

Alvaro de Souza Dutra

O TERMO DE WESS-ZUMINO E AS SIMETRIAS DE CALIBRE E DE LORENTZ EM  
MODELOS BIDIMENSIONAIS

Tese de Doutorado

*Comissão de Exame*  
*Dr. José Leite*  
*José Leite*      *forumbm*  
*Dr. José Leite*  
*Dr. José Leite*  
*Dr. José Leite*  
*Dr. José Leite*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Setembro de 1992

530.443  
1994

à Conceição

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos a:

- Juan Alberto Mignaco, pela amizade e pelo grande apoio, liberdade de trabalho e encorajamento ao longo destes anos de trabalho,
- Sebastião Alves Dias, pela amizade e grande colaboração no curso do desenvolvimento desta tese,
- Marcelo Batista Hott, Henrique Bosqui Filho, Antonio Soares de Castro e César Natividade, pelas muitas horas em que aturaram meu "papo" sobre o tema de tese, além da grande amizade,
- galera do CBPF: Carlos Alberto, José Luiz, Patrício, Jorge, Marquinho, Colato, Sônia, Stênio, Emília, Osvaldo, Cambraia, Sérgio, Soares, Lula, Felipe, Edgardo e muitos outros que me propiciaram um ambiente de trabalho extremamente agradável,
- Miriam e Rosângela, pelos infinitos "galhos quebrados",
- Vera, Denise, Sérgio, Baiano, e todos da biblioteca, pela grande colaboração,
- UNESP por me dar um afastamento que permitiu concluir este trabalho,
- CNPQ por ter financiado parcialmente esta tese, e a FAPESP por ter propiciado apoio computacional,
- todos aqueles que por ventura não tenham sido citados apenas por motivo de espaço e memória.

## RESUMO

Nesta tese discutimos aspectos das simetrias de calibre e de Lorentz em modelos bidimensionais. A primeira foi estudada no que tange a sua restauração em modelos anômalos através do uso do termo de Wess-Zumino. Levantamos ainda a hipótese da introdução de um termo de Wess-Zumino generalizado, discutindo em seguida suas conseqüências físicas. No caso da simetria de Lorentz, desenvolvemos um método para a verificação da covariância de densidades de lagrangiana onde esta não seja explícita. Através do uso deste método propusemos a existência de uma segunda versão para a calibração do bóson quiral de Floreanini-Jackiw. Verificamos ainda que esta segunda calibração se tratava de uma "calibração quiral", na qual o bóson quiral mantinha sua quiralidade sob transformações de calibre. Finalmente apresentamos uma interligação entre as duas simetrias no caso de um modelo específico. Neste modelo verifica-se que só há covariância de Lorentz se houver invariância de calibre.

# ÍNDICE

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Modelo de Schwinger generalizado e termo de Wess-Zumino generalizado	7
1.1 Obtenção do modelo via invariância de calibre	11
1.2 Resolução dos modelos anômalo e não-anômalo em sua versão de ordem superior via formalismo de integral funcional	20
1.3 Sobre um Wess-Zumino generalizado	33
2 Bósons quirais e invariância de Lorentz	44
2.1 Um novo método para testar a covariância de Lorentz	45
2.2 Um caminho alternativo de calibrar o bóson quiral de Floreanini-Jackiw	50
2.3 Sobre uma dualidade entre as calibrações do bóson quiral de Floreanini-Jackiw	61
3 Sobre o significado físico do termo de Wess-Zumino mínimo	67
Conclusões	79
Apêndice: O termo de Wess-Zumino e o projetor transversal	83
Referências	91

## INTRODUÇÃO

Desde o aparecimento do primeiro modelo exatamente solúvel em Teoria Quântica de Campos, desenvolvido por Thirring em 1958 [1], muitos outros surgiram discutindo as mais variadas peculiaridades da Teoria Quântica de Campos. Essencialmente estes trabalhos se caracterizam por tratarem de modelos que são exatamente solúveis apenas em duas dimensões espaço-temporais. Particularmente a partir do trabalho de Schwinger de 1962 [2], que resolvia exatamente a eletrodinâmica quântica espinorial sem massa em duas dimensões, houve um aumento do interesse dos físicos por tais modelos bidimensionais. A propriedade de solubilidade traz consigo informações a respeito da estrutura não-perturbativa destes modelos, o que torna bastante atrativo o estudo desta classe de modelos. Isto é feito na esperança de que se tirem conclusões ou que se desenvolvam técnicas que possam ser estendidas a dimensões mais altas.

Existem entretanto outros interesses ao se estudar modelos exatamente solúveis, entre outros citaríamos aquele de se procurar modelos realísticos que, de alguma forma, apresentem características de modelos em quatro dimensões e que por isso não são exatamente solúveis. Este seria por exemplo o caso do modelo de Schwinger que, por apresentar confinamento do férmion, quebra da simetria quiral, vácuo  $\theta$ , etc... , representaria em duas dimensões o papel da cromodinâmica quântica, tornando-se assim em uma espécie de laboratório do qual se poderiam tirar lições a serem transportadas às quatro dimensões.

Por outro lado é sabido que a existência de simetrias, especialmente as locais, tem uma grande importância para a teoria quântica de campos em qualquer número de dimensões. Além disso é típico dos modelos bidimensionais o aparecimento de parâmetros arbitrários de regularização em grandezas observáveis, como ocorre por exemplo com a massa. Em alguns casos, como no do modelo de Schwinger, este parâmetro pode ser fixado através da imposição da simetria de calibre. Existem outros porém para os quais isto não é possível, sendo um exemplo típico o caso do chamado modelo de Schwinger quiral introduzido por Jackiw e Rajaraman em 1985 [3], modelo este que trata da eletrodinâmica espinorial quiral sem massa. Este modelo foi primordialmente considerado por se tratar de um caso em que a simetria de calibre é quebrada dinamicamente e que, apesar disto, pode ser considerada consistente sob os critérios de renormalizabilidade e unitariedade. Este último critério é atingido através da restrição da região de validade para o parâmetro arbitrário de regularização, que neste caso entretanto não pode ser fixado a partir do princípio de simetria, gerando uma teoria cujo espectro possui uma partícula escalar massiva com massa arbitrária.

Posteriormente mostrou-se que este e outros modelos anômalos poderiam recuperar a simetria de calibre através da introdução de um campo adicional, o chamado campo de Wess-Zumino. Embora proposto inicialmente por Faddeev e Shatashvilli [4], o estudo deste tipo de restauração de simetria ganhou maior notoriedade quando foi mostrado que, uma vez que se manipule corretamente a medida da integral funcional, este termo aparece naturalmente

[5,6]. Mostrou-se ainda que a introdução deste termo não altera o espectro e o espaço de Hilbert físico do modelo anômalo [7]. Entretanto a introdução do termo de Wess-Zumino torna a teoria invariante de calibre para um valor arbitrário do parâmetro de regularização, não servindo portanto para se resolver o dilema das massas arbitrárias.

Uma outra característica muito importante da teoria quântica de campos em duas dimensões, é a da possibilidade de se bosonizar um dado modelo, ou seja, pode-se construir modelos cujos elementos básicos sejam campos bosônicos e que tenham funções de correlação correspondentes a teorias fermiônicas. Esta técnica de bosonização é também uma importante ferramenta no entendimento de propriedades não-perturbativas dos modelos considerados. Além disso é interessante observar que as propriedades de simetria da teoria fermiônica a ser bosonizada se expressam em termos de propriedades topológicas do modelo bosônico correspondente.

Nos últimos anos tem aparecido um grande interesse no estudo da chamada bosonização quirial. Esta é basicamente aplicada ao estudo dos bósons quirais, que são campos bosônicos que dependem de apenas uma das variáveis do cone de luz. O principal interesse em tais objetos vem do fato deles serem importantes na construção das chamadas cordas heteróticas [8].

O primeiro modelo de bóson quirial foi apresentado por Siegel em 1984 [9]. Este modelo consiste essencialmente em um bóson escalar sujeito a um vínculo quirial quadrático. Esta teoria é tal que possui vínculos de primeira classe, indicando a existência de uma simetria local, a simetria de Siegel; esta simetria entretanto



é quebrada anômala, e pode ser restaurada mais uma vez pelo uso de um termo de Wess-Zumino [10,11]. Neste caso todavia o próprio campo do bóson quirial desempenha este papel.

Posteriormente uma versão obedecendo a um vínculo de segunda classe foi introduzida para o bóson quirial, o chamado bóson quirial de Floreanini-Jackiw [12], discutida por Costa e Girotti [13], Sonnenschein [14], Girotti et al [15], entre outros. Esta nova versão é uma teoria com vínculos de segunda classe, e portanto sem simetria local. Wotzasek [16] procurou interpretá-la como sendo uma versão de calibre fixado de uma teoria com simetria local. Isto foi feito mais uma vez através da introdução de campos de Wess-Zumino. Neste caso todavia são necessários infinitos campos deste tipo.

Entretanto o desejável acoplamento deste bóson quirial a um campo de calibre  $U(1)$  não era definido sem ambiguidade, porque este modelo é caracterizado por possuir uma densidade de lagrangiana que não tem a simetria de Lorentz explicitamente manifesta. Algumas tentativas de calibração do bóson quirial foram feitas por exemplo por Abdalla et al [17], por Sonnenschein [18], e outros. Mais recentemente porém, Harada apresentou o que afirmava ser uma versão unívoca para a calibração do bóson quirial de Floreanini-Jackiw [19,20]. Neste trabalho [19] ele partia do modelo de Schwinger quirial, impunha um vínculo quirial a fim de eliminar o grau de liberdade excessivo, terminando assim com um modelo que correspondia a um bóson quirial de Floreanini-Jackiw interagindo com um campo de calibre  $U(1)$ .

A principal característica dos modelos inspirados no de Floreanini-Jackiw, é a de não ter a densidade de lagrangiana

explícitamente covariante de Lorentz. Torna-se importante portanto verificar se ao menos implicitamente esta covariância é obedecida. Devido a este tipo de problema, Harada procurou verificar a covariância de Lorentz do modelo por ele proposto. Para isto ele mostrou que os geradores de simetria do referido modelo obedeciam à álgebra de Poincaré [20].

Nesta tese vamos discutir ambas as simetrias, de calibre e de Lorentz. A primeira do ponto de vista de sua restauração via o termo de Wess-Zumino [21,22], e de uma possível generalização deste termo [23]. Já a simetria de Lorentz vai ser considerada através do desenvolvimento de um método para sua verificação [24,25]. Ao introduzirmos no primeiro capítulo este suposto termo de Wess-Zumino generalizado, obtivemos um resultado de certa forma surpreendente, pois este termo é tal que aparecem excitações massivas adicionais na teoria, excitações estas que são dependentes do calibre; devemos entretanto fazer um estudo mais detalhado do espaço de Hilbert físico da teoria. O que mais surpreende na verdade é que, quando fixamos o calibre de modo a eliminar a massa excedente, terminamos com uma massa que não mais depende do parâmetro arbitrário de regularização, tanto no caso do modelo de Schwinger (o que era de se esperar, mas que não ocorre com o termo usual) quanto no caso do modelo de Schwinger quiral, o que é um resultado bastante interessante e que portanto merece um estudo mais profundo no futuro. No segundo capítulo desenvolvemos, como dissemos acima um método simples e sistemático para a verificação da covariância de Lorentz em modelos nos quais ela não seja explícita [24,25]. Ao desenvolvermos este método, nos deparamos com

a possibilidade de introduzir uma segunda versão invariante de calibre e de Lorentz para o bóson quirial de Floreanini-Jackiw. Esta segunda calibração mostrou-se estar relacionada a uma certa "simetria de calibre quirial", pois sob tais transformações o bóson quirial mantém sua quiralidade, o que não ocorre com a calibração usual [19].

Finalmente no último capítulo, discutiremos um termo de Wess-Zumino cujo campo bosônico é quirial, este termo surgiu recentemente na literatura sob o nome de termo de Wess-Zumino mínimo [26,27]. Ao verificarmos a validade da simetria de Lorentz para este modelo, descobrimos que esta é tal que implica na existência da simetria de calibre, apresentando assim uma interligação entre estas simetrias neste modelo [28]. Mostraremos ainda que este suposto termo de Wess-Zumino mínimo é na realidade um bóson quirial que, por possuir quiralidade oposta à do modelo original, cancela a anomalia. Este cancelamento se dá por um mecanismo de fechamento de família como ocorre no modelo padrão, e não através do mecanismo de um verdadeiro termo de Wess-Zumino.

## CAPÍTULO I

### MODELO DE SCHWINGER GENERALIZADO E TERMO DE WESS-ZUMINO GENERALIZADO

Desde longa data [1,2], a teoria quântica de campos tem sido investigada em duas dimensões espaço-temporais, essencialmente com a esperança de se conseguir um entendimento mais profundo dos mecanismos da teoria quântica de campos e que, de alguma forma, estes possam ser transportados para dimensões mais altas. Realmente isto tem sido feito principalmente através da busca de modelos nos quais aconteça algum tipo de mecanismo interessante. Este é exatamente o caso do modelo de Schwinger quiral (MSQ) [3], que foi introduzido por Jackiw e Rajaraman como um modelo de calibre anômalo que, apesar desta característica, é unitário e renormalizável. A idéia principal por trás do interesse neste modelo específico, era a de se obter um modelo que dispensasse a existência do campo de Higgs, isto devido à sua geração dinâmica de massa, e concomitantemente não dependesse também de um "fechamento de família" a fim de eliminar a anomalia e manter a teoria consistente, devido ao não aparecimento do quark top. Mais tarde descobriu-se que este modelo poderia ser pensado como uma versão de um modelo não-anômalo que tivesse tido o calibre fixado, desde que sua medida funcional tivesse sido manipulada corretamente [5,6]. Em seguida, uma grande quantidade de trabalhos apareceram discutindo uma grande variedade de suas peculiaridades e, em particular, a de que o termo de Wess-Zumino (WZ) não muda o conteúdo físico do

modelo [29-35]. Mais recentemente, as pessoas tem se interessado em um modelo que sintetiza como casos particulares o modelo de Schwinger vetorial (MSV) [2], o modelo de Schwinger axial (MSA) e o modelo de Schwinger quiral (MSQ) [37-42].

O modelo de Schwinger generalizado (MSG), foi estudado através de um tratamento perturbativo por Chanowitz [37], que discutiu algumas ambigüidades na determinação da anomalia e também considerou o termo de WZ no caso particular do MSQ. Posteriormente Miyaka e Shizuya [38] trataram o problema do conteúdo fermiônico do modelo, e Boyanovsky, Schmidt e Golterman [7] o usaram como um ponto de partida para a comparação entre as propriedades do MSV e do MSQ. Mais recentemente, Wotzasek e Naon [39] estudaram sua versão bosonizada através do algoritmo de Dirac e também o caso de férmions massivos. Além disso Shin Lee e Lee [40] atacaram o problema de suas correntes e tensor de energia-momentum, e Alonso, Cortés e Rivas [41] o usaram para discutir a ambiguidade de regularização no método de regularização de Fujikawa [43]. Mais recentemente Dias e Linhares [42] apresentaram o cálculo do determinante fermiônico pelo método de separação de pontos, comparando em seguida as várias classes de regularização que aparecem na literatura. Além disso nós mostramos que, partindo de um princípio de invariância de calibre, pode-se obter as teorias bosonizadas, em particular para duas dimensões foi obtido o MSG. Também foi considerado o caso de três dimensões [21], como será visto na próxima seção.

Entretanto, tanto quanto saibamos, a maioria destes trabalhos discutiram os modelos através de suas versões bosonizadas, isto

porque no formalismo funcional esta é uma possibilidade de reescrever, em forma local, a densidade de Lagrangeana efetiva para o campo de calibre que é não-local. Todavia, como veremos mais abaixo, esta densidade de Lagrangiana não-local também pode ser trocada por uma outra local, através da utilização da propriedade de decomposição de campos vetoriais em duas dimensões, entretanto neste caso nos deparamos com uma teoria de ordem superior. Pretendemos estudar neste capítulo o MSG nesta última versão, mostrando sua equivalência com a versão bosonizada, e discutindo tanto a versão anômala quanto a não-anômala [23]. Neste último caso iremos introduzir dois tipos de fixação de calibre. Estes contém como casos particulares aqueles que têm aparecido na literatura. Estudaremos ainda as funções de correlação invariantes de calibre, mostrando que estas correspondem às anômalas, como foi observado por Girotti e Rothe [34], o que é feito usando-se um termo de fonte modificado no funcional gerador, como sugerido por Linhares et al [32].

Todos os cálculos serão feitos no formalismo de integral funcional. Como o MSG, a exemplo do seu caso particular o MSQ, tem um ponto singular para o parâmetro de regularização ( $M^2 = g_1^2$  no MSG e  $a = 1$  no MSQ), trataremos cada caso separadamente. O caso do parâmetro arbitrário ( $M^2 \neq g_1^2$ ) será resolvido através do uso de transformações nos campos que se tornam singulares quando  $M^2 = g_1^2$ , clarificando assim, neste formalismo, a origem do problema com esta escolha de parâmetro. Em seguida será utilizado um outro método para tratarmos o caso em que  $M^2 = g_1^2$ .

Na última parte deste capítulo, iremos verificar a

possibilidade da introdução de um novo, e mais geral, termo de Wess-Zumino. Após sua apresentação através da utilização do mesmo método utilizado por Harada e Tsutsui [6], iremos investigar as consequências físicas de sua hipótese. Ao fazê-lo, por motivo de simplicidade e melhor compreensão, iremos considerar os casos particulares do MSV, MSA e MSQ. Os dois primeiros serão usados para se obter maior confiança no mecanismo, isto porque suas propriedades físicas são bem estabelecidas. Finalmente construiremos uma possível realização do termo de Wess-Zumino generalizado para o MSQ, encontrando uma característica surpreendente: neste caso, a massa gerada dinamicamente para o campo de calibre não é mais arbitrária, mas sim fixada quando se escolhe apropriadamente o calibre.

Uma outra consequência notável da utilização do WZ generalizado é que, mesmo quando são utilizadas funções de correlação invariantes de calibre, permanece alguma arbitrariedade em suas definições. Esta arbitrariedade pode ser utilizada, por exemplo, para eliminar o mal comportamento do propagador do campo de calibre no limite em que a constante de acoplamento vai a zero, o que tem gerado alguma controvérsia [30,34]. De fato parece um tanto estranho que, ao contrário de todas as demais teorias de calibre, o MSQ não-anômalo e, por extensão, o MSG não-anômalo, fossem as únicas a manter seus propagadores inalterados na forma, não importando qual condição de calibre seja utilizada. A bem da verdade, a variação da forma do propagador quando se utilizam os mais variados calibres é tomada como uma característica bastante proveitosa, objetivando a demonstração das mais variadas

propriedades das teorias de calibre. Um exemplo típico seria a da utilização do calibre axial em teorias de calibre não-abelianas, a fim de desacoplar os fantasmas.

Na próxima seção, vamos apresentar uma maneira de se obter a densidade de lagrangiana bosonizada do MSG, partindo de um princípio de invariância de calibre [21].

### 1.1) Obtenção do modelo via invariância de calibre:

Como é bem sabido, alguns modelos bidimensionais apresentam como característica o surgimento de massas geradas dinamicamente para os bósons de calibre [2,3,6], e isto ocorre sem perda da invariância de calibre. Realmente seria muito bom se este mecanismo pudesse ser levado para dimensões mais altas, particularmente em quatro dimensões com o intuito de obter um modelo padrão sem a necessidade de campos de Higgs.

Por outro lado, a possibilidade de reescrever campos fermiônicos em termos de campos bosônicos é uma das mais interessantes peculiaridades dos modelos bidimensionais [44-46]. A técnica de bosonização é muito importante também na obtenção de informações não-perturbativas dos modelos. De fato este tipo de método está sendo estudado atualmente em dimensões mais altas [47,48], através de um estudo operatorial.

