

PATRICIO ALFREDO GAETE DURÁN

QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE GAUGE E OS  
GAUGES DE FOCK-SCHWINGER E POINCARÉ

Tese de

DOUTORADO

530.4436  
3704

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, agosto de 1992

*A mis padres*

## AGRADECIMENTOS

1. Agradeço ao Professor C.A.P. Galvão pela orientação desta tese, pela sua crítica e por incentivar minha independência científica.
2. Agradeço a todos os amigos que, de uma ou outra forma, brindaram-me com seu apoio e hospitalidade e tornaram minha estadia no Brasil uma experiência inesquecível; a todos eles: *Muchas Gracias!*
3. Agradeço aos meus amigos J. Gamboa e M.A. Donoso pelo apoio e incentivo de longa data.
4. Agradeço à Marcia Nogueira e Fátima Dantas pelo efficientíssimo trabalho de edição desta tese.
5. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Neste trabalho estudamos as propriedades formais dos gauges de Fock-Schwinger e de Poincaré. Consideramos também a implementação destes gauges na quantização para teorias de Yang-Mills, do ponto de vista do método BRST; e para a QED, do ponto de vista do formalismo hamiltoniano de Dirac. Demonstramos que para as teorias estudadas é possível obter teorias quânticas consistentes. Apresentamos vários resultados que assinalamos a seguir: a) Propomos uma versão modificada para o gauge de Fock-Schwinger e, a seguir, a implementamos em uma teoria de gauge não abeliana no contexto do formalismo BFV. Obtemos assim, uma expressão explícita para o propagador do campo de gauge, bem como para a identidade de Ward geral. b) Usamos a lagrangiana fixada de gauge obtida através do formalismo BV no gauge de Fock-Schwinger para construirmos a carga BRST e a compararmos com a obtida no formalismo BFV. Assim, confirmamos a equivalência de ambas, conforme demonstrado ultimamente na literatura. c) Construimos a matriz  $\mathbf{U}$  para a QED, no gauge de Poincaré, através da estrutura dos colchetes de Dirac, sem a eliminação explícita das variáveis vinculadas. d) Propomos uma versão modificada do gauge de Poincaré que, quando aplicada à QED, torna-se análoga à QED no gauge de Coulomb. e) Obtemos uma expressão explícita para o propagador do fóton, no gauge de Poincaré, usando o formalismo de integrais funcionais e o método devido a Senjanovic. A similaridade entre este propagador e o calculado no gauge de Coulomb é comentada. f) Apresentamos uma derivação simples para o propagador do campo de gauge abeliano no gauge temporal através do formalismo invariante de gauge.

## ABSTRACT

In this thesis, we study the formal properties of the Fock-Schwinger and Poincaré gauges. We consider the implementation of these gauges in order to quantize Yang-Mills theories from the point of view of BRST method, and of QED to use the constrained Hamiltonian Dirac's formalism. We show, for the theories studied, that it is possible to obtain consistent quantum theories. We present several results: a) We propose a properly modified version of the Fock-Schwinger gauge condition and we consider the implementation in a non-Abelian gauge theory in the context of the BFV formalism. The free field propagator and the general Ward identity are also calculated. b) By using the fixed gauge Lagrangian, obtained from BV formalism in the Fock-Schwinger gauge, we construct the BRST charge and we compare that charge in the BFV formalism. Thus, we confirm the equivalence between them in accordance to what is showed in the literature. c) We construct the  $\mathbf{U}$  matrix of QED in the Poincaré gauge by means of the Dirac brackets, without having to explicitly eliminate the constrained variables. d) We propose a modified version of the Poincaré gauge. The resulting description of QED and this modified Poincaré gauge turn out to be analogous to those in the Coulomb gauge. e) By using the path integral formalism, within the Senjanovic framework, we calculate the photon propagator in the Poincaré gauge. Some formal similarities between our results and the expressions for the photon propagator in the Coulomb gauge are pointed out. f) We present a simple derivation for the propagator of the Abelian gauge field in the temporal gauge, by using the gauge invariant formalism.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| RESUMO . . . . .   | iv        |
| ABSTRACT . . . . .   | v         |
| LISTA DE FIGURAS . . . . .   | viii      |
| <br>   |           |
| INTRODUÇÃO . . . . .   | 1         |
| <br>   |           |
| <b>1 ESCOLHENDO UM GAUGE . . . . .</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1 O Gauge de Coulomb . . . . .   | 7         |
| 1.2 O Gauge Axial . . . . .  | 14        |
| 1.3 O Gauge Temporal . . . . .   | 16        |
| <br>   |           |
| <b>2 O GAUGE DE FOCK-SCHWINGER . . . . .</b>                                     | <b>20</b> |
| 2.1 Definição do Gauge . . . . .   | 21        |
| 2.2 Algumas Propriedades . . . . .   | 24        |
| 2.2.1 Fórmula de Inversão . . . . .  | 24        |
| 2.2.2 Acoplamento entre Campos de Gauge e Ghosts . . . . .                       | 27        |
| 2.2.3 Ambigüidade de Gribov . . . . .  | 28        |
| 2.3 Análise BRST para o Campo de Yang-Mills no Gauge de Fock-Schwinger . . . . . | 30        |
| 2.3.1 Formalismo Hamiltoniano (BFV) . . . . .                                    | 30        |
| 2.3.2 O Gauge de Fock-Schwinger no Formalismo BFV . . . . .                      | 33        |
| 2.3.3 Identidade de Ward . . . . .   | 37        |
| 2.3.4 Formalismo Lagrangiano (BV) . . . . .                                      | 40        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.3.5    | O Gauge de Fock-Schwinger no Formalismo BV . . . . .                 | 43         |
| 2.4      | Campo de Gauge Externo e o Gauge de Fock-Schwinger . . . . .         | 47         |
| <b>3</b> | <b>O GAUGE DE POINCARÉ</b>   | <b>52</b>  |
| 3.1      | Definição do Gauge . . . . .   | 53         |
| 3.2      | A QED no Gauge de Poincaré . . . . .                                 | 55         |
| 3.2.1    | O Campo de Maxwell . . . . .   | 55         |
| 3.2.2    | Eletrodinâmica Quântica . . . . .                                    | 61         |
| 3.3      | A Matriz U para QED e os Gauges de Coulomb e Poincaré . . . . .      | 64         |
| 3.3.1    | A Matriz U para QED . . . . .  | 64         |
| 3.3.2    | Comentário sobre os Gauges de Coulomb e Poincaré . . . . .           | 67         |
| 3.4      | O Propagador do Fóton no Gauge de Poincaré . . . . .                 | 69         |
| <b>4</b> | <b>INVARIÂNCIA DE GAUGE</b>  | <b>74</b>  |
| 4.1      | Formalismo Invariante de Gauge e Escolha do Gauge . . . . .          | 75         |
| 4.1.1    | Exemplo 1: Gauges de Fock-Schwinger, Poincaré e Temporal . . . . .   | 75         |
| 4.1.2    | Exemplo 2: O Monopolo de Dirac . . . . .                             | 80         |
| 4.1.3    | Exemplo 3: Propagador no Gauge Temporal . . . . .                    | 82         |
| 4.1.4    | Exemplo 4: Propagador Fermiônico em Campo Externo . . . . .          | 85         |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÕES</b>  | <b>91</b>  |
| <b>A</b> | <b>NOTAÇÕES E CONVENÇÕES</b>   | <b>94</b>  |
| <b>B</b> | <b>LEMA DE POINCARÉ E OS GAUGES DE FOCK-SCHWINGER<br/>E POINCARÉ</b> | <b>95</b>  |
| <b>C</b> | <b>OBTENÇÃO DAS EXPRESSÕES (2.55) e (3.94)</b>                       | <b>98</b>  |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                                    | <b>105</b> |

# Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| Fig. 1 - Trajetória de integração para o gauge de Poincaré .....                 | 78 |
| Fig. 2 - Trajetória de integração no gauge temporal .....                        | 79 |
| Fig. 3 - Monopolo de Dirac irradiado por retas .....                             | 81 |
| Fig. 4 - Trajetória de integração para o propagador fermiônico .....             | 86 |
| Fig. 5 - Trajetória de integração do propagador fermiônico independente do gauge | 89 |

# INTRODUÇÃO

As chamadas teorias de gauge desempenham um papel crucial no nosso quadro atual de teoria quântica de campos e partículas elementares. Assim, para se conseguir uma quantização das mesmas, deve-se escolher um elemento representativo de cada classe de potenciais equivalentes de gauge. Usualmente, consegue-se isto impondo as assim denominadas condições de gauge (ou condições auxiliares), as quais quebram a simetria de gauge da teoria em consideração. Em geral, sua forma é escolhida por conveniência de cálculos, bem como para expor alguma particularidade da teoria em estudo, existindo um grande número delas: covariantes, não covariantes, homogêneas, não homogêneas e assim por diante. Neste ponto é interessante mencionar que da literatura especializada o artigo de Leibbrandt<sup>[1]</sup> é realmente excelente. Tal trabalho contém praticamente toda a informação fundamental sobre os gauges não covariantes usuais. Dentro da classificação de Leibbrandt (comumente adotada), neste tipo de gauges incluem-se os: de Coulomb, axial puro, planar, axial inomogêneo, cone de luz, e temporal, entre outros. Estes gauges adquiriram nos últimos anos uma grande popularidade devido, em grande parte, ao fato de o propagador do campo de gauge conter somente partículas físicas e/ou os *ghosts* não acoplarem aos outros modos. Assim, muitos cálculos são mais diretos nestes gauges; por exemplo, com o uso do gauge cone de luz tornou-se possível demonstrar a finitude ultravioleta de modelos de Yang-Mills supersimétricos<sup>[2]</sup>. Já o gauge axial inomogêneo

tem sido ampla e efetivamente usado em QCD perturbativa no estudo de processos duros (“hard processes”)<sup>[3]</sup>. Mesmo que os gauges covariantes, incluindo o conhecido gauge de Lorentz, possuam a grande propriedade de manter a invariância de Lorentz manifesta na lagrangiana.

Não obstante, novas condições de gauge são sempre bem-vindas, sendo um assunto de constante interesse devido, principalmente, a problemas abertos em teorias de gauge não abelianas tais como: uso adequado do gauge de Coulomb, correta implementação do gauge temporal no contexto de integrais funcionais, inversão de operadores não ambíguos no gauge axial e temporal, além das conhecidas complicações que surgem em renormalização devido à presença de *ghosts*. Neste trabalho, discutiremos uma condição de gauge muito útil, originalmente proposta em sua forma covariante por Fock e Schwinger<sup>[4,5]</sup> (de acordo com a classificação dada anteriormente este é um gauge não covariante), enquanto que sua versão não covariante é conhecida como gauge de Poincaré, previamente utilizado em eletrodinâmica molecular e denominado gauge multipolar<sup>[6,7]</sup>.

As vantagens do gauge de Fock-Schwinger encontram-se em: não possuir ambigüidades de Gribov; os *ghosts* não acoplarem aos outros modos; permitir expressar o campo de gauge em função do tensor intensidade de campo de gauge; e ser um gauge completamente fixado. Por estes motivos, o gauge de Fock-Schwinger adquiriu notoriedade em conexão com efeitos não perturbativos em cromodinâmica quântica, cálculos da função  $\beta$ , e problemas de anomalias em teorias de gauge supersimétricas<sup>[8]</sup>. Ultimamente, na literatura, o gauge de Fock-Schwinger tem sido usado na aproximação de Hartree para QCD<sup>[9]</sup>, obtendo-se um campo médio gluônico consistente, permitindo escrever uma lagrangiana efetiva para quarks. Além disso, usando técnicas de muitos corpos na formulação hamiltoniana da QCD<sup>[10]</sup>, encontra-se o espectro gluônico de acordo com cálculos na rede. Usando as propriedades do gauge, ao considerar condensados não locais

na QCD, constróem-se regras de soma para os momentos do pión<sup>[11]</sup>. Por outro lado, a condição de Fock-Schwinger foi generalizada para as teorias do grupo de Poincaré que descrevem o campo gravitacional, e utilizado na gravitação em (2+1) dimensões<sup>[12]</sup>. Muito recentemente, estudando o problema de fixação de gauge para campos de Yang-Mills com simetria esférica, Schütte<sup>[13]</sup> propõe uma versão modificada do gauge de Fock-Schwinger com número de *winding* trivial para incorporar, dentro da formulação com gauge fixado, a simetria topológica relacionada ao parâmetro  $\theta$ . Este formalismo demonstra consistência para soluções tipo íntanton. É interessante mencionarmos que esta versão modificada do gauge é similar à proposta no Capítulo 2 deste trabalho.

A seguir apresentamos a organização do presente trabalho:

No Capítulo 1, fazemos uma breve revisão das principais características de três gauges não covariantes comumente usados, já que o gauge aqui estudado também pertence a esta categoria. Iniciamos o capítulo 2 considerando as propriedades formais do gauge de Fock-Schwinger, permitindo familiarizarmo-nos com várias de suas peculiaridades. Revisamos também os principais pontos do formalismo de Batalin, Fradkin e Vilkovisky (BFV)<sup>[14]</sup>, que é uma generalização da simetria de Becchi, Rouet, Stora e Tyutin (BRST)<sup>[15]</sup> e da integral funcional para teorias de Yang-Mills, o que, hoje em dia, constitui a linguagem moderna para o estudo de sistemas vinculados. A idéia básica neste formalismo (BFV) é a substituição da simetria de gauge original por uma simetria global, dando origem ao que é hoje denominado de simetria BRST. Feito isto, apresentamos argumentos para modificar a condição de gauge e logo implementá-la no formalismo BFV para uma teoria não abeliana, e encontramos uma expressão explícita para o propagador do campo de gauge e para a identidade de Ward geral. Tal propagador assemelha-se ao calculado por Kummer e Weiser<sup>[16]</sup> usando métodos diferentes para o caso do gauge de Fock-Schwinger não modificado. Mencionamos que, muito recentemente, Menotti e

Seminara<sup>[17]</sup> observaram que o propagador de Kummer e Weiser não é simétrico nos argumentos, mas não o invalida. Sabendo que a simetria BRST pode ser estudada nos formalismos hamiltoniano (BFV) e lagrangiano (desenvolvido por Batalin e Vilkovsky (BV)), faremos uma revisão sucinta deste último, que por sua vez é baseado no formalismo anticampo-antibracket. Neste caso, obtemos o gerador da simetria BRST através de uma lagrangiana com gauge fixado via teorema de Noether. Para complementarmos o já estudado e, com a idéia de considerarmos a conexão destas duas versões, comparamos as duas cargas BRST verificando a equivalência entre elas. Em seguida, fazemos algumas considerações sobre o subespaço físico da teoria quantizada. Finalmente, ilustramos através de um exemplo (anomalia triangular) a potência do gauge de Fock-Schwinger quando o campo de gauge é considerado como um campo externo.

No Capítulo 3, usando o formalismo hamiltoniano de Dirac, consideramos a descrição da QED no gauge de Poincaré. Construimos a matriz  $\mathbf{U}$  para a QED através da estrutura dos colchetes de Dirac sem eliminar explicitamente as variáveis vinculadas. Propomos, a seguir, uma versão modificada do gauge de Poincaré que, quando aplicada à QED, torna-se análoga à QED no gauge de Coulomb. Finalizamos este capítulo com a obtenção de uma expressão explícita para o propagador do fóton usando o formalismo integral funcional.

No Capítulo 4, com a ajuda do formalismo invariante de gauge, reobtemos alguns resultados conhecidos, a saber: fórmulas de inversão para o gauge de Fock-Schwinger nos casos abeliano e não abeliano; expressão dos potenciais no gauge de Poincaré (abeliano) em função dos campos elétricos e magnéticos; potenciais para o string de Dirac; e a passagem do gauge de Coulomb para o gauge temporal. Feito isto, apresentamos uma derivação simples para o propagador no gauge temporal. Finalizamos o capítulo com uma ilustração do cálculo da função de Green fermiônica invariante de gauge para o caso do

modelo de Block-Nordsieck.

Finalmente, o Capítulo 5 contém nossas conclusões, onde a principal delas é que a implementação destes gauges nos formalismos estudados nos conduz a teorias quânticas consistentes. Anexamos três Apêndices para complementar este trabalho: um para fixarmos a notação e convenções; um outro sobre os cálculos que permitiram encontrar os propagadores; e um terceiro sobre o lema de Poincaré e as fórmulas de inversão nos gauges de Fock-Schwinger e Poincaré.

# CAPÍTULO 1

## ESCOLHENDO UM GAUGE

Quantização de teorias de gauge nos leva a termos que escolher um gauge, conforme já dito. É certo que cada escolha tem suas sutilezas, ou melhor, méritos e dificuldades técnicas. Entre as principais características ante uma determinada escolha destacam-se: não acoplamento de *ghosts* com outros modos, ambigüidades de Gribov e número de graus de liberdade independentes que devem ser quantizados. É dentro desta perspectiva que, neste primeiro capítulo, torna-se interessante fazer uma revisão sucinta das características acima mencionadas para três gauges não covariantes amplamente usados na literatura, quais sejam: gauge de Coulomb, gauge axial puro e gauge temporal.

Em princípio, a melhor forma de atingirmos nosso objetivo será com o uso do formalismo hamiltoniano<sup>[18]</sup>, já que este método pode ser aplicado a qualquer sistema vinculado. Embora a quantização de teorias de gauge na formulação integral funcional considere os três gauges em um mesmo nível, uma análise mais detalhada revela diferenças. Assim, nossa apresentação será feita através do formalismo hamiltoniano e, quando necessário, mencionaremos aspectos da formulação integral funcional.

O capítulo foi organizado da seguinte forma: consideramos cada gauge aplicado ao caso de Maxwell, bem como ao caso de teorias do tipo Yang-Mills. Em se tratando de um capítulo de revisão ou de caracterização dos gauges, muitos detalhes serão remetidos à literatura original<sup>[18-20]</sup>.

## 1.1 O Gauge de Coulomb

### a) Caso abeliano:

Neste caso, o campo de Maxwell livre é descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \quad (1.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Suas equações de movimento escrevem-se na forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 , \quad (1.2)$$

enquanto que seus momentos canônicos estão dados por:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} , \quad (1.3)$$

de forma que temos o vínculo primário:

$$\pi^0 \approx 0 . \quad (1.4)$$

Usando colchetes de Poisson canônicos para  $A_\mu$  e  $\pi^\nu$  a tempos iguais,

$$[A_\mu(x), \pi^\nu(y)] = \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x - y) , \quad (1.5)$$

observamos que os colchetes (1.5) são incompatíveis com (1.4). Ao mesmo tempo, das equações de Euler-Lagrange (1.2), vemos que a componente zero ( $\nu = 0$ ) conduz ao

vínculo secundário

$$\partial_k \pi^k \approx 0, \quad (1.6)$$

onde esta igualdade fraca é escrita devido à incompatibilidade com (1.5). Seguindo a prescrição de Dirac escrevemos, em primeiro lugar, a hamiltoniana canônica na forma:

$$H_C = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} \vec{B}^2 - \pi^k \partial_k A^o \right), \quad (1.7)$$

com  $B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk}$ . Assim, para a obtenção da hamiltoniana total adiciona-se a (1.7) um múltiplo do único vínculo primário, isto é:

$$H_T = H_C + \int d^3x v(x) \pi^o(x), \quad (1.8)$$

sendo  $v(x)$  uma função arbitrária. Fazendo uso dos colchetes de Poisson (1.5), vemos que os vínculos (1.4) e (1.6) são de primeira classe e, através da hamiltoniana (1.8), encontramos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_o A_i = [A_i, H_T] \approx -\pi_i + \partial_i A_o, \quad (1.9)$$

$$\partial_o \pi_i = [\pi_i, H_T] \approx -\partial^j F_{ji}, \quad (1.10)$$

$$\partial_o A_o = [A_o, H_T] \approx v. \quad (1.11)$$

Observemos que aqui a física é descrita pelas equações fracas. Sendo assim, o ponto chave diz respeito a que diferentes escolhas de  $v$  conduzem a diferentes teorias matemáticas descrevendo a mesma física, pois ainda há a liberdade de gauge na teoria. Em outras palavras, do ponto de vista hamiltoniano, a escolha de um gauge é feita através da substituição de uma função arbitrária por uma bem definida na hamiltoniana. Dito isto, passemos a considerar uma escolha específica: o gauge de Coulomb.

A condição do gauge de Coulomb é dada por:

$$\partial_k A^k = 0. \quad (1.12)$$

Da equação (1.9) e do vínculo (1.6) encontramos:

$$\nabla^2 A_o(x) = 0 , \quad (1.13)$$

e, supondo que os potenciais anulam-se no infinito, obtemos:

$$A_o(x) \approx 0 . \quad (1.14)$$

Assim, usando os colchetes de Poisson (1.5) vemos que o conjunto de vínculos (1.4), (1.6), (1.12) e (1.14) é de segunda classe, de modo que, seguindo a prescrição de Dirac, podemos desacoplar os graus de liberdade físicos dos vinculados através dos colchetes de Dirac. Tais colchetes são definidos por:

$$[A(x), B(y)]^* = [A(x), B(y)] - \int d\omega d\eta [A(x), \phi_\alpha(\omega)] C_{\alpha\beta}^{-1}(\omega, \eta) [\phi_\beta(\eta), B(y)] , \quad (1.15)$$

onde  $\phi_\alpha$  é qualquer um dos vínculos e  $C_{\alpha\beta}^{-1}$  designa a matriz inversa de  $C_{\alpha\beta}$ , construída a partir dos elementos  $C_{\rho\sigma} = [\phi_\rho, \phi_\sigma]$ . É importante mencionarmos, sem entrar em detalhes do cálculo<sup>[19]</sup>, que, ao decompormos o potencial  $A_i$  em componentes transversais e longitudinais, dadas por:

$$A_i^T(x) = (\delta_{ij} - \partial_i \nabla^{-2} \partial_j) A_j(x) ,$$

com

$$\nabla^{-2} f(x) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} f(\vec{y}) ,$$

e:

$$A_i^L(x) = (\partial_i \vec{\nabla}^{-2} \partial_j) A_j(x) ,$$

obtemos:

$$[A_i^T(x), \pi_j^T(y)] = [A_i(x), \pi_j(y)]^* = (\delta_{ij} - \partial_i \vec{\nabla}^{-2} \partial_j) \delta^{(3)}(x - y) . \quad (1.16)$$

Ou seja, o colchete de Poisson entre as componentes transversais é idêntico ao colchete de Dirac nos  $A_i$  e  $\pi_i$  originais. Como sabemos, (1.16) é a base para conseguirmos a quantização canônica do campo de Maxwell no gauge de Coulomb (os colchetes de Dirac envolvendo  $A^L, \pi^L, A_o, \pi_o$  são nulos). Conseqüentemente, obtemos uma hamiltoniana efetiva expressa somente em termos das variáveis transversais, isto é:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left( (\vec{\pi}^T)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A}^T)^2 \right), \quad (1.17)$$

que é não local, contendo somente graus de liberdade físicos, o que também reflete-se no propagador bosônico do campo de gauge.

b) Caso não-abeliano:

Consideremos agora uma teoria não abeliana do tipo Yang-Mills descrita pela lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (1.18)$$

com  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ , em acordo com as notações deste trabalho (Apêndice A). Repetindo os mesmos passos do caso abeliano, temos que:

$$\pi^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_o A_\mu^a)} = F^{a\mu o}, \quad (1.19)$$

ou seja, novamente  $A_o^a$  não possui uma variável canonicamente conjugada, dando origem ao vínculo primário:

$$\pi^{ao} \approx 0. \quad (1.20)$$

As equações de movimento, para este caso, são escritas na forma:

$$D^{\mu ab} F_{\mu\nu}^b = 0, \quad (1.21)$$

(sendo  $D^{\mu ab} = \delta^{ab} \partial^\mu + g f^{abc} A^{c\mu}$ ).

De forma análoga ao caso abeliano, da componente zero de (1.21) obtemos:

$$D_k^{ab} \pi^{kb} = 0, \quad (1.22)$$

que é uma generalização da lei de Gauss (1.6) da teoria de Maxwell. Da mesma forma que antes, estes vínculos (1.22) e (1.20) são incompatíveis com os colchetes de Poisson fundamentais:

$$[A_\mu^a(x), \pi^{b\nu}(y)] = \delta^{abc} \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(x-y), \quad (1.23)$$

e portanto (1.20) e (1.22) devem ser considerados no sentido fraco. Como fizemos previamente, escrevendo uma hamiltoniana total obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_o A_i^a = [A_i^a, H_T] \approx -\pi_i^a + D_i^{ab} A_o^b, \quad (1.24)$$

$$\partial_o \pi_i^a = [\pi_i^a, H_T] \approx -D^{jab} F_{ji}^b - gf^{abc} A_o^b \pi_i^c, \quad (1.25)$$

$$\partial_o A_o^a = [A_o^a, H_T] \approx v^a. \quad (1.26)$$

Devido à auto-interação dos campos de Yang-Mills torna-se importante neste caso a escolha de uma condição de gauge adequada, sendo este um assunto que requer cuidado especial. Para melhor apreciarmos este ponto, lembremos que, em geral, uma condição de gauge pode ser assim escrita:

$$F^a(A_\mu^b(x), \psi(x)) = 0, \quad a, b = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (1.27)$$

sendo  $N$  a dimensão do grupo.  $F^a$  é um funcional local de  $A_\mu^b$  e  $\psi$ , com valores na álgebra de Lie ( $\psi$  designa outros campos), podendo ser covariante (p.ex., no gauge de Lorentz), ou não covariante (p.ex., no gauge de Coulomb). A condição (1.27) deve cumprir dois requisitos<sup>[1]</sup>: Primeiro, os campos transformados de gauge também devem satisfazê-la, isto é:

$$F^a(\omega A_\mu^b(x); \omega \psi(x)) = 0. \quad (1.28)$$

E, segundo, para um  $A_\mu^b$  e  $\psi$  dados, o sistema (1.28) deve fornecer uma única solução  $\omega(x)$ , sujeita a certas condições de contorno. Esta condição implica o não anulamento do determinante em relação às transformações infinitesimais:

$$\det M \equiv \det \left( \frac{\delta F^a(x)}{\delta \varepsilon^b(y)} \right) \neq 0 . \quad (1.29)$$

Feita esta observação, consideremos a condição de gauge<sup>[18]</sup>

$$F^a(A_i^b, \pi_i^b) = 0 , \quad a, b = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (1.30)$$

que, usando as equações (1.24,1.25) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial F^a}{\partial A_i^c} (-\pi_i^c + D_i^{cb} A_o^b) + \frac{\partial F^a}{\partial \pi_i^c} (-D^{jcb} F_{ji}^b - g f^{cbd} A_o^b \pi_i^d) \approx 0 , \quad (1.31)$$

e, por sua vez,

$$K^{ab} A_o^b - \frac{\partial F^a}{\partial A_i^c} \pi_i^c - \frac{\partial F^a}{\partial \pi_i^c} D^{jcb} F_{ji}^b \approx 0 , \quad (1.32)$$

onde  $K^{ab}$  designa o operador:

$$K^{ab} = \frac{\partial F^a}{\partial A_i^c} D_i^{cb} - g f^{cdb} \frac{\partial F^a}{\partial \pi_i^c} \pi_i^d , \quad (1.33)$$

também dado por:

$$[F^a(x), D_k^{bc} \pi^{kc}(y)] = K^{ab} \delta^{(3)}(x - y) . \quad (1.34)$$

Como já mencionado, (1.30), que é uma equação sobre os elementos do grupo, deve ter uma solução única. Isto nos garante que as funções  $v^a$  (1.26) estejam unicamente fixadas em termos das variáveis físicas, sendo necessário, como exposto acima, que o  $\det K$  seja não nulo. Do ponto de vista da integral funcional, este termo é denominado de “compensador de gauge”, aparecendo como um fator adicional na medida funcional. Quando depende somente das coordenadas canônicas, dá origem aos *ghosts* de Faddeev-Popov na lagrangiana. No entanto, se depender dos momentos, pode acontecer que a integração funcional, neste caso, não possa ser efetuada<sup>[18]</sup>.

