Marcelo Carvalho

Quantização de Dirac da QED(2+1)d. com o Termo de Chern-Simons

Tese de Mestrado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Julho de 1992

"When the barbarians approach

On the frontiers of a civilization

It is a sign of crisis in that civilization

When the barbarians come not with weapons of war

But songs and icons of peace

It is a sign of crisis

Is one of a spiritual nature

That spiritual nature

We have forgotten our spiritual nature

'Cause we are wrapped up in too much shit

All day all night."

(Astbury/Duffy)

Agradecimentos

Agradeço à,

- Marco Antônio de Andrade, pelo enorme trabalho que foi me ensinar a utilizar o latex. Sua atenção e paciência em me apontar os erros foi algo notável.

- Martha Cotrim, pela organização da letra do "The Cult".

- C.A.P.Galvão, pela sugestão e orientação deste trabalho.

- Miriam Simões, pela paciência ao longo desses três anos.

- Aos meus amigos, aqui e fora.

Resumo

Quantização de Dirac é aplicada a QED(2+1)d com termo de C.S.. Consequentemente obtem-se alguns parênteses não triviais. Aplica-se em seguida o método de integração de caminho de Faddeev para o cálculo dos propagadores livres.

Sumário

Introdução

O estudo de sistemas físicos em dimensões $D < 4$ é justificado a medida que alguns cálculos se tornam mais fáceis e se espera que algumas de suas características sobrevivam quando fizermos a extensão ao caso de $D = 4$. Recentemente, teorias de campos em (2+1)d. tem sido muito utilizadas para tratar problemas em matéria condensada (tais como o efeito Hall quântico e a supercondutividade). Uma particularidade de modelos em (2+1)d. está na possibilidade da inclusão de um termo de origem topológica na lagrangeana. Este é o caso do chamado termo de Chern-Simons $\propto \varepsilon_{ij}\partial_i A_j$. A presença deste termo numa QED(2+1)d., gera uma massa para o campo de gauge A_μ [1]. Outra característica interessante é a possibilidade de uma transmutação na estatística do campo de matéria. Isto ocorre tanto para teorias contendo apenas o termo de Chern-Simons como termo cinético para o campo de gauge [2] [3], quanto para teorias contendo adicionalmente o termo de Maxwell [4]. Aqui, surge uma questão relativa a conexão entre spin e estatística [5]: partículas de spin semi inteiro são férmions, enquanto que partículas de spin inteiro são bósons. Daí, para um sistema exibindo estatística intermediária a de bóson e férmion teríamos valores de spin $\neq$ inteiro, semi inteiro ? A resposta é afirmativa. Deve-se notar que tal comportamento, bem diferente do caso tridimensional usual, surge associado com o fato de que em 2 dimensões a álgebra do momento angular é comutativa, o que nos leva, na quantização, à resultados distintos do caso 3d.. A QED(2+1)d., sendo invariante de gauge, é descrita por uma lagrangeana singular, constituindo-se então num sistema vinculado. Sistemas vinculados ocorrem naturalmente em física (por exemplo, a partícula livre relativística, o string bosônico livre, etc..). Uma formulação puramente lagrangeana desses sistemas nos leva a tratar com algumas velocidades indeterminadas [6], enquanto que numa formulação hamiltoniana, a estrutura singular da lagrangeana induz relações do tipo, $\phi(q_n, p_n) = 0$, sobre as coordenadas e momentos canônicos do sistema. O tratamento hamiltoniano desses sistemas foi introduzido por Dirac [7] e é particularmente interessante no sentido em que caracteriza alguns vínculos como geradores de transformações canônicas que deixam o estado físico do sistema inalterado (i.e. transformações de gauge). Nesta formulação, que se presta bem a gauges não covariantes, a dinâmica se realiza numa subvariedade do espaço de fase, determinada pelas superfícies de vínculos a que o sistema está sujeito.

