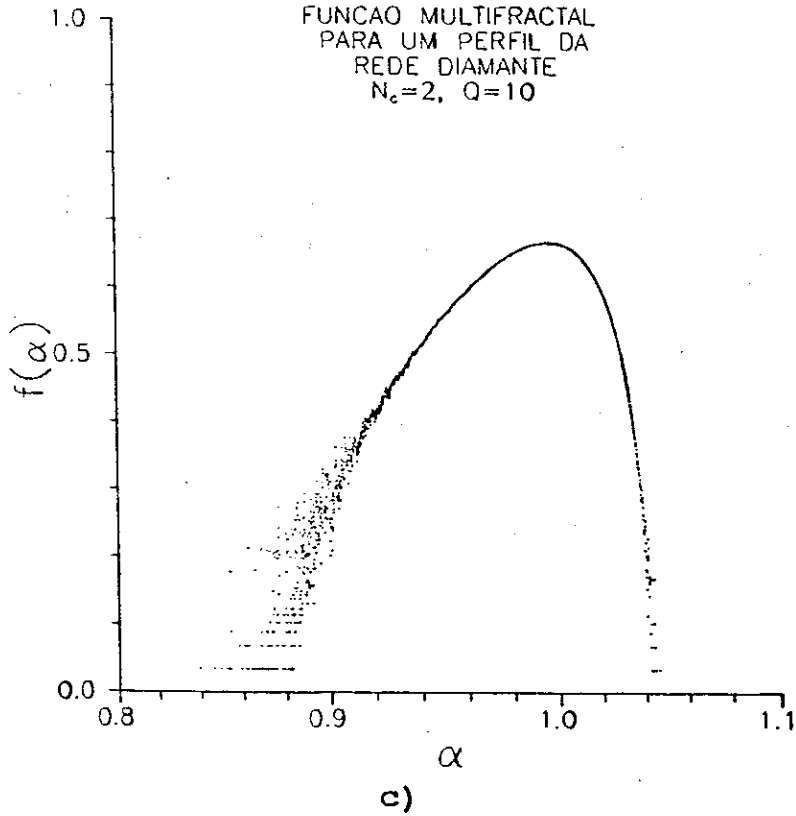


Figura 3.6b)  $f(\alpha)$  do perfil da rede diamante ( $N_c = 2$ ) com 29 hierarquias para  $q = 4$ .



Figuras 3.6c)  $f(\alpha)$  do perfil da rede diamante ( $N_c = 2$ ) com 29 hierarquias para  $q = 10$ .

Observamos que embora obtidos para um número finito de hierarquias (29), estes gráficos já exibem a forma côncava com o máximo global característico de um comportamento multifractal da medida (fig. 2.6). Obtivemos também um bom acordo entre os valores máximo e mínimo do expoente de Lipshitz-Hölder das curvas e os teóricos, cujos cálculos exatos são objeto de descrição da próxima seção.

### 3.2.2) EXPOENTES DE LIPSHITZ-HÖLDER ( $\alpha$ ) MÁXIMO E MÍNIMO

Os valores máximo e mínimo do expoente de Lipshitz-Hölder foram calculados exatamente permitindo-nos verificar um bom acordo entre os valores obtidos nos histogramas com os calculados exatamente. Como vimos na seção (2.2.3), o expoente  $\alpha_{\max}$  caracteriza o comportamento dos menores valores da medida, que são as magnetizações locais dos spins situados na sequência que fornece o  $\beta_{\max}$  (seção 3.1.7) normalizados pela magnetização total no limite  $n \rightarrow \infty$ . Sendo  $2^{n+1}$  o número total de spins do perfil na  $n$ -ésima hierarquia, na vizinhança de  $T_c$  a magnetização total do perfil vale ( $n \gg 1$ ):

$$\lambda_1 2^n (\epsilon_n)^\beta$$

e a magnetização local  $m_\sigma$ :

$$m_\sigma \sim (\epsilon_n)^{\beta_{\max}}$$

Assim, a equação (3.54) pode ser reescrita na forma:

$$\mu_{\min}^{(n)} \propto \delta^{\alpha_{\max}} \propto \frac{(\epsilon_n)^{\beta_{\max}}}{2^n (\epsilon_n)^\beta} \quad (3.55)$$

Fazendo a razão entre o  $\mu_{\min}$  das hierarquias  $n+1$  e  $n$  obtemos:

$$\frac{\mu_{\min}^{(n+1)}}{\mu_{\min}^{(n)}} = 2^{-1} \left( \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} \right)^{\beta_{\max} - \beta} \quad (3.56)$$

Uma vez que da eq. (3.35) e da (3.52) obtemos:

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \cong \frac{dt_{n+1}}{dt_n} \Big|_{t_c} \cong (r_c)^{-1} = 2^{-1/\nu}, \quad (3.57)$$

podemos escrever:

$$\mu_{\min}^{(n+1)} = 2^{[-1-(\beta_{\max} - \beta)/\nu]} \mu_{\min}^{(n)}. \quad (3.58)$$

Assim, como  $\mu_{\min}^{(0)} \cong 1$  é uma constante, podemos escrever  $\mu_{\min}^{(n)}$  como:

$$\mu_{\min}^{(n)} \propto \left( 2^{[-1-(\beta_{\max} - \beta)/\nu]} \right)^n \propto \delta^{\alpha_{\max}}, \quad (3.59)$$

ao substituirmos:

$$\delta = 2^{-n}$$

na equação (3.58) obtemos finalmente:

$$\alpha_{\max} = 1 + (\beta_{\max} - \beta)/\nu. \quad (3.60)$$

Para  $\nu = 1.5, 4$  e  $10$  os respectivos valores exatos de  $\alpha_{\max}$  são: 1.042, 1.053 e 1.057.