Dito isto, consideremos a condição de gauge de Coulomb para campos de Yang-Mills, isto é:

$$\partial^k A_k^a = 0 . \quad (1.35)$$

Neste caso, o operador  $K$  converte-se em:

$$\begin{aligned} K^{ab} = \partial^k D_k^{ab} &= \partial^k (\delta^{ab} \partial_k + g f^{abc} A_k^c) \\ &= \partial^k \partial_k \delta^{ab} + g f^{abc} \partial^k A_k^c + g f^{abc} A_k^c \partial^k , \end{aligned}$$

que, usando (1.35) conduz a:

$$K^{ab} \approx \partial^k \partial_k \delta^{ab} + g f^{abc} A_k^b \partial^k . \quad (1.36)$$

Assim, o ponto importante a ser ressaltado é o seguinte: com a possibilidade de anulação do  $\det K$  para campos grandes, as equações (1.35) passam a apresentar múltiplas soluções. Esta não unicidade das soluções é conhecida na literatura como ambigüidade de Gribov<sup>[21]</sup> do gauge. Desta forma, o gauge de Coulomb (1.35) não é a escolha de gauge mais adequada para teorias não abelianas. Notemos que o problema não existe no caso abeliano. Não obstante, para o caso não abeliano, tal gauge pode ser usado na forma perturbativa em torno de  $g = 0$ , como é comumente feito na literatura<sup>[19]</sup>, ou seja, procedendo da mesma maneira que no caso abeliano, temos:

$$\partial^i D_i^{ab} A_0^b - \partial^i \pi_i^a \approx 0 , \quad (1.37)$$

permitindo, a princípio, resolver  $A_0^b$  em função dos  $\pi_i$  (detalhes sobre este ponto podem ser encontrados na referência [19]).

Resumindo, a escolha do gauge de Coulomb em teorias não abelianas apresenta um problema: a ambigüidade de Gribov.

## 1.2 O Gauge Axial

Como este gauge tem uma literatura muito extensa<sup>[1,22]</sup>, estudaremos somente seus pontos essenciais:

### Caso abeliano:

O denominado gauge axial, também conhecido como gauge axial puro ou gauge axial homogêneo, é definido por

$$n^\mu A_\mu = 0, \quad n^2 \gtrsim 0 \quad e \quad n^2 = n_o^2 - \vec{n}^2, \quad (1.38)$$

com  $n^\mu$  sendo um vetor fixo no espaço. Um gauge muito usado na literatura corresponde a um caso especial desta família de gauges, com  $n = (0, \vec{n})$ , isto é:

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0. \quad (1.39)$$

O caso  $n_o = 1$ , e  $\vec{n} = 0$  é denominado de gauge temporal, ou de Heisenberg-Pauli, ou gauge de Weyl.

Assim, como no caso do gauge de Coulomb, usando (1.9) obtemos

$$\vec{n} \cdot \vec{\pi} - \vec{n} \cdot \nabla A_o \approx 0 \quad (1.40)$$

que, para simplificação, escolhemos  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  (ou seja, o gauge  $A^3 \approx 0$ ), de forma que o inverso do operador  $\partial_3$  resulta bem definido e dado por<sup>[19]</sup>

$$\partial_3^{-1} f(x) = \frac{1}{2} \int d^3 y \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \epsilon(x_3 - y_3) f(y). \quad (1.41)$$

O conjunto de vínculos  $\pi^o \approx 0$ ,  $\partial^k \pi_k \approx 0$ ,  $A^3 \approx 0$  e  $\pi^3 - \partial^3 A^o \approx 0$  é de segunda classe, de forma que usando a prescrição de Dirac podemos novamente separar os graus

de liberdade físicos dos vinculados, obtendo assim uma hamiltoniana efetiva expressa somente em termos de variáveis físicas da forma:

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \frac{1}{2}(\pi^2)^2 - \pi^1 \partial_1 A^0 - \pi^2 \partial_2 A^0 - \frac{1}{2}(\partial_3 A^0)^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 \right), \quad (1.42)$$

com  $A^0$  dado por:

$$A^0(x) = - \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \left( \partial_1 \dot{A}^1 + \partial_2 \dot{A}^2 \right). \quad (1.43)$$

Observemos que (1.42) é novamente não local pois a lei de Gauss contém derivadas.

Caso não-abeliano:

Neste caso temos

$$\vec{n} \cdot \vec{A}^a \approx 0. \quad (1.44)$$

A partir de (1.33) vemos que

$$K^{ab} = n^i D_i^{ab} \approx n^i \partial_i \delta^{ab}, \quad (1.45)$$

a qual é uma matriz diagonal constante e, portanto, não há problemas nem de ambigüidade do gauge, nem de acoplamento com os *ghosts* de Faddeev-Popov.

Do mesmo modo que para o caso abeliano, agora temos

$$\vec{n} \cdot \vec{\partial} A_0^a - \vec{n} \cdot \vec{\pi}^a \approx 0, \quad (1.46)$$

podendo-se determinar  $A_0^a$ . Segue-se, assim, que a quantização pode ser efetuada de acordo com a prescrição de Dirac sem problemas, obtendo-se um hamiltoniano efetivo expresso somente por meio de graus de liberdade físicos.

Por último, e para complementação, observemos que do ponto de vista da integral funcional, o determinante de Faddeev-Popov presente na medida funcional é calculado da

seguinte maneira,

$$\det M = \det \left( \frac{\delta F^a[A]}{\delta A_\mu^c(x)} D^{\mu cb} \right) . \quad (1.47)$$

Usando  $F^a[A_\mu^b] = n^\mu A_\mu^a = 0$ , temos que

$$\frac{\delta F^a[A(y)]}{\delta A_\mu^c(x)} = \delta^{ac} n^\mu \delta(x - y) , \quad (1.48)$$

de modo que

$$\det M = \det (n \cdot \partial \delta^{ab} + g f^{abc} n \cdot A^c) . \quad (1.49)$$

Dado que  $n \cdot A^a = 0$ , obtemos  $\det M_{axial} = \det(n \cdot \partial \delta^{ab})$  (comparar com (1.45)); portanto, não existe acoplamento entre campos de gauge e de *ghosts* no gauge axial.

### 1.3 O Gauge Temporal

Embora este gauge (caso não abeliano), definido por

$$A_0^a = 0 \quad (1.50)$$

seja muito antigo, ainda hoje é motivo de intenso estudo<sup>[1,22]</sup>. A física das teorias quantizadas neste gauge não está totalmente contida na hamiltoniana total, sendo necessário impor vínculos externos sobre os estados físicos. Além disto, manipulações devem ser feitas sobre o espaço de Hilbert para se conseguir o espaço físico desejado<sup>[23]</sup>. Isto é um reflexo do gauge não ser completamente fixado. Logo, mesmo não tendo problemas de ambigüidades, nem de acoplamento entre os *ghosts* e os outros modos, possui a sutileza acima mencionada, o que tentaremos ilustrar a seguir.

Caso abeliano:

Neste caso, a condição vem dada por

$$A_o = 0 , \quad (1.51)$$

enquanto que a componente zero das equações de movimento é escrita como

$$\partial_k \pi^k = J_o(x) ; \quad (1.52)$$

a inclusão da corrente externa  $J_o$  é feita por conveniência<sup>[1]</sup>. Neste caso, a hamiltoniana é dada por

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (\vec{\pi}^2 + \vec{B}^2) . \quad (1.53)$$

Como nos casos anteriores, (1.51) e (1.52) são incompatíveis com os colchetes de Poisson (1.5), sendo novamente consideradas como igualdades fracas.

Como já mencionado, a condição (1.51) não fixa completamente o gauge, ou seja, não remove todos os graus de liberdade não físicos. É interessante notar que estes graus de liberdade residuais são gerados pelo vínculo lei de Gauss, isto é, por

$$P \equiv \partial_k \pi^k - J_o \approx 0 . \quad (1.54)$$

Com efeito, dado que a hamiltoniana é independente destes graus de liberdade residuais, temos

$$[H, P] \approx 0 \quad (1.55)$$

e, portanto,  $P$  é uma constante do movimento. Assim, para evitar a inconsistência entre (1.54) e os colchetes de Poisson, adota-se o critério de utilizar a hamiltoniana (1.53) sujeita à condição

$$P |phys\rangle = 0 , \quad (1.56)$$

sendo  $|phys\rangle$  os estados físicos. Com isto, e do mesmo modo que anteriormente, decompondo os campos  $A_i$  e  $\pi_i$  em partes transversais e longitudinais, temos:

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left( (\vec{\pi}^T)^2 + (\vec{\pi}^L)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A}^T)^2 \right), \quad (1.57)$$

onde  $\vec{\pi}^L$  elimina-se através de:

$$\vec{\pi}^L = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^{-2}) J_o = -\vec{\nabla} \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} J_o(x), \quad (1.58)$$

obtendo-se assim um hamiltoniano expreso somente em função de variáveis físicas.

Caso não-abeliano:

Como já mencionamos, neste caso o gauge está dado por

$$A_o^a \approx 0. \quad (1.59)$$

Para examinar o caso não abeliano emprega-se o mesmo critério do caso abeliano, permitindo obter uma hamiltoniana expressa somente em função de variáveis físicas. No entanto, a diferença (e dificuldade) surge na decomposição dos campos  $A_i$  e  $\pi_i$  em partes transversais e longitudinais devido à autointeração dos campos de Yang-Mills. Com efeito, neste caso a parte longitudinal de  $\vec{\pi}$  é definida por

$$\vec{\pi}_L^a = -\vec{\nabla}\varphi^a. \quad (1.60)$$

Logo, ao invés de (1.58), tem-se que resolver a seguinte equação

$$\vec{\nabla} \cdot D^{ab}\varphi^b = -g f^{abc} \vec{A}_T^b \cdot \vec{\pi}_T^c + J_o^a, \quad (1.61)$$

conduzindo à solução formal

$$\varphi^a(x) = \int d^3y K^{ab}(x,y) \left( -g f^{bcd} \vec{A}_T^c \cdot \vec{\pi}_T^d + J_o^b \right), \quad (1.62)$$

com  $K = (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})^{-1}$ , e  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})^{ab} K(x, y)^{bc} = \delta^{(3)}(x - y)$ .

Por último, a partir de (1.62) ressaltamos que, para o caso de  $\vec{A}_T$  grandes, a obtenção de  $\varphi$  é mais complexa<sup>[1]</sup>. Já para um acoplamento fraco, obtem-se uma situação similar ao caso abeliano considerado anteriormente.

## CAPÍTULO 2

### O GAUGE DE FOCK-SCHWINGER

Como já foi mencionado, este capítulo dedica-se ao estudo da condição de gauge de Fock-Schwinger, o que permitirá uma familiarização com as características mais relevantes do gauge. Desta forma, o capítulo é organizado ao longo das seguintes linhas. Em primeiro lugar, consideramos a questão de fixação do gauge para uma teoria de gauge do tipo Yang-Mills, mostrando-se que o gauge de Fock-Schwinger é um gauge completamente fixado.

Na seção 2, apresentamos as propriedades mais importantes do gauge, tais como: expressar o vetor potencial de gauge em termos do tensor intensidade de campo, o não acoplamento entre campos de gauge e *ghosts* e o não aparecimento da ambigüidade de Gribov. Na seção 3, devido à riqueza conceitual do formalismo BRST, fazemos uma análise da quantização da teoria utilizando para isto as duas versões existentes para tal formalismo, a saber: versões hamiltoniana e lagrangiana. O essencial do formalismo é que garante a unitariedade e consistência quântica da teoria, permitindo em princípio calcular a matriz de espalhamento para qualquer teoria. Nesta seção também consideraremos as identidades de Ward e o subespaço físico da teoria e calcularemos o propagador para o campo de gauge.

Finalmente, para completarmos o estudo, consideramos o caso em que o campo de gauge é dado como um campo externo, situação que tem sido extensamente explorada na literatura<sup>[24]</sup>.

## 2.1 Definição do Gauge

Numa teoria de gauge do tipo Yang-Mills, a lagrangiana é invariante frente a transformações de gauge locais do vetor potencial, na forma:

$$A_{\mu}^a(x) = \omega^{-1} A_{\mu}^a(x) \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \partial_{\mu} \omega, \quad (2.1)$$

com  $\omega \equiv \omega(x)$  um elemento do grupo de gauge  $\Lambda$ , de acordo com as convenções dadas no Apêndice A. Assim, a invariância da lagrangiana sob estas transformações implica uma liberdade ou ambigüidade na definição dos campos  $A_{\mu}^a(x)$ , pois existem muitos campos fisicamente equivalentes, ou seja, a um mesmo estado físico correspondem mais de um conjunto de variáveis canônicas que descrevem a teoria. Ao mesmo tempo, como é sabido, na formulação integral funcional esta liberdade manifesta-se no aparecimento de um volume infinito (proporcional a  $\int \prod_x d\omega(x)$ ) no funcional gerador  $\mathcal{Z}$ , conduzindo a funções de Green mal definidas. Por outro lado, a partir de um ponto de vista hamiltoniano, isso se reflete na presença de vínculos de primeira classe que são os geradores desta simetria. Assim, para efetuar uma quantização consistente da teoria deve-se eliminar esta ambigüidade nos campos ou, em outras palavras, eliminar os graus de liberdade de gauge espúrios. Faz-se isto impondo restrições adicionais (chamadas condições de gauge) sobre as variáveis, sem afetar as propriedades fisicamente relevantes do sistema. Tais condições não são, portanto, conseqüência da teoria, senão mais restrições impostas sobre a teoria que, como veremos, não são totalmente arbitrárias.

A condição de gauge de Fock-Schwinger é especificada pela condição:

$$(x^\mu - z^\mu) A_\mu^a(x) = 0, \quad (2.2)$$

onde  $z^\mu$  são as coordenadas de um ponto arbitrário fixo no espaço-tempo, tendo o papel de um parâmetro. O campo de gauge não abeliano é  $A_\mu \equiv A_\mu^a T^a$ , seguindo as convenções deste trabalho. A expressão anterior pode ser reescrita como:

$$(x^\mu - z^\mu) A_\mu^a(z + (x - z)) = 0, \quad (2.3)$$

que é outra forma da condição de gauge. Contudo, não há perda de generalidade ao considerar  $z^\mu = 0$ , o que faremos por simplicidade daqui em diante. Observemos que esta condição de gauge é invariante sobre transformações homogêneas de Lorentz, mas não o é ante translações. Como veremos depois, isto se reflete numa dependência explícita das coordenadas no propagador do campo de gauge. No que se segue, assume-se que o espaço é simplesmente conexo e que os potenciais são regulares, isto é, continuamente diferenciáveis até segunda ordem, suposições de grande importância na definição do gauge.

Como é sabido, toda condição de gauge deve satisfazer as seguintes propriedades: completeza e unicidade<sup>[25]</sup>. Um gauge é completo quando, dado um potencial vetor arbitrário o qual não satisfaz (2.2), podemos encontrar uma transformação de gauge  $\omega$  tal que o potencial vetor transformado satisfaça a condição de gauge. A segunda propriedade diz que, dados dois potenciais vetores satisfazendo (2.2),  $\omega$  deve ser constante. Para apreciarmos melhor isto, consideremos  $A_\mu$  um potencial que não satisfaz  $x^\mu A_\mu = 0$ . Desejamos, então, encontrar uma transformação de gauge  $\omega$  tal que o potencial transformado

$$A'_\mu = \omega^{-1} A_\mu \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \partial_\mu \omega \quad (2.4)$$

satisfaça a condição de gauge. Impondo  $x^\mu A'_\mu = 0$ , obtemos a seguinte equação para

$\omega(x)$ :

$$x^\mu \partial_\mu \omega = -ig x^\mu A_\mu \omega . \quad (2.5)$$

Esta equação tem como solução:

$$\omega = P \exp \left( -ig \int_0^1 d\lambda x^\mu A_\mu(\lambda x) \right) \omega_0 , \quad (2.6)$$

onde  $P$  é o operador de ordenamento para  $\lambda$  e  $\omega_0$  é um valor inicial (arbitrário) para  $\omega$ . Conseqüentemente, o gauge é sempre atingível através da transformação de gauge (2.4), com  $\omega$  dado por (2.6). Esta propriedade diz respeito a escolher de uma única maneira um elemento de cada classe  $\{A'_\mu(x)\}$  (para todo  $x \in \mathbf{R}^4$  e  $\omega \in \Lambda$ ) pois, de um ponto de vista geométrico, o conjunto  $\{A'_\mu(x)\}$  forma a órbita das configurações equivalentes ao campo de gauge. Considerando a segunda propriedade, suponhamos que tanto  $A_\mu$  como seu transformado de gauge,

$$A'_\mu = \omega^{-1} A_\mu \omega^{-1} - \frac{i}{g} \omega^{-1} \partial_\mu \omega , \quad (2.7)$$

satisfazem a condição de gauge, isto é,  $x^\mu A_\mu = 0 = x^\mu A'_\mu$ . Nestas condições, segue-se que:

$$x^\mu \partial_\mu \omega = 0 , \quad (2.8)$$

ou seja, esta é a condição que define as transformações de gauge entre potenciais no gauge de Fock-Schwinger. Dito de outra forma, a função  $\omega$  satisfazendo (2.8) define as transformações de gauge residuais para potenciais no gauge de Fock-Schwinger. A condição (2.8) diz que  $\omega(x)$  é uma função homogênea de grau zero, e do teorema de Euler temos:

$$\omega(x) = \omega(\lambda x) , \quad (2.9)$$

com  $\lambda$  arbitrário. Dado que  $\omega$  é regular, em particular na origem, pode-se tomar

$\lambda = 0$ , e com isto temos que

$$\omega(x) = \omega(0) = cte . \quad (2.10)$$

Portanto, a condição de gauge de Fock-Schwinger fixa o gauge a menos de transformações globais independentes do espaço-tempo, isto é, dois campos satisfazendo  $x^\mu A_\mu = 0$  podem ser relacionados por uma transformação de gauge global. Para removermos esta transformação global residual, devemos proceder da seguinte forma: sobre uma transformação de gauge  $\Omega(x)$  a função de gauge  $\omega(x)$  definida por (2.5) transforma-se de acordo com:

$$\omega(x) \longrightarrow \omega'(x) = \Omega^{-1}(x) \omega \omega_o^{-1} \Omega(0) \omega'_o .$$

Podemos exigir que  $\omega_o$  em (2.5) transforme-se como:

$$\omega'_o = \Omega^{-1}(0) \omega_o ,$$

desta forma removendo a transformação global  $\omega(0)$  de  $A'_\mu$ . Conseqüentemente, a condição de gauge é atingível e única. Em outras palavras, fixa completamente o gauge, constituindo-se assim numa boa condição de gauge.

## 2.2 Algumas Propriedades

### 2.2.1 Fórmula de Inversão

Por definição, o tensor de intensidade de campo é:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - gi[A_\mu, A_\nu] .$$

Multiplicando por  $x^\mu$ , encontramos

$$x^\mu F_{\mu\nu}(x) = x^\mu \partial_\mu A_\nu - x^\mu \partial_\nu A_\mu . \quad (2.11)$$

Usando a identidade

$$\partial_\nu (x^\mu A_\mu) = 0 = x^\mu \partial_\nu A_\mu + A_\nu , \quad (2.12)$$

podemos reescrever (2.11) como:

$$(1 + x^\mu \partial_\mu) A_\nu(x) = x^\mu F_{\mu\nu}(x) . \quad (2.13)$$

Substituindo  $x$  por  $\alpha x$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro arbitrário, temos que:

$$\frac{d}{d\alpha} (\alpha A_\nu(\alpha x)) = \alpha x^\mu F_{\mu\nu}(\alpha x) . \quad (2.14)$$

Ao integrarmos (2.14) ao longo da reta que liga os pontos  $z$  e  $x$ , sendo  $z$  um ponto fixo (na origem, como já foi mencionado) e  $x$  um ponto arbitrário do espaço, podemos integrar em  $\alpha$  de 0 a 1, obtendo-se

$$A_\nu(x) = \int_0^1 d\alpha \alpha x^\mu F_{\mu\nu}(\alpha x) . \quad (2.15)$$

Assim, encontramos uma expressão particularmente atrativa para o vetor potencial em termos do tensor de intensidade de campo, embora essa seja não local. Esta relação, a princípio, permite uma formulação de teorias de gauge em termos de  $F_{\mu\nu}$  [26,27]. Ao mesmo tempo, a validade desta fórmula de inversão está garantida pelo lema de Poincaré da geometria diferencial (vide Apêndice B). Também notemos que (2.15) satisfaz imediatamente a condição  $x^\mu A_\mu = 0$ . Apesar desta interessante propriedade, em alguns cálculos é apropriado fazer uma expansão em potências de derivadas do vetor potencial  $A_\mu$ . No que se segue, será mostrado que tal expansão emerge naturalmente neste gauge. Na teoria quântica esta expansão corresponde a uma expansão de operadores locais. Assim, o ponto de partida é a expressão (2.15), podendo ser escrita como:

$$A_\nu(x) = \int dz \int_0^1 d\alpha (z^\mu F_{\mu\nu}(z)) \delta(z - \alpha x) , \text{ ou}$$

$$A_\nu(x) = \int dz \int_0^1 d\alpha e^{\alpha x \cdot \nabla_z} (z^\mu F_{\mu\nu}(z)) \delta(z) , \quad (2.16)$$

onde  $e^{\alpha x \cdot \nabla_x}$  é o operador de translação com  $x \cdot \nabla_x \equiv x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ .

Usando a seguinte expressão:

$$\int_0^1 d\alpha e^{\alpha x \cdot \nabla_x} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (x \cdot \nabla) + \frac{1}{3!} (x \cdot \nabla)^2 + \dots, \quad (2.17)$$

(2.16) transforma-se em:

$$A_\nu(x) = \int dz \left[ \left( 1 + \frac{1}{2!} x^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1}{3!} x^\alpha x^\beta \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\beta} + \dots \right) (z^\mu F_{\mu\nu}(z)) \right] \delta(z).$$

Como foi mencionado, os potenciais são supostos continuamente diferenciáveis ao passo que a série de potências é uniformemente convergente. Assim, a expressão anterior pode ser integrada termo a termo, obtendo-se:

$$A_\nu(x) = \frac{1}{2 \cdot 0!} x^\alpha F_{\alpha\nu}(0) + \frac{1}{3 \cdot 1!} x^\alpha x^\beta \partial_\alpha F_{\beta\nu}(0) + \frac{1}{4 \cdot 2!} x^\alpha x^\beta x^\gamma \partial_\alpha \partial_\beta F_{\gamma\nu}(0) + \dots \quad (2.18)$$

O interessante nisto é que, com a escolha de gauge, podemos substituir as derivadas ordinárias por covariantes. A partir de (2.2) temos que:

$$x^\mu \left( A_\mu(0) + x^\alpha \partial_\alpha A_\mu(0) + \frac{1}{2} x^\alpha x^\beta \partial_\alpha \partial_\beta A_\mu(0) + \dots \right) = 0,$$

ou

$$x^\mu A_\mu(0) = 0,$$

$$x^\mu x^\alpha \partial_\alpha A_\mu(0) = 0,$$

$$x^\mu x^\alpha x^\beta \partial_\alpha \partial_\beta A_\mu(0) = 0, \text{ etc.}$$

Isto implica que podemos, ao menos localmente, substituir as derivadas ordinárias por covariantes. Por exemplo:

$$x^\alpha \partial_\alpha F_{\mu\nu}(0) = x^\alpha D_\alpha F_{\mu\nu}(0) \equiv x^\alpha (\partial_\alpha - g i A_\alpha) F_{\mu\nu}(0).$$

Em geral podemos escrever:

$$x^\alpha \cdots x^\gamma (\partial_\alpha \cdots \partial_\gamma F_{\mu\nu})|_o = x^\alpha \cdots x^\gamma (D_\alpha \cdots D_\gamma F_{\mu\nu})|_o . \quad (2.19)$$

Desta forma, usando (2.19) em (2.18), encontramos finalmente uma expressão bastante conhecida para  $A_\mu$ ,

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2 \cdot 0!} x^\nu F_{\nu\mu}(0) + \frac{1}{3 \cdot 1!} x^\nu x^\alpha D_\alpha F_{\nu\mu}(0) + \frac{1}{4 \cdot 2!} x^\nu x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta F_{\nu\mu}(0) + \cdots \quad (2.20)$$

Convém ressaltarmos que o ponto chave foi o uso da expressão (2.19), que permite substituir as derivadas ordinárias por covariantes, uma característica só possível neste gauge.

