

Sebastião Alves Dias

Aspectos de Topologia Não Trivial em Teorias de Gauge

Tese de Doutorado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Setembro de 1992

530.130
530.130

À Sonia

À Maria Teresa Thomaz

Agradecimentos a:

- Mignaco, pela confiança, apoio e críticas (sempre nos momentos decisivos)
- Cambraia, Marquinho, Soares, Zé Luiz e Júlio Pureza, pelos porres, noitadas de metal, maracanã, conversas de meio de corredor e apoio irrestrito.
- Galera do DCP (Álvaro, Stênio, Patricio, Colatto, Carlos Alberto, Túlio, Cláudio (Cindi), Emília, Gentil, Oswaldo, Marcelo (MNP), Álvaro 2), pelos porres, conversas de Física e babados afins.
- Pessoal fluante (Edgardo (Salmão) e von Büllow, Vera (bib), Miriam (CFC), Luci (Lion), Bartô, Filipe (Beato Salu), Sobral, Mioco, Ricardo (Filósofo), Ricardo (ão), Márcia (Abichain), Long Dong e Sandra, Armando, Ladário, Marcelo Cabeludo), pelos porres e adjacências.
- Jorge Stephany Ruiz, pelos porres, pelo muito que me ensinou de Física e pela amizade.
- Pardal, pelos porres e por coisas demais.
- Membros do DCP (Galvão, Simão, Marco Aurélio, Caride, Susana, Helman, Giambiagi, Leonel, Helayel, Leite Lopes, a grande Rosângela, o grande Rogério), pela convivência e parte de minha formação em Física.
- Cesar Linhares, pelos porres, o companheirismo e preciosas referências sempre nos momentos certos.

- Pai, Mãe, Zeca, Sílvia, Toninho, Tia Dira, Padrinho Juca, Tia Orminda, Joana Betty, e às saudosas Mãe Ota e Vó Nila, por serem como são.

Tem que ter frase? Então ...

“Aimi nóti dogui nou”

(Waldick Soriano/Falcão)

Resumo

Analisamos alguns efeitos de campos de gauge topologicamente carregados em teorias de gauge. Consideramos o caso em que o operador de Dirac da teoria é hermitiano (em d -dimensões) e o caso em que não é (em duas dimensões, o modelo de Schwinger quirais). Encontramos, para o caso hermitiano, coincidência algébrica entre os Jacobianos de rotações quirais com o do setor de topologia trivial, graças a fatores advindos das correntes externas que cancelam a dependência explícita nos modos zero. Para o modelo de Schwinger quirais, propomos uma prescrição para o cálculo do determinante fermiônico na presença de modos zero e, através das correntes fermiônicas, encontramos uma ambigüidade de fase no Jacobiano, que é explorada para demonstrar o desacoplamento total dos setores não triviais da teoria.

Abstract

We analyse some effects of topologically charged gauge fields in gauge theories. We consider the case where the Dirac operator of the theory is hermitian (in d -dimensions) and the one when it is not (in two dimensions, the chiral Schwinger model). We find, for the hermitian case, that the jacobians of chiral rotations coincide algebraically with the one of the trivial topology sector, thanks to terms that come from the external sources which cancel the explicit dependence on the zero modes. For the chiral Schwinger model, we propose a prescription for the computation of the fermion determinant in the presence of the zero modes and, because of the fermionic sources, we find an ambiguity of phase in the jacobian, that is explored to demonstrate the complete decoupling of the non-trivial sectors.

Índice

Resumo	v
Abstract	v
Introdução	1
1 Simetrias e Topologia	6
1.1 Teoria quântica e simetrias	6
1.2 Topologia e modos zero	24
2 Operadores de Dirac Hermitianos	36
2.1 Funcional gerador em setores topológicos não triviais	36
2.2 Jacobianos de rotações quirais via função ζ	40
2.3 Fontes externas e modos zero	46
2.4 Rotações finitas	54
3 O Modelo de Schwinger Quiral	65
3.1 $\text{Det}' D$ para $D^\dagger \neq D$	65

3.2	Jacobiano e ambigüidades de fase	76
3.3	Funções de correlação e ambigüidades residuais	84
Apêndice A: Integrais Funcionais e Funções Não-Ortonormais		94
Apêndice B: Jacobiano de Rotações Globais		97
Apêndice C: Independência em Relação ao Raio de Compactação		99
Apêndice D: Ambigüidades de Regularização no Modelo de Schwinger e Setores Topológicos Não Triviais		103
Bibliografia		106

Introdução

Até a década de 70 uma boa parte das análises feitas sobre a dinâmica das teorias de campo baseava-se em aspectos locais, expressos principalmente pela abordagem perturbativa (sem que se esqueçam as contribuições não perturbativas provenientes de desenvolvimentos tais como as álgebras de correntes, a formulação da teoria da matriz S , etc.). Embora se conhecessem as limitações da técnica, tanto no que diz respeito à impossibilidade de construir estados ligados, quanto em relação à própria convergência das expansões, tinham-se, até então, contabilizado sucessos notáveis, como o cálculo do momento magnético anômalo do elétron com grande precisão. No início daquela década, a teoria de campos, em sua abordagem lagrangiana, auxiliada pelo método da renormalização, firmou-se como o contexto mais adequado para a descrição da física de partículas elementares, com a unificação das interações eletromagnética e fraca e a proposição da Cromodinâmica Quântica como a teoria das interações fortes. Novamente, o fator decisivo para essa consolidação foi a renormalizabilidade dessas teorias, que, mais uma vez, chamava a atenção para as suas características locais.

Nesta época começaram a aparecer soluções clássicas de teorias de campo não lineares. Embora restritas inicialmente a teorias de um campo escalar, como o modelo de

sine-Gordon [1], logo apareceram também para equações envolvendo campos escalares, vetoriais e de Dirac, acoplados e em dimensões superiores. A característica principal dessas soluções é a de não serem perturbativas, ou seja, a de não poderem ser obtidas a partir de correções de uma dada solução da parte linear das equações de campo. Dessa forma, o estudo dessas soluções passou a chamar a atenção para as propriedades globais das teorias de campo correspondentes, o que levou a desenvolvimentos muito relevantes, tais como a descrição de partículas extensas por sólitons (no caso de espaço-tempo de Minkowski) ou no fenômeno de tunelamento de vácuos devido a instantons (no caso euclidiano) [2]. Nenhum destes fenômenos quânticos é passível de descrição via teoria de perturbações, o que mostra que o estudo das soluções clássicas tem muito a contribuir para desvendar a estrutura dinâmica da teoria quântica.

Um aspecto que está conectado com o fato de estas soluções estarem associadas a propriedades globais é sua caracterização por índices topológicos, os quais se relacionam com o comportamento das mesmas no infinito. Isso traz à consideração dos físicos todo o arsenal de recursos desenvolvido com a teoria de homotopia, que permite classificar configurações de campo graças à sua associação direta com mapeamentos de uma variedade \mathcal{M} em outra, \mathcal{N} . No caso dos sólitons, o índice torna-se um número quântico conservado, enquanto que para os instantons ele corresponde à classificação de toda uma família de estados de vácuo [3]. Os argumentos baseados na topologia podem assegurar a existência de soluções não triviais das equações de campo, mesmo que não se conheça a sua forma exata [4]. No caso das teorias de gauge, o índice topológico não nulo implica soluções normalizáveis da equação de Dirac acoplada ao campo A_μ , conforme prevê o

teorema do índice de Atiyah-Singer [5].

Recentemente, novas áreas de aplicação destas idéias têm surgido. Podemos citar, por exemplo, métodos de compactação em teorias de cordas [6], supercondutividade a alta T_c [7] e cordas efetivas para a cromodinâmica quântica [8]. As investigações nos tópicos acima têm conduzido a resultados interessantes, como contribuições a funções de correlação nulas em setores triviais [6,9] ou a eliminação de efeitos de instantons por um termo de Chern-Simons gerado dinamicamente [7].

Este cenário justifica uma abordagem sistemática dos setores topológicos não triviais, como já vem sendo feito por outros grupos [9,10]. Analisamos, portanto, alguns aspectos da influência de campos de gauge topologicamente carregados sobre férmions de Dirac e Weyl. A consideração desses dois casos divide, naturalmente, a análise em termos de operadores de Dirac hermitianos e não hermitianos, já que, no segundo caso, a interação com o campo A_μ envolve γ_5 . Enquanto o caso hermitiano é bastante estudado na literatura [11,12,6,9,10], o mesmo não acontece com o não hermitiano, onde as análises se concentram no setor topológico trivial [13]. Em ambos os casos, partimos do ponto de vista da integral funcional, onde se introduzem as fontes fermiônicas externas. Estas, que no setor trivial podem ser completamente desconsideradas para a análise da estrutura de anomalias da teoria, mostram-se fundamentais para o estabelecimento das propriedades de transformação da medida funcional sob transformações envolvendo γ_5 .

Ao longo da tese, o fato de restringirmos as mudanças de variáveis na integral funcional, àquelas que preservam os setores topológicos, é fundamental para a regularização do comportamento singular, induzido pelos modos zero sobre os determinantes

funcionais. Através desta restrição, encontramos jacobianos de rotações quirais não singulares, e independentes das fontes externas. Estes Jacobianos podem ser utilizados para a solução completa dos modelos em questão, conforme é feito em [9,10] e como fazemos para o caso do modelo de Schwinger quiral. Neste último caso, apresentamos, a nosso ver, a primeira análise deste modelo em setores topológicos não triviais.

Desenvolveremos nossas considerações da seguinte forma: no Capítulo 1, fornecemos uma descrição da interrelação entre os aspectos topológicos e as propriedades de simetria das teorias de gauge. Para isso, mostramos o surgimento da anomalia, dentro da formulação funcional, relacionando-a com a técnica de bosonização, através de um exemplo específico. Em seguida, após uma breve introdução de alguns conceitos básicos relacionados à homotopia, mostramos a conexão entre a anomalia e o índice topológico para $d = 2$ e $d = 4$, nos casos $U(1)$ e $SU(2)$, respectivamente, citando a relação com o teorema do índice. Prosseguimos no Capítulo 2, tratando o caso de operadores de Dirac hermitianos num número arbitrário de dimensões euclidianas, enfatizando o papel das fontes fermiônicas externas na definição do jacobiano de rotações quirais. No Capítulo 3, consideramos o caso não hermitiano, através do modelo de Schwinger quiral, desenvolvendo uma prescrição para o cálculo do determinante na presença de modos zero e aplicando-a para obter a solução completa do modelo. Ao final, apresentamos nossas conclusões e alguns apêndices com detalhes técnicos.

Capítulo 1

Simetrias e Topologia

1.1 Teoria quântica e simetrias

O conceito de simetria, uma operação feita sobre um sistema que o deixa inalterado, é a base sobre a qual se desenvolveu o procedimento de construção de modelos para a física de partículas elementares. Manter uma determinada simetria ou quebrá-la (explícita, espontânea ou dinamicamente) é usualmente decisivo para as propriedades de uma dada teoria, desde sua própria formulação até a obtenção do espectro e o seu comportamento assintótico. O princípio de gauge foi o guia para a formulação de uma teoria unificada das interações eletromagnética, fraca e forte, baseada no requerimento da invariância do lagrangiano sob um grupo de gauge $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Este princípio, aliado ao conceito de quebra espontânea de simetria, permitiu que o modelo acima se contituísse como uma teoria renormalizável e unitária de bósons vetoriais massivos e sem massa interagindo com férmions de Weyl, uma construção de tal complexidade que

seria improvável sem o auxílio de tais linhas mestras.

Na teoria clássica de campos, implementamos uma simetria requerendo que a ação ou o lagrangiano da teoria seja invariante em relação às transformações de interesse. Isso assegura que as equações de movimento sejam covariantes, ou invariantes, quando expressas em termos das grandezas fisicamente mensuráveis. Quânticamente, operações de simetria são usualmente representadas por operadores unitários, que agem sobre os estados físicos e os demais operadores da teoria, de modo a manter as amplitudes de probabilidade invariantes. Assim, se g é uma operação de simetria e $U(g)$ é o operador unitário associado a g , podemos ter

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi\rangle^g = U(g) |\psi\rangle, \quad (1.1.1)$$

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^g = U(g) \mathcal{O} U^\dagger(g), \quad (1.1.2)$$

onde $|\Psi\rangle$ representa um estado físico e \mathcal{O} , um operador genérico. Se as diversas operações g_i formarem um grupo G , as relações (1.1.1) e (1.1.2) garantirão que o conjunto dos $U(g_i)$ também pode formar um grupo, que é dito uma *representação* de G . Em particular temos

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2), \quad (1.1.3)$$

$$(U(g_1)U(g_2))U(g_3) = U(g_1)(U(g_2)U(g_3)). \quad (1.1.4)$$

Entretanto, a condição de preservação das amplitudes de probabilidade permite construções mais complexas que (1.1.1) – (1.1.4), através da introdução de fases conhecidas como *cociclos*. Uma generalização de nosso interesse imediato é sobre (1.1.3), que re-

laxamos para

$$U(g_1)U(g_2) = e^{-2\pi i\omega_2(x;g_1,g_2)}U(g_1, g_2), \quad (1.1.5)$$

onde permitimos o aparecimento de uma fase ω_2 , em princípio dependente da posição x , que é obrigada a satisfazer, devido a manutenção de (1.1.4), à relação

$$\omega_2(x^{g_1}; g_2, g_3) - \omega_2(x; g_1g_2, g_3) + \omega_2(x; g_1, g_2g_3) - \omega_2(x; g_1, g_2) = 0$$

(modulo inteiros). (1.1.6)

A fase ω_2 é dita um *2-cociclo* e já aparece mesmo na mecânica quântica não relativista, na representação do grupo de Galileu completo (translações de coordenadas e “boosts”) [14]. Se queremos que Q e P se transformem como

$$Q \rightarrow Q + vt + q_0 \equiv Q + a, \quad (1.1.7)$$

$$P \rightarrow P + mv \equiv P + b, \quad (1.1.8)$$

levando em consideração $[Q, P] = i$, podemos usar o operador

$$U(a, b) = e^{i(aP - bQ)}, \quad (1.1.9)$$

onde $(a, b) \equiv g$ é um elemento do grupo de Galileu que se compõe com outros elementos da forma $g_1g_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Entretanto, compondo dois U diferentes é fácil ver que obtemos um resultado anaálogo a (1.1.5) com ω_2 dado por

$$2\pi\omega_2 = \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1). \quad (1.1.10)$$

Uma representação como esta é chamada de *projetiva*. Do exemplo acima, podemos ver que elas são bastantes naturais na teoria quântica. Para o caso de número infinito

de graus de liberdade, entretanto, o aparecimento de cociclos se dá inequivocamente apenas quando controlamos cuidadosamente as divergências da teoria. Para sermos mais específicos, consideramos o caso dos grupos de Lie, cuja ação infinitesimal pode ser expressa por

$$U(g) = e^{i\theta^a T_a}, \quad (1.1.11)$$

com os θ^a sendo os parâmetros infinitesimais da transformação e T_a , os geradores. A lei de composição (1.1.3) implicaria

$$[\theta_1^a T_a, \theta_2^b T_b] = i\theta_{12}^c T_c, \quad (1.1.12)$$

enquanto que, considerando (1.1.5),

$$[\theta_1^a T_a, \theta_2^b T_b] = i\theta_{12}^c T_c + i\theta_1^a \theta_2^b \delta\omega_{ab}. \quad (1.1.13)$$

As identidades de Jacobi, neste caso, implicam a condição de 2-cociclo em sua forma infinitesimal. O termo $\delta\omega_{ab}$, se não depender do ponto x , é chamado *extensão central* e é um número (não um operador). Podemos agora identificar a origem de representações projetivas em teoria de campos. O teorema de Noether nos fornece a expressão dos geradores T_a , através de

$$T^a = \int d^3x j_0^a(x), \quad (1.1.14)$$

com j_0^a sendo as componentes zero de correntes conservadas

$$\partial^\mu j_\mu^a = 0. \quad (1.1.15)$$

Como os j_0^a são polinômios nas variáveis canônicas da teoria, e estas são campos, sabemos que os geradores podem não estar quanticamente bem definidos. Há a necessidade

da introdução de reguladores (em alguns casos, como $d = 2$, pode ser suficiente o ordenamento normal) para isolar as partes divergentes em (1.1.14) e subtraí-las. Após a remoção dos reguladores, ficamos com geradores bem definidos, T'_a , cujas leis de comutação, no entanto, podem ser agora da forma (1.1.13). Quando esse é o caso, podemos cair na situação em que as novas relações de comutação entre os geradores influenciam o comutador destes com a hamiltoniana, fazendo com que este seja não nulo. É a situação onde dizemos estar na presença de uma *anomalia*, pois a grandeza T_a , que se conservava classicamente, deixa de fazê-lo a nível quântico.

Anomalias podem ser uma grande dificuldade ou uma bem-vinda característica da teoria. Ao ser descoberta a anomalia de Adler-Bell-Jackiw [15,16] ela foi saudada como a solução para o problema do decaimento observado do pión neutro em dois fótons, que não seria esperado no limite de massa do pión indo para zero, devido ao fato de o elemento de matriz relevante envolver a divergência da corrente axial (classicamente conservada). Em termos mais explícitos [17],

$$\langle \pi^0, k | \gamma, p; \gamma', q \rangle = (\mu^2 - k^2) \langle 0 | \frac{\partial_\mu j_5^\mu(0)}{F_\pi \mu^2} | \gamma, p; \gamma', q \rangle. \quad (1.1.16)$$

Na formula acima, $\langle \pi^0, k |$ representa o estado inicial do pión de momentum k e $| \gamma, p; \gamma', q \rangle$, o estado final de dois fótons de momenta p e q , respectivamente. O lado direito expressa o elemento de matriz anterior pela formulação LSZ [18], com $\partial_\mu j_5^\mu(0)$ fazendo o papel de campo interpolante para o pión, μ^2 sendo a sua massa e F_π , a constante de decaimento do pión. Vale ressaltar que a equação (1.1.16) é encontrada com argumentos independentes de um modelo específico para o pión. Uma vez pro-

posta uma teoria, j_5^μ será a corrente conservada classicamente na ausência de massa para o pión, em função da simetria quiral do lagrangiano. Um modelo ilustrativo seria o chamado modelo σ , cujo lagrangiano é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}(\mu^2 + 2\lambda F^2)\sigma^2 \\ & + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + g\bar{\psi}(\sigma + \phi\gamma_5)\psi - \lambda[(\phi^2 + \sigma^2)^2 - 2F\sigma(\sigma^2 + \phi^2)], \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

onde ψ é o campo do “próton”, ϕ , o do “pión” e σ o campo da partícula σ , com massas m , μ e $(\mu^2 + 2\lambda F)^{1/2}$ respectivamente. A corrente axial é

$$j_5^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + 2(\sigma\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\sigma) - F\partial^\mu\phi \quad (1.1.18)$$

e sua divergência clássica nos dá o campo do pión,

$$\partial_\mu j_5^\mu = \mu^2 F\phi. \quad (1.1.19)$$

Entretanto, quanticamente, esta equação muda para

$$\partial_\mu j_5^\mu = \mu^2 F\phi + \frac{e^2}{8\pi^2} {}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.1.20)$$

com ${}^*F_{\mu\nu}$ sendo o dual de $F_{\mu\nu}$, $\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho}F^{\gamma\rho}$. O termo envolvendo o campo eletromagnético A_μ garante a não conservação de j_5^μ no limite $\mu \rightarrow 0$.

Este exemplo mostra as anomalias como uma fonte de riqueza para a dinâmica da teoria. Contudo, há modelos em que elas podem ocorrer nas correntes de gauge, tornando-se, então, problemas muito sérios para a consistência deles. Não há melhor exemplo disso do que a própria teoria de Glashow-Weinberg-Salam [19,20], onde o setor fermiônico é composto por férmions quirais como ν_{eL} (neutrino esquerdo do elétron), e_L ,

e_R (componentes esquerda e direita do elétron), u_L e u_R , d_R e d_L (componentes esquerda e direita dos quarks u e d), e as demais famílias, agrupadas em dubletes de $SU(2)$ (as componentes esquerdas) e singletes de $U(1)$ (as componentes direitas). A corrente de gauge nesse caso irá envolver γ_5 , que vem dos acoplamentos axiais entre esses férmions e os campos de gauge. Pode-se mostrar, então, que a sua divergência só é nula, a nível quântico, se a condição

$$\sum_i Q_i = 0 \quad (1.1.21)$$

se verificar, ou seja, que a soma das cargas dos léptons e dos quarks (contando as três cores) seja nula. A importância desta condição é enorme. No procedimento de renormalização, as identidades de Slavnov-Taylor (consequência da simetria de gauge) permitem mostrar que as constantes de renormalização não são todas independentes, mas se expressam em termos de um subconjunto finito das mesmas [21]. Isto, por sua vez, é necessário para que, dando sentido a um número finito de gráficos de Feynman primitivamente divergentes possa-se definir toda a teoria. A quebra das identidades de Slavnov-Taylor, através da ocorrência de anomalias, destrói essa propriedade e compromete a renormalizabilidade da teoria, tornando-a sem sentido, ao menos via teoria de perturbações. A realização da equação (1.1.21) hoje depende da descoberta do quark “top” que contrabalançaria a família leptônica do τ .

Uma visão bastante nítida das anomalias pode ser obtida por meio da formulação funcional da teoria de campos. Usando este formalismo, Fujikawa [23] identificou a origem quântica das anomalias na não invariância da medida funcional fermiônica sob mudanças de variáveis envolvendo γ_5 . Veremos como isso ocorre considerando o fun-

cional gerador associado a um sistema de férmions ψ interagindo com um campo vetorial A_μ externo, tomando valores na álgebra de Lie de $SU(N)$,

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\langle \bar{\psi} \gamma_\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) \psi \rangle + \langle \bar{\eta} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta \rangle \right\}. \quad (1.1.22)$$

Em (1.1.22), $\langle \ \rangle$ denota integração sobre um espaço euclidiano d -dimensional, com matrizes γ hermitianas satisfazendo

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (1.1.23)$$

Os campos ψ e $\bar{\psi}$ são independentes, porque no espaço euclidiano $\bar{\psi}$ não pode ser expresso como o produto de ψ^\dagger por γ_0 [22]. A ação possui simetria quiral global clássica frente às transformações

$$\psi = e^{\alpha\gamma_5} \psi^\alpha, \quad (1.1.24)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^\alpha e^{\alpha\gamma_5}, \quad (1.1.25)$$

com α independente de x . O lagrangiano é invariante e a corrente clássica

$$j_{\mu 5} = i\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi, \quad (1.1.26)$$

é conservada,

$$\partial_\mu j_{\mu 5} = 0. \quad (1.1.27)$$

Analisando a validade quântica desses argumentos, iremos considerar $j_{\mu 5}$ dado por (1.1.26), como um operador e verificar se a equação

$$\langle 0 | \partial_\mu j_{\mu 5} | 0 \rangle = 0, \quad (1.1.28)$$

com $|0\rangle$ sendo o vácuo da teoria, é verdadeira ou não. Para fazer aparecer o valor esperado (1.1.28), promovemos as transformações (1.1.24) e (1.1.25) a locais, observando que a ação, na ausência de fontes, torna-se

$$\langle \bar{\psi} \gamma_\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) \psi \rangle \equiv \langle \bar{\psi} D \psi \rangle = \langle \bar{\psi}^\alpha D \psi^\alpha \rangle + i \langle \bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu \alpha \psi^\alpha \rangle. \quad (1.1.29)$$

Derivando funcionalmente Z em relação a α e colocando $\alpha = 0$, fazemos aparecer o termo desejado (1.1.28). É preciso tomar cuidado, no entanto, com a medida fermiônica. Esta é usualmente escrita em termos dos coeficientes da expansão

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad (1.1.30)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{a}_n \varphi_n^\dagger(x), \quad (1.1.31)$$

onde os a_n e \bar{a}_n são variáveis de Grassmann e os φ_n são as autofunções de D , definido em (1.1.29),

$$D\varphi_n = \lambda_n \varphi_n. \quad (1.1.32)$$

Os φ_n formam um conjunto completo e, portanto, podem ser usados como base no espaço funcional, o que justifica (1.1.30) e (1.1.31). Nesta seção consideraremos apenas o caso em que D é não-singular, isto é, $\lambda_n \neq 0$, para facilidade de exposição. O caso singular será tratado com detalhes a seguir. Observamos também que estamos sob a hipótese de os λ_n formarem um conjunto infinito, mas *enumerável*. Isto pode ser garantido através da compactação do espaço euclidiano d -dimensional, sobre o qual D está definido (na mecânica quântica não relativista tratam-se casos semelhantes colocando-se o sistema numa caixa, por exemplo). Ao longo deste trabalho, estaremos supondo uma

compactação particular, a projeção estereográfica de \mathbf{R}^d sobre S^d (vide Apêndice C), embora não a mencionemos em nossas fórmulas para maior simplicidade das mesmas. Com isso em mente, temos uma expressão para a medida fermiônica:

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{a}_n da_n. \quad (1.1.33)$$

Trocar ψ por ψ^α , como variável de integração, significa mudar os coeficientes a_n para a_n^α através das relações

$$\begin{aligned} \psi^\alpha(x) &= \sum_n a_n^\alpha \varphi_n(x) = e^{-\alpha(x)\gamma_5} \sum_n a_n \varphi_n(x) \\ \Rightarrow a_n &= \sum_m \langle \varphi_n^\dagger e^{\alpha\gamma_5} \varphi_m \rangle a_m^\alpha, \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^\alpha(x) &= \sum_n \bar{a}_n^\alpha \varphi_n^\dagger(x) = \left[\sum_n \bar{a}_n \varphi_n^\dagger(x) \right] e^{-\alpha(x)\gamma_5} \\ \Rightarrow \bar{a}_n &= \sum_m \langle \varphi_n^\dagger e^{\alpha\gamma_5} \varphi_m \rangle \bar{a}_m^\alpha. \end{aligned} \quad (1.1.35)$$

Levando em consideração as leis de transformação de medidas de integração de Grassmann temos

$$\begin{aligned} \prod_n d\bar{a}_n da_n &= (\det |\langle \varphi_n^\dagger e^{\alpha\gamma_5} \varphi_m \rangle|)^{-2} \prod_n d\bar{a}_n^\alpha da_n^\alpha \\ &= \det |\langle \varphi_n^\dagger e^{-2\alpha\gamma_5} \varphi_m \rangle| \prod_n d\bar{a}_n^\alpha da_n^\alpha, \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

onde, no último passo, foi utilizada a completeza da base φ_n . Notamos então que, devido ao envolvimento de γ_5 nas transformações (1.1.24) e (1.1.25) temos transformações iguais, não unitárias, dos coeficientes a e \bar{a} , ocasionando um jacobiano em (1.1.36).