O expoente  $\alpha_{\min}$  por sua vez mede o comportamento dos maiores valores da medida. Como perto de  $T_c$  a magnetização local vai a zero muito rapidamente como vimos nos perfis, os maiores valores da medida são dados por magnetizações locais que praticamente ficam constante a medida que  $n \rightarrow \infty$ . Assim na hierarquia  $n$   $\mu_{\max}$  se escreve:

$$\mu_{\max}^{(n)} = \frac{\text{Constante}}{2^n m_n}. \quad (3.61)$$

Em  $T_c$  podemos escrever a razão entre as magnetizações média por sitio de duas hierarquias consecutivas como:

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} = 2^{-\beta/\nu}, \quad (3.62)$$

assim podemos obter  $m_n$  fixando  $m_0 \equiv 1$  e aplicando  $n$  vezes a equação acima, deste modo:

$$m_n \approx (2^{-\beta/\nu})^n, \quad (3.63)$$

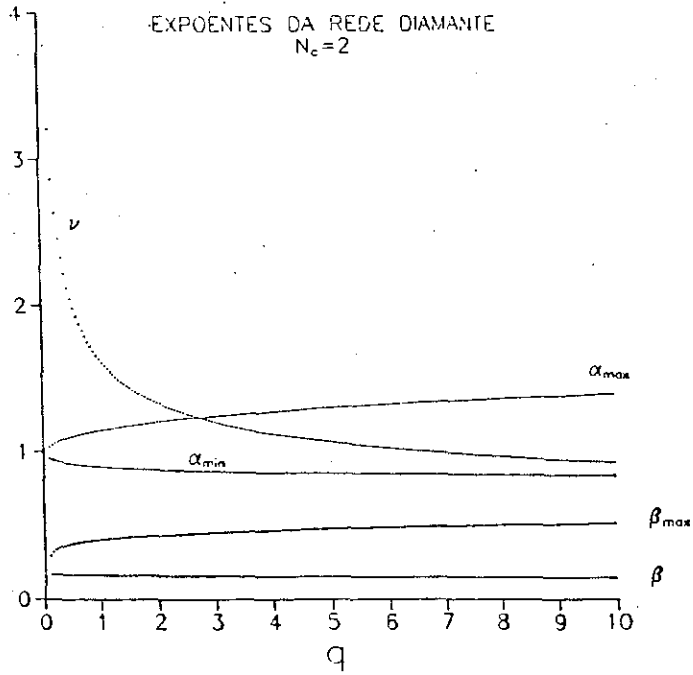
o que no limite para  $n \rightarrow \infty$ , substituindo a equação acima em (3.61) e usando a definição de  $\alpha$  resulta:

$$\alpha_{\min} = 1 - \beta/\nu. \quad (3.64)$$

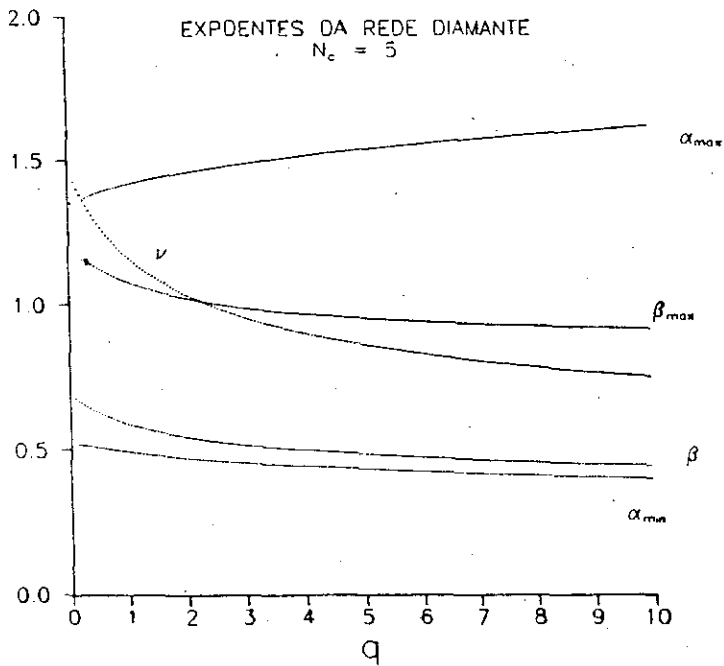
Para  $q = 1.5, 4$  e  $10$  os respectivos valores exatos de  $\alpha_{\min}$  são:  $0.387, 0.860$  e  $0.841$ .

Para  $q = 2$ , os valores de  $\alpha_{\min}$  e  $\alpha_{\max}$  recuperam aqueles obtidos por Morgado et al. [25,48] no modelo de Ising, respectivamente  $\alpha_{\min} \approx 0.8791\dots$  e  $\alpha_{\max} \approx 1.046\dots$  para a rede diamante.

Os gráficos a seguir exibem uma série de expoentes da rede diamante generalizada ( $\beta, \beta_{\max}, \nu, \alpha_{\max}$  e  $\alpha_{\min}$ ) em função de  $q$ , variando-se  $N_c$ . Podemos observar assim o comportamento crítico e aspectos multifractais do modelo de Potts para esta família de redes fractais. Estes expoentes foram calculados exatamente através das equações obtidas ao longo das seções anteriores e nos permitem variar livremente quaisquer parâmetros -  $q$  e  $N_c$  - para a análise desejada.



a)

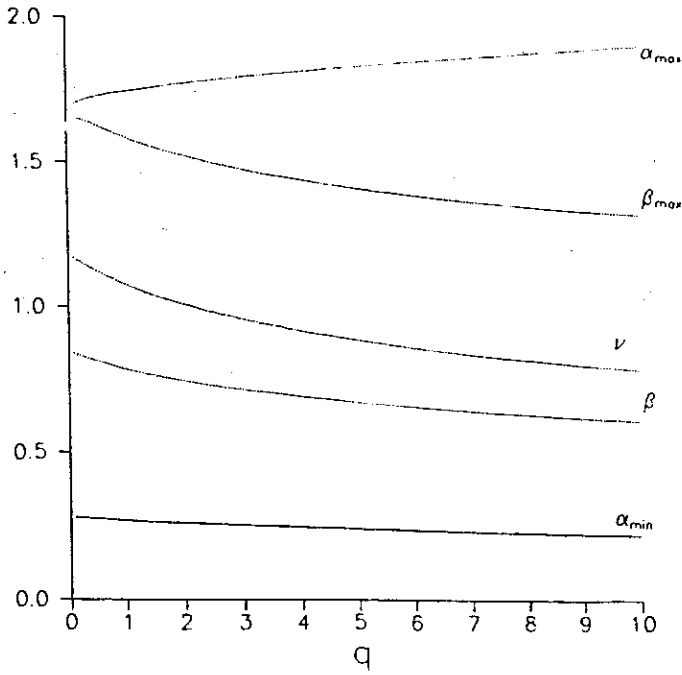


b)

Figura 3.7) Exibe uma série de expoentes para redes diamante em função de  $q$ ; em a) para  $N_c = 2$  e em b) para  $N_c = 5$ .