Nesta seção pretendemos mostrar que, partindo do bem conhecido princípio de invariância de calibre, o qual tem sido aplicado extensivamente para a introdução das interações como no caso da eletrodinâmica quântica (EDQ), a EDQ escalar, na



cromodinâmica quântica, etc..., podemos obter estas teorias bosonizadas em duas dimensões no caso abeliano [25]. Isto é feito ao se observar primeiramente que a densidade de lagrangiana do campo escalar livre e sem massa

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi , \quad (1.1.1)$$

é invariante sob a translação global:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + v, \quad (1.1.2)$$

onde  $v$  é uma constante. Como é feito no caso da invariância rotacional no espaço interno dos campos (EDQ, EDQ escalar, etc...), iremos agora impor que esta invariância se torne local, ou seja

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + v(x). \quad (1.1.3)$$

Isto é feito através da introdução de um campo de calibre vetorial  $E_{\mu}(x)$ , o qual obedece à transformação usual

$$E_{\mu}(x) \rightarrow E_{\mu}(x) - (1/g) \partial_{\mu} v(x) , \quad (1.1.4)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento. Com estes elementos em mãos, não é difícil ver que a densidade de lagrangiana invariante de calibre deverá ser

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + g E_{\mu} \partial^{\mu} \phi + (g^2/2) E_{\mu} E^{\mu}. \quad (1.1.5)$$

Na verdade, a densidade de lagrangiana acima é válida em um número arbitrário de dimensões [49]. Nesta referência, Burnel apresentou uma densidade de lagrangiana como esta acima, entretanto ele discutiu o modelo em quatro dimensões e o campo escalar foi introduzido para recuperar a invariância de calibre de um campo vetorial massivo. No nosso caso, o campo de calibre é que aparece de modo a tornar a densidade de lagrangiana invariante sob translação local, e o fato do campo de calibre ter termo de massa é uma consequência. Iremos nos restringir aqui à análise desta densidade de lagrangiana em duas dimensões. Até agora não identificamos o campo de calibre  $E_{\mu}$  como sendo o campo associado ao fóton  $A_{\mu}$ , mas em duas dimensões podemos relacioná-los através da expressão geral

$$E^{\mu} \equiv (c_1 g^{\mu\nu} + c_2 \epsilon^{\mu\nu}) A_{\nu}. \quad (1.1.6)$$

Usando esta relação obtemos a densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (1/2) \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + g (c_1 g^{\mu\nu} + c_2 \epsilon^{\mu\nu}) \partial_{\mu} \phi A_{\nu} + \\ + (g^2/2) (c_1^2 + c_2^2) A_{\mu} A^{\mu}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Escolhendo a constante de acoplamento  $g$  como sendo a carga do "elétron"  $e$ , a qual é o parâmetro dimensional em duas dimensões, e ainda identificando  $c_1$  e  $c_2$  com os parâmetros de acoplamento do

modelo de Schwinger generalizado (MSG) [7],  $g_1$  e  $g_2$  respectivamente temos que

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e(g_1 g^{\mu\nu} + g_2 \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi A_\nu + (e^2/2) A_\mu A^\mu, \quad (1.1.8)$$

onde impusemos que  $g_1^2 + g_2^2 = 1$  [39]. A densidade de lagrangiana acima, a menos da ausência do parâmetro arbitrário de regularização, é justamente a versão bosonizada do MSG [7,39],

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e(g_1 g^{\mu\nu} + g_2 \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi A_\nu + (ae^2/2) A_\mu A^\mu \quad (1.1.9)$$

que nos casos particulares em que  $g_1 = 1 = -g_2$ , e  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 1$ , recuperam os modelos de Schwinger quiral e vetorial [3,2] respectivamente.

Todavia, como pode ser visto da equação (1.1.8), a densidade de lagrangiana do MSG bosonizado foi obtida para um valor particular do parâmetro arbitrário de regularização ( $a = 1$ ), entretanto é bem sabido que este tipo de modelo bidimensional apresenta tal parâmetro arbitrário. Em geral estes modelos são anômalos de calibre, ao contrário do que ocorre com o modelo de Schwinger vetorial, no qual a invariância de calibre nos permite fixar o parâmetro de regularização ( $a = 0$ ). O caso geral, ou em particular o modelo de Schwinger quiral, é tal que não existe escolha possível de  $a$  tal que seja eliminada a componente longitudinal do campo de calibre. Na verdade pode-se mostrar que o

longitudinal do campo de calibre. Na verdade pode-se mostrar que o MSG pode manter esta arbitrariedade sem a perda da invariância de calibre, e isto não é feito através da eliminação da parte longitudinal do campo de calibre mas, ao contrário disto, pela introdução de um novo campo dependente de calibre. Mostraremos agora um modo de introduzir este parâmetro arbitrário usando-se o campo de WZ [4]. Este campo pode ser introduzido no jogo por não alterar o conteúdo físico da teoria, como pode ser visto de uma análise cuidadosa de seus vínculos e de seu espaço de Hilbert físico. Um estudo detalhado neste assunto pode ser encontrado na referência [7].

Com o intuito de introduzir o parâmetro arbitrário, realizamos as transformações:

$$\phi \rightarrow \phi + k_1 \theta, \quad (1.1.10a)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + (k_2/e) \partial_\mu \theta, \quad (1.1.10b)$$

que, após serem substituídas em (1.1.9), e algumas rearrumações, conduzem a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e(g_1 g^{\mu\nu} + g_2 \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi A_\nu + (ae^2/2) A_\mu A^\mu \\ & + (k_1 + g_1 k_2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \theta + (1/2) (k_1^2 + 2g_1 k_1 k_2 + ak_2^2) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta \\ & - e \theta \left[ (g_1 k_1 + ak_2) \partial^\mu A_\mu + g_2 k_1 \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \right]. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Agora podemos eliminar uma das constantes  $k_1$  ou  $k_2$ , pela

imposição de que o termo com os campos  $\phi$  e  $\theta$  se anule. Esta condição surge do fato de que tal termo corresponderia a uma interação entre o campo do férmion e o de WZ, e isto tornaria a teoria anômala. Usando esta condição para eliminar a constante  $k_1$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e(g_1 g^{\mu\nu} + g_2 \epsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi A_\nu + \\ & + (ae^2/2) A_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{WZ} \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

onde

$$\mathcal{L}_{WZ} = (k_2^2/2) (a - g_1^2) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + e k_2 \theta \left[ (a - g_1^2) g^{\mu\nu} + g_1 g_2 \epsilon^{\mu\nu} \right] \partial_\mu A_\nu. \quad (1.1.13)$$

Fazendo em seguida a renormalização finita  $\theta \rightarrow -(1/k_2)\theta$ , obtemos finalmente o MSG não-anômalo, cuja densidade de lagrangiana de interação com o campo de WZ é dada por

$$\mathcal{L}_{WZ} = (1/2) (a - g_1^2) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - e \theta \left[ (a - g_1^2) g^{\mu\nu} + g_1 g_2 \epsilon^{\mu\nu} \right] \partial_\mu A_\nu, \quad (1.1.14)$$

que é a expressão correta, como pode ser verificado a partir dos casos particulares do modelo de Schwinger quirral ( $g_1 = 1 = -g_2$ ) e do modelo de Schwinger vetorial ( $g_1 = 0, g_2 = 1$ ) [6], ou ainda com o caso generalizado [42]. Uma maneira alternativa de se obter o termo de WZ, baseada no fechamento de projetores transversos, é apresentada no apêndice.

começando com uma densidade de lagrangiana fermiônica que tem uma simetria de rotação em um plano complexo, e indo para sua contrapartida bosônica, vemos que a única simetria disponível nesta última é a translacional, porque temos apenas um campo bosônico para representar o férmion bosonizado.

Desta forma poderíamos tentar estender a aplicação do princípio de calibre à teorias bosonizadas em três ou mais dimensões, através da imposição de algum tipo de invariância translacional local. Em outras palavras, dada uma dimensão, toda vez que tivermos uma densidade de lagrangiana bosônica correspondente a um férmion de Dirac, e este for representado por um único campo bosônico, impomos uma invariância de translação local, e esta corresponderá à invariância da teoria fermiônica.

Vamos então estudar a aplicação da idéia acima em três dimensões. Para isto lembramos que recentemente Marino [48] apresentou uma bosonização para férmions de Dirac em três dimensões. Neste trabalho ele obteve,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu)\psi \iff \mathcal{L}_B(W_\mu) = (-1/4)W_{\mu\nu}(-\square)^{-1/2}W^{\mu\nu} + \\ + (\theta/2)\epsilon^{\mu\alpha\beta}W_\mu \partial_\alpha W_\beta + \text{H.C.}, \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

onde  $W_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ ,  $\theta$  é o parâmetro de Chern-Simons, e H.C. corresponde ao termo hermitiano conjugado. Neste caso como o campo bosônico é vetorial, e a ação é invariante sob a transformação de calibre usual,

$$W_{\mu} \rightarrow W_{\mu} + \partial_{\mu} \Lambda, \quad (1.1.16)$$

imaginamos se uma simetria mais geral possa ser imposta, na qual a translação seja feita através de um campo vetorial geral

$$W_{\mu} \rightarrow W_{\mu} + C_{\mu}, \quad (1.1.17)$$

onde, em geral,  $C_{\mu}(x)$  não é igual a  $\partial_{\mu} \Lambda$ . Isto pode ser feito definindo a derivada covariante

$$D_{\mu} W_{\nu} \equiv \partial_{\mu} W_{\nu} + g \partial_{\mu} E_{\nu}, \quad (1.1.18)$$

de modo que os campos se transformam segundo

$$W_{\mu} \rightarrow W_{\mu} + C_{\mu}, \quad E_{\mu} \rightarrow E_{\mu} - (1/g) C_{\mu}. \quad (1.1.19)$$

Finalmente obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{INV}} = \mathcal{L}_{\text{B}} + \mathcal{L}_{\text{INT}} + \mathcal{L}_{\text{L}} + \text{H. C.}, \quad (1.1.20)$$

onde  $\mathcal{L}_{\text{B}}$  é dada em (1.1.15) e,

$$\mathcal{L}_{\text{INT}} \equiv -(g/2) E_{\mu\nu} (-g)^{-1/2} W^{\mu\nu} + g \epsilon^{\mu\alpha\beta} E_{\mu} \partial_{\alpha} W_{\beta}, \quad (1.1.21a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{L}} \equiv -(g^2/4) E_{\mu\nu} (-g)^{-1/2} E^{\mu\nu} + (g^2/2) \theta \epsilon^{\mu\alpha\beta} E_{\mu} \partial_{\alpha} E_{\beta}, \quad (1.1.21b)$$

onde  $E_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} E_{\nu} - \partial_{\nu} E_{\mu}$ .

É interessante observar o surgimento do termo de Chern-Simons em (1.1.21b), o que poderia ser esperado como consequência da geração dinâmica de massa na densidade de lagrangiana efetiva a um loop [50]. Entretanto, deve-se lembrar que o aparecimento deste termo depende da representação das matrizes gama que se esteja utilizando [51].

O primeiro problema que se pode observar na densidade de lagrangiana acima é que o termo usual do tensor de tensões  $(-1/4)E_{\mu\nu}E^{\mu\nu}$ , não pode ser introduzido a menos que percamos a simetria definida em (1.1.19). Por outro lado pode-se ver facilmente que o férmion livre bosonizado é um campo vetorial que tem uma simetria local (a simetria de calibre usual), simetria esta que não estava presente na versão fermiônica. Esta característica leva à necessidade da fixação de calibre, e a se trabalhar com funções de correlação invariantes de calibre [48]. Apesar disto, embora esta fixação de calibre possa ser usada para obter as funções de correlação [48], ela não dispensa um estudo cuidadoso posterior de seus vínculos e da construção do espaço de Hilbert físico da teoria, a fim de se adquirir um entendimento mais profundo do conteúdo físico desta simetria ampliada do modelo bosonizado. A dificuldade em realizar tal análise vem da não-localidade da teoria bosonizada. Análogamente no nosso caso, a simetria desta presumida eletrodinâmica quântica bosonizada em três dimensões (EDQ<sub>3</sub>) seria mais geral que aquela do modelo fermiônico original. Em um certo sentido o termo do tensor de tensões  $-(1/4)E_{\mu\nu}E^{\mu\nu}$ , em analogia com o termo de fixação de calibre no caso do férmion livre [48], pode assumir este papel. Em analogia com o



caso com simetria global (férmion de Dirac livre) deveríamos trabalhar com as funções de correlação com a "simetria restrita", isto é, a invariância de calibre usual da EDQ<sub>3</sub>. Se o modelo acima proposto é realmente a desejada versão bosônica da EDQ<sub>3</sub>, é uma questão em aberto a ser estudada futuramente.

1.2) Resolução dos modelos anômalo e não anômalo em sua versão com derivadas de ordem superior via formalismo de integral funcional:

A densidade de lagrangiana do MSG é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} + e_{R+} P_{+} A^{\mu} + e_{L-} P_{-} A^{\mu}) \psi - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_{\mu} A^{\mu} + \bar{\psi} \zeta + \bar{\zeta} \psi, \quad (1.2.1)$$

onde os termos de fonte foram levados em conta e  $P_{\pm} \equiv (1/2)(1 \pm \gamma_5)$ . Lembrando que o campo de calibre em 1+1 dimensões pode sempre ser decomposto segundo

$$eA_{\mu} = \partial_{\mu} \eta + \epsilon^{\mu\sigma} \partial_{\sigma} \chi, \quad (1.2.2)$$

onde  $\eta(x)$  e  $\chi(x)$  são, respectivamente, as componentes longitudinal e transversal do campo de calibre.

Os campos de calibre e de férmions podem ser desacoplados através de um conjunto de transformações conveniente,

$$\psi = \exp \left[ -i\gamma_5 (g_1 \eta + g_2 \chi) + i(g_2 \eta + g_1 \chi) \right] \psi' \equiv U_5 \psi', \quad (1.2.3a)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' \exp \left[ -i\gamma_5 (g_1 \eta + g_2 \chi) - i(g_2 \eta + g_1 \chi) \right] \equiv \bar{\psi}' \bar{U}_5. \quad (1.2.3b)$$

Usando (1.2.3) e também a identidade  $\gamma_\mu \epsilon^{\mu\sigma} = -\gamma^\sigma \gamma_5$ , válida no espaço-tempo de Minkowski em duas dimensões, pode-se desacoplar a densidade de lagrangiana clássica, dando

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}' i\gamma_\mu \partial^\mu \psi' - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu + \bar{\psi}' \bar{U}_5 \zeta + \bar{\zeta} U_5 \psi'. \quad (1.2.4)$$

Além do mais, como consequência da não-invariância da medida funcional sob transformações quirais, aparece um termo adicional na densidade de lagrangiana, vindo do Jacobiano regularizado [43]. Levando este termo em consideração, obtém-se uma densidade de lagrangiana efetiva com derivadas de ordem superior dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & \bar{\psi}' (i\gamma_\mu \partial^\mu) \psi' + (1/2e^2) \chi \square^2 \chi + (1/2\pi e^2) (g_1^2 - M^2) \eta \square \eta + \\ & + (1/2\pi e^2) (g_2^2 + M^2) \chi \square \chi - (g_1 g_2 / \pi e^2) \eta \square \chi + (1/e) J_\mu (\partial^\mu \eta + \\ & + \epsilon^{\mu\sigma} \partial_\sigma \chi) + \bar{\psi}' \bar{U}_5 \zeta + \bar{\zeta} U_5 \psi'. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

onde  $M^2 \equiv a e^2$ ,  $a$  sendo o parâmetro arbitrário de regularização,  $g_1 \equiv (e_R - e_L)/2$ ,  $g_2 \equiv (e_R + e_L)/2$ . A partir da identidade (1.2.2) pode-se obter duas outras

$$\eta = e(1/\square) \partial \cdot A, \quad \chi = -e(1/\square) \bar{\partial} \cdot A, \quad (1.2.6)$$

onde definimos que  $\partial \cdot A \equiv \partial_\mu A^\mu$  e  $\bar{\partial} \cdot A \equiv \epsilon^{\rho\sigma} \partial_\sigma A_\rho$ . Usando estas identidades e uma adicional

$$\epsilon^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma} = g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}, \quad (1.2.7)$$

todas válidas em duas dimensões, obtemos para a densidade de lagrangiana efetiva a expressão [7]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}' (i\gamma_{\mu} \partial^{\mu}) \psi' + (1/2\pi) A_{\mu} \left[ (M^2 + g_2^2) g^{\mu\nu} - (g_1^2 + g_2^2) \partial^{\mu} \partial^{\nu} / \square + \right. \\ & \left. + g_1 g_2 (\partial^{\mu} \bar{\partial}^{\nu} + \bar{\partial}^{\mu} \partial^{\nu}) / \square \right] A_{\nu} + J_{\mu} A^{\mu} + \bar{\psi}' \bar{U}_5 \zeta + \bar{\zeta} U_5 \psi'. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Esta versão não-local pode mais uma vez ser reescrita em forma local através da introdução de um campo adicional. Podemos ainda descartar as fontes e integrar sobre os férmions, obtendo a densidade de lagrangiana bosonizada [7] do MSG

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & (1/2) \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - (1/\sqrt{\pi}) (g_1 g^{\mu\nu} + g_2 \epsilon^{\mu\nu}) \partial_{\nu} \phi A_{\mu} + (M^2/2\pi) A_{\mu} A^{\mu} + \\ & - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

ou em termos das componentes do campo  $A_{\mu}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & (1/2) \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + (1/2e^2) (\alpha\chi)^2 - (1/e\sqrt{\pi}) (g_1 \partial^{\mu} \eta - g_2 \partial^{\mu} \chi) \partial_{\mu} \phi + \\ & + (M^2/2\pi e^2) \left[ \partial_{\mu} \eta \partial^{\mu} \eta - \partial_{\mu} \chi \partial^{\mu} \chi \right]. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Entretanto não é difícil ver que estas duas formulações locais, dadas pelas equações (1.2.4) e (1.2.9), para o MSG são equivalentes. Isto pode ser visto através do uso de uma transformação no campo da bosonização  $\phi(x)$ ,

$$\phi(x) = \phi'(x) - (g_1/e\sqrt{\pi})\eta(x) + (g_2/e\sqrt{\pi})\chi(x). \quad (1.2.11)$$

Ademais a transformação (1.2.11) tem um Jacobiano trivial para a medida funcional. Assim, integrando sobre o campo  $\phi'(x)$  obtemos a mesma densidade de lagrangiana da expressão (1.2.4), a menos de uma redefinição trivial da normalização do funcional gerador. As duas versões locais, uma baseada em uma densidade de lagrangiana de ordem superior (1.2.4) e a outra de segunda ordem nas derivadas mas com a introdução de um campo adicional (1.2.9), são equivalentes, porque na transformação necessária à ligação entre estas expressões, os campos  $\eta(x)$  e  $\chi(x)$  permanecem inalterados em sua forma, e são exatamente eles que aparecem nas funções de correlação, como pode ser visto a partir do funcional gerador.

Tanto quanto saibamos, quase todos os trabalhos que discutem o MSQ [3,5-7,29-36] e o MSG [38-42,21], são baseados em sua versão bosonizada (1.2.9); a única exceção é o trabalho de Chanowitz [37], que trabalha na versão fermiônica através de métodos perturbativos. Nesta seção iremos estudar a versão com derivadas de ordem superior do MSG (1.2.4), em suas formulações anômala e não-anômala, em seguida tomaremos os limites apropriados para conferir nossos resultados com aqueles apresentados na literatura.