No que se segue, consideraremos uma QED(2+1)d. espinorial com termo de Chern-Simons. No cap.1 estuda-se a formulação lagrangeana do sistema. No cap.2 desenvolve-se a quantização de Dirac utilizando os gauges de Poincaré e de Coulomb. Finalmente, no cap.3, faz-se o cálculo dos propagadores usando integração de caminho.

Capítulo 1

Formulação Lagrangeana

No que se segue, consideraremos o espaço físico como sendo uma variedade Minkowskiana com métrica $\eta_{\mu\nu} = diag.(+1, -1, -1)$. Denotaremos,

$$x^\mu \equiv (x^0, x^i) = (t; \vec{x})$$

$$x_\mu \equiv (x_0, x_i) = (t; -\vec{x})$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv (\partial^0, \partial^i) = (\frac{\partial}{\partial t}; -\vec{\nabla})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv (\partial_0, \partial_i) = (\frac{\partial}{\partial t}; \vec{\nabla})$$

Em (2+1)d., a álgebra das matrizes γ é satisfeita pelas matrizes de Pauli. Daí tomamos,

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2$$

que verificam,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha$$

Trataremos com um sistema descrito pela lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{max+cs} + \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{int} \tag{1.1}$$

onde:

$$\mathcal{L}_{max+cs} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_{\alpha} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}_{mat} = \overline{\psi}\ (\ i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\ )\ \psi \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}_{int} = e\ \overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi \tag{1.4}$$

sendo:

A_{μ} o campo de gauge para uma teoria abeliana, e, ψ um espinor de duas componentes que descreverá o campo de matéria (em (2+1)d., se $m > 0$ tem-se que ψ representa uma partícula tendo apenas $s_z = +\frac{1}{2}$. As duas componentes de ψ correspondem então as duas soluções linearmente independentes de partícula e antipartícula).

Pelas transformações de gauge,

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\Omega$$

$$\psi \longrightarrow e^{\Omega}\psi$$

tem-se,

$$\mathcal{L}_{max+cs} \longrightarrow \mathcal{L}_{max+cs} + \frac{\mu}{4e}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\Omega$$

$$\mathcal{L}_{mat} \longrightarrow \mathcal{L}_{mat} - \overline{\psi}\ (\ \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Omega\ )\ \psi$$

$$\mathcal{L}_{int} \longrightarrow \mathcal{L}_{int} + \overline{\psi}\ (\ \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Omega\ )\ \psi$$

Daí,

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_{\alpha}\ (\ \frac{\mu}{4e}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}\quad \Omega\ )$$

o que torna a ação invariante.

As equações de movimento são obtidas da maneira usual:

$$(\delta S)_{\delta\Phi} = 0 \qquad com \ \delta\Phi (x \rightarrow \pm \infty) = 0$$

e resultam,

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m + e\gamma^{\mu}A_{\mu}) \psi = 0 \tag{1.5}$$

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha} = -e \, \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \equiv J^{\mu} \tag{1.6}$$

Podemos escrever a eq.(1.6) numa outra forma. Para isso, introduz-se o vetor dual ${}^{*}F^{\mu}$ do tensor $F^{\mu\nu}$:

$${}^{*}F^{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{1.7}$$

que invertido dá,

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \, {}^{*}F_{\alpha}. \tag{1.8}$$

Tomando a divergência da eq.(1.6), tem-se:

$$\mu \, \partial^{*}_{\mu}F^{\mu} = \partial_{\mu}J^{\mu}$$

mas, da definição (1.7), tem-se, $\partial^{*}_{\mu}F^{\mu} = 0$ (identidade de Bianchi), o que resulta na conservação da corrente,

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0 \tag{1.9}$$

Substituindo $F^{\mu\nu}$ dado em (1.8) na eq.(1.6), tem-se,

$$(\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_{\alpha}) \, {}^{*}F_{\nu} = \frac{1}{\mu}J^{\mu} \tag{1.10}$$