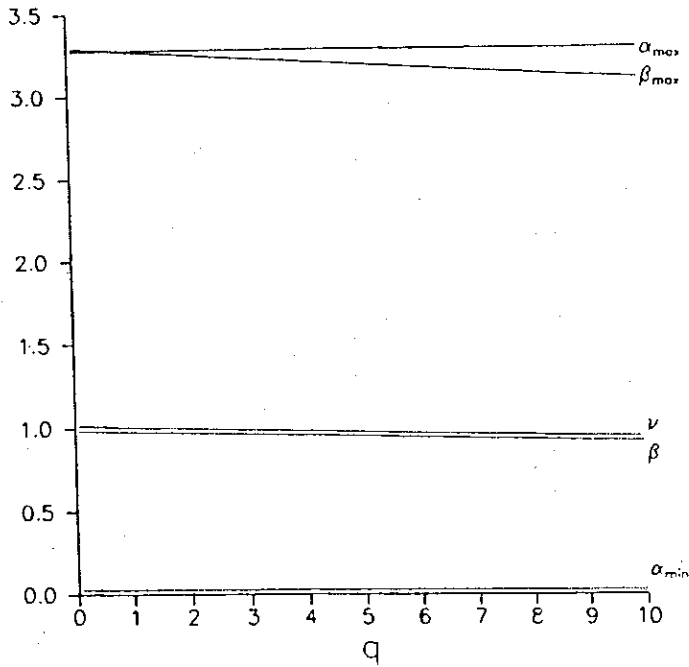


EXPOENTES DA REDE DIAMANTE  
 $N_c = 10$



c)

EXPDENTES DA REDE DIAMANTE  
 $N_c = 100$



d)

Figura 3.7) Exibe uma série de expoentes para redes diamante em função de  $q$ ; em c) para  $N_c = 10$  e em d) para  $N_c = 100$ .

## CONCLUSÕES

Estudamos nesta tese a multifractalidade da magnetização local e a criticalidade de ferromagnetos de Potts em redes fractais. Calculamos exatamente para este modelo, em qualquer temperatura, a magnetização local dos sítios das redes hierárquicas diamante generalizada (RDG) - gerada pela variação do número de coordenação das raízes - e ponte de wheatstone (RPW). Para obtê-las utilizamos equações de recorrência para as magnetizações locais, as quais aparecem acopladas a tipos especiais de "funções de correlação entre primeiros vizinhos", que expressam a magnetização local em uma dada hierarquia como função da magnetização local e da "função de correlação entre primeiros vizinhos" de hierarquias anteriores.

Considerando a estrutura das redes, somamos as equações de recorrência locais para obter a equação de recorrência para a magnetização média por sítio, a qual também aparece acoplada à "função de correlação" média por ligação entre primeiros vizinhos. Estas equações de recorrência têm por característica uma rápida convergência para os valores da magnetização média por spin e do expoente crítico ( $\beta$ ) para um número relativamente pequeno de hierarquias, apresentando uma excelente concordância com os valores conhecidos. Dentre os diversos valores de  $\beta$  que calculamos, alguns resultados já existiam na literatura, permitindo-nos comparações. Para  $q = 2$  (modelo de Ising), nossos resultados concordam com aqueles obtidos por Morgado et

al. [25,48] na rede diamante e ponte de wheatstone e também com os cálculos de  $\beta$ , para algumas redes tipo diamante de diversos valores do parâmetro  $N_c$ , realizado por Bleher e Žalys [50]. Entretanto, para o modelo de Potts, os nossos cálculos discordam dos obtidos por Caride e Tsallis [26], na rede ponte de wheatstone, os quais prevêem uma curva crescente para o expoente  $\beta$  em função de  $q$ , exatamente o contrário do que obtivemos (ver fig. 3.2).

A análise do comportamento crítico, nos permitiu obter uma expressão analítica para o expoente  $\beta$  para as redes citadas anteriormente. Obtivemos também exatamente o expoente crítico da magnetização média por sítio para os spins de menor magnetização local ( $\beta_{max}$ ) na RDG e RPW fixando nas equações de recorrência a sequência específica para estes spins.

Através do cálculo do expoente crítico do calor específico, foi possível verificar que as redes diamante (toda a família gerada pela variação de  $N_c$ ) e a rede ponte de wheatstone respeitam a lei de hiperescala  $\alpha = 2 - d_f \nu$ , onde  $d_f$  é a dimensão fractal da rede, para o modelo de Potts ferromagnético a campo nulo. Este fato sugere que a lei de hiperescala deve ser em geral válida para as redes fractais hierárquicas.

A análise das equações de recorrência para a magnetização local em  $T_c$  dos spins dos perfil da RD usual ( $N_c = 2$ ) nos permitiu observar o comportamento fractal e multifractal da magnetização local dos spins do perfil. Para caracterizar como multifractal a distribuição da magnetização dos spins do

perfil, calculamos numericamente a função multifractal  $f(\alpha)$  para a medida normalizada - definida como a magnetização local dos spins do perfil dividida pela magnetização total do perfil em uma dada hierarquia  $n$ . Encontramos também os expoentes de Lipshitz-Hölder ( $\alpha$ ) máximo e mínimo exatos para esta medida em função de outros expoentes da rede.

Os cálculos que realizamos ao longo da tese possibilitam descrever um pouco da criticalidade e da multifractalidade do modelo de Potts em redes fractais e um estudo aprofundado desses aspectos seria uma extensão natural do trabalho. Uma outra possível extensão seria utilizar o método, que se baseia nas equações de recorrência, para outras generalizações em redes fractais como redes diamante com diversos valores do parâmetro  $b$  e modelos como por exemplo Potts antiferro,  $Z(N)$ , etc... assim como analisar alguns destes modelos com um campo magnético externo.

APÊNDICE A

Podemos reescrever a eq. (2.9) como:

$$N_n(\xi) = \frac{n!}{(\xi n)!((1 - \xi)n)!}, \quad (\text{A.1})$$

na qual podemos usar a fórmula de Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}. \quad (\text{A.2})$$

Fazendo isto, a eq. (A.1) pode ser reescrita na forma:

$$N_n(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi(1 - \xi)}} e^{-n[\xi \ln \xi + (1 - \xi) \ln(1 - \xi)]}. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo  $n = \frac{-\ln \delta}{\ln 2}$  na exponencial da equação acima, obtemos que:

$$N_n(\xi) \sim \delta^{-f(\xi)}, \quad (\text{A.4})$$

sendo  $f(\xi)$  dado por:

$$f(\xi) = - \frac{\xi \ln \xi + (1 - \xi) \ln(1 - \xi)}{\ln 2}. \quad (\text{A.5})$$

Para obtermos  $f(\alpha)$  ao invés de  $f(\xi)$ , devemos encontrar  $\xi$  em função de  $\alpha$  e substituir em (A.5). Da definição de  $\alpha$ , eq. (2.13), obtemos uma equação de  $\alpha$  em função de  $\xi$  que pode ser invertida fornecendo:

$$\xi = \frac{\ln(1 - p) - \alpha \ln 2}{\ln(p) + \ln(1 - p)}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, podemos substituir a equação acima na eq. (A.5), obtendo assim a expressão para  $f(\alpha)$ .