Restringindo-nos a transformações infinitesimais, podemos escrever

$$\langle \varphi_n^\dagger e^{-2\alpha\gamma_5} \varphi_m \rangle = \delta_{nm} - 2\langle \varphi_n^\dagger \alpha \gamma_5 \varphi_m \rangle, \quad (1.1.37)$$

e, usando

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{1} + \delta\alpha) &= \exp \text{Tr} \ln(\mathbf{1} + \delta\alpha) \\ &\approx \exp \text{Tr}(\delta\alpha),\end{aligned}\tag{1.1.38}$$

para uma matriz $\delta\alpha$ infinitesimal, obtemos

$$\det\langle\varphi_n^\dagger e^{-2\alpha\gamma_5}\varphi_m\rangle \approx \exp(-2\langle\mathcal{A}\alpha\rangle),\tag{1.1.39}$$

onde

$$\mathcal{A}(x) = \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x).\tag{1.1.40}$$

Usando a completeza dos φ_n , poderíamos escrever

$$\mathcal{A}(x) = \text{tr}(\delta(0)\gamma_5),\tag{1.1.41}$$

o que mostra que \mathcal{A} não tem significado definido. Pode-se procurar por tal significado regularizando (1.1.40) na forma

$$\mathcal{A}_R(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 e^{-\lambda_n^2 t}\varphi_n(x),\tag{1.1.42}$$

com os λ_n sendo os autovalores de D , definidos em (1.1.32). Após uma certa álgebra [23,24] encontramos, para $d = 4$ e $d = 2$, por exemplo,

$$\mathcal{A}_R = -\frac{e^2}{16\pi^2} \text{tr}({}^*F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}), d = 4, \text{teoria } SU(N),\tag{1.1.43}$$

$$\mathcal{A}_R = -\frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, d = 2, \text{teoria } U(1).\tag{1.1.44}$$

Tomando a derivada funcional de Z em relação a α , e fazendo o limite em que $\eta, \bar{\eta}$ e α vão para zero obtemos

$$\langle 0|\partial_\mu j_{\mu 5}(x)|0\rangle = -\left.\frac{\delta J[\alpha]}{\delta\alpha(x)}\right|_{\alpha=0}$$

$$= 2\mathcal{A}(x), \quad (1.1.45)$$

onde $J[\alpha]$ é o jacobiano das rotações quirais definido em (1.1.36). A natureza quântica da teoria (contida na soma sobre todas as trajetórias) é, portanto, a responsável pela possibilidade de aparecimento da anomalia. A ocorrência ou não da mesma, no entanto, depende da escolha do método pelo qual regularizamos a soma em (1.1.40). A regularização escolhida em (1.1.42) respeita a invariância de gauge da teoria já que, neste caso, podemos escrever

$$\mathcal{A}_R(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{-D^2 t} \varphi_n(x). \quad (1.1.46)$$

A covariância de D sob transformações de gauge implica a manutenção da invariância de gauge da teoria em todas os passos subseqüentes do cálculo que leva a (1.1.43) e (1.1.44). O resultado viola então a simetria quiral, por fornecer $\mathcal{A} \neq 0$. As coisas não se passariam assim se escolhêssemos os λ_n em (1.1.42) como os autovalores de $i\gamma_\mu \partial_\mu$. Neste caso, se obtém $\mathcal{A}_R = 0$ [25] às expensas da simetria de gauge, dada a não covariância do operador $i\gamma_\mu \partial_\mu$. O fato de as duas simetrias não poderem ser mantidas simultaneamente a nível quântico é fundamental e independe dos argumentos particulares usados aqui [26].

Em $d = 2$, jacobianos provenientes de rotações quirais podem desempenhar outros papéis, além de expor a não-conservação de correntes quirais. Para esta dimensão, o grupo de Lorentz é abeliano, atuando multiplicativamente sobre os campos. Este fato faz com que, na prática, não haja distinção fundamental entre um campo bosônico e um fermiônico, permitindo que se estabeleça um mapeamento entre as duas espécies

[27]. Este é o fenômeno conhecido como *bosonização*, e é através dele que conseguimos resolver exatamente diversos modelos bidimensionais.

Vamos ilustrar a bosonização na formulação de integrais funcionais, considerando o modelo de Schwinger generalizado, ou seja, férmions interagindo com um campo de gauge abeliano com acoplamentos diferentes à direita e à esquerda. O lagrangiano é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma_{\mu}(i\partial_{\mu} + e_R A_{\mu}P_+ + e_L A_{\mu}P_-)\psi \\ &\equiv \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}D\psi,\end{aligned}\tag{1.1.47}$$

onde P_+ e P_- são os projetores sobre as quiralidades direita e esquerda, $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, respectivamente. Consideremos agora a decomposição

$$eA_{\mu} = \partial_{\mu}\rho - \tilde{\partial}_{\mu}\phi,\tag{1.1.48}$$

onde $\tilde{\partial}_{\mu} \equiv \varepsilon_{\mu\nu}\partial_{\nu}$, $\varepsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita em $d = 2$, sendo e uma função de e_R, e_L com a mesma dimensão delas. Além disso, como o anel de matrizes γ de Dirac se constitui de apenas três matrizes γ_0, γ_1 e γ_5 , já que $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1$ e

$$\gamma_{\mu}\gamma_5 = i\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_{\nu},\tag{1.1.49}$$

vemos que as transformações

$$\psi = \exp\{e_R P_+(i\rho + \phi) + e_L P_-(i\rho - \phi)\}\psi',\tag{1.1.50}$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' \exp\{-e_R P_-(i\rho + \phi) + e_L P_+(i\rho - \phi)\},\tag{1.1.51}$$

levam D em $i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}$, ou seja

$$\bar{\psi}D\psi = \bar{\psi}'i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi',\tag{1.1.52}$$

desacoplando, assim, o campo A_μ dos férmions. O fato de (1.1.50) e (1.1.51) envolverem γ_5 implica, como já vimos, o aparecimento de um jacobiano que irá modificar a ação livre do campo de gauge. Este jacobiano pode ser calculado através da consideração da integral funcional com e sem a rotação quirial,

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp(-\langle\bar{\psi}D\psi\rangle) = J[A_\mu] \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp(-\langle\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial_\mu\psi\rangle). \quad (1.1.53)$$

Das regras usuais de integração sobre variáveis de Grassmann, sabemos que os resultados das duas integrais funcionais são, ao menos formalmente, os determinantes dos operadores que aparecem na ação. Daí, obtemos

$$J[A_\mu] = \frac{\det D}{\det i\gamma_\mu\partial_\mu}. \quad (1.1.54)$$

Embora tenhamos um conjunto infinito, mas enumerável, de autovalores para os operadores envolvidos, isto não implica que os determinantes estejam definidos, já que os operadores não são limitados superiormente, no sentido usual da análise funcional [28] e, portanto, seus autovalores crescem irrestritamente. É preciso *definir* os determinantes em (1.1.54) e, para isso, vamos usar o método de separação de pontos, introduzido originalmente por Schwinger [29] na regularização direta da corrente quirial. No nosso caso, utilizamos a identidade

$$\det D = \exp \text{Tr} \ln D. \quad (1.1.55)$$

Usando (1.1.49) reescrevemos D como

$$D = \gamma_\mu(i\partial_\mu + B_\mu(g_+, g_-)), \quad (1.1.56)$$

onde

$$B_\mu = (g_+\delta_{\alpha\mu} + g_-\varepsilon_{\alpha\mu})A_\alpha,$$

$$g_{\pm} = \frac{1}{2}(e_R \pm e_L). \quad (1.1.57)$$

Derivando (1.1.55) em relação a g_{\pm} ,

$$\frac{\partial}{\partial g_{\pm}} \det D = \det D \operatorname{Tr} \left[D^{-1} \frac{\partial D}{\partial g_{\pm}} \right] \quad (1.1.58)$$

e usando, para D^{-1} , a função de Green $G(x, y)$ do operador D , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial g_+} \ln \det D = \operatorname{Tr}[G\gamma_{\mu}A_{\mu}], \quad (1.1.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial g_-} \ln \det D = \operatorname{Tr}[G\gamma_{\mu}\varepsilon_{\alpha\mu}A_{\alpha}]. \quad (1.1.60)$$

Lembrando que Tr é o traço funcional, vemos que (1.1.59) e (1.1.60) envolvem $G(x, x)$, a qual é singular. Um dos primeiros métodos usados para tratar esta singularidade foi a separação de pontos [29,30], que consiste na substituição dos traços funcionais por limites de expressões envolvendo $G(x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2})$ no limite $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_+} \ln \det D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x \operatorname{tr} \left[G(x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2}) \gamma_{\mu} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ i(a_R e_R P_+ + a_L e_L P_-) \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x-\frac{\varepsilon}{2}} A_{\nu} d^2z_{\nu} \right\} \right] A_{\mu}(x) \end{aligned} \quad (1.1.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_-} \ln \det D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x \operatorname{tr} \left[G(x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2}) \gamma_{\mu} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ i(a_R e_R P_+ + a_L e_L P_-) \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x-\frac{\varepsilon}{2}} A_{\nu} d^2z_{\nu} \right\} \right] \varepsilon_{\alpha\mu} A_{\alpha}(x). \end{aligned} \quad (1.1.62)$$

A exponencial extra, contendo os parâmetros arbitrários a_R e a_L , que aparece em (1.1.61) e (1.1.62) é uma generalização, para este modelo, da originalmente introduzida por Jackiw e Johnson [30]. Vamos observar que, embora ela não possa manter a invariância de gauge quântica para todos os valores de e_R, e_L , ela permite reproduzir a

ambigüidade de regularização característica do cálculo do determinante de D . Calculando $G(x, y)$ [31] obtemos

$$G(x, y) = e^{i(\phi(x) - \phi(y))} G_F(x - y), \quad (1.1.63)$$

onde

$$\phi(x) = \int d^2 x D_F(x - x') [\partial_\mu^{x'} B_\mu(x') + i\gamma_5 \tilde{\partial}_\mu^{x'} B_\mu(x')] \quad (1.1.64)$$

e $G_F(x - y)$, $D_F(x - x')$ denotam as funções de Green de $i\gamma_\mu \partial_\mu$ e \square respectivamente.

Assim, o traço matricial em (1.1.61) e (1.1.62) se torna [32]

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{2\pi} \left\{ \left[(\delta_{\mu\rho} + i\varepsilon_{\mu\rho}) \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho}{\varepsilon^2} (\delta_{\mu\rho} + i\varepsilon_{\mu\rho}) \int d^2 x' B_\nu(x') (\partial_\nu^{x'} + i\tilde{\partial}_\nu^{x'}) \partial_\sigma^{x'} D_F(x - x') \right] \right. \\ & \times (1 - a_R \varepsilon_R \varepsilon_\lambda A_\lambda(x)) \\ & + \left[(\delta_{\mu\rho} - i\varepsilon_{\mu\rho}) \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho}{\varepsilon^2} (\delta_{\mu\rho} - i\varepsilon_{\mu\rho}) \int d^2 x' B_\nu(x') (\partial_\nu^{x'} - i\tilde{\partial}_\nu^{x'}) \partial_\sigma^{x'} D_F(x - x') \right] \\ & \times (1 - ia_L \varepsilon_L \varepsilon_\lambda A_\lambda(x)) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.65)$$

Para tornar o limite independente da direção particular de ε_μ , tomamos a média sobre as direções ε_μ e fazemos suas componentes irem a zero simetricamente ($\varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho \rightarrow \frac{1}{2} \delta_{\sigma\rho} \varepsilon^2$).

Encontramos, então,

$$- \frac{\partial \Gamma}{\partial g_+} = g_+ F + g_- H, \quad (1.1.66)$$

$$- \frac{\partial \Gamma}{\partial g_-} = g_- F + g_+ H, \quad (1.1.67)$$

onde

$$\Gamma[A_\mu] = - \ln \det D,$$

$$F[A_\mu] = \frac{1}{2\pi} \langle A_\mu (-a_+ \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu - \tilde{\partial}_\mu \tilde{\partial}_\nu}{\square}) A_\nu \rangle, \quad (1.1.68)$$

$$H[A_\mu] = \frac{i}{2\pi} \langle A_\mu (i a_- \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \tilde{\partial}_\nu + \tilde{\partial}_\mu \partial_\nu}{\square}) A_\nu \rangle, \quad (1.1.69)$$

com $\frac{1}{\square}$ representando $D_F(x-y)$ e $a_\pm = \frac{1}{2}(a_R \pm a_L)$. Resolvendo (1.1.66) e (1.1.67), vemos que

$$-\Gamma[A_\mu] = \frac{1}{2} g_+^2 F + g_+ g_- H + \phi_-(g_-), \quad (1.1.70)$$

$$-\Gamma[A_\mu] = \frac{1}{2} g_-^2 F + g_+ g_- H + \phi_+(g_+), \quad (1.1.71)$$

Requerendo compatibilidade entre (1.1.70) e (1.1.71),

$$\phi_\pm(g_\pm) = \frac{1}{2} F g_\pm^2, \quad (1.1.72)$$

e então

$$\begin{aligned} \Gamma[A_\mu] &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{1}{4} [(e_R^2 + e_L^2)(a_+ + 1) + (e_R^2 - e_L^2)a_-] A_\mu^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [(e_R^2 + e_L^2) A_\nu \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} A_\nu + i(e_R^2 - e_L^2) A_\mu \frac{\partial_\mu \tilde{\partial}_\nu}{\square} A_\nu] \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.1.73)$$

A integral funcional para o modelo,

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle - \langle \bar{\psi} D\psi \rangle + \langle J_\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta \rangle \right\}, \quad (1.1.74)$$

torna-se, então, através das translações

$$\psi(x) = \psi'(x) + \langle G\eta \rangle, \quad (1.1.75)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x) + \langle \bar{\eta}G \rangle, \quad (1.1.76)$$

em

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ -\frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle - \langle \bar{\eta} G[A_\mu] \eta \rangle + \langle J_\mu A_\mu \rangle \right\} \det D \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ -S_{eff}[A_\mu] + \langle \bar{\eta} G[A_\mu] \eta \rangle + \langle J_\mu A_\mu \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (1.1.77)$$

onde

$$S_{eff} = \frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle + \Gamma[A_\mu]. \quad (1.1.78)$$

Introduzindo um campo auxiliar φ em Z ,

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\varphi \exp \{ -S_{eff}[A_\mu, \varphi] + \langle \bar{\eta} G[A_\mu] \eta \rangle + \langle J_\mu A_\mu \rangle \}, \quad (1.1.79)$$

podemos escrever S_{eff} em forma local [33],

$$S_{eff} = \frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle + \langle \frac{1}{2} M^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + (g_1 \partial_\mu \varphi + g_2 \tilde{\partial}_\mu \varphi) A_\mu \rangle, \quad (1.1.80)$$

com

$$M^2 = \frac{1}{4\pi} (e_R^2 a_R + e_L^2 a_L - 2e_R e_L), \quad (1.1.81)$$

$$g_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (e_L - e_R), \quad (1.1.82)$$

$$g_2 = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} (e_L + e_R). \quad (1.1.83)$$

A ação efetiva (1.1.80) poderia ter sido obtida também no formalismo operatorial [34]

através do mapeamento de férmions em bósons dado por

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{L}} : e^{i\sqrt{4\pi}\varphi_R} :, \quad (1.1.84)$$

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{L}} : e^{i\sqrt{4\pi}\varphi_L} :, \quad (1.1.85)$$

sendo L o comprimento de uma caixa unidimensional, onde se supõe que o sistema esteja, φ_R e φ_L , campos escalares (bósons quirais) dependendo de $x_0 + x_1$ e $x_0 - x_1$, respectivamente, tais que

$$\varphi = \varphi_R + \varphi_L, \quad (1.1.86)$$

$e : :$ denota o ordenamento normal. Desacoplar os férmions dos bósons, através das transformações (1.1.50) e (1.1.51), é, portanto, o equivalente funcional das regras de bosonização empregadas no formalismo operatorial [35,36,37,38,39].

Anomalias e bosonização são dois aspectos fundamentais da quantização das teorias de gauge e constituem tópicos grandemente investigados no momento. Concentraremos nossa atenção, ao longo da próxima seção, nos aspectos topológicos associados ao campo de gauge A_μ e suas relações com os fatos mencionados até aqui.

1.2 Topologia e modos zero

A anomalia pode também ser vista como uma grandeza relacionada às propriedades globais do sistema, tendo, portanto, caráter topológico. Para entendermos isso, vamos introduzir o conceito de homotopia e utilizá-lo para classificar configurações dos campos de gauge que produzem ação euclidiana finita. Quando estas configurações são também soluções das equações de movimento clássicas, são chamadas *instantons*. Tais configurações serão utilizadas, posteriormente, para dividir a integração funcional sobre campos de gauge em setores bem definidos, caracterizados por um número inteiro, a carga topológica. Nossa discussão não pretende exibir rigor matemático e usaremos sempre os exemplos das teorias de gauge em $d = 2$ e $d = 4$, baseadas nos grupos $U(1)$ e $SU(2)$, respectivamente.

Suponhamos duas curvas $C_1 = \alpha_1(t)$ e $C_2 = \alpha_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$, sobre uma variedade \mathcal{M} unindo os pontos P_0 e P_1 . Tomemos um ponto sobre C_1 , $\alpha_1(t)$, e unâmo-lo, através

de uma curva contínua $\varphi(t, u)$, $0 \leq u \leq 1$, a um ponto em C_2 , $\alpha_2(t)$. Se pudermos fazer esta construção para todos os valores de t , com $\varphi(t, u)$ contínua em t e em u e satisfazendo [40]

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0) &= \alpha_1(t) \quad ; \quad \varphi(t, 1) = \alpha_2(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \varphi(0, u) &= P_0 \quad ; \quad \varphi(1, u) = P_1 \quad , \quad 0 \leq u \leq 1, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

diremos que φ é uma *deformação* de C_1 em C_2 e, então, C_1 é *homotopicamente equivalente* a C_2 . Esta é uma relação de equivalência sobre o conjunto das curvas em \mathcal{M} e, portanto, divide este conjunto em classes de equivalência chamadas *classes de homotopia*. Se considerarmos especificamente apenas curvas fechadas ($P_0 = P_1$), podemos mostrar que o conjunto das classes de homotopia possui uma estrutura de grupo, definindo assim o *grupo fundamental* ou *primeiro grupo de homotopia* associado a \mathcal{M} .

Um tipo análogo de classificação pode ser feito para os mapeamentos de uma variedade \mathcal{M} em outra, \mathcal{N} . Estaremos particularmente interessados nos mapeamentos de S^n em S^m , as esferas n e m -dimensionais respectivamente. Denotaremos os grupos de homotopia desses mapeamentos por $\pi_n(S^m)$. Alguns resultados relevantes são [41,42]

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \tag{1.2.2}$$

$$\pi_n(S^m) = 0, \quad n < m, \tag{1.2.3}$$

$$\pi_n(S^1) = 0, \quad n > 1. \tag{1.2.4}$$

A equação (1.2.2) nos diz que as classes de homotopia dos mapeamentos de S^n em S^n podem ser caracterizadas por um inteiro, que é chamado de *índice de Pontryagin*.

Para termos uma noção mais precisa do significado deste índice, vamos observar o caso $\pi_1(S^1)$. Parametrizando o S^1 de partida por θ e o S^1 de chegada por Λ , $0 \leq \Lambda, \theta \leq 2\pi$, consideremos os mapeamentos [3]

$$\Lambda_0(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1.2.5)$$

$$\Lambda'_0(\theta) = \begin{cases} t\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ t(2\pi - \theta) & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Ambos começam e terminam em $\Lambda_0 = \Lambda'_0 = 0$, e é claro que Λ'_0 pode ser continuamente deformado em Λ_0 , simplesmente fazendo t ir a zero. Por outro lado, o mapeamento

$$\Lambda_1(\theta) = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1.2.7)$$

não pode ser continuamente deformado nos anteriores. A razão é simples: no caso de Λ_1 , uma volta inteira foi dada na circunferência enquanto isso não aconteceu com Λ_0 e Λ'_0 . Assim, não conseguimos, sem sair da circunferência (e, portanto, quebrar a continuidade da deformação) deformar Λ_1 em Λ_0 ou Λ'_0 . Com o mesmo argumento, podemos ver que, em geral, os mapeamentos

$$\Lambda_n(\theta) = n\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1.2.8)$$

darão n voltas sobre S^1 enquanto θ varia de 0 a 2π e não serão deformáveis em outros mapeamentos que dêem número inferior ou superior de voltas. O número inteiro Q que naturalmente faz o papel de índice de Pontryagin é então n , o número de voltas que dá sobre S^1 o mapeamento Λ , ou em outros termos,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Lambda}{d\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

É fácil ver que Q é invariante por mudanças locais de Λ , pois

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta \Lambda(\theta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta'} \frac{\delta \Lambda(\theta')}{\delta \Lambda(\theta)} d\theta' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{d\theta'} \delta(\theta' - \theta) \right) d\theta' = 0. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Logo, todos os mapeamentos dentro de uma mesma classe de homotopia possuem o mesmo Q , pois diferem uns dos outros apenas por variações locais, o que habilita Q definitivamente a ser o índice de Pontryagin.