A formulação não-anômala da densidade de lagrangiana com derivadas de ordem superior (1.2.4), pode ser facilmente obtida pela substituição da componente longitudinal do campo do fóton por

uma combinação invariante de calibre. Para fazê-lo introduzimos um campo compensador  $\theta(x)$ , o campo de Wess-Zumino, tal que

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + (1/e)\partial_\mu\Lambda, \quad \eta \rightarrow \eta + \Lambda, \quad \theta \rightarrow \theta - \Lambda \quad (1.2.13)$$

de modo que substituindo  $\eta(x)$  por  $\eta(x) + \theta(x)$  na expressão (1.2.4), obtemos a formulação não-anômala para a densidade de lagrangiana com derivadas de ordem superior para o MSG,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}' (i\gamma_\mu \partial^\mu) \psi' + (1/2e^2)\chi \square^2\chi + (1/2\pi e^2)(g_1^2 - M^2)(\eta + \theta)\square(\eta + \theta) \\ & + (1/2\pi e^2)(g_2^2 + M^2)\chi\square\chi - (g_1g_2/\pi e^2)(\eta + \theta)\square\chi, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

onde omitimos os termos de fonte por conveniência futura.

O caso  $M^2 \neq g_1^2$  :

Primeiramente resolvemos o MSG anômalo através do uso de transformações apropriadas nos campos, objetivando obter uma densidade de lagrangiana desacoplada. Não é difícil verificar que ao se aplicar as transformações abaixo descritas na equação (1.2.4),

$$\eta = \eta' + \left[ \frac{g_1g_2}{g_1^2 - M^2} \right] \chi', \quad \chi = \chi', \quad (1.2.15)$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{MSG A}} = & \bar{\psi}' (i\gamma_{\mu} \partial^{\mu}) \psi' + (1/2e^2) \chi' \square (\square + m^2) \chi' + \\
& + (1/2\pi e^2) (g_1^2 - M^2) \eta' \square \eta' + (1/e) J^{\mu} \left[ \partial_{\mu} \left( \eta' + \left[ \frac{g_1 g_2}{g_1^2 - M^2} \right] \chi' \right) + \right. \\
& \left. + \epsilon_{\mu\rho} \partial^{\rho} \chi' \right] + \bar{\psi}' \bar{U}'_5 \zeta + \bar{\zeta} U'_5 \psi', \tag{1.2.16}
\end{aligned}$$

onde

$$m^2 = \frac{\left( (g_1 g_2)^2 - (g_1^2 - M^2) (g_2^2 + M^2) \right)}{\pi (M^2 - g_1^2)}, \tag{1.2.17}$$

é a massa gerada dinamicamente do modelo, e também foram feitas as transformações nos termos de fonte. Como os termos de fonte geram, através de derivações funcionais, as funções de correlação dos campos originais, tudo o que precisamos agora é realizar estas derivações com respeito a estas fontes e, usando os propagadores livres dos campos transformados, obter as funções de Green procuradas. Neste ponto pode-se ver porque o caso  $M^2 = g_1^2$  ( $a = 1$  no caso do MSQ) deve ser tratado separadamente, como foi observado na quantização de Dirac para o MSQ [29]; no presente método isto pode ser visto facilmente porque a transformação (1.2.15) torna-se singular neste caso, de modo que deve-se substituir esta condição na densidade de lagrangiana e, somente então, procurar as transformações desacopladoras. Como um exemplo de função de Green calculamos o propagador de fóton, que vem de

$$D_{\mu\nu}(x-Y) = - \delta^2 Z / \delta J_{\mu}(x) \delta J_{\nu}(Y) \Big|_{J=0}. \tag{1.2.18}$$

Desta forma obtemos o propagador na representação de momentum,

$$D_{\mu\nu}(k) = -(1/e^2) \left\{ k_\mu k_\nu D_{\eta'} + \left[ k_\mu k_\nu + \left[ \frac{g_1 g_2}{g_1^2 - M^2} \right]^2 \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu \right] D_{\chi'} \right\}, \quad (1.2.19)$$

onde  $D_{\eta'}$  e  $D_{\chi'}$  são os propagadores livres de  $\eta'$  e  $\chi'$  respectivamente. Substituindo estes propagadores obtemos a expressão final para o propagador do fóton

$$D_{\mu\nu}(k) = (i/(k^2 - m^2)) \left\{ -g_{\mu\nu} + \left[ \frac{1}{(M^2 - g_1^2)} \right] \left[ k_\mu k_\nu \left[ \pi + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (1/k^2) (g_1^2 + g_2^2) \right] + (g_1 g_2 / k^2) (k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu) \right] \right\}, \quad (1.2.20)$$

o qual está em acordo com aquele obtido na literatura para o MSG anômalo, através do formalismo de Dirac [39].

Iremos agora resolver o MSG não-anômalo, novamente fazendo transformações nos campos que os desacoplem. Para este fim, quebramos a simetria de calibre. Isto é feito através da introdução de um termo de fixação de calibre (TFC) na densidade de lagrangiana. Nesta seção usaremos os seguintes TFC's,

$$g_{GF}^{(1)} = -(1/2\alpha) (\partial \cdot A + \beta \bar{\partial} \cdot A)^2 = -(1/2\alpha e^2) (\square \eta - \beta \square \chi)^2, \quad (1.2.21a)$$

e

$$g_{GF}^{(11)} = -(1/2\alpha) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta, \quad (1.2.21b)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de calibre.

Usando  $\mathcal{L}_{GF}^{(1)}$ , pode-se desacoplar a densidade de lagrangiana (1.2.14), realizando as seguintes transformações nos campos:

$$\eta = \eta' + \beta\chi', \quad \chi = \chi', \quad \theta = \theta' + \left[ \frac{g_1 g_2}{g_1^2 - M^2} - \beta \right] \chi', \quad (1.2.22)$$

de modo que obtemos a densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{GSM} + \mathcal{L}_{GF}^{(1)} = & \bar{\psi}' (i\gamma_\mu \partial^\mu) \psi' + (1/2e^2) \chi' \square (\square + m^2) \chi' + \\ & + (1/2\pi e^2) (g_1^2 - M^2) \theta' \square \theta' - (1/2\alpha e^2) \eta' \square^2 \eta' + \\ & + (1/e) J^\mu \left[ \partial_\mu (\eta' + \beta\chi') + \epsilon_{\mu\rho} \partial^\rho \chi' \right] + \bar{\psi}' \bar{U}'_5 \zeta + \bar{\zeta} U'_5 \psi'. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Derivando funcionalmente com respeito ao termo de fonte  $J_\mu$ , somos levados à seguinte expressão para o propagador de fóton,

$$D_{\mu\nu}(k) = -(1/e^2) \left[ k_\mu k_\nu D_{\eta'} + (\beta k_\mu + \bar{k}_\mu) (\beta k_\nu + \bar{k}_\nu) D_{\chi'} \right], \quad (1.2.24)$$

onde  $\bar{k}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\rho} k^\rho$ . Usando agora os propagadores livres para os campos  $\eta'$  e  $\chi'$ , obtemos que

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k) = & -(i/(k^2 - m^2)) \left[ g_{\mu\nu} - \left( 1 + \beta^2 - \alpha + \alpha m^2/k^2 \right) k_\mu k_\nu / k^2 + \right. \\ & \left. - \beta (k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu) / k^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$



Esta última expressão, tanto quanto saibamos, não foi obtida anteriormente para o MSG não-anômalo. Podemos porém testar a sua validade através dos seus casos particulares, especialmente aquele correspondente ao MSQ. Para  $\beta = 0$ ,  $M^2 = a e^2$ ,  $g_1 = -g_2 = e$ , ele corresponde ao caso (ii) no trabalho de Harada e Tsutsui [35], e para  $\beta = (a - 1)^{-1}$  ao seu caso (iii).

Agora, se usarmos o segundo TFC ( $g_{GF}^{(ii)}$ ), as transformações desacopladoras serão

$$\eta = \eta' + \left[ \frac{g_1 g_2}{(g_1^2 - M^2)} \right] \chi' - \theta', \quad \chi = \chi', \quad \theta = \theta', \quad (1.2.26)$$

que também são válidas sómente para o caso em que  $M^2 \neq g_1^2$  como pode ser visto fácilmente. A densidade de lagrangiana neste caso fica sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{GSM} + \mathcal{L}_{GF}^{(ii)} = & (1/2e^2) \chi' \square (\square + m^2) \chi' + (1/2\pi e^2) (g_1^2 - M^2) \eta' \square \eta' + \\ & + (1/2\alpha) \theta' \square \theta' + (1/e) J^\mu \left[ \partial_\mu \left( \eta' + \left[ \frac{g_1 g_2}{(g_1^2 - M^2)} \right] \chi' - \theta' \right) + \epsilon_{\mu\rho} \partial^\rho \chi' \right] + \\ & + \bar{\psi}' \bar{U}'_5 \zeta + \bar{\zeta} U'_5 \psi', \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

o que nos leva ao propagador

$$D_{\mu\nu}(k) = (i/(k^2 - m^2)) \left\{ -g_{\mu\nu} + \left[ \frac{1}{(M^2 - g_1^2)} \right] \left[ k_\mu k_\nu \left[ (1/e^2) (\pi e^2 + \right. \right. \right.$$

$$- \alpha(M^2 - g_1^2)) + (1/k^2) \left[ (m^2 \alpha / e^2) (M^2 - g_1^2) - (g_1^2 + g_2^2) \right] + \\ (g_1 g_2 / k^2) (k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu) \Bigg\}. \quad (1.2.28)$$

Este caso também pode ser comparado com os resultados do MSQ, desde que para isso se façam as devidas particularizações. Para o caso em que  $\alpha = 0$ , reobtem-se o resultado do caso anômalo, o que está de acordo com os resultados para o MSQ [30,35]. Além do mais é possível eliminar o termo responsável pelo mau comportamento do propagador quando a constante de acoplamento tende a zero (devido ao termo com uma dependência  $1/e^2$ ).

O caso  $M^2 = g_1^2$ :

Vamos agora tratar do caso onde  $M^2 = g_1^2$ . Para isto desenvolveremos um caminho alternativo para calcular as funções de correlação, sem a necessidade de descobrir as transformações que desacoplam os campos na densidade de lagrangiana. Neste método reescrevemos a parte bosônica da densidade de lagrangiana do modelo em consideração em uma forma matricial,

$$\mathcal{L} = (1/2) \rho^T \mathbb{M} \rho, \quad (1.2.29)$$

onde, por exemplo no caso não-anômalo,  $\rho = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix}$ , e  $\mathbb{M}$  diferirá de um calibre para outro. Podemos então computar as funções de correlação através da inversão da matriz  $\mathbb{M}$ , obtendo assim que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \chi \chi \rangle & \langle \chi \eta \rangle & \langle \chi \theta \rangle \\ \langle \eta \chi \rangle & \langle \eta \eta \rangle & \langle \eta \theta \rangle \\ \langle \theta \chi \rangle & \langle \theta \eta \rangle & \langle \theta \theta \rangle \end{pmatrix}, \quad (1.2.30)$$

onde os elementos  $\langle \chi \chi \rangle$ ,  $\langle \chi \eta \rangle$ , etc. , são as funções de correlação de dois pontos de seus respectivos campos, com as quais podemos escrever as demais, por exemplo, aquela para o propagador do fóton:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = -(1/e^2) \left[ k_\mu k_\nu \langle \eta \eta \rangle + k_\mu \bar{k}_\nu \langle \eta \chi \rangle + \bar{k}_\mu k_\nu \langle \chi \eta \rangle + \bar{k}_\mu \bar{k}_\nu \langle \chi \chi \rangle \right]. \quad (1.2.31)$$

É importante notar que, ao construirmos a matriz  $M$ , devemos simetrizá-la com respeito à diagonal principal, como consequência do requerimento de hermiticidade.

Mais uma vez iremos começar resolvendo a versão anômala, neste caso a matriz  $M$  é escrita como segue,

$$M = (\square/e^2) \begin{pmatrix} \square + (g_1^2 + g_2^2)/\pi & -g_1 g_2/\pi \\ -g_1 g_2/\pi & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.32)$$

Invertendo-a, coletando os termos  $\langle \eta \eta \rangle$ ,  $\langle \chi \eta \rangle$ , etc., e substituindo-os em (1.2.31), obtemos

$$D_{\mu\nu}(k) = (\pi/g_1 g_2 k^2) \left[ k_\mu k_\nu \left( \pi k^2 / (g_1 g_2) - (g_1^2 + g_2^2) / (g_1 g_2) \right) + \right. \\ \left. - \left( k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu \right) \right], \quad (1.2.33)$$

que, por sua vez, está de acordo com o resultado dos cálculos no MSG que aparecem na referência [39], aonde foi utilizado o método de Dirac . Em particular vê-se que neste caso não há geração dinâmica de massa.

Apliquemos agora este método ao caso do modelo não-anômalo, impondo os TFC  $\xi_{GF}^{(1)}$  e  $\xi_{GF}^{(11)}$  respectivamente. No primeiro caso M é dado por

$$M = \frac{\square}{e^2} \begin{pmatrix} (1-\beta^2/\alpha)\square + (g_1^2 + g_2^2)/\pi & (\beta/\alpha)\square - g_1g_2/\pi & -g_1g_2/\pi \\ (\beta/\alpha)\square - g_1g_2/\pi & -(1/\alpha)\square & 0 \\ -g_1g_2/\pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.34)$$

Substituindo as funções de correlação  $\langle \eta \eta \rangle$ ,  $\langle \eta \chi \rangle$ , etc. na expressão (1.2.31) e usando a relação  $\bar{k}_\mu \bar{k}_\nu = -g_{\mu\nu}k^2 + k_\mu k_\nu$ , encontramos

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = \frac{\alpha k_\mu k_\nu}{k^4} . \quad (1.2.35)$$

Surpreendentemente, isto nos mostra que se poderia anular esta função de correlação, desde que para isto utilizássemos o calibre de Landau ( $\alpha = 0$ ). Em um certo sentido, isto reforça a idéia da utilização de funções de correlação invariantes de calibre, como veremos mais adiante.

No segundo caso a matriz M é dada por

$$M = (g/e^2) \begin{pmatrix} g_1 + g_2 & -(g_1 g_2 / 2\pi) & -(g_1 g_2 / 2\pi) \\ -(g_1 g_2 / 2\pi) & 0 & 0 \\ -(g_1 g_2 / 2\pi) & 0 & (e^2 / 2\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.2.36)$$

e o propagador de fóton fica sendo

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = \pi (k_\mu k_\nu / k^2) \left[ k^2 - (g_1^2 + g_2^2) + \alpha (g_1 g_2 / \sqrt{\pi} e^2) \right] + \\ - (\pi / g_1 g_2) \left[ (k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu) / k^2 \right]. \quad (1.2.37)$$

Mais uma vez aparece o mau comportamento na constante de acoplamento que pode ser eliminado quando  $\alpha = 0$ . Desta, vez porém, o propagador não pode ser eliminado através de uma escolha conveniente do parâmetro de calibre, como acontecia no caso anterior.

A partir dos resultados acima obtidos, pode-se observar que a função de correlação dependente do calibre  $\langle A_\mu A_\nu \rangle$  muda drasticamente de calibre para calibre. Discutiremos agora o caso onde o termo de fonte inclui o campo de WZ [32]. No caso bosônico este termo torna-se,

$$J_\mu \left( A^\mu + (1/e) \partial^\mu \theta \right) \equiv J_\mu A_I^\mu, \quad (1.2.38)$$

onde  $A_\mu^I$  é o campo de calibre. Desta vez pode-se ver que os propagadores, nos calibres acima, ou em quaisquer outros, terão a mesma forma que no modelo anômalo, como foi observado através de

cálculos feitos por outros métodos no caso do MSQ [34]. Como exemplo computamos o propagador do fóton invariante de calibre no caso  $M^2 = g_1^2$ , obtendo assim que

$$D_{\mu\nu}^I(k) = \langle A_\mu^I A_\nu^I \rangle = \langle A_\mu A_\nu \rangle - (1/e^2) k_\mu k_\nu \left( \langle \eta \theta \rangle + \langle \theta \eta \rangle + \langle \theta \theta \rangle \right) + \\ - (1/e^2) \left( k_\mu \bar{k}_\nu \langle \theta \chi \rangle + \bar{k}_\mu k_\nu \langle \chi \theta \rangle \right). \quad (1.2.39)$$

Então, após cálculos diretos obtemos o mesmo propagador que aparece no caso anômalo, apresentado em (1.2.33). Não é difícil convencer-se que, após um pouco de experimentação, isto ocorrerá com todas as funções de correlação invariantes de calibre.

### 1.3) Sobre um Wess-Zumino generalizado:

Nesta seção pretendemos averiguar a possibilidade de introduzir um termo de WZ generalizado [23]. Para isto procederemos de maneira análoga a Harada e Tsutsui [6]. Em seu trabalho eles mostraram que, a partir de um tratamento cuidadoso da medida funcional, o termo de WZ aparece de maneira natural. Seu ponto de partida foi a integral somente sobre um representante de cada classe das configurações do campo de calibre para a amplitude de persistência no vácuo. Isto foi feito usando o truque de Faddeev-Popov e "desfixando" o calibre, indo para uma integral sobre todas as configurações do campo de calibre (equivalentes ou não). Vejamos agora como fazê-lo no nosso caso. Definimos  $\Delta_f[A]$  por

$$\Delta_f[A] \int dg \delta(f[A^g]) = 1, \quad (1.3.1)$$

onde  $g$  é uma medida invariante sobre o grupo de simetria de calibre  $G$ . Então, inserindo (1.3.1) na amplitude de persistência no vácuo encontramos,

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} dA_\mu \Delta_f[A] dg \delta(f[A^g]) \exp[i I(\psi, \bar{\psi}, A)]. \quad (1.3.2)$$

Realizando agora uma transformação no campo de integração  $A_\mu \rightarrow A_\mu^{g^{-1}}$ , usando a invariância da medida  $dA_\mu$  e de  $\Delta_f[A]$ , vem:

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu dg \delta(f[A^g]) \exp[i I(\psi, \bar{\psi}, A^{g^{-1}})], \quad (1.3.3)$$

onde está definido que,  $\mathcal{D}A_\mu \equiv dA_\mu \Delta_f[A]$ . Agora, transformando-se os campos fermiônicos segundo

$$\psi_L \rightarrow \psi_L^g = g^{-1} \psi_L, \quad \bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L^g = \bar{\psi}_L g, \quad (1.3.4)$$

e lembrando que a medida fermiônica não é invariante (para modelos anômalos) sob esta transformação, obtemos finalmente que

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu dg \delta(f[A^g]) \exp[i (I(\psi, \bar{\psi}, A) + \alpha(A, g^{-1}))], \quad (1.3.5)$$

onde usamos que  $I(\psi^g, \bar{\psi}^g, A^{g^{-1}}) = I(\psi, \bar{\psi}, A)$ , e  $\alpha(A, g^{-1})$  é o termo efetivo resultante da regularização da medida fermiônica

funcional. Esta expressão, ao contrário da (1.3.2), é totalmente invariante de calibre. Desta forma, nós "desfixamos" o calibre definido por  $f[A] = 0$ . Como um exemplo trataremos o caso do modelo de Schwinger com um WZ generalizado do tipo de Lorentz. Isto será feito a fim de ilustrar as diferenças entre o termo de WZ convencional e o generalizado, em um modelo bem estabelecido como é o caso do Schwinger vetorial.