APÊNDICE B

B.1) MÉDIAS PARA A REDE DIAMANTE

Para se efetuar o cálculo das médias para o nosso problema e obtê-las como função do número de estados do modelo de Potts podemos usar um método gráfico que descreveremos a seguir. Em primeiro lugar, podemos observar na expressão (3.5) para  $-\beta K''$  que existem cinco diferentes situações, que chamaremos de famílias, as quais contribuem sempre com cinco termos distintos e suas respectivas multiplicidades. São elas:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0;$$

$$\mu_1 = \mu_2 \neq 0;$$

$$\mu_1 \neq \mu_2 = 0;$$

$$\mu_2 \neq \mu_1 = 0;$$

$$\mu_1 \neq 0 \neq \mu_2, \mu_1 \neq \mu_2.$$

(B.1)

A primeira situação corresponde, no nosso modelo, a obter o termo

$$e^{qK + qK' + qL + qH_1 + qH_2}$$

Sempre que o spin " $\sigma$ " for igual a qualquer spin " $\mu$ ", aparece o termo A multiplicando o termo gerado pela respectiva família. Quando o spin " $\sigma$ " for igual aos dois spins " $\mu$ ", o termo multiplicativo se torna  $A^2$  e assim por diante. Para rede diamante com um dos spins " $\sigma$ " incluído no "resto da rede" a maior potência de A possível é dois.

Lembrando que:

$$\begin{aligned} B &\equiv e^{qK'}; \\ C &\equiv e^{qL} \\ D_1 &\equiv e^{qH_1}; \\ D_2 &\equiv e^{qH_2}, \end{aligned} \tag{B.2}$$

o termo obtido na primeira "situação" pode ser reescrito na forma:

$$BCD_1 D_2 .$$

A segunda família gera sempre o termo B, a terceira o termo  $D_2$ , a quarta gera o termo  $D_1$  e por fim a quinta gera termos livres, isto é, termos que não dependem destes últimos parâmetros mas somente de  $q$ .

O método para se usar grafos, neste problema, pode ser descrito da seguinte forma: em primeiro lugar associamos uma ligação do grafo a uma interação, ou seja, sempre que um spin " $\sigma$ " for igual a um spin " $\mu$ ". Isto é suficiente para RD, mas para a RPW precisamos incluir a possibilidade de interação entre os spins " $\sigma$ "; posteriormente verificamos quais famílias contribuirão para a média a ser realizada e por fim devemos construir os grafos que contribuirão para média, em particular contando quantas vezes eles aparecerão. Esta multiplicidade depende da média a ser calculada e dos grafos, uma vez fixado o hamiltoniano. Para exemplificarmos o método mostraremos o cálculo da média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  na rede diamante e posteriormente para a rede ponte de wheatstone. Há, para esta média, uma imposição que " $\mu_1$ " seja nulo e portanto somente algumas famílias

contribuirão. São elas a primeira e a quarta. Para esta média, na primeira família existem dois diferentes grafos (grafos I e II), mostrados abaixo na figura (B.1a).

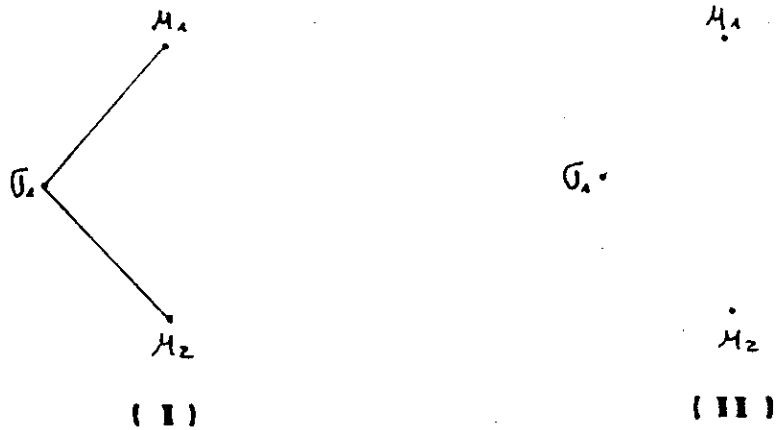


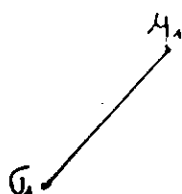
Figura B.1a) Grafos usados no cálculo da média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  da rede diamante para a primeira família.

O primeiro grafo contribui com  $A^2$ , pois há duas ligações e se todos são iguais devem ser igualmente nulos. Isto corresponde a só uma possibilidade. O segundo grafo contribui com  $A(q - 1)$  pois " $\mu_1$ " é zero e igual a " $\mu_2$ ", por este motivo o termo  $A$ ; como ambos devem diferir de " $\sigma$ ", eles podem assumir  $(q - 1)$  diferentes valores. Para quarta família existem dois grafos (III e IV) ; o grafo III contribui com  $AD_1(q - 1)$  pois " $\mu_1$ " é zero e há  $(q - 1)$  possibilidades para que  $\sigma$  seja igual a " $\mu_2$ ". O quarto grafo contribui igualmente com  $AD_1(q - 1)$  pois " $\mu_2$ " vale zero e há  $(q - 1)$  possibilidades para a interação entre " $\sigma$ " e " $\mu_2$ ", responsável pelo termo  $A$ . O resultado final é portanto:

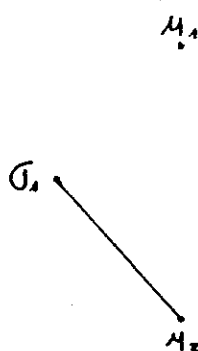


$$Z' \langle \delta_{\mu_1 0} \rangle = (A^2 + q - 1)BCD_1 D_2 + 2(q - 1)AD_1 \quad (B.3)$$

A seguir os grafos da usados para a média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  na quarta família.



( III )



( IV )

Figura B.1b) Grafos usados no cálculo da média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  da rede diamante para a quarta família.