### 2.2.2 Acoplamento entre Campos de Gauge e Ghosts

Lembremos que o funcional gerador para uma lagrangiana  $\mathcal{L}(A)$  do tipo Yang-Mills está dado por:

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L} + J \cdot A) \right\} , \quad (2.21)$$

com  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$ ;  $N$  é um fator de normalização e  $J$  uma fonte externa, onde as derivadas deste funcional gerador, com respeito às fontes, conduzem às funções de Green da teoria. Como já foi mencionado na seção 2.1, a integral funcional dos campos de gauge envolve uma integração num número infinito de campos equivalentes. Assim, para tratarmos este problema, introduzimos um termo de fixação de gauge na lagrangiana, de acordo com o conhecido procedimento de Faddeev e Popov. Este termo é da forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\alpha} F^2 , \quad (2.22)$$

com  $F \equiv F(A_\mu)$  sendo alguma condição fixadora de gauge. Desta forma, seguindo Faddeev e Popov, o funcional gerador será expresso como:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + A_\mu J^\mu \right) \right\} \det M \prod_x \delta(F), \quad (2.23)$$

onde  $\det M$  é o determinante de Faddeev-Popov, dado por:

$$\det M^{ab}(x, y) = \det \frac{\delta F^a(A_\mu^a(x))}{\delta \varepsilon^b(y)}, \quad (2.24)$$

onde  $\varepsilon^b(y)$  são parâmetros do grupo de gauge. O determinante funcional ( $\det M$ ) pode ser exponenciado na forma:

$$\det M = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\eta}^a(x) M_{ab} \eta^b(y) \right\},$$

onde os campos  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  representam partículas de *ghosts* e obedecem a uma estatística de Fermi. Convém ressaltarmos que, de acordo com Faddeev-Popov, o propósito da introdução dos *ghosts* é restabelecer a unitariedade da matriz de espalhamento. Assim, a teoria é unitária por construção. Usando o gauge de Fock-Schwinger, temos que:

$$\begin{aligned} \det M^{ab}(x, y) &= \det \frac{\delta (x^\mu A_\mu^a(x))}{\delta \varepsilon^b(y)} = \det x^\mu D_\mu \delta^{ab} \delta(x - y) \\ &= \det x^\mu (\delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c(x)) \delta(x - y) \\ &= \det \delta^{ab} x^\mu \partial_\mu \delta(x - y). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como podemos observar, o resultado é independente do campo de gauge e portanto os *ghosts* não se acoplam aos campos de gauge.

### 2.2.3 Ambigüidade de Gribov

Outra propriedade a ser considerada num gauge, em particular, diz respeito à existência da ambigüidade de Gribov. Lembremos que, na formulação de teorias de

gauge em termos de integrais funcionais, tal ambigüidade se manifesta no aparecimento de modos zero do determinante de Faddeev-Popov. Assim, estes modos emergem da não unicidade dos campos físicos quando o gauge é fixado. Em outras palavras, as equações para os autovalores zero são diferentes em gauges diferentes. Para apreciarmos melhor isto, observemos que as transformações  $\omega(x)$  são autofunções da matriz  $M$  do determinante de Faddeev-Popov e, portanto, satisfazem a equação de autovalores

$$x^\mu \partial_\mu \omega(x) = \alpha \omega(x), \quad (2.26)$$

e, desta forma, tais transformações ( $\omega$ ) serão funções homogêneas de grau  $\alpha$ . Assim, no caso de autovalores  $\alpha$  nulos, de acordo com (2.8), a expressão (2.26) definirá as transformações de gauge residuais que, por sua vez, podem ser removidas. Convém notarmos que isto é possível por estarmos considerando potenciais regulares na origem, e por este motivo, os autovalores negativos podem ser dispensados se o espaço de estados físicos for restrito a tal classe de potenciais<sup>[26]</sup>. Assim, para autovalores positivos e com  $\omega$  univocamente definido, temos o potencial no gauge de Fock-Schwinger univocamente determinado, sem problema de ambigüidade. Podemos concluir o mesmo a partir do exposto na seção 1.1. Neste caso o operador  $K^{ab}$  (1.33) escreve-se como

$$K^{ab} \approx \delta^{ab} x^\mu \partial_\mu,$$

o qual é uma matriz diagonal sem problema de unicidade, e portanto não há ambigüidade de Gribov.

## 2.3 Análise BRST para o Campo de Yang-Mills no Gauge de Fock-Schwinger

### 2.3.1 Formalismo Hamiltoniano (BFV)

O objetivo desta subseção, bem como da próxima, seguindo a referência [28], será estudarmos a implementação do gauge de Fock-Schwinger modificado (como veremos depois) numa teoria de gauge, no contexto do formalismo BFV. Desta forma, em primeiro lugar, faremos uma revisão sucinta dos pontos mais importantes deste método de quantização<sup>[29,30]</sup>. Um estudo detalhado sobre este tema encontra-se na referência [30].

Assim, consideremos um sistema invariante de gauge descrito por um conjunto de variáveis canônicas  $(p, q)$ , uma hamiltoniana canônica  $H_o$ , e um conjunto  $\psi_a$  de vínculos de primeira classe. Lembremos que os vínculos de primeira classe satisfazem a álgebra:

$$\{\psi_a, \psi_b\} = C_{ab}^c \psi_c, \quad (2.27)$$

onde  $C_{ab}^c$  são constantes de estrutura. As equações de movimento que descrevem a evolução temporal do sistema são obtidas da ação:

$$S(p, q, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H_o - \lambda^a \psi_a), \quad (2.28)$$

com  $i = 1, \dots, n$  e  $a = 1, \dots, m$ . Os  $\lambda^a$  são multiplicadores de Lagrange para os vínculos. O ponto chave no formalismo de BFV é aumentar o espaço de fase. Isto é feito em duas etapas: primeiro, introduzimos o momento canônico  $p_a$  conjugado a  $\lambda^a$

$$\{\lambda_a, p^b\} = \delta_a^b. \quad (2.29)$$

Por consistência da teoria impõe-se que os  $p_a$  também sejam vínculos da mesma, isto é:

$$p_a = 0 . \tag{2.30}$$

Designando  $G_a = \{p_a, \psi_a\}$  o conjunto de todos os vínculos de primeira classe, temos que a álgebra que satisfazem é da forma:

$$\{G_a, G_b\} = V_{ab}^c G_c . \tag{2.31}$$

A segunda parte consiste em associar a cada vínculo  $G_a$  um par de *ghosts*  $\eta^a$  e  $\mathcal{P}^a$ , satisfazendo:

$$\{\eta_a, \mathcal{P}^b\} = -\delta_a^b . \tag{2.32}$$

Desta forma, o novo espaço de fase (estendido) no formalismo BFV é da forma:  $(p_i, q^i, \lambda_a, p^a, \eta^\alpha, \mathcal{P}_\alpha)$ . Para melhor apreciarmos este fato, consideremos novamente a prescrição de Faddeev-Popov. Com efeito, lembremos que, devido à invariância de gauge no funcional gerador  $\mathcal{Z}$ ,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D} A \exp \left( i \int dx \mathcal{L} \right) , \tag{2.33}$$

o gauge foi fixado, conduzindo a:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D} \eta^* \mathcal{D} \eta \mathcal{D} A \exp(S_{eff}) . \tag{2.34}$$

Como já mencionado,  $\eta$  e  $\eta^*$  são os campos de *ghosts* e  $S_{eff}$  designa a ação efetiva da teoria. Neste ponto, é interessante notar que, com este procedimento, a ação efetiva obtida não é invariante de gauge. Não obstante, a explicação deste aspecto veio através dos trabalhos de BRST e generalizado por BFV que, fundamentalmente, diz que incluir *ghosts* na teoria é equivalente a trocar a simetria de gauge local (original) por uma supersimetria global (BRST). Assim, do ponto de vista da simetria, substituir o espaço de fase original

pelo de BFV é equivalente a trocar a simetria local na ação (2.28) por uma supersimetria (global) entre as variáveis canônicas e *ghosts*.

O gerador desta simetria chama-se carga BRST ( $Q$ ), que satisfaz a propriedade de nilpotência,

$$\{Q, Q\} = 0. \tag{2.35}$$

A construção desta carga provém da álgebra de vínculos<sup>[30]</sup>, da forma:

$$Q = \eta^a G_a - \frac{1}{2} (-)^{\varepsilon_b} \eta^b \eta^c f_{bc}^a \mathcal{P}_a + \dots, \tag{2.36}$$

onde  $\varepsilon_b = 0$  ou  $\varepsilon_b = 1$  se, respectivamente,  $G_a$  for comutante ou anticomutante. A carga BRST é a quantidade básica neste formalismo, onde observáveis físicos são agora quantidades invariantes BRST, isto é, seu colchete de Poisson com  $Q$  anula-se.

Uma vez apresentada a estrutura clássica do formalismo BRST da teoria, passemos à sua quantização, conseguida através do teorema de Fradkin e Vilkovisky<sup>[30]</sup>:

**Teorema:** “Seja um sistema com vínculos de primeira classe (descrito no espaço de fase estendido) e seja  $S_{eff}$  a ação efetiva definida por

$$S_{eff} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( p_i \dot{q}^i + \dot{\eta}_a \mathcal{P}^a + p_a \dot{\lambda}^a - H_o - \{Q, \phi\} \right), \tag{2.37}$$

onde  $Q$  é a carga e  $\phi$  uma função fixadora de gauge; então,

$$\mathcal{Z}_\phi = \int \mathcal{D}_\mu \exp(iS_{eff}) \tag{2.38}$$

é independente da escolha de  $\phi$  e  $\mathcal{D}_\mu$  é a medida sobre todo o espaço de fase”.

### 2.3.2 O Gauge de Fock-Schwinger no Formalismo BFV

Feita esta revisão dos aspectos mais importantes do formalismo BFV, examinemos a implementação do gauge de Fock-Schwinger em tal formalismo. Primeiramente, observemos que o gauge estudado, além das características já consideradas, possui uma invariância sobre transformações de escala. Com efeito, notemos que  $x^\mu A_\mu^a = 0$  é adimensional e, portanto, invariante de escala. Isto significa que, quando é usado como termo de fixação de gauge, embora fixe o gauge, não fixa a escala da teoria. Em tal caso, faz-se necessário introduzir um parâmetro dimensional extra na teoria, o que, por sua vez, interferirá na renormalização da teoria final. Do acima citado e lembrando que a invariância conforme não sobrevive na teoria quântica eletromagnética, segue-se a não conveniência do uso do gauge na forma  $x^\mu A_\mu^a = 0$ . Desta forma, usando argumentos puramente dimensionais, a condição de gauge é modificada para a forma:

$$f^a[A] = \frac{x^\mu A_\mu^a}{x^2} = 0, \quad (2.39)$$

com  $x^2 = x^\mu x_\mu$ . Devemos ressaltar que considerar esta condição modificada em nada afeta a propriedade de ser um gauge completamente fixado.

Seguindo os passos da seção anterior, temos que:

$$S = \int d^4x \left( \pi_a^i \dot{A}_i^a - H_{YM} - \lambda^a \psi_a \right), \quad (2.40)$$

onde  $\pi_a^i$  são os momentos conjugados a  $A_i^a$ . Os vínculos escrevem-se na forma:

$$\psi_a = \partial^k \pi_k^a - f^{abc} \pi^{ck} A_k^b \approx 0, \quad (2.41)$$

e a densidade hamiltoniana de Yang-Mills é:

$$H_{YM} = \frac{1}{2} \left( \pi_i^a \pi_a^i + B_i^a B_a^i \right),$$



com  $B_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{ajk}$ . Notemos que, neste caso, o par de variáveis canônicas  $(A_a^o, \pi_a^o)$  não aparece devido ao fato de que estas variáveis não representam verdadeiros graus de liberdade. Assim, termos contendo  $A_o^a$  podem ser absorvidos redefinindo os multiplicadores  $\lambda^a$ . Logo, a ação efetiva no formalismo BFV assume a forma:

$$S_{eff} = \int d^4x \left[ \dot{A}_i^a \pi^{ai} + \dot{\lambda}^a p^a + C^a \bar{\mathcal{P}}^a + \dot{\bar{C}}^a \mathcal{P}^a - H_{YM} + \{\phi, Q\} \right]. \quad (2.42)$$

Neste caso, a carga BRST(Q) está dada por:

$$Q = \int d^3x \left( \psi^a C^a - i \mathcal{P}^a p^a + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{P}}^a f^{abc} C^b C^c \right), \quad (2.43)$$

satisfazendo a condição de nilpotência  $\{Q, Q\} = 0$ .

Ao mesmo tempo, verificamos que as transformações geradas pela carga  $Q$  estão dadas por:

$$\begin{aligned} \delta A_i^a &= \int d^3z \left\{ A_i^a(x), \beta \left( \psi^a(z) C^a(z) - i \mathcal{P}^a(z) p^a(z) + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{P}}^a(z) f^{abc} C^b(z) C^c(z) \right) \right\} \\ &= \beta D_i C^a, \end{aligned}$$

onde  $\beta$  é um parâmetro anticomutante independente do espaço-tempo. Observemos que, comparando com as transformações de gauge usuais, o parâmetro de gauge  $\varepsilon^a(x)$  agora é substituído por  $\beta C^a(x)$ .

$$\delta \pi_i^a = \beta f^{abc} \pi_i^c C^b,$$

$$\delta \lambda^a = -i \beta \mathcal{P}^a,$$

$$\delta p^a = 0,$$

$$\delta C^a = -\frac{1}{2} \beta f^{abc} C^b C^c,$$

$$\delta \bar{C}^a = -i \beta p^a,$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathcal{P}}^a &= \beta(\psi^a + f^{abc}\bar{\mathcal{P}}^c C^b), \\ \delta\mathcal{P} &= 0.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Escolhendo a função fixadora de gauge na forma

$$\phi = i\bar{C}^a \dot{\lambda}^a - i\dot{\bar{C}}^a \lambda^a - iC^a \frac{x^\mu A_\mu^a}{x^2} + \frac{i}{2}\alpha\bar{C}^a p^a + \bar{\mathcal{P}}^a \lambda^a,\tag{2.45}$$

temos:

$$\begin{aligned}\{\phi, Q\} &= \int d^3x \left( -p^a \dot{\lambda}^a + i\bar{C}^a \frac{x^k \partial_k C^a}{x^2} - iC^a f^{abc} C^b \frac{x^k A_k^c}{x^2} + p^a \frac{x^\mu A_\mu^a}{x^2} - \right. \\ &\quad \left. -\bar{C}^a \frac{\mathcal{P}^a x_0}{x^2} - \frac{1}{2}\alpha p^2 - \dot{\bar{C}}^a \mathcal{P}^a - \partial_k \pi^{ka} \lambda^a - i\bar{\mathcal{P}}^a \mathcal{P}^a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f^{abc} \bar{\mathcal{P}}^a C^b C^c \right).\end{aligned}\tag{2.46}$$

Assim, agora devemos substituir as expressões acima em (2.42) e, por sua vez, na expressão (2.38). Notemos que a medida neste caso fica expressa como:

$$\mathcal{D}_\mu = \mathcal{D}A_i \mathcal{D}\pi^i \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}p \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{\mathcal{P}} \mathcal{D}\mathcal{P}.\tag{2.47}$$

Observando que a integração em  $\pi^i$  e  $p$  é facilmente feita através de uma integral gaussiana e que a integral em  $\mathcal{P}$  conduz a uma delta funcional a qual permite integrar  $\bar{\mathcal{P}}$ , encontramos finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{i}{x^2} \bar{C}^a x^\mu D_\mu C^a + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\alpha x^4} (x^\mu A_\mu^a)^2 \right) \right\}.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Destá expressão, verificamos que o teorema de Fradkin e Vilkovisky contém como caso particular a prescrição de Faddeev-Popov. Devido à sua generalidade, na atualidade tal teorema é uma das formulações mais poderosas para quantizar sistemas de gauge<sup>[30]</sup>.

Introduzindo um termo de interação via corrente externa, temos que a ação efetiva fica:

$$S_{eff} = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + j_\mu^a A^{a\mu} + \frac{1}{2\alpha x^4} (x^\mu A_\mu^a)^2 \right), \quad (2.49)$$

que é diferente da ação clássica devido à presença do termo de fixação de gauge. Ao mesmo tempo, o termo proporcional a *ghosts* pode ser omitido, devido ao não acoplamento entre *ghosts* e campos de gauge e, portanto, sua integração pode ser absorvida num fator de normalização. Assim, consideremos em mais detalhe o papel que desempenha o termo de fixação de gauge. Para isto, consideremos as equações de movimento geradas por (2.49):

$$D^\mu F_{\mu\nu}^a + \frac{x_\nu}{\alpha x^4} (x^\mu A_\mu^a) = 0. \quad (2.50)$$

A divergência de (2.50) conduz a:

$$x^\mu \partial_\mu (x^\nu A_\nu^a) = 0. \quad (2.51)$$

Dado que  $x^\mu \partial_\mu$  é o gerador de transformações de escala do grupo conforme, concluímos que  $x^\nu A_\nu^a$  é invariante de escala. Desta forma, o termo de fixação de gauge  $\frac{x^\mu A_\mu^a}{x^2}$  não tem outro efeito, a nível clássico, senão fixar o gauge. Por outro lado, se tivéssemos usado  $x^\mu A_\mu^a$ , teríamos encontrado:

$$(4 + x^\mu \partial_\mu)(x^\nu A_\nu^a) = 0, \quad (2.52)$$

cujo significado não é claro, dado que  $x^\mu A_\mu^a$  é invariante de escala.

Por último, após estas considerações, a partir de (2.49) consideramos a forma do propagador do campo de gauge no gauge de Fock-Schwinger (2.39). Seguindo o procedimento usual, temos que (2.49) escreve-se na forma:

$$S_{eff} = \int d^4x \frac{1}{2} \left[ A_\mu^a \left( \eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\alpha x^4} x^\mu x^\nu \right) A_\nu^a + J^\mu A_\mu^a \right], \quad (2.53)$$

e portanto o propagador procurado é o inverso do operador:

$$D_{ab}^{\mu\nu} = \delta_{ab} \left( \eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\alpha x^4} x^\mu x^\nu \right). \quad (2.54)$$

Já que a inversão de tal operador não é tão direta, os detalhes deste cálculo podem ser encontrados no Apêndice C. Nesse caso escrevemos diretamente a expressão final, a saber:

$$K_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \left[ \frac{\eta_{\mu\nu}}{\square} - \frac{x_\mu \partial_\nu + \partial_\mu x_\nu}{x \cdot \partial + 1} \frac{1}{\square} + \frac{1}{(x \cdot \partial + 1)} \partial_\mu \left( \alpha x^4 + x^2 \frac{1}{\square} \right) \partial_\nu \right], \quad (2.55)$$

com  $x \cdot \partial \equiv x^\mu \partial_\mu$ . Para  $\alpha = 0$  a expressão (2.55) assemelha-se à obtida por Kummer e Weiser<sup>[16]</sup> para o gauge  $x^\mu A_\mu = 0$ , usando um método diferente. Por outro lado, para  $x \rightarrow 0$ , (2.55) tende ao propagador de Feynman independente do parâmetro  $\alpha$ . Como já foi comentado, observemos a dependência explícita das coordenadas espaço-tempo no propagador. Isto é um reflexo da não invariância translacional do gauge.

### 2.3.3 Identidade de Ward

Uma ilustração da riqueza do formalismo BRST relaciona-se diretamente com a sua descoberta, isto é, permite de uma maneira muito eficiente derivar as identidades de Ward, as quais, como é sabido, desempenham um papel importante no programa de renormalização de uma teoria. Lembremos que tais identidades são relações entre as diferentes funções de Green da teoria e refletem as simetrias da ação original, assegurando que todas as singularidades não físicas sejam canceladas nas amplitudes físicas.

Assim, consideremos o caso da interação entre campos de gauge e fermiônicos ( $\chi$  e  $\bar{\chi}$ ), na forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\chi} i \gamma^\mu D_\mu \chi, \quad (2.56)$$

onde  $D_\mu$  é uma derivada covariante (Apêndice A). Seguindo os mesmos passos da seção anterior, a ação efetiva agora é invariante ante as transformações BRST da forma:

$$\begin{aligned}
 \delta A_\mu^a &= \beta D_\mu C^a, \\
 \delta \chi^i &= -i\beta g(T^a)^{ij} \chi^j C^a, \\
 \delta \bar{\chi}^i &= i\beta g \bar{\chi}^j (T^a)^{ji} C^a, \\
 \delta C^a &= -\frac{1}{2} \beta f^{abc} C^b C^c, \\
 \delta \bar{C}^a &= -\frac{i\beta}{\alpha} \frac{x^\mu A_\mu^a}{x^2},
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde  $(T^a)^{ij}$  designa o elemento de matriz  $ij$  do gerador  $T^a$  na representação dos campos de matéria.

Para derivar as identidades de Ward neste caso, consideremos o funcional gerador das funções de Green introduzindo as fontes externas  $J, \bar{\xi}, \xi, \bar{\rho}, \rho$  para os campos  $A_\mu, C, \bar{C}, \chi$  e  $\bar{\chi}$ . Também, devido ao aparecimento dos operadores compostos nas transformações (2.57) da forma  $\chi C, \bar{\chi} C$  e  $CC$ , introduzimos as fontes  $\bar{K}, K$  e  $L$ , respectivamente. Desta forma, o gerador escreve-se como:

$$\mathcal{Z}[J, \bar{\xi}, \xi, \bar{\rho}, \rho, \bar{K}, K, L] = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \exp(iS_{eff}), \tag{2.58}$$

onde  $S_{eff}$  está dada por:

$$\begin{aligned}
 S_{eff} &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i\bar{\chi} \not{D} \chi + \frac{1}{2\alpha} \frac{(x_\mu A^{a\mu})^2}{x^4} + \right. \\
 &+ \frac{i}{x^2} \bar{C}^a x^\mu D_\mu C^a + J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\rho}^i \chi^i + \rho^i \bar{\chi}^i + \bar{\xi}^a C^a + \\
 &\left. + \xi^a \bar{C}^a - ig(T^a)^{ij} \bar{K}^i \chi^j C^a + ig(T^a)^{ij} \bar{\chi}^i C^a K^j - \frac{g}{2} f^{abc} L^a C^b C^c \right]. \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

Dado que a ação efetiva é invariante ante transformações BRST, temos que:

$$\begin{aligned} \delta S_{eff} &= \int d^4x (J_\mu^a \delta A^{\mu a} + \bar{\rho}^i \delta \chi^i + \delta \bar{\chi}^i \rho^i + \bar{\xi}^a \delta C^a + \delta \bar{C}^a \xi^a) , \\ \delta S_{eff} &= \beta \int d^4x [J_\mu^a D_\mu C^a + ig(T^a)^{ij} \bar{\rho}^i \chi^j C^a + ig(T^a)^{ij} \bar{\chi}^i C^a \rho^j + \\ &\quad + \frac{g}{2} f^{abc} \bar{\xi}^a C^b C^c - \frac{1}{\alpha} \frac{x^\mu A_\mu^a}{x^2} \xi^a] = 0 . \end{aligned} \quad (2.60)$$

Seguindo o procedimento usual, definimos o funcional gerador para as funções de vértice 1PI, na forma:

$$\Gamma = W(J, K, L) - \int d^4x (J_\mu^a A^{\mu a} + \bar{\rho}^i \chi^i + \bar{\chi}^i \rho^i + \bar{\xi}^a c^a + \bar{C}^a \xi^a) , \quad (2.61)$$

onde  $W$  é o funcional gerador para as funções de Green conexas ( $iW = \ln \mathcal{Z}$ ), obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^{\mu a}} &= -J_\mu^a , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi^i} &= -\bar{\rho}^i , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\chi}^i} &= \rho^i , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^a} &= -\bar{\xi}^a , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta C^a} &= \xi^a , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta K^i} &= ig(T^a)^{ij} \bar{\chi}^j C^a , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{K}^i} &= -ig(T^a)^{ij} \bar{\chi}^j C^a , \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta L^a} &= -\frac{g}{2} f^{abc} C^b C^c . \end{aligned} \quad (2.62)$$

Finalmente, substituindo (2.62) em (2.60), encontramos a identidade de Ward genera-

lizada

$$\int d^4x \left( \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^i} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{K}^i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\chi}^i} \frac{\delta\Gamma}{\delta K^i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta C^a} \frac{\delta\Gamma}{\delta L^a} - \frac{1}{\alpha} \frac{x_\mu A^{a\mu}}{x^2} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{C}^a} \right) = 0, \quad (2.63)$$

que é uma expressão compacta contendo toda a informação de simetria da teoria. Diferentes relações entre as funções de Green podem ser obtidas através de diferenciação funcional de (2.63), constituindo-se no ponto de partida apropriado para o estudo da estrutura de contratermos no programa de renormalização. Como é sabido, isto não é tão simples, principalmente no caso deste gauge, devido à sua não invariância translacional. No entanto, é interessante mencionar que Kummer e Weiser<sup>[16]</sup> construíram certos contratermos locais, mas só no caso especial de um loop. Desta forma, um programa geral de renormalização neste gauge, no melhor do nosso conhecimento, ainda está em aberto.

### 2.3.4 Formalismo Lagrangiano (BV)

Como vimos até o momento, sistemas invariantes de gauge são descritos por lagrangianas singulares, o que, na descrição hamiltoniana, reflete-se na presença de vínculos. Neste caso, o método para construir uma teoria quântica covariante é o formalismo de quantização visto anteriormente, onde os vínculos da teoria determinam a correspondente carga BRST.

Entretanto, existe outra formulação BRST de teorias de gauge denominada de lagrangiana (BV)<sup>[31]</sup>, baseada no chamado formalismo anticampo-antibracket. Pode-se assim, definir lagrangianas efetivas não-singulares invariantes BRST e obter-se a carga através do teorema de Noether. Na presente seção e na próxima sub-seção, para complementar o já exposto, examinaremos a conexão entre ambas formulações, adotando o ponto de vista da equivalência entre as cargas. Consideraremos também a questão da definição do espaço físico para a teoria quantizada. Assim, em primeiro lugar, serão brevemente re-

visadas as regras de quantização BRST na formulação lagrangiana (um estudo detalhado sobre isto encontra-se na referência<sup>[31]</sup>).