Neste cenário, vamos introduzir as configurações de campos de gauge A_μ que estão associadas a ação euclidiana finita. Esta propriedade é suficiente para fixar o seu comportamento assintótico, pois dada a ação

$$S[A_\mu] = \frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.2.11)$$

vemos que o requerimento $S[A_\mu] < \infty$ implica $F_{\mu\nu}$ indo a zero no infinito, o que nos diz que A_μ deve tender a uma configuração de gauge puro,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu(x) = -\frac{i}{e} U^{-1} \partial_\mu U = \partial_\mu \Lambda, \quad (1.2.12)$$

com $U = e^{ie\Lambda(x)}$ sendo um elemento do grupo $U(1)$, que é o grupo de simetria de gauge da ação (1.2.11). Usando coordenadas polares, podemos considerar S^1 como a fronteira do espaço-tempo euclidiano (daqui em diante chamada S^1_f), e observamos, então, que Λ deve depender apenas da coordenada angular θ que parametriza S^1_f . Um campo A_μ genérico pode, entretanto, possuir uma componente radial, o que poderia tornar inviável a associação de um elemento do grupo a cada configuração de ação finita, através de (1.2.12). Entretanto, lembrando que a ação é invariante de gauge, podemos zerar a

componente radial de A_μ usando o elemento do grupo

$$\tilde{U}(x) = \exp\left(-ie \int_0^r dr' A_r(r', \theta)\right). \quad (1.2.13)$$

Desta forma, $A'_\mu = A_\mu - \frac{i}{e} \tilde{U}^{-1} \partial_\mu \tilde{U}$ tem componente radial nula e, sendo equivalente a A_μ fisicamente, faz com que possamos associar à órbita de gauge de A_μ o elemento de $U(1)$, $e^{ie\Lambda(\theta)}$, através da equação (1.2.12). Podemos pensar este elemento como um mapeamento de S_f^1 , parametrizado por θ , numa outra circunferência S_i^1 , pois U pode ser escrito como

$$U = e^{ie\Lambda(\theta)} = a_1(\theta) + ia_2(\theta) = \cos(e\Lambda(\theta)) + i\text{sen}(e\Lambda(\theta)), \quad (1.2.14)$$

com $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Se U é um mapeamento genérico de S_f^1 em S_i^1 , pode ser classificado em termos das classes de homotopia expostas anteriormente e, além disso, induz uma classificação para as órbitas de gauge de A_μ (associado a ele através de (1.2.12)). Tomando Λ como o parâmetro angular característico de S_i^1 , retornamos então à expressão do índice de Pontryagin

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{i}{e} U^{-1} \frac{d}{d\theta} U\right) d\theta. \quad (1.2.15)$$

Q está agora expresso em termos de uma medida definida sobre o grupo $U(1)$, invariante pela operação de multiplicação de grupo, como se pode ver considerando a transformação

$$U'(\theta') = \tilde{U} U(\theta) \quad (1.2.16)$$

(onde \tilde{U} é um elemento fixo), sob a qual Q permanece invariante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{i}{e} U^{-1} \frac{dU}{d\theta}\right) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{i}{e} U'^{-1}(\theta') \tilde{U} \tilde{U}^{-1} \frac{d}{d\theta'} U'(\theta')\right) \frac{d\theta'}{d\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{i}{e} U'^{-1} \frac{dU'}{d\theta'}\right) d\theta'. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Usando (1.2.12), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A'_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} A'_\mu dx_\mu = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \partial_\mu (\epsilon_{\mu\nu} A'_\nu) = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x {}^*F',
 \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

onde A'_μ denota o campo A_μ transformado de gauge de modo a ter componente radial nula. Dado que a expressão final é invariante de gauge, podemos escrevê-la igualmente em termos do A_μ original. A equação (1.2.18) é então a conexão que buscávamos entre a anomalia e as propriedades topológicas dos campos de gauge. Dada a impossibilidade de deformar U em um outro elemento pertencente a outra classe de homotopia, vemos que não podemos deformar os A_μ associados uns nos outros, ao menos sem passar por configurações que produzem ação infinita. Além disso, dado que temos uma expressão para Q escrita inteiramente em termos de A_μ , podemos associar o índice de Pontryagin diretamente a estes. Diremos, portanto, que A_μ possui *carga topológica* N se $Q = N$.

A discussão acima se repete passo a passo para grupos não abelianos e dimensões superiores. Para $SU(2)$ em 4 dimensões, podemos ver que o grupo de homotopia relevante é $\pi_3(S^3)$, pois a fronteira do espaço-tempo euclidiano é S^3 e um elemento genérico de $SU(2)$ pode ser escrito como

$$U = \sum_{\mu=1}^4 i a_\mu \sigma_\mu, \tag{1.2.19}$$

com $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sendo as matrizes de Pauli, σ_4 a identidade e

$$\sum_{\mu=1}^4 a_\mu a_\mu = 1. \tag{1.2.20}$$

A anomalia pode ser escrita como uma derivada total,

$$-\frac{1}{16\pi^2} \text{Tr}[{}^*F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = \partial_\mu \left[-\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left\{ A_\nu \left(\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta \right) \right\} \right] \quad (1.2.21)$$

e, uma vez integrada sobre todo o espaço-tempo, com $F_{\mu\nu} = 0$ na fronteira, nos dá

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \oint_{S^3_f} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[A_\nu A_\alpha A_\beta]. \quad (1.2.22)$$

Considerando o comportamento assintótico dos campos A_μ , escrevemos então,

$$Q = -\frac{1}{24\pi^2} \oint_{S^3_f} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left[(\partial_\nu U) U^{-1} (\partial_\alpha U) U^{-1} (\partial_\beta U) U^{-1} \right]. \quad (1.2.23)$$

Pode-se mostrar [3] que o integrando em (1.2.23) é uma medida invariante por translações no grupo para $SU(2)$, produzindo então, com o fator multiplicativo escolhido como $\frac{1}{24\pi^2}$, números inteiros com a mesma interpretação do índice obtido anteriormente para $U(1)$.

Em termos dos campos A_μ também podemos mostrar ser Q um invariante topológico [43], pois

$$\frac{\delta F_{\mu\nu}^a(x)}{\delta A_\rho^b(y)} = \left(D_\mu^{ab} \delta_{\nu\rho} - D_\nu^{ab} \delta_{\mu\rho} \right) \delta^4(x-y), \quad (1.2.24)$$

D_μ sendo a derivada covariante de gauge, e então

$$\frac{\delta Q}{\delta A_\mu} = \frac{1}{4\pi^2} D_\alpha {}^*F_{\mu\alpha} = 0, \quad (1.2.25)$$

pelas identidades de Bianchi.

Não exigimos, até agora, a propriedade de A_μ ser solução das equações de movimento clássicas. Nesse caso, se a carga de A_μ for ± 1 , ele é chamado *instanton*, enquanto A_μ com cargas maiores que 1, em módulo, são ditos *multi-instantons*. A obtenção e o estudo detalhado dessas soluções é o objeto de vasta literatura [44,45,46,47,48,49] e

não constitui o centro de nossa investigação neste trabalho. Vamos, por outro lado, continuar a explorar nosso exemplo bidimensional para expor outra conexão entre a dinâmica da teoria, quando esta envolve férmions, e a topologia dos campos de gauge: o aparecimento, em conexão com configurações A_μ de carga N , de soluções normalizáveis da equação

$$D\varphi_0 \equiv \gamma_\mu(i\partial_\mu + eA_\mu)\varphi_0 = 0. \quad (1.2.26)$$

Os φ_0 são ditos *modos zero* de D , o operador de Dirac que comparece na parte fermiônica da ação

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} D\psi \right\}. \quad (1.2.27)$$

O requerimento de ação euclidiana finita implica que os férmions devem satisfazer condições de contorno triviais (ir a zero no infinito). Isso faz com que a análise feita para a parte puramente eletromagnética não se altere pela inclusão de férmions. No que se segue vamos considerar configurações específicas para o campo de gauge, [6,9]

$$eA_\mu = -\tilde{\partial}_\mu f, \quad (1.2.28)$$

sendo f um campo escalar com comportamento assintótico

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \sim -N \ln|x|, \quad (1.2.29)$$

com N inteiro, o que implica

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu \sim -\frac{N}{e} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{|x|^2} x_\nu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad (1.2.30)$$

em que

$$\Lambda(x) = N \operatorname{arccotg} \frac{x_1}{x_0}. \quad (1.2.31)$$

Identificando o infinito euclidiano com um círculo e parametrizando este círculo por

$$x_0 = r \operatorname{sen} \theta, \quad x_1 = r \operatorname{cos} \theta, \quad (1.2.32)$$

temos

$$\Lambda(x) = N\theta. \quad (1.2.33)$$

Vemos que o comportamento assintótico de A_μ é o de gauge puro, sem componente radial, conforme requerido anteriormente. Além disso, substituindo a configuração (1.2.28) em (1.2.18) segue-se que

$$Q = N, \quad (1.2.34)$$

donde se conclui que A_μ é uma configuração representativa da classe de carga topológica N . Usando (1.2.28) e a representação das matrizes γ dada por

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.35)$$

e podemos expressar (1.2.26) em forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_z - \partial_z f \\ \partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{0R} \\ \varphi_{0L} \end{pmatrix} = 0, \quad (1.2.36)$$

onde usamos $\varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{0R} \\ \varphi_{0L} \end{pmatrix}$ e as coordenadas holomórficas

$$z = x_1 + ix_0, \quad (1.2.37)$$

$$\bar{z} = x_1 - ix_0. \quad (1.2.38)$$

A solução é, então,

$$\varphi_R(z, \bar{z}) = C_R(z)e^{f(z, \bar{z})}, \quad (1.2.39)$$

$$\varphi_L(z, \bar{z}) = C_L(\bar{z})e^{-f(z, \bar{z})}, \quad (1.2.40)$$

com $C_R(z)$ e $C_L(\bar{z})$ sendo funções arbitrárias de z e \bar{z} , respectivamente. Impondo

$$\int d^2z |\varphi_L|^2 < \infty, \quad (1.2.41)$$

obtemos, para $N > 0$, e, levando em consideração (1.2.29), que $C_R(z)$ deve ser um polinômio de grau $N - 1$ no máximo, o que nos fornece N soluções linearmente independentes

$$\varphi_{0,i} = z^{i-1} e^f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2.42)$$

e, para $N < 0$,

$$\varphi_{0,i} = \bar{z}^{i-1} e^{-f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, -N. \quad (1.2.43)$$

Verificamos, então, a existência de $|N|$ soluções linearmente independentes para a equação (1.2.26), para configurações A_μ pertencentes a um setor de carga topológica N . Este fato não se altera se considerarmos outro representativo dentro do mesmo setor, como se pode facilmente verificar através da repetição dos mesmos cálculos com A_μ substituído por $A_\mu + \delta a_\mu$, em que δa_μ possui carga topológica nula. Trata-se, na verdade, de uma conseqüência do *teorema do índice* de Atiyah-Singer, [5] que relaciona o índice de Potryagin, ou índice topológico, ao chamado *índice analítico*. Este é definido para o operador D da seguinte forma [50]: considere os operadores M e M^\dagger construídos

a partir das restrições de D aos espaços formados pelos espinores de quiralidade positiva e negativa,

$$M = D|_{S_+}, \quad S_+ = \{\psi | P_+ \psi = \psi\}, \quad (1.2.44)$$

$$M^\dagger = D|_{S_-}, \quad S_- = \{\psi | P_- \psi = \psi\}. \quad (1.2.45)$$

Elementos de S_\pm são aniquilados por P_\mp e D leva S_\pm em S_\mp , pois anticomuta com γ_5 . Os operadores M e M^\dagger , definidos acima, são adjuntos um do outro, pois D é hermitiano e tem atuação definida tanto sobre S_+ como sobre S_- . Por exemplo, se $\psi_+ \in S_+$ e $\psi_- \in S_-$, vemos que

$$\langle \psi_-, M\psi_+ \rangle = \langle M^\dagger\psi_-, \psi_+ \rangle. \quad (1.2.46)$$

Assim, o índice associado a um operador A é definido como

$$\text{ind}A = \dim \text{Ker}A - \dim \text{Ker}A^\dagger, \quad (1.2.47)$$

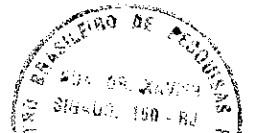
com $\text{Ker}A$ denotando o subespaço nulo, sobre o qual D atua, isto é,

$$\text{Ker}A = \{\varphi | A\varphi = 0\}. \quad (1.2.48)$$

O teorema do índice nos diz então que

$$\text{ind}M \equiv n_+ - n_- = Q, \quad (1.2.49)$$

onde n_+ e n_- denotam o número de modos zero da quiralidade positiva e negativa, respectivamente, e Q é o índice de Pontryagin, introduzido anteriormente. Não iremos justificar (1.2.49), pois isto já se encontra feito em muitos excelentes textos [50,35, 51], mas apenas assinalar que o teorema do índice provê uma conexão entre aspectos



topológicos e analíticos da teoria, para uma dimensão par d qualquer. Ele garante que, a um número fixo de modos zero, está necessariamente associado um setor com carga topológica definida (quando a teoria permite esta classificação homotópica). Isso será muito importante, para o nosso ponto de vista, pois permitirá a abordagem dos setores topológicos de carga não nula (não triviais) a partir dos modos zero, conforme veremos nos capítulos que se seguem.

Capítulo 2

Operadores de Dirac Hermitianos

2.1 Funcional gerador em setores topológicos não triviais

Começamos nossa investigação sobre os efeitos dinâmicos causados pela topologia não trivial, considerando o caso $D^\dagger = D$, num número arbitrário de dimensões euclidianas. Um aspecto muito importante é o papel desempenhado pelas fontes externas na obtenção de jacobianos de rotações quirais, regularizando o funcional gerador de modo a permitir o cálculo de razões de determinantes. Vamos usar o método da função ζ para calcular essas razões, reobtendo resultados anteriores [11,12] e discutindo abordagens similares que levam a resultados diferentes dos nossos [52].

O ponto de partida, dentro da formulação de integrais de trajetória, é o funcional

gerador

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\langle \bar{\psi} D \psi \rangle + \langle \bar{\eta} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta \rangle), \quad (2.1.1)$$

onde não consideramos a integração sobre os campos de gauge, por simplicidade, mas supomos que o campo A_μ pertence a um setor de carga topológica N . A maneira usual de se calcular a integral (2.1.1) é através de uma translação nos férmions

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi(x) + \int d^d y S(x, y) \eta(y), \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}(x) + \int d^d y \bar{\eta}(y) S(x, y), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

onde $S(x, y)$ é tal que

$$\int d^d z D(x, z) S(z, y) = \int d^d z S(x, z) D(z, y) = \delta(x - y), \quad (2.1.3)$$

e $D(x, y)$ é $\delta(x - y)D$. Sendo a medida fermiônica invariante sob esta transformação, a integral se transforma em

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \exp(\langle \bar{\eta} S \eta \rangle) \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\langle \bar{\psi} D \psi \rangle), \quad (2.1.4)$$

com as correntes externas se desacoplando dos férmions e o fator remanescente sendo absorvido na constante de normalização de Z . Entretanto, no caso de ser N diferente de zero, temos a situação já exposta no Capítulo 1, na qual o operador de Dirac da teoria é singular. A consequência imediata é a de que não há mais um $S(x, y)$, satisfazendo (2.1.3), que possa ser usado para desacoplar as correntes externas. Pode-se, contudo, buscar uma alternativa relaxando a condição (2.1.3) de modo a fatorar quase toda a dependência de Z em $\bar{\eta}, \eta$. Isso é conseguido através de [53]

$$S(x, y) = \sum_{n \neq 0} \frac{\phi_n(x) \phi_n^\dagger(y)}{\lambda_n}, \quad (2.1.5)$$

onde os λ_n são os autovalores não nulos de D e estamos supondo que $\lambda_0 = 0$ é n_0 vezes degenerado. Observemos que, no caso em que não há autovalores nulos, este $S(x, y)$ satisfaz às condições (2.1.3). Aplicando D à esquerda de (2.1.5), obtemos

$$DS(x, y) = \sum_{n \neq 0} \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) = \delta(x - y) - \sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x) \phi_{0_i}^\dagger(y), \quad (2.1.6)$$

onde foi usada a hipótese de as autofunções de D constituírem um conjunto completo. A equação (2.1.6) define a propriedade que chamamos de *quase inversibilidade* do operador D . Aplicando D à direita de (2.1.5) (e lembrando que tais manipulações são válidas quando dentro de integrais e na presença de funções teste), obtemos

$$S(x, y)D = \delta(x - y) - \sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x) \phi_{0_i}^\dagger(y). \quad (2.1.7)$$

Realizando agora as translações (2.1.2) com o auxílio de (2.1.5), temos

$$-\langle \bar{\psi} D \psi \rangle + \langle \bar{\eta} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta \rangle \longrightarrow -\langle \bar{\psi} D \psi \rangle + \langle \bar{\eta} S \eta \rangle - \langle \bar{\eta} P_0 \psi \rangle - \langle \bar{\psi} P_0 \eta \rangle, \quad (2.1.8)$$

onde $P_0(x, y) = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x) \phi_{0_i}^\dagger(y)$ é o operador de projeção sobre o subespaço gerado pelos modos zero. A equação (2.1.8) indica um desacoplamento entre as correntes e todas as componentes de ψ na direção dos modos não nulos. O acoplamento residual com os modos zero marca, no entanto, a diferença em relação ao caso da equação (2.1.4). De maneira mais explícita, decompomos ψ , $\bar{\psi}$, η e $\bar{\eta}$ em termos das autofunções de D :

$$\psi(x) = \sum_{i \neq 0} a_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{n_0} a_{0_i} \phi_{0_i}(x),$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{i \neq 0} \bar{a}_i \phi_i^\dagger(x) + \sum_{i=1}^{n_0} \bar{a}_{0_i} \phi_{0_i}^\dagger(x),$$

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= \sum_{i \neq 0} \eta_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{n_0} \eta_0 \phi_0(x), \\
\bar{\eta}(x) &= \sum_{i \neq 0} \bar{\eta}_i \phi_i^\dagger(x) + \sum_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_0 \phi_0^\dagger(x),
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Substituindo em (2.1.8) temos

$$-\langle \bar{\psi} D \psi \rangle - \langle \bar{\eta} P_0 \psi \rangle - \langle \bar{\psi} P_0 \eta \rangle = - \sum_{n \neq 0} \lambda_n \bar{a}_n a_n - \sum_{i=1}^{n_0} (\bar{a}_0 \eta_{0i} + \bar{\eta}_0 a_{0i}), \tag{2.1.10}$$

onde usamos a ortonormalidade das autofunções de D . A integral funcional então se fatora como

$$\begin{aligned}
Z[\bar{\eta}, \eta] &= \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \int \prod_{n \neq 0} d\bar{a}_n da_n \exp\left(- \sum_{n \neq 0} \lambda_n \bar{a}_n a_n\right) \\
&\quad \times \int \prod_{i=1}^{n_0} d\bar{a}_0 da_0 \exp\left(- \sum_{i=1}^{n_0} [\bar{a}_0 \eta_{0i} + \bar{\eta}_0 a_{0i}]\right) \\
&= \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D \prod_{i=1}^{n_0} \int d\bar{a}_0 da_0 \exp[-(\bar{a}_0 \eta_{0i} + \bar{\eta}_0 a_{0i})] \\
&= \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D \prod_{i=1}^{n_0} \langle \bar{\eta} \phi_{0i} | \phi_{0i}^\dagger | \eta \rangle,
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

onde $\det' D$ denomina o produto dos autovalores não nulos de D e os coeficientes η_{0i} e $\bar{\eta}_{0i}$ em (2.1.11) foram substituídos por suas expressões explícitas em termos dos modos zero, para maior clareza. Nossas convenções para a integração sobre variáveis de Grassmann são $\int da a = \int d\bar{a} \bar{a} = 1$. A expressão (2.1.11) se anula quando as fontes externas tendem a zero, como esperado, já que poder-se-ia propor uma definição do determinante de D tal como

$$\det D = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\langle -\bar{\psi} D \psi \rangle, \tag{2.1.12}$$

a qual teria que se anular no caso de carga topológica não nula. A partir de (2.1.11), temos uma expressão “regularizada” para o funcional gerador (no que se refere aos modos zero), que nos será útil nos cálculos que realizaremos a seguir.

2.2 Jacobianos de rotações quirais via função ζ

Como se pode perceber a partir da expressão (2.1.11), o cálculo de jacobianos de rotações quirais envolve a consideração de produtos de autovalores do operador de Dirac da teoria, que crescem sem limite superior. Isso conduz a divergências, as quais precisam ser regularizadas e renormalizadas de modo a produzir respostas analisáveis da teoria. Um dos modos de se tratar tais divergências é o método da função ζ , definida para um operador D , com autovalores λ_j , como [54,55,56]

$$\zeta(s, D) = \sum_j \lambda_j^{-s}. \quad (2.2.1)$$

A série converge apenas para $\text{Re } s > d/m$, onde d é a dimensão da variedade sobre a qual está definido D (no nosso caso, o espaço euclidiano compactificado d -dimensional) e m é a ordem do operador de Dirac (o número de derivadas do termo no operador que contiver mais delas; no nosso caso, $m = 1$). Contudo, $\zeta(s, D)$ pode ser continuada analiticamente a uma função meromorfa de s sobre todo o plano complexo [57], regular em $s = 0$. Isso permite fornecer uma *definição* para o determinante de D :

$$\det D \equiv \exp \left(- \frac{d}{ds} \zeta(s, D) \Big|_{s=0} \right). \quad (2.2.2)$$

Pode-se ver, substituindo-se (2.2.1) em (2.2.2), que esta última expressão é (formalmente apenas) o produto dos autovalores λ_i de D . Nesta Seção, exporemos o método de cálculo de jacobianos de rotações quirais para o caso não singular (ausência de modos zero), deixando os detalhes do caso singular para serem tratados em conexão com a introdução das fontes externas, as quais, conforme se verá a seguir, não têm qualquer importância no contexto de topologia trivial.

De fato, o funcional gerador nesse caso é dado por

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-(\bar{\psi} D \psi) + (\bar{\eta} \psi) + (\bar{\psi} \eta)} \\ &= e^{(\bar{\eta} S \eta)} \det D. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Fazendo as transformações quirais, com $\delta\alpha$ infinitesimal

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{\gamma_5 \delta\alpha(x)} \psi'(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}'(x) e^{\gamma_5 \delta\alpha(x)}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

e, igualando as expressões antes e depois da transformação para o funcional gerador, obtemos

$$\det D = J \det D_\alpha, \quad (2.2.5)$$

onde J é o jacobiano da mudança de variáveis (2.2.4) e $D_\alpha = e^{\gamma_5 \delta\alpha(x)} D e^{\gamma_5 \delta\alpha(x)}$. Podemos agora utilizar a definição do determinante de D , dada por (2.2.2), para calcular J , obtendo assim uma expressão diretamente regularizada para o mesmo. Assim, usando (2.2.2) e expandindo D_α até primeira ordem em $\delta\alpha$, vemos que [58]

$$\ln J = \left. \frac{d}{ds} [\zeta(s, D + A_1) - \zeta(s, D)] \right|_{s=0}, \quad (2.2.6)$$

onde

$$A_1 = \gamma_5 \delta\alpha D + D \gamma_5 \delta\alpha. \quad (2.2.7)$$

A partir deste ponto, prosseguimos com um conjunto de manipulações formais que é válido para o domínio de convergência (no plano s complexo) da função ζ . Entretanto,

pode-se provar a validade dos resultados a seguir para a continuação analítica da ζ , sob hipóteses adequadas em relação ao operador D [59]. Usando a expressão (2.2.1),

$$\zeta(s, D + A_1) - \zeta(s, D) = \sum_j \langle \lambda_j^\alpha | D + A_1 | \lambda_j^\alpha \rangle^{-s} + \langle \lambda_j | D | \lambda_j \rangle^{-s}. \quad (2.2.8)$$

Em (2.2.8), $|\lambda_j^\alpha\rangle$ é um autoestado do operador $D + A_1$, de autovalor λ_j^α . Dado que A_1 é de primeira ordem em $\delta\alpha$, podemos usar teoria de perturbações para explicitar $|\lambda_j\rangle$,

$$|\lambda_j^\alpha\rangle = |\lambda_j\rangle + \sum_{k \neq j} C_{jk} |\lambda_k\rangle, \quad (2.2.9)$$

com os C_{jk} determinados pelas fórmulas usuais de teoria de perturbações de primeira ordem (estamos supondo, por simplicidade, o caso não degenerado). Daí,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_j^\alpha | D + A_1 | \lambda_j^\alpha \rangle &= \langle \lambda_j | D + A_1 | \lambda_j \rangle + \sum_{k \neq j} \langle \lambda_k | D + A_1 | \lambda_j \rangle C_{jk}^* + \\ &\quad + \sum_{k \neq j} \langle \lambda_j | D + A_1 | \lambda_k \rangle C_{jk} + O(\delta\alpha^2) \\ &= \langle \lambda_j | D + A_1 | \lambda_j \rangle + O(\delta\alpha^2). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_j^\alpha | D + A_1 | \lambda_j^\alpha \rangle^{-s} &= \langle \lambda_j | D + A_1 | \lambda_j \rangle^{-s} + O(\delta\alpha^2)^{-s} \\ &= \langle \lambda_j | D | \lambda_j \rangle^{-s} \langle \lambda_j | 1 + D^{-1} A_1 | \lambda_j \rangle^{-s} + O(\delta\alpha^2)^{-s} \\ &= \langle \lambda_j | D | \lambda_j \rangle^{-s} - s \langle \lambda_j | D^{-s-1} A_1 | \lambda_j \rangle \\ &\quad + O(\delta\alpha^2)^{-s}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

De modo que, lembrando que o traço de um operador se define como a soma dos elementos de matriz diagonais em relação a uma certa base,

$$\zeta(s, D + A_1) - \zeta(s, D) = -s \text{Tr}(D^{-s-1} A_1). \quad (2.2.12)$$

Na expressão acima, o traço operatorial está definido apenas para s suficientemente grande. Utilizamos, contudo, os resultados de Seeley [57], que obtém a expressão (2.2.12) para valores de s tais que D^{-s-1} seja um operador de “classe traço” (um operador para o qual está bem definida uma operação denominada “traço” com as propriedades do traço matricial usual) e depois a estende analiticamente para $s = 0$, que é o ponto no qual a diferença de funções ζ em (2.2.12) deverá ser derivada em relação a s . Com isto em mente, usamos a propriedade cíclica do traço e a forma explícita de A_1 para obter

$$\ln J = -2 \frac{d}{ds} [s \text{Tr}(D^{-s} \gamma_5 \delta \alpha)] \Big|_{s=0}. \quad (2.2.13)$$

Como último ingrediente que nos permitirá utilizar as fórmulas de Seeley para o cálculo do jacobiano, vamos definir o núcleo associado ao operador D como

$$Df(x) \equiv \int d^d y K(D; x, y) f(y). \quad (2.2.14)$$

Da equação (2.2.14), podemos ver que o núcleo K define a ação de D no espaço funcional sobre o qual ele atua, agindo como uma espécie de “representação matricial” do operador. Definindo o núcleo de D^s como $K_s(D; x, y)$, vemos que a equação (2.2.13) escrita com o auxílio deste objeto torna-se

$$\ln J = -2 \int d^d x \text{tr}(K_{-s}(D; x, y) \gamma_5 \delta \alpha) \Big|_{s=0}. \quad (2.2.15)$$

onde tr denota o traço sobre os índices restantes (matriciais e espinoriais). Os resultados principais do trabalho de Seeley [57] são a prova da regularidade de K_{-s} em $s = 0$ e o cálculo explícito do mesmo para dimensão d arbitrária, através dos chamados coeficientes de Seeley, b_p . Para enunciar esses resultados, vamos primeiramente fixar algumas

definições. Um *multiíndice* α é uma d -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$. Definimos $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$ e

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}. \quad (2.2.16)$$

A um operador D podemos associar o seu *símbolo*,

$$\sigma(D) = \sum_{j=0}^m a_{m-j}(x, \xi), \quad a_{m-j} = \sum_{|\alpha|=m-j} L_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad (2.2.17)$$

com os L_α definidos por

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} L_\alpha (-i \partial / \partial x)^\alpha. \quad (2.2.18)$$

Em termos mais simples, o símbolo de D é definido pela substituição de $i(\partial/\partial x)^\alpha$ por $-\xi^\alpha$, ξ_μ sendo um vetor d -dimensional. Em (2.2.17), temos, para $j = 0$, o máximo valor de $|\alpha|$, $|\alpha| = m$, e a_m é chamado de *símbolo principal* de D . Notemos que, dado que os L_α podem tomar valores sobre um espaço de matrizes, o símbolo principal pode ser uma matriz também. O operador é dito *elíptico* de ordem m se $a_m(x, \xi)$ não tem autovalores nulos sobre $|\xi| = 1$. A propriedade de o operador D ser elíptico é fundamental para a validade dos resultados de Seeley, e todos os operadores de interesse para nós o serão.