Para verificar os resultados usamos também um programa que fazia o cálculo direto das médias utilizando o hamiltoniano do sistema da seguinte forma: nós gerávamos os parâmetros aleatoriamente e comparávamos o resultado numérico obtido pelo cálculo via hamiltoniano com aquele que utilizava a equação que obtivemos usando os grafos. A razão unitária entre os dois valores após várias simulações diferentes nos garantia a exatidão do cálculo. As outras médias que envolvem somente spins " $\mu$ " obtidas por este método são:

$$Z' \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle = (A^2 + q - 1)BCD_1 D_2 + 2(q - 1)AD_2 \quad (B.4)$$

(B.5)

$$Z' \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle = (A^2 + q - 1) BCD_1 D_2 + (q - 1) (A^2 + q - 1) B$$

(B.6)

$$Z' \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle = (A^2 + q - 1) BCD_1 D_2$$

Uma vez obtidas as equações (3.7), precisamos inverter o sistema, ou seja, obter as equações (3.8). Entretanto, observamos que a maneira mais fácil de inverter as equações era usar uma combinação dos parâmetros que corresponde às famílias que citamos para obter as médias. Isto aparece mais claramente ao olharmos as equações acima. As relações obtidas para rede diamante foram:

$$BCD_1 D_2 = \frac{Z'}{A^2 + q - 1} \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle ,$$

$$B = \frac{Z'}{(q - 1) (A^2 + q - 1)} \left[ \langle \delta_{\mu_1 \mu_2} \rangle - \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle \right] ,$$

(B.7)

$$D_2 = \frac{Z'}{(q - 1) (2A + q - 1)} \left[ \langle \delta_{\mu_2 0} \rangle - \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle \right] ,$$

$$D_1 = \frac{Z'}{(q - 1) (2A + q - 1)} \left[ \langle \delta_{\mu_1 0} \rangle - \langle \delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} \rangle \right] ,$$

onde  $Z'$  é a função partição normalizada.

B.2) MÉDIAS PARA A REDE PONTE DE WHEATSTONE

Para a rede ponte de wheatstone, resolvendo o modelo de Potts sem campo, exemplificaremos o cálculo da média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$ . Para esta rede não podemos incluir o spin " $\sigma$ '" no "resto da rede". Deste modo para a célula básica, o termo  $-\beta\mathcal{H}$  vale:

$$qK(\delta_{\sigma\mu_1} + \delta_{\sigma\mu_2} + \delta_{\sigma\sigma'} + \delta_{\sigma'\mu_1} + \delta_{\sigma'\mu_2}) .$$

Enquanto que para o "resto da rede" o hamiltoniano equivalente  $-\beta\mathcal{H}'$  vale:

$$C + qK'\delta_{\mu_1\mu_2} + qL\delta_{\mu_1 0} \delta_{\mu_2 0} + qH_1\delta_{\mu_1 0} + qH_2\delta_{\mu_2 0} .$$

Faremos a mesma mudança de variáveis feita nas eqs. (B.2) e igualmente incluímos a constante C na função de partição. Assim podemos ver que continuamos com famílias idênticas àquelas da rede diamante. Mudam os tipos de grafo e a quantidade, já que a rede ponte de wheatstone admite um número maior de configurações. Os grafos que aparecem para esta média estão nas figuras (B.3a e B.3b).

Os cinco primeiros grafos pertencem a primeira família e contribuem o primeiro com  $A^5$ , o segundo e o terceiro com  $A^2(q - 1)$ , o quarto com  $A(q - 1)$  e por fim o quinto com  $(q - 1)(q - 2)$ . Resultando para esta família o termo:

$$[A^2 + 2A^2(q - 1) + (q - 1)(A + q - 2)]BCD_1D_2 . \quad (B.8)$$

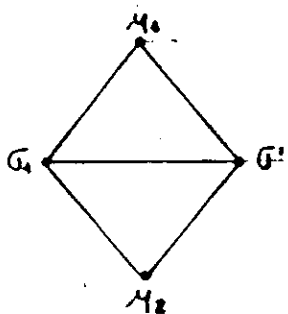
Para a quarta família há dez grafos, o primeiro e o segundo geram  $A^3(q - 1)$ , o terceiro e o quarto  $A^2(q - 1)$ , do quinto até o nono grafo o termo  $A(q - 1)(q - 2)$  e o décimo

$(q - 1)(q - 2)(q - 3)$ . O que fornece:

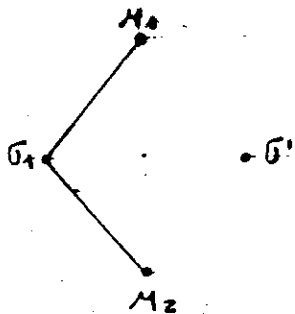
(B.9)

$$[2A^3(q - 1) + 2A^2(q - 1) + 5A(q - 1)(q - 2) + (q - 1)(q - 2)(q - 3)]D_1.$$

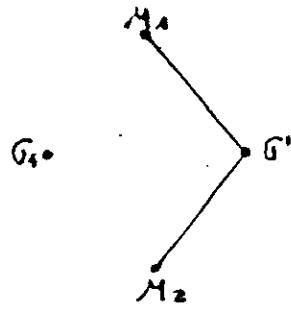
A média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  vezes a função partição é a soma das equações (B.8) e (B.9). Concluindo podemos usar este método para calcular todas as médias necessárias para obtermos as equações de recorrência que exigem ainda o cálculo de médias que envolvem spins " $\sigma$ " e spins " $\mu$ ". A seguir estão os grafos usados para a RPW.



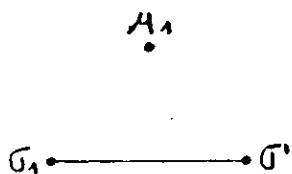
( I )



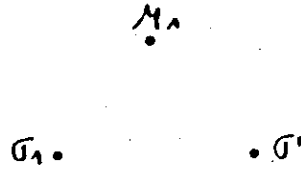
( II )



( III )



( IV )



( V )

Figura B.3a) Grafos utilizados no cálculo da média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  para a rede ponte de wheatstone para a primeira família.