Começemos por escrever a densidade de lagrangiana para o modelo de Schwinger vetorial (MSV),

$$\mathcal{L}_{\text{vSM}} = (1/2) \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + e \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi A_{\nu} + (a e^2/2) A_{\mu} A^{\mu} - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.3.6)$$

onde substituímos  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = -\sqrt{\pi} e$  e  $M^2 = \pi a e^2$  na equação (1.1.9). Este modelo é invariante sob as transformações  $\delta\phi = 0$  e  $\delta A_{\mu} = -(1/e) \partial_{\mu} \lambda$ , desde que o parâmetro arbitrário seja tal que  $a = 0$ . Por outro lado este parâmetro pode ser mantido arbitrário se introduzirmos um termo de WZ convencional [6],

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = (a/2) \partial_{\mu} \theta \partial^{\mu} \theta + a e \partial_{\mu} \theta A^{\mu}. \quad (1.3.7)$$

Neste caso a massa do modelo é computada como sendo  $m^2 = (a + 1)e^2/\pi$ , e isto é feito sem perda da invarância de calibre. Além do mais a massa usual  $e^2/\pi$  é recuperada quando  $a$  é escolhido sendo igual a zero. Neste caso, o termo de WZ se anula, sobrevivendo um infinito que pode ser absorvido na normalização do funcional gerador.



Vamos agora introduzir um termo de WZ generalizado do tipo de Lorentz e, em seguida, estudaremos suas conseqüências,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GWZ}} = & -(1/2\alpha) (\partial_\mu A^\mu)^2 + (a/2) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + a e \partial_\mu \theta A^\mu - (1/2\alpha e^2) (\square\theta)^2 + \\ & - (1/\alpha e) \square\theta \partial_\mu A^\mu, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

sendo  $\alpha$  o parâmetro do termo de fixação de calibre, antes de sua "desfixação" via o termo de WZ generalizado. Impondo agora um termo de fixação de calibre do tipo (ii) (com um parâmetro de calibre  $\gamma$ ), obtém-se:

$$\mathbb{M} = (\square/e^2) \begin{pmatrix} \square + e^2/\pi & 0 & 0 \\ 0 & -\square/\alpha - ae^2/\pi & -\square/\alpha - ae^2/\pi \\ 0 & -\square/\alpha - ae^2/\pi & -\square/\alpha - (a/\pi - \gamma^{-1})e^2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.9)$$

invertendo a matriz acima e computando o propagador de fóton invariante de calibre, encontramos

$$D_{\mu\nu}^I(k) = \frac{i}{(k^2 - m_I^2)} \left\{ -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left( 1 - \alpha \frac{(k^2 - m_I^2)}{(k^2 - m_D^2)} \right) \right\}, \quad (1.3.10)$$

onde  $m_I^2 = e^2/\pi$  e  $m_D^2 = \alpha a e^2/\pi$ . Como pode ser visto do resultado acima, a característica mais notável do termo de WZ generalizado, é

aquela do aparecimento de excitações massivas, dependentes do calibre, como  $m_D$ . Além disso vemos que, neste caso, a arbitrariedade no parâmetro de regularização aparece somente na massa dependente de calibre, de forma que ela desaparece quando esta massa é eliminada por uma escolha conveniente de calibre. Isto é feito ao trabalharmos no calibre de Landau ( $\alpha = 0$ ), levando ao propagador correto neste calibre, mas agora sem qualquer ambiguidade na massa ( $m_I^2 = e^2/\pi$ ,  $m_D^2 = 0$ ). Ademais, o caso  $a = 0$  (caso em que o WZ usual desaparece) nos leva ao propagador usual em um calibre do tipo de Lorentz,

$$D_{\mu\nu}^I(k) \Big|_{a=0} = \frac{i}{(k^2 - e^2/\pi)} \left\{ -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left( 1 - \frac{\alpha(k^2 - e^2/\pi)}{k^2} \right) \right\}. \quad (1.3.11)$$

Isto nos mostra que o termo de WZ generalizado não muda o propagador de fóton, quando se usa sua versão invariante de calibre  $D_{\mu\nu}^I$ , como se deveria esperar de um termo de WZ bem comportado.

Um estudo semelhante pode ser feito no caso do modelo de Schwinger axial, encontrando-se resultados análogos. Também neste modelo o termo de WZ generalizado, ao contrário do usual, nos leva a concluir que a massa não é arbitrária mas sim precisamente igual àquela do MSV, quando a massa dependente do calibre é eliminada.

Vamos agora tratar o caso do MSQ. Como é bem sabido, este modelo é anômalo e, quando a este é acrescentado um termo de WZ usual, adquire-se sua contrapartida invariante de calibre. Entretanto este modelo, em contraposição ao MSV, não tem sua massa

fixada através da imposição da invariância de calibre em ambos os casos. No caso anômalo, não há qualquer escolha disponível de  $a$  tal que a anomalia se cancele, e no não-anômalo a invariância de calibre é mantida não importando qual seja o valor de  $a$ .

O caso do MSQ com um termo de WZ generalizado do tipo de Lorentz, quando escrito na forma (1.2.29), pode ser obtido do MSG com as cargas  $g_1 = e$  e  $g_2 = -e$ , dando a matriz

$$M = (\alpha/e^2) \begin{pmatrix} \alpha + 2e^2/\pi & e^2/\pi & e^2/\pi \\ e^2/\pi & -\alpha/\alpha + (e^2 - M^2)/\pi & -\alpha/\alpha + (e^2 - M^2)/\pi \\ e^2/\pi & -\alpha/\alpha + (e^2 - M^2)/\pi & -\alpha/\alpha + ((1 + \gamma^{-1})e^2 - M^2)/\pi \end{pmatrix}, \quad (1.3.12)$$

cuja inversão nos dá os seguintes elementos na representação de momentum,

$$\langle \chi \chi \rangle = \frac{e^2 (\pi k^2 - \alpha (M^2 - e^2))}{\pi k^2 (k^2 - m_1^2) (k^2 - m_0^2)}, \quad (1.3.13a)$$

$$\langle \chi \eta \rangle = \langle \eta \chi \rangle = \frac{\alpha e^4}{\pi k^2 (k^2 - m_1^2) (k^2 - m_0^2)}, \quad \langle \chi \theta \rangle = \langle \theta \chi \rangle = 0, \quad (1.3.13b)$$

$$\langle \eta \eta \rangle = - \frac{1}{\pi k^2 (k^2 - m_1^2) (k^2 - m_0^2)} \left\{ \pi \gamma k^4 + \left[ \alpha (\pi e^2 - \gamma (M^2 - e^2)) - 2\gamma e^2 \right] + \alpha e^2 (\gamma (2M^2 - e^2) - 2e^2) \right\}, \quad (1.3.13c)$$

$$\langle \eta \theta \rangle = \langle \theta \eta \rangle = \gamma/k^2, \quad \langle \theta \theta \rangle = -\gamma/k^2, \quad (1.3.13d)$$

onde definimos que,

$$m_I^2 \equiv (1/2\pi) \left[ \left( \alpha^2 (M^2 - e^2)^2 - 4e^2 (\alpha M^2 - e^2) \right)^{1/2} + \alpha (M^2 - e^2) + 2e^2 \right], \quad (1.3.14a)$$

$$m_D^2 \equiv -(1/2\pi) \left[ \left( \alpha^2 (M^2 - e^2)^2 - 4e^2 (\alpha M^2 - e^2) \right)^{1/2} - \alpha (M^2 - e^2) - 2e^2 \right]. \quad (1.3.14b)$$

Partindo dos elementos acima pode-se calcular, por exemplo, a função de Green de dois pontos dependente de calibre (1.2.31),

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{(k^2 - m_I^2)(k^2 - m_D^2)} \left\{ -g_{\mu\nu} \left( k^2 - \alpha(M^2 - e^2)/\pi \right) + \right. \\ \left. + \alpha e^2 (k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu) / \pi k^2 - \frac{k_\mu k_\nu}{\pi e^2 k^2} \left[ \pi \gamma k^4 + \left( (\alpha - 1) \pi e^2 - \gamma (\alpha(M^2 - e^2) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2e^2) \right) k^2 + \alpha e^2 \left( M^2 - 3e^2 + \gamma(2M^2 - e^2)/\pi \right) \right] \right\}. \quad (1.3.15)$$

Alternativamente pode-se calcular a função de correlação invariante de calibre (1.2.39) obtendo,

$$D_{\mu\nu}^I(k) = -\frac{1}{(k^2 - m_I^2)(k^2 - m_D^2)} \left\{ -g_{\mu\nu} \left( k^2 - \alpha(M^2 - e^2)/\pi \right) + \right. \\ \left. + \alpha e^2 (k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu) / \pi k^2 - \frac{k_\mu k_\nu}{\pi k^2} \left( (\alpha - 1) \pi k^2 + \alpha(M^2 - 3e^2) \right) \right\}. \quad (1.3.16)$$

Uma vez mais o calibre de Landau é aquele no qual uma das massas se anula, para  $\alpha = 0$ ,  $m_D^2 = 0$  e  $m_I^2 = 2e^2/\pi$ . Neste calibre

conveniente, o propagador de fóton  $D_{\mu\nu}^I(k)$  é igual aquele do MSV mas com uma massa diferente para o bóson de calibre.

Podemos ver agora que o termo de WZ generalizado age de tal forma que a excitação massiva no MSQ não é mais arbitrária. Como se pode verificar a partir de (1.2.17), o modelo anômalo (ou mesmo o não-anômalo com o termo de WZ usual) tem uma massa arbitrária  $m^2 = M^4/\pi(M^2 - e^2)$ . Todavia a introdução do termo de WZ generalizado leva à fixação do valor da massa para o bóson de calibre ( $m^2 = 2e^2/\pi$ ), similarmente ao que ocorre nos casos do MSV e do MSA como vimos mais acima nesta seção. De fato é fácil ver que este valor para a massa não pode ser obtido através de um valor real para o parâmetro arbitrário  $M^2$ .

Uma outra observação importante é a de que o propagador invariante de calibre  $D_{\mu\nu}^I$ , diferentemente do caso com o WZ usual [34], mantém alguma arbitrariedade no parâmetro  $\alpha$ , embora o parâmetro  $\gamma$  seja eliminado. Esta característica abre a possibilidade de, usando um termo de WZ generalizado do tipo  $\theta$  (ii), fixar um calibre onde o mau comportamento do MSQ para a constante de acoplamento indo a zero (devido ao termo  $1/e^2$  no propagador) [3] possa ser eliminado. Além do mais estes modelos são caracterizados pelo fato que o parâmetro  $\alpha$  não pode ser fixado arbitrariamente, ao menos quando se deseja manter a unitariedade.

Analogamente ao que é feito no caso do termo de WZ usual, devemos estudá-lo em uma situação na qual  $M^2 = g_1^2$ , ou  $M^2 = e^2$  porque estamos agora tratando do caso particular do MSQ. A partir da discussão acima poderia se esperar que este caso não mais nos levasse a um conteúdo físico diferente para o modelo (para o WZ

usual, este caso não apresenta uma excitação massiva). Isto porque agora vemos que a massa física do modelo, que aparece ao se trabalhar no calibre de Landau, não depende do parâmetro de regularização.

Vejam os então se de fato isto ocorre, para tal tomemos a matriz (1.3.12) e usemos a condição que  $M^2 = e^2$ . Em seguida a invertemos, obtendo as funções de correlação de dois pontos  $\langle \chi \chi \rangle$ ,  $\langle \chi \eta \rangle$ , etc. . É fácil ver que estas expressões batem com as que aparecem em (1.3.13), quando fazemos a substituição de  $M^2$  por  $e^2$  nestas últimas. Como conseqüência as massas são escritas agora como,

$$m_1^2 = \frac{e^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \alpha} + 1 \right], \quad (1.3.17a)$$

$$m_D^2 = - \frac{e^2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \alpha} - 1 \right], \quad (1.3.17b)$$

das quais vemos que quando  $\alpha = 0$  teremos que  $m_D^2 = 0$  e  $m_1^2 = 2 e^2/\pi$ , como foi suposto acima. Além do mais, neste caso simples, torna-se mais claro que, a fim de manter a teoria unitária, deve-se restringir a região de validade para o parâmetro  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

#### 1.4) Comentários finais:

Neste capítulo discutimos a versão com derivadas de ordem superior para o MSG em suas formulações anômala e não-anômala. Para isto foi utilizado o formalismo de integral funcional em sua quantização, e neste contexto foram aplicados dois métodos. Um

deles se baseia na busca de transformações que desacoplem os campos na densidade de lagrangiana e em seguida fazer as derivadas em relação às fontes, a fim de obter as funções de correlação. Num outro método foram calculadas as funções de correlação de dois pontos elementares e em seguida utilizá-las no cômputo das funções de correlação completas do campo de calibre. Isto foi feito tanto no caso onde  $M^2 \neq g_1^2$  quanto no caso onde  $M^2 = g_1^2$  ( $a = 1$  para o MSQ). As funções de Green correspondentes foram, quando possível, comparadas com aquelas da literatura. Além disto verificamos a igualdade das funções de correlação invariantes de calibre com as do modelo anômalo, como afirmado por Girotti e Rothe no caso do MSQ [34].

Além do mais propusemos um termo de WZ generalizado de maneira análoga àquela em que Harada e Tsutsui o fizeram para o WZ usual [6], discutimos então as conseqüências da sua introdução nos casos particulares do MSV, MSA, e MSQ. Observamos que este termo tem como característica fundamental o surgimento de excitações massivas adicionais, e que estas dependem do calibre através de seus parâmetros. Uma característica interessante é a de que algumas destas massas dependentes do calibre desaparecem quando ele é escolhido convenientemente, e que a massa resultante é precisamente aquela do modelo físico, sem qualquer dependência no parâmetro de regularização. Isto é bem exemplificado nos modelos de Schwinger vetorial e axial.

Como conseqüência da aplicação do termo de WZ generalizado ao caso do MSQ, vimos que massa do bosón de calibre perde a ambigüidade, o que é um resultado bastante surpreendente. Caso isto

fosse verdade, teríamos um resultado muito interessante porque a ambigüidade de uma quantidade física como é o caso da massa é, via de regra, uma coisa bem desagradável. Entretanto a confirmação ou não de tal característica, necessita de um estudo mais aprofundado da estrutura de vínculos da teoria com o termo de WZ generalizado. Isto deveria ser feito antes de se tirar alguma conclusão definitiva a respeito do conteúdo físico deste novo WZ, para sabermos se, como ocorre com o WZ usual [7,31], ele não altera este conteúdo ou se ele leva a um novo modelo, no sentido em que ele tenha um espaço de Hilbert e espectro de partículas completamente diferente do caso com o WZ convencional. A dificuldade na realização deste estudo advém do fato de que estamos tratando de teorias que, como consequência da introdução do WZ generalizado, possuem intrinsicamente termos com derivadas de ordem superior na densidade de lagrangiana. Deveríamos então buscar realizar um estudo conforme tem aparecido na literatura [52]. Este estudo será feito oportunamente.



## CAPÍTULO II

### BÓSONS QUIRAIS E INVARIÂNCIA DE LORENTZ

Neste capítulo apresentaremos um método alternativo para se verificar a covariância de Lorentz em teorias aparentemente não-covariantes. Sua aplicação mostra-se bastante simples e sistemática.

Nos últimos anos tem aparecido uma grande quantidade de modelos nos quais a covariância de Lorentz não é explicitamente manifesta. Esta é a motivação básica para a procura de um método com as características daquele que iremos estudar na próxima seção. A tendência ao estudo de tal sorte de modelos, começou com o trabalho de Floreanini e Jackiw sobre o bóson quiral [12], e tomou força devido à necessidade de se buscar a calibração deste mesmo bóson quiral por um lado, e por outro, pela procura de um modelo de férmion quiral calibrado bosonizado, sem graus de liberdade quirais excessivos. A dificuldade para se atingir este objetivo, residia na não covariância explícita do modelo de Floreanini-Jackiw, o que gerava uma certa ambigüidade na calibração deste modelo [18]. Recentemente entretanto, Harada obteve uma maneira de realizar esta calibração de maneira supostamente unívoca [19]. Como veremos mais abaixo, é possível mostrar que, utilizando o método desenvolvido na próxima seção, há ainda uma segunda possibilidade de se calibrar o bóson quiral de Floreanini-Jackiw [24], e ao mesmo tempo manter a covariância de Lorentz.

## 2.1) Um novo método para testar a covariância de Lorentz:

Antes de mais nada, vejamos um modo simples de testar a covariância de Lorentz de densidades de lagrangiana onde ela não seja manifesta. Recentemente usamos este método com o objetivo de introduzir uma segunda versão covariante de calibre do bóson quiral de Floreanini-Jackiw (FJ) [12,24] como veremos na próxima seção.

Vamos exemplificar o método aplicando-o ao caso do bóson quiral de FJ [12], caracterizado em sua versão local pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{FJ}} = \dot{\phi} \phi' - \phi'^2, \quad (2.1.1)$$

onde  $\dot{\phi}$  e  $\phi'$  denotam  $\partial_0 \phi$  e  $\partial_1 \phi$  respectivamente. Fazendo uma transformação de Lorentz

$$\begin{pmatrix} \phi' \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi' \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.1.2)$$

onde  $\varphi$  está associado à velocidade relativa entre os dois referenciais. Substituindo (2.1.2) em (2.1.1) obtemos,

$$\mathcal{L}_{\varphi} = a(\varphi) \dot{\phi}^2 - b(\varphi) \phi'^2 + c(\varphi) \dot{\phi} \phi', \quad (2.1.3)$$

com

$$a(\varphi) \equiv \sinh(\varphi) (\cosh(\varphi) - \sinh(\varphi)), \quad (2.1.4a)$$

$$b(\varphi) \equiv \cosh(\varphi) (\cosh(\varphi) - \sinh(\varphi)), \quad (2.1.4b)$$

$$c(\varphi) \equiv (\cosh(\varphi) - \sinh(\varphi))^2. \quad (2.1.4c)$$

Como esta densidade de lagrangiana "rodada" não é vinculada, podemos construir facilmente sua correspondente densidade de lagrangiana de primeira ordem [53],

$$\mathcal{L}_{\varphi 1} = \pi_{\dot{\phi}} \dot{\phi} - b(\varphi) \phi'^2 - (\pi_{\dot{\phi}} - c(\varphi) \phi')^2 / 4a(\varphi). \quad (2.1.5)$$

Uma vez que, como é requerido pelo princípio de equivalência, os dois sistemas devem ser indistinguíveis, impomos que a nova densidade de lagrangiana obedeça ao mesmo vínculo ( $\pi_{\dot{\phi}} = \phi'$ ) que a densidade de lagrangiana (2.1.1), de modo que (2.1.5) se torna

$$\mathcal{L}_{\varphi 1} \Big|_{\pi_{\dot{\phi}} = \phi'} = \phi' \dot{\phi} - \left( 4a(\varphi)b(\varphi) - (1 - c(\varphi))^2 \right) \phi'^2 / 4a(\varphi). \quad (2.1.6)$$

Substituindo as variáveis  $a(\varphi)$ ,  $b(\varphi)$  e  $c(\varphi)$ , e usando relações trigonométricas hiperbólicas em (2.1.6), obtemos que

$$\mathcal{L}_{\varphi 1} \Big|_{\pi_{\dot{\phi}} = \phi'} = \mathcal{L}_{FJ}. \quad (2.1.7)$$

Assim, esta densidade de lagrangiana é covariante de Lorentz porque, sob a imposição do vínculo quiral, ela se mantém inalterada. Este método pode ser facilmente aplicado aos casos dos modelos de FJ calibrados [19,24] como veremos mais abaixo.