Aplicando $(\eta_{\beta\mu} - \frac{1}{\mu}\varepsilon_{\beta\mu\lambda}\partial^\lambda)$ em (1.10), e usando $\partial^*_\mu F^\mu = 0$ obtem-se,

$$(\Box + \mu^2)\, {}^*F_\beta = \mu\, (\eta_{\beta\mu} - \frac{1}{\mu}\varepsilon_{\beta\mu\lambda}\partial^\lambda)\, J^\mu \tag{1.11}$$

Na ausência de correntes,

$$(\Box + \mu^2)\, {}^*F_\beta = 0 \tag{1.12}$$

Eq.(1.12) mostra que as componentes de ${}^*F_\mu$ propagam-se como campos livres de massa μ. Implicitamente, o mesmo está ocorrendo com o campo A_μ. Este comportamento é característico de teorias em que se tem o termo de C.S. junto com o termo de Maxwell.

Da eq.(1.6) tem-se também,

$$\Box\, A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu + \mu^* F^\nu = J^\nu$$

Mas da eq.(1.11),

$$\mu^* F^\nu = \mu^2\, (\Box + \mu^2)^{-1} (\eta^{\nu\mu} - \frac{1}{\mu}\, \varepsilon^{\nu\mu\alpha}\partial_\alpha)\, J_\mu$$

e daí obtem-se a equação de A^μ,

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = (\Box + \mu^2)^{-1} (\Box J^\nu - \mu\varepsilon^{\nu\alpha\mu}\partial_\alpha J_\mu) \tag{1.13}$$

Aqui temos de inverter o operador

$$O_{\nu\mu} \equiv \Box\, (\eta_{\nu\mu} - \frac{\partial_\nu\partial_\mu}{\Box}) \tag{1.14}$$

Para se fazer isso, introduz-se os projetores transverso,

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}$$

e longitudinal,

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}$$

Em termos destes escrevemos o operador $O_{\mu\nu}$,

$$O_{\mu\nu} = A\Theta_{\mu\nu} + B\omega_{\mu\nu}$$

cuja inversa tem a forma,

$$O^{-1}_{\mu\nu} = A^{-1}\Theta_{\mu\nu} + B^{-1}\omega_{\mu\nu}$$

Daí da eq.(1.14) tem-se $B = 0$ o que impossibilita a inversão do operador $O_{\mu\nu}$. Esse comportamento é consequência da invariância de gauge da teoria. Para resolver este problema temos de fazer uma fixação do gauge, que consiste em impor certas condições sobre o potencial A_μ de modo que se possa inverter a eq.(1.13). (Na verdade, a imposição de condições de gauge sobre o potencial A_μ é determinada por um necessidade mais forte do que apenas resolver a eq.(1.13), que é a de eliminar os graus de liberdade não físico do fóton.) Entre possíveis condições de gauge temos, o gauge de Lorentz e de Coulomb. No gauge de Lorentz fazemos $\partial_\mu A^\mu = 0$, o que nos leva a uma eq. do tipo,

$$(\, \Box + \mu^2 \,)\, A^\nu = (\, J^\nu + \mu\varepsilon^{\nu\mu\alpha}\Box^{-1}\partial_\alpha J_\mu \,) \tag{1.15}$$

Desta equação vemos que o campo de gauge adquire uma massa μ.

Ao fixar um gauge, devemos nos certificar ser este um 'bom gauge' no sentido em que se verifica:

(i) a condição é atingível.

(ii) quebra a invariância de gauge da teoria.

Para verificar (i), devemos mostrar que dada uma configuração A_μ , não satisfazendo a $\partial_\mu A^\mu = 0$, pode-se escolher ω tal que $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$ satisfaz $\partial_\mu A'^\mu = 0$. Isto relmente ocorre, bastando tomar ω solução de $\Box\omega = 0$.