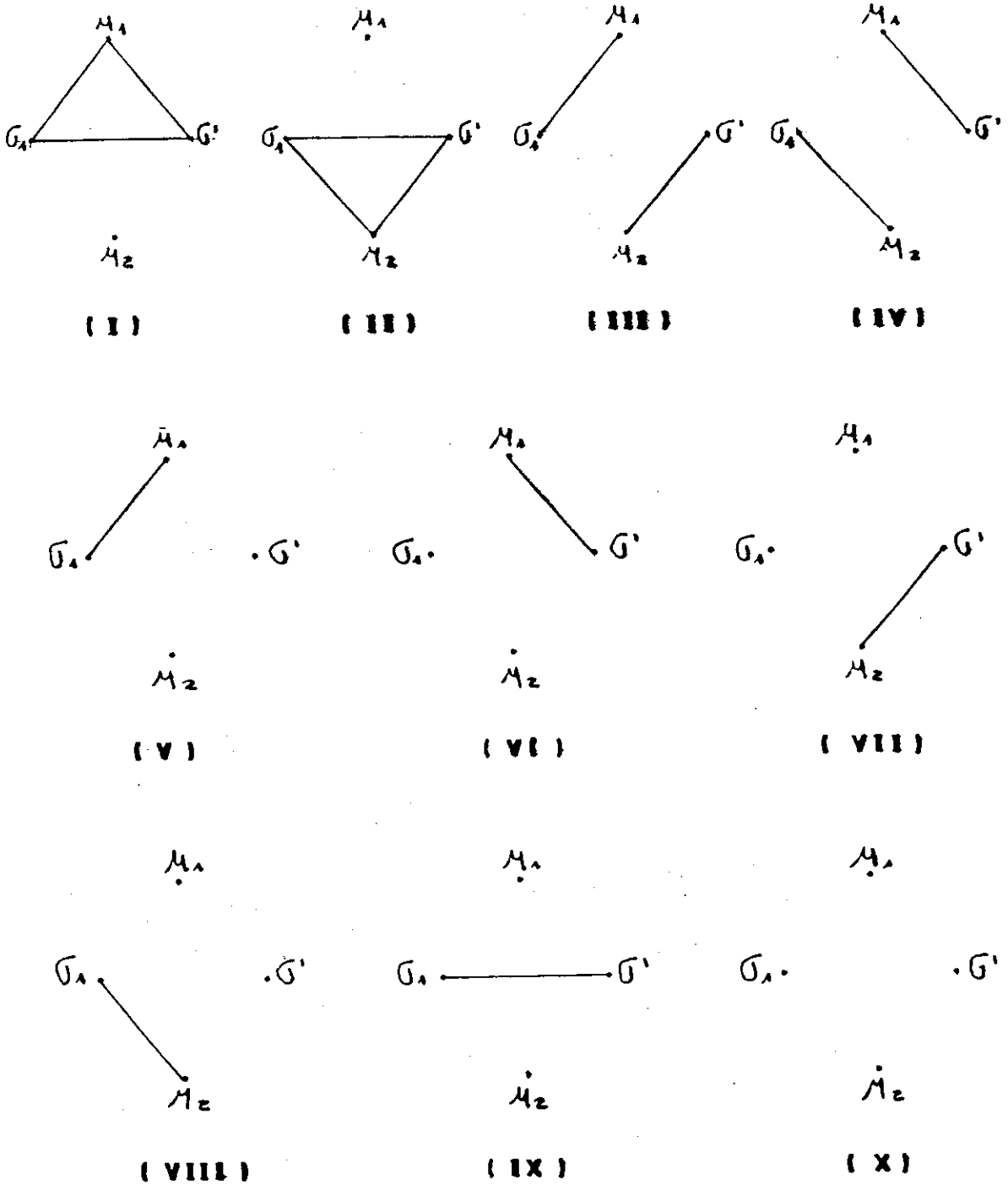


Figura B.3b) Grafos utilizados no cálculo da média  $\langle \delta_{\mu_1 0} \rangle$  para a rede ponte de wheatstone para a quarta família.

APÊNDICE C

Para rede diamante usual a transmissividade crítica é obtida através da solução da equação (3.32), ao fazermos  $t_n = t_{n-1} = t_c$ . A equação (3.32) além das raízes 0 e 1 admite as soluções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , onde:  $x_1 = \text{soln}(1,1)$ ,  $x_2 = \text{soln}(2,1)$  e  $x_3 = \text{soln}(3,1)$ .

$$\begin{aligned} \text{SOLN}(1,1) := & \left( 9 \cdot \text{SQRT}((27 \cdot c - 32) \cdot c) \cdot c - 9 \cdot \text{SCF1}((27 \cdot c - 32) \cdot c) + 27 \cdot \right. \\ & \text{SQRT}(3) \cdot c^2 - 45 \cdot \text{SCF1}(3) \cdot c + 16 \cdot \text{SQRT}(3) \left. \right)^{(2/3)} \cdot \text{SCF1}(- \\ & 3) + 3 \cdot c^{(2/3)} \cdot 3^{(1/3)} \cdot \text{SCF1}(-3) \cdot c^2 - 4 \cdot c^{(2/3)} \cdot \\ & 3^{(1/3)} \cdot \text{SQRT}(-3) - \\ & \left( 9 \cdot \text{SQRT}((27 \cdot c - 32) \cdot c) \cdot c - 9 \cdot \text{SCF1}((27 \cdot c - 32) \cdot c) + 27 \cdot \right. \\ & \text{SQRT}(3) \cdot c^2 - 45 \cdot \text{SCF1}(3) \cdot c + 16 \cdot \text{SCF1}(3) \left. \right)^{(2/3)} - 2 \cdot \\ & \left( 3^{(1/2)} \cdot c^2 \right)^{(1/3)} \cdot \\ & \left( 9 \cdot \text{SQRT}((27 \cdot c - 32) \cdot c) \cdot c - 9 \cdot \text{SCF1}((27 \cdot c - 32) \cdot c) + 27 \cdot \right. \\ & \text{SQRT}(3) \cdot c^2 - 45 \cdot \text{SCF1}(3) \cdot c + 16 \cdot \text{SQRT}(3) \left. \right)^{(1/3)} + 3 \cdot \\ & 2^{(2/3)} \cdot 3^{(1/3)} \cdot c^2 - 4 \cdot c^{(2/3)} \cdot 3^{(1/3)} \cdot \left. \right) / (6 \cdot \\ & \left( 3^{(1/2)} \cdot c^2 \right)^{(1/3)} \cdot \\ & \left( 9 \cdot \text{SQRT}((27 \cdot c - 32) \cdot c) \cdot c - 9 \cdot \text{SCF1}((27 \cdot c - 32) \cdot c) + \right. \\ & \left. 27 \cdot \text{SQRT}(3) \cdot c^2 - 45 \cdot \text{SCF1}(3) \cdot c + 16 \cdot \text{SQRT}(3) \right)^{(1/3)} \cdot c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SOLN}(2,1) := & \left( \sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + 27\sqrt{3} \right. \\ & \sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \left. \right)^{2/3} \sqrt{3} \\ & - 3 \cdot 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} \sqrt{3}\sqrt{-3}Q + 4 \cdot 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} \\ & \sqrt{3} \sqrt{3}\sqrt{-3} - \\ & \left( 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + 27\sqrt{3} \right. \\ & \left. \sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \right)^{2/3} - 2 \cdot \\ & \left( 3 \right)^{1/2} \left( 3 \right)^{1/3} \cdot \\ & \left( 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + 27\sqrt{3} \right. \\ & \left. \sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \right)^{1/3} + 3 \cdot \\ & 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} Q^2 - 4 \cdot 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} \left. \right) / 16 \cdot \\ & \left( 3 \right)^{1/2} \left( 3 \right)^{1/3} \cdot \\ & \left( 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + \right. \\ & \left. 27\sqrt{3}\sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \right)^{1/3} \cdot (C \\ & - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SOLN}(3,1) := & \left( 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + 27\sqrt{3} \right. \\ & \left. \sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \right)^{2/3} - \\ & \left( 3 \right)^{1/2} \left( 3 \right)^{1/3} \cdot \\ & \left( 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + 27\sqrt{3} \right. \\ & \left. \sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \right)^{1/3} - 3 \cdot \\ & 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} Q^2 + 4 \cdot 2^{2/3} \cdot 3^{1/3} \left. \right) / 16 \cdot \\ & \left( 3 \right)^{1/2} \left( 3 \right)^{1/3} \cdot \\ & \left( 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} - 9\sqrt{3}\sqrt{(27Q - 32)Q} + \right. \\ & \left. 27\sqrt{3}\sqrt{3}Q^2 - 45\sqrt{3}\sqrt{3}Q + 16\sqrt{3}\sqrt{3} \right)^{1/3} \cdot (C \\ & - 1) \end{aligned}$$