Entretanto poderíamos ter estudado uma densidade de lagrangiana generalizada, tal que

$$\mathcal{L}_\varphi = g_1 \dot{\phi} \phi' + g_2 \phi'^2, \quad (2.1.8)$$

que leva à equação de movimento

$$\partial_1 (g_1 \partial_0 + g_2 \partial_1) \phi = 0 \quad (2.1.9)$$

que se reduz a

$$(g_1 \partial_0 + g_2 \partial_1) \phi = 0, \quad (2.1.10)$$

após o uso de condições de contorno apropriadas. Olhando-se a equação (2.1.10) pode-se ver que esta tem o bóson quirial de FJ como caso particular. Entretanto, permanece ainda uma questão importante: este modelo é covariante de Lorentz para valores arbitrários de  $g_1$  e  $g_2$ ? Antes de responder a esta pergunta observamos que, a menos de uma renormalização finita do campo, a expressão (2.1.8) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_\varphi = \alpha \dot{\phi} \phi' + \phi'^2, \quad (2.1.11)$$

com  $\alpha \equiv g_1/g_2$ . Este modelo pode ser obtido a partir de um bóson livre explicitamente covariante

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (2.1.12)$$

desde que para isto escrevamos sua densidade de lagrangiana

covariante de primeira ordem [53], e em seguida fazemos a redução do espaço de fase definida pelo vínculo  $\pi_\phi = \alpha \phi'$ .

Podemos então aplicar agora o método delineado mais acima, a fim de verificar a covariância de Lorentz da densidade de lagrangiana (2.1.11) [25]. Realizando uma rotação de Lorentz, a densidade de lagrangiana se torna não-vinculada, de modo que podemos obter facilmente a hamiltoniana correspondente

$$\mathcal{H}^k = \left[ \left( \alpha(k^2 + 1) + k^2 - 1 \right) (k^2 - 1) \right]^{-1} \left[ k^2 \pi_\phi^2 - \pi_\phi \phi' \left( \alpha(k^4 + 1) + k^4 - 1 \right) + \alpha k^2 \phi'^2 \right], \quad (2.1.13)$$

onde  $\varphi \equiv \log(k)$ , com  $\varphi$  novamente estando relacionado à velocidade relativa entre os referenciais na equação (2.1.2). Partindo da densidade de hamiltoniana acima pode-se escrever a densidade de lagrangiana de primeira ordem no referencial "rodado". Então, mantendo o vínculo do referencial original no novo referencial, como consequência do princípio de equivalência, obtemos a seguinte expressão para a diferença entre as densidades de lagrangiana,

$$\mathcal{L}_\varphi - \mathcal{L}^k \Big|_{\pi=\alpha\phi'} = \left( \alpha(k^2 + 1) + k^2 - 1 \right)^{-1} \left[ (\phi')^2 (1 - k^2) (\alpha^2 - 1) \right] \quad (2.1.14)$$

que se anula somente (implicando na covariância de Lorentz) para  $\alpha = \pm 1$ , que vêm a ser precisamente as duas quiralidades do bóson quiral de FJ.

A partir de agora estamos aptos a aplicar este método simples

na verificação da invariância de Lorentz de qualquer modelo não-manifestamente covariante.

Vamos então apresentar um exemplo deste método em um modelo com interação com um campo de calibre U(1). Faremos sua aplicação ao MSQM com quiralidade esquerda, já que este modelo não é manifestamente covariante de Lorentz. Este modelo tem como densidade de lagrangiana bosonizada [29],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MCSM}} = & \dot{\bar{\phi}} \bar{\phi}' - \bar{\phi}'^2 + 2e\bar{\phi}'(\bar{A}_0 - \bar{A}_1) - (e^2/2)(\bar{A}_0 - \bar{A}_1)^2 + \\ & - (ae^2/2)\bar{A}_\mu \bar{A}^\mu - (1/4)\bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Realizamos primeiramente uma transformação de Lorentz como em (2.1.2), e correspondentemente para as componentes do campo de calibre. Isto nos leva à densidade de lagrangiana transformada,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^\varphi = & k_1 \dot{\phi}^2 - k_2 \phi'^2 + k_3 \dot{\phi} \phi' + 2e k_1 \dot{\phi}(A_0 - A_1) + 2e k_2 \phi'(A_0 - A_1) + \\ & - (e^2 k_3^2/2)(A_0 - A_1)^2 - (ae^2/2)A_\mu A^\mu - (1/4)F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

onde,

$$\begin{aligned} k_1(\varphi) &= \sinh(\varphi)(\cosh(\varphi) - \sinh(\varphi)), \\ k_2(\varphi) &= \cosh(\varphi)(\cosh(\varphi) - \sinh(\varphi)), \\ k_3(\varphi) &= k_2(\varphi) - k_1(\varphi) \end{aligned}$$

de onde podemos construir a densidade de lagrangiana de primeira

ordem. Não existe problema para construí-la porque, ao contrário de (2.1.15), a densidade de lagrangiana transformada não é vinculada. Desta forma é fácil obter que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^{\varphi(1)} = & \pi \dot{\phi} - k_1 \left[ \frac{(\pi - k_3 \phi')}{2k_1} - e(A_0 - A_1) \right]^2 - k_2 \phi'^2 + \\ & + 2e k_2 \phi' (A_0 - A_1) - (e^2 k_3 / 2) (A_0 - A_1)^2 + (a e^2 / 2) A_\mu A^\mu - (1/4) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Uma vez que pelo princípio de equivalência a física nos dois referenciais deve ser a mesma, impomos que a densidade de lagrangiana no novo sistema de referência deva ter o mesmo vínculo ( $\pi = \phi'$ ) como é o caso do referencial original. Assim, sob este vínculo e após cálculos diretos obtemos,

$$\mathcal{L}_{\text{MCSM}}^{\varphi(1)} \Big|_{\pi=\phi'} = \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^{\cdot} \quad (2.1.18)$$

Como a densidade de lagrangiana vinculada final é igual à inicial, o modelo é covariante de Lorentz.

## 2.2) Um caminho alternativo de calibrar o bóson quirial de Floreanini-Jackiw:

No curso de uma análise das propriedades dos bósons quirais, uma etapa natural seria acoplá-los a campos de calibre abelianos [19,54,55], a fim de estudar as possíveis anomalias correspondentes, ou para prover um método alternativo para a bosonização de modelos quirais

em duas dimensões [20]. Estes acoplamentos foram propostos tanto no caso do formalismo explicitamente covariante de Siegel [9,56], quanto na versão de Floreanini- Jackiw [12,19].

No contexto das teorias quirais em duas dimensões, Harada mostrou recentemente como obter um acoplamento consistente para os bósons quirais de FJ a um campo de calibre com simetria  $U(1)$ , partindo do MSQ e descartando os graus de liberdade direitos através de uma projeção no espaço de fase implementada pelo vínculo quiral  $\pi_\phi = \phi'$  [19]. A teoria resultante tem o mesmo espectro do MSQ com a característica adicional que o modo não-massivo é auto-dual. Não há nenhum traço, ao final, do férmion com quiralidade direita que estava presente originalmente (o qual, entretanto, era necessário para que o problema de autovalores no computo do determinante fermiônico estivesse bem definido [57]). Foi mostrado mais tarde por Bazeia [58] que o método de Harada era equivalente ao de Belucci, Golterman e Petcher [55], sob o formalismo de primeira ordem de Faddeev e Jackiw [53].

Nesta seção, investigamos a possibilidade de obter acoplamentos diferentes para o bóson quiral de FJ, partindo do MSG, onde ambas as quiralidades interagem com o campo de calibre [24]. Nós obtemos a densidade de lagrangiana do sistema acoplado sob um vínculo quiral generalizado e aplicamos o teste desenvolvido na seção anterior que pode decidir se o acoplamento resultante é covariante ou não. Observamos que partindo do MSQ com quiralidade esquerda é possível acoplar os bósons quirais a campos de calibre  $U(1)$  de duas maneiras covariantes de Lorentz, usando para isto dois vínculos quirais diferentes, para uma quiralidade



( $\pi_\phi = \phi'$ ) e para a outra ( $\pi_\phi = -\phi' + e(A_0 - A_1)$ ). Os vínculos  $\pi_\phi = -\phi'$  e  $\pi = \phi' + e(A_0 + A_1)$  são aqueles permitidos para o MSQ com quiralidade direita. Em outras palavras, existem duas maneiras covariantes de calibrar o bóson quiral de uma dada quiralidade, começando com cada MSQ (esquerdo ou direito), mas usando vínculos diferentes em cada caso. A teoria obtida usando  $\pi_\phi = -\phi' + e(A_0 - A_1)$  mostra-se equivalente a um acoplamento específico para os bósons quirais de Siegel com campos de calibre U(1), o qual é simétrico sob transformações de calibre que preservam a quiralidade.

Nosso ponto de partida é a densidade de lagrangiana do MSG,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu + e_{R^+} A_\mu + e_{L^-} A_\mu) \psi, \quad (2.2.1)$$

que é equivalente a sua versão bosonizada [7,41]<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_B = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (1/\sqrt{\pi}) (\bar{g}_1 \partial^\mu - \bar{g}_2 \bar{\partial}^\mu) \phi A_\mu + \bar{M}^2 A_\mu A^\mu / 2\pi \quad (2.2.2)$$

onde

$$\bar{g}_1 = \frac{\bar{e}_L + \bar{e}_R}{2}, \quad \bar{g}_2 = \frac{\bar{e}_L - \bar{e}_R}{2}, \quad \bar{M}^2 = \frac{\tilde{e}_L \tilde{e}_R + \bar{e}_L \bar{e}_R}{2}. \quad (2.2.3)$$

Em (2.2.3)  $\tilde{e}_L$  e  $\tilde{e}_R$  são acoplamentos arbitrários introduzidos pelo procedimento de regularização [41] e  $\bar{e}_L$  e  $\bar{e}_R$  são definidos

---

<sup>1</sup>Nesta seção usaremos a mesma notação que aparece no trabalho de Alonso, Cortés e Rivas [41].

como em [41],

$$\bar{e}_L = (\tilde{e}_L^2 + (\tilde{e}_L - e_L)^2)^{1/2}, \quad \bar{e}_R = (\tilde{e}_R^2 + (\tilde{e}_R - e_R)^2)^{1/2}. \quad (2.2.4)$$

A hamiltoniana obtida de  $\mathcal{L}_B$  é

$$\mathcal{H}_B = (1/2)(\pi_\phi - g_1 A_0 - g_2 A_1)^2 + \phi'^2/2 + \phi'(g_1 A_1 + g_2 A_0) - M^2 A_\mu^2/2, \quad (2.2.5)$$

com  $\sqrt{\pi}g_1 = \bar{g}_1$  e  $\pi M^2 = \bar{M}^2$ .

Nós projetamos uma quiralidade com a ajuda do vínculo quiral generalizado

$$\Omega = \pi_\phi - \alpha \phi'. \quad (2.2.6)$$

Aqui  $\alpha$  pode ser uma função de  $\phi$ ,  $\phi'$  e  $A_\mu$  mas não de  $\dot{\phi}$ , de modo que  $\Omega$  permaneça sendo um vínculo. Fazemos ainda mais uma imposição sobre  $\alpha$ , a de que ele seja tal que o parênteses de Poisson dos vínculos  $\{\Omega, \Omega\}$  fique independente de campos, de modo que ele possa ser absorvido na normalização da medida da integração funcional

$$Z_{ch}[A] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi_\phi \delta(\Omega) |\det\{\Omega, \Omega\}|^{1/2} \exp\left(i \int d^2x (\pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{H}_B)\right). \quad (2.2.7)$$

Partindo destas hipóteses a análise pode seguir linhas clássicas. Integrando funcionalmente sobre o campo  $\pi_\phi$  em (2.2.7), obtemos nossa densidade de lagrangiana efetiva

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\alpha = & \alpha \dot{\phi} \phi' - ((\alpha^2 + 1)/2) \phi'^2 + \phi'((\alpha g_1 - g_2)A_0 + (\alpha g_2 - g_1)A_1) + \\ & - (1/2)(g_1 A_0 + g_2 A_1)^2 + M^2 A_\mu^2 / 2. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Agora procuramos os valores de  $\alpha$  que são permitidos para uma teoria covariante de Lorentz. Para isto usaremos o método desenvolvido mais acima. Façamos então esta análise para  $\mathfrak{L}_\alpha$  em (2.2.8). A rotação de Lorentz (2.1.10) produz (rodando também, obviamente,  $A_0$  e  $A_1$ ),

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\alpha^R = & a(x) \dot{\phi}^2 + b(x) \dot{\phi} \phi' + c(x) \phi'^2 + \left\{ (x^2 - 1) \dot{\phi} + \right. \\ & \left. + (x^2 + 1) \phi' \right\} \cdot \left\{ d_+(x) A_0 + d_-(x) A_1 \right\} - (1/2)(e_+ A_0 + e_- A_1)^2 + M^2 A_\mu^2 / 2 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

com

$$\begin{aligned} a(x) = & - \frac{(x^2 - 1)}{8x^2} \left[ \alpha^2(x^2 - 1) - 2\alpha(x^2 + 1) + x^2 - 1 \right] \\ b(x) = & - \frac{1}{4x^2} \left[ \alpha^2(x^4 - 1) - 2\alpha(x^4 + 1) + x^4 - 1 \right] \\ c(x) = & - \frac{(x^2 + 1)}{8x^2} \left[ \alpha^2(x^2 + 1) - 2\alpha(x^2 - 1) + x^2 + 1 \right] \quad (2.2.10) \\ d_\pm(x) = & \frac{1}{4x^2} \left[ \alpha \left[ (x^2 \pm 1)g_1 + (x^2 \mp 1)g_2 \right] - \left[ (x^2 \mp 1)g_1 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ (x^2 \pm 1)g_2 \Big) \Big) \equiv (\alpha e_{\pm} - e_{\mp}).$$

A densidade de lagrangiana de primeira ordem, após a imposição do vínculo generalizado, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^{R,1}}{\alpha} = & \alpha \dot{\phi} \phi' + \frac{4ac - \alpha^2 + b(2\alpha - b)}{4a} \phi'^2 + \\ & + \frac{(2a(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(\alpha - b))}{2a} \phi' \left[ (\alpha e_+ - e_-)A_0 + \right. \\ & \left. + (\alpha e_- - e_+)A_1 \right] - (e_+A_0 + e_-A_1)^2 - \frac{(x^2 - 1)^2}{4a} \left[ (\alpha e_+ - e_-)A_0 + \right. \\ & \left. + (\alpha e_- - e_+)A_1 \right]^2 + M^2 A_{\mu}^2 / 2. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Esta expressão se iguala à (2.2.8) somente se

$$(\alpha^2 - 1)\phi' - (g_1\alpha + g_2)A_0 - (g_2\alpha + g_1)A_1 = 0. \quad (2.2.12)$$

Resolvendo esta equação para  $\alpha$  encontramos o conjunto de vínculos que preservam a covariância relativística,

$$\begin{aligned} \pi_{\phi} = & \pm (1/2) \left[ 4\phi'^2 + 4\phi'(g_2A_0 + g_1A_1) + (g_1A_0 + g_2A_1)^2 \right]^2 + \\ & + (1/2)(g_1A_0 + g_2A_1). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

A partir de (2.2.13) nós vemos que existem apenas dois casos

nos quais podemos obter  $\{\Omega, \Omega\}$  independente de campos e ao mesmo tempo obter uma densidade de lagrangiana polinomial, especificamente:

i)  $g_1 = g_2 = e$  (MSQ com quiralidade direita), com os vínculos

$$\pi_\phi = -\phi' \quad (2.2.14)$$

e

$$\pi_\phi = \phi' + e(A_0 + A_1); \quad (2.2.15)$$

ii)  $g_1 = -g_2 = e$  (MSQ com quiralidade esquerda), com vínculos

$$\pi_\phi = \phi' \quad (2.2.16)$$

e

$$\pi_\phi = -\phi' + e(A_0 - A_1) \quad (2.2.17)$$

Os casos (2.2.14) e (2.2.16) são os que foram estudados por Harada e que são encontrados na literatura [19,20,55,58]. Os casos (2.2.15) e (2.2.17) não foram levados em consideração anteriormente. Para sermos específicos, começaremos do caso (ii) e realizaremos a calibração do bóson quiral inseridos no contexto do MSQ com quiralidade esquerda. Impondo (2.2.17) sobre (2.2.2), com  $\bar{g}_1 = -\bar{g}_2 = \sqrt{\pi}$  e, obtemos da mesma forma que fizemos anteriormente que

$$\mathcal{L}_0 = -\phi \phi' - \phi'^2 + e(\phi + \phi')(A_0 - A_1) + M^2 A_\mu A^\mu / 2 - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} / 4, \quad (2.2.18)$$

na qual adicionamos o termo cinético à densidade de lagrangiana resultante. A partir de (2.2.18) calculamos a hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_c = \frac{(\pi^1)^2}{2} + \pi^1 A'_0 + \phi'^2 - e \phi' (A_0 - A_1) - M^2 A_\mu A^\mu / 2. \quad (2.2.19)$$

O vínculo (2.2.17) é de segunda classe

$$\{\Omega_2(x), \Omega_2(y)\} = + 2 \delta'(x^1 - y^1), \quad (2.2.20)$$

com  $\Omega_2 = \pi_\phi + \phi' - e(A_0 - A_1)$ . Há ainda um outro vínculo primário,  $\Omega_1 = \pi_0$ , cuja consistência sob evolução temporal produz

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \left\{ \Omega_1, \int dy^1 (\mathcal{H}_c + u_1 \Omega_1 + u_2 \Omega_2) \right\} \\ &= \partial_1 \pi^1 + e \phi' + M^2 A_0 + e u_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Este por sua vez determina  $u_2$ , enquanto  $u_1$  é determinado através de  $\dot{\Omega}_2 = 0$ . A inversa da matriz de vínculos é dada por

$$C_{1j}(x, y) = (1/e^2) \begin{pmatrix} 2\delta'(x^1 - y^1) & e\delta(x^1 - y^1) \\ -e\delta(x^1 - y^1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.22)$$

e os parênteses de Dirac não-nulos são [73]

$$\{\phi(x), \pi_\phi(y)\}^* = \delta(x^1 - y^1);$$

$$\begin{aligned}
\{\phi(x), A_0(y)\}^* &= (1/e)\delta(x^1 - y^1); \\
\{\pi_\phi(y), A_0(y)\}^* &= (1/e)\delta'(x^1 - y^1); \\
\{A_0(x), A_0(y)\}^* &= -(2/e^2)\delta(x^1 - y^1); \\
\{A_0(x), \pi^1(y)\}^* &= -(1/e)\delta(x^1 - y^1); \\
\{A_1(x), \pi^1(y)\}^* &= \delta(x^1 - y^1). \tag{2.2.23}
\end{aligned}$$

Podemos então escolher  $\phi$  para ser eliminado de (2.2.19), usando para isto os vínculos fortemente, e então chegarmos à densidade de hamiltoniana final,

$$\mathcal{H} = \frac{(\pi^1)^2}{2} + \pi^1 A'_0 + \pi_\phi^2 - e \pi_\phi (A_0 - A_1) - M^2 A_\mu A^\mu / 2. \tag{2.2.24}$$

Devido às relações de comutação obedecidas por  $A_0$  não serem usuais, não é fácil resolver as equações de movimento obtidas a partir de (2.2.24). Para termos alguma informação sobre o espectro desta teoria, podemos integrá-la funcionalmente sobre o campo  $A_\mu$  e assim obtermos uma densidade de lagrangiana efetiva para o campo  $\phi$ ,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \phi \left( \frac{(e^2 - M^2)\square^2 - M^4\square + M^2(\square - M^2)\partial_+\partial_-}{M^2(\square + M^2)} \right) \phi \tag{2.2.25}$$

Usando  $M^2 = a e^2$ , vemos que existem polos nas seguintes regiões no plano  $(k_+, k_-)$ :

i)  $a \neq 1$ :

$$k_- = \pm a \left( \frac{(a^2 e^4 - 2(a-2)e^2 k_+^2 + k_+^4)^{1/2} \pm (a e^2 + k_+^2)}{2k_+(a-1)} \right),$$

$$k_+ = 0, \quad (2.2.26)$$

ii)  $a = 1$ :

$$k_- = \frac{e^2 k_+^2}{(e^2 + k_+^2)},$$

$$k_+ = 0. \quad (2.2.27)$$

Embora a expressão para a curva  $k_-$  não seja diretamente covariante de Lorentz, podemos ver explicitamente a presença de um polo auto-dual no espectro da teoria, com a quiralidade correta.