Os coeficientes de Seeley são calculados através das fórmulas de recorrência [57]

$$b_{-m}(a_m - \lambda) = 1, \quad (2.2.19)$$

$$b_{-m-l}(a_m - \lambda) + \sum (\partial/\partial \xi)^\alpha b_{-m-j} (\partial/\partial x)^\alpha a_{m-k} / \alpha! = 0,$$

com a soma tomada para $j < l$, $j + k + |\alpha| = l$. Seeley encontrou uma expressão para K_0 em termos destes objetos:

$$K_0(D; x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^d} \int_{|\zeta|=1} d\zeta \int_0^\infty b_{-1-d}(x, \zeta, it) dt. \quad (2.2.20)$$

Para ilustrar o método, vejamos o caso de $d = 2$ e $D = i\gamma_\mu(\partial_\mu + eA_\mu)$ (modelo de Schwinger) [58]. O símbolo de D é

$$\sigma(D) = a_1 + a_0,$$

$$a_1 = -\gamma_\mu \xi_\mu, \quad a_0 = e\gamma_\mu A_\mu. \quad (2.2.21)$$

O coeficiente relevante será b_{-3} , o qual, para ser construído, necessitará de b_{-2} e b_{-1} :

$$b_{-1}(x, \xi, \lambda) = (a_1 - \lambda)^{-1},$$

$$b_{-2}(x, \xi, \lambda) = -b_{-1}a_0b_{-1},$$

$$b_{-3}(x, \xi, \lambda) = \frac{\partial b_{-1}}{\partial \xi_\mu} i \frac{\partial a_0}{\partial x_\mu} b_{-1} - b_{-2}a_0b_{-1}. \quad (2.2.22)$$

Substituindo a_1 e a_0 por (2.2.21) e calculando sucessivamente (2.2.22) chegamos a

$$b_{-3} = \frac{ie}{(\lambda^2 - \xi^2)^3} [(2(\gamma_\mu \xi_\mu - \lambda 1)\xi_\mu \partial_\mu + (\lambda^2 - \xi^2)\gamma_\mu \partial_\mu)\gamma_\mu A_\mu (\gamma_\mu \xi_\mu - \lambda 1) - ie(2\lambda \xi_\mu A_\mu 1 - (\lambda^2 - \xi^2)\gamma_\mu A_\mu - 2\gamma_\mu \xi_\mu \xi_\nu A_\nu)(\lambda \gamma_\mu A_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu A_\mu \xi_\nu)] \quad (2.2.23)$$

Calculando-se o traço,

$$\text{tr}(b_{-3}\gamma_5) = -\frac{i\lambda e}{(\lambda^2 - \xi^2)^2} \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5)\partial_\mu A_\nu = -\frac{e\lambda}{(\lambda^2 - \xi^2)^2} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.2.24)$$

e, executando-se as integrações, obtém-se

$$\text{tr}(K_0(D; x, x)\gamma_5) = -\frac{e}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.2.25)$$

Colocando-se (2.2.25) em (2.2.15) obtém-se a expressão usual para o jacobiano de rotações quirais no modelo de Schwinger.

2.3 Fontes externas e modos zero

Com os elementos desenvolvidos nas Seções anteriores, podemos abordar agora o caso singular. Seguindo a estratégia usual, realizamos uma rotação quiral no funcional gerador (2.1.1):

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = J \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\langle \bar{\psi} D_\alpha \psi \rangle + \langle \bar{\eta} e^{\gamma_5 \delta_\alpha} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} e^{\gamma_5 \delta_\alpha} \eta \rangle). \quad (2.3.1)$$

Conforme feito anteriormente, podemos transladar os férmions usando a quase inversibilidade de D_α

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi(x) + \int d^d y S(x, y; \alpha) \eta(y; \alpha), \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}(x) + \int d^d y \bar{\eta}(y; \alpha) S(x, y; \alpha), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

onde agora

$$\begin{aligned} \int d^d z D_\alpha(x, z) S(z, y; \alpha) &\equiv \int d^d z (e^{\gamma_5 \delta_\alpha(x)} D e^{\gamma_5 \delta_\alpha(z)}) (e^{-\gamma_5 \delta_\alpha(z)} S(z, y) e^{-\gamma_5 \delta_\alpha(y)}) = \\ &= \delta(x - y) - e^{\gamma_5 \delta_\alpha(x)} P_0(x, y) e^{-\gamma_5 \delta_\alpha(y)}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

e

$$\int d^d z S(x, z; \alpha) D_\alpha(z, y) = \delta(x - y) - e^{-\gamma_5 \delta_\alpha(x)} P_0(z, y) e^{\gamma_5 \delta_\alpha(y)}. \quad (2.3.4)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= J \exp \langle \bar{\eta} S \eta \rangle \\ &\times \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-\langle \bar{\psi} D_\alpha \psi \rangle + \langle \bar{\psi} e^{\gamma_5 \delta_\alpha} P_0 \eta \rangle + \langle \bar{\eta} P_0 e^{\gamma_5 \delta_\alpha} \psi \rangle]. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Vale ressaltar que este teria sido o resultado obtido caso a translação nos férmions tivesse sido feita antes da rotação quiral. Supondo a existência de um conjunto completo

de autofunções também para D_α , podemos agora expandir os campos fermiônicos em termos das mesmas,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{i \neq 0} a_i(\alpha) \phi_i(x; \alpha) + \sum_{i=1}^{n_0} a_{0_i}(\alpha) \phi_{0_i}(x; \alpha), \\
\bar{\psi}(x) &= \sum_{i \neq 0} \bar{a}_i(\alpha) \phi_i^\dagger(x; \alpha) + \sum_{i=1}^{n_0} \bar{a}_{0_i}(\alpha) \phi_{0_i}^\dagger(x; \alpha), \\
\eta(x) &= \sum_{i \neq 0} \eta_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{n_0} \eta_{0_i} \phi_{0_i}(x), \\
\bar{\eta}(x) &= \sum_{i \neq 0} \bar{\eta}_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0_i} \phi_{0_i}^\dagger(x),
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

onde se pode notar que expandimos as fontes $\eta, \bar{\eta}$ em termos das autofunções de D , por conveniência de cálculo. Substituindo estas expressões em (2.3.5) obtemos

$$\begin{aligned}
Z[\bar{\eta}, \eta] &= J \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \int \prod_{i=1}^{n_0} d\bar{a}_{0_i}(\alpha) da_{0_i}(\alpha) \prod_j d\bar{a}_j(\alpha) da_j(\alpha) \\
&\times \exp \left[- \sum_j \left(\lambda_j(\alpha) \bar{a}_j(\alpha) a_j(\alpha) - \bar{a}_j(\alpha) \xi_j(\alpha) - \bar{\xi}_j(\alpha) a_j(\alpha) \right) \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{n_0} \left(\bar{a}_{0_i}(\alpha) \xi_{0_i}(\alpha) + \bar{\xi}_{0_i}(\alpha) a_{0_i}(\alpha) \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

em que

$$\begin{aligned}
\xi_j(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n_0} \eta_{0_k} \langle \phi_j^\dagger(\alpha) e^{\gamma_5 \delta \alpha} \phi_{0_k} \rangle, \\
\bar{\xi}_j(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0_k} \langle \phi_{0_k}^\dagger e^{\gamma_5 \delta \alpha} \phi_j(\alpha) \rangle, \\
\xi_{0_j}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n_0} \eta_{0_k} \langle \phi_{0_j}^\dagger(\alpha) e^{\gamma_5 \delta \alpha} \phi_{0_k} \rangle, \\
\bar{\xi}_{0_j}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0_k} \langle \phi_{0_k}^\dagger e^{\gamma_5 \delta \alpha} \phi_{0_j}(\alpha) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Podemos agora completar os quadrados nas integrais sobre os a_i e \bar{a}_i , mudando as variáveis para

$$a'_j = a_j - \xi_j/\lambda_j(\alpha) \quad \text{e} \quad \bar{a}'_j = \bar{a}_j - \bar{\xi}_j/\lambda_j(\alpha), \quad (2.3.9)$$

e fazer as integrais sobre a_0 , e \bar{a}_0 , como antes para obter [60]

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= J \exp(\bar{\eta} S \eta) \det' D_\alpha \\ &\times \exp \left[\sum_j \frac{\bar{\xi}_j(\alpha) \xi_j(\alpha)}{\lambda_j(\alpha)} \right] \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\xi}_{0_i}(\alpha) \xi_{0_i}(\alpha). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Estamos supondo que rotações quirais, parametrizadas por $\delta\alpha$ que satisfaçam condições de fronteira triviais, não conduzem a operadores de Dirac com número de modos zero diferente do original. Isso pode ser provado exatamente em duas dimensões, onde, graças a $\gamma_\mu \gamma_5 = i\epsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu$, vemos que a rotação quiral induz uma transformação local sobre A_μ , levando-o a $A_\mu + \delta A_\mu$. O índice não muda para este tipo de transformação e, como só há modos zero de uma quiralidade para cada valor de N [11], o número deles também não muda. Em d dimensões podemos apenas conjecturar que o mesmo acontece, pois não se pode garantir que só haja modos zero de uma quiralidade. O teorema do índice e' igualmente satisfeito se n_+ for para $n_+ + \Delta$ e n_- for para $n_- + \Delta$, pois $N = n_+ - n_-$ permanece inalterado. Ao longo deste Capítulo estaremos presumindo que nem n_+ nem n_- se alteram, para rotações parametrizadas por $\delta\alpha$ como descrito acima. Na verdade, não estaremos sendo por demais restritivos, pois resultados devidos a 't Hooft [44,43] indicam, para quatro dimensões, que a presença de ao menos um modo zero de quiralidade diferente dos demais é suficiente para zerar as contribuições dos setores topológicos não triviais a todas as funções de correlação. Se só houver modos

zero de uma quiralidade, rotações quirais que conservem o setor topológico preservarão, portanto, o seu número.

Vamos agora ressaltar um fato muito importante em relação aos modos zero de D_α .

Se ϕ_{0_i} é modo zero de D , então

$$\psi_{0_i}(x) = e^{-\gamma_5 \delta \alpha(x)} \phi_{0_i}(x) \quad (2.3.11)$$

é modo zero de D_α , mostrando uma correspondência um a um entre os modos zero dos dois operadores para rotações quirais que não mudem o setor topológico (levando em conta a hipótese mencionada acima). Entretanto, se os ϕ_{0_i} constituírem um conjunto ortonormal, o mesmo não pode ser dito dos ψ_{0_i} :

$$\langle \psi_{0_i}^\dagger, \psi_{0_j} \rangle = \langle \phi_{0_i}^\dagger, e^{2\gamma_5 \delta \alpha} \phi_{0_j} \rangle \neq \delta_{ij}. \quad (2.3.12)$$

É claro que se pode usar qualquer base, mesmo não ortonormal (desde que completa!), para calcular a integral funcional. Mas, caso se opte por uma base ortonormal, é preciso corrigir a medida da integral para dar conta dos termos não diagonais que aparecerão nos produtos escalares (vide Apêndice A). Nossa opção é a de trabalhar diretamente com uma base de funções ortonormais e, para isso, é necessário ortonormalizar os ψ_{0_i} . Isso pode ser feito utilizando-se um procedimento padrão, como o método de ortonormalização de Gram-Schmidt, por exemplo [61]. Assim, a partir de agora, consideramos os $\phi_{0_i}(x; \alpha)$ um conjunto ortonormal, que se expressa em termos dos ϕ_{0_i} como

$$\begin{aligned} \phi_{0_i}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n_0} B_{ik}(\alpha) \psi_{0_k}(\alpha) \\ &= e^{-\gamma_5 \delta \alpha} \sum_{k=1}^{n_0} B_{ik}(\alpha) \phi_{0_k}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Para determinar os B_{ik} usamos as fórmulas de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned}\phi_{01}(\alpha) &= \frac{1}{N_1} \psi_{01}; \\ \phi_{0i}(\alpha) &= \frac{1}{N_i} \left[\psi_{0i}(\alpha) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \phi_{0k}^\dagger(\alpha) \psi_{0i}(\alpha) \rangle}{\langle \phi_{0k}^\dagger(\alpha) \phi_{0k}(\alpha) \rangle} \phi_{0k}(\alpha) \right],\end{aligned}\quad (2.3.14)$$

onde os N_i são constantes de normalização. Lembrando que $\delta\alpha$ é infinitesimal, vemos que $\psi_{0i}(\alpha) = \phi_{0i} + O(\alpha)$, $\phi_{0i}(\alpha) = \phi_{0i} + O(\alpha)$ e, para $k < i$,

$$\langle \phi_{0k}^\dagger(\alpha) \psi_{0i}(\alpha) \rangle = O(\alpha). \quad (2.3.15)$$

Usando essas aproximações, obtemos

$$\phi_{0i}(\alpha) = \frac{\psi_{0i}(\alpha)}{\sqrt{\langle \psi_{0i}^\dagger(\alpha) \psi_{0i}(\alpha) \rangle}} - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \psi_{0k}^\dagger(\alpha) \psi_{0i}(\alpha) \rangle \psi_{0k} + O(\alpha^2) \quad (2.3.16)$$

e então temos as expressões para os B_{ij} [60]

$$\begin{aligned}B_{ii}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\langle \psi_{0i}^\dagger(\alpha) \psi_{0i}(\alpha) \rangle}} = 1 + \langle \phi_{0i}^\dagger, \gamma_5 \delta\alpha \phi_{0i} \rangle + O(\alpha^2), \\ B_{ij}(\alpha) &= -\langle \psi_{0j}^\dagger(\alpha) \psi_{0i}(\alpha) \rangle = 2\langle \phi_{0j}^\dagger, \gamma_5 \delta\alpha \phi_{0i} \rangle + O(\alpha^2), \quad i > j, \\ B_{ij} &= 0, \quad i < j.\end{aligned}\quad (2.3.17)$$

Voltando a (2.3.10), podemos começar o cálculo pelo produtório envolvendo os ξ_{0i} . Levando (2.3.13) em consideração,

$$\begin{aligned}\xi_{0i}(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n_0} \eta_{0j} B_{ij}^*(\alpha), \\ \bar{\xi}_{0i}(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0j} B_{ij}(\alpha),\end{aligned}\quad (2.3.18)$$

e, usando o caráter grassmanniano dos η_0 , e as expressões (2.3.17),

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\xi}_{0,i}(\alpha) \xi_{0,i}(\alpha) &= \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0,i} \eta_{0,i} |B_{ii}(\alpha)|^2 \\ &= \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0,i}^\dagger \gamma_5 \delta \alpha \phi_{0,i} \rangle\right) \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0,i} \eta_{0,i}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Com esta expressão é fácil ver que a exponencial envolvendo $\xi_j, \bar{\xi}_j$ apenas contribui com uma multiplicação por 1, já que os outros termos, obtidos através da expansão da mesma, dão contribuição nula, pois envolvem algum dos $\eta_{0,i}$. O resultado final é,

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= J \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D_\alpha \\ &\quad \times \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0,i}^\dagger \gamma_5 \delta \alpha \phi_{0,i} \rangle\right) \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0,i} \eta_{0,i}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

A comparação com (2.1.11) nos fornece o jacobiano

$$J = \frac{\det' D}{\det' D_\alpha} \left[1 - 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0,i}^\dagger \gamma_5 \delta \alpha \phi_{0,i} \rangle\right]. \quad (2.3.21)$$

Ressaltamos novamente a importancia da hipótese de que n_0 não mude pela rotação quiral pois, se fosse esse o caso, os produtórios envolvendo η_0 , e $\bar{\eta}_0$, não poderiam ser fatorados, ocasionando um jacobiano que dependeria das fontes externas, sendo infinito ou nulo (se o número de modos zero aumentasse ou diminuísse, respectivamente) no limite $\eta, \bar{\eta}$ indo para zero.

Resta computar, em (2.3.21), a razão dos determinantes modificados de D e D_α .

Para calculá-la podemos definir, seguindo [52],

$$\det' D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\det(D + \epsilon \mathbf{1})}{\epsilon^{n_0}}. \quad (2.3.22)$$

É imediato ver que, para matrizes de dimensão finita, a definição acima coincide com o produto dos autovalores não nulos de D . Em geral, pode-se provar que [59]

$$\det' D = \det(D + P_0), \quad (2.3.23)$$

onde P_0 é o operador de projeção ortogonal sobre \mathcal{N} , definido por

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(D^k). \quad (2.3.24)$$

Para operadores normais (aqueles cuja parte hermitiana comuta com a anti-hermitiana), P_0 é simplesmente o projetor sobre $\text{Ker } D$ e coincide com o operador que aparece em (2.1.8). O operador $D + P_0$ é claramente inversível, dado que D atua no complementar de P_0 e vice-versa, tendo uma ação não nula em todo o espaço funcional. Com esta definição, prosseguimos mostrando que

$$\begin{aligned} \frac{\det' D}{\det' D_\alpha} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\det'(D + \epsilon \mathbf{1})}{\det'(D_\alpha + \epsilon \mathbf{1})} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\det' D_\epsilon}{\det'(D_\epsilon + A_1^\epsilon)}, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

com $D_\epsilon = D + \epsilon \mathbf{1}$, $A_1^\epsilon = \gamma_5 \delta \alpha D_\epsilon + D_\epsilon \gamma_5 \delta \alpha - 2\epsilon \gamma_5 \delta \alpha$. O operador D_ϵ satisfaz agora às condições requeridas para a aplicação dos resultados da Seção anterior. Assim,

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det' D}{\det' D_\alpha} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\frac{d}{ds} \left[s \text{Tr}(D_\epsilon^{-s-1} A_1^\epsilon) \right] \Big|_{s=0} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \text{Tr}(-2D_\epsilon^{-s} \gamma_5 \delta \alpha) + \text{Tr}(2\epsilon D_\epsilon^{-s-1} \gamma_5 \delta \alpha) \right\} \Big|_{s=0} \\ &= -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int dx \text{tr}[K_0(D_\epsilon; x, x) \gamma_5 \delta \alpha(x)] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \int dx \text{tr}[K_{-1}(D_\epsilon; x, x) \gamma_5 \delta \alpha(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

O primeiro termo da última expressão entre chaves pode ser calculado usando o algoritmo da Seção 2.2, e pode-se observar, por inspeção nas fórmulas dos coeficientes

de Seeley, (2.2.19), que o resultado é algebricamente idêntico ao do caso de topologia trivial (por exemplo, no modelo de Schwinger, o resultado do cálculo de $K_0(D; x, x)$ seria $-\frac{e}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ somado a uma função regular de ϵ , que tende a zero quando ϵ vai a zero). O segundo termo, envolvendo $K_{-1}(D; x, x)$, não tem um limite definido em geral, devido à possível presença de potências negativas de ϵ . Nos casos em que D é normal, entretanto, este limite existe e pode ser calculado com o argumento a seguir. Tomemos como $K_{-1}(D_\epsilon; x, x) \equiv K(D_\epsilon^{-1}; x, x)$ a distribuição (a inversa de D_ϵ)

$$K(D_\epsilon^{-1}; x, x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\phi_n(x)\phi_n^\dagger(x)}{\lambda_n + \epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x)\phi_{0_i}^\dagger(x). \quad (2.3.27)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, o segundo termo de (2.3.26) torna-se, portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int dx \operatorname{tr}[K_{-1}(D_\epsilon; x, x)\gamma_5\delta\alpha(x)] = \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0_i}^\dagger, \gamma_5\delta\alpha\phi_{0_i} \rangle. \quad (2.3.28)$$

Obtemos assim, para o jacobiano,

$$\begin{aligned} J &= \left\{ 1 - 2 \int dx \operatorname{tr}(K_0(D; x, x)\gamma_5\delta\alpha(x)) + 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0_i}^\dagger, \gamma_5\delta\alpha\phi_{0_i} \rangle \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0_i}^\dagger, \gamma_5\delta\alpha\phi_{0_i} \rangle \right\} \\ &= 1 - 2 \int dx \operatorname{tr}(K_0(D; x, x)\gamma_5\delta\alpha(x)) + O(\delta\alpha^2). \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Portanto, podemos dizer que, ao menos no contexto da função ζ , o problema do cálculo do Jacobiano de rotações quirais infinitesimais é o mesmo no setor topológico trivial e nos demais. Fomos capazes de mostrar isso apenas porque utilizamos a expressão completa do funcional gerador, o que se costuma fazer na literatura, mesmo na presença de modos zero [52,62,63,64,65,66]. Como vimos, a presença de fontes externas regulariza naturalmente a razão mal definida de operadores de Dirac singulares, sem

a necessidade de critérios adicionais (além da definição de $\det' D$) para tratamento de modos zero. As fontes externas seguirão sendo importantes no estudo da bosonização em setores não triviais, como veremos a seguir.

2.4 Rotações finitas

Usando as técnicas expostas até aqui, vamos calcular o jacobiano de rotações quirais finitas que preservam a topologia [58]. Consideremos uma rotação finita parametrizada por r , $0 \leq r \leq 1$:

$$\psi \longrightarrow e^{r\gamma_5\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}e^{r\gamma_5\alpha(x)}, \quad \alpha(x) \text{ finito.} \quad (2.4.1)$$

Conforme mostraremos mais adiante, o funcional gerador torna-se

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = J(r) \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D_{r\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0i}, \eta_{0i} \right) N(r\alpha), \quad (2.4.2)$$

onde cabe destacar o aparecimento do fator $N(r\alpha)$, vinculado aos modos zero. Este fator advém da natureza grassmanniana dos η_{0i} , e é calculado, mais adiante, para uma ortogonalização arbitrária dos modos zero do operador de Dirac transformado [67],

$$D_{r\alpha} = e^{r\gamma_5\alpha(x)} D e^{r\gamma_5\alpha(x)}, \quad (2.4.3)$$

generalizando, assim, o argumento dado nas seções anteriores para o caso infinitesimal.