Para verificar (ii) basta considerar duas configurações A_μ e $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$ satisfazendo, $\partial_\mu A^\mu = 0 = \partial_\mu A'^\mu$ e mostrar que $A_\mu = A'_\mu$, isto é, $\omega = cte.$. Daqui obtem-se,

$$\Box\omega = 0 \tag{1.16}$$

A equação (1.16) admite uma classe mais extensa de soluções do que apenas $\omega = cte.$. Entretanto, a nível clássico, é possível impor condições de contorno a (1.16) de modo a termos por solução, $\omega = cte.$.

O gauge de Lorentz não é conveniente para ser utilizado na fomulação de Dirac da nossa teoria, isto porque o modelo descrito por (1.1) apresenta dois vínculos de primeira classe (ver cap.2), o que nos obriga a fazer duas fixações de gauge. Podemos contudo resolver o problema no gauge de Lorentz, usando-se por exemplo o método do "gauge fixing".

Considere novamente a eq.(1.13). Dela se obtem,

$$(\Box + \mu^2)A_0 \;=\; -\Box^{-1}\nabla^{-2}(J_0 - \mu\varepsilon_{ij}\Box^{-1}\partial_i J_j) + \nabla^{-2}(\Box + \mu^2)\partial_i \dot{A}_i$$

e,

$$(\Box + \mu^2)A_i \;=\; J_i - \mu\varepsilon_{ij}\Box^{-1}\dot{J}_j + \mu\varepsilon_{ij}\Box^{-1}\partial_j J_0 + \Box^{-1}(\Box + \mu^2)\partial_i \dot{A}_0 - \Box^{-1}(\Box + \mu^2)\partial_i\partial_j A_j$$

Tomando A_0 da primeira e substituindo na segunda, obtêm-se,

$$(\Box + \mu^2)A_i^t \;=\; J_{ieff} = -\varepsilon_{ij}\partial_j\phi - \mu\varepsilon_{ij}\partial_j \int dt\ \xi \tag{1.17}$$

onde, ϕ e ξ são dados de $J_i = \varepsilon_{ij}\partial_j\phi - \partial_i\xi$.

O gauge de Coulomb consiste em tomar $\partial_i A_i = 0$. Assim, dada uma configuração $A_\mu = (A_0, A_i)$ tem-se que a escolha do gauge de Coulomb consiste em fazer, $\vec{A} = \vec{A}^t$, cuja equação de movimento é dada por (1.17). O gauge de Coulomb, isoladamente, não satisfaz os critérios anteriores. Temos assim de introduzir outra condição. Mostraremos no cap.2 que a escolha do gauge de Coulomb junto com outra condição suplementar adequada constitui-se um bom gauge.

<u>Eqs. de Maxwell-Chern-Simons</u>

Definimos os campos elétrico e magnético na forma,

$$E_i = F_{i0} = -\dot{A}_i + \partial_i A_0 \tag{1.18}$$

$$B = -\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \tag{1.19}$$

Fazendo $\mu = 0$ em (1.6) tem-se,

$$\vec{\nabla}.\vec{E} + \mu B = J_0 \tag{1.20}$$

que se constitui no equivalente da lei de Gauss.

Tomando $\mu = i$ em (1.6) tem-se,

$$\dot{E}_i + (\ \vec{\nabla} \times B\ )_i + \mu\varepsilon_{ij}E_j = -J_i \qquad \text{(lei de Ampére)} \tag{1.21}$$

Da equação $\partial^*_\mu F^\mu = 0$ obtemos,

$$\dot{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \text{(lei de Faraday)} \tag{1.22}$$

No nosso problema não tem-se o análogo da equação $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, sendo isto consequência apenas de estarmos tratando em (2+1)d.. As equações de $\vec{E}$ e B são obtidas imediatamente quando escritos em termo do tensor dual. De (1.7) tem-se, fazendo $\mu = 0$ e $\mu = i$,

$$^{*}F^{0} = -B$$

$$^{*}F^{i} = \varepsilon_{ij} E_{j}$$

Daí, usando a eq.(1.11) tem-se,

$$(\ \Box + \mu^2\ )B = -\mu J_0 - \varepsilon_{ij}\partial_i J_j \tag{1.23}$$

$$(\ \Box + \mu^2\ )E_i = \mu\varepsilon_{ij} J_j + \partial_i J_0 - \dot{J}_i \tag{1.24}$$