Além do mais, o aparecimento somente das componentes  $A_-$  do campo de calibre  $A_\mu$  na densidade de lagrangiana, sugere algum tipo de calibração "auto-dual", na qual somente a derivada  $\partial_-$  deveria ser covariantizada. Isto nos leva a considerar o formalismo de Siegel para o bóson quiral direito,

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_+ \phi \partial_- \phi + \frac{1}{2} \lambda (\partial_+ \phi)^2. \quad (2.2.28)$$

Realizando a substituição

$$\partial_- \phi \longrightarrow \partial_- \phi + 2 e A_-, \quad (2.2.29)$$



obtemos

$$\mathcal{L}_S^g = \frac{(\lambda + 1)}{2} \dot{\phi}^2 + \lambda \dot{\phi} \phi' + \frac{(\lambda - 1)}{2} \phi'^2 + e(\dot{\phi} + \phi')(A_0 - A_1). \quad (2.2.30)$$

A densidade de lagrangiana de primeira ordem é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^{g,1} = \pi_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{(\lambda + 1)} \left\{ \frac{1}{2} \pi_\phi^2 - \lambda \pi_\phi \phi' - e(\pi_\phi + \phi')(A_0 - A_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^2(A_0 - A_1)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Resolvendo o vínculo através da equação de movimento para  $\lambda$ , obtemos que

$$\pi_\phi \equiv -\phi' + e(A_0 - A_1) \quad (2.2.32)$$

e, após a sua substituição em (2.2.31), obtemos  $\mathcal{L}'_0$  dada por

$$\mathcal{L}'_0 = -\dot{\phi} \phi' - \phi'^2 + e(\dot{\phi} + \phi')(A_0 - A_1), \quad (2.2.33)$$

a qual é igual a  $\mathcal{L}_0$ , dada em (2.2.18), sem os dois últimos termos.

Finalmente, gostaríamos de observar que a simetria de calibre do modelo é dada por  $\phi \rightarrow \phi + \epsilon$  e  $A_\pm \rightarrow A_\pm - (1/2e)\partial_\pm \epsilon$ ,  $\epsilon = \epsilon(x^-)$ . Esta simetria preserva a quiralidade do bóson quiral sob transformações de calibre. Ela também é responsável pela

existência de mais graus de liberdade que aqueles presentes no caso considerado por Harada [19], já que podemos tomar  $A_+$  como uma quantidade invariante de calibre sob estas transformações restritas. Se este modelo é uma descrição alternativa para o MSQ mínimo, é uma questão interessante a ser considerada em um futuro próximo.

### 2.3) Sobre uma dualidade entre as calibrações do bóson quirral de Floreanini-Jackiw:

Recentemente Bazeia [58] mostrou, usando um método desenvolvido por Faddeev e Jackiw [53], que a versão calibrada do bóson quirral de Siegel proposta por Belucci, Golterman e Petcher [9,55] é equivalente, ao nível clássico, ao bóson quirral de Floreanini-Jackiw calibrado encontrado por Harada [12,19].

Nesta seção pretendemos mostrar que, se partimos do modelo proposto por Belucci, Golterman e Petcher, e substituímos o vínculo calibrado por um não calibrado, terminamos com a versão covariante de "calibre quirral" do bóson quirral de Siegel mencionado acima [25]. Provamos em seguida a equivalência entre esta versão e a correspondente nova versão da calibração do modelo de FJ que apresentamos na seção anterior.

Vamos agora exibir uma espécie de dualidade entre os vínculos dos dois modelos de FJ covariantes de calibre. Para tal escrevemos a densidade de lagrangiana de Belucci et al,

$$\mathcal{L} = (1/2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + e\partial_+\phi A_- + (M^2/2)A_\mu A^\mu + \lambda(\partial_-\phi + eA_-)^2, \quad (2.3.1)$$

onde  $\partial_- \equiv \partial_0 - \partial_1$  e  $A_- \equiv A_0 - A_1$ . A densidade de lagrangiana de primeira ordem correspondente, como observado por Bazeia [58], é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \pi_\phi (\partial_- \phi + eA_-) + e \phi' A_- - (e^2/2) (A_-)^2 + (M^2/2) A_\mu A^\mu + \\ & - \frac{1}{(1+\lambda)} (\pi_\phi - \phi')^2, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Neste ponto podemos obter a equação de Euler-Lagrange para o multiplicador de Lagrange,

$$(\pi_\phi - \phi')^2 = 0, \quad (2.3.3)$$

que, ao nível clássico, é equivalente à imposição que  $\pi_\phi = \phi'$  (ao nível quântico eles serão diferentes, como consequência da ambigüidade de ordenamento). Assim, escolhendo a hipersuperfície no espaço de fase na qual o vínculo  $\pi_\phi = \phi'$  é mantido, obtemos a versão de Harada para o bóson quiral de FJ calibrado,

$$\mathcal{L}_{ch} = \dot{\phi} \phi' - \phi'^2 + 2e\phi' A_- - (e^2/2) A_-^2 + (M^2/2) A_\mu A^\mu. \quad (2.3.4)$$

É importante observar que na densidade de lagrangiana usual (2.3.1), o vínculo imposto era  $(\partial_- \phi + eA_-)^2 = 0$ , e que quando foi construída sua densidade de lagrangiana de primeira ordem, o vínculo não-calibrado  $(\pi_\phi - \phi')^2 = 0$  surgiu de modo natural. Além disso, usando o método desenvolvido mais acima para verificar a

covariância de Lorentz, pode-se ver que o vínculo correspondente a ser trocado em (2.3.1) deve ser aquele com quiralidade oposta,  $(\partial_+ \phi)^2 = 0$ . Isto está de acordo com a observação da seção anterior, onde se verificou que, partindo do MSQ com quiralidade esquerda existem dois vínculos relativisticamente permitidos:  $\pi_\phi = \phi'$  e  $\pi_\phi = -\phi' + eA_-$ ; e para o caso com quiralidade direita eles são:  $\pi_\phi = -\phi'$  e  $\pi_\phi = \phi' + eA_+$ . Não é difícil verificar que o modelo em (2.3.1), a menos de uma renormalização finita da constante de acoplamento, é o MSQ com quiralidade esquerda sujeito ao vínculo  $(\partial_- \phi + eA_-)^2 = 0$ , de modo que seu vínculo dual deve ser  $(\partial_+ \phi)^2 = 0$ . Com isto em mente invertamos a ordem e impomos este segundo vínculo na densidade de lagrangiana usual,

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e \partial_+ \phi A_- + (M^2/2) A_\mu A^\mu + \lambda (\partial_+ \phi)^2, \quad (2.3.5)$$

que corresponde à calibração de apenas uma das quiralidades, de modo que

$$\phi \rightarrow \phi + \epsilon(x^-) \quad (2.3.6)$$

$$A_- \rightarrow A_- - (1/e) \partial_- \epsilon(x^-)$$

como observamos na seção anterior [24] (a menos de uma renormalização finita da carga). Agora, a densidade de lagrangiana de primeira ordem é dada por

$$\mathcal{L}_1 = \pi_\phi (\partial_- \phi) + e \phi' A_- + (M^2/2) A_\mu A^\mu - \frac{1}{2(1+\lambda)} (\pi_\phi - \phi' - eA_-)^2,$$

De suas equações de movimento para o multiplicador de Lagrange, somos levados à escolha do vínculo  $(\pi_\phi - \phi' - eA_-)^2 = 0$ . Então, após a imposição de tal vínculo em (2.3.7) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{ch}} = \dot{\phi} \phi' - \phi'^2 + e \partial_+ \phi A_- + (M^2/2) A_\mu A^\mu, \quad (2.3.8)$$

que foi considerada na seção anterior, e que corresponde à acima mencionada "calibração quiral". Agora podemos fazer uma análise análoga para o caso do vínculo linear imposto por Srivastava [60]. Partindo da versão calibrada deste modelo, onde o vínculo aparece linearmente

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e \partial_+ \phi A_- + (M^2/2) A_\mu A^\mu + \lambda (\partial_- \phi + eA_-), \quad (2.3.9)$$

obtemos, como afirmado por Bazeia, para a densidade de lagrangiana de primeira ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \pi_\phi \dot{\phi} - (1/2) \phi'^2 + e \phi' A_- - (e^2/2) (A_-)^2 + (M^2/2) A_\mu A^\mu \\ & - \lambda (\phi' - eA_-) - (1/2) [\pi - \lambda - eA_-]^2. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Usando a solução para o multiplicador de lagrange  $\lambda = \pi_\phi - \phi'$ , encontra-se que

$$\mathcal{L}_1 = \pi_\phi (\partial_- \phi) + e (\pi_\phi + \phi') A_- - (e^2/2) (A_-)^2 + (M^2/2) A^\mu A_\mu, \quad (2.3.11)$$

de onde se pode ver que, para o vínculo do Harada ( $\pi_\phi = \phi'$ ), recuperamos o seu resultado (2.3.4). Se por outro lado impomos a versão calibrada do vínculo quirral ( $\pi_\phi = \phi' + eA_-$ ), a densidade de lagrangiana obtida não é covariante de Lorentz como pode ser facilmente verificado através do uso do método desenvolvido no início deste capítulo. Neste ponto é importante observar que o critério de covariância de Lorentz é fundamental em tais casos porque, uma vez que estas densidades de lagrangiana não são explicitamente covariantes, deve-se verificar a invariância a fim de se obter resultados confiáveis.

A "versão dual" da expressão (2.3.9) é dada por

$$\mathcal{L} = (1/2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + e\partial_+\phi A_- + (M^2/2)A_\mu A^\mu + \lambda(\partial_-\phi), \quad (2.3.12)$$

que tem como contrapartida de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = \pi_\phi \dot{\phi} &- (1/2)\phi'^2 + e\phi' A_- + (M^2/2)A_\mu A^\mu + \lambda(\pi_\phi - \phi') + \\ &- (1/2)\left[\pi_\phi - \lambda - eA_-\right]^2. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Substituindo a solução para  $\lambda$  ( $\lambda = \pi_\phi - \phi' - eA_-$ ), e impondo o "vínculo quirral calibrado"  $\pi_\phi = \phi' + eA_-$ , obtemos

$$\mathcal{L}_1 = \phi'(\partial_-\phi) + e\partial_+\phi A_- + (M^2/2)A^\mu A_\mu, \quad (2.3.14)$$

que vem a ser o modelo descrito em [24], o qual é covariante de Lorentz. Se pelo contrário usarmos o vínculo do Harada, a densidade de lagrangiana assim obtida se torna não-covariante sob transformações de Lorentz.

Pode-se observar também que, como ocorre no bóson de Siegel calibrado da maneira usual, nesta nova maneira de calibrar o bóson quiral (2.3.12), o caso não-explicitamente covariante (2.3.14) pode ser obtido escolhendo  $\lambda = -1/2$  em (2.3.12). Note entretanto que para este valor do parâmetro  $\lambda$ , a densidade de lagrangiana torna-se vinculada, e portanto deve ser tratada cuidadosamente. Devemos também ser cuidadosos em fazer esta escolha após a imposição do vínculo quiral calibrado, em analogia ao que ocorre no caso anterior [58].

Como comentário final, pode-se mencionar que todo o estudo acima pode ser repetido para o caso do MSQ "direito" sujeito a seus vínculos correspondentes:  $(\partial_+ \phi + eA_+)^2 = 0$  e  $(\partial_- \phi)^2 = 0$ , que têm como contraparte nos modelos do tipo FJ calibrados:  $\pi_\phi = -\phi'$  e  $\pi_\phi = \phi' + eA_+$ , respectivamente.

## CAPÍTULO III

### SOBRE O SIGNIFICADO FÍSICO DO TERMO DE WESS-ZUMINO MÍNIMO

Nos últimos anos tem aparecido um grande interesse no estudo de campos bosônicos quirais, principalmente devido a importância de tais modelos para a quantização das cordas [8]. Começando com o trabalho original de Siegel [9] e seguindo com o de Floreanini e Jackiw [12], em numerosos trabalhos foram discutidas as propriedades dos bósons quirais. Mais recentemente o estudo da calibração destes bósons tem atraído muita atenção [19,20,54,55] e, baseados no trabalho de Harada [19], Kye et al [26,27] introduziram o seu "termo de Wess-Zumino mínimo" (WZM), como sendo aquele que restabelece a invariância de calibre do "modelo de Schwinger quiral mínimo" (MSQM) [20]. No mesmo assunto há uma contribuição recente de Natividade [61], onde é discutida a álgebra dos vínculos do modelo composto pelo MSQM e pelo WZM. Neste capítulo pretendemos discutir o significado físico do termo de WZM [28], mostrando que o único termo relativisticamente permitido corresponde na prática a um MSQM. Desta forma interpretamos a introdução de tal termo na mesma filosofia do fechamento de famílias no modelo padrão, de modo a eliminar a anomalia de traço. Deste ponto de vista, este não é um termo de WZ porque, no espírito de Faddeev e Shatashvilli [4], tal termo não altera a física por trás do modelo, como ocorre no caso do termo de WZ usual [20].

É interessante observar que, no presente caso, a introdução de novos campos no jogo não aumenta o número de partículas



assintóticas, como de costume, mas, de fato, as reduz como observado por Kye et al [27].

Aplicamos agora o mesmo método apresentado na seção 2.1 à densidade de lagrangiana do MWZ [26,62],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MWZ}} = & -\alpha \dot{\bar{\theta}} \bar{\theta}' - (\beta/2) \bar{\theta}'^2 + e \bar{\theta}' \left[ (\alpha+1) \bar{A}_0 + \gamma \bar{A}_1 \right] + \\ & - \frac{e^2}{2(a-1)} \left[ (a-1) \bar{A}_0 + \bar{A}_1 \right]^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com  $\beta = \left[ \alpha^2 / (a - 1) + (a - 1) \right]$  e  $\gamma = \left[ \alpha / (a - 1) + (a - 1) \right]$ . Usando o método apresentado no capítulo anterior e impondo que a diferença entre a densidade de lagrangiana (3.1) e a resultante após a mudança de referencial se anule, e que  $\alpha$  também seja independente de campos, obtemos um conjunto de equações:

- i)  $(B - \alpha)^2 = 2A(2C - \beta)$ ,
- ii)  $2A(D_3 - \alpha - 1) = (B - \alpha)D_1$ ,
- iii)  $2A(D_4 - \gamma) = (B - \alpha)D_2$ ,
- iv)  $2A(a - 1)^2 = 2A E_1^2 - (a - 1)D_1^2$ ,
- v)  $2A = 2A E_2^2 - (a - 1)D_2^2$ ,
- vi)  $2A(a - 1) = 2A E_1 E_2 - (a - 1)D_1 D_2$ ,

onde

$$\begin{aligned} A & \equiv \sinh(\varphi) [\alpha \cosh(\varphi) + (\beta/2) \sinh(\varphi)] \\ B & \equiv \alpha [\cosh(\varphi)^2 + \sinh(\varphi)^2] + \beta \sinh(\varphi) \cosh(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &\equiv \cosh(\varphi) [\alpha \sinh(\varphi) + (\beta/2) \cosh(\varphi)] \\
D_1 &\equiv \sinh(\varphi) [(\alpha + 1) \cosh(\varphi) + \gamma \sinh(\varphi)] \\
D_2 &\equiv \sinh(\varphi) [(\alpha + 1) \sinh(\varphi) + \gamma \cosh(\varphi)] \\
D_3 &\equiv \cosh(\varphi) [(\alpha + 1) \cosh(\varphi) + \gamma \sinh(\varphi)] \\
D_4 &\equiv \cosh(\varphi) [(\alpha + 1) \sinh(\varphi) + \gamma \cosh(\varphi)] \\
E_1 &\equiv (a - 1) \cosh(\varphi) + \sinh(\varphi) \\
E_2 &\equiv (a - 1) \sinh(\varphi) + \cosh(\varphi).
\end{aligned}$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $a$  devem ser tais que resolvam simultaneamente as seis equações acima. Isto pode ser feito de maneira bem direta ao se impor que os parâmetros sejam independentes de  $\varphi$ . Ao resolvermos estas equações encontramos uma característica notável, a de que a invariância de Lorentz implica na de calibre neste caso. Isso pode ser visto ao se reescrever a equação (vi):

$$\begin{aligned}
&(\alpha/2) [\alpha^3 + 3\alpha(a - 1)^2 - 3a^2 + 6a - 4] \sinh(2\varphi) + \\
&+ \alpha(a - 1) (\alpha^2 + \alpha - 2) \cosh(2\varphi) - (\alpha - 1) (a - 1)^3. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Como pode ser visto facilmente, esta equação é satisfeita se três outras independentes são válidas:

$$\alpha^3 + 3\alpha(a - 1)^2 - 3a^2 + 6a - 4 = 0, \quad (3.3a)$$

$$(a - 1) (\alpha^2 + \alpha - 2) = 0, \quad (3.3b)$$

$$(\alpha - 1) (a - 1)^3 = 0, \quad (3.3c)$$

onda descartamos a solução trivial  $\alpha = 0$ . De (3.3c) pode-se ver que, como  $a = 1$  faz com que  $\mathcal{L}_{\text{MHZ}}$  diverja, devemos ter que  $\alpha = 1$ , precisamente o caso onde a simetria de calibre é preservada. Além disto não é difícil verificar das outras equações que os valores do parâmetro  $a$  que mantêm a invariância de Lorentz (para  $\alpha = 1$ ) são  $a = 2$  e  $a = 0$ . De onde vemos que o modelo tem invariância de Lorentz desde que os valores dos parâmetros sejam fixados, o que está de acordo com o resultado recente de Kye et al [27]. Substituindo os valores permitidos de  $\alpha = 1$  e  $a = 2$  em (3.1) obtemos,

$$\mathcal{L}_{\text{MHZ}}^I = -\dot{\theta}\theta' - \theta'^2 + 2e\theta'(A_0 + A_1) - (e^2/2)(A_0 + A_1)^2 \quad (3.4)$$

que pode ser reconhecida como sendo a densidade de lagrangiana para o bóson quirral com quiralidade oposta à do bóson quirral original em (2.1.15). Assim, ele é na verdade o MSQM associado ao MSQ com quiralidade oposta. Isto pode ser visto facilmente partindo do MSQ com quiralidade direita

$$\mathcal{L}^R = (1/2)\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + e(g^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu})\partial_\mu\theta A_\nu + (be^2/2)A_\mu A^\mu, \quad (3.5)$$

É interessante notar que a densidade de lagrangiana acima corresponde, a menos do termo em  $b$ , ao termo de WZ com  $a = 2$ .