Da invariância de Z em relação à mudança de variáveis (2.4.1), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dr} &= 0 \\ &= \frac{d}{dr} \ln J(r) + \frac{d}{dr} \ln \det' D_{r\alpha} + \frac{d}{dr} \ln N_{r\alpha}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Integrando (2.4.4) em relação a r , vem que

$$J(1) = \exp \left[- \int_0^1 dr \omega'(r\alpha) \right] N(\alpha)^{-1}, \quad (2.4.5)$$

com

$$\omega'(r\alpha) = \frac{d}{dr} \ln \det' D_{r\alpha}. \quad (2.4.6)$$

Usando explicitamente as definições de derivada e de $\det' D_{r\alpha}$,

$$\begin{aligned} \omega'(r\alpha) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\ln \det' D_{(r+\Delta r)\alpha} - \ln \det' D_{r\alpha}}{\Delta r} \\ &= \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0^+}} \frac{\ln \det(D_{(r+\Delta r)\alpha} + \epsilon) - \ln \det(D_{r\alpha} + \epsilon)}{\Delta r} \\ &= - \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0^+}} \frac{1}{\Delta r} \frac{d}{ds} \left\{ \zeta(s, D_{r\alpha}^\epsilon + \Delta r A_1^\epsilon(r\alpha)) - \zeta(s, D_{r\alpha}^\epsilon) \right\} \Big|_{s=0}, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

onde

$$D_{r\alpha}^\epsilon = D_{r\alpha} + \epsilon,$$

$$A_1^\epsilon(r\alpha) = \{\gamma_5 \alpha, D_{r\alpha}^\epsilon\} - 2\epsilon \gamma_5 \alpha. \quad (2.4.8)$$

Observando que Δr é infinitesimal, podemos então tratar $A_1^\epsilon(r\alpha)$ como uma perturbação a $D_{r\alpha}^\epsilon$, no sentido de Gamboa-Saravíet *al.* [59], tornando aplicáveis os resultados da Seção 2.2, em relação à diferença das ζ em (2.4.7). Desta maneira, vemos que

$$\begin{aligned} \omega(r\alpha) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Tr} \left[(D_{r\alpha}^\epsilon)^{-s-1} A_1^\epsilon(r\alpha) \right] \Big|_{s=0} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[2 \int dx \text{tr} [K_0(D_{r\alpha}^\epsilon; x, x) \gamma_5 \alpha(x)] \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^{n_0} \text{tr} \left[\int dx \phi_{0,i}^\dagger(x; r\alpha) \gamma_5 \alpha(x) \phi_{0,i}(x; r\alpha) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Um ponto que deve ser esclarecido em (2.4.9) é a necessidade de que os modos zero de $D_{r\alpha}$, que aparecem explicitamente, terem que constituir um conjunto ortonormal.

Isto pode ser visto a partir do momento em que se usou a expressão (2.3.27) para $K(D_{r\alpha}^{\epsilon^{-1}}; x, x)$. De fato, este núcleo só se configura como uma inversa de $D_{r\alpha}^{\epsilon}$, i. e. no sentido

$$D_{r\alpha}^{\epsilon} K(D_{r\alpha}^{\epsilon^{-1}}) = 1 = K(D_{r\alpha}^{\epsilon^{-1}}) D_{r\alpha}^{\epsilon}, \quad (2.4.10)$$

se as autofunções que compõem sua construção formarem um conjunto completo e ortonormal. De outra forma, teríamos uma constante multiplicando a identidade que deveria ser absorvida por um processo de ortonormalização.

Como no caso infinitesimal, K_0 deve ser calculado de modo idêntico ao caso não singular, dando as expressões conhecidas para transformações finitas. Juntando (2.4.9) a (2.4.5) temos, então [67],

$$J = \exp \left\{ -2 \int_0^1 dr \int dx \operatorname{tr} (K_0(D_{r\alpha}; x, x) \gamma_5 \alpha(x)) \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 dr \sum_{i=1}^{n_0} \operatorname{tr} \left[\int dx \phi_{0,i}^{\dagger}(x; r\alpha) \gamma_5 \alpha(x) \phi_{0,i}(x; r\alpha) \right] \right\} N(\alpha)^{-1}. \quad (2.4.11)$$

Antes de prosseguir, façamos uma pausa para provar a equação (2.4.2). Consideremos o funcional gerador transformado:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = J(r) \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\langle \bar{\psi} D_{r\alpha} \psi \rangle + \langle \bar{\eta} e^{r\gamma_5 \alpha} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} e^{r\gamma_5 \alpha} \eta \rangle). \quad (2.4.12)$$

No Capítulo anterior utilizamos, na translação fermiônica, uma quase inversa de D dada por

$$S(x, y; r\alpha) = e^{-r\gamma_5 \alpha(x)} \sum_{n \neq 0} \frac{\phi_n(x) \phi_n^{\dagger}(x)}{\lambda_n} e^{-r\gamma_5 \alpha(y)}, \quad (2.4.13)$$

com os ϕ_n sendo as autofunções de D . Podemos usar

$$S(x, y; r\alpha) = \sum_{n \neq 0} \frac{\phi_n(x; r\alpha) \phi_n^{\dagger}(y; r\alpha)}{\lambda_n^{\alpha}}, \quad (2.4.14)$$

com igual resultado, onde agora $\phi_n(x; r\alpha)$ denota uma autofunção não nula de $D_{r\alpha}$.

Usando (2.4.14) obtemos

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta] &= J(r) \exp(\bar{\eta}(r\alpha)S(r\alpha)\eta(r\alpha)) \det' D_{r\alpha} \\ &\times \prod_{i=1}^{n_0} \langle \bar{\eta}(r\alpha)\phi_{0_i}(r\alpha) \rangle \langle \phi_{0_i}^\dagger(r\alpha)\eta(r\alpha) \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

com

$$\eta(x; r\alpha) = e^{r\gamma_5\alpha(x)}\eta(x), \quad \bar{\eta}(x; r\alpha) = \bar{\eta}(x)e^{r\gamma_5\alpha(x)}. \quad (2.4.16)$$

Denotando agora por S' a expressão para S dada em (2.4.13), observamos que

$$\begin{aligned} D_{r\alpha}S(r\alpha) &= S(r\alpha)D_{r\alpha} = 1 - P_0(r\alpha), \\ D_{r\alpha}S'(r\alpha) &= 1 - P_R(r\alpha), \\ S'(r\alpha)D_{r\alpha} &= 1 - P_L(r\alpha), \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

onde

$$\begin{aligned} P_0(x, y; r\alpha) &= \sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x; r\alpha)\phi_{0_i}^\dagger(y; r\alpha), \\ P_R(x, y; r\alpha) &= e^{r\gamma_5\alpha(x)} \left(\sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x)\phi_{0_i}^\dagger(y) \right) e^{-r\gamma_5\alpha(y)}, \\ P_L(x, y; r\alpha) &= e^{-r\gamma_5\alpha(x)} \left(\sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x)\phi_{0_i}^\dagger(y) \right) e^{r\gamma_5\alpha(y)}, \\ \mathbf{1}(x, y) &= \delta(x - y). \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Aplicando $S(r\alpha)$ à esquerda e à direita da segunda e terceira fórmulas em (2.4.17),

obtemos as relações de consistência

$$S(r\alpha) = S'(r\alpha) - P_0(r\alpha)S'(r\alpha) + S(r\alpha)P_R(r\alpha),$$

$$S(r\alpha) = S'(r\alpha) - S'(r\alpha)P_0(r\alpha) + P_L(r\alpha)S(r\alpha). \quad (2.4.19)$$

Usando a última equação podemos mostrar que

$$\exp\langle\bar{\eta}(r\alpha)S(r\alpha)\eta(r\alpha)\rangle = \exp\langle\bar{\eta}S\eta\rangle \exp\left(\sum_{i=1}^{n_0} [M_i\langle\phi_{0,i}^\dagger(r\alpha)\eta(r\alpha)\rangle + \langle\bar{\eta}(r\alpha)\phi_{0,i}(r\alpha)\rangle N_i]\right) \quad (2.4.20)$$

com

$$M_i = \langle\bar{\eta}(\alpha)S'(\alpha)\phi_{0,i}(\alpha)\rangle, \quad N_i = \sum_{j=1}^{n_0} B_{ij}^{-1}(\alpha)\langle\phi_{0,i}^\dagger e^{\gamma_0\alpha} S(\alpha)\eta(\alpha)\rangle. \quad (2.4.21)$$

Se observarmos agora o fato de que a exponencial se encontra multiplicada por

$$F_{n_0} \equiv \prod_{i=1}^{n_0} \langle\bar{\eta}(r\alpha)\phi_{0,i}(r\alpha)\rangle\langle\phi_{0,i}^\dagger(r\alpha)\eta(r\alpha)\rangle, \quad (2.4.22)$$

veremos que, novamente, a segunda exponencial em (2.4.20) se reduz à identidade e então podemos substituir $\langle\bar{\eta}(r\alpha)S(r\alpha)\eta(r\alpha)\rangle$ por $\langle\bar{\eta}S\eta\rangle$ em (2.4.15).

A seguir, obtemos o termo $N(r\alpha)$, mencionado em (2.4.2). Para isso, consideramos os $\phi_{0,i}(r\alpha)$ dados por (2.3.13) e as expressões (2.4.16) para escrever [67]

$$F_{n_0} = \prod_{i=1}^{n_0} \left(\sum_{j=1}^{n_0} B_{ij}\bar{\eta}_{0,j}\right) \left(\sum_{j=1}^{n_0} B_{ij}^*\eta_{0,j}\right). \quad (2.4.23)$$

Calculamos explicitamente F_2 :

$$\begin{aligned} F_2 &= -\prod_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 B_{ij}\bar{\eta}_{0,j}\right) \prod_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 B_{ij}^*\eta_{0,j}\right) \\ &= -(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})\bar{\eta}_{0_1}\bar{\eta}_{0_2}(B_{11}^*B_{12}^* - B_{12}^*B_{21}^*)\eta_{0_1}\eta_{0_2} \\ &= |\det \mathbf{B}|^2 \bar{\eta}_{0_1}\eta_{0_1}\bar{\eta}_{0_2}\eta_{0_2}. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Tomando este resultado como válido para $n_0 - 1$, iremos prová-lo para n_0 . Consideremos

o produto,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n_0} \left(\sum_{j=1}^{n_0} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right) &= \left(\sum_{j=1}^{n_0} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right) \prod_{i=2}^{n_0} \left(\sum_{j=1}^{n_0} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right) \\
&= B_{11} \bar{\eta}_{01} \prod_{i=2}^{n_0} \left(\sum_{j=2}^{n_0} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right) + B_{12} \bar{\eta}_{02} \prod_{i=2}^{n_0} \left(\sum_{j \neq 2}^{n_0} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right) + \dots \\
&\quad + B_{1n_0} \bar{\eta}_{0n_0} \prod_{i=2}^{n_0} \left(\sum_{j=1}^{n_0-1} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right), \tag{2.4.25}
\end{aligned}$$

onde o termo que falta dentro de cada somatório da última igualdade em (2.4.25) foi aniquilado pelo η_0 , externo. Cada um destes produtos satisfaz as condições da hipótese e, portanto,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n_0} \left(\sum_{j=1}^{n_0} B_{ij} \bar{\eta}_{0j} \right) &= B_{11} \bar{\eta}_{01} \det \begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2n_0} \\ \vdots & & & \\ B_{n_02} & B_{n_03} & \dots & B_{n_0n_0} \end{bmatrix} \bar{\eta}_{02} \dots \bar{\eta}_{0n_0} \\
&\quad + B_{12} \bar{\eta}_{02} \det \begin{bmatrix} B_{21} & B_{23} & \dots & B_{2n_0} \\ \vdots & & & \\ B_{n_01} & B_{n_03} & \dots & B_{n_0n_0} \end{bmatrix} \bar{\eta}_{01} \bar{\eta}_{03} \dots \bar{\eta}_{0n_0} + \dots \\
&\quad + B_{1n_0} \bar{\eta}_{0n_0} \det \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n_0-1} \\ \vdots & & & \\ B_{n_01} & B_{n_02} & \dots & B_{n_0n_0-1} \end{bmatrix} \bar{\eta}_{01} \bar{\eta}_{02} \dots \bar{\eta}_{0n_0-1} \\
&= \det \mathbf{B} \bar{\eta}_{01} \bar{\eta}_{02} \dots \bar{\eta}_{0n_0}. \tag{2.4.26}
\end{aligned}$$

Usando a mesma álgebra para o produto dos η_0 , concluímos que

$$F_{n_0} = |\det \mathbf{B}|^2 \bar{\eta}_{01} \eta_{01} \dots \bar{\eta}_{0n_0} \eta_{0n_0} \equiv N(r\alpha) \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i}. \tag{2.4.27}$$

O resultado obtido anteriormente, usando o método de Gram-Schmidt, se enquadra na expressão (2.4.27), pois podemos lembrar que a matriz dos coeficientes B_{ij} é do tipo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ B_{n_0-1,1} & B_{n_0-1,2} & \cdots & B_{n_0-1,n_0-1} & 0 \\ B_{n_0,1} & B_{n_0,2} & \cdots & B_{n_0,n_0-1} & B_{n_0,n_0} \end{bmatrix}, \quad (2.4.28)$$

cujo determinante é $\prod_{i=1}^{n_0} B_{ii}$.

Podemos agora completar a parte genérica do cálculo de (2.4.11), dando uma expressão para

$$G = \exp \left(2 \int_0^1 dr \sum_{i=1}^{n_0} \text{tr} \left[\int dx \phi_{0,i}^\dagger(x; r\alpha) \gamma_5 \alpha(x) \phi_{0,i}(x; r\alpha) \right] \right). \quad (2.4.29)$$

Para tanto, consideremos a condição de ortonormalidade dos $\phi_{0,i}(r\alpha)$:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{0,i}^\dagger(r\alpha) \phi_{0,j}(r\alpha) \rangle &= \delta_{ij} \\ &= \sum_{k,l} B_{ik}^*(r\alpha) \langle \phi_{0,k}^\dagger e^{-2r\gamma_5 \alpha} \phi_{0,l} \rangle B_{jl}(r\alpha), \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

a qual, em notação matricial, pode ser expressa como

$$\mathbf{B}^* \mathbf{C} \mathbf{B}^T = \mathbf{1} = \mathbf{B} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^\dagger, \quad (2.4.31)$$

em que definimos a matriz \mathbf{C} com elementos

$$C_{kl} = \langle \phi_{0,k}^\dagger e^{-2r\gamma_5 \alpha} \phi_{0,l} \rangle. \quad (2.4.32)$$

Tomando o determinante de (2.4.31), encontramos

$$|\det \mathbf{B}|^2 = \frac{1}{\det \mathbf{C}} = N(r\alpha). \quad (2.4.33)$$

Se compararmos o resultado (2.4.33) com o obtido no apêndice A (equação (A.7)) comprovaremos a concordância das duas abordagens (com e sem ortonormalização das autofunções de D). De fato, os dois resultados coincidem, desde que se substitua ϕ_n em (A.2) por

$$e^{-r\gamma_5\alpha(x)}\phi_n, \quad (2.4.34)$$

e se restrinjam os ϕ_n aos modos zero. Voltando a (2.4.29),

$$\begin{aligned} G &= \exp \left(\int_0^1 \text{tr} \left[\sum_{i,k,l} B_{ik}^* \langle \phi_{0k}^\dagger | 2\gamma_5\alpha e^{-2r\alpha\gamma_5} | \phi_{0l} \rangle B_{il} \right] \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^1 dr \text{tr} \left[\mathbf{B} \frac{d}{dr} (\mathbf{C}^T) \mathbf{B}^\dagger \right] \right). \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

Usando (2.4.31), vem

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B})^{-1} \quad (2.4.36)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} G &= \exp \left[- \int_0^1 dr \left(\frac{d}{dr} \text{tr} \ln \mathbf{C}^T \right) \right] \\ &= \exp[-\text{tr} \ln \mathbf{C}^T] = \det(\mathbf{C}^T)^{-1} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

Substituindo, finalmente, (2.4.33) e (2.4.37) em (2.4.11) vemos que

$$J = \exp \left[-2 \int_0^1 dr \int dx \text{tr} (K_0(D_{r\alpha}; x, x) \gamma_5 \alpha(x)) \right], \quad (2.4.38)$$

mostrando, pois, que o jacobiano para rotações quirais finitas (que preservam a topologia) também coincide algebricamente em todos os setores.

Se considerarmos agora uma rotação quiral parametrizada por um parâmetro abeliano α , *independente de x* , obtemos instantaneamente o jacobiano de rotações quirais globais,

$$J = \exp \left[-2\alpha \int dx \operatorname{tr}(K_0(D; x, x)\gamma_5) \right], \quad (2.4.39)$$

pois, para rotações globais abelianas, $e^{\gamma_5 \alpha} D e^{\gamma_5 \alpha} = D$. Lembrando que $\operatorname{tr}(K_0 \gamma_5)$ representa a densidade de índice de Pontryagin, que satisfaz

$$\int dx \operatorname{tr}(K_0(D; x, x)\gamma_5) = n_+ - n_-, \quad (2.4.40)$$

temos a expressão para J :

$$J = \exp(-2\alpha(n_+ - n_-)), \quad (2.4.41)$$

em desacordo com expressões obtidas por alguns autores que não levaram as fontes externas em consideração [52] ou não observaram os modos zero [68]. A expressão (2.4.41) pode ser obtida também através de um cálculo explícito, sem fazer menção à função ζ , conforme mostrado no apêndice B.

Como um último teste de consistência de nossos resultados, vamos mostrar a concordância com a regularização do operador D (em relação aos modos zero) desde o princípio, através de uma massa ϵ tendendo a zero. Podemos assim inverter $D_\epsilon \equiv D + \epsilon$ através de $S_\epsilon(x, y)$ definido por

$$\begin{aligned} S_\epsilon(x, y) &= \sum_{n \neq 0} \frac{\phi_n(x)\phi_n^\dagger(y)}{\lambda_n + \epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{n_0} \phi_{0_i}(x)\phi_{0_i}^\dagger(y) \\ &= S'_\epsilon(x, y) + \frac{1}{\epsilon} P_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Assim,

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = e^{\langle \bar{\eta} S_\epsilon \eta \rangle} \det D_\epsilon. \quad (2.4.43)$$

Entretanto, sabemos que

$$\det D_\epsilon = \epsilon^{n_0} \det' D + O(\epsilon^{n_0+1}) \quad (2.4.44)$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \exp \langle \bar{\eta} S_\epsilon \eta \rangle &= \exp \langle \bar{\eta} S'_\epsilon \eta \rangle \exp \frac{1}{\epsilon} \langle \bar{\eta} P_0 \eta \rangle \\ &= \exp \langle \bar{\eta} S'_\epsilon \eta \rangle \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i} \right) \\ &= \exp \langle \bar{\eta} S'_\epsilon \eta \rangle \prod_{i=1}^{n_0} \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i} \right) \\ &= \exp \langle \bar{\eta} S'_\epsilon \eta \rangle \left[\frac{1}{\epsilon^{n_0}} \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i} + O\left(\frac{1}{\epsilon^{n_0-1}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

de modo que, tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ em Z ,

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \exp \langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i}, \quad (2.4.46)$$

Fazendo a rotação quirial, encontramos

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = J \exp \langle \bar{\eta} S_\epsilon \eta \rangle \det(e^{\gamma_5 \alpha} D_\epsilon e^{\gamma_5 \alpha}), \quad (2.4.47)$$

de modo que podemos definir o jacobiano como

$$J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det D_\epsilon}{\det(e^{\gamma_5 \alpha} D_\epsilon e^{\gamma_5 \alpha})}, \quad (2.4.48)$$

o qual, por sua vez, deve ser comparado com a razão de determinantes, estudada previamente,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(D + \epsilon)}{\det(e^{\gamma_5 \alpha} D e^{\gamma_5 \alpha} + \epsilon)}. \quad (2.4.49)$$

Enquanto que (2.4.49) envolve $K_{-1}(D; x, x)$ no seu cálculo, podemos ver, apenas seguindo os passos anteriormente expostos, que o cálculo de (2.4.48) envolverá apenas $K_0(D; x, x)$, fornecendo-nos um jacobiano em completa concordância com o calculado pelo método anterior.

Capítulo 3

O Modelo de Schwinger Quiral

3.1 $\text{Det}' D$ para $D^\dagger \neq D$

No capítulo anterior, vimos como utilizar a função ζ para calcular razões de determinantes de operadores hermitianos com o mesmo número de modos zero. Pretendemos agora apresentar uma prescrição para o cálculo dessas razões para o caso não hermitiano [69]. A prescrição será válida para qualquer dimensão, mas iremos aplicá-la especificamente à solução da eletrodinâmica quiral em duas dimensões (euclidianas), o *modelo de Schwinger quiral*. Motivaremos nossas definições a partir do caso hermitiano, onde mostraremos a equivalência de nosso formalismo ao aplicado no capítulo anterior, para o caso do modelo de Schwinger. Como já vimos, este é caracterizado pelo operador de Dirac

$$D = \gamma_\mu(i\partial_\mu + eA_\mu), \tag{3.1.1}$$

com A_μ tendo carga topológica N . Podemos considerar agora a família de operadores

$$D_\alpha = \gamma_\mu (i\partial_\mu + e(A_\mu^{(N)} + \alpha a_\mu)), \quad (3.1.2)$$

onde $A_\mu^{(N)}$ é uma configuração fixa, de carga N , a_μ tem carga zero e $0 \leq \alpha \leq 1$.

Utilizando a identidade

$$\det D = \exp \text{Tr} \ln D, \quad (3.1.3)$$

escrevemos, a partir da definição de $\det' D$, (2.3.22),

$$\det' D_\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^{|N|}} \exp \text{Tr} \ln (D_\alpha + \epsilon \mathbf{1}), \quad (3.1.4)$$

Derivando $\det' D_\alpha$ em relação a α , obtemos

$$\frac{d}{d\alpha} \det' D_\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\det(D_\alpha + \epsilon \mathbf{1})}{\epsilon^{|N|}} \text{Tr} \left[(D_\alpha + \epsilon \mathbf{1})^{-1} \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right], \quad (3.1.5)$$

O operador $D_\alpha + \epsilon \mathbf{1}$ não é singular e, portanto, sua inversa existe e possui decomposição espectral em termos das autofunções de D_α ,

$$\begin{aligned} (D_\alpha + \epsilon \mathbf{1})^{-1}(x, y) &= \sum_{\lambda_n^\alpha \neq 0} \frac{\varphi_n^\alpha(x) \varphi_n^{\alpha\dagger}(y)}{\lambda_n^\alpha + \epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{0_i}^\alpha(x) \varphi_{0_i}^{\alpha\dagger}(y) \\ &\equiv S_\epsilon^\alpha(x, y) + \frac{1}{\epsilon} P_0^\alpha(x, y). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

S_ϵ^α é regular no limite $\epsilon \rightarrow 0$ e tende para a “quase inversa” de D_α , S^α . Substituindo

(3.1.6) em (3.1.5),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \det' D_\alpha &= \det' D_\alpha \text{Tr} \left[S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(D_\alpha + \epsilon \mathbf{1})}{\epsilon^{|N|+1}} \text{Tr} \left[P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Usando a forma explícita de D_α , podemos escrever

$$\text{Tr} \left[P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] = e \sum_i \int d^2x \varphi_{0,i}^{\alpha'} \gamma_\mu a_\mu \varphi_{0,i}^\alpha, \quad (3.1.8)$$

e, lembrando que os modos zero são quirais, pois D_α anticomuta com γ_5 ,

$$\varphi_{0,i}^{\alpha'} \gamma_\mu \varphi_{0,i}^\alpha = \varphi_{0,i}^{\alpha'} P_\pm \gamma_\mu P_\pm \varphi_{0,i}^\alpha = \varphi_{0,i}^{\alpha'} P_\pm P_\mp \gamma_\mu \varphi_{0,i}^\alpha = 0. \quad (3.1.9)$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \det' D_\alpha = \text{Tr} \left[S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right]. \quad (3.1.10)$$

Definindo $D = D_{\alpha=1}$ e $D^{(N)} = D_{\alpha=0}$, vemos que

$$\frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} = \exp \left\{ \int_0^1 d\alpha \text{Tr} \left[S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \right\}. \quad (3.1.11)$$

O método empregado aqui é ligeiramente diferente do que foi utilizado na Seção 1.1. Lá, usamos como parâmetro de integração as cargas g_+ e g_- , diretamente. Em setores topologicamente não triviais, não podemos fazer o mesmo, pois isto implicaria o cálculo da razão $\det' D / \det i\gamma_\mu \partial_\mu$, que não é no que estamos interessados, pois faremos rotações quirais que não mudarão o setor topológico. Além disto, não é difícil ver, levando a conta um pouco mais adiante, que encontramos singularidades. Por outro lado, a inclusão do parâmetro α , como em (3.1.2), assegura que, dentro do intervalo no qual ele varia, não estamos considerando campos com carga topológica diferente da de $D_{\alpha=1}$.