A expressão de  $r_c$  para esta rede é dado por:

$$r_c = \frac{2 + 2*(q - 2)*t_c^2}{2 + (q - 2)*t_c^2} - \frac{4*(q - 1)*t_c^4}{1 + (q - 1)*t_c^4} \quad (C.4)$$

Para rede ponte de wheatstone, que é uma rede autodual, a transmissividade crítica é simplesmente:

$$t_c = 1/(1 + \sqrt{q}) \quad (C.5)$$

e  $r_c$  é a razão entre NAS/DAS sendo NAS definido como:

$$NAS=AS1+AS2+AS3+AS4+AS5+AS6, \quad (C.6)$$

onde os termos constituintes são:

$$\begin{aligned} AS1 &= t_c^8 * (-4*q^3 + 19*q^2 - 29*q + 14), \\ AS2 &= 4*t_c^7 * (q^3 - 7*q^2 + 14*q - 8), \\ AS3 &= 2*t_c^6 * (2*q^2 - 7*q + 5), \\ AS4 &= t_c^4 * (5*q^2 - 29*q + 34), \\ AS5 &= 4*t_c^5 * (1-q), \\ AS6 &= 20*t_c^3 * (q-2) + 6*t_c^2 + 4*t_c \end{aligned} \quad (C.7)$$

e o denominador DAS é dado por:

$$DAS=AS7+AS8+AS9+AS10+AS11+AS12+AS13, \quad (C.8)$$

onde os termos são:

$$\begin{aligned} AS7 &= t_c^{10} * (q^4 - 6*q^3 + 13*q^2 - 12*q + 4), \\ AS8 &= 2*t_c^9 * (q^3 - 4*q^2 + 5*q - 2), \\ AS9 &= t_c^8 * (4*q^3 - 15*q^2 + 18*q - 7), \\ AS10 &= 4*t_c^7 * (q^2 - 2*q + 1), \\ AS11 &= 4*t_c^6 * (q^2 - 2*q + 1), \\ AS12 &= 2*t_c^5 * (q^2 - 3*q + 2), \\ AS13 &= 2*t_c^4 * (q-1) + 4*t_c^3 * (q-1) + 1. \end{aligned} \quad (C.9)$$



Para a rede diamante generalizada, calculamos  $t_c$  numericamente. Em primeiro lugar obtivemos a temperatura critica dual  $t_c^d$  através da eq. (3.40) e em seguida calculamos  $t_c$  usando a eq. (3.41).  $r_c$  foi obtido calculando:

$$r_c = DPLDTC * DFDX * DXDTD * DTDDTC, \quad (C.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} DTDDTC &= -q / (1 + (q-1) * t_c)^2, \\ DXDTD &= -2 * (t_d^2 * (q-1) - t_d * (q-2) - 1) / (1 + (q-1) * t_d^2)^2, \\ XTD &= (2 * t_d + (q-2) * t_d^2) / (1 + (q-1) * t_d^2), \\ DFDX &= N_c * XTD^{(N_c - 1)}, \\ XF &= XTD^{N_c}, \\ DTLDTC &= -q / (1 + (q-1) * XF)^2 \end{aligned} \quad (C.11)$$

REFERÊNCIAS

- [1] R. J. Baxter - "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" - London Academic Press - (1982).
- [2] L. Onsager - "Crystal Statistics I. A Two - and Three-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition", Phys. Rev. 65, No 3 e 4, (1944), 117-149.
- [3] E. Ising - "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus " - Z. Phys. 21, 613, (1925).
- [4] R. B. Potts - "Some Generalized Order-disorder Transformations" - Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 106, (1952)
- [5] F. Y. Wu, - "The Potts Model" - Rev. Mod. Phys. V54, N1, 235, (1982).
- [6] R. B. Griffiths and M. Kaufman, - "Spin Systems on Hierarchical Lattices. Introduction and Thermodynamic Limit" - Phys. Rev. B, V26, N9, 5022, (1982).
- [7] L. P. Kadanoff - "Notes on Migdal's Recursion Formulas", Ann. Phys. 100, (1976), 359-394.
- [8] Y. Gefen, B. B. Mandelbrot & A. Aharony - "Critical Phenomena on Fractal Lattices" - Phys. Rev. Lett. 45, 855-858, (1980).
- [9] M. Kaufman and R. B. Griffiths, - "Spins Systems on Hierarchical Lattices II. Some Examples of Soluble Models" - Phys. R. Rev. B, V30, N1, 244, (1984).
- [10] T. Tél - "Fractals, Multifractals and Thermodynamics" - Z. Naturforsch. 43A, 1154, (1988).

- [11] B. B. Mandelbrot - "Les Objets Fractals: Forme Hasard et Dimension" - Flammarion, Paris (1975); B. B. Mandelbrot - "The "Fractal Geometry of Nature" - Freeman, New York (1982).
- [12] D. Stauffer - "Introduction to Percolation Theory" - Taylor & Francis, London, (1985).
- [13] M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo & Y. Sawada - "Fractal Structures of Zinc Metal Leaves Grown by Electrodeposition" - Phys. Rev. Lett. 53, 286-289, (1984).
- [14] J. Feder, T. Jøssang & E. Rosenqvist - "Scaling Behavior and Clusters Fractal Dimension Determined by Light Scattering from Aggregating Proteins" - Phys. Rev. Lett. 53, 1403-1406, (1984).
- [15] K. J. Måløy , J. Feder, & T. Jøssang - "Viscous Fingering Fractals in Porous Media" - Phys. Rev. Lett .55, 369-384, (1985).
- [16] H. E. Hurst - "Long-Term Storage: An Experimental Study" - Constable, London (1965).
- [17] J. Feder - "Fractals" - Plenum Pub. Co., New York, (1988).
- [18] P. Grassberger - "Generalized Dimensions of Strange Attractors" - Phys. Rev. Lett. A 97, 227-230, (1990).
- [19] H. G. E. Hentschel & I. Procaccia - "The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Atractors" - Physica 8, 435-444, (1984).