Seja  $\Phi^A$  um campo bosônico ou fermiônico descrevendo uma teoria dada. A cada campo  $\Phi^A$  associa-se um anticampo  $\Phi^{*A}$  com estatística oposta ao campo original, isto é:

$$\varepsilon(\Phi^A) = \varepsilon_A, \quad \varepsilon(\Phi^{*A}) = \varepsilon_A + 1, \quad (2.64)$$

onde  $\varepsilon_A$  denota a paridade de Grassmann.

Neste espaço de fase, composto pelos campos e anticampos, define-se a operação de antibrackets na forma:

$$(F, G) \equiv \frac{\partial_r F}{\partial \Phi^A} \frac{\partial_l G}{\partial \Phi^{*A}} - \frac{\partial_r F}{\partial \Phi^{*A}} \frac{\partial_l G}{\partial \Phi^A}, \quad (2.65)$$

onde  $\partial_r, \partial_l$  são as derivadas direita e esquerda, respectivamente. Os antibrackets têm as propriedades:

$$\begin{aligned} (B, B) &= 2 \frac{\partial_r B}{\partial \Phi^A} \frac{\partial_l B}{\partial \Phi^{*A}}, & (B \text{ bosônico}) \\ (F, F) &= 0, & (F \text{ fermiônico}) \\ ((G, G), G) &= 0. & (\text{qualquer } G) \end{aligned} \quad (2.66)$$

O funcional gerador da teoria, na formulação lagrangiana de quantização BRST, é construído na forma:

$$\mathcal{Z}_\psi = \int \prod_A d\Phi^A \exp\left(\frac{i}{\hbar} W_\Sigma(\Phi^A)\right), \quad (2.67)$$

onde  $W_\Sigma(\Phi)$  representa a restrição de  $W(\Phi, \Phi^*)$  à superfície  $\Sigma$  determinada pela condição:

$$\Phi^* = \frac{\partial \psi(\Phi)}{\partial \Phi}, \quad (2.68)$$

onde  $\psi$  é a chamada função fixadora de gauge. Devemos ressaltar que o funcional gerador  $\mathcal{Z}_\psi$  não depende da forma de  $\psi$ , desde que  $W$  seja solução da equação<sup>[31]</sup>:

$$\frac{1}{2}(W, W) = i\hbar\Delta W, \quad (2.69)$$

com  $\Delta \equiv \frac{\partial_r}{\partial\Phi^A} \frac{\partial_l}{\partial\Phi^{*A}}$ .

A solução da equação (2.69) pode ser expandida em potências de  $\hbar$ , na forma:

$$W = S + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n W_n, \quad (2.70)$$

de modo que, em ordem zero de  $\hbar$ , temos:

$$(S, S) = 0. \quad (2.71)$$

Esta é a chamada *master equation*;  $S$  representa a parte clássica de  $W$  e é a equação fundamental no formalismo BV. Ao mesmo tempo, se a medida  $\prod_A d\Phi^A$  é invariante ante transformações BRST da forma:

$$\delta_\psi \Phi^A = (-1)^{\epsilon_A} \frac{\partial_l S}{\partial\Phi^{*A}} \Big|_\Sigma, \quad (2.72)$$

Batalin e Vilkovisky<sup>[31]</sup> mostram que é possível pôr  $W_n = 0 (n \geq 1)$ , de modo que a solução da *master equation* ( $S$ ), quando restrita à superfície  $\Sigma$ , produza a ação quântica total da teoria. No entanto,  $W_n (n \geq 1)$  diz respeito à não invariância da medida frente a (2.72). Como podemos observar, no formalismo BV sempre é possível restabelecer a invariância BRST de uma teoria adicionando novos termos a  $S$ , desde que a transformação BRST seja definida com  $W$  no lugar de  $S$ .

### 2.3.5 O Gauge de Fock-Schwinger no Formalismo BV

Para apreciarmos melhor este formalismo, consideremos novamente uma ação do tipo Yang-Mills:

$$S_o = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \right). \quad (2.73)$$

Neste caso, a solução mínima para a *master equation* é dada por:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + A_\mu^{*a} D^{\mu ab} C^b + \frac{1}{2} C^{*a} f^{abc} C^b C^c \right), \quad (2.74)$$

o que pode ser comprovado facilmente, substituindo (2.74) na *master equation*  $(S, S) = 0$ . Ao mesmo tempo,  $C$  e  $C^*$  denotam o campo de *ghost* e o anticampo de *ghost*, respectivamente, enquanto que  $A_\mu^*$  representa o anticampo associado às variáveis da teoria original. Para implementar a condição de gauge, adicionamos à solução mínima o termo:

$$S' = \int d^4x \left( -i \bar{C}^{*\alpha} b_\alpha \right), \quad (2.75)$$

sendo  $b$  um campo auxiliar e  $\bar{C}^*$  o anticampo do *antighost*. A condição de gauge escolhida escreve-se na forma:

$$\psi = \int d^4x i \bar{C}^a x^\mu A_\mu^a. \quad (2.76)$$

Antes de continuarmos, dois comentários são pertinentes. Primeiro: usar um campo auxiliar ( $b$ ), como já sabemos, permite provar a nilpotência da carga BRST sem ter-se que recorrer ao uso das equações de movimento. Em segundo lugar, incluir um fator “ $i$ ” nas expressões (2.75) e (2.76) deve-se ao uso da hermiticidade dos campos de *ghosts* no sentido de Kugo e Ojima<sup>[32]</sup>, o que garante a hermiticidade da lagrangiana e, portanto, a unitariedade da matriz  $S$  da teoria. Dito isto, escreveremos finalmente a

solução mínima da seguinte forma:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i\bar{C}^a x_\mu D^{\mu ab} C^b + b^a x^\mu A_\mu^a \right). \quad (2.77)$$

A ação (2.77) é invariante ante as transformações BRST:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= D_\mu^{ab} C^b, \\ \delta C^a &= -\frac{1}{2} f^{abc} C^b C^c, \\ \delta \bar{C}^a &= -ib^a, \\ \delta b^a &= 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Como já mencionado, a carga BRST é obtida através do teorema de Noether. Assim, da expressão para a corrente conservada,

$$J^{\mu a} = \frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} \delta A_\nu^a + \frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu C^a)} \delta C^a + \frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu \bar{C}^a)} \delta \bar{C}^a + \frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu b^a)} \delta b^a, \quad (2.79)$$

obtemos a seguinte carga BRST:

$$Q = \int d^3x \left( D_i^{ab} \pi^{ai} C^b - \frac{i}{2} \bar{C}^a x^o f^{abc} C^b C^c \right). \quad (2.80)$$

Dado que o momento canônico de  $C$  é dado por:

$$\pi_c^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{C}^a} = i\bar{C}^a x^o,$$

(2.80) converte-se finalmente em:

$$Q = \int d^3x \left( D_i^{ab} \pi^{ai} C^b - \frac{1}{2} \pi_c^a f^{abc} C^b C^c \right). \quad (2.81)$$

Com o propósito de comparação, lembremos que, na formulação hamiltoniana,  $\pi_c^a$  era denotado por  $\bar{P}$  e  $D_i^{ab} \pi^{ai}$  não era outra coisa senão o vínculo da teoria, isto é:

$$\psi^b = D_i^{ab} \pi^{ai}. \quad (2.82)$$

Conseqüentemente, usando um formalismo diferente (BV), obtemos a mesma carga mínima BRST para teorias de Yang-Mills. Observemos que a carga BRST na versão hamiltoniana contém um termo adicional da forma  $i\mathcal{P}p$ . Não obstante, tal termo não é muito importante, pois reflete somente a ambigüidade da carga, ou seja, podemos adicionar ao conteúdo mínimo qualquer termo, desde que mantenha a propriedade de nilpotência. Em outras palavras, duas cargas BRST estão relacionadas através de uma transformação canônica no espaço de fase estendido. Ressaltemos que em nada muda o concluído sobre a equivalência das cargas se em (2.76) tivéssemos usado  $x^\mu A_\mu^a/x^2$ .

É interessante mencionarmos que comparar estes formalismos (BFV e BV) tem sido, ultimamente, motivo de estudo. Por exemplo, o resultado (2.81) coincide com aquele de Battle et al<sup>[33]</sup>, onde estes autores não utilizam uma condição de gauge, ao passo que Henneaux et al<sup>[34]</sup> mostraram que ambos os formalismos conduzem ao mesmo funcional gerador. Assim, nestes dois casos ficou concluído que tais formalismos são aspectos diferentes de uma mesma teoria. Por último, notemos que a carga (2.81) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Q = \int d^3x \left[ -x^\circ C \cdot \left( b + \frac{1}{2} \bar{C} \times C \right) \right], \quad (2.83)$$

após ter feito uso das equações de movimento, onde (2.83) tem uma estrutura similar que nos gauges axial<sup>[35]</sup> e de Lorentz<sup>[36]</sup>.

Por outro lado, ao considerarmos a respectiva teoria quântica, a questão que se apresenta é a de definir o subespaço físico. Dentro do espaço vetorial total de estados, como é sabido, tem-se estados não físicos de norma negativa, bem como estados não físicos correspondentes aos *ghosts*. Logo, a presença de estados de norma negativa (métrica indefinida) implicariam probabilidades negativas, as quais, evidentemente, dificultariam uma interpretação probabilística da teoria quântica. Segue-se, assim, que para se ter uma teoria quanticamente consistente, devemos eliminar os estados não físicos através de uma

condição subsidiária sobre os estados fisicamente acessíveis ao sistema (pertencentes ao subespaço físico  $V_{phys}$ ). No formalismo BRST, tal condição é definida por:

$$Q |\text{phys}\rangle = 0, \quad (2.84)$$

ou seja, os estados físicos  $|\text{phys}\rangle$  são aniquilados pela carga  $Q$ . Notemos que esta condição equivale a exigir que os geradores de gauge aniquilem os estados físicos num formalismo sem *ghosts*. Já uma teoria abeliana em (2.84) nos conduz à condição de Gupta-Bleuler. Entretanto, como foi mostrado por Kugo e Ojima<sup>[32]</sup>, que fizeram uso do mecanismo de quarteto, os *ghosts* podem ser eliminados, pois tais estados só aparecem como estados de norma nula (pertencentes ao subespaço  $V_0$ ). Assim, desta propriedade de norma nula e de (2.84), obtemos que os estados físicos pertencem a um espaço de Hilbert com métrica positiva definida.

Convém ressaltarmos que a condição subsidiária (2.84) possui as propriedades<sup>[37]</sup> de: linearidade; ter observáveis BRST ( $[Q, A] = 0$ ) que mapeiam o subespaço físico sobre ele mesmo e ter observáveis da forma  $[K, Q]$  que apresentam elementos matriciais nulos entre estados físicos

$$\langle \text{phys } 1 | [K, Q] | \text{phys } 2 \rangle = 0, \quad (2.85)$$

com  $|\text{phys } 1\rangle$  e  $|\text{phys } 2\rangle$  obedecendo (2.84). Observemos que para satisfazer (2.85), a carga  $Q$  deve ser hermitiana. Outro aspecto importante é que o subespaço físico definido por (2.84) é invariante de Poincaré. Isto já pode ser vislumbrado do ponto de vista puramente formal, pois sendo a carga BRST invariante ante as translações de Lorentz, temos:

$$[Q, P_\mu] = 0, \quad (2.86)$$

sendo  $P_\mu$  o gerador de translações. Notemos que usando (2.84) em (2.86) concluímos que o estado  $P_\mu |\text{phys}\rangle$  também pertence ao subespaço físico. Dito isto, a questão que

se apresentará num caso concreto será a seguinte verificação:

$$[Q, P_\mu] = 0, \quad (2.87)$$

e

$$[Q, M_{\mu\nu}] = 0, \quad (2.88)$$

com  $M_{\mu\nu}$  sendo os geradores de boosts. Sendo assim, usando (2.84) em (2.87) e (2.88) temos garantida a invariância de Poincaré no subespaço físico. Em outras palavras, o subespaço físico é mapeado sobre ele mesmo por transformações de Lorentz. Por último, mencionemos que para o caso considerado nesta sub-seção (eq. 2.77) também é verificada a invariância de Poincaré no subespaço físico, manifestando, mais uma vez, a potência do formalismo BRST.

## 2.4 Campo de Gauge Externo e o Gauge de Fock-Schwinger

Para concluirmos este capítulo e com a finalidade de termos uma visão mais ampla das peculiaridades do gauge de Fock-Schwinger, esta seção dedica-se (através de um exemplo) a ilustrar outra área em que o gauge tem sido usado com muito êxito, no passado e também recentemente<sup>[11,24]</sup>. Com efeito, o gauge alcançou sua máxima popularidade<sup>[38,39]</sup>, em comparação a outros gauges, ao se calcular propagadores em campo externo e/ou quantidades que envolvem o uso de tais propagadores. Para termos uma noção preliminar, lembremos do interesse existente em se dispor de técnicas adequadas na região não perturbativa da QCD, onde a grande virtude<sup>[38]</sup> foi poder descrever o confinamento em termos de uns poucos parâmetros, os chamados condensados,

que permitem por sua vez obter muitas propriedades hadrônicas através de regras de soma.

Assim, para apreciarmos melhor este contexto onde o gauge tem lugar de destaque, comecemos lembrando a expressão para o campo  $A_\mu$  no gauge de Fock-Schwinger (2.20),

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2 \cdot 0!} x^\nu F_{\nu\mu}(0) + \frac{1}{3 \cdot 1!} x^\nu x^\alpha D_\alpha F_{\nu\mu}(0) + \frac{1}{4 \cdot 2!} x^\nu x^\alpha x^\beta D_\alpha D_\beta F_{\nu\mu}(0) + \dots \quad (2.89)$$

Lembremos que, para obtermos (2.89), o ponto chave foi a substituição de derivadas ordinárias por covariantes. Da mesma maneira podemos proceder no caso fermiônico, isto é, expandindo em série o campo  $\psi(x)$  temos:

$$\psi(x) = \psi(0) + x^\mu \partial_\mu \psi(0) + \frac{1}{2!} x^\mu x^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi(0) + \dots \quad (2.90)$$

De acordo com (2.19) reescrevemos (2.90) na forma:

$$\psi(x) = \psi(0) + x^\mu D_\mu \psi(0) + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu D_\mu D_\nu \psi(0) + \dots, \quad (2.91)$$

ao passo que

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(0) + x^\mu \bar{\psi}(0) D_\mu^+ + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \bar{\psi}(0) D_\mu^+ D_\nu^+ + \dots, \quad (2.92)$$

com  $\bar{\psi}(0) D_\mu^+ = D_\mu \bar{\psi}(0)$ .

Desta forma consideremos o condensado dado pela seguinte expressão

$$\langle 0 | \bar{q}(x) q(0) | 0 \rangle, \quad (2.93)$$

onde  $q(x)$  designa o campo fermiônico (quark) e, por simplicidade, suprimimos os índices espinoriais, de sabor e cor. Na expressão anterior, podemos expandir  $\bar{q}(x)$  na forma:

$$\langle 0 | \bar{q}(x) q(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}(0) q(0) | 0 \rangle + \langle 0 | \partial_\mu \bar{q}(0) q(0) | 0 \rangle x^\mu + \dots \quad (2.94)$$

É interessante notarmos que o segundo termo não é invariante de gauge (e não local). Não obstante, através de (2.91) podemos passar de um produto de campos não invariantes de gauge (não locais) para um produto de campos invariantes de gauge (locais). Assim, obtemos um resultado bastante interessante, que é o ponto de partida para o cálculo de correntes vetoriais para quarks leves e pesados e toda uma linha de cálculos já conhecida na literatura<sup>[24]</sup>.

Consideremos como exemplo uma derivação da famosa anomalia triangular para a divergência da corrente axial (Adler-Bell-Jackiw). De acordo com a prescrição do *point-splitting* de Schwinger temos:

$$\partial_\mu J_5^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \bar{\psi}(x + \varepsilon) \gamma^\mu \gamma^5 \exp \left( ig \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy^\nu A_\nu(y) \right) \psi(x - \varepsilon) \right\}. \quad (2.95)$$

Efetuada a derivada obtemos o termo de nosso interesse, isto é, o termo da anomalia:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{J}_5^\mu &= \bar{\psi}(x + \varepsilon) \left[ -gi \not{A}(x + \varepsilon) \gamma^5 - gi \gamma^5 \not{A}(x - \varepsilon) + \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \left( ig \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy^\nu A_\nu(y) \right) \right] \times \\ &\times \psi(x - \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.96)$$

com  $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$ . Considerando a derivada do lado direito obtemos como é habitual:

$$\partial_\mu \left( gi \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy^\nu A_\nu(y) \right) = 2gi\varepsilon^\nu \partial_\mu A_\nu(x). \quad (2.97)$$

Notamos que nesta derivação Schwinger<sup>[40]</sup> usava originalmente campos constantes correspondendo ao primeiro termo na expansão para  $A_\mu$  no gauge de Fock-Schwinger, isto é,

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2} x^\nu F_{\nu\mu}(0). \quad (2.98)$$

Portanto, reescrevemos (2.97) da seguinte forma:

$$\partial_\mu \left( gi \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dy^\nu A_\nu(y) \right) = gi\varepsilon^\nu F_{\nu\mu}(0). \quad (2.99)$$

Tratando-se  $\mathcal{A}(x + \varepsilon)$  e  $\mathcal{A}(x - \varepsilon)$  de um modo análogo, obtemos para (2.96)

$$\partial_\mu \tilde{J}_5^\mu = \bar{\psi}(x + \varepsilon) (-2gi\gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon^\nu F_{\nu\mu}(0)) \psi(x - \varepsilon). \quad (2.100)$$

O valor esperado no vácuo é

$$\langle 0 | \partial_\mu \tilde{J}_5^\mu | 0 \rangle = g \text{Tr} (2\varepsilon^\nu F_{\nu\mu}(0) \gamma^\mu \gamma^5 S(x - \varepsilon, x + \varepsilon)), \quad (2.101)$$

onde  $S(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  é o propagador fermiônico (função de Green) para o operador de Dirac no campo externo (aqui expresso no gauge de Fock-Schwinger), e é dado por

$$S(x, y) = -i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle,$$

satisfazendo a equação:

$$\left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + g\gamma^\mu A_\mu(x) - m \right) S(x, y) = \delta(x - y). \quad (2.102)$$

Se o termo  $g\gamma^\mu A_\mu(x)$  for pequeno (comparado às distâncias  $(x - y)$ ), podemos tratá-lo como uma perturbação de modo que  $S(x, y)$  pode ser expandido em termos de  $g\gamma^\mu A_\mu(x)$ , isto é:

$$\begin{aligned} S(x, y) = & S^o(x - y) + g \int d^4z S^o(x - z) \gamma^\mu A_\mu(z) S^o(z - y) + \\ & + g^2 \int d^4z' d^4z S^o(x - z') \gamma^\nu A_\nu(z') S^o(z' - z) \gamma^\sigma A_\sigma(z) S^o(z - y) + \dots \end{aligned} \quad (2.103)$$

onde  $S^o(x - y)$  é o propagador livre, dado por:

$$S^o = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\gamma^\mu (x - y)_\mu}{(x - y)^4}.$$

Assim, consistente com a expansão de  $A_\mu$  considerada, temos:

$$S(x, y) = S^o(x - y) + \frac{g}{(2\pi^2)^2} \frac{1}{2} \int d^4z \frac{\gamma^\alpha (x - z)_\alpha}{(x - z)^4} z^\nu F_{\nu\mu}(0) \gamma^\mu \gamma^\beta \frac{(z - y)_\beta}{(z - y)^4} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g^2}{(2\pi^2)^3} \frac{1}{2^2} \int d^4z d^4z' \frac{\gamma^\alpha(x-z')_\alpha}{(x-z')^4} z'^\nu F_{\nu\mu}(0) \gamma^\mu \gamma^\sigma \frac{(z'-z)_\sigma}{(z'-z)^4} z^\rho F_{\rho\sigma}(0) \gamma^\sigma \times \\
 & \times \gamma^\beta \frac{(z-y)_\beta}{(z-y)^4} + \dots, \tag{2.104}
 \end{aligned}$$

que podemos reescrever como:

$$\begin{aligned}
 S(x, y) = & \frac{1}{2\pi^2} \gamma^\mu \frac{(x-y)_\mu}{(x-y)^4} - \frac{g}{8\pi^2} \frac{(x-y)_\alpha}{(x-y)^2} \tilde{F}^{\alpha\beta}(0) \gamma_\beta \gamma_5 + \\
 & \left[ \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{\gamma^\alpha(x-y)_\alpha}{(x-y)^4} \gamma^\rho x^\mu F_{\rho\mu}(0) - \frac{g^2}{192\pi^2} \frac{\gamma^\beta(x-y)_\beta}{(x-y)^4} (x^2 y^2 - (xy)^2) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + \\
 & + \dots, \tag{2.105}
 \end{aligned}$$

com  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . Retornando à expressão (2.101) notamos que devido ao traço somente o segundo termo em (2.105) contribui, e portanto (2.101) converte-se em:

$$\langle 0 | \partial_\mu \tilde{J}_5^\mu | 0 \rangle = \frac{g^2}{8\pi^2} \text{Tr} \left( -2\epsilon^\nu F_{\nu\mu}(0) \tilde{F}^{\alpha\beta}(0) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon^2} \gamma_\beta \gamma_5 \right);$$

após cálculo do traço obtemos o conhecido resultado:

$$\langle 0 | \partial_\mu \tilde{J}_5^\mu | 0 \rangle = \frac{g^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu}(0) \tilde{F}^{\mu\nu}(0) = \frac{\alpha_s}{4\pi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}(0). \tag{2.106}$$

## CAPÍTULO 3

### O GAUGE DE POINCARÉ

Após ter considerado no capítulo anterior o gauge de Fock-Schwinger, este capítulo dedica-se a estudar a versão não covariante de tal gauge, conhecida também como gauge de Poincaré.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: em primeiro lugar, estudam-se as propriedades formais, mostrando-se que é um gauge completamente fixado. Na seção 2, apresenta-se a estrutura canônica para a eletrodinâmica quântica usando o formalismo de Dirac. Na seção 3, constrói-se a matriz  $\mathbf{U}$  para a eletrodinâmica quântica usando o formalismo de Dirac, incluindo uma comparação entre os gauges de Coulomb e Poincaré devido à semelhança dos colchetes de Dirac para variáveis transversas no gauge de Poincaré com aqueles calculados no gauge de Coulomb. Finalmente, para completar o estudo, obtém-se uma expressão para o propagador do fóton dentro do formalismo integral funcional.

### 3.1 Definição do Gauge

No caso não abeliano as condições de gauge de Poincaré estão definidas por:

$$x^i A_i^a(x) = 0, \quad A_o^a(x) = -x^i \int_0^1 d\alpha F_{io}^a(t, \alpha \vec{x}), \quad (3.1)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro arbitrário. As equações anteriores são a generalização não abeliana das condições de gauge discutidas por Brittin et al.<sup>[41]</sup>, conhecida também como gauge multipolar. Note-se que a primeira das condições (3.1) pode ser vista como a versão não covariante do gauge de Fock-Schwinger, estudado no capítulo anterior, com fórmula de inversão:

$$A_\mu(x) = \int_0^1 d\alpha \alpha x^\nu F_{\nu\mu}(\alpha x), \quad (3.2)$$

válida para campos abelianos e não abelianos<sup>[42]</sup>.

Entretanto, como já foi mencionado, Brittin et al. mostraram que a fórmula de inversão (3.2) é garantida pelo lema de Poincaré (Apêndice B). Pode-se ver facilmente de (3.2) que o campo de gauge satisfaz a condição de gauge  $x^\mu A_\mu = 0$ . Os mesmos autores também prevêm a versão não covariante (ver Apêndice B):

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \int_0^1 d\alpha \alpha x^k F_{ki}(t, \alpha \vec{x}), \\ A_o(x) &= - \int_0^1 d\alpha x^i F_{io}(t, \alpha \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

e analogamente podemos impor  $x^i A_i(x) = 0$  como uma condição de gauge, enquanto que a segunda das equações (3.3) pode ser obtida da condição de consistência (preservação temporal), como veremos adiante. Repetindo-se o procedimento de Brittin et al. pode-se obter a versão não abeliana de (3.3) e as condições de gauge (3.1). Embora o objetivo deste capítulo seja tratar uma teoria abeliana, passamos a considerar as propriedades de

completeza e unicidade das condições de gauge (3.1), em analogia com o capítulo anterior.

Neste caso, os campos transformam-se de acordo com:

$$A'_i = \omega^{-1} A_i \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \partial_i \omega, \quad (3.4)$$

$$A'_o = \omega^{-1} A_o \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \partial_o \omega. \quad (3.5)$$

De  $x^i A'_i = 0$  encontra-se que

$$x^i \partial_i \omega = -i g x^i A_i \omega. \quad (3.6)$$

A solução formal desta equação é dada por:

$$\omega = P \exp \left( -i g \int_0^1 d\alpha x^i A_i(t, \alpha \vec{x}) \right) \omega_o. \quad (3.7)$$

A transformação para  $A_o$  se obtém da seguinte maneira:

$$A'_o = \omega^{-1} A_o \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \partial_o \omega = - \int_0^1 d\alpha x^i F_{io}(t, \lambda \vec{x}). \quad (3.8)$$

Escrevendo  $\omega$  como:

$$\omega = W(t, \vec{x}) \omega_o(t), \quad (3.9)$$

a expressão (3.8) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} A'_o &= \omega^{-1} A_o \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \left( -i g \int_0^1 d\alpha x^i \partial_o A_i(t, \alpha \vec{x}) \omega + \omega \dot{\omega}_o \right) \\ &= \omega^{-1} A_o \omega - \omega^{-1} \left( \int_0^1 d\alpha \frac{d}{d\alpha} A_o(t, \alpha \vec{x}) \right) \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} W \dot{\omega}_o + \\ &\quad - \omega^{-1} \left( \int_0^1 d\alpha x^i F_{oi}(t, \alpha \vec{x}) \right) \omega. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tomando  $\omega^{-1} A_o(t, 0) \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} \dot{\omega}_o = 0$ , encontramos

$$\omega_o(t) = \exp \left( -i g \int_0^t dt' A_o(t', 0) \right) cte, \quad (3.11)$$

e, portanto,

$$A'_o = -\omega^{-1} \left( \int_0^1 d\alpha x^i F_{oi}(t, \alpha \vec{x}) \right) \omega. \quad (3.12)$$

A seguir consideremos a condição de unicidade. Assumindo que existe um vetor  $A_i$  satisfazendo  $x^i A_i = 0$  e um transformado de gauge  $A'_i$ , o qual também satisfaz a mesma condição, teremos, a partir de (3.4),

$$x^i \partial_i \omega = 0. \quad (3.13)$$

Do teorema de Euler obtemos:

$$\omega = cte \omega_o(t). \quad (3.14)$$

Analogamente, de  $A_o$  e  $A'_o$  derivamos:

$$\frac{\partial \omega_o}{\partial x^o} = cte; \quad (3.15)$$

portanto,  $\omega_o = cte$ . Conseqüentemente, como no caso covariante, estas condições fixam completamente o gauge.