Impondo o vínculo  $\pi_\theta = -\theta'$  em (3.5), e então usando o procedimento proposto por Harada [19], ou de modo equivalente através do método usado no capítulo anterior baseado em densidades

de lagrangiana de primeira ordem, terminamos com

$$\mathcal{L}_{\text{MCSM}}^R = -\dot{\theta}\theta' - \theta'^2 + 2e\theta'(A_0 + A_1) - (e^2/2)(A_0 + A_1)^2 + (be^2/2)A_\mu A^\mu, \quad (3.6)$$

a qual, exceto pelo parâmetro arbitrário de regularização  $b$ , é igual ao WZM invariante de Lorentz (3.4) [27]. Este parâmetro pode ser fixado impondo-se que a densidade de lagrangiana total, composta pelos dois MSQM, seja invariante de calibre (como reflexo do cancelamento da anomalia). Fazendo as transformações

$$\delta\phi = \Lambda, \quad \delta\theta = -\Lambda, \quad \delta A_\mu = -(1/e)\partial_\mu \Lambda, \quad (3.7)$$

em  $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^L(a) + \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^R(b)$ , vemos que para  $b = 2 - a$ ,  $\delta\mathcal{L}_T$  é proporcional a  $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu \Lambda(\partial_\nu \phi + \partial_\nu \theta)$  que pode ser desconsiderado no setor topologicamente trivial. Assim  $\mathcal{L}_T$ , que é a soma do MSQM com quiralidade esquerda e o WZM proposto por Kye et al [27] (eles usaram  $b = 0$ , implicando do que vimos acima em  $a = 2$ ), é realmente a soma de dois MQSM com quiralidades opostas.

Um procedimento análogo no caso da possibilidade remanescente para o parâmetro de regularização ( $a = 0$ ), leva-nos ao caso de um MQSM com quiralidade igual a do que aparece em (2.1.15). Neste caso poderíamos construir um outro modelo invariante de calibre composto por dois bósons quirais. Este seria dado por  $\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^L(a, e) - \mathcal{L}_{\text{MCSM}}^L(b, -e)$ , onde  $e$  é o parâmetro de acoplamento. Impondo a invariância de calibre com respeito às transformações (3.7), concluímos que neste caso deveremos ter

$a = b$ , levando-nos à densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = \dot{\phi} \phi' - \phi'^2 - \dot{\theta} \theta' + \theta'^2 + 2e(\phi' + \theta')(A_0 - A_1) - (1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Este modelo corresponde a uma soma de dois bósons com a mesma quiralidade e, como se pode verificar facilmente, leva a um caso sem geração dinâmica de massa. Assim ele não será considerado aqui.

De agora em diante, discutimos a equivalência entre o modelo acima, cuja densidade de lagrangiana é a soma de dois MSQM com quiralidades opostas, dado pelas equações (2.1.15) com  $a = 2$  e (3.4), à soma das densidades de lagrangiana dos modelos de Schwinger vetorial (MSV) e axial (MSA). Em primeiro lugar, observamos que este modelo corresponde a uma soma de dois MSQ com quiralidades opostas, objetivando eliminar a anomalia, e isto é representado pela densidade de lagrangiana  $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R - (1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  com,

$$\mathcal{L}_L = (1/2)\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e(\eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu})\partial_\mu \phi A_\nu + (ae^2/2)A_\mu A^\mu, \quad (3.9a)$$

e

$$\mathcal{L}_R = (1/2)\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - e(\eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu})\partial_\mu \theta A_\nu + (be^2/2)A_\mu A^\mu, \quad (3.9b)$$

onde  $a + b = 2$ , para manter a invariância de calibre, conforme mostramos mais acima. Realmente, como vimos, pode-se impor os

vínculos quirais  $\pi_\phi = \phi'$  e  $\pi_\theta = -\theta'$ , realizando-se a bosonização quiral, e assim obter o modelo descrito por Kye et al. Além disso, se usamos a propriedade bem conhecida das duas dimensões, pela qual qualquer campo vetorial pode ser decomposto em suas componentes longitudinal e transversal, de modo que

$$eA_\mu = \partial_\mu \zeta + \epsilon_{\mu\sigma} \partial^\sigma \chi, \quad (3.10)$$

e fazemos as transformações,

$$\phi = \bar{\phi} + \bar{\zeta} + \bar{\chi}, \quad \theta = \bar{\theta} - \bar{\zeta} + \bar{\chi}, \quad \zeta = \bar{\zeta}, \quad \chi = \bar{\chi}, \quad (3.11)$$

encontramos, depois de alguns cálculos diretos, que

$$\bar{\mathcal{L}} = (1/2e^2) \bar{\chi} \alpha (\alpha + 4e^2) \bar{\chi} + (1/2) \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} - (1/2\alpha) (\alpha \bar{\zeta})^2, \quad (3.12)$$

onde  $(1/2\alpha) (\alpha \bar{\zeta})^2 = (1/2\alpha) (\partial_\mu A^\mu)^2$ , é o termo de fixação de calibre. A partir da expressão acima podemos ver o aparecimento de uma excitação massiva com massa  $4e^2$  sem qualquer renormalização adicional de carga. Além do mais, se lembrarmos que o propagador do fóton corresponde a

$$\delta^2 Z / \delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y) \Big|_{J'=s=0} = \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle, \quad (3.13)$$

onde

$$Z = N^{-1} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\theta \mathcal{D}A_\mu \exp \left[ - \int d^2x \left( \bar{\mathcal{L}} + J_\mu A^\mu \right) \right], \quad (3.14)$$

obtemos o propagador do fóton na representação de momentum,

$$D_{\mu\nu} = (k^2 - 4e^2)^{-1} \left[ -\eta_{\mu\nu} + \left( 1 - \alpha(1 - 4e^2/k^2) \right) \left( k_\mu k_\nu / k^2 \right) \right], \quad (3.15)$$

onde foi utilizada a identidade válida em duas dimensões,

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\sigma\rho} = -\delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} + \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma}. \quad (3.16)$$

Temos então um propagador de fóton igual ao do MSV, em particular se  $\alpha = 0$ , esta função de Green aparece no calibre de Landau. Por outro lado se fazemos uma análise análoga para caso do MSA, como proposto por Kye et al (na referência [27] os autores o confundem com o MSV), obtemos

$$\bar{\mathcal{L}}_{ASM} = (1/2e^2) \bar{\chi} \square (\square + e^2) \bar{\chi} + (1/2) \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} + \mathcal{L}_{CF}, \quad (3.17)$$

onde

$$\phi = \bar{\phi} - \bar{\zeta}, \quad \zeta = \bar{\zeta}, \quad \chi = \bar{\chi}, \quad (3.18)$$

e conseqüentemente

$$D_{\mu\nu} = (k^2 - e^2)^{-1} \left[ -\eta_{\mu\nu} + \left( 1 - \alpha(1 - 4e^2/k^2) \right) \left( k_\mu k_\nu / k^2 \right) \right], \quad (3.19)$$

que se torna igual a (3.15) s3mente se fizermos uma renormaliza33o finita da carga  $e \rightarrow 2e$ , e se for usado o calibre de Landau ( $\alpha = 0$ ).

Vamos agora mostrar a equival3ncia entre este modelo e um que corresponde 3 soma de um MSV e um MSA, para isto fazemos uma rota33o de  $\pi/4$  nos campos

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \end{pmatrix} = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_V \\ \phi_A \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

na densidade de lagrangiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (1/2) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + e \eta^{\mu\nu} \partial_\mu (\phi - \theta) A_\nu + \\ & - e \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu (\phi + \theta) A_\nu + e^2 A_\mu A^\mu. \end{aligned} \quad (3.21)$$

e com isso obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & (1/2) \left[ \partial_\mu \phi_V \partial^\mu \phi_V + \partial_\mu \phi_A \partial^\mu \phi_A \right] + e\sqrt{2} \partial_\mu \phi_A A^\mu + \\ & - e\sqrt{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_V A_\nu + e^2 A_\mu A^\mu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De fato pode-se reconhecer a densidade de lagrangiana acima como aquela de uma soma de um MSV e um MSA. Por outro lado, se escrevemos sua densidade de lagrangiana de primeira ordem [53],



$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^1 = & \pi_{\phi_A} \dot{\phi}_A + \pi_{\phi_V} \dot{\phi}_V - \left[ (1/2) \pi_{\phi_A}^2 - e\sqrt{2} \pi_{\phi_A} A_0 + (1/2) (\phi'_A)^2 + e\sqrt{2} \phi'_A A_1 + \right. \\ & \left. + (1/2) \pi_{\phi_V}^2 + e\sqrt{2} \pi_{\phi_V} A_1 + (1/2) (\phi'_V)^2 - e\sqrt{2} \phi'_V A_0 + e^2 A_\mu A^\mu \right], \quad (3.23) \end{aligned}$$

impomos os "vínculos quirais cruzados",

$$\pi_{\phi_V} = \phi'_A, \quad \pi_{\phi_A} = \phi'_V \quad (3.24)$$

e fazemos a rotação

$$\begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_V \end{pmatrix} = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

terminamos com o modelo esperado dado pela soma de dois MQSM com quiralidades opostas.

É importante notar que a propriedade de confinamento do férmion é clarificada quando se vê que, a partir do resultado acima, um modelo composto por dois férmions quirais com quiralidades opostas é equivalente a uma soma de densidades de lagrangiana de dois modelos (MSV e MSA), os quais confinam os férmions. Realmente este é um mecanismo interessante porque o fechamento das famílias que elimina a anomalia, a exemplo do que ocorre com o modelo padrão, neste caso leva a um espectro quântico onde o número de partículas diminui quando o modelo é considerado em sua expressão completa.

Existe um outro caminho para se ver que o modelo obtido pela

adição de densidades de lagrangiana de dois bósons quirais com quiralidades opostas, interagindo com o campo de calibre, tem um número menor de graus de liberdade que um único bóson quiral. Isto pode ser feito lembrando-se que um MSQM deve ter a mesma ação efetiva para o campo de calibre que o MSQ [19,20].

No presente caso, pode-se integrar os dois campos escalares  $\theta(x)$  e  $\phi(x)$  na  $\mathcal{L}_I$  definida mais acima, obtendo com isso a ação efetiva:

$$\mathcal{L}_{eff} = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2 A_\mu \left[ \frac{1}{2} (a + b + 2)g^{\mu\nu} - 2 \frac{1}{\square} \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu, \quad (3.26)$$

onde, quando a transversalidade é requerida (vide apêndice), obtém-se que  $a + b = 2$  (como observado anteriormente). Além disto ela pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{eff} = (e^2/2)A_\mu (\square + 4e^2) \left[ g^{\mu\nu} - \frac{1}{\square} \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu, \quad (3.27)$$

ou simplesmente

$$\mathcal{L}_{eff} = (e^2/2)A_\mu^\top (\square + 4e^2)A_\top^\mu, \quad (3.28)$$

onde  $A_\mu^\top$  é a parte transversa (independente de calibre) do campo de calibre. Isto nos revela o caráter do modelo como sendo do tipo de Schwinger, tendo férmions confinados mas com o dobro da massa gerada dinamicamente no modelo de Schwinger. Na verdade esta massa poderia se tornar arbitrária através da introdução de um termo de

WZ usual, como é feito para o MSV [6].

Toda a discussão acima nos mostra que o termo de WZM é realmente um MSQM, usado com o objetivo de remover a anomalia. Neste sentido ele está em contradição com a filosofia do termo de WZ proposto por Faddeev e Shatashvili [4], pela qual este termo não deve alterar o conteúdo físico do modelo, pode-se mostrar inclusive que este termo aparece de maneira completamente natural ao se considerar apropriadamente a medida funcional [5,6].

Do que foi acima exposto pode-se concluir que não existe qualquer termo de WZ mínimo, isto porque este corresponde na realidade a um outro MSQM. Assim, se quisermos recuperar a invariância de calibre ao nível quântico e simultaneamente manter o espectro físico da teoria, somos obrigados a utilizar o WZ usual [20].

Além do mais é importante observar que a discussão acima leva-nos a suspeitar que um modelo composto por dois férmions, tendo cada qual separadamente uma densidade de lagrangiana do tipo do MSQ [12] (cada um tendo um férmion sem carga assintótico), sendo simultaneamente invariante de calibre, não tenha um férmion assintoticamente livre, como ocorre com o MSV e o MSA. Isto deve ainda ser confirmado através do cálculo das funções de correlação fermiônicas, o que pretendemos fazer oportunamente.

Caso fosse verdade, teríamos um mecanismo muito interessante caso fosse válido em dimensões mais altas, abrindo a possibilidade do confinamento de algumas partículas, sempre que as famílias fechassem, propondo uma possível explicação caso o quark top não apareça nos experimentos em andamento.

## CONCLUSÕES

Ao longo desta tese discutimos alguns aspectos da restauração da invariância de calibre em modelos anômalos em duas dimensões. Discutimos o MSG anômalo e não-anômalo em sua versão em termos das componentes transversal e longitudinal do campo de calibre, que geram densidades de lagrangiana com termos de derivada de ordem superior. Resolvemos exatamente o modelo tanto no caso geral em que  $M^2 \neq g_1^2$ , como no caso singular em que  $M^2 = g_1^2$ . O primeiro caso foi resolvido através de transformações nos campos, que se tornavam singulares quando  $M^2 = g_1^2$ , justificando neste formalismo o fato de devermos tratar este caso em separado. Para discutirmos o segundo caso usamos o método de inversão de matrizes. Sempre que possível todos os resultados foram comparados com aqueles que têm aparecido na literatura. Seria interessante procurarmos as transformações nos campos capazes de desacoplar a densidade de lagrangiana também no caso singular. Estudamos também a possibilidade de fazer tal restauração através de um termo de Wess-Zumino mais geral do que o que aparece usualmente na literatura [23]. No curso deste estudo encontramos alguns fatos interessantes, como o aparecimento de massas dependentes do calibre e que ao escolhermos o calibre de Landau nos deparamos com uma fixação para o valor da massa do bóson de calibre. Ficaram entretanto alguns pontos a serem melhor compreendidos, principalmente aquele que se refere ao significado físico deste novo termo. Deveremos procurar agora estudar o espaço de Hilbert físico do modelo, partindo de um estudo detalhado da estrutura de vínculos da teoria. A dificuldade neste estudo seria

aquela advinda do fato destas densidades de lagrangiana possuírem termos com derivadas de ordem superior. Para realizarmos este estudo deveremos primeiramente procurar estudar a literatura referente à quantização de Dirac de tais densidades de lagrangiana [52]. Poderemos também fazer um estudo da estrutura de vínculos do MSG em sua versão em termos das componentes do campo de calibre, isto porque esta versão também é do tipo com derivadas de ordem superior, como foi visto aqui na formulação de integral funcional.

No segundo capítulo, apresentamos um método simples e sistemático capaz de nos por em condições de saber se uma dada densidade de lagrangiana é covariante de Lorentz, isto em casos em que esta covariância não é explícita [21,24]. Com base neste método fomos capazes de propor a existência de uma segunda versão covariante Lorentz e acoplada a um campo de calibre abeliano  $U(1)$  para o bóson quiral de Floreanini-Jackiw [12]. Vimos que esta segunda versão apresenta o que chamamos de "simetria de calibre quiral", simetria esta que "respeita" a quiralidade do bóson de tal forma que ele mantém sua quiralidade sob transformações de calibre, contrariamente ao que ocorre com a calibração feita por Harada [19,20]. Mostramos ainda haver uma certa dualidade entre os vínculos das duas versões [21]. Entretanto alguns pontos necessitam ser clarificados, um deles seria o que diz respeito ao espectro do modelo por nós proposto. Deveremos procurar determinar completamente o espectro desta segunda versão para a calibração do bóson quiral. Como parece haver uma equivalência, ao menos ao nível clássico, entre as versões de Siegel e de Floreanini-Jackiw para o bóson quiral [14,53,58,21], pretendemos estudar a versão do bóson de Siegel calibrado que aparece na equação (2.3.5), e aproveitar o

fato de ele ser explicitamente covariante de Lorentz para determinar o espectro nesta segunda calibração. Estamos interessados também em verificar a covariância de Lorentz da densidade de lagrangiana (2.2.18) pelo método tradicional dos geradores de simetria, mostrando que eles fecham a álgebra de Poincaré. Devemos ainda procurar verificar se há equivalência entre esta segunda calibração e o modelo de Schwinger quiral, como acontece no caso do MSQM proposto por Harada [19,65].

Além do mais podemos pensar em algumas extensões, entre elas estaria a de procurarmos a versão não-abeliana do modelo [65,66], a procura da extensão supersimétrica para esta nova versão [67,68], além de possíveis novos acoplamentos do bóson quiral de Floreanini-Jackiw com a gravidade e com a supergravidade [69-71], em analogia ao que ocorreu com o campo de calibre. Poderemos ainda estudar o modelo em termos de sua versão na mecânica quântica, a fim de procurar entender mais profundamente a física por trás desta nova calibração [72].

Um estudo muito interessante seria aquele da procura de um termo de Wess-Zumino que nos levasse a uma versão não-anômala para esta simetria de calibre quiral, ou seja, assim como o termo de Wess-Zumino usual recupera a simetria de calibre do MSQ [6], deveríamos ser capazes de achar um termo de Wess-Zumino tal que esta simetria de calibre quiral fosse mantida para o mesmo MSQ. Estudos preliminares parecem indicar que este termo seria do tipo generalizado estudado no capítulo um, no sentido de que ele tenha termos com derivadas de ordem superior.

No capítulo anterior nós estudamos o caso do termo de Wess-Zumino mínimo [26-28] mostrando que, ao contrário do que é

dito nas referências 26 e 27, o único termo covariante de Lorentz é tal que corresponde a um bóson quirial com quiralidade oposta à do modelo originalmente considerado, mostrando portanto que o cancelamento da anomalia ocorre devido às anomalias se anularem, como acontece com o fechamento de famílias no modelo padrão, e não por um mecanismo de Wess-Zumino legítimo, que como sabemos não deve alterar o espectro e o espaço de Hilbert físico da teoria. Isto nos sugere que a adição de férmions quirais com quiralidades opostas, é tal que há um confinamento dos férmions pois, como vimos ao mostrarmos a equivalência de dois MSQ com quiralidades opostas à soma de um MSV e um MSA, que por sua vez confinam os férmions. Isto parece ser indicado quando verificamos que a ação efetiva para o campo de calibre de dois MSQ com quiralidades opostas, a menos de uma renormalização finita para a massa, é idêntica à do MSV. Deveríamos ainda procurar verificar se esta conclusão é de fato verdadeira do ponto de vista das funções de correlação fermiônicas.

## APÊNDICE

### O TERMO DE WESS-ZUMINO E O PROJETOR TRANSVERSO

Neste apêndice pretendemos mostrar uma forma alternativa de obter o chamado termo de WZ. Nesta descrição este termo é visto como aquele necessário para se completar o projetor transversal na ação efetiva [22]. Consegue-se assim eliminar o setor dependente de calibre e por conseguinte torna-se a teoria invariante de calibre.

Vamos começar exemplificando a idéia através da teoria de calibre abeliana, em seguida trataremos do caso da teoria de Proca onde esta simetria é quebrada explicitamente, e finalmente aplicaremos estas idéias ao caso do MSQ e do MSG.