Notemos agora que, embora D_α seja singular, ele possui uma função de Green que pode ser calculada exatamente em duas dimensões, conforme mostrado na Seção 1.1 para o modelo de Schwinger generalizado. A diferença, em relação ao setor topológico trivial, é que esta função de Green não possui decomposição espectral em termos das

autofunções de D_α e, então, não pode ser vista como uma distribuição sobre a esfera S^2 [11]. Ela pode ser usada, no entanto, na construção de S^α ,

$$\begin{aligned} S^\alpha(x, y) &= G^\alpha(x, y) - \int d^2z G^\alpha(x, z) P_0^\alpha(z, y) \\ &\quad - \int d^2z P_0^\alpha(x, z) G^\alpha(z, y), \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

onde

$$D_\alpha G^\alpha(x, y) = \delta(x, y) = G^\alpha(x, y) D_\alpha. \quad (3.1.13)$$

Assim, $S^\alpha(x, y)$ satisfaz a equação requerida para a quase inversa,

$$D_\alpha S^\alpha(x, y) = \delta(x - y) - P_0^\alpha(x, y) = S^\alpha(x, y) D_\alpha, \quad (3.1.14)$$

permitindo que reescrevamos (3.1.10) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \ln \det' D_\alpha &= \text{Tr} \left[G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] - \text{Tr} \left[G^\alpha P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \\ &\quad - \text{Tr} \left[P_0^\alpha G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

O primeiro termo do lado direito coincide algebricamente com o que seria obtido na ausência de modos zero. Particularizando as expressões da Seção 1.1 para $e_R = e_L = e$, obtemos

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \left[G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \\ &= -\frac{\alpha e^2}{2\pi} \int d^2x \left[a_\mu \left(a_+(N) \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu - \tilde{\partial}_\mu \tilde{\partial}_\nu}{\square} \right) a_\nu \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2\pi} \int d^2x \left[A_\mu^{(N)} \left(a_+(N) \delta_{\mu\nu} - i a_-(N) \varepsilon_{\mu\nu} - \frac{\tilde{\partial}_\mu \partial_\nu - \partial_\mu \tilde{\partial}_\nu}{\square} \right) a_\nu \right] \\ &\equiv -2\alpha \Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu]. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

No resultado acima aparecem parâmetros arbitrários $a_+(N)$ e $a_-(N)$, que podem, em princípio, ser diferentes para valores diferentes de N . Embora o aparecimento de a_+ seja comum, o mesmo não pode ser dito de a_- . Ambos advem da liberdade de regularização da teoria, mas a_- comparece devido ao fato de termos permitido regularizações diferentes para os acoplamentos à direita e à esquerda (em outras palavras, por termos “mergulhado” o modelo de Schwinger no modelo generalizado) como pode ser visto das equações (1.1.61-1.1.62).

Vamos considerar agora os termos envolvendo P_0^α . Para isso, observamos que

$$\begin{aligned}
 P_0^\alpha(x, y) &= \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{0_i}^\alpha(x) \varphi_{0_i}^{\alpha\dagger}(y) \\
 &= \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{\alpha_i}^\pm(x) \varphi_{\alpha_i}^{\pm*}(y) \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) \end{cases} \\
 &= P_\pm \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{\alpha_i}^\pm(x) \varphi_{\alpha_i}^{\pm*}(y), \tag{3.1.17}
 \end{aligned}$$

com $\varphi_{0_i}^\alpha \equiv \varphi_{\alpha_i}^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para $N > 0$, e $\varphi_{0_i}^\alpha \equiv \varphi_{\alpha_i}^- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, para $N < 0$, sendo o conjunto ortonormal de modos zero de D_α . Daí, vem

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left[G^\alpha P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] &= e \int d^2x \, d^2y \, \text{tr} [G^\alpha(x, y) P_\pm \gamma_\mu] \\
 &\quad \times a_\mu(x) \sum_i \varphi_{\alpha_i}^\pm(x) \varphi_{\alpha_i}^{\pm*}(y). \tag{3.1.18}
 \end{aligned}$$

Usando as decomposições

$$A_\mu^{(N)} = -\tilde{\partial}_\mu f, \tag{3.1.19}$$

$$a_\mu = \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi, \tag{3.1.20}$$

obtemos

$$G^\alpha(x, y) = \left(e^{h_+(x)-h_+(y)} P_+ + e^{-(h_-(x)-h_-(y))} P_- \right) G_F(x - y), \quad (3.1.21)$$

onde

$$h_\pm(x) = f(x) + \alpha(\phi(x) \pm i\rho(x)). \quad (3.1.22)$$

Fazendo uso das equações que definem os modos zero,

$$[\partial_z - \partial_{\bar{z}}(f + \alpha(\phi - i\rho))] \varphi_{\alpha_i}^{+\ast} = 0, \quad (3.1.23)$$

$$[\partial_{\bar{z}} + \partial_z(f + \alpha(\phi + i\rho))] \varphi_{\alpha_i}^{-\ast} = 0, \quad (3.1.24)$$

obtemos, após uma integração por partes,

$$\text{Tr} \left[G^\alpha P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] = \sum_i \langle \varphi_{0_i}^{\alpha \dagger} (i\rho - \phi\gamma_5) \varphi_{0_i}^\alpha \rangle, \quad (3.1.25)$$

onde $\langle \rangle$ denota integração sobre as variáveis do espaço-tempo. Devido à propriedade

$$\text{Tr} \left[G^\alpha P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] = \left\{ \text{Tr} \left[P_0^\alpha G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \right\}^*, \quad (3.1.26)$$

obtemos

$$\frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} = e^{-\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu]} e^{\sum_i \int_0^1 d\alpha \langle \varphi_{0_i}^{\alpha \dagger} 2\phi\gamma_5 \varphi_{0_i}^\alpha \rangle}. \quad (3.1.27)$$

Expressando os modos zero de D_α em termos dos de $D^{(N)}$,

$$\varphi_{0_i}^\alpha = e^{\alpha(i\rho + \phi\gamma_5)} \sum_{j=1}^N D_{ij} \varphi_{0_j}^{(N)}, \quad (3.1.28)$$

onde os D_{ij} são introduzidos para garantir a ortonormalidade dos $\varphi_{0_i}^\alpha$, quando expressos em termos dos $\varphi_{0_i}^{(N)}$, notamos que

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \varphi_{0_i}^{\alpha \dagger} 2\phi\gamma_5 \varphi_{0_i}^\alpha \rangle &= \sum_i D_{ij}^* \langle \varphi_{0_j}^{(N)\dagger} 2\phi\gamma_5 e^{2\alpha\phi\gamma_5} \varphi_{0_k}^{(N)} \rangle D_{ik} \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{D}^* \frac{d}{d\alpha} | \langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{2\alpha\phi\gamma_5} \varphi_{0_j}^{(N)} \rangle | \mathbf{D}^T \right]. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Do mesmo modo que a matriz \mathbf{B} definida em (2.4.30), a matriz \mathbf{D} também satisfaz à relação

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D}^* = |\langle \varphi_{0,i}^{(N)\dagger} e^{2\alpha\phi\gamma_5} \varphi_{0,j}^{(N)} \rangle|^{-1}, \quad (3.1.30)$$

de modo que

$$\sum_i \langle \varphi_{0,i}^{\alpha\dagger} 2\phi\gamma_5 \varphi_{0,i}^\alpha \rangle = \frac{d}{d\alpha} \left[\text{tr} \ln |\langle \varphi_{0,i}^{(N)\dagger} e^{2\alpha\phi\gamma_5} \varphi_{0,i}^{(N)} \rangle| \right], \quad (3.1.31)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} &= e^{-\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu]} \det |\langle \varphi_{0,i}^{(N)\dagger} e^{2\phi\gamma_5} \varphi_{0,i}^{(N)} \rangle| \\ &= e^{-\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu]} \det |\langle \varphi_{0,i}^\dagger e^{-2\phi\gamma_5} \varphi_{0,i} \rangle|^{-1}, \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

onde a última equação foi conseguida expressando $\varphi_{0,i}^{(N)}$ em termos de $\varphi_{0,i}$. O resultado é idêntico ao obtido via função ζ , para $a_+(N) = 1$, $a_-(N) = 0$, para todo N .

Passemos agora a considerar o caso do modelo de Schwinger quirial, cujo operador de Dirac é

$$D = \gamma_\mu (i\partial_\mu + e_R A_\mu P_+). \quad (3.1.33)$$

Precisamos, antes de mais nada, mapear a estrutura dos modos zero de D , na presença de carga topológica. Em termos matriciais,

$$D\Phi_0 = 2 \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z \\ \partial_{\bar{z}} - ie_R \bar{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_R \\ \Phi_L \end{pmatrix} = 0, \quad (3.1.34)$$

onde $\bar{A} = \frac{1}{2}(A_1 + iA_0)$. Substituindo a estrutura de A_μ em termos dos campos escalares, obtemos o conjunto de equações

$$\partial_z \Phi_L = 0, \quad (3.1.35)$$

$$(\partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}(f + \phi + i\rho)) \Phi_R = 0. \quad (3.1.36)$$

Se $N > 0$, vemos que não há solução normalizável para (3.1.35) enquanto que, para (3.1.36), temos precisamente N , dadas por

$$\Phi_{0i} = z^{i-1} e^{f+\phi+i\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1.37)$$

Para $N < 0$ não há solução para (3.1.34). Não é difícil ver que para o operador adjunto ocorre exatamente o contrário, ou seja, a equação

$$D^\dagger \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z + ie_{RA} \\ \partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{0R} \\ \chi_{0L} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.1.38)$$

não tem soluções normalizáveis para $N > 0$, enquanto que, para $N < 0$, há exatamente $|N|$,

$$\chi_{0i} = \bar{z}^{i-1} e^{-(f+\phi-i\rho)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, |N|. \quad (3.1.39)$$

Esta assimetria nos modos zero impede que utilizemos a definição de $\det' D$ como no caso anterior, pois precisaríamos da distribuição $(D_\alpha + \epsilon 1)^{-1}$ com a parte singular em ϵ explicitamente separada, como no caso hermitiano. Vamos ver melhor o porquê disto, considerando a quase inversa de D . Como D não é hermitiano, não podemos garantir a existência de um conjunto completo de funções ortonormais para ele, em termos dos quais poderíamos contruir a quase inversa. Para obter esse conjunto, usamos os *laplacianos* construídos a partir de D [70],

$$D^\dagger D \varphi_n = \lambda_n^2 \varphi_n, \quad D^\dagger D \varphi_{0i} = 0, \quad (3.1.40)$$

$$D D^\dagger \phi_n = \lambda_n^2 \phi_n, \quad D D^\dagger \phi_{0i} = 0. \quad (3.1.41)$$

Os conjuntos $\{\varphi_n\}$ e $\{\phi_n\}$ são ortonormais e completos, pois os laplacianos são hermi-

tianos e, além disso,

$$D\varphi_n = \lambda_n\phi_n, \quad (3.1.42)$$

$$D^\dagger\phi_n = \lambda_n\varphi_n. \quad (3.1.43)$$

Não é difícil ver que $\ker D^\dagger D = \ker D$ e $\ker DD^\dagger = \ker D^\dagger$. Com estes conjuntos de autofunções, podemos definir

$$S(x, y) = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{\varphi_n(x)\phi_n^\dagger(y)}{\lambda_n}, \quad (3.1.44)$$

que satisfaz, para $N > 0$,

$$DS(x, y) = \delta(x - y), \quad S(x, y)D = \delta(x - y) - P_0(x, y), \quad (3.1.45)$$

e, para $N < 0$,

$$DS(x, y) = \delta(x - y) - \bar{P}_0(x, y), \quad S(x, y)D = \delta(x - y), \quad (3.1.46)$$

com

$$P_0(x, y) = \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{0_i}(x)\varphi_{0_i}^\dagger(y), \quad (3.1.47)$$

$$\bar{P}_0(x, y) = \sum_{i=1}^{|N|} \phi_{0_i}(x)\phi_{0_i}^\dagger(y). \quad (3.1.48)$$

Porém, vemos que não há como construir $S_\epsilon(x, y)$ que inverta $D + \epsilon\mathbf{1}$, a partir da base (3.1.40-3.1.41), pois os modos zero não obedecem às propriedades (3.1.42) e (3.1.43) e, então, não há como formar um escalar a partir deles (um operador de projeção, como no caso hermitiano). Falando um pouco mais fisicamente, adicionar $\epsilon\mathbf{1}$ ao operador de Dirac é o mesmo que adicionar uma massa aos férmions, o que mistura as componentes

esquerdas e direitas dos mesmos. Isto faz com que os férmions esquerdos, que estão livres e são considerados apenas para que D tenha um problema de autovalores bem definido, passem a interagir também, modificando o problema original, que consistia na interação de apenas férmions direitos com o campo de gauge. Esta característica torna inviável a utilização desta definição de $\det' D$.

Nada nos impede, contudo, de definir $\det' D$ como solução da equação diferencial

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \det' D_\alpha = \text{Tr} \left[S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right], \quad (3.1.49)$$

com S^α construído a partir dos laplacianos $D_\alpha^\dagger D_\alpha$ e $D_\alpha D_\alpha^\dagger$, como em (3.1.44), e D_α sendo

$$D_\alpha = \gamma_\mu (i\partial_\mu + e_R(A_\mu^{(N)} + \alpha a_\mu)P_+). \quad (3.1.50)$$

Na medida em que controlemos as divergências ultravioletas, (3.1.49) é completamente bem definida e natural, por ter como caso particulares tanto a situação não singular (vide Seção 1.1, onde a prescrição para o cálculo de $\det D$ não é afetada pela hermiticidade ou não de D), quanto o caso hermitiano. Usando a função de Green (sem decomposição espectral)

$$G^\alpha(x, y) = (e^{h_+(x)-h_+(y)}P_+ + P_-)G_F(x - y), \quad (3.1.51)$$

com

$$h_+(x) = f(x) + \alpha(\phi(x) + i\rho(x)), \quad (3.1.52)$$

que satisfaz

$$D_\alpha G^\alpha(x, y) = G^\alpha(x, y)D_\alpha = \delta(x - y), \quad (3.1.53)$$

construímos uma expressão explícita para S^α ,

$$S^\alpha(x, y) = G^\alpha(x, y) - \theta(N) \int d^2z P_0^\alpha(x, z) G^\alpha(z, y) - \theta(-N) \int d^2z G^\alpha(x, z) \bar{P}_0^\alpha(z, y). \quad (3.1.54)$$

Através das equações dos modos zero,

$$[\partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}(f + \alpha(\phi + i\rho))] \varphi_i^\alpha = 0, \quad (3.1.55)$$

$$[\partial_z + \partial_z(f + \alpha(\phi - i\rho))] \phi_i^\alpha = 0, \quad (3.1.56)$$

em que

$$\varphi_{0,i}^\alpha \equiv \varphi_i^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.57)$$

$$\phi_{0,i}^\alpha \equiv \phi_i^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.58)$$

e, do método do Capítulo 1 para regularizar as divergências ultravioletas, encontramos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] &= -2\alpha \Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] \\ &\quad + \theta(N) \sum_{i=1}^{|N|} \langle \varphi_{0,i}^{\alpha \dagger} (\phi + i\rho) \varphi_{0,i}^\alpha \rangle \\ &\quad - \theta(-N) \sum_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0,i}^{\alpha \dagger} (\phi + i\rho) \phi_{0,i}^\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

onde

$$\Gamma[a_\mu] = \frac{e_R^2}{8\pi} \int d^2x a_\mu \left[a_R(N) \delta_{\mu\nu} - (\partial_\mu + i\tilde{\partial}_\mu) \frac{1}{\square} (\partial_\nu + i\tilde{\partial}_\nu) \right] a_\nu, \quad (3.1.60)$$

e

$$\bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] = \frac{e_R^2}{4\pi} \int d^2x A_\mu^{(N)} \left[a_R(N) (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) - (\partial_\mu + i\tilde{\partial}_\mu) \frac{1}{\square} (\partial_\nu + i\tilde{\partial}_\nu) \right] a_\nu, \quad (3.1.61)$$

onde $a_R(N)$ é o parâmetro arbitrário que expressa a ambigüidade de regularização do modelo de Schwinger quiral, introduzido na Seção 1.1. Expressando $\varphi_{0_i}^\alpha$ em termos de $\varphi_{0_i}^{(N)}$ e $\phi_{0_i}^\alpha$ em termos de $\phi_{0_i}^{(N)}$, como no caso hermitiano, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} &= e^{-\Gamma[a_\mu] - \Gamma[A_\mu^{(N)}, a_\mu]} \left[\det \left(\langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{2\phi P_+} \varphi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{\theta(N)/2} \\ &\times \left[\det \left(\langle \phi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{-2\phi P_-} \phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{\theta(-N)/2} \\ &\times \exp \left[i\theta(N) \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \varphi_{0_i}^{\alpha\dagger} \rho \varphi_{0_i}^\alpha \rangle \right] \\ &\times \exp \left[-i\theta(-N) \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^{\alpha\dagger} \rho \phi_{0_i}^\alpha \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

Notamos a presença de termos envolvendo a parte longitudinal ρ de a_μ , em conexão com os modos zero de D_α e D_α^\dagger . Eles eram cancelados no modelo de Schwinger em função da ocorrência apenas de $\text{Re} \left[\text{Tr} \left(G^\alpha P_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right) \right]$ (vide as equações (3.1.15) e (3.1.26)), o que não é o caso aqui, devido à assimetria entre os modos zero de D e D^\dagger .

3.2 Jacobiano e ambigüidades de fase

Tendo calculado a razão de determinantes (3.1.62), podemos passar ao cálculo do funcional gerador, através da técnica da bosonização, como exposta no Capítulo 1. Princípios com o funcional gerador

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - (\bar{\psi} D \psi) + (J_\mu A_\mu) + (\bar{\eta} \psi) + (\bar{\psi} \eta)}, \quad (3.2.1)$$

onde fizemos a translação

$$A_\mu = A_\mu^{(N)} + a_\mu, \quad (3.2.2)$$

o que faz com que a integração sobre os campos de gauge possa ser considerada sob condições de fronteira triviais. Lembramos que a classificação dos campos de gauge em setores homotopicamente não equivalentes permite a expressão da integração funcional sobre A_μ como uma soma de integrações sobre campos de carga topológica definida. Como no Capítulo 2, fazemos a translação nos férmions

$$\psi(x) = \psi'(x) + \int d^2y S(x, y)\eta(y), \quad (3.2.3)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x) + \int d^2y \bar{\eta}(y)S(y, x), \quad (3.2.4)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = & \sum_N \int \mathcal{D}a_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{4}\langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle - \langle \bar{\psi} D \psi \rangle + \langle J_\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta} S \eta \rangle} \\ & \times e^{\theta(N)\langle \bar{\eta} P_0 \psi \rangle + \theta(-N)\langle \bar{\psi} \bar{P}_0 \eta \rangle}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Usamos agora a base (3.1.40-3.1.41) para calcular a parte fermiônica da integral funcional. Isto implica introduzirmos as expansões

$$\psi = \sum_{\lambda_n \neq 0} a_n \varphi_n + \sum_{i=1}^N a_{0i} \varphi_{0i}, \quad (3.2.6)$$

$$\bar{\psi} = \sum_n a_n \phi_n^\dagger, \quad (3.2.7)$$

para $N > 0$ e

$$\psi = \sum_n a_n \varphi_n, \quad (3.2.8)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{\lambda_n \neq 0} \bar{a}_n \phi_n^\dagger + \sum_{i=1}^{|N|} \bar{a}_{0i} \phi_{0i}^\dagger, \quad (3.2.9)$$

para $N < 0$. Estas são transformações biunitárias [70] e, como conseqüência, um jacobiano aparece na expressão da medida,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi &\equiv \prod_x d\bar{\psi}(x)d\psi(x) \\ &= \det[\varphi_n(x)]^{-1} \det[\phi_n^\dagger(x)]^{-1} \\ &\quad \times \prod_x d\bar{a}_n da_n \left(\prod_i d\bar{a}_{0i} \right)^{\theta(-N)} \left(\prod_i da_{0i} \right)^{\theta(N)}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

onde $\varphi_n(x)$, $\phi_n(x)$ podem ser vistos como elementos de matriz que indicam a mudança de base $|x\rangle$ para as bases $|\varphi_n\rangle$, $|\phi_n\rangle$. Os determinantes acima são responsáveis pela fase do determinante fermiônico, que surgirá em decorrência da integração sobre os férmions. Após a integração sobre os graus de liberdade fermiônicos, ficamos com

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \sum_N \int \mathcal{D}a_\mu e^{-\frac{i}{4}\langle F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \rangle + \langle J_\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta} S \eta \rangle} \det' D \\ &\quad \times \left[\prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta} \varphi_{0i} \rangle (-1)^N \right]^{\theta(N)} \left[\prod_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0i}^\dagger \eta \rangle \right]^{\theta(-N)}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

onde, como dissemos,

$$\det' D = \det[\varphi_n(x)]^{-1} \left(\prod_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n \right) \det[\phi_n^\dagger(x)]^{-1}. \quad (3.2.12)$$

Podemos bosonizar a teoria dentro de cada setor topológico através das transformações de gauge

$$\psi = e^{(\phi+i\rho)P_+} \psi' \quad (3.2.13)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{-(\phi+i\rho)P_-}, \quad (3.2.14)$$

que levam D em $D^{(N)}$, pois

$$D^{(N)} = e^{-(\phi+i\rho)P_-} D e^{(\phi+i\rho)P_+}. \quad (3.2.15)$$

Para o cálculo do jacobiano basta considerar a parte fermiônica do funcional gerador.

Assim, após as transformações (3.2.13-3.2.14), temos

$$J[A_\mu^{(N)}, a_\mu] Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}] \equiv J[A_\mu^{(N)}, a_\mu] \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[-\langle \bar{\psi} D^{(N)} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta' \rangle + \langle \bar{\eta}' \psi \rangle \right], \quad (3.2.16)$$

onde J é o jacobiano, $\eta' = e^{-(\phi+i\rho)P_-} \eta$, $\bar{\eta}' = \bar{\eta} e^{(\phi+i\rho)P_+}$. Fazendo a integração, após o uso das bases correspondentes a $D^{(N)}$,

$$Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}] = e^{\langle \bar{\eta}' S^{(N)} \eta' \rangle} \det' D^{(N)} \left[\prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0_i}^{(N)} \rangle (-1)^N \right]^{\theta(N)} \left[\prod_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^{(N)} \eta' \rangle \right]^{\theta(-N)}. \quad (3.2.17)$$

Com o mesmo argumento do Capítulo 2, podemos substituir $\langle \bar{\eta}' S^{(N)} \eta' \rangle$ por $\langle \bar{\eta} S \eta \rangle$ em (3.2.17). Expressando os modos zero de D em termos dos de $D^{(N)}$ em (3.2.11), como na expressão análoga para o caso hermitiano, (2.4.27), obtemos, como antes, as expressões

$$\prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0_i} \rangle = \prod_{i=1}^{|N|} \left(\sum_j B_{ij} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) = \det B \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0_i}^{(N)} \rangle, \quad (3.2.18)$$

$$\prod_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^\dagger \eta \rangle = \det C^* \prod_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle, \quad (3.2.19)$$

onde

$$|\det B|^2 = \left[\det \left(\langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{2\phi P_+} \varphi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{-1}, \quad (3.2.20)$$

$$|\det C|^2 = \left[\det \left(\langle \phi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{-2\phi P_-} \phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{-1}. \quad (3.2.21)$$

Vemos aqui outra diferença importante em relação ao caso hermitiano. Enquanto lá precisávamos apenas do módulo do determinante dos coeficientes de ortonormalização (completamente fixo em função dos modos zero e da transformação quiral), aqui as

fases destes determinantes também são requeridas. Não há critérios, intrínsecos ao procedimento de ortonormalização, para fixar estas fases. Assim, o jacobiano torna-se

$$J[A_\mu^{(N)}, a_\mu] = \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} \left[e^{i\gamma_+(N)} \det \left(\langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{2\phi_{P_+}} \varphi_{0_j}^{(N)} \rangle \right)^{-1/2} \right]^{\theta(N)} \\ \times \left[e^{i\gamma_-(N)} \det \left(\langle \phi_{0_i}^{(N)\dagger} e^{-2\phi_{P_-}} \phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right)^{-1/2} \right]^{\theta(-N)}. \quad (3.2.22)$$

Juntando com o resultado da seção anterior, para a razão $\det' D / \det' D^{(N)}$,

$$J[A_\mu^{(N)}, a_\mu] = e^{-\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu]} \\ \times \exp \left\{ i\theta(N) \left[\gamma_+(N) + \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \varphi_{0_i}^{\alpha\dagger} \rho \varphi_{0_i}^\alpha \rangle \right] \right\} \\ \times \exp \left\{ i\theta(-N) \left[\gamma_-(N) - \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^{\alpha\dagger} \rho \phi_{0_i}^\alpha \rangle \right] \right\}. \quad (3.2.23)$$

Definindo \bar{S}_{eff} como

$$\bar{S}_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle - \ln J[A_\mu^{(N)}, a_\mu], \quad (3.2.24)$$

obtemos, para o funcional gerador,

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \sum_N \int \mathcal{D}a_\mu e^{-\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + (J_\mu A_\mu) + (\bar{\eta}' S^{(N)} \eta')} \det' D^{(N)} \\ \times \left[\det \left(\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right)^{-1/2} \prod_{i=1}^{|N|} (\bar{\eta}' \Phi_{0_i}^{(N)}) (-1)^N \right]^{\theta(N)} \\ \times \left[\det \left(\langle \chi_{0_i}^{(N)\dagger} \chi_{0_j}^{(N)} \rangle \right)^{-1/2} \prod_{i=1}^{|N|} \langle \chi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle \right]^{\theta(-N)} \\ \equiv \sum_N \int \mathcal{D}a_\mu e^{-\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + (J_\mu A_\mu)} Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}], \quad (3.2.25)$$

onde expressamos os modos zero ortonormais $\varphi_{0_i}^{(N)}$ e $\phi_{0_i}^{(N)}$ em termos dos não ortonormais Φ_{0_i} , χ_{0_i} , dados por (3.1.37) e (3.1.39), respectivamente.