## 3.2 A QED no Gauge de Poincaré

### 3.2.1 O Campo de Maxwell

Consideremos primeiramente o campo de Maxwell livre segundo as referências [43,44].

Sua dinâmica é derivada da lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

com  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

As variáveis canônicas da teoria são  $(A^\alpha(x), \pi_\alpha(x))$ , sendo o momento canônico definido por:

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} = -F^{\alpha 0}. \quad (3.17)$$

Da definição 3.17 segue-se o vínculo primário:

$$\Omega_1(x) = \pi^0(x) \approx 0. \quad (3.18)$$

Lembremos que é desta forma que os graus de liberdade não físicos manifestam-se no formalismo hamiltoniano. Calculando a hamiltoniana, temos:

$$H_c = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \pi_i \partial_i A_0 \right). \quad (3.19)$$

Para garantir que a dinâmica do sistema não seja contraditória, isto é, que o vínculo (3.18) seja preservado no tempo e não contradiga as equações de movimento, calculamos  $\dot{\pi}^0$ .

Usando os colchetes de Poisson:

$$\{A^\alpha(t, \vec{x}), \pi_\beta(t, \vec{x}')\} = \delta_\beta^\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.20)$$

encontramos o vínculo secundário:

$$\Omega_2(x) = \partial_i \pi_i \approx 0. \quad (3.21)$$

Notemos que não há mais vínculos, pois  $\{\Omega_2, H_c\} = 0$ , e portanto (3.18) e (3.21) são os únicos vínculos da teoria, sendo todos de primeira classe. Isto quer dizer que a hamiltoniana total (primeira classe) que gera a evolução temporal das variáveis dinâmicas é dada por:

$$H = H_c + \int d^3x \lambda_a(x) \Omega_a(x), \quad (3.22)$$

onde os  $\lambda_a$  são funções arbitrárias. Observemos que, por razões que serão esclarecidas posteriormente, não integraremos o último termo de (3.19) como é feito normalmente.

Observamos que, como foi mencionado anteriormente, a presença de vínculos na teoria se reflete na presença de variáveis não físicas. O número de variáveis não físicas (na ausência de vínculos de segunda classe) é igual ao número de vínculos. Conseqüentemente, o eletromagnetismo formulado em termos de  $A_\mu$  é uma teoria com dois graus de liberdade não físicos. Os dois componentes físicos de  $A_\mu$  descrevem os dois possíveis estados de polarização do fóton.

Dito isto e lembrando que os vínculos de primeira classe são os geradores de transformações de gauge, procedemos à quebra da liberdade de gauge da teoria, ou seja, à fixação do gauge. Para isto, é necessário impor duas condições de forma que o conjunto total de vínculos seja de segunda classe. Escolhendo uma delas como:

$$\Omega_4(x) = x_i A_i \approx 0, \quad (3.23)$$

a condição para  $A_0$  é obtida pela preservação temporal de (3.23), cujo resultado é a equação diferencial

$$\Omega_3(x) = (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) A_0 + \vec{x} \cdot \vec{\pi} \approx 0, \quad (3.24)$$

e sua solução nos provê outra forma da segunda condição de gauge procurada, isto é:

$$\bar{\Omega}_3(x) = A_0(x) + \vec{x} \cdot \int_0^1 d\alpha \vec{\pi}(t, \alpha \vec{x}) \approx 0. \quad (3.25)$$

Não obstante, escolher uma ou outra equação como condição de gauge é só questão de conveniência, pois ambas são compatíveis com os vínculos (3.18), (3.21) e (3.23), no sentido de que a matriz de Dirac definida por:

$$C(x, y) = (\{\Omega_a(x), \Omega_b(y)\}) , \quad a = b = 1, 2, 3, 4 \quad (3.26)$$

é não singular,  $\det C \neq 0$ , e portanto sua inversa  $C^{-1}(x, y)$  definida por:

$$\int dy C_{ab}^{-1}(x, y) C_{bc}(y, z) = \int dy C_{ab}(x, y) C_{bc}^{-1}(y, z) = \delta_{ac} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}), \quad (3.27)$$

existe. (Observamos que assumimos as condições de contorno usuais, isto é, os campos anulam-se no infinito). Os resultados finais, certamente, não dependerão da escolha entre  $\Omega_3(x)$  ou  $\bar{\Omega}_3(x)$  como vínculo de gauge.

Procedemos agora à fixação do gauge para o campo livre de Maxwell. Com os vínculos dados pelas equações (3.18), (3.21), (3.23) e (3.24), a matriz de Dirac definida por (3.26) toma a forma:

$$C(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\vec{y} \cdot \vec{\nabla}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{y} \cdot \vec{\nabla}_y \\ \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x & 0 & 0 & -\vec{x} \cdot \vec{y} \\ 0 & -\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x & \vec{x} \cdot \vec{y} & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.28)$$

A não eliminação do termo envolvendo  $A_o$  por integração parcial na hamiltoniana (3.22), e o não uso do vínculo (3.21) são justificados a seguir. Por um lado, se tivéssemos procedido desta forma, a preservação temporal do vínculo de gauge (3.21) conduziria a uma condição de gauge que não envolveria  $A_o$ , o que, por sua vez, não é admissível, pois a matriz de Dirac correspondente teria determinante nulo e, portanto, não seria inversível. Por outro lado, mesmo que  $A_o$  não seja uma variável dinâmica, não pode ser arbitrariamente eliminada da teoria, dado que é expressa em termos do momento através da equação (3.24).

Usando-se a definição da matriz inversa, encontramos que os elementos não nulos são:  $C_{13}^{-1}(x, z) = -C_{24}^{-1}(x, z)$  e  $C_{12}^{-1}(x - z)$ . Por exemplo (com  $\varphi = C_{13}^{-1}$ ), este tipo de

cálculo conduz a equações da forma:

$$\int d^3y \vec{y} \cdot \vec{\nabla}_y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \varphi(y, z) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{z}). \quad (3.29)$$

Notemos que esta equação deve ser tratada sob o ponto de vista da teoria das distribuições.

A equação (3.29) pode ser escrita como:

$$\int d^3y \delta^3(x - y) \frac{\partial}{\partial y^i} (y^i \varphi(y, z)) = \delta^3(x - z), \quad (3.30)$$

devendo ser interpretada como a convolução de  $\delta^3(x - y)$  com  $\frac{\partial}{\partial y^i} (y^i \varphi(y, z))$ :

$$\delta^3(x - y) * \frac{\partial}{\partial y^i} (y^i \varphi(y, z)) = \int d^3y \delta^3(x - y) \frac{\partial}{\partial y^i} (y^i \varphi(y, z)). \quad (3.31)$$

Em outras palavras, a equação (3.30) nos diz que a distribuição definida por (3.31) é equivalente a  $\delta^3(x - z)$ ; portanto:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (x^i \varphi(x, z)) = \delta^3(x - z),$$

ou

$$\left(3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x\right) \varphi(x, z) = \delta^3(x - z). \quad (3.32)$$

A solução de (3.32) no sentido das distribuições é:

$$\varphi(x, z) = \int_0^1 d\alpha \alpha^2 \delta^3(\alpha x - z). \quad (3.33)$$

Procedendo desta forma, encontramos:

$$C_{12}^{-1}(x, z) = - \int_0^1 d\beta \beta^2 \int_0^1 d\alpha \alpha^2 \vec{x} \cdot \vec{x} \delta^3(\alpha\beta x - z), \quad (3.34)$$

$$C_{13}^{-1}(x, z) = -C_{24}^{-1}(x, z) = \int_0^1 d\alpha \alpha^2 \delta^3(\alpha x - z). \quad (3.35)$$

Podemos então calcular os colchetes de Dirac para as variáveis canônicas. Lembrando que os colchetes de Dirac são definidos por:

$$\{A(x), B(z)\}^* = \{A(x), B(z)\} - \int d^3\omega d^3\eta \{A(x), \Omega_a(\omega)\} C_{ab}^{-1} \{\Omega_b(\eta), B(z)\} ,$$

obtemos os seguintes colchetes:

$$\{A_o(x), \pi_o(z)\}^* = 0 , \quad (3.36)$$

$$\{A_o(x), \pi_k(z)\}^* = 0 , \quad (3.37)$$

$$\{A_o(x), A_k(z)\}^* = z_k C_{13}^{-1}(z, x) - \frac{\partial}{\partial z_k} C_{12}^{-1}(z, x) , \quad (3.38)$$

$$\{\pi_o(x), A_k(z)\}^* = 0 , \quad (3.39)$$

$$\{\pi_o(x), \pi_k(z)\}^* = 0 , \quad (3.40)$$

$$\{A_i(x), A_k(z)\}^* = 0 , \quad (3.41)$$

$$\{A_i(x), \pi_k(z)\}^* = \delta_{ik} \delta^3(x - z) + z_k \frac{\partial}{\partial x_i} C_{24}^{-1}(x, z) , \quad (3.42)$$

$$\{\pi_i(x), \pi_k(z)\}^* = 0 . \quad (3.43)$$

Para as variáveis transversas definidas por  $\vec{A}^T = \vec{A} - \vec{A}^L$ , onde

$$A_i^L(x) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int d^3z \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|} \frac{\partial A_k}{\partial z_k} , \quad (3.44)$$

encontramos:

$$\{A_i^T(x), \pi_k^T(z)\}^* = \delta_{ik} \delta^3(x - z) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|} , \quad (3.45)$$

$$\{A_o(x), A_k^T(z)\}^* = z_k C_{13}^{-1}(z, x) + \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|} , \quad (3.46)$$

$$\{A_o(x), \pi_k^T(z)\}^* = 0 . \quad (3.47)$$

Notemos que todos os colchetes anteriores são compatíveis com os vínculos. É interessante ressaltar que o colchete (3.45) tem a mesma forma que o correspondente no gauge de Coulomb.

Finalmente, as equações de movimento para as variáveis independentes estão dadas por:

$$\dot{A}_k(z) = \{A_k(z), H\}^* = \pi_k(z) + \frac{\partial A_o}{\partial z_k}, \quad (3.48)$$

$$\dot{\pi}_k(z) = \{\pi_k(z), H\}^* = \partial_i F_{ik}(z), \quad (3.49)$$

e, na equação (3.48) (definição do momento),  $A_o(z)$  deve ser eliminado através da equação (3.24).

### 3.2.2 Eletrodinâmica Quântica

Neste caso a lagrangiana para os campos de Maxwell e Dirac em interação é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi + e\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi, \quad (3.50)$$

onde  $\psi(x)$  é um espinor de Dirac de quatro componentes e, de acordo com nossas convenções (Apêndice A),  $(\gamma^0)^2 = -\mathbf{1}$  e  $(\gamma_k^2) = \mathbf{1}$ .

As variáveis canônicas para o campo eletromagnético são as mesmas da seção anterior. Em particular, o vínculo primário (3.18) se mantém. Da definição de momento para o campo fermiônico,

$$\pi_\psi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi} \gamma^0, \quad (3.51)$$

obtemos o vínculo primário

$$\chi = \pi_\psi - i\bar{\psi} \gamma^0 \approx 0. \quad (3.52)$$

Seguindo o procedimento da seção anterior, encontramos que a hamiltoniana canônica está dada por:

$$H_c = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \pi_\psi \gamma^0 (\gamma_j \partial_j - ie \gamma_j A_j + im) \psi + \pi_i \partial_i A_0 - e \bar{\psi} \gamma^0 A_0 \psi \right). \quad (3.53)$$

Os colchetes de Poisson fundamentais para o campo fermiônico que usaremos serão aqueles dados por Sundermeyer<sup>[45]</sup>, isto é:

$$\{\psi(x), \pi_\psi(x')\} = \{\pi_\psi(x'), \psi(x)\} = -\delta^3(x - x'). \quad (3.54)$$

Desta forma, o vínculo secundário gerado pela preservação no tempo do vínculo primário (3.18) transforma-se em:

$$\Omega_2(x) = \partial_i \pi_i + ie \bar{\psi} \gamma^0 \psi. \quad (3.55)$$

Ao mesmo tempo, observemos que o vínculo (3.52) é de segunda classe e, portanto, deve ser considerado como uma equação forte. Obtemos, assim, dois vínculos de primeira classe:

$$\Omega_1(x) = \pi_0 \approx 0, \quad (3.56)$$

$$\Omega_2(x) = \partial_i \pi_i + ie \pi_\psi \psi \approx 0. \quad (3.57)$$

Para fixar o gauge, impomos novamente as condições de gauge (3.23) e (3.24). Não obstante, a matriz C e sua inversa são idênticas às da seção precedente, equações (3.28), (3.34) e (3.35), de forma que os colchetes de Dirac fundamentais para o campo eletromagnético ficam inalterados, enquanto que os colchetes para o campo fermiônico são dados por:

$$\{\psi(x), \pi_\psi(z)\}^* = -\delta^3(x - z), \quad (3.58)$$

$$\{\psi(x), A_k(z)\}^* = 0, \quad (3.59)$$

$$\{\psi(x), A_o(z)\}^* = -ie\psi(x)C_{21}^{-1}(x, z), \quad (3.60)$$

$$\{\psi(x), \pi_k(z)\}^* = -ie\psi(x)C_{24}^{-1}(x, z)z_k, \quad (3.61)$$

$$\{\pi_\psi(x), A_o(z)\}^* = ie\pi_\psi(x)C_{21}^{-1}(x, z), \quad (3.62)$$

$$\{\pi_\psi(x), A_k(z)\}^* = 0, \quad (3.63)$$

$$\{\pi_\psi(x), \pi_k(z)\}^* = ie\pi_\psi(x)C_{24}^{-1}(x, z)z_k, \quad (3.64)$$

$$\{\psi(x), \pi_k^T(z)\}^* = -ie\left(z_k C_{24}^{-1}(x, z) + \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|}\right)\psi(x), \quad (3.65)$$

$$\{\pi_\psi(x), \pi_k^T(z)\}^* = ie\left(z_k C_{24}^{-1}(x, z) + \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{z}|}\right)\pi_\psi(x). \quad (3.66)$$

Por sua vez, as equações de movimento para as variáveis dinâmicas são dadas por:

$$\dot{\psi} - ieA_o\psi = \gamma^o(\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - ie\vec{\gamma} \cdot \vec{A} + im)\psi, \quad (3.67)$$

$$\dot{A}_k = \pi_k + \frac{\partial A_o}{\partial z_k}, \quad (3.68)$$

$$\dot{\pi}_k = \partial_i F_{ik} + e\bar{\psi}\gamma_k\psi, \quad (3.69)$$

como deveriam ser.

Segue-se assim que a quantização canônica dos campos de Maxwell e Dirac em interação pode ser feita seguindo o procedimento usual. Isto é, convertendo os colchetes de Dirac (3.36 a 3.43), (3.58 a 3.66) e (3.45 a 3.47) em relações de comutação ou anticomutação a tempos iguais, de acordo com a prescrição:

$$\{A, B\}^* \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]_{\mp}, \quad (3.70)$$

onde “ $\mp$ ” refere-se, respectivamente, ao comutador e ao anticomutador. Os vínculos

da teoria convertem-se então em identidades operatoriais fortes, como implica o uso de colchetes de Dirac. É interessante ressaltar que apesar do caráter não-canônico dos colchetes de Dirac (3.36 a 3.43), (3.58 a 3.66) e (3.45 a 3.47), eles não conduzem a problemas de ordenamento, pois não há produto de variáveis do campo no lado direito de tais colchetes. Isto ainda é válido no caso não abeliano<sup>[42]</sup>. Ao mesmo tempo, se considerarmos o campo eletromagnético com o termo de Chern-Simons em (2+1) dimensões no gauge de Poincaré, seus colchetes de Dirac não possuem variáveis do campo<sup>[46]</sup>.

Como uma aplicação dos colchetes de Dirac acima calculados, na próxima seção consideraremos outra forma, menos familiar, para derivar a matriz  $\mathbf{U}$  para QED no gauge de Poincaré. Devido ao caráter não canônico de tais colchetes, usaremos um método formal discutido na referência [47] para tratar deste assunto.

### 3.3 A Matriz U para QED e os Gauges de Coulomb e Poincaré

#### 3.3.1 A Matriz U para QED

Lembremos da teoria de perturbações que, no quadro de interação, os operadores de campo estão definidos via uma transformação unitária:

$$\phi_{IN}(x, t) = \mathbf{U}(t) \phi(x, t) \mathbf{U}^{-1}(t), \quad (3.71)$$

onde os campos são livres, e sua evolução temporal é governada pela equação:

$$\dot{\phi}_{IN}(x) = i [H_{IN}^o, \phi_{IN}] , \quad (3.72)$$

com  $H_{IN}^o$  sendo o hamiltoniano livre.

Neste caso, isto significa que deve existir um operador  $\mathbf{U}$  que converta todos os campos independentes (não vinculados) em campos livres, ou campos "IN" (os quais serão denotados pelo subíndice IN). Esta situação não acontece nas expressões (3.60 a 3.64) devido às relações de comutação não canônicas.

Este problema será tratado introduzindo-se um contratermo no hamiltoniano para assim obtermos a correta evolução temporal dos campos IN. Com efeito, a partir de (3.53), obtemos o hamiltoniano livre ( $e = 0$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{IN}^{(0)}(t) &\equiv \mathbf{U}(t) \mathbf{H} \mathbf{U}^{-1}(t) |_{e=0} \\ \mathbf{H}_{IN}^{(0)}(t) &= \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi_i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \pi_\psi \gamma^0 (\gamma_j \partial_j + im) \psi + \frac{1}{2} (\pi_i \partial_i A_0 + \partial_i A_0 \pi_i) \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

Entende-se que todos os campos em (3.73) são livres e o subíndice IN nos campos foi dispensado por simplicidade de notação. Observemos que se tivéssemos relações de comutação canônicas (3.73) geraria a evolução temporal de um férmion livre  $\psi_{IN}$ . No entanto, um cálculo direto nos mostra que:

$$\left[ \mathbf{H}_{IN}^{(0)}(t), \psi(z) \right] = -i \gamma^0 (\gamma_j \partial_j + im) \psi(z) - \frac{e^2}{2} \int d^3x (\pi_\psi(x) \psi(z) + \psi(z) \pi_\psi(x) \psi(x)) C_{21}^{-1}(z, x)$$

com o último termo refletindo o caráter não canônico das relações de comutação. Não obstante, tal termo pode ser reescrito na forma:

$$- \frac{e^2}{2} \int d^3x (\pi_\psi(x) \psi(x) \psi(z) + \psi(z) \pi_\psi(x) \psi(x)) C_{21}^{-1}(z, x) = \left[ \mathbf{H}_I^{(2)}(t), \psi(z) \right],$$

com:

$$\mathbf{H}_I^{(2)}(t) = - \frac{e^2}{2} \int d^3x d^3y \pi_\psi(y) \psi(y) \pi_\psi(x) \psi(x) C_{12}^{-1}(y, x). \quad (3.74)$$

Verificamos então que:

$$\left[ \mathbf{H}_{IN}^{(0)} - \mathbf{H}_I^{(2)}, \psi(z) \right] = \dot{\psi}(z). \quad (3.75)$$

Seguindo o procedimento usual, podemos encontrar agora a matriz  $U$ . Isto é, para um campo genérico independente  $\phi$  (por exemplo  $\psi$ ), temos:

$$\dot{\phi} = i [H, \phi] , \tag{3.76}$$

e usando (3.71) temos:

$$\dot{\phi}_{IN} = [\dot{U} U^{-1}, \phi_{IN}] + i [H_{IN}, \phi_{IN}] . \tag{3.77}$$

Das equações (3.75) e (3.77) obtemos

$$[\dot{U} U^{-1} + i H_I, \phi_{IN}] = 0 ,$$

com:

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)}$$

$$H_I = -ie \int d^3x \pi_\psi \gamma^0 \gamma_i A_i \psi + H_I^{(2)} . \tag{3.78}$$

Como  $\phi_{IN}$  é um campo genérico livre, segue-se que

$$i \frac{dU(t)}{dt} = H_I(t)U(t) ,$$

que é a familiar equação para  $U(t)$ . Neste ponto, seguindo-se o procedimento usual, obtém-se a conhecida solução da equação acima dada por:

$$U(t, t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^t dt_n T (H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)) ,$$

com  $U(t, t) = 1$ .  $T$  denota o produto ordenado temporal e  $H_I(t)$  está dado por (3.78).

Devemos notar que a expressão (3.74) tem a mesma estrutura formal que a da referência [47] no gauge de Coulomb. Desta forma, a presença da função  $C_{12}^{-1}(y, x)$

em (3.74) dando origem a uma interação de Coulomb modificada, pode ser entendida como uma conseqüência do gauge de Poincaré. Notemos que (3.23) envolve o vetor potencial como um todo, em contraste com o gauge de Coulomb, que somente afeta suas componentes longitudinais e não as transversas. Por estas razões, na próxima sub-seção detalharemos estes gauges.

### 3.3.2 Comentário sobre os Gauges de Coulomb e Poincaré

A motivação para fazermos este comentário surge de dois pontos já mencionados, isto é, a semelhança na estrutura dos colchetes de Dirac para variáveis transversas (3.45, 3.46) e o termo  $H_I^{(2)}$  (3.72), quando calculados no gauge de Coulomb.

Lembramos que o gauge de Coulomb é definido pela condição:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \quad (3.79)$$

A preservação no tempo deste vínculo conduz a:

$$A_o^c = \int d^3x \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{z}|} \rho(x) , \quad (3.80)$$

onde  $A_o^c$  designa  $A_o$  no gauge de Coulomb. Notemos que na ausência de cargas temos  $A_o^c = 0$ . Contudo, as duas possibilidades são compatíveis com (3.79), pois o conjunto de todos os vínculos é de segunda classe. A decomposição natural para o vetor potencial  $\vec{A}$  no gauge de Coulomb é em componentes longitudinal e transversal ( $\vec{A} = \vec{A}^L + \vec{A}^T$ ), como já foi definido em (3.44). A condição (3.79) anula a componente longitudinal (não física), deixando os dois graus de liberdade físicos (representados por  $\vec{A}^T$ ) não restritos. Desta forma, após fixarmos o gauge, podemos expressar todos os resultados somente em termos de variáveis transversas. É interessante notar também que, na representação de

momento, escrevemos o gauge de Coulomb na forma  $\vec{k} \cdot \vec{A}(k) = 0$ , isto é,  $\vec{A}(k)$  não tem componente ao longo da direção  $\vec{k}$ .

Por outro lado, o gauge de Poincaré está caracterizado pela condição (3.23), a qual implica que o potencial escalar  $A_o^P$  ( $A_o^P$  designa  $A_o$  no gauge de Poincaré) deve satisfazer (3.24) e, portanto, deve ser dado por (3.25). Segue-se assim que  $A_o^P(t, \vec{z} = 0) = 0$ , mas isto não é consistente com  $A_o^P = 0$  em todo o espaço, como tem aparecido na literatura<sup>[48]</sup>. Da mesma forma que o gauge de Coulomb no espaço  $k$ , o gauge de Poincaré elimina a componente do campo na direção  $\vec{x}$ . No entanto, a decomposição nas direções paralela e ortogonal a  $\vec{x}$  é de pouco uso prático. Caso insistamos em fazer tal decomposição  $(\vec{A}^L, \vec{A}^T)$ , o melhor que podemos conseguir será expressar a componente longitudinal:

$$\vec{A}^L(t, \vec{z}) = -\vec{\nabla}_z \int_0^1 d\alpha \vec{z} \cdot \vec{A}^T(t, \alpha \vec{z}), \quad (3.81)$$

de forma que permita eliminar  $\vec{A}^L$  depois da fixação do gauge. Ao mesmo tempo, no espaço  $k$  a condição de Poincaré é escrita como  $\vec{\nabla}_k \cdot \vec{A}(k) = 0$ . Portanto, podemos inferir que no espaço  $k$  o gauge de Poincaré faz o papel do gauge de Coulomb no espaço  $\vec{x}$  e vice-versa.

O êxito do uso da decomposição  $(\vec{A}^L, \vec{A}^T)$  no gauge de Coulomb baseia-se no fato de que a teoria final pode ser expressa somente em termos de graus de liberdade físicos. Desta forma, mostraremos agora que uma forma modificada do gauge de Poincaré é equivalente ao gauge de Coulomb. Com efeito, tal forma modificada do gauge é dada por:

$$\bar{\Omega}_4(z) = \vec{z} \cdot \vec{A}^L(z) \approx 0, \quad (3.82)$$

neste caso, a condição de consistência nos conduz a:

$$\bar{\Omega}_3(z) = \left( \vec{z} \cdot \vec{\nabla} \right) A_o(z) + \vec{z} \cdot \vec{\pi}^L \approx 0, \quad (3.83)$$

cuja solução é:

$$A_o(z) \approx - \int_0^1 d\alpha \vec{z} \cdot \vec{\pi}^L(t, \alpha \vec{z}) \tag{3.84}$$

$$\approx \int d^3x \left( \frac{1}{4\pi |\vec{z} - \vec{x}|} - \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \right) \vec{\nabla}_x \cdot \vec{\pi}(t, \vec{x}), \tag{3.85}$$

onde a equação (3.85) segue de (3.84) usando-se a definição de  $\vec{\pi}^L$  (3.44) e  $(\vec{z} \cdot \vec{\nabla}_z) f(\alpha \vec{z}) = \alpha \frac{d}{d\alpha} f(\alpha \vec{z})$ ; e o segundo termo dentro do parênteses em (3.85) garante  $A_o(t, \vec{z} = 0) = 0$ . Resta agora provar que as condições de gauge (3.82) e (3.84) são equivalentes ao gauge de Coulomb, excetuando-se uma diferença não importante entre os potenciais escalares. A forma direta, embora tediosa, consiste em verificar que o conjunto de vínculos e condições de gauge é de segunda classe, e a seguir calcular os colchetes de Dirac mostrando que coincidem com os do gauge de Coulomb; o que realmente acontece. Desta forma, esclarecemos a equivalência existente na descrição da QED nos gauges de Coulomb e Poincaré.