A eq.(1.21) apresenta uma característica interessante. Integrando-a, por um caminho Γ e usando o teorema da divergência temos,

$$\oint_{\Gamma} d\vec{l}.\vec{E} + \int d^2x\ \mu B = \int d^2x\ J_0 = Q$$

Da eq.(1.24) tem-se para $x \to \infty$ que $E_{i(x)} \sim e^{-\mu|\vec{x}|}$. Tomando o caminho Γ no infinito, temos $E_i \to 0$, e então,

$$\int d^2x \mu B = \mu\Phi = Q \qquad \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{\mu}$$

Aqui $Q = \int d^2x J_0$ é a carga associada ao campo de matéria e Φ, o fluxo associado ao campo de gauge. Temos assim que as partículas carregadas levam consigo um fluxo $\Phi = \frac{Q}{\mu}$.

Uma outra característica importante do termo de C.S é que ele permite uma transformação na estatística do sistema. Um exemplo disso em teoria de campos é descrito no apêndice C.

Capítulo 2

Formulação Hamiltoniana

Ao tratarmos com férmions, seguiremos as convenções de [8], usando derivadas a esquerda e comutadores.

De,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha + \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi + e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

temos os momentos canônicos :

$$\Pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu} = \partial_\mu A_0 - \dot{A}_\mu + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{0\mu\nu}A^\nu \tag{2.1}$$

$$\Pi_{(\psi)\alpha} = \frac{\vec{\partial}\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = -\frac{i}{2}\psi^\dagger_\alpha \tag{2.2}$$

$$\Pi_{(\psi^\dagger)\alpha} = \frac{\vec{\partial}\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger_\alpha} = -\frac{i}{2}\psi_\alpha \tag{2.3}$$

Aqui introduzimos os parênteses de Poisson fundamentais:

$$\left\{A_{\mu(x)}, \Pi_{\nu(y)}\right\} = \eta_{\mu\nu}\delta^2{(x-y)}$$

$$\left\{\psi_{\alpha(x)}, \Pi_{(\psi)\beta(y)}\right\} = -\delta_{\alpha\beta}\delta^2{(x-y)}$$

$$\{\psi^{\dagger}_{\alpha}(x), \Pi_{(\psi^{\dagger})\beta}(y)\} = -\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

Tem-se que $\mathcal{L}$ é singular, isto é, na passagem ao formalismo hamiltoniano temos a presença de vínculos. No nosso problema estes são :

$$\Phi = \Pi_0 \tag{2.4}$$

$$\Xi_\alpha = \Pi_{(\psi)\alpha} + \frac{i}{2}\psi^{\dagger}_{\alpha} \tag{2.5}$$

$$\Gamma_\alpha = \Pi_{(\psi^{\dagger})\alpha} + \frac{i}{2}\psi_{\alpha} \tag{2.6}$$

A hamiltoniana canônica se escreve como :

$$\mathcal{H}_c = \int d^2y(\Pi_\mu \dot{A}^\mu - \Pi_{(\psi)}\dot{\psi} + \dot{\psi}^{\dagger}\Pi_{(\psi^{\dagger})} - \mathcal{L}) \tag{2.7}$$