Para dar por encerrada a integração sobre os férmions, resta calcular $\det' D^{(N)}$, o que será feito mais adiante. Antes, vamos verificar a invariância do funcional gerador frente a mudanças da configuração fixa $A_\mu^{(N)}$ para $A_\mu^{(N)} + \delta a_\mu$, dentro do mesmo setor topológico. No modelo de Schwinger (vide apêndice D), este critério mostrou ser capaz de fornecer informação sobre a ambigüidade de regularização da teoria, restringindo o parâmetro $a_-(N)$ a ser nulo, em compatibilidade com a invariância de gauge quântica do modelo. Aqui, como no caso hermitiano, a discussão é expressa matematicamente na verificação de

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0. \quad (3.2.26)$$

No procedimento de derivação funcional, salientamos as partes menos imediatas: a primeira delas é o cálculo de

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det |\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle| \equiv \frac{\delta}{\delta f(x)} \det \mathbf{A}, \quad (3.2.27)$$

e

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det |\langle \chi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle|. \quad (3.2.28)$$

Usando

$$\det \mathbf{A} = \exp \operatorname{tr} \ln \mathbf{A}, \quad (3.2.29)$$

obtemos

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta f(x)} \right). \quad (3.2.30)$$

Para \mathbf{A} dado em (3.2.27), usando a forma explícita dos Φ_{0_i} , vem

$$\frac{\delta A_{ij}}{\delta f(x)} = 2 \Phi_{0_i}^{(N)\dagger}(x) \Phi_{0_j}^{(N)}(x). \quad (3.2.31)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} P_0^{(N)}(x, y) &\equiv \sum_i \varphi_{0_i}^{(N)}(x) \varphi_{0_i}^{(N)\dagger}(y) \\ &= \sum_{j,k} |\langle \Phi_{0_j}^{(N)\dagger} \Phi_{0_k}^{(N)} \rangle|^{-1} \Phi_{0_k}^{(N)}(x) \Phi_{0_j}^{(N)\dagger}(y), \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

chegamos a

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det |\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle| = 2 \det |\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle| \text{tr} (P_0(x, x)), \quad (3.2.33)$$

e, analogamente,

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det |\langle \chi_{0_i}^{(N)\dagger} \chi_{0_j}^{(N)} \rangle| = -2 \det |\langle \chi_{0_i}^{(N)\dagger} \chi_{0_j}^{(N)} \rangle| \text{tr} (\bar{P}_0(x, x)). \quad (3.2.34)$$

A segunda é

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det' D^{(N)}. \quad (3.2.35)$$

Para tal, usamos o resultado (3.1.59) com $\rho = 0$ e $\phi = \delta f$, infinitesimal, o que nos dá

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det' D^{(N)}[f + \delta f]}{\det' D^{(N)}[f]} &= -\Gamma[a_\mu = -\tilde{\delta}_\mu \delta f] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu = -\tilde{\delta}_\mu \delta f] \\ &\quad + \theta(N) \int_0^1 d\alpha \sum_i \langle \varphi_{0_i}^{\alpha\dagger} \delta f \varphi_{0_i}^\alpha \rangle + \\ &\quad - \theta(-N) \int_0^1 d\alpha \sum_i \langle \phi_{0_i}^{\alpha\dagger} \delta f \phi_{0_i}^\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Expressando os $\varphi_{0_i}^\alpha$ em termos dos $\Phi_{0_i}^{(N)}$ e os $\phi_{0_i}^\alpha$ em termos dos $\chi_{0_i}^{(N)}$, usando relações análogas a (3.2.32), expandindo em potências de δf , tomando $\delta f = \epsilon \delta(x - x')$, dividindo por ϵ e tomando o limite em que ϵ vai a zero, ficamos com

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det' D^{(N)} = \det' D^{(N)} \left\{ \frac{1}{4\pi} (a_R(N) + 1) \square f(x) + \theta(N) \text{tr} (P_0(x, x)) - \theta(-N) \text{tr} (\bar{P}_0(x, x)) \right\}. \quad (3.2.37)$$

Desta forma, calculamos a derivada funcional de Z em relação a f e tentamos relacionar com a derivada funcional do integrando em relação a ϕ , obtendo

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta f(x)} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \\
&= \sum_N \left\{ \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left[e^{-\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + (J_\mu A_\mu)} Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}] \right] \right. \\
&\quad - \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi e^{-\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + (J_\mu A_\mu)} Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}] \\
&\quad \times \left[i\theta(N) \left(\frac{\delta}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta}{\delta f(x)} \right) \left(\gamma_+(N) + \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \varphi_{0_i}^\alpha \dagger \rho \varphi_{0_i}^\alpha \rangle \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + i\theta(-N) \left(\frac{\delta}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta}{\delta f(x)} \right) \left(\gamma_-(N) - \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^\alpha \dagger \rho \phi_{0_i}^\alpha \rangle \right) - \frac{a_R}{4\pi} \square \rho(x) \right] \right\}. \tag{3.2.38}
\end{aligned}$$

A primeira integral funcional é nula, por ser a integral funcional de uma derivada funcional (vide apêndice D, onde o mesmo acontece para o modelo de Schwinger). Para que o restante da expressão (3.2.38) se anule, fixamos as fases γ_+ e γ_- , escolhendo-as como

$$\gamma_+ = - \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \varphi_{0_i}^\alpha \dagger \rho \varphi_{0_i}^\alpha \rangle + \frac{a_R}{8\pi} \langle (\phi - f) \square \rho \rangle - \frac{\nu}{8\pi} \langle (\phi + f) \square \rho \rangle, \tag{3.2.39}$$

$$\gamma_- = \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^{|N|} \langle \phi_{0_i}^\alpha \dagger \rho \phi_{0_i}^\alpha \rangle + \frac{a_R}{8\pi} \langle (\phi - f) \square \rho \rangle - \frac{\nu}{8\pi} \langle (\phi + f) \square \rho \rangle. \tag{3.2.40}$$

O último termo em ambas as equações é aniquilado por $\frac{\delta}{\delta \phi} - \frac{\delta}{\delta f}$, e é o único objeto com as dimensões apropriadas que pode ser adicionado à ação efetiva sem provocar massa imaginária. Ele representa uma ambigüidade de fase residual, parametrizada por ν .

Usando (3.2.33), (3.2.34) e (3.2.37), podemos calcular o determinante de $D^{(N)}$ facil-

mente, obtendo

$$\begin{aligned} \det' D^{(N)} &= e^{(a_R(N)+1)\langle f \square f \rangle / 8\pi} \\ &\times \left[\det \left(\langle (\Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)}) \rangle \right)^{1/2} \right]^{\theta(N)} \\ &\times \left[\det \left(\langle (\chi_{0_i}^{(N)\dagger} \chi_{0_j}^{(N)}) \rangle \right)^{1/2} \right]^{\theta(-N)}, \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

o que nos dá, enfim, a expressão para o funcional gerador

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \sum_N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\rho e^{-S_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + \langle J_\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta}' S^{(N)} \eta' \rangle} \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0_i}^{(N)} \rangle (-1)^N \right)^{\theta(N)} \left(\prod_{i=1}^{|N|} \langle \chi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle \right)^{\theta(-N)}, \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

com

$$S_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] = \bar{S}_{\text{eff}} - \frac{1}{8\pi} (a_R(N) + 1) \langle f \square f \rangle. \quad (3.2.43)$$

Com isto, completamos o cálculo do funcional gerador, ou seja, a obtenção de uma expressão que nos permita o cálculo de quaisquer funções de correlação que desejemos, em forma fechada. Faremos uso extensivo de (3.2.42) na próxima seção, onde obteremos também novos critérios para fixar as ambigüidades residuais de Z em setores não triviais.

3.3 Funções de correlação e ambigüidades residuais

Vamos considerar, nesta seção, apenas as contribuições dos setores topológicos não triviais para as funções de correlação. Como o funcional gerador é proporcional às fontes fermiônicas, é imediato ver que não haverá contribuições às funções de correlação puramente bosônicas. Também não é difícil notar que todas as funções de correlação

do tipo

$$\langle \bar{\psi}(x_1)\Gamma_1\psi(x_1)\cdots\bar{\psi}(x_N)\Gamma_N\psi(x_N) \rangle, \quad (3.3.1)$$

onde Γ_n representa qualquer matriz de Dirac ou produto delas, se anula devido à impossibilidade de parear o número adequado de derivadas funcionais de η e $\bar{\eta}$ sobre o funcional gerador para produzir um resultado não nulo quando $\eta, \bar{\eta} \rightarrow 0$. Os objetos que restam para ser considerados são

$$\begin{aligned} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) &= \langle \psi(x_N)\psi(x_{N-1})\cdots\psi(x_1) \rangle \\ &= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_N)} \cdots \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} Z[0, \eta, \bar{\eta}] \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + \sum_i (\phi(x_i) + i\rho(x_i))} \\ &\quad \times \det \begin{vmatrix} \Phi_{0_1}^{(N)}(x_1) & \cdots & \Phi_{0_N}^{(N)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{0_1}^{(N)}(x_N) & \cdots & \Phi_{0_N}^{(N)}(x_N) \end{vmatrix} (-1)^N, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) &= \langle \bar{\psi}(x_N)\bar{\psi}(x_{N-1})\cdots\bar{\psi}(x_1) \rangle \\ &= \frac{1}{Z[0]} (-1)^N \frac{\delta}{\delta\eta(x_N)} \cdots \frac{\delta}{\delta\eta(x_1)} Z[0, \eta, \bar{\eta}] \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] - \sum_i (\phi(x_i) + i\rho(x_i))} \\ &\quad \times \det \begin{vmatrix} \chi_{0_1}^{(N)\dagger}(x_1) & \cdots & \chi_{0_N}^{(N)\dagger}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_{0_1}^{(N)\dagger}(x_N) & \cdots & \chi_{0_N}^{(N)\dagger}(x_N) \end{vmatrix} (-1)^N. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

As fórmulas (3.3.2) e (3.3.3) podem ser obtidas facilmente, por indução. A única contribuição para $G^{(N)}$ ($\bar{G}^{(N)}$) é do N -ésimo setor, para $N > 0$ ($N < 0$). Os determinantes dos modos zero dão

$$\det(\Phi_{0_i}^{(N)}(x_j)) = e^{\sum_i f(x_i)} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{|N|} (z_i - z_j) \bigotimes_{i=1}^{|N|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

e

$$\det(\chi_{0_i}^{(N)\dagger}(x_j)) = e^{-\sum_i f(x_i)} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{|N|} (\bar{z}_i - \bar{z}_j) \bigotimes_{i=1}^{|N|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Definindo

$$j(x) = \mp \sum_{i=1}^{|N|} \delta(x - x_i), \quad (3.3.6)$$

para $N > 0$ e $N < 0$, respectivamente, vemos que há uma última integral funcional a considerar,

$$I[j] = \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{eff}}[\rho, \phi, j]}, \quad (3.3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\rho, \phi, j] &= \frac{1}{2e_R^2} \langle (f + \phi) \square \left(\square - \frac{e_R^2}{4\pi} (a_R(N) + 1) \right) (f + \phi) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} (a_R(N) + 1) \langle \rho \square \rho \rangle - \frac{i}{8\pi} (a_R(N) + 2 - \nu) \langle (f + \phi) \square \rho \rangle \\ &\quad + \langle j(f + \phi + i\rho) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Diagonalizamos S_{eff} mudando variáveis, primeiramente de ρ para σ , definido por

$$\sigma = \rho + i \frac{a_R(N) + 2 - \nu}{2(a_R(N) - 1)} (f + \phi) - \frac{4\pi i}{a_R(N) - 1} \langle \Delta_F j \rangle, \quad (3.3.9)$$

onde $a_R(N) \neq 1$ e

$$\Delta_F(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| \quad (3.3.10)$$

é a função de Green para \square . A ação efetiva torna-se

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}[\sigma, \phi, j] &= \frac{1}{2e_R^2} \langle (f + \phi) \square (\square - \mu^2(\nu)) (f + \phi) \rangle \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} (a_R(N) - 1) \langle \sigma \square \sigma \rangle + \beta(\nu) \langle j(f + \phi) \rangle \\
&\quad + \frac{1}{a_R(N) - 1} \sum_{i,j=1}^{|N|} \ln |x_i - x_j|,
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

onde definimos

$$\mu^2(\nu) = \frac{e_R^2}{4\pi} \left[a_R(N) + 1 - \frac{(a_R(N) + 2 - \nu)^2}{4(a_R(N) - 1)} \right] \tag{3.3.12}$$

e

$$\beta(\nu) = \frac{3(a_R(N) - \nu)}{2(a_R(N) - 1)}. \tag{3.3.13}$$

A mudança de variáveis (3.3.9) somente cumpre seus objetivos se σ não tiver comportamento singular no infinito, o que garante que ele não carregará carga topológica alguma. Se isso não ocorrer, seremos obrigados a considerar o problema do cálculo da integral funcional (3.3.7) sob condições de fronteira não triviais. Mas este é precisamente o problema do qual tentamos escapar, trabalhando *dentro* de um setor de carga topológica definida e não permitindo que rotações quirais arbitrárias nos tirem dele. Portanto, para manter a consistência de nosso procedimento, vamos requerer comportamento não singular no infinito para os campos que estaremos considerando. O comportamento de σ , definido por (3.3.9), é

$$\sigma \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \mp \frac{i|N|}{a_R(N) - 1} [a_R(N) + 6 - \nu] \ln |x|. \tag{3.3.14}$$

Isto fixa o valor de ν :

$$\nu = a_R(N) + 6. \tag{3.3.15}$$

O desacoplamento de ϕ de j e f implica outra mudança de variáveis

$$\varphi = f + \phi + \frac{a_R(N) - 3}{a_R(N) - 1} e_R^2 \langle \Delta(\mu) j \rangle, \quad (3.3.16)$$

onde

$$\Delta(\mu; x - y) = -\frac{1}{2\pi\mu^2} (K_0[\mu|x - y|] + \ln|x - y|), \quad (3.3.17)$$

com K_0 sendo a função de Bessel modificada de ordem zero. Assim, diagonalizamos completamente a ação efetiva

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = & \frac{1}{2e_R^2} \langle \varphi \square (\square - \mu^2) \varphi \rangle - \frac{1}{8\pi} (a_R(N) - 1) \langle \sigma \square \sigma \rangle \\ & + \frac{1}{a_R(N) - 1} \sum_{i,j}^{|N|} \ln|x_i - x_j| - \frac{(a_R(N) - 3)^2}{2(a_R(N) - 1)^2} e_R^2 \sum_{i,j=1}^{|N|} \Delta(\mu; x_i - x_j). \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

A partir do comportamento assintótico de φ ,

$$\varphi \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \mp \frac{|N| \ln|x|}{2e_R(a_R(N) - 3)} (a_R(N) + 1), \quad (3.3.19)$$

concluimos que

$$a_R(N) = -1, \quad \text{para todo } N \neq 0, \quad (3.3.20)$$

o que implica

$$I = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{|N|} (\ln|x_i - x_j| + 2e_R^2 \Delta(\mu; x_i - x_j)) \right]. \quad (3.3.21)$$

Observamos que a soma, na expressão acima, inclui o termo $x_i = x_j$. Portanto, embora $\Delta(\mu; 0)$ seja regular, encontramos $I = 0$, o que mostra que as funções de correlação (3.3.2) e (3.3.3) se anulam. Conseqüentemente, as funções de correlação mistas (com férmions e campos de gauge) também se anulam, mostrando que os setores topológicos

não triviais se desacoplam completamente da teoria. Este comportamento do modelo de Schwinger quirial contrasta com o do modelo de Schwinger, onde não há termo logaritmico na expressão de I , o que faz com que hajam contribuições dos setores não triviais às funções de correlação mínimas [9].

Vale mencionar que a análise do caso $a_R(N) = 1$, não discutido acima, embora evidencie um comportamento não singular para φ , mostra que σ necessariamente teria que carregar carga topológica, o que também exclui, pelos nossos critérios, este valor para a_R .

Conclusão

Pesquisando a influência de setores topológicos não triviais nas teorias de gauge, fomos levados a considerar separadamente os casos em que $D^\dagger = D$ e $D^\dagger \neq D$. No caso hermitiano, confirmamos resultados anteriores que mostram que as identidades de Ward da teoria se mantêm na presença de topologia não trivial. Fazemos isso, tanto considerando rotações quirais infinitesimais, quanto finitas. Em ambos os casos, verificamos que fatores advindos do cálculo da razão $\det' D / \det' D^{(N)}$ se cancelam exatamente com termos gerados pelo acoplamento entre os modos zero do operador de Dirac e as fontes externas. Estes últimos se originam do fato de que o mapeamento dos modos zero de D nos de $D^{(N)}$, através da transformação quiral, leva um conjunto ortonormal de modos zero em um não ortonormal. É necessário, então, ou ortonormalizar o novo conjunto, ou trabalhar consistentemente com modos zero não ortonormais, multiplicando o funcional gerador desde o início do cálculo, por um fator compensatório adequado. Para qualquer uma das abordagens, é fundamental a presença, em todos os estágios da desenvolvimento, das fontes externas. Sem elas, obtemos jacobianos de rotações quirais envolvendo projetores sobre $\ker D$, que modificam drasticamente as identidades de Ward. Podemos ressaltar que diversos autores, ao não dar a devida importância para

este fato, utilizaram tais identidades até recentemente [52,62,63,55,65,66,68].

Ainda no caso hermitiano, fomos capazes de demonstrar a equivalência entre a nossa abordagem e a adição de uma massa ϵ tendendo a zero para os férmions de Dirac. Se $\epsilon \neq 0$, o operador de Dirac é não singular e todas as singularidades do tipo $1/\epsilon$ se cancelam quando calculamos razões de determinantes. Usando esta abordagem, mostramos que o jacobiano de rotações quirais globais em setores não triviais não é 1, ao contrário do que afirmam certos autores [52,68]. O resultado obtido é independente de qualquer regularização ultravioleta feita sobre $\det D$.

O caso não hermitiano exige a elaboração de uma técnica para o cálculo de $\det' D$. Usamos aqui uma generalização, para o caso singular, da prescrição de separação de pontos, originalmente introduzida por Schwinger [29]. Partindo do caso hermitiano propomos uma expressão para a razão de determinantes de operadores não hermitianos que possui limites naturais, tanto para operadores hermitianos, quanto para não singulares. A aplicação desta prescrição ao modelo de Schwinger quiral revelou a presença de fases envolvendo a parte longitudinal do campo de gauge. A presença dessas fases poderia tornar muito difícil a diagonalização da ação efetiva, por envolver operadores de projeção nos modos zero de D e D^\dagger .

Entretanto, novamente as fontes externas se mostram indispensáveis para a análise consistente da teoria. Da mesma forma que no caso hermitiano, a presença delas induz o aparecimento de módulos dos determinantes dos coeficientes de ortonormalização dos modos zero. Desta vez, entretanto, pelo fato de o acoplamento dos modos zero com as fontes só envolver η para $N > 0$ e $\bar{\eta}$ para $N < 0$, são requeridas também as fases destes

determinantes, as quais são, em princípio, arbitrárias. Na procura de critérios para a fixação dessas fases, consideramos a exigência matemática de que a integral funcional não dependa das configurações de carga topológica N escolhidas como campos de fundo para a translação de A_μ . Daí emerge uma relação que permite a eliminação dos termos mencionados no parágrafo anterior, usando para isso exatamente a arbitrariedade das fases associadas aos modos zero.

Para a solução completa do modelo, buscamos então expressões genéricas para as funções de correlação na presença de topologia não trivial. A diagonalização da ação efetiva permite, então, não só fixar a ambiguidade de fase residual, mas também determinar um valor específico para o parâmetro de regularização de Jackiw-Rajaraman. Este poderia ser diferente para cada setor, visto que a teoria é bosonizada independentemente para cada valor de N . Exigindo, basicamente, que, na diagonalização da ação efetiva, os auto estados de massa não carreguem carga topológica, encontramos $a_R = -1$, para todos os setores de carga $N \neq 0$. Isso anula as funções de Green nesses setores, desacoplando-os da teoria. O termo responsável por isso provém da parte longitudinal de A_μ , que não se desacopla para nenhum valor de a_R , ao contrário do que acontece para o caso hermitiano, onde, para $a = 1$, temos a ação efetiva expressa somente em termos de graus de liberdade transversos.

Os resultados fornecem conjecturas interessantes a serem consideradas. A mais instigante é a que liga a presença de modos zero ao parâmetro a_R . É bem conhecida a ligação entre a_R e mudanças de esquema de renormalização [71,72]. Ao fixarmos a_R e, portanto, o esquema de renormalização, por argumentos de origem topológica, es-

tabelecemos um vínculo novo entre propriedades aparentemente desconexas da teoria. Embora não possamos dizer que a solução da teoria esteja condicionada ao método de bosonização empregado (setor topológico fixo), lembramos que a outra opção envolve o cálculo de razões de determinantes sobre espaços não compactos [9,11] onde a variação das condições de contorno pode ter efeitos dramáticos sobre o resultado final. Seria interessante a análise desses aspectos, ao menos em modelos específicos envolvendo férmions quirais, para o estabelecimento ou não do vínculo entre topologia e renormalização.

Outras extensões de nosso trabalho dizem respeito a teorias quirais não abelianas e a dimensões superiores. Devemos também notar que nossa análise foi feita na formulação “não invariante de gauge” [73], ou seja, na ausência de termos de Wess-Zumino. Seria interessante verificar a influência, se houver, de tais termos na parte longitudinal de a_μ e, conseqüentemente, na fixação ou não de $a_R(N)$. As fontes externas podem desempenhar um papel relevante aqui, como já foi demonstrado em análises anteriores [74].

Apêndice A

Integrais Funcionais e Funções

Não-Ortonormais

A medida de integração funcional é usualmente definida a partir de um conjunto completo de funções tal que, para um ψ qualquer,

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n, \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{a}_n \phi_n^\dagger, \quad (\text{A.1})$$

e, então, $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{a}_n da_n$. O que acontece com esta definição quando ocorre que

$$\langle \phi_n^\dagger \phi_m \rangle \equiv \phi_{nm} \neq \delta_{nm}, \quad (\text{A.2})$$

pode ser determinado através da análise da integral gaussiana, que define a normalização das demais integrais,

$$\mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\langle \bar{\psi}\psi \rangle} = 1. \quad (\text{A.3})$$

Usando a expansão (A.1) temos

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \sum_{i,j} \bar{a}_i a_j \phi_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

Pode-se, através de uma transformação unitária, diagonalizar a matriz ϕ_{ij} :

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= \sum_k \bar{a}'_k U_{ik}^*, \\ a_j &= \sum_l U_{jl} a'_l, \\ \sum_{i,j} U_{ik}^* \phi_{ij} U_{jl} &= \lambda_l \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A medida permanece invariante sob esta transformação, enquanto (A.4) muda para $\sum_n \lambda_n \bar{a}'_n a'_n$. Reescalando as variáveis de Grassmann,

$$\sqrt{\lambda_n} a'_n = a''_n, \quad \sqrt{\lambda_n} \bar{a}'_n = \bar{a}''_n, \quad (\text{A.6})$$

obtemos (lembrando o comportamento da medida grassmanniana sob as transformações (A.6)),

$$\mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\langle \bar{\psi} \psi \rangle} = \mathcal{N}^{-1} \det |\phi_{ij}| = 1 \quad (\text{A.7})$$

e, portanto, $\mathcal{N}^{-1} = (\det |\phi_{ij}|)^{-1}$. Vemos, então, que a opção de usar funções não ortonormais para calcular integrais funcionais leva-nos a uma correção da medida através do fator mencionado acima. No nosso caso particular, estamos supondo a ortonormalidade para todas as autofunções não nulas, mas somos obrigados a lidar com um conjunto não ortonormal, constituído pelos modos zero. O determinante em (A.7) reduz-se então ao determinante de uma matriz de dimensão finita:

$$\det |\phi_{ij}| = \det |\langle \phi_{0_i}^\dagger(\alpha) \phi_{0_j}(\alpha) \rangle|$$

$$\begin{aligned}
&= \det |1 - 2\langle \phi_{0,i}^\dagger, \gamma_5 \delta \alpha \phi_{0,i} \rangle| \\
&= 1 - 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0,i}^\dagger, \gamma_5 \delta \alpha \phi_{0,i} \rangle + O(\delta \alpha^2). \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Usando o fato de $\delta \alpha$ ser infinitesimal, encontramos então a expressão para o fator de correção,

$$\mathcal{N}^{-1} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{n_0} \langle \phi_{0,i}^\dagger, \gamma_5 \delta \alpha \phi_{0,i} \rangle + O(\delta \alpha^2), \tag{A.9}$$

o qual, uma vez multiplicado pelo lado direito de (2.3.10) conduz ao mesmo resultado que obtivemos ortonormalizando os $\phi_{0,i}(\alpha)$ (note, em (2.3.10), que usando-se como $\phi_{0,i}(\alpha)$ diretamente os $\psi_{0,i}(\alpha)$, eq. (2.3.11), se obtém $\prod_{i=1}^{n_0} \bar{\xi}_{0,i}(\alpha) \xi_{0,i}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0,i} \eta_{0,i}$). O fato de a expressão (2.3.10) não se encontrar desde o início multiplicada por \mathcal{N}^{-1} , dado por (A.9), implica, portanto, a escolha implícita de uma base de funções ortonormais para os cálculos.