### 3.4 O Propagador do Fóton no Gauge de Poincaré

Para finalizarmos o estudo do gauge, esta seção dedica-se a obter uma expressão para o propagador do fóton usando o gauge de Poincaré (expressões (3.23) e (3.25), dentro do formalismo de integral funcional para sistemas com vínculos<sup>[49]</sup>. Como neste caso (seção 3.2.1) o conjunto de vínculos é de segunda classe, usaremos o método de Senjanovic<sup>[50]</sup>. O funcional gerador é expresso na forma:

$$\mathcal{Z}[J] = N \int [d\mu] \exp \left\{ i \int d^4x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - H_c - J_\mu A^\mu) \right\}, \tag{3.86}$$

onde a medida está dada por:

$$[d\mu] = \prod_a \delta[\chi_a] \det |\{\chi_a, \chi_b\}|^{1/2} [dA_\mu] [d\pi_\nu], \tag{3.87}$$

com  $\chi_a (a = 1, 2, 3, 4)$  qualquer um dos vínculos da teoria, a saber, (3.18), (3.21), (3.23) ou (3.24). Observemos que, a partir de (3.28), o determinante é independente dos campos, de forma que podemos absorvê-lo no fator de renormalização  $N$  e (3.86) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & \int [dA_o] [d\vec{A}] [d\pi_o] [d\vec{\pi}] \delta[\pi_o] \delta[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}] \delta[\vec{x} \cdot \vec{A}] \delta[\vec{x} \cdot (\vec{\pi} + \vec{\nabla} A_o)] \times \\ & \times \exp \left\{ i \int d^4x \left( \pi_o \dot{A}_o - \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + J^\mu A_\mu \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Notemos que a integral em  $\pi_o$  pode ser efetuada imediatamente. Devido a  $\delta[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}]$  podemos tomar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0$  no hamiltoniano canônico, ao passo que as deltas funcionais  $\delta[\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}]$ ,  $\delta[\vec{x} \cdot \vec{A}]$  e  $\delta[\vec{x} \cdot (\vec{\pi} + \vec{\nabla} A_o)]$  podem ser exponenciadas por meio de integrações em  $\lambda$ ,  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente. Desta forma, (3.88) converte-se em:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & N \int [dA_o] [d\vec{A}] [d\vec{\pi}] [d\lambda] [d\xi] [d\eta] \times \\ & \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 - \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \xi \vec{x} \cdot \vec{A} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta \vec{x} \cdot (\vec{\pi} + \vec{\nabla} A_o) + J^\mu A_\mu \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Efetuando-se as integrais em  $\vec{\pi}$ ,  $\lambda$  e  $\eta$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = & N \int [dA_o] [d\vec{A}] [d\xi] \exp \left\{ i \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + \xi \vec{x} \cdot \vec{A} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} - J_o) \nabla^{-2} (\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} - J_o) - \frac{1}{2x^2} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla} A_o)^2 + J_o A_o - \vec{J} \cdot \vec{A} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Colecionando-se os termos em  $A_o$ , temos que a integral em  $A_o$  é dada por:

$$I_{A_o} = \int [dA_o] \exp \left( i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A_o \left\{ \frac{1}{x^2} (1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \right\} A_o + J_o A_o \right] \right). \quad (3.91)$$

Como é sabido, o resultado da integral funcional é expresso na forma:

$$I_{A_o} = \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4x J_o O^{-1} J_o \right), \quad (3.92)$$

com  $O^{-1}$  o operador inverso de:

$$O = \frac{1}{\vec{x}^2} (1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}). \quad (3.93)$$

Para podermos inverter este operador, fazemos uso das seguintes identidades (Apêndice C):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \frac{1}{a + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}} &= \frac{1}{a + 1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}} \vec{\nabla}, \\ \vec{x} \frac{1}{a + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}} &= \frac{1}{a - 1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}} \vec{x}, \\ (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{a + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}} &= \frac{1}{a + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}), \\ (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2 &= \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}), \\ (1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2 &= \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}), \end{aligned}$$

conduzindo a:

$$O^{-1} = \vec{x}^2 \frac{1}{(2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})}. \quad (3.94)$$

A integral (3.92) converte-se, finalmente, em:

$$I_{A_o} = \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x J_o(x) \left( \vec{x}^2 \frac{1}{(2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})} \right) J_o(x) \right]. \quad (3.95)$$

Logo, só resta integrar em  $\vec{A}$ . Para isto, faremos uso da decomposição do potencial em componentes longitudinal e transversal, isto é:

$$\begin{aligned} I_{\vec{A}_\xi} &= \int [d\vec{A}^T] [d\vec{A}^L] [d\xi] \exp \left( i \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \vec{A}^T \cdot \square \vec{A}^T - \vec{A}^T \cdot (\vec{J} - \xi \vec{x}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \vec{A}^L \cdot \left( -\vec{J} + \xi \vec{x} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\nabla^2} \right) J_o \right) \right\} \right), \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$I_{\bar{A}_t} = \exp \left( \frac{i}{2} \int d^4x \left\{ \vec{J} - \frac{\vec{x}}{\vec{x}^2} \left( \vec{J} \cdot \vec{x} - \frac{1}{\nabla^2} J_o \right) \right\} \frac{1}{\square} \left\{ \vec{J} - \frac{\vec{x}}{\vec{x}^2} \left( \vec{J} \cdot \vec{x} - \frac{1}{\nabla^2} J_o \right) \right\} \right) . \quad (3.97)$$

Assim, a partir de (3.95) e (3.97) teremos finalmente o funcional gerador, escrito na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] = N \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x \left[ J_o \left( \frac{1}{\nabla^2} - \vec{x}^2 \frac{1}{(2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})(3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})} \right) J_o + \right. \right. \\ \left. \left. \left[ \vec{J} - \frac{\vec{x}}{\vec{x}^2} \left( \vec{J} \cdot \vec{x} - \frac{1}{\nabla^2} J_o \right) \right] \frac{1}{\square} \left[ \vec{J} - \frac{\vec{x}}{\vec{x}^2} \left( \vec{J} \cdot \vec{x} - \frac{1}{\nabla^2} J_o \right) \right] \right\} . \quad (3.98) \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} Z = N \exp \left( \frac{i}{2} \int d^4x \left\{ J_o \left[ \frac{1}{\nabla^2} \left( 1 - \frac{x_i}{\vec{x}^2} \frac{1}{\square} \frac{x_i}{\vec{x}^2} \frac{1}{\nabla^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{o^2}} \right) - \vec{x}^2 \frac{1}{(2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})(3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})} \right] J_o + \right. \right. \\ \left. \left. + J_i P_{ij} J_j - 2J_i \left( P_{ij} \frac{1}{\square} \frac{x_j}{\vec{x}^2} \frac{1}{\nabla^2} \frac{\partial}{\partial x^o} \right) J_o \right\} \right) , \quad (3.99) \end{aligned}$$

com

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\vec{x}^2} \quad (3.100)$$

sendo o operador de projeção na direção  $\vec{x}$ . Portanto, os propagadores são dados por:

$$K_{ij}(x, y) = \frac{i}{\square} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\vec{x}^2} \right) \delta(x - y) , \quad (3.101)$$

$$K_{io}(x, y) = -2i \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\vec{x}^2} \right) \frac{1}{\square} \frac{x_j}{\vec{x}^2} \frac{1}{\nabla^2} \frac{\partial}{\partial x^o} \delta(x - y) , \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} K_{oo}(x, y) = i \left[ \frac{1}{\nabla^2} \left( 1 - \frac{x_i}{\vec{x}^2} \frac{1}{\square} \frac{x_i}{\vec{x}^2} \frac{1}{\nabla^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^o)^2} - \vec{x}^2 \frac{1}{(2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})(3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})} \right) \right] \times \\ \times \delta(x - y) . \quad (3.103) \end{aligned}$$

Por último, como podemos perceber, estes propagadores têm uma estrutura parecida aos calculados no gauge de Coulomb. Para apreciarmos melhor isto, lembremos que os

propagadores no gauge de Coulomb são dados por:

$$K_{ij}^c(x, y) = -\frac{1}{k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \right),$$

$$K_{oj}^c(x, y) = K_{jo}^c(x, y) = 0,$$

$$K_{oo}^c(x, y) = -\frac{1}{|\vec{k}|^2}.$$

Assim, de (3.101) e (3.102) vemos a similaridade em relação aos cálculos no gauge de Coulomb, com o operador de projeção (3.100) substituído pelo operador de projeção ao longo da direção ortogonal aos momentos. De (3.103), observamos que o termo do tipo interação coulombiana está presente junto a outros termos, que provém do fato de  $A_o$  ser expresso em função do momento através da expressão (3.25). Desta maneira, como na seção anterior, as semelhanças formais entre estes gauges ficam manifestas.

## CAPÍTULO 4

# INVARIÂNCIA DE GAUGE

Como é sabido, muitos estudos têm sido dedicados à obtenção de um formalismo invariante de gauge em teoria quântica de campos. As motivações para isto são variadas mas, fundamentalmente, apontam para a busca de um cenário propício em que se possa provar a hipótese de confinamento absoluto de cor. Uma das linhas de trabalho centra-se no estudo das funções de Green dos quarks na região infravermelha. Isto leva a estudar métodos que não sejam baseados em teoria de perturbações, pois nessa região a teoria de perturbações contém as singularidades infravermelhas. Além disso, o propagador fermiônico nessa região depende do gauge e a invariância de gauge necessária é considerada uma condição de observabilidade. Assim, um estudo consistente de teorias de gauge deve ser feito numa linguagem invariante de gauge.

Dentro desta perspectiva, neste capítulo será abordado um formalismo independente de gauge que nos permitirá reobter resultados conhecidos sob um ângulo diferente. Desta forma, começaremos definindo as variáveis independentes de gauge para logo ilustrarmos o formalismo, através de exemplos. É importante observar que este formalismo parece promissor no estudo do problema de confinamento, constituindo-se, portanto, em

um programa de trabalho em aberto.

## 4.1 Formalismo Invariante de Gauge e Escolha do Gauge

### 4.1.1 Exemplo 1: Gauges de Fock-Schwinger, Poincaré e Temporal

i) Em primeiro lugar, para fixarmos as idéias, definimos o potencial vetorial invariante de gauge, no caso abeliano, como<sup>[51]</sup>:

$$\mathcal{A}_\mu(x|\xi) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x), \quad (4.1)$$

onde  $A_\mu(x)$  é o potencial vetorial usual, e a função de gauge  $\Lambda(x)$  está dada por

$$\Lambda(x) = \int_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z) \equiv \int_{z_1=\xi}^{z_2=x} dz^\nu A_\nu(z). \quad (4.2)$$

$C_{\xi x}$  designa uma trajetória qualquer que ligue os pontos  $\xi$  e  $x$ . De (4.1) e (4.2) fica claro que  $\mathcal{A}_\mu(x|\xi)$  é invariante ante transformações de gauge do potencial da forma

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \phi(x),$$

com  $\phi(x)$  sendo uma função arbitrária.

É interessante ressaltarmos que o potencial  $A_\mu(x)$  em (4.1) é inicialmente arbitrário, isto é, pode ser expresso em qualquer gauge, ao passo que em princípio a trajetória  $C_{\xi x}$  também é arbitrária. Desta forma, a liberdade de gauge não foi quebrada e sim transferida para uma escolha da trajetória, levando a uma formulação dependente da

trajetória<sup>[52]</sup>. Em particular, ao considerarmos  $C_{\xi x}$  uma linha reta que ligue os pontos  $z_1 = 0$  e  $z_2 = x$ , obtemos  $\mathcal{A}_\mu$  idêntico ao  $A_\mu$  expresso no gauge de Fock-Schwinger. Com efeito, de (4.2) temos:

$$\mathcal{A}_\mu(x|0) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_0^1 d\alpha x^\nu A_\nu(\alpha x), \quad (4.3)$$

com  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  utilizado para parametrizar a reta e (4.3) converte-se em:

$$\mathcal{A}_\mu(x|0) = A_\mu(x) - \int_0^1 d\alpha \left( A_\mu(\alpha x) - \alpha x^\nu F_{\mu\nu}(\alpha x) + \alpha x^\nu \frac{\partial A_\mu(\alpha x)}{\partial (\alpha x)^\nu} \right),$$

ou seja,

$$\mathcal{A}_\mu(x|0) = A_\mu(x) - \int_0^1 d\alpha \left( \frac{d}{d\alpha} (\alpha A_\mu(\alpha x)) - \alpha x^\nu F_{\mu\nu}(\alpha x) \right),$$

e, por conseguinte,

$$\mathcal{A}_\mu(x|0) = \int_0^1 d\alpha \alpha x^\nu F_{\nu\mu}(\alpha x), \quad (4.4)$$

que é a nossa conhecida fórmula de inversão para os potenciais no gauge de Fock-Schwinger. Sem perda de generalidade (4.4) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{A}_\mu(x|\xi) = \int_{C_{\xi x}} dz^\nu F_{\nu\sigma}(z) \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\mu}. \quad (4.5)$$

Observemos que, ao termos um ponto fixo na trajetória  $C_{\xi x}$ , o propagador que pode ser construído de (4.1) não será invariante por translações, como já demonstrado no Capítulo 2. Não obstante, tal dificuldade neste formalismo pode ser resolvida tomando o limite  $\xi \rightarrow \infty$ <sup>[51]</sup>, como consideraram Dirac e Mandelstam, entre outros, nas suas formulações invariantes de gauge da QED<sup>[53,54]</sup>.

Para considerarmos a extensão dessas idéias ao caso não abeliano, introduzimos a matriz (operadores de holonomia) também denominada fator de fase:

$$P(\xi|x) = \mathcal{P} \exp \left( ig \int_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z) \right), \quad (4.6)$$

onde  $\mathcal{P}$  significa ordenamento nos índices do grupo ao longo da trajetória  $C_{\xi x}$ . Esta matriz é definida por:

$$P(\xi|x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=0}^{N-1} ig \exp(x_{i+1} - x_i)^\mu A_\mu(x_i) \right), \quad (4.7)$$

tomando valores no grupo de gauge e representando geometricamente o operador de transporte paralelo da teoria em consideração. Um exemplo conhecido deste fator de fase corresponde a considerarmos  $C_{\xi x}$  fechada, a saber, o operador de Wilson. Tomando o traço, obtemos o loop de Wilson clássico.

Lembramos que ante transformações de gauge com parâmetro  $\omega(x)$ , o potencial  $A_\mu$ , o tensor de intensidade  $F_{\mu\nu}$  e o fator de fase  $P(\xi|x)$  transformam-se como:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu(x) = \omega(x)A_\mu(x)\omega^{-1}(x) - \frac{i}{g}\omega(x)\partial_\mu\omega^{-1}(x),$$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}(x) = \omega(x)F_{\mu\nu}(x)\omega^{-1}(x),$$

$$P(\xi|x) \longrightarrow P(\xi|x) = \omega(\xi)P(\xi|x)\omega(x), \quad (4.8)$$

com  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$ . Podemos passar dos potenciais  $A_\mu$  e tensor de intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$  iniciais para  $\mathcal{A}_\mu$  e  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  através de uma transformação de gauge com parâmetro  $\omega(x) = P(\xi|x)$ , isto é:

$$\mathcal{A}_\mu(x|\xi) = P(\xi|x)A_\mu(x)P^{-1}(\xi|x) - \frac{i}{g}P(\xi|x)\partial_\mu P^{-1}(\xi|x), \quad (4.9)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x|\xi) = P(\xi|x)F_{\mu\nu}(x)P^{-1}(\xi|x). \quad (4.10)$$

Usando (4.8), verificamos que, quando os potenciais e o tensor intensidade de campo originais estão sujeitos a transformações de gauge com parâmetro  $\omega(x)$ , os potenciais (4.9) e (4.10) transformam-se globalmente de acordo com:

$$\mathcal{A}_\mu(x|\xi) \longrightarrow \omega(\xi)\mathcal{A}_\mu(x|\xi)\omega^{-1}(\xi), \quad (4.11)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x|\xi) \longrightarrow \omega(\xi)\mathcal{F}_{\mu\nu}(x|\xi)\omega^{-1}(\xi), \quad (4.12)$$

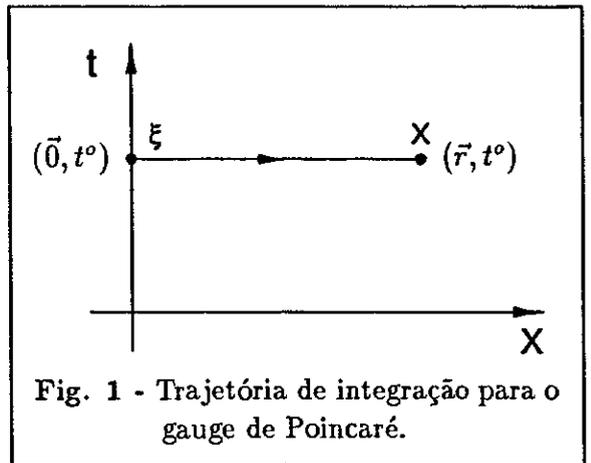
que, ao tomarmos o limite  $\xi \rightarrow \infty$ , a invariância de gauge é restabelecida, desde que  $\omega(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ . Procedendo de forma análoga ao caso abeliano, isto é, escolhendo uma linha reta, obtemos:

$$\mathcal{A}(x|\xi) = \int_{C_{\xi x}} dz^\nu \mathcal{F}_{\nu\sigma}(x|\xi) \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\mu}, \quad (4.13)$$

tendo a mesma fórmula de inversão para potenciais no gauge de Fock-Schwinger.

ii) Para melhor ilustrarmos estas idéias, consideremos a reta que liga os pontos  $\xi$  e  $x$ , como mostra a figura 1.

De acordo com (4.1), em notação tridimensional, temos que:



$$A_o(\vec{r}, t|0) = A_o(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 d\alpha \vec{r} \cdot \vec{A}(\alpha\vec{r}, t), \quad (4.14)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t|0) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \int_0^1 d\alpha \vec{r} \cdot \vec{A}(\alpha\vec{r}, t). \quad (4.15)$$

Lembrando uma fórmula já conhecida da análise vetorial obtemos para  $\vec{A}$  a expressão:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t|0) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \int_0^1 d\alpha \left[ (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\alpha\vec{r}, t) + (\vec{A}(\alpha\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \right. \\ \left. + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\alpha\vec{r}, t)) \right], \end{aligned}$$

que, por sua vez conduz a

$$\vec{A}(\vec{r}, t|0) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{d}{d\alpha} (\alpha \vec{A}(\alpha\vec{r}, t)) + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\alpha\vec{r}, t)) \right],$$

donde

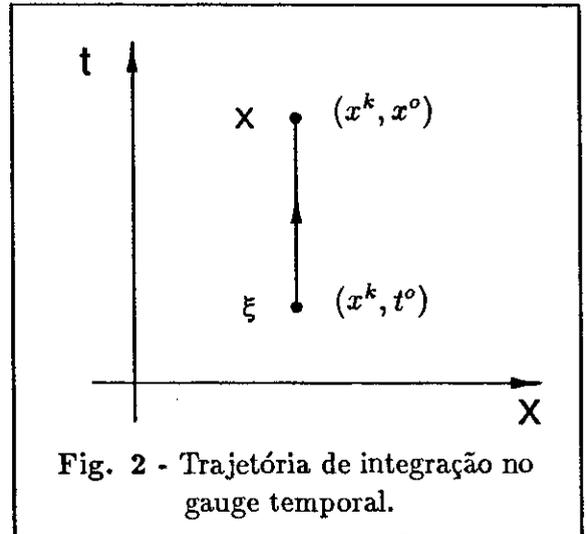
$$\vec{A}(\vec{r}, t|0) = -\vec{r} \times \int_0^1 d\alpha \vec{\nabla} \times \vec{A}(\alpha\vec{r}, t) = -\vec{r} \times \int_0^1 d\alpha \alpha \vec{B}(\alpha\vec{r}, t), \quad (4.16)$$

com  $\vec{B}$  sendo o campo magnético. Quanto a  $\mathcal{A}_o$ , será expresso por meio do vetor campo elétrico  $\vec{E}$  sob a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_o(\vec{r}, t|0) &= \int_0^1 d\alpha \vec{r} \cdot \left( \frac{\partial A_o(\alpha\vec{r}, 0)}{\partial(\alpha\vec{r})} - \frac{\partial \vec{A}(\alpha\vec{r}, t)}{\partial t} \right), \\ \mathcal{A}_o(\vec{r}, t|0) &= - \int_0^1 d\alpha \vec{r} \cdot \vec{E}(\alpha\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

a menos de uma constante de integração. As expressões (4.16) e (4.17) são as fórmulas que expressam os potenciais em função dos campos elétrico e magnético<sup>[41]</sup> no gauge de Poincaré, como vimos anteriormente.

iii) Finalmente, e por motivos que veremos depois, consideremos a passagem do gauge de Coulomb para o gauge temporal ( $A_o = 0$ ) no caso abeliano. Designando  $A_o^c(x)$  e  $A_i^c(x)$  como os potenciais no gauge de Coulomb e considerando a trajetória indicada pela figura 2, temos:



$$\mathcal{A}_o(x|\xi) = A_o^c(x) - \partial_o \int_{\xi}^x dz^o A_o^c(z),$$

$$\mathcal{A}_i(x|\xi) = A_i^c(x) - \partial_i \int_{\xi}^x dz^o A_o^c(z).$$

os quais podem ser reescritos como:

$$\mathcal{A}_o(x|\xi) = A_o^c(x) - \partial_o \int_0^1 d\alpha (x^o - t^o) A_o^c(t^o + \alpha(x^o - t^o)),$$

$$\mathcal{A}_o(x|\xi) = A_o^c - \int_o^1 d\alpha \frac{d}{d\alpha} \{ \alpha A_o^c(t^o + \alpha(x^o - t^o)) \} , \quad (4.18)$$

$$\mathcal{A}_i(x|\xi) = A_i^c(x) - \partial_i \int_o^1 d\alpha (x^o - t^o) A_o^c(t^o + \alpha(x^o - t^o)) . \quad (4.19)$$

De (4.18) é claro que o gauge temporal  $\mathcal{A}_o = 0$  é atingido, enquanto que  $\mathcal{A}_i$  é dado por (4.19). Observemos que estas relações são válidas para todo instante de tempo. Por último, notemos que nesta formulação somente a parte transversal do potencial  $\vec{\mathcal{A}}$  é levada em consideração, isto é, de:

$$\mathcal{A}_i(x|\xi) = A_i^c(x) - \partial_i \Lambda(x) ,$$

temos que  $\Lambda(x) = -\frac{1}{\nabla^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}})$  .

### 4.1.2 Exemplo 2: O Monopolo de Dirac

Ao escolhermos na expressão (4.5) o ponto de referência no infinito espacial, emerge naturalmente o estudo do monopolo de Dirac. Isto não é acidental, pois como já mencionamos, é na própria abordagem invariante de gauge da QED feita por Dirac que aparecem as integrais de linha sobre os potenciais com ponto de referência no infinito. Não obstante, a conexão com o gauge de Fock-Schwinger foi somente apontada ultimamente por Ellis<sup>[55]</sup>, que de forma simples reproduzimos aqui como um caso particular do formalismo apresentado neste capítulo.

Consideraremos o monopolo na origem de coordenadas com campo magnético  $\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}$  de intensidade  $g$ . De acordo com (4.5) tomando-se o ponto de referência em  $-\infty$ , podemos visualizar o monopolo como se irradiado por retas provenientes do infinito (figura 3). De (4.5) temos:

$$\mathcal{A}_\mu(x|\xi) = \int_{C_{\xi x}} dz^\nu F_{\nu\sigma}(z) \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^\mu},$$

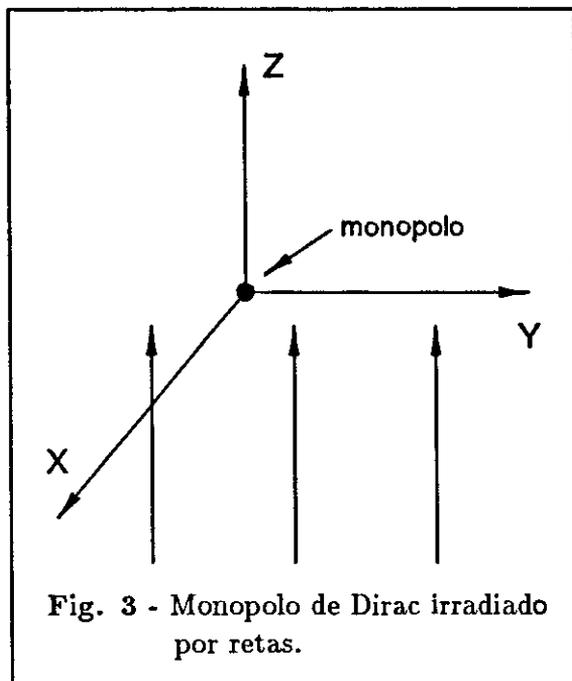


Fig. 3 - Monopolo de Dirac irradiado por retas.

que neste caso pode ser reescrita como:

$$\mathcal{A}_\mu(x|-\infty) = \int_{-\infty}^x dz^\nu F_{\nu\mu}(z) = \int_{-\infty}^x d\alpha F_{\nu\mu}(z) \frac{dz^\nu}{d\alpha}.$$

Após a parametrização da reta por  $z^\mu = x^\mu + \alpha p^\mu$  e  $p^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , obtemos:

$$\mathcal{A}_0(x|-\infty) = \int_{-\infty}^x d\alpha F_{30}(z), \quad (4.20)$$

$$\mathcal{A}_i(x|-\infty) = \int_{-\infty}^x d\alpha F_{3i}(z). \quad (4.21)$$

De forma análoga ao tratamento usual da "string de Dirac", excluimos da região de integração o semi-eixo  $z$  positivo ( $x = 0, y = 0, z \geq 0$ ), obtendo-se:

$$\mathcal{A}_0 = 0, \quad (4.22)$$

$$\vec{\mathcal{A}} = \int_{-\infty}^x d\alpha (F_{31}, F_{32}, 0). \quad (4.23)$$

Introduzindo-se variáveis complexas

$$\mathcal{A}(z) = \mathcal{A}_x(z) + i\mathcal{A}_y(z),$$

$$\mathcal{B}(u) = \mathcal{B}_x(u) + i\mathcal{B}_y(u), \quad u = x + iy,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -igu \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{1}{[u^2 + (z + \alpha)^2]^{3/2}} \\ &= ig \frac{\exp(i\phi)}{r} \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De (4.22) e (4.24) vemos que os potenciais do monopolo de Dirac são os mesmos calculados no gauge de Lorentz, singulares ao longo do eixo  $z$  negativo, que em coordenadas esféricas são dados por:

$$A_o = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\phi = \frac{g}{r \sin\theta} (1 - \cos\theta).$$

O caso quando o ponto de referência estiver em  $+\infty$ , isto é, potenciais ao longo do eixo  $z$  positivo, pode ser tratado analogamente.