- [20] U. Frisch & G. Parisi - "On The Singularity Structure of Fully Developed Turbulence" - in "Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics", Ed.M. Ghill, R. Benzi & G. Parisi, North-Holland, New York, (1985).
- [21] L. de Arcangelis, S. Redner & A. Coniglio - "Anomalous Voltage Distribution of Random Resistor Network and a New Model for The Backbone at the Percolation Threshold" - Phys. Rev. B31, 4725-4727, (1985).
- [22] P. Meakin, - "Fractal Agregates and Their Fractal Measures" - in Phase Transitions and Critical Phenomena Ed. C. Domb and J.L. Lebowitz, Academic Press, New York, (1987).
- [23] J. Nittmann, H. E. Stanley, E. Toubul and G. Daccord, - "Experimental Evidence for Multifractality" - Phys. Rev. Lett. 58, 618, (1987)
- [24] K. J. Måløy , F. Boger, J. Feder, & T. Jøssang - "Dinamics and Structure of Viscous Fingering in Porous Media" - in Time-Dependent Effects in Disordered Materials. Ed. R. Pynn & T. Riste, Plenum Press, New York, (1987).
- [25] W. A. M. Morgado, S. Coutinho and E. M. F. Curado - "Multifractal Magnetization on Hierarquical Lattices", J. Stat. Phys., 61, No 3/4, (1991), 913-921.
- [26] A. O. Caride and C. Tsallis, - "Simple Renormalization Group Method for Calculating Thermal Equations of States" - ,J. Phys. A: Math. Gen. 20, L665, (1987).

- [27] C. Tsallis, - "On the Hierarchical Lattices Approximation of Bravais Lattices: Specific Heat and Correlation Length" - Phys. C: Solid State Phys., 18, 6581, (1985).
- [28] H. B. Callen, - "Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics" - 2<sup>nd</sup> ed., J. Wiley & Sons, N.Y., (1985).
- [29] H. E. Stanley - "Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena" - Clarendon Press, Oxford, (1971).
- [30] L. Landau et E. Lifchitz - "Physique Statistique" - Ed. Mir, Moscou (1967).
- [31] G. Toulouse et P. Pfeuty, - "Introduction au Groupe de Renormalization et a ses Applications" - Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, (1975).
- [32] K. G. Wilson - "Problems in Physics with Many Scales of Length" - Scient. Amer. 241, N2, 158, (1979).
- [33] H. J. Maris and L. P. Kadanoff - "Teaching the Renormalization Group" - Am. J. Phys., 46(6), 652 (1978).
- [34] K. G. Wilson and J. Kogut - "The Renormalization Group and the  $\epsilon$  Expansion" - Phys. Rep. 12, N2, 75, (1974).
- [35] L. Kadanoff, - "Scaling Law for Ising Models" Physics 2, 263 (1966).
- [36] K. G. Wilson and M.E. Fisher, - "Critical Exponents in 3.99 Dimensions" - Phys. Rev. Lett. 28, 240, (1972).
- [37] T. Niemeijer and J. M. J. van Leeuwen, in "Phase Transitions and Critical Phenomena" Ed. C. Domb and J. L. Lebowitz Academic Press, New York, (1987).

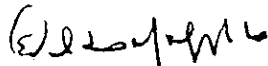
- [38] A. N. Berker and S. Ostlund, - "Renormalization-Group Calculations of Finite Systems: Order Parameters and Specific Heat and Epitaxial Ordering" - J. P. Phys. C.: Solid State Phys. V12, 496, (1976).
- [39] P. M. Bleher e E. Zalyz, - "Existence of Long-Range Order in the Migdal Recursion Relation Equations" - Commun. Phys., 67, 17,(1979).
- [40] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin - "Solid State Physics" - Saunders College (1981).
- [41] M.Kaufman and R. B. Griffiths, - "Exactly Soluble Ising Models in Hierarquical Lattices" - Phy Rev. B, V24, N1, 496, (1981).
- [42] M.Kaufman and R. B. Griffiths, - "First-Order Transitions in Defect Structures at a Second-Order Critical Point on the Potts Model on Hierarquical Lattices" - Phys. R. Rev. B, V26, N9, 5282, (1982).
- [43] J. R. Melrose - "Hierarquical Lattices: Some Examples with a Comparison of Intrinsic Dimension and Connectivity and Ising Model Exponents" - J. Phys. A. 16,3077, (1983).83).
- [44] C. Tsallis - "Transiciones de Fase y Magnetismo Aleatorio (Grupo de Renormalizacion)" - CBPF, Rio de Janeiro; Em relação à transmissividade podemos consultar ainda: C. Tsallis and S. V. F. Levy, "Simple Method to Calculate Percolation, Ising and Potts Clusters: Renormalization-Group Application" - Phys. Rev. Lett., V47, N13, (1981).

- [45] H. O. Martin and C. Tsallis - "Self-Dual Cluster Renormalization-Group Approach for the Square Lattice Ising Model: Specific Heat and Magnetization" - J. Phys. C: Solid State Phys., 14, 5645, (1981).
- [46] M. Kaufman and R. B. Griffiths, - "Convexity of the Free Energy in Some Real-Space Renormalization-Group Approximations" Phys. Rev. B, V28, N7, 3864, (1983).
- [47] C. Tsallis, - "On the Hierarchical Lattices Approximation of Bravais Lattices: Specific Heat and Correlation Length" - Phys. C: Solid State Phys., 18, 6581, (1985).
- [48] W. A. M. Morgado - "Magnetização Multifractal em Redes Hierárquicas" - Tese de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, (1991).
- [49] G. Parisi - "Statistical Field Theory" - Addison-Wesley Publishing Co., (1988).
- [50] P. M. Bleher and E. Zalsys - "Asymptotics of the Susceptibility for the Ising Model on the Hierarchical Lattices" - Commun. Math. Phys. 120, 409, (1989).
- [51] M. R. Spiegel - "Mathematical Handbook" - McGraw-Hill (1968).

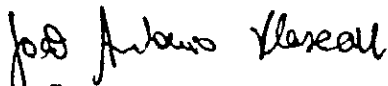
"CRITICALIDADE E MULTIFRACTALIDADE DO MODELO DE POTTS  
EM REDES FRACTAIS HIERÁRQUICAS"

LADÁRIO DA SILVA

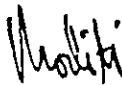
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



Evaldo Mendonça Fleury Curado - Presidente



João Antonio Plascak



Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, 27 de fevereiro de 1992