Apêndice B

Jacobiano de Rotações Globais

Partimos do funcional gerador

$$\begin{aligned}
 Z[\bar{\eta}, \eta] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\langle \bar{\psi} D \psi \rangle + \langle \bar{\eta} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta \rangle) \\
 &= \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D \prod_{i=1}^{n_0} \eta_{0i} \bar{\eta}_{0i},
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

e fazemos uma rotação quiral global definida por um parâmetro α abeliano constante:

$$\psi \longrightarrow e^{\gamma_5 \alpha} \psi \quad , \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{\gamma_5 \alpha}. \tag{B.2}$$

A expressão de Z muda para

$$\begin{aligned}
 Z[\bar{\eta}, \eta] &= J \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-\langle \bar{\psi} D \psi \rangle + \langle \bar{\eta} e^{\gamma_5 \alpha} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} e^{\gamma_5 \alpha} \eta \rangle) \\
 &= J \exp\langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D \prod_{i=1}^{n_0} \langle \bar{\eta} e^{\gamma_5 \alpha} \phi_{0i} \rangle \langle \phi_{0i}^\dagger e^{\gamma_5 \alpha} \eta \rangle,
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde deve-se notar que $D_\alpha = e^{\gamma_5 \alpha} D e^{\gamma_5 \alpha} = D$, o que elimina os problemas de ortonormalização de D_α , pois as autofunções nulas de D são ortonormais por hipótese. Dado

que D anticomuta com γ_5 , podemos escolher os modos zero de modo que

$$\gamma_5 \phi_{0i} = \pm \phi_{0i} \quad (\text{B.4})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n_0} \langle \bar{\eta} e^{\gamma_5 \alpha} \phi_{0i} \rangle \langle \phi_{0i}^\dagger e^{\gamma_5 \alpha} \eta \rangle &= \prod_{i=1}^{n_0} e^{2\epsilon_i \alpha} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i} \\ &= e^{2\alpha(n_+ - n_-)} \prod_{i=1}^{n_0} \bar{\eta}_{0i} \eta_{0i}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

com $\epsilon_i = +1, -1$, dependendo da quiralidade de ϕ_{0i} . Juntando (B.5) e (B.3) e comparando com (B.1), temos

$$J = e^{-2\alpha(n_+ - n_-)}, \quad (\text{B.6})$$

que é o resultado final, completamente independente de regularizações particulares feitas sobre $\det' D$.

Apêndice C

Independência em Relação ao Raio de Compactação

Conforme assinalamos no Capítulo 1, nossos resultados não dependem dos “fatores conformes” que aparecem com o uso das fórmulas modificadas pela compactação. Para ver isso, vamos rever brevemente a projeção estereográfica em duas dimensões e suas conseqüências para o operador de Dirac e suas autofunções. Para mais detalhes, sugerimos consulta ao texto de Abdalla, Abdalla e Rothe [35].

Podemos mapear cada ponto do \mathbf{R}^2 num ponto da esfera bidimensional S^2 através da regra

$$x_\mu = \frac{Rr_\mu}{R + r_3}, \quad \mu = 0, 1, \quad (\text{C.1})$$

onde $\vec{r} = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta, R\cos\theta)$ denota as coordenadas de um ponto em S^2 (de raio R) correspondente à interseção entre a linha que une o polo sul da esfera e o ponto x_μ (pertencente a R^2 , considerado plano tangente ao polo norte) e S^2 . O elemento de linha

euclidiano torna-se

$$\begin{aligned}
 ds^2 &\equiv \delta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \\
 &= \frac{2R^2}{R^2 + x^2} (R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2) \\
 &\equiv \Omega_R^{-2} d\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Portanto, a projeção estereográfica é um mapeamento conforme, pois tem como efeito apenas um reescalonamento da métrica. Consideremos agora o operador

$D = \gamma_\mu (i\partial_\mu + eA_\mu)$. Ele pode ser expresso, em termos de quantidades definidas sobre S^2 , como

$$D = \frac{1}{R} \Omega_R^2(x) V^\dagger (1 + s_{ab} L_{ab}) V \equiv \frac{1}{R} \Omega_R^2(x) V^\dagger D_S^2 V, \tag{C.3}$$

onde

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i \frac{\gamma \cdot x}{R}), \tag{C.4}$$

$$s_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \sigma_c \quad (\sigma_c, \text{ matrizes de Pauli}), \tag{C.5}$$

$$L_{ab} = \frac{1}{i} \left(r_a \frac{\partial}{\partial r_b} - r_b \frac{\partial}{\partial r_a} \right) - \frac{e}{R} (r_a \hat{A}_b - r_b \hat{A}_a), \tag{C.6}$$

$$\hat{A}_\mu = \frac{1}{2} \frac{(R^2 + x^2)}{R^2} A_\mu + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2} A_\nu, \tag{C.7}$$

$$\hat{A}_3 = -\frac{x_\mu A_\mu}{R}. \tag{C.8}$$

O operador D_{S^2} tem espectro discreto, dado por

$$D_{S^2} \tilde{u}_n = \tilde{\lambda}_n \tilde{u}_n, \tag{C.9}$$

com autofunções \tilde{u}_n ortonormais e completas

$$\sum_n \tilde{u}_n(r) \tilde{u}_n^\dagger(r') = \delta^2(r - r'). \tag{C.10}$$

Definindo u_n através de

$$\tilde{u}_n = RVu_n, \quad (\text{C.11})$$

podemos expressar a equação de autovalores em termos do operador de Dirac original,

$$Du_n = \lambda_n \Omega_R u_n. \quad (\text{C.12})$$

A base $\{u_n\}$ satisfaz

$$\int d^2x \Omega_R(x) u_n^\dagger(x) u_m(y) = \delta_{nm}, \quad (\text{C.13})$$

$$\sum u_n(x) u_n^\dagger(y) = \Omega_R^{-1} \delta^2(x - y). \quad (\text{C.14})$$

Redefinindo

$$\hat{D} = \Omega_R^{-3/2} D \Omega_R^{1/2}, \quad (\text{C.15})$$

$$\hat{u}_n = \Omega_R^{-1/2} u_n, \quad (\text{C.16})$$

temos

$$\hat{D} \hat{u}_n = \lambda_n \hat{u}_n. \quad (\text{C.17})$$

A pseudo inversa para \hat{D} será

$$\hat{S}(x, y) = \Omega_R \sum \frac{\hat{u}_n(x) \hat{u}_n^\dagger(y)}{\lambda_n} = \Omega_R S(x, y) \quad (\text{C.18})$$

e, em particular, teremos a propriedade

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\hat{S}_\alpha \frac{d}{d\alpha} \hat{D}_\alpha \right) &= \text{Tr} \left(\Omega S_\alpha \frac{d}{d\alpha} (\Omega^{-3/2} D_\alpha \Omega^{1/2}) \right) = \\ &= \text{Tr} \left(S_\alpha \frac{dD}{d\alpha} \alpha \right), \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é o parâmetro introduzido para o cálculo do determinante de D (vide Capítulo 3). Isto demonstra que a prescrição para avaliar $\det' D$ não depende do raio de compactação.

O resultado é esperado, pois estamos fazendo rotações que não mudam o setor topológico e, então, como ocorre em outras prescrições [35], os fatores advindos da compactação se cancelam quando se calculam razões de determinantes. Para o caso não hermitiano, a análise segue linhas similares, usando-se o operador

$$\begin{aligned} D &= \gamma_\mu(i\partial_\mu + e_R A_\mu P_+) \\ &= \frac{1}{R} \Omega_R^2(x) [V^\dagger D_{S^2} V + V^\dagger \hat{I} V^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

onde

$$\hat{I} = \frac{e_R}{2R} (r_a \hat{A}_b - r_b \hat{A}_a), \quad (\text{C.21})$$

e $D_s^2 = 1 + \frac{1}{2} s_{ab} L_{ab}$. Notemos que, neste caso, deverão ser consideradas as autofunções de DD^\dagger e $D^\dagger D$. O fundamental é que o operador D seja bem definido sobre S^2 , o que é o caso.

Apêndice D

Ambigüidades de Regularização no Modelo de Schwinger e Setores Topológicos Não Triviais

Após realizarmos as translações nos férmions,

$$\psi \rightarrow \psi + \int d^2y S(x, y)\eta(y), \quad (\text{D.1})$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \int d^2y \bar{\eta}(y)S(y, x), \quad (\text{D.2})$$

e as rotações quirais

$$\psi = e^{i\rho + \phi\gamma_5} \psi', \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{-i\rho + \phi\gamma_5}, \quad (\text{D.4})$$

obtemos, para o funcional gerador do modelo de Schwinger (vide seção 3.1),

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \sum_N \int \mathcal{D}a_\mu e^{-\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + (J_\mu A_\mu) + (\bar{\eta}' S^{(N)} \eta')} \\ \times \det' D^{(N)} \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0_i}^{(N)} \rangle \langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle, \quad (\text{D.5})$$

com $\eta' = e^{-i\rho + \phi\gamma_5} \eta$, $\bar{\eta}' = \bar{\eta} e^{i\rho + \phi\gamma_5}$ e

$$\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \Gamma[a_\mu] + \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu]. \quad (\text{D.6})$$

É conveniente expressar o funcional gerador diretamente em termos do conjunto original (não ortonormal) de modos zero de $D^{(N)}$

$$\Phi_{0_i}^{(N)} = e^{f\gamma_5} \begin{cases} z^{i-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & N > 0 \\ \bar{z}^{i-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & N < 0 \end{cases}. \quad (\text{D.7})$$

Para fazer isso, introduzimos uma matriz de rotação entre os dois conjuntos de funções

$$\varphi_{0_i}^{(N)} = \sum_j b_{ij} \Phi_{0_j}^{(N)}, \quad (\text{D.8})$$

que nos dá

$$\prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0_i}^{(N)} \rangle \langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle = |\det b|^2 \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0_i}^{(N)} \rangle \langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle. \quad (\text{D.9})$$

A condição $\langle \varphi_{0_i}^{(N)\dagger} \varphi_{0_j}^{(N)} \rangle = \delta_{ij}$ implica

$$|\det b|^2 = \left[\det \left(\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{-1}. \quad (\text{D.10})$$

Conseqüentemente,

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \sum_N \int \mathcal{D}a_\mu e^{-\bar{S}_{\text{eff}}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + (J_\mu A_\mu) + (\bar{\eta}' S^{(N)} \eta')} \det' D^{(N)} \\ \times \left[\det \left(\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{-1} \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0_i}^{(N)} \rangle \langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle. \quad (\text{D.11})$$

Devemos conferir a invariância de Z em relação a escolhas particulares de $A_\mu^{(N)}$. Isso é expresso pela equação

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0. \quad (\text{D.12})$$

Usando a solução da equação diferencial que define $\det' D$, encontramos a expressão para a derivada funcional de $\det' D^{(N)}$:

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det' D^{(N)} = \det' D^{(N)} \left[\frac{1}{2\pi} (a_+(N) + 1) \square f(x) + 2 \text{tr} \left(P_0^{(N)}(x, x) \gamma_5 \right) \right]. \quad (\text{D.13})$$

e, de maneira análoga à que foi feita na seção 3.2, encontramos

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det A = 2 \det A \text{tr} \left(P_0^{(N)}(x, x) \gamma_5 \right), \quad (\text{D.14})$$

com $A_{ij} = \langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \Phi_{0j}^{(N)} \rangle$. Calculando (D.12), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(x)} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \sum_N \left\{ \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta \phi} \left[e^{-\bar{S}_{\text{eff}} + (J_\mu A_\mu)} Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}] \right] \right\} \\ + \frac{ie}{2\pi} a_-(N) \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\phi \square \rho e^{-\bar{S}_{\text{eff}} + (J_\mu A_\mu)} Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}], \quad (\text{D.15}) \end{aligned}$$

onde $Z_F^{(N)}[\eta, \bar{\eta}]$ é a parte fermiônica do funcional gerador. O primeiro termo à direita se anula por ser a integral funcional de uma derivada funcional (de fato, representa as equações quânticas de movimento para ϕ). Para que (D.15) seja nulo temos que fixar $a_-(N)$ como

$$a_-(N) = 0, \quad \text{para todo } N \neq 0. \quad (\text{D.16})$$

O cálculo de funções de Green em setores não triviais [6,9] mostra que, para diagonalizar \bar{S}_{eff} sem que ϕ e ρ carreguem carga topológica é necessário que

$$a_+(N) = 1, \quad \text{para todo } N \neq 0. \quad (\text{D.17})$$

Parece, portanto, haver um casamento, em setores topológicos não triviais, entre a consistência matemática da teoria e a invariância de gauge quântica. Em setores triviais, $a_-(N)$ não aparece (lembremo-nos de que ele surge em conexão com $A_\mu^{(N)}$) e a_+ deve ser fixado somente com base na invariância de gauge. Finalmente, usando as equações (D.13) e (D.14), obtemos

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \ln \det' D^{(N)} = \frac{1}{2\pi} (a_+(N) + 1) \square f(x) + \frac{\delta}{\delta f(x)} \ln \det \left(\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right), \quad (\text{D.18})$$

e, integrando,

$$\det' D^{(N)} = e^{(a_+(N)+1)(f \square f)/4\pi} \det \left(\langle \Phi_{0_i}^{(N)\dagger} \Phi_{0_j}^{(N)} \rangle \right). \quad (\text{D.19})$$

Desta forma, calculamos o determinante funcional para $D^{(N)}$, que completa o procedimento para a obtenção do funcional gerador para o modelo de Schwinger.

Bibliografia

- [1] Rubinstein, J., *J. Math Phys.* **11** (1970), 258.
- [2] 't Hooft, G. *Phys. Rep.* **142** (1986), 357.
- [3] Rajaraman, R., *Solitons and Instantons*, Holanda (North-Holland, 1987).
- [4] Coleman, S., *Aspects of Symmetry*, Cambridge (Cambridge University Press, 1985).
- [5] Atiyah, M. e Singer, E., *Ann. Math.* **87** (1968), 484.
- [6] Bardakci, K. e Crescimanno, M., *Nucl. Phys.* **B313** (1989), 269.
- [7] Fradkin, E. e Schaposnik, F. A., *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991), 276.
- [8] Iroshnikov, G. S., *Sov. Phys. JETP* **100(7)** (1991) 45.
- [9] Manias, M. V., Naón, C. M. e Trobo, M. L., *Phys. Rev.* **D41** (1990), 3174.
- [10] Manias, M. V., Naón, C. M. e Trobo, M. L., *Phys. Rev.* **D43** (1991), 3508.
- [11] Rothe, K. D. e Schroer, B., "Green Functions, Determinants and Induced Actions in Gauge Theories", em *Field Theoretical Methods in Particle Physics*, ed. por W. Rühl, Nova Iorque (Plenum Press, 1980).

- [12] Hortaçsu, M., Rothe, K. D. e Schroer, B., *Phys. Rev. D* **20** (1979), 3203.
- [13] Jackiw, R. e Rajaraman, R., *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1219.
- [14] Jackiw, R., "Topological Investigations of Quantized Gauge Theories", em *Relativity, Groups and Topology II*, Proceedings of the 1983 Les Houches Summer School, vol. 40, ed. por B. S. DeWitt e R. Stora, Amsterdam (North-Holland, 1984).
- [15] Adler, S., *Phys. Rev.* **177** (1969), 2426.
- [16] Bell, J. e Jackiw, R., *Nuovo Cimento A* **60** (1969), 47.
- [17] Jackiw, R., "Field Theoretic Investigations in Current Algebra", em *Lectures on Current Algebra and its Applications*, S. B. Treiman, R. Jackiw e D. J. Gross, Princeton (Princeton University Press, 1972).
- [18] Itzykson, C. e Zuber, J.-B., *Quantum Field Theory*, EEUU (McGraw-Hill, 1980).
- [19] Leader, E. e Predazzi, E., *An Introduction to Gauge Theories and The New Physics*, Cambridge (Cambridge University Press, 1982).
- [20] Cheng, T.-P. e Li, L.-F., *Gauge Theories of Elementary Particle Physics*, Oxford (Clarendon Press, 1984).
- [21] Pascual, P. e Tarrach, R., "QCD: Renormalization for the Practitioner", *Lecture Notes in Physics*, vol. 194, ed. por H. Araki et al, Alemanha (Springer-Verlag, 1984).
- [22] Osterwalder, K. e Schrader, R., *Comm. Math. Phys.* **31** (1973), 83.

- [23] Fujikawa, K., Phys. Rev. **D21** (1980), 2848.
- [24] Roskies, R. e Schaposnik, F. A., Phys. Rev. **D23** (1981), 558.
- [25] Christos, G. A., Z. Phys. **C18** (1983), 155.
- [26] Piguet, O. e Rouet, A., Phys. Rep. **76** (1981), 1.
- [27] Lowenstein, J. e Swieca, J. A., Ann. Phys. **68** (1971), 175.
- [28] Kolmogórov, A. N. e Fomín, S. V. *Elementos de la teoria de funciones y del análisis funcional*, Moscou (MIR, 1978).
- [29] Schwinger, J., Phys. Rev. **128** (1962), 2425.
- [30] Jackiw, R. e Johnson, K., Phys. Rev. **182** 1969, 1459.
- [31] Farina, C., *Utilização de Diferentes Técnicas de Regularização em Modelos Bidimensionais*, tese de doutorado, UFRJ, 1989.
- [32] Dias, S. A. e Linhares, C. A., *Cálculo do Determinante Fermiônico no Modelo de Schwinger Generalizado*, Relatório de Pesquisa, IEAv-013/91, IEAv, CTA.
- [33] Dias, S. A. e Linhares, C. A., Phys. Rev. **D45** (1992), 2162.
- [34] Boyanovsky, D., Schmidt, I. e Golterman, M. F. L., Ann. Phys. **185** (1988), 111.
- [35] Abdalla, E., Abdalla, M. C. e Rothe, K. D., *Non-Perturbative Methods in Two Dimensional Quantum Field Theory*, Singapura (World Scientific, 1991).
- [36] Banks, T., Horn, D. e Neuberger, H., Nucl. Phys. **B108** (1971), 119.

- [37] Mandelstam, S., Phys. Rev. **D11** (1975), 3026.
- [38] Coleman, S., Phys. Rev. **D11** (1975), 2088.
- [39] Swieca, J. A., Fortschr. Phys. **25** (1977), 303.
- [40] Springer, G., *Introduction to Riemann Surfaces*, Reading (Addison-Wesley, 1957).
- [41] Steenrod, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton (Princeton University Press, 1951).
- [42] Lefschetz, S., *Introduction to Topology*, Princeton (Princeton University Press, 1949).
- [43] Crewther, R. J., "Effects of Topological Charge in Gauge Theories", em *Facts and Prospects of Gauge Theories*, ed. por P. Urban, Acta Physica Austriaca, Supplementum XIX, Áustria (Springer-Verlag, 1978).
- [44] 't Hooft, G., Phys. Rev. Lett. **37** (1976), 8.
- [45] Wilczek, F., Phys. Lett. **B65** (1976), 160.
- [46] Corrigan, E. e Fairlie, D. B., Phys. Lett. **B67** (1977), 69.
- [47] Jackiw, R., Nohl, C. e Rebbi, C., Phys. Rev. **D15** (1977), 1642.
- [48] Giambiagi, J. J. e Rothe, K. D., Nucl. Phys. **B129** (1977), 111.
- [49] Sciuto, S., Riv. Nuovo Cimento **2** (1979), 16.

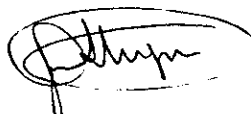
- [50] Dittrich, W. e Reuter, M., "Selected Topics in Gauge Theories", *Lecture Notes in Physics*, vol. 244, Berlim (Springer-Verlag, 1986).
- [51] Linhares, C. A., *Anomalia Axial e Teorema do Índice para Férmions de Dirac-Kähler*, tese de doutorado, CBPF, 1985.
- [52] Gamboa-Saraví, R. E., Muschietti, M. A. e Solomin, J. E., *Comm. Math Phys.* **93** (1984), 407.
- [53] Carneiro, C. E. I. e McDougall, N. A., *Nucl. Phys.* **B245** (1984), 293.
- [54] Ray, D. B. e Singer, I. M., *Adv. Math* **7** (1971), 145.
- [55] Dowker, J. S. e Critchley, R., *Phys. Rev.* **D13** (1976), 3224.
- [56] Hawking, S. W., *Comm. Math. Phys.* **55** (1977), 133.
- [57] Seeley, R. T., *Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.* **10** (1967), 288.
- [58] Gamboa-Saraví, R. E., Muschietti, M. A., Schaposnik, F. A. e Solomin, J. E., *Ann. Phys.* **157** (1984), 360.
- [59] Gamboa-Saraví, R. E., Muschietti, M. A. e Solomin, J. E., *Comm. Math Phys.* **89** (1983), 363.
- [60] Carneiro, C. E. I., Dias, S. A. e Thomaz, M. T., *Phys. Rev.* **D40** (1989), 4105.
- [61] Lang, S., *Álgebra Linear*, São Paulo (Edgard Blücher, 1977).
- [62] Banerjee, H., Bhattacharya, G. e Banerjee, R., *Z. Phys.* **C45** (1989), 253.

- [63] Corrigan, E., Goddard, P., Osborn, H. e Templeton, S., Nucl. Phys. **B159** (1979), 469.
- [64] Dowker, J. S., J. Phys. **A11** (1978), 347.
- [65] Nielsen, N. K. e Schroer, B., Nucl. Phys. **B127** (1977), 493.
- [66] Reuter, M., Phys. Rev. **D31** (1985), 1374.
- [67] Dias, S. A. e Thomaz, M. T., Phys. Rev. **D44** (1991), 1811.
- [68] Tsutsui, I., Phys. Rev. **D40** (1989), 3543.
- [69] Dias, S. A. e Linhares, C. A., preprint CBPF-NF 023/92.
- [70] Fujikawa, K., Phys. Rev. **D29** (1984), 285.
- [71] Banerjee, R., Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 1889.
- [72] Demarco, G. L. e Trincherro, R. C., Phys. Rev. **D38** (1988), 608.
- [73] Harada, K., Nucl. Phys. **B329** (1990), 723.
- [74] Linhares, C. A., Rothe, K. D. e Rothe, H. D., Phys. Rev **D35** (1987), 2501.

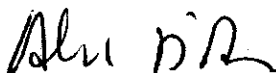
"ASPECTOS DE TOPOLOGIA NÃO TRIVIAL EM TEORIAS DE GAUGE"

SEBASTIÃO ALVES DIAS

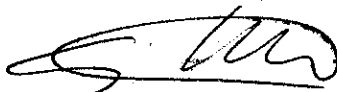
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:



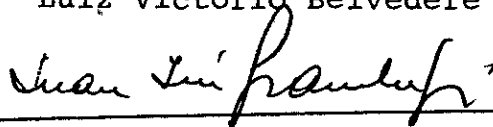
Juan Alberto Mignaco
Presidente



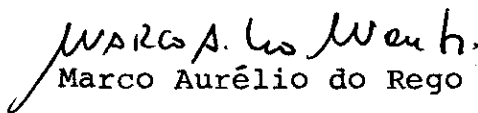
Alessandro d'Adda



Luiz Victorio Belvedere



Juan José Giambiagi



Marco Aurélio do Rego Monteiro

Rio de Janeiro, 04 de setembro de 1992