### 4.1.3 Exemplo 3: Propagador no Gauge Temporal

Sabemos que o propagador bosônico definido por:

$$D_{\mu\nu}(x, y) = -i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle, \quad (4.25)$$

é um objeto dependente do gauge. Da seção anterior podemos escrever um propagador invariante de gauge no caso abeliano na forma:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x, y) &= -i \langle 0 | T \left( A_\mu(x) - \partial_\mu \int_{C_{\xi x}} dz^\alpha A_\alpha(z) \right) \left( A_\nu(y) - \partial_\nu \int_{C_{\xi y}} d\omega^\beta A_\beta(\omega) \right) | 0 \rangle, \\ D_{\mu\nu}(x, y | \xi) &= D_{\mu\nu}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_x^\xi dz^\alpha D_{\alpha\nu}(z, y) + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \int_y^\xi d\omega^\beta D_{\mu\beta}(x, \omega) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \int_x^\xi dz^\alpha \int_y^\xi d\omega^\beta D_{\alpha\beta}(z, \omega). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Convém ressaltarmos que os propagadores do lado direito de (4.26) estão expressos num gauge arbitrário e, como veremos a seguir, este resultado não tem somente um interesse formal.

A motivação de fazermos este cálculo baseia-se, como já sabemos, na necessidade de uma prescrição para manipularmos o polo duplo em  $k_0$  que aparece no propagador do campo de gauge no gauge temporal. A literatura traz diversas prescrições, a saber: prescrição do valor principal, prescrição  $\alpha$  e a assim chamada prescrição Viena. Não obstante, como foi mostrado por Caracciolo et al.<sup>[56-a]</sup>, a prescrição do valor principal fracassou, pois não conduzia à correta exponenciação da dependência temporal à quarta ordem na constante de acoplamento do loop de Wilson. As demais prescrições em uso ainda não dispõem de uma demonstração geral sobre sua validade e portanto tem sido motivo de intenso objeto de estudo<sup>[22]</sup>. Ao mesmo tempo é interessante mencionar que uma adequada implementação da prescrição do valor principal no gauge do cone de luz, como feito por Pimentel e Suzuki<sup>[56-b]</sup>, mostra-se eficaz no tratamento dos polos.

Caracciolo et al. dizem que a parte temporal do propagador longitudinal do fóton no gauge temporal que satisfaz o critério do loop de Wilson escreve-se na forma:

$$D(t_2, t_1) = -\frac{1}{2} |t_2 - t_1| + \frac{1}{2} \alpha (t_2 + t_1) + \gamma, \quad (4.27)$$

com  $\alpha$  e  $\gamma$  constantes arbitrárias. Para derivar (4.27), vários métodos têm aparecido na literatura<sup>[57]</sup>. Tais trabalhos, não obstante, impõem condições subsidiárias sobre os potenciais no gauge temporal para um instante de tempo particular, conectado com a invariância sob transformações de gauge independente do tempo; somente Girotti e Rothe<sup>[58]</sup> obtiveram os resultados de Caracciolo et al. num gauge temporal completamente fixado. A virtude da presente derivação, que é similar à de Kallionatis e Crewther<sup>[59]</sup> e feita independentemente, é que não precisamos supor condições extras sobre os potenciais uma vez atingido o gauge temporal. Além disso fica manifesta, mais uma vez, a importância

de se tomar uma reta como trajetória de integração.

De (4.26) e usando a representação de momento dos propagadores no gauge de Coulomb, temos que o propagador no gauge temporal é expresso como:

$$D_{ij}(x, y) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \right) \right] e^{-ik(x-y)} + \\ -i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} \int_x^\xi dz^o \int_y^\xi d\omega^o \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{|\vec{k}|^2} \right] e^{-ik(z-\omega)}. \quad (4.28)$$

Como já mencionado, o interesse centra-se no segundo termo de (4.28), que será designado por

$$I = -i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \int_x^\xi dz^o \int_y^\xi d\omega^o \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{|\vec{k}|^2} \right) e^{-ik(z-\omega)}. \quad (4.29)$$

Do exemplo 1, as integrais ao longo da trajetória podem ser escritas como:

$$\int_\xi^x dz^o e^{-ik^o z^o} = \int_0^1 d\alpha (x^o - t^o) e^{-ik^o(t^o + \alpha(x^o - t^o))}, \\ = \frac{i}{k^o} (e^{-ik^o x^o} - e^{-ik^o t^o}).$$

Desta forma temos:

$$I = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \frac{1}{k_o^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} (e^{-ik^o x^o} - e^{-ik^o t^o}) (e^{ik^o y^o} - e^{-ik^o t^o}). \quad (4.30)$$

Integrando na parte temporal ( $k_o$ ) obtemos finalmente:

$$I = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \left( -\frac{1}{2} |x^o - y^o| - |x^o - t^o| - |y^o - t^o| \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (4.31)$$

Com este método obtemos o resultado de Leroy et al<sup>[57]</sup> (termo entre parênteses em (4.31)), que concorda com o de Caracciolo et al quando  $t^o = \gamma = \pm\infty$ . Este propagador, como esperado neste formalismo, não é invariante por translações temporais, de forma que não têm uma representação simples no espaço de momentos. Por último, ressaltamos

a simplicidade na derivação deste resultado quando comparado aos outros autores antes citados.

#### 4.1.4 Exemplo 4: Propagador Fermiônico em Campo Externo

Nos últimos anos, como mencionamos, têm-se dedicado grandes esforços para provar a hipótese de confinamento absoluto de cor. Para isto, os requisitos usualmente formulados são o critério de Wilson e o de que os propagadores de estado de cor não possuam singularidades na região infravermelha; este último refere-se à avaliação do comportamento assintótico das funções de Green para pequenos momentos e energia. Não obstante, se pequenas energias estão presentes, a teoria de perturbações usual conduz a dificuldades (exemplos conhecidos encontram-se na eletrodinâmica quântica e também em física estatística).

Basicamente, tais dificuldades provêm de que cada gráfico da teoria de perturbações usual contém a chamada singularidade infravermelha, isto é, cada gráfico (que é uma integral sobre os momentos) é singular quando os momentos externos tendem a zero. Portanto, métodos alternativos à teoria de perturbações são desejados. Mencionamos também que tem-se depositado muita esperança para resolver o problema de confinamento em cálculos na rede<sup>[60]</sup>.

Por outro lado, o requisito de invariância de gauge é considerado uma condição de observabilidade e portanto um estudo consistente da estrutura de teorias de gauge deve ser feito numa linguagem de objetos invariantes de gauge. Usaremos então este formalismo para o conhecido modelo de Bloch-Nordsieck. O estudo deste modelo sob esta ótica ilustra bem a utilidade desse formalismo para o caso não abeliano e permite verificar também o papel desempenhado pela trajetória reta nas integrais de linha.

Efetuada uma transformação de fase local com a mesma escolha de  $\Lambda$  de (4.2) obtemos que um campo espinorial invariante de gauge no caso abeliano é da forma<sup>[51]</sup>:

$$\psi(x|\xi) = \exp\left(-ig \int_{C_{\xi x}} dz^\nu A_\nu(z)\right) \psi(x). \quad (4.32)$$

Observemos que este espinor só é invariante por transformações de gauge globais. No caso de transformações locais, serão multiplicados pelo fator de fase  $\exp(ig\phi(\xi))$ , que, no limite

$\xi \rightarrow \infty$ , torna o campo espinorial invariante de gauge. Como já mencionamos, o propagador

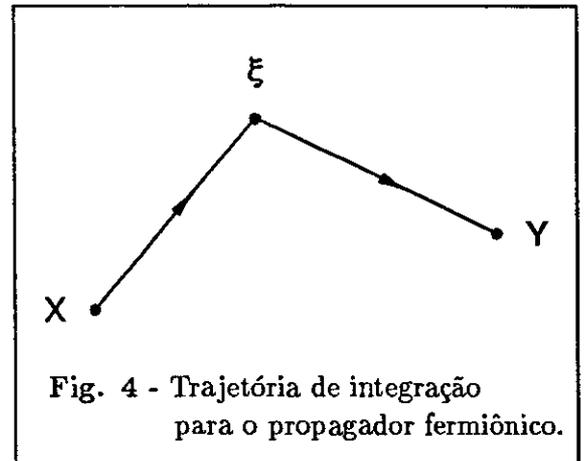
$$G(x, y) = i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle,$$

é um objeto dependente do gauge. Assim, definimos o novo propagador invariante de

gauge como:

$$G(x, y|C) = i \langle 0 | T \psi(x) \mathcal{P} \exp\left(ig \int_x^y dz^\nu A_\nu(z)\right) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle, \quad (4.33)$$

onde a integração é efetuada ao longo da trajetória ilustrada na figura 4.



Observemos que em (4.33) introduzimos um ordenamento  $\mathcal{P}$  (para a trajetória). Desta forma, o propagador converte-se em um objeto independente do gauge, mas dependente da trajetória. Lembremos que o modelo de Bloch-Nordsieck é diferente da eletrodinâmica quântica em que as matrizes  $\gamma^\mu$  são substituídas por um vetor tipo tempo  $u_\mu (u^2 = 1)$ . Neste caso (4.33) escreve-se como:

$$G(x, y|C) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp(iS(\psi, \bar{\psi}, A)) \psi(x) \exp\left(ig \int_x^y dz^\nu A_\nu(z)\right) \bar{\psi}(y), \quad (4.34)$$

com  $S(\psi, \bar{\psi}, A) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \bar{\psi}(u^\mu(\partial_\mu + igA_\mu) - m)\psi\right)$ ;  $N$ , o fator de normalização,

é obtido de  $g=0$  em (4.34).

Efetuada-se as integrais sobre os campos fermiônicos, obtemos:

$$G(x, y|C) = \int \mathcal{D}A_\mu \frac{\det[u^\mu(\partial_\mu + igA_\mu) - m]}{\det(u^\mu\partial_\mu - m)} G(x, y|A) \times \exp\left(iS_o(A) + ig \int_x^y dz^\nu A_\nu(z)\right), \quad (4.35)$$

onde  $S_o(A)$  é a ação do campo eletromagnético livre, e  $G(x, y|A)$  designa a função de Green fermiônica no campo externo  $A_\mu$ , que satisfaz a equação:

$$[iu^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m]G(x, y|A) = -\delta(x - y). \quad (4.36)$$

Os determinantes em (4.35) são iguais à unidade, porque o modelo de Bloch-Nordsieck não contém polarização do vácuo e portanto, (4.35) converte-se em:

$$G(x, y|C) = \int \mathcal{D}A_\mu G(x, y|A) \exp\left(iS_o(A) + ig \int_x^y dz^\nu A_\nu(z)\right), \quad (4.37)$$

com  $G(x, y|A)$  satisfazendo (4.36), a qual pode ser resolvida utilizando o método do quinto parâmetro desenvolvido por Feynman<sup>[61]</sup>. Tal método permite-nos escrever uma representação paramétrica para o operador inverso na forma:

$$\frac{i}{x} = \int_0^\infty e^{iwx} dw, \quad (4.38)$$

com  $m \rightarrow m - i\varepsilon$ ; temos de (4.36) e (4.38) que:

$$\begin{aligned} G(x, y|A) &= i \int_0^\infty d\nu \exp\{i\nu [iu^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m]\} \delta(x - y) \\ &= i \int_0^\infty d\nu \exp[-i\nu(u^\mu\partial_\mu + m)] f(\nu, x) \delta(x - y), \end{aligned}$$

com  $f(\nu, x) = \exp[\nu(u^\mu\partial_\mu - u^\mu(\partial_\mu - igA_\mu))]$ . Dado que  $f(\nu, x)$  satisfaz a equação:

$$\frac{\partial f(\nu, x)}{\partial \nu} = igu^\mu A_\mu(x + \nu u) f(\nu, x),$$

obtemos

$$f(\nu, x) = \exp \left( ig \int_0^\nu d\nu' u^\mu A_\mu(x + \nu'u) \right) .$$

Logo,

$$G(x, y|A) = i \int_0^\infty d\nu \exp[-i\nu(u^\mu \partial_\mu + m)] \delta(x - y) \exp \left[ ig \int_0^\nu d\nu' u^\mu A_\mu(x + \nu'u) \right] ,$$

e, portanto,

$$G(x, y|A) = i \int_0^\infty d\nu \exp(-i\nu m) \delta(x - y - \nu u) \exp \left[ ig \int_0^\nu d\nu' u^\mu A_\mu(x - \nu'u) \right] .$$

Assim, (4.37) converte-se em:

$$\begin{aligned} G(x, y|C) &= i \int_0^\infty d\nu \delta(x - y - \nu u) \exp(-i\nu(m - i\varepsilon)) \times \\ &\times \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left( iS_o(A) + ig \int_0^\nu d\nu' u^\mu A_\mu(x - \nu'u) + ig \int_x^y dz^\mu A_\mu(z) \right) . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Por último, notemos que, em virtude de  $\delta(x - y - \nu u)$ , a integral em  $\nu'$  pode ser escrita como uma integral de trajetória, isto é:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\nu \delta(x - y - \nu u) \exp \left( ig \int_0^\nu d\nu' u^\mu A_\mu(x - \nu'u) \right) = \\ \int_0^\infty d\nu \delta(x - y - \nu u) \exp \left( ig \int_y^x dz^\mu A_\mu(z) \right) . \end{aligned}$$

Neste caso, a trajetória é uma reta. Logo, (4.39) converte-se em:

$$G(x, y|C) = i \int_0^\infty d\nu \delta(x - y - \nu u) \exp(-i\nu(m - i\varepsilon)) \langle 0 | \mathcal{P} \exp \left[ ig \oint_{\Gamma_{xy}} dz^\mu A_\mu(z) \right] | 0 \rangle , \quad (4.40)$$

sendo  $\Gamma_{xy}$  a trajetória fechada de integração, composta pelos dois caminhos provenientes de cada integração.

Observemos que o último termo em (4.40) é o operador de Wilson antes comentado. Desta forma, a função de Green invariante de gauge na região infravermelha pode ser *fatorada*

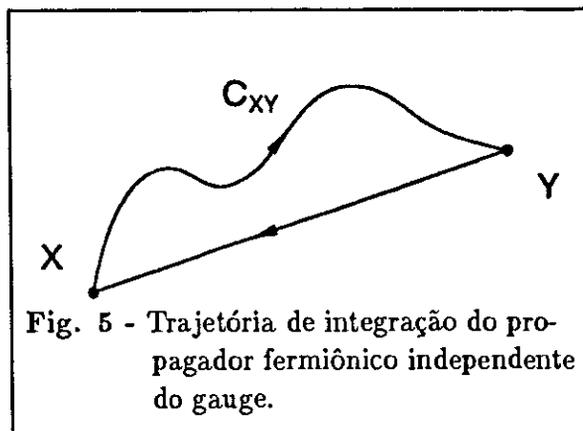


Fig. 5 - Trajetória de integração do propagador fermiônico independente do gauge.

em termos de operadores de Wilson. Este era o ponto a ser evidenciado neste exemplo, pois esta fatoração pode ter um significado importante no caso não abeliano, apesar de seu caráter artificial<sup>[51]</sup> neste exemplo. Com efeito, ao impormos o gauge  $u^\mu A_\mu = 0$ , em outras palavras, escolhendo a trajetória inicial  $C_{\xi x}$  como uma reta, os setores fermiônicos e bosônicos se desacoplam de forma que o férmion seja essencialmente livre.

Antes de finalizarmos, dois comentários são pertinentes: Primeiro, as idéias esboçadas neste exemplo, quando aplicadas à QED e QCD em duas dimensões conduzem aos mesmos resultados, como demonstrado por Sisakyan et al<sup>[51]</sup>. Estes autores mostram também que o propagador invariante de gauge na região infravermelha possui um polo simples desde que a trajetória inicial  $C$ , que define a função de Green invariante de gauge, seja uma reta. Por outro lado, o uso de potenciais invariantes de gauge permite obter uma expressão para a ação efetiva da teoria em consideração, como mostrado no caso de mésons<sup>[62]</sup> usando a expansão  $1/N$ .

Em segundo lugar, usando argumentos puramente geométricos, Prokhorov e Shabanov<sup>[63]</sup> mostraram recentemente que exponenciais de integrais de linha, como as consideradas neste capítulo, são os únicos objetos fundamentais em teorias de gauge. Logo, todas as configurações invariantes de gauge dos campos, embora complexas, podem ser construídas a partir de tais objetos fundamentais. Assim, esses autores mostram que

a função de Green invariante de gauge (considerada neste exemplo), quando aplicada ao caso de quarks massivos, conduz naturalmente a uma energia potencial linearmente crescente com a distância entre os quarks.

Finalmente, pelos exemplos mostrados pode-se observar a riqueza do formalismo independente de gauge como um enfoque alternativo a cálculos tradicionais e promissor nos estudos sobre confinamento.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

Estudamos nesta tese a quantização formal de teorias de gauge, quais sejam: QED e teorias do tipo Yang-Mills. Adotamos o seguinte ponto de vista: Em cada caso estudamos as propriedades dos gauges a serem utilizados, para em seguida implementá-los nos formalismos de quantização escolhidos, a saber, usando o formalismo hamiltoniano de Dirac e o formalismo BRST de Batalin, Fradkin e Vilkovisky. Para as teorias aqui mencionadas, apresentamos a seguir alguns resultados:

- A) Mostramos como modificar adequadamente a condição de gauge de Fock-Schwinger para sua implementação numa teoria de gauge do tipo Yang-Mills. Através do formalismo BFV construímos o funcional gerador do campo de gauge e o propagador foi calculado explicitamente, sendo este não invariante por translações devido à dependência nas coordenadas da condição de gauge utilizada.
- B) Com a finalidade de complementar a análise BRST feita previamente, e sendo o gerador de simetria BRST o objeto principal em tal formalismo, verificamos

a equivalência das cargas BRST hamiltoniana (BFV) e lagrangiana (BV), resultados estes que concordam com os da literatura.

- C) Apresentamos uma descrição detalhada da QED no gauge de Poincaré, provando ser este um gauge útil e particularmente simples. Mostramos que os colchetes de Dirac não possuem problemas de ordenamento, como pode ser observado no lado direito de tais colchetes que não contêm variáveis de campo.
- D) Construímos a matriz  $\mathbf{U}$  para a QED no gauge de Poincaré, através da estrutura dos colchetes de Dirac, sem eliminarmos explicitamente as variáveis vinculadas.
- E) Propomos uma versão modificada do gauge de Poincaré para limitarmos somente a componente longitudinal do potencial de gauge. A descrição resultante da QED, neste gauge de Poincaré modificado, torna-se análoga à QED no gauge de Coulomb. Já o potencial escalar é modificado por um novo termo o qual garante que  $A_0(t, \vec{x} = 0) = 0$ , como é exigido pelas condições de gauge.
- F) Obtemos uma expressão explícita para o propagador do fóton no gauge de Poincaré, usando o formalismo de integrais funcionais proposto por Senjanovic para tratar sistemas com vínculos de segunda classe.
- G) Como uma ilustração do formalismo invariante de gauge, introduzido no Capítulo 4, apresentamos uma derivação simples para o propagador do campo de gauge abeliano no gauge temporal.

Finalmente, mencionamos que, neste trabalho, concentramo-nos nos aspectos formais da quantização de teorias de gauge. Por outro lado, o gauge de Fock-Schwinger, que viola invariância por translações, requer uma renormalização não *standard*. A renormalização com este gauge, que não é uma tarefa simples, oferece assim um programa de

trabalho promissor. Com respeito ao formalismo invariante de gauge, demos destaque ao fato de a trajetória ser uma reta no exemplo mostrado na fatoração em operadores de Wilson. Este exemplo é muito interessante e pode contribuir na resolução de problemas importantes, como o de confinamento. Esses aspectos formam parte de nossos interesses futuros.

# APÊNDICE A

## NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

As notações utilizadas neste trabalho são: O campo de gauge  $A_\mu$  é expresso como  $A_\mu \equiv \sum_a T^a A_\mu^a$ , onde  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  para  $SU(N)$  e  $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$ .  $A_\mu^a$  são as componentes de  $A_\mu$ , enquanto que  $T^a$  são os geradores do grupo de gauge  $\Lambda$ , sendo este um grupo de Lie compacto simples. Os geradores são operadores lineares que satisfazem:

$$[T_a, T_b] = \sum_c f_{ab}^c T_c; \quad a, b, c = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (\text{A.1})$$

onde  $f_{ab}^c = f_{abc}$  são as constantes de estrutura (do grupo  $\Lambda$ ) totalmente antissimétricas,  $N$  denota a dimensão do grupo, e  $A_\mu$  toma valores na representação adjunta de  $\Lambda$ . Os campos  $A_\mu$  transformam-se como:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu = \omega^{-1} A_\mu \omega - \frac{i}{g} \omega^{-1} (\partial_\mu \omega), \quad (\text{A.2})$$

e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu],$$

com derivada covariante dada por:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu. \quad (\text{A.3})$$

Com respeito às matrizes  $\gamma^\mu$  de Dirac, usamos  $(\gamma^0)^2 = -1$  e  $(\gamma_k)^2 = 1$ .

## APÊNDICE B

### LEMA DE POINCARÉ E OS GAUGES DE FOCK-SCHWINGER E POINCARÉ

Neste apêndice, de forma sucinta, reproduzimos a observação feita por Brittin *et al* <sup>[41]</sup>, onde usando o lema de Poincaré podemos também expressar o potencial de gauge em função do tensor intensidade de campo, dando assim um suporte geométrico à fórmula de inversão neste gauge. Com efeito, lembremos que as equações de Maxwell homogêneas em notação de formas escrevem-se como:

$$dF = 0 , \tag{B.1}$$

sendo  $F$  a 2-forma de Faraday dada por:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu . \tag{B.2}$$

Assim, do lema de Poincaré temos que:

$$F = dA , \tag{B.3}$$

onde  $A$  é a 1-forma

$$A = A_\mu dx^\mu . \tag{B.4}$$

O ponto interessante e observado por Brittin et al diz respeito à demonstração dada por Spivak<sup>[64]</sup> do lema de Poincaré, isto é, ao demonstrar que se uma  $m$ -forma é fechada, será também exata ( $\omega = d\Omega$ ,  $\Omega$  é uma  $(m - 1)$ -forma), fazendo-se uso da integral  $I$  de  $\omega$  definida por:

$$\Omega \equiv I\omega \equiv \sum_{1 < i_1 < \dots < i_m \leq n} \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \left( \int_0^1 d\lambda \lambda^{m-1} \omega_{i_1 \dots i_m}(\lambda x) \right) x^{i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{d}x^{i_r} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \tag{B.5}$$

onde  $\hat{d}x$  significa  $dx$  omitido e  $\lambda$  é um parâmetro arbitrário ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ). Integrais análogas também são encontradas na referência [65].

Assim, usando (B.5), calculamos a 1-forma  $A$ , isto é,

$$A = IF = \int_0^1 d\lambda \lambda F_{\mu\nu}(\lambda x) (x^\mu dx^\nu - x^\nu dx^\mu) ,$$

ou seja,

$$A_\mu = \int_0^1 d\lambda \lambda x^\nu F_{\nu\mu}(\lambda x) , \tag{B.6}$$

sendo a fórmula de inversão no gauge de Fock-Schwinger (caso abeliano). Para o gauge de Poincaré (no caso abeliano) podemos proceder da mesma maneira. Neste caso, da equação de Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  temos

$$dB = 0 , \tag{B.7}$$

com  $B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ), e do lema de Poincaré

$$B = dA , \tag{B.8}$$

sendo  $A$  a 1-forma dada por:

$$A = A_i dx^i . \tag{B.9}$$

Usando novamente (B.5) encontramos que

$$A = \int_0^1 d\lambda \lambda B_{ij}(\lambda \vec{r}, t) (x^i dx^j - x^j dx^i) ,$$

logo,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_0^1 d\lambda \lambda \vec{B}(\lambda \vec{r}, t) \times \vec{r} . \tag{B.10}$$

Ao mesmo tempo, da equação de Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  temos

$$dE = 0 , \tag{B.11}$$

com

$$E = \left( E_i + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) dx^i ,$$

e do lema de Poincaré

$$E = df , \tag{B.12}$$

sendo  $f$  um escalar, que ao fazermos uso de (B.5) obtemos

$$f = \int_0^1 d\lambda E_i(\lambda \vec{r}, t) x^i , \tag{B.13}$$

e escrevendo  $A_o = -f$  obtemos finalmente

$$A_o(\vec{r}, t) = -\vec{r} \cdot \int_0^1 d\lambda \vec{E}(\lambda \vec{r}, t) . \tag{B.14}$$

Vemos que as expressões (B.10) e (B.14) são as fórmulas de inversão no gauge de Poincaré.

Por último, observemos que a generalização destas fórmulas para o caso não abeliano, de acordo com o apresentado antes, podem ser feitas sem nenhum problema.