Vejamos então o caso do campo de Maxwell sem carga, o qual é descrito por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu = \frac{1}{2} A_\mu^\top \square A_\mu^\top, \quad (\text{A.1})$$

onde  $A_\mu^\top = P_{\mu\nu}^\top A^\nu$  e  $P_{\mu\nu}^\top = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial_\nu) / \square$  é o projetor transversal. Esta teoria descreve uma partícula sem massa e a simetria de calibre é garantida pela presença do  $P_{\mu\nu}^\top$ , o qual cancela os graus de liberdade longitudinais responsáveis pela dependência de calibre. Caso seja possível encontrar uma teoria efetiva descrita por um operador massivo tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu^\top (\square - m^2) A_\mu^\top, \quad (\text{A.2})$$



então esta teoria descreveria uma excitação vetorial massiva invariante de calibre. A eletrodinâmica massiva (teoria de Proca) que é descrita por

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_{\mu} A^{\mu} , \quad (\text{A.3})$$

pode ser reescrita na forma da equação (A.2), desde que para isso acrescentemos o "termo de WZ",

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = - \frac{m^2}{2} A_{\mu} \frac{\partial_{\mu} \partial_{\nu}}{\square} A_{\nu} , \quad (\text{A.4})$$

o qual é precisamente a parte que falta para se completar o projetor transverso no termo de massa. Para se estabelecer a ligação com a teoria de Stuckelberg, escrevemos o WZ em uma forma local. Este objetivo pode ser alcançado se introduzirmos um campo auxiliar  $\theta$  da seguinte forma,

$$\mathcal{L}_{\theta} = \frac{1}{2} \alpha \partial_{\mu} \theta(x) \partial^{\mu} \theta(x) + \beta \theta(x) \partial_{\mu} A^{\mu} . \quad (\text{A.5})$$

Como este termo é quadrático no campo  $\theta$ , podemos fazer uma integração gaussiana e, com isto, fixar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  a partir da identificação com a ação não-local efetiva para o WZ. Uma outra forma simples de fazer isto seria usar a equação de movimento para o campo  $\theta$ ; de qualquer forma encontramos que

$$m^2 = \frac{\beta^2}{\alpha} . \quad (\text{A.6})$$

Escolhendo  $\alpha = 1$  e  $\beta = m$  reproduz-se a teoria massiva invariante de calibre do modelo de Stuckelberg [63]. Deve-se observar ainda a liberdade da introdução de um termo massivo invariante de calibre como por exemplo  $\mu^2 A_\nu^T A_T^\nu$ . Neste caso entretanto o coeficiente  $\mu$  seria identicamente nulo, mas esta não é uma característica geral. Veremos mais abaixo que para o MSQ e sua generalização o MSG, este termo é necessário para se obter uma forma local para o WZ.

Vamos agora tratar as teorias de calibre anômalas em duas dimensões. Começaremos estudando o MSQ e em seguida faremos a devida generalização para o MSG.

É um fato bastante conhecido de que uma teoria massiva invariante de calibre, descrita pela equação (A.2), pode de fato ser conseguida em duas dimensões através da eletrodinâmica quântica espinorial sem massa, conhecida como modelo de Schwinger [2] onde  $m^2 = e^2/\pi$ . Realmente, após integrar-se os férmions sem massa, pode-se encontrar uma ação efetiva  $W[A]$  dada por

$$\exp\{W[A]\} = \exp\left\{i S_{cl} + i \ln\left(\det(D[A])\right)\right\}, \quad (A.7)$$

que após algumas manipulações pode ser escrita na forma da equação (A.2) [64]. Em um espaço-tempo de duas dimensões podemos escrever o projetor transverso como

$$P_{\mu\nu}^T = - \frac{\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square}, \quad (A.8)$$

com  $\bar{\partial}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu$  e  $\epsilon_{\mu\nu}$  sendo o tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. No caso do MSQ, Jackiw e Rajaraman encontraram a

seguinte ação efetiva,

$$\mathcal{L}_{\text{MSQ}} = \frac{1}{2} A_\mu M^{\mu\nu} A_\nu, \quad (\text{A.9})$$

onde a matriz  $M^{\mu\nu}$  se escreve como

$$M^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\square + e^2 a) - \partial^\mu \partial^\nu - e^2 (\partial^\mu - \bar{\partial}^\mu) \frac{1}{\square} (\partial^\nu - \bar{\partial}^\nu). \quad (\text{A.10})$$

O parâmetro  $a$ , que foi introduzido como um termo de massa para o bóson de calibre, reflete a ambiguidade de regularização no cálculo do determinante fermiônico e, como discutido por Jackiw e Rajaraman, é totalmente arbitrário, exceto pela restrição que  $a \geq 1$ , para se evitar o aparecimento de excitações taquiônicas. Observe que na teoria descrita em (A.9) e (A.10) não há qualquer esperança de se ajustar  $a$  para se recuperar a invariância de calibre, a razão está na presença em  $M^{\mu\nu}$  de termos cruzados como

$$e^2 \left( \frac{\bar{\partial}_\mu \partial_\nu}{\square} + \frac{\partial_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right), \quad (\text{A.11})$$

os quais são independentes da escolha de  $a$ . Este termo é uma manifestação neste formalismo do termo de Schwinger que aparece nos comutadores a tempos iguais das componentes temporais da corrente de calibre, como mostrado por Wotzasek e Naón [39]. Se quisermos ter sucesso na obtenção de uma ação invariante de calibre, devemos cancelar este pedaço e então incluir outros termos necessários à obtenção da fatorização do projetor transversal da matriz  $M^{\mu\nu}$

$$M^{\mu\nu} \longrightarrow \bar{M}^{\mu\nu} = (\square - m^2) \frac{\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square}. \quad (\text{A.12})$$

Para fazê-lo, completamos primeiramente o projetor para o termo de massa. A densidade de lagrangiana resultante é

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} A_\mu^\top (\square + e^2(1 + a - C)) A_\top^\mu - \mathfrak{L}_{\text{WZ}}, \quad (\text{A.13})$$

com

$$\mathfrak{L}_{\text{WZ}} = - \frac{1}{2} e^2 A^\mu \left[ (1 - a) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \left( \frac{\bar{\partial}_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right) + C \frac{\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right] A^\nu. \quad (\text{A.14})$$

Note que incluímos em  $\mathfrak{L}_{\text{WZ}}$  uma massa invariante de calibre cujo coeficiente  $C$  ainda precisa ser determinado. Seu valor deverá ser fixado através da forma local para  $\mathfrak{L}_{\text{WZ}}$ . Assim, vamos procurar uma densidade de lagrangiana dependente de um campo auxiliar  $\theta$  da seguinte forma,

$$\mathfrak{L}_\theta = \frac{\alpha}{2} \partial_\mu \theta(x) \partial^\mu \theta(x) + \beta \theta(x) \partial_\mu A^\mu + \gamma \theta(x) \bar{\partial}_\mu A^\mu. \quad (\text{A.15})$$

Da equação de movimento para  $\theta$  encontramos que

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\square} (\beta \partial_\mu A^\mu + \gamma \bar{\partial}_\mu A^\mu). \quad (\text{A.16})$$

Após eliminarmos  $\theta$  em favor de  $A_\mu$  obtemos

$$\frac{\mathcal{L}}{\theta} = - \frac{1}{2\alpha} A^\mu \left[ \beta^2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} + \beta\gamma \left( \frac{\bar{\partial}_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right) + \beta^2 \frac{\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right] A^\nu. \quad (\text{A.17})$$

Comparando este resultado com a equação (A.14) obtemos,

$$C = \frac{1}{(1-a)} ; \frac{\beta^2}{\alpha} = e^2(a-1) ; \frac{\gamma^2}{\alpha} = \frac{e^2}{(1-a)}. \quad (\text{A.18})$$

Observe que o termo de massa para o bóson invariante de calibre se torna

$$m^2 = e^2(1+a) - \frac{e^2}{(1-a)} = \frac{a^2 e^2}{(a-1)}, \quad (\text{A.19})$$

em acordo com o resultado de Jackiw e Rajaraman.

O MSG é uma teoria de calibre espinorial em duas dimensões, onde férmions de Weyl de quiralidade oposta estão acoplados ao campo de calibre com intensidades diferentes. Sua densidade de lagrangiana é dada, como vimos outras vezes ao longo desta tese, por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu + e_R P_+ A_\mu + e_L P_- A_\mu) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{A.20})$$

onde definimos que  $P_\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$ . A ação efetiva para este modelo foi calculada de diversas formas [39,42], e sua forma é dada em (A.9) com

$$M_{\text{MSG}}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\square - e^2 a + g_+^2) - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} (\square - g_-^2 + g_+^2) +$$

$$+ g_- g_+ \left( \frac{\bar{\partial}_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right), \quad (\text{A.21})$$

onde

$$g_\pm = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e_R \pm e_L), \quad (\text{A.22})$$

e

$$e^2 = \frac{1}{2} (g_+^2 + g_-^2). \quad (\text{A.23})$$

Pode-se pensar o MSG como definindo um espaço de teorias, parametrizadas pelo parâmetro de regularização  $a$  e uma das cargas,  $g_-^2$  por exemplo. A cada ponto neste plano corresponde um modelo como o MSV ou o MSQ. Linhas de  $g_-$  constante correspondem a famílias de uma teoria específica parametrizada por  $a$ . Por exemplo,  $g_- = 0$  corresponde à família do MSV. Da equação (A.21) fica claro que apenas duas destas famílias tem chance de ser invariantes de calibre, especificamente o MSV e o MSA, correspondendo a  $g_- = 0$  e  $g_+ = 0$  respectivamente. Em cada uma destas famílias somente um membro é realmente invariante de calibre. Eles são obtidos fazendo  $a = 0$  no caso do MSV e  $a = 2$  no do MSA. Na linguagem hamiltoniana estes valores para o parâmetro  $a$  são exatamente os necessários para manter os vínculos de primeira classe.

Procedendo como antes podemos escrever a densidade de lagrangiana para o MSG da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{MSG}} = \frac{1}{2} A_\mu^T (\square + e^2 a + g_+^2 + e^2 C) A_T^\mu - \mathcal{L}_{\text{WZ}}, \quad (\text{A.24})$$

onde a densidade de lagrangiana para o termo de WZ é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WZ} = & -\frac{1}{2} A^\mu \left[ (g_-^2 - e^2 a) \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - g_- g_+ \left( \frac{\bar{\partial}_\mu \partial_\nu + \partial_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right) + \right. \\ & \left. + e^2 c \frac{\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\nu}{\square} \right] A^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A partir de sua forma local, como dado em (A.15), obtém-se a seguinte condição

$$e^2 c = \frac{g_+^2 g_-^2}{(e^2 a - g_-^2)}. \quad (\text{A.26})$$

Usando este resultado obtemos a massa para o bóson de calibre

$$m^2 = e^2 a + g_+^2 + e^2 c = e^2 a \frac{(e^2 a + g_+^2 - g_-^2)}{(e^2 a - g_-^2)}. \quad (\text{A.27})$$

que é a massa correta, como pode ser verificado a partir dos limites para os modelos particulares como o MSV, MSA e MSQ.

## REFERÊNCIAS

- [1] W. Thirring, *Ann. Phys. (N.Y.)* 3 (1958) 3.
- [2] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 128 (1962) 2425.
- [3] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys Rev Lett.* 54 (1985) 1219.
- [4] L. Faddeev e S. Shatashvilli, *Phys. Lett. B* 167 (1986) 225.
- [5] O. Babelon, F. A. Schaposnik e C. M. Viallet, *Phys. Lett. B* 177 (1986) 385.
- [6] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett. B* 183 (1987) 311.
- [7] D. Boyanovsky, I. Schimdt e M. F. L. Golterman, *Ann. Phys. (N.Y.)* 185 (1988) 111.
- [8] D. J. Gross, J. A. Harrey, E. Martinec e R. Rohm, *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 502; *Nucl. Phys. B* 256 (1985) 253; *Nucl. Phys. B* 267 (1986) 75.
- [9] W. Siegel, *Nucl. Phys. B* 238 (1984) 307.
- [10] C. Imbimbo e A. Schwimmer, *Phys. Lett. B* 193 (1987) 455.
- [11] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, F. P. Devecchi e A. Zadra, *Phys. Lett. B* 215 (1988) 564.
- [12] R. Floreanini e R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 1873.
- [13] M. E. V. Costa e H. O. Girotti, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 1771.
- [14] J. Sonnenschein, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 1772.
- [15] H. O. Girotti, M. Gomes, V. Kurak, V. O. Rivelles e A. J. da Silva, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 1913.
- [16] C. Wotzasek, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 129.
- [17] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, F. P. Devecchi e A. Zadra, *Phys. Rev. D* 39 (1989) 1784.



- [18] J. Sonnenschein, Nucl. Phys. B 309 (1988) 752.
- [19] K. Harada, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 139.
- [20] K. Harada, Phys. Rev. D 42 (1990) 4170.
- [21] A. de Souza Dutra, Mod. Phys. Lett. A, 7 (1992) 1623.
- [22] A. de Souza Dutra e C. Wotzasek, "The Wess-Zumino term and the transverse projector operator in anomalous gauge theories", Preprint: IF/UFRJ/91/38.
- [23] A. de Souza Dutra, "Comparison of the anomalous and non-anomalous generalized Schwinger models via functional formalism". CBPF preprint NF-030/92. Submetido para publicação.
- [24] S. A. Dias e A. de Souza Dutra, CBPF preprint NF-037/91, aceito para publicação no Physics Letters B
- [25] A. de Souza Dutra, Mod. Phys. Lett. A 7 (1992) 1449.
- [26] J. K. Kim, W. T. Kim e W. H. Kye, Phys. Rev. D 43 (1991) 626; e Phys. Rev. D 45 (1992) 717 (E).
- [27] W. H. Kye, W. T. Kim e J. K. Kim, Phys Lett. B 268 (1991) 59.
- [28] A. de Souza Dutra, Phys. Lett. B 286 (1992) 285.
- [29] H. O. Girotti, H. J. Rothe e K. D. Rothe, Phys. Rev. D 33 (1986) 514 e Phys. Rev. D 33 (1986) 592.
- [30] N. K. Falck e G. Kramer, Ann. Phys. (N.Y.) 176 (1987) 330, e Z. Phys. C 37 (1988) 321.
- [31] D. Boyanovsky, Nucl. Phys. B 294 (1987) 223.
- [32] C. A. Linhares, H. J. Rothe e K. D. Rothe, Phys. Rev. D 35 (1987) 2501.
- [33] S. Miyake e K. Shizuya, Phys. Rev. D 36 (1987) 3781.
- [34] H. O. Girotti e K. D. Rothe, Int. J. Mod. Phys. A 4 (1989) 3041

- [35] K. Harada e I. Tsutsui, *Z. Phys. C* 39 (1988) 137.
- [36] Z. J. Ge, D. Q. Hai e L. Y. Yang, *Phys. Rev. D* 43 (1991) 613 e *J. Phys. G* 17 (1991) L7.
- [37] M. S. Chanowitz, *Phys. Lett. B* 171 (1986) 280.
- [38] S. Miyake e K. Shizuya, *Phys. Rev. D* 37 (1988) 2282.
- [39] C. Wotzasek e C. M. Naon, *Z. Phys. C* 46 (1990) 445 e *J. Phys. G* 16 (1990) 765.
- [40] D. Shin Lee e S. C. Lee, *Phys. Rev. D* 43 (1991) 580.
- [41] J. L. Alonso, J. L. Cortés e E. Rivas, *Phys. Rev. D* 41 (1990) 2568.
- [42] S. A. Dias e C. A. Linhares, *Phys. Rev. D* 45 (1992) 2162.
- [43] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* 21 (1980) 2848, (E) 22 (1980) 1499.
- [44] S. Coleman, *Phys. Rev. D* 11 (1975) 2088.
- [45] S. Mandelstam, *Phys. Rev. D* 11 (1975) 3026.
- [46] J. A. Swieca, *Fortschr. Phys.* 25 (1977) 303.
- [47] M. Lüscher, *Nucl. Phys. B* 326 (1989) 557.
- [48] E. C. Marino, *Phys. Lett. B* 263 (1991) 63.
- [49] A. Burnel, *Phys. Rev. D* 33 (1986) 2981; 33 (1986) 2985.
- [50] A. J. Niemi e G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 2077. A. N. Redlich, *Phys. Rev. Lett.* 52 (1984) 18; *Phys. Rev. D* 29 (1984) 2366.
- [51] J. A. Mignaco, C. A. Linhares, "Algebraic properties of the Dirac equation in three dimensions". CBPF preprint NF 027/92.
- [52] C. P. Natividade, "Tratamento por Integrais Funcionais de Teorias com Derivadas de Ordem Superior", Tese de Doutorado, Instituto de Física, UFRJ, 1991.
- [53] L. Faddeev e R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 1692.

- [54] S. Belucci, R. Brooks e J. Sonnenschein, Nucl. Phys. B 304 (1988) 173.
- [55] S. Belucci, M. F. L. Golterman e D. N. Petcher, Nucl. Phys. B 326 (1989) 307.
- [56] J. M. F. Labastida e A. V. Ramalho, Phys. Lett. B 222 (1989) 231.
- [57] L. Alvarez-Guamé e P. Ginsparg, Nucl. Phys. B 243 (1984) 449; Ann. Phys. (NY) 161 (1985) 423.
- [58] D. Bazeia, Mod. Phys Lett. A 5 (1991) 2497.
- [59] Nossas convenções nesta seção são:  $\gamma^0 = -i\sigma^1$ ,  $\gamma^1 = -i\sigma^2$ ,  $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma^3$ ,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-)$ ,  $\epsilon^{01} = -\epsilon_{01} = +1$ ,  $\bar{\partial}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu$ ,  $\gamma_5\psi_{L,R} = \mp\psi_{L,R}$ ,  $\phi = \partial_0\phi$ ,  $\phi' = \partial_1\phi$ ,  $\partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1$ ,  $A_\pm = A_0 \pm A_1$ .
- [60] P. P. Srivastava, Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 2791.
- [61] C. P. Natividade, "On the constraints algebra of the minimal chiral Schwinger model with minimal Wess-Zumino term", preprint: IF/UFRJ/21-91.
- [62] Note que a expressão (3.1) é igual a que aparece na errata citada acima na referência [26].
- [63] Veja por exemplo, C. Wotzasek, Int. J. Mod. Phys. A 5 (1990) 1123.
- [64] E. Abdalla, M. C. Abdalla e K. D. Rothe, "Non-Perturbative Methods in Two Dimensional Quantum Field Theory", Singapura (World Scientific, 1991).
- [65] K. Harada e K. D. Rothe, Phys. Lett. B 237 (1990) 495.
- [66] D. K. Park, Phys. Rev. D 42 (1990) 2841.
- [67] D. A. Depireux, S. J. Gates Jr. e B. Radah, Phys. Lett. B 236 (1990) 411.
- [68] J. Barcelos-Neto, P.P. Srivastava e C. Wotzasek, "On Chiral

Bosons with Green-Schwartz Supersymmetry". Preprint IF/UFRJ/91/18.

[69] F. Bastianelli e P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B 217 (1989) 98.

[70] S. Bellucci, M. F. L. Golterman e D. N. Petcher, Phys. Lett. B 217 (1989) 289.

[71] F. Bastianelli, Phys. Lett. B 254 (1981) 427.

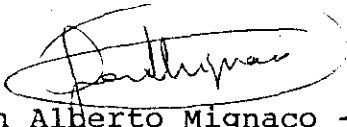
[72] M. M. Horta Barreira e C. Wotzasek, Phys. Rev. D 45 (1992) 1410.

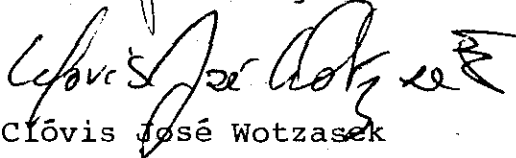
[73] P. A. M Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science (Yeshiva University Press, 1964).

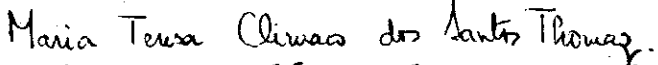
"O TERMO DE WEISS-ZUMINO E AS SIMETRIAS DE CALIBRE E DE  
LORENTZ EM MODELOS BIDIMENSIONAIS"

ALVARO DE SOUZA DUTRA

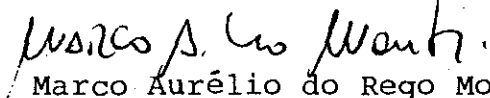
Tese de Doutorado apresentada no Cen-  
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
do Conselho Nacional de Desenvolvimen-  
to Científico e Tecnológico, fazendo  
parte da Banca Examinadora os seguin-  
tes professores:

  
Juan Alberto Mignaco - Presidente

  
Clóvis José Wotzasek

  
Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz

  
Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior

  
Marco Aurélio do Rego Monteiro

Rio de Janeiro, 01 de outubro de 1992