## APÊNDICE C

### OBTENÇÃO DAS EXPRESSÕES (2.55) e (3.94)

1) Em primeiro lugar, consideremos a obtenção do propagador no gauge de Fock-Schwinger (2.55), isto é, neste caso deve-se calcular o inverso do operador

$$O^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\alpha |x|^4} x^\mu x^\nu. \quad (\text{C.1})$$

É interessante fazer notar que, devido à presença do último termo, a equação correspondente de (C.1) no espaço de momento não conduz a uma expressão algébrica, como é usual em outros gauges. Por este motivo e como não dispúnhamos de uma prescrição para inverter (C.1), reproduzimos a linha de raciocínio utilizada para obtermos (2.55). Assim, trabalhando de uma forma iterativa, começamos tentando fazer com que o operador inverso possua a seguinte forma:

$$O_{\nu\lambda}^{-1} = a \frac{\eta_{\mu\nu}}{\square} + b \frac{x_\nu \partial_\lambda}{\square} + \dots, \quad (\text{C.2})$$

com  $a$  e  $b$  constantes. De:

$$\eta^{\mu\nu} \square \left( b \frac{x_\nu \partial_\lambda}{\square} \right) = 2b \partial^\mu \partial_\lambda + b x^\mu \partial_\lambda,$$

e:

$$\partial^\mu \partial^\nu \left( b \frac{x_\nu \partial_\lambda}{\square} \right) = 5b \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + b x \cdot \partial \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square},$$

obtemos que  $O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1}$  é da forma:

$$\begin{aligned} O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1} &= a \delta_\lambda^\mu - (a + 3b) \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + b x^\mu \partial_\lambda - b x \cdot \partial \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + \\ &+ \frac{a}{\alpha |x|^4} \frac{x^\mu x_\lambda}{\square} + \frac{b}{\alpha |x|^2} \frac{x^\mu \partial_\lambda}{\square} + \dots \end{aligned} \tag{C.3}$$

Como podemos observar, esta expressão contém um termo não desejado da forma  $\frac{x_\nu \partial_\lambda}{\square}$ , pois no espaço de momento contribuiria com termos do tipo  $\frac{k_\alpha}{k^2}$  os quais, por sua vez, não podem formar parte do propagador do fóton. Dito isto e motivados pela referência [16], postulamos um novo operador inverso:

$$O_{\nu\lambda}^{-1} = a \frac{\eta_{\nu\lambda}}{\square} + C \frac{x_\lambda \partial_\nu + x_\nu \partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square} + \dots, \tag{C.4}$$

com  $c$  e  $d$  constantes. Devido ao cálculo de  $O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1}$ , aparecerão derivadas do tipo  $\partial_\mu \frac{1}{x \cdot \partial + a}$ . Por este motivo, faremos uma pequena digressão antes de continuarmos.

Com efeito, considerando  $\partial_\mu \frac{1}{x \cdot \partial + a}$ , temos:

$$\partial_\mu \frac{1}{x \cdot \partial + a} = \frac{1}{a} \partial_\mu \frac{1}{1 + \frac{x \cdot \partial}{a}} = \frac{1}{a} \partial_\mu \left[ 1 - \frac{x \cdot \partial}{a} + \frac{(x \cdot \partial)^2}{a^2} - \frac{(x \cdot \partial)^3}{a^3} + \dots \right]. \tag{C.5}$$

Notando que

$$\partial^\mu 1 = 1 \partial_\mu,$$

$$\partial_\mu (x \cdot \partial) = \partial_\mu + (x \cdot \partial) \partial_\mu = (1 + x \cdot \partial) \partial_\mu,$$

$$\partial_\mu (x \cdot \partial)^2 = \partial_\mu [(x \cdot \partial)(x \cdot \partial)] = \partial_\mu (x \cdot \partial) + (x \cdot \partial) \partial_\mu (x \cdot \partial) = (1 + x \cdot \partial)^2 \partial_\mu,$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu (x \cdot \partial)^3 &= \partial_\mu [(x \cdot \partial)(x \cdot \partial)(x \cdot \partial)] = \partial_\mu [(x \cdot \partial)(x \cdot \partial)] + (x \cdot \partial) \partial_\mu [(x \cdot \partial)(x \cdot \partial)] \\ &= (1 + x \cdot \partial)^3 \partial_\mu, \end{aligned}$$

e assim por diante, (C.5) converte-se em:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{1}{x \cdot \partial + a} &= \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{1}{a} (x \cdot \partial) + \frac{1}{a^2} (1 + x \cdot \partial)^2 - \frac{1}{a^3} (1 + x \cdot \partial)^3 + \dots \right] \partial_\mu \\ &= \frac{1}{a} \left[ a + \frac{1}{a} (1 + x \cdot \partial) \right]^{-1} \partial_\mu \\ &= \frac{1}{x \cdot \partial + a + 1} \partial_\mu, \quad (a \neq 0). \end{aligned} \quad (C.6)$$

De um modo análogo, segue-se:

$$x^\mu \frac{1}{x \cdot \partial + a - 1} = \frac{1}{x \cdot \partial + a - 1} x^\mu. \quad (C.7)$$

Munidos de (C.6) e (C.7) vemos que:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \square \left( c \frac{x_\lambda \partial_\nu + x_\nu \partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square} \right) &= \frac{c}{x \cdot \partial + d + 2} \partial^\rho \partial_\rho (x_\lambda \partial^\mu + x^\mu \partial_\lambda + \delta_\lambda^\mu) \frac{1}{\square} \\ &= \frac{c}{x \cdot \partial + d + 2} \left( 4 \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + x_\lambda \partial^\mu + x^\mu \partial_\lambda + \delta_\lambda^\mu \right), \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial^\nu \left( c \frac{x_\lambda \partial_\nu + x_\nu \partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square} \right) &= \frac{c}{x \cdot \partial + d + 2} \partial^\mu \partial_\nu (x_\lambda \partial_\nu + x_\nu \partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}) \frac{1}{\square} \\ &= \frac{c}{x \cdot \partial + d + 2} \left( 7 \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + x \cdot \partial \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + \delta_\lambda^\mu + x_\lambda \partial^\mu \right), \end{aligned} \quad (C.9)$$

é claro então que:

$$(\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \left( c \frac{x_\lambda \partial_\nu + x_\nu \partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square} \right) = \frac{c}{x \cdot \partial + d + 2} \left( -3 \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + x^\mu \partial_\lambda - x \cdot \partial \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} \right). \quad (C.10)$$

Ao mesmo tempo:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\alpha |x|^4} x^\mu x^\nu (x_\lambda \partial_\nu + x_\nu \partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}) \frac{1}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square} &= \frac{c}{\alpha |x|^4} x^\mu x_\lambda (x \cdot \partial + 1) \frac{1}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square} + \\ &= \frac{c}{\alpha |x|^2} \frac{x^\mu \partial_\lambda}{x \cdot \partial + d} \frac{1}{\square}. \end{aligned} \quad (C.11)$$

De (C.10) e (C.11) temos que:

$$O^{\mu\nu}O_{\nu\lambda}^{-1} = \left( \eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu + \frac{1}{\alpha|x|^4}x^\mu x^\nu \right) \left( a\frac{\eta_{\nu\lambda}}{\square} + c\frac{x_\lambda\partial_\nu + x_\nu\partial_\lambda + \eta_{\nu\lambda}}{x\cdot\partial + d}\frac{1}{\square} + \dots \right)$$

$$O^{\mu\nu}O_{\nu\lambda}^{-1} = a\delta_\lambda^\mu - a\frac{\partial^\mu\partial_\lambda}{\square} + \frac{a}{\alpha|x|^4}\frac{x^\mu x_\lambda}{\square} - \frac{c}{x\cdot\partial + d + 2}(3 + x\cdot\partial)\frac{\partial^\mu\partial_\lambda}{\square} +$$

$$+ c\frac{x^\mu\partial_\lambda}{x\cdot\partial + d + 2} + \frac{c}{\alpha|x|^4}x^\mu x_\lambda(x\cdot\partial + 1)\frac{1}{x\cdot\partial + d}\frac{1}{\square} + \frac{c}{\alpha|x|^2}\frac{x^\mu\partial_\lambda}{x\cdot\partial + d}\frac{1}{\square} + \dots$$

Escolhendo  $a = d = -c = 1$ , segue-se:

$$O^{\mu\nu}O_{\nu\lambda}^{-1} = \delta_\lambda^\mu - \frac{x^\mu\partial_\lambda}{x\cdot\partial + 3} - \frac{1}{\alpha|x|^2}\frac{x^\mu\partial_\lambda}{x\cdot\partial + 1}\frac{1}{\square} + \dots \quad (\text{C.12})$$

Novamente, motivados pela referência [16], descobrimos que o último termo em (C.12) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{\alpha|x|^4}x^\mu x^\nu(2x_\nu x_\lambda + |x|^2\partial_\nu\partial_\lambda)\frac{1}{(x\cdot\partial + 1)^2}\frac{1}{\square} =$$

$$= \frac{1}{\alpha|x|^4}(2|x|^2x^\mu\partial_\lambda + |x|^2x^\mu x\cdot\partial\partial_\lambda)\frac{1}{(x\cdot\partial + 1)^2}\frac{1}{\square}$$

$$= \frac{1}{\alpha|x|^2}(1 + x\cdot\partial)\frac{x^\mu\partial_\lambda}{(x\cdot\partial + 1)^2}\frac{1}{\square}$$

$$= \frac{1}{\alpha|x|^2}\frac{x^\mu\partial_\lambda}{x\cdot\partial + 1}\frac{1}{\square}. \quad (\text{C.13})$$

Com esta informação, escrevemos o operador inverso como:

$$O_{\nu\lambda}^{-1} = \frac{\eta_{\nu\lambda}}{\square} - \frac{x_\nu\partial_\lambda + x_\lambda\partial_\nu + \eta_{\nu\lambda}}{x\cdot\partial + 1}\frac{1}{\square} + \frac{2x_\nu x_\lambda + |x|^2\partial_\nu\partial_\lambda}{(x\cdot\partial + 1)^2}\frac{1}{\square}. \quad (\text{C.14})$$

Assim,

$$\eta^{\mu\nu}\square\left(\frac{2x_\nu x_\lambda + |x|^2\partial_\nu\partial_\lambda}{(x\cdot\partial + 1)^2}\frac{1}{\square}\right) = \partial^\rho\partial_\rho\frac{2x^\mu\partial_\lambda + |x|^2\partial^\mu\partial_\lambda}{(x\cdot\partial + 1)^2}\frac{1}{\square}$$

$$= \frac{4}{x\cdot\partial + 3}\frac{\partial^\mu\partial_\lambda}{\square} + \frac{1}{(x\cdot\partial + 3)^2}(2x^\mu\partial_\lambda + |x|^2\partial^\mu\partial_\lambda), \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial^\nu \left( \frac{2x_\nu x_\lambda + |x|^2 \partial_\nu \partial_\lambda}{(x \cdot \partial + 1)^2} \frac{1}{\square} \right) &= \frac{1}{(x \cdot \partial + 3)^2} \partial^\mu \partial^\nu (2x_\nu \partial_\lambda + |x|^2 \partial_\nu \partial_\lambda) \frac{1}{\square} \\ &= \frac{4}{x \cdot \partial + 3} \frac{\partial^\mu \partial_\lambda}{\square} + \frac{1}{(x \cdot \partial + 3)^2} (2x^\mu \partial_\lambda + |x|^2 \partial^\mu \partial_\lambda) , \end{aligned} \quad (C.16)$$

$$(\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \left( \frac{2x_\nu \partial_\lambda + |x|^2 \partial_\nu \partial_\lambda}{(x \cdot \partial + 1)^2} \frac{1}{\square} \right) = 0 . \quad (C.17)$$

Com este resultado, temos:

$$\begin{aligned} O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1} &= \delta_\lambda^\mu - \frac{x^\mu \partial_\lambda}{x \cdot \partial + 3} - \frac{1}{\alpha |x|^2} \frac{x^\mu \partial_\lambda}{x \cdot \partial + 1} \frac{1}{\square} + \\ &+ \frac{1}{\alpha |x|^4} x^\mu x^\nu \frac{2x_\nu \partial_\lambda + |x|^2 \partial_\nu \partial_\lambda}{(x \cdot \partial + 1)^2} \frac{1}{\square} , \end{aligned}$$

e usando (C.13), obtemos:

$$O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1} = \delta_\lambda^\mu - \frac{x^\mu \partial_\lambda}{x \cdot \partial + 3} . \quad (C.18)$$

Ao mesmo tempo, de (C.17) observamos que:

$$(\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) (2x_\nu \partial_\lambda + |x|^2 \partial_\nu \partial_\lambda) = (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \partial_\nu (|x|^2 \partial_\lambda) = 0 .$$

Em outras palavras,

$$(\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \partial_\nu (\text{qualquer coisa}) = 0 .$$

Com isto em mente, adicionamos a  $O_{\nu\lambda}^{-1}$  dado por (C.14) o termo da forma:

$$\frac{e}{(x \cdot \partial + f)^2} \partial_\nu |x|^4 \partial_\lambda ,$$

com  $e$  e  $f$  constantes. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
 O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1} &= \delta_{\lambda}^{\mu} - \frac{x^{\mu} \partial_{\lambda}}{x \cdot \partial + 3} + \frac{x^{\mu} x^{\nu}}{\alpha |x|^4} \frac{e}{(x \cdot \partial + f)^2} \partial_{\nu} |x|^4 \partial_{\lambda} \\
 &= \delta_{\lambda}^{\mu} - \frac{x^{\mu} \partial_{\lambda}}{x \cdot \partial + 3} + \frac{1}{\alpha |x|^4} \frac{e}{(x \cdot \partial + f - 2)^2} x^{\mu} x^{\nu} \partial_{\nu} |x|^4 \partial_{\lambda} \\
 &= \delta_{\lambda}^{\mu} - \frac{x^{\mu} \partial_{\lambda}}{x \cdot \partial + 3} + \frac{1}{\alpha |x|^4} \frac{e}{(x \cdot \partial + f - 2)^2} x^{\mu} x^{\nu} (4|x|^2 x_{\nu} + |x|^4 \partial_{\nu}) \partial_{\lambda} \\
 &= \delta_{\lambda}^{\mu} + \frac{e x^{\mu}}{\alpha} \frac{1}{(x \cdot \partial + f + 3)^2} (4 + x \cdot \partial) \partial_{\lambda} - \frac{x^{\mu} \partial_{\lambda}}{x \cdot \partial + 3}. \tag{C.19}
 \end{aligned}$$

Ao escolhermos  $e = \alpha$ ,  $f = 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 O^{\mu\nu} O_{\nu\lambda}^{-1} &= \delta_{\lambda}^{\mu} - \frac{x^{\mu} \partial_{\lambda}}{x \cdot \partial + 3} + x^{\mu} \frac{1}{x \cdot \partial + 4} \partial_{\lambda} \\
 &= \delta_{\lambda}^{\mu} - \frac{x^{\mu} \partial_{\lambda}}{x \cdot \partial + 3} + \frac{1}{x \cdot \partial + 3} x^{\mu} \partial_{\lambda} \\
 &= \delta_{\lambda}^{\mu}.
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$O_{\nu\lambda}^{-1} = \frac{\eta_{\nu\lambda}}{\square} - \frac{x_{\nu} \partial_{\lambda} + \partial_{\nu} x_{\lambda}}{x \cdot \partial + 1} \frac{1}{\square} + \frac{1}{(x \cdot \partial + 1)^2} \partial_{\nu} \left( \alpha |x|^4 + |x|^2 \frac{1}{\square} \right) \partial_{\lambda}, \tag{C.20}$$

que é justamente (2.55).

2) Após os cálculos anteriores, a prova que a expressão (3.94):

$$O^{-1} = \vec{x}^2 \frac{1}{(2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})(3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})}, \tag{C.21}$$

é o inverso do operador:

$$O = \frac{1}{\vec{x}^2} (1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}),$$

resulta direta.

De (C.6) e (C.7) temos:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + a} = \frac{1}{\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + a + 1} \vec{\nabla}, \quad (\text{C.22})$$

$$\vec{x} \frac{1}{\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + a} = \frac{1}{\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + a - 1} \vec{x}, \quad (\text{C.23})$$

e, como consequência destas,

$$(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + a} = \frac{1}{\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + a} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}). \quad (\text{C.24})$$

Desta forma,

$$OO^{-1} = \frac{(1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2}{\vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})}.$$

Por outro lado, notemos que:

$$(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2 = \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}),$$

$$\begin{aligned} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2 &= (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})] \\ &= 2 (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2 + (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{x}^2 (\vec{x} \cdot \vec{\nabla})] \\ &= 2\vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) + 2\vec{x}^2 (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) + \vec{x}^2 (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \\ &= \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \\ &= \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})^2, \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (1 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{x}^2 &= \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) + \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla})^2 \\ &= \vec{x}^2 (2 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) (3 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla}), \end{aligned}$$

ficando assim demonstrado que  $OO^{-1} = 1$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LEIBBRANDT, G. - Introduction to noncovariant gauges, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987), 1067.
2. MANDELSTAM, S. - Light cone superspace and the vanishing of the beta-function for the N=4 model, University of California Berkeley, Report n. UCB-PTH-82/10. In: Petian, P. & Pornenf, M. (eds.). 21<sup>st</sup> International Conference on High Energy Physics. Les Editions de Physique, Paris (1982), p. 331.
3. DUBOVIKOV, M. & SMILGA, A. - Analytical properties of the quark polarization operator in an external self-dual field, *Nucl. Phys.* **B185** (1981), 109.
4. FOCK, V. - *Sov. Phys.* **12** (1937), 404.
5. SCHWINGER, J. - *Phys. Rev.* **82** (1952), 684.
6. KOBE, D. - Gauge transformations and the electric dipole approximation, *Am. J. Phys.* **50** (1982), 128.
7. FIUTAK, J. - The multipole expansion in quantum theory, *Can. J. Phys.* **41** (1963), 12.
8. VAINSHTEIN, A & SHIFMAN, M. - Operator product expansion and calculation of the two-loop Gell-Mann-Low function, *Sov. J. Nucl. Phys.* **44** (1986), 321; Solution of the problem of anomalies in supersymmetric gauge theories, and the operator expansion, *Sov. Phys. JETP.* **64** (1986), 428.

21. GRIBOV, V. - Quantization of non-Abelian gauge theories. Nucl. Phys. **B139** (1978), 1.
22. Vide: Physical and nonstandard gauges - Gaigg, P. et al (eds.), Springer-Verlag (1990).
23. BURNEL, A. - BRST-Approach to non-covariant gauges, in: Gaigg, P. et al (eds.), Physical and nonstandard gauges. Springer-Verlag (1990).
24. NOVIKOV, V., SHIFMAN, M., VAINSHTEIN, A. & ZAKHAROV, V. - Calculations in external fields in quantum chromodynamics, Technical Review. Fortschr. Phys. **32** (1984), 585.
25. CRONSTRÖM, C. - A simple and complete Lorentz-covariant gauge condition, Phys. Lett. **90B** (1980), 267.
26. DURAND, L. & MENDEL, E. - Field-strength formulation of gauge theories. The Hamiltonian approach in the Abelian theory, Phys. Rev. **D30** (1984), 1754.
27. ITABASHI, K. - Field-strength formulation and duality transformation of non-Abelian gauge theory, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 1423.
28. BARCELOS-NETO, J., GALVÃO, C.A.P. & GAETE, P. - The Fock-Schwinger gauge in the BFV formalism, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991), 1597.
29. GAMBOA, J. - Quantização de teorias covariantes gerais. Dissertação de Doutorado, USP São Paulo (1989).
30. HENNEAUX, M. - Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom, Phys. Rep. **126** (1985).
31. BATALIN, I. & VILKOVISKY, G. - Quantization of gauge theories with linearly dependent generators, Phys. Rev. **D28** (1983), 2567.
32. KUGO, T. & OJIMA, I. - Local covariant operator formalism of non-Abelian gauge theories and quark confinement problem, Supl. Prog. Theor. Phys. **66** (1979).

33. BATLLE, C., GOMIS, J., PARIS, J. & ROCA, J. - Field-Antifield formalism and Hamiltonian BRST approach, Nucl. Phys. **B329** (1990), 139.
34. HENNEAUX, M., GREGOIRE, P., FISH, P., DRESSE, A. - Equivalence of the Hamiltonian and Lagrangian path integrals for gauge theories, Nucl. Phys. **B354** (1991), 191.
35. LAZZIZZERA, I. - Canonical quantization of Yang-Mills theories in axial and planar gauges. Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics, v. **361** (1990), p. 15.
36. BURNEL, A., KOBES, R., KUNSTATTER, G. & MAK, K. - Quantization of Yang-Mills fields in a general class of linear gauges, New York. Ann. Phys. **204** (1990), 247.
37. TEITELBOIM, C. - Elements of BRST theory. In: M. Novello (ed.), *V<sup>th</sup> Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, Rio de Janeiro (1987).
38. PASCUAL, P. & TARRACH, R. - QCD: renormalization for the practioner, Springer-Verlag, v. **194** (1984).
39. ELIAS, V. - Quantum-field theory and the dynamical generation of quark masses, Can. J. Phys. **64** (1986), 595.
40. SCHWINGER, J. - On gauge invariance and vacuum polarization. Phys. Rev. **82** (1951), 664.
41. BRITTIN, W., SMYTHE, W. & WYSS, W. - Poincaré gauge in electrodynamics, Am. J. Phys. **50** (1982), 693.
42. GALVÃO, C.A.P. & PIMENTEL, B. - Non-Abelian gauge fields in the Poincaré gauge, CBPF preprint NF-006/88.
43. GALVÃO, C.A.P., PIMENTEL, B. & GAETE, P. - Quantum electrodynamics in the Poincaré gauge, Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991), 5373.

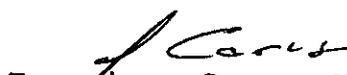
44. GALVÃO, C.A.P. & GAETE, P. - Some aspects of the Fock-Schwinger and Poincaré gauges. In: Gaigg, P. et al (eds.). *Physical and nonstandard gauges*, Springer-Verlag (1990), p. 52.
45. SUNDERMEYER, K. - *Constrained dynamics*. Springer-Verlag, *Lecture Notes in Physics*, v. 169 (1982).
46. GAETE, P. - A note on the Poincaré gauges. In: *Proc. XI Congresso Estudantil de Física Teórica*, São Paulo (1988).
47. KIEFER, C. & ROTHE, K. - On the construction of the U-matrix from Dirac brackets, *Nuovo Cimento* 83A (1984), 140.
48. SKAGERSTAM, B. - A note on the Poincaré gauge, *Am. J. Phys.* 51 (1983), 1148.
49. BARCELOS-NETO, J., GALVÃO, C.A.P. & GAETE, P. - The photon propagator in the Poincaré gauge, *Phys. Lett. A*157 (1991), 96.
50. SENJANOVIC, P. - Path integral quantization of field theories with second-class constraints, New York. *Ann. of Phys.* 100 (1976), 227.
51. SISAQYAN, A., SHEVCHENKO, O. & SOLOVTSOV, I. - Contour variables and infrared asymptotics in gauge theories, *Sov. J. Part. Nucl* 21 (1990), 285.
52. IVANOV, S. - Violation of translational invariance of the gluon propagator, *Sov. J. Nucl. Phys.* 48 (1988), 885.
53. DIRAC, P.A.M. - Gauge invariant formulation of quantum electrodynamics, *Can. J. of Phys.* 33 (1955), 650.
54. MANDELSTAM, S. - Feynman rules for electromagnetic and Yang-Mills fields from the gauge - independent field - theoretic formalism, *Phys. Rev.* 175 (1968), 1580.
55. ELLIS, J. - Dirac magnetic monopole and the Aharonov-Bohn solenoid in the Poincaré gauge, *J. Phys. A: Math. Gen.* 23 (1990), 65.

- 56-a. CARACCILO, S., CURCI, G. & MENOTTI, P. - The propagator in the  $A_0 = 0$  gauge, Phys. Lett. **113B** (1982), 311.
- 56-b. PIMENTEL, B.M. & SUZUKI, A.T. - Light-cone gauge and the (causal) principal-value prescription, Phys. Rev. D **42** (1990), 2115.
57. LEROY, J., MICHELI, J. & ROSSI, G. - A quasi-temporal gauge, Z. Phys. C **36** (1987), 305.
58. GIROTTI, H. & ROTHE, K. - Quantization of QED and QCD in a fully fixed temporal gauge, Z. Phys. C **27** (1985), 559.
59. KALLIONATIS & CREWETHER - In: Gaigg, P. et al (eds.) Physical and non-standard gauges. Springer-Verlag (1990).
60. BANDER, M. - Theories of quark confinement, Phys. Rep. **75** (1981), 205.
61. FEYNMAN, R. - An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, Phys. Rev. **84** (1951), 108.
62. IROSHNIKOV, G. - On the string-like configuration of a non-Abelian gauge field, Sov. J. Nucl. Phys. **38** (1983), 304.
63. PHOKHOROV, L. & SHABANOV, S. - Invariant structures and static forces in gauge theories, Preprint, Joint Institute for Nuclear Research Dubna, E2-91-266. (1991).
64. SPIVAK, M. - Calculus on manifolds. Benjamin, New York 94 (1965).
65. SCHULTZ, B. - Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge University, Cambridge (1980).

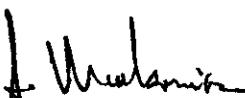
"QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE GAUGE E OS GAUGES DE  
FOCK-SCHWINGER E POINCARÉ"

PATRICIO ALFREDO GAETE DURÁN

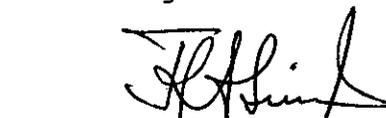
Tese de Doutorado apresentada no Cen-  
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
do Conselho Nacional de Desenvolvimen-  
to Científico e Tecnológico, fazendo  
parte da banca examinadora os seguin-  
tes professores:

  
Francisco Caruso Neto - Presidente

  
Bruto Max Pimentel Escobar

  
Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson

  
Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior

  
Fernando Raimundo Aranha Simão

  
José Abdalla Helayél-Neto