e resulta,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c = \int d^2y(&\Pi_0\dot{A}_0 - \Pi_i\partial_i A_0 + \tfrac{1}{4}\Pi_0\Pi_0 - \tfrac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}(\partial_i A_j)A_0 + \tfrac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \tfrac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j + \tfrac{\mu^2}{8}A_iA_i \\ &+ \tfrac{1}{4}F_{ij}F_{ij} - \Pi_{(\psi)}\dot{\psi} + \dot{\psi}^{\dagger}\Pi_{(\psi^{\dagger})} - \tfrac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \tfrac{i}{2}(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi + m\overline{\psi}\psi - \\ &e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Daí constroi-se a hamiltoniana total :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \int d^2y(\lambda^{(1)}\Pi_0 + (\Pi_{(\psi)_\alpha} + \frac{i}{2}\psi^{\dagger}_{\alpha})\lambda^{(2)}_{\alpha} + \lambda^{(3)}_{\alpha}(\Pi_{(\psi^{\dagger})_\alpha} + \frac{i}{2}\psi_\alpha)) \tag{2.9}$$

que será utilizada para impor a condição de consistência dos vínculos, isto é, se Ω for vínculo da teoria devemos ter $\{\Omega, \mathcal{H}\} = 0$. Assim,

$$\dot{\Pi}_0 = \{\Pi_0, \mathcal{H}\} = 0$$

resulta,

$$0 = -\partial_i \Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + e\psi^\dagger\psi$$

que se constitui em um novo vínculo :

$$\Lambda = \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - e\psi^\dagger\psi \tag{2.10}$$

também,

$$\dot{\Lambda} = \{\Lambda, \mathcal{H}\} = 0$$

o que fornece uma equação envolvendo os multiplicadores $\lambda_\alpha^{(2)}$ e $\lambda_\alpha^{(3)}$.

Temos ainda

$$\dot{\Xi}_\alpha = \{\Xi_\alpha, \mathcal{H}\} = 0$$

que resulta numa equação para $\lambda_\alpha^{(3)}$ e

$$\dot{\Gamma}_\alpha = \{\Gamma_\alpha, \mathcal{H}\} = 0$$

que resulta numa equação para $\lambda_\alpha^{(2)}$.

A análise dos parênteses de poisson entre os vínculos nos diz que Φ é vínculo de primeira classe enquanto que Λ , Ξ e Γ são de segunda classe, uma vez que os parênteses não nulos são :

$$\{\Lambda, \Xi_\alpha\} = e\psi^\dagger_{\alpha}(x)\delta^2(x-y)$$

$$\{\Lambda, \Gamma_\alpha\} = -e\psi_\alpha(x)\delta^2(x-y)$$

$$\{\Xi_\alpha, \Gamma_\beta\} = -i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

Os vínculos de segunda classe não formam um conjunto minimal,visto que, a matriz,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\Lambda,\Lambda\} & \{\Lambda,\Xi_\alpha\} & \{\Lambda,\Gamma\alpha\} \\ \{\Xi_\alpha,\Lambda\} & \{\Xi_\alpha,\Xi_\beta\} & \{\Xi_\alpha,\Gamma_\beta\} \\ \{\Gamma_\alpha,\Lambda\} & \{\Gamma_\alpha,\Xi_\beta\} & \{\Gamma_\alpha,\Gamma_\beta\} \\ & & \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

tem

$$det\Delta = 0$$

Isto implica que um dos vínculos de segunda classe pode, através de uma combinação linear conveniente, ser promovido à um vínculo de primeira classe. Este é o caso do vínculo Λ, se desejamos a teoria livre como um caso limite quando fazemos $e = 0$. De fato, na sua forma atual Λ é um vínculo de segunda classe, enquanto que no caso livre Λ é de primeira classe, daí para que a passagem a teoria livre seja consistente, devemos modificar Λ, tornando-o um vínculo de primeira classe. Esta combinação é dada por :

$$\Lambda' = \Lambda - ie(\Xi_\alpha\psi_\alpha + \psi_\alpha^\dagger\Gamma_\alpha)$$

e fica

$$\Lambda' = \partial_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j - ie(\Pi_{(\psi)}\psi + \psi^\dagger\Pi_{(\psi^\dagger)})$$

Agora tem-se que Φ e Λ' são vínculos de primeira classe e, Ξ_α e Γ_α são de segunda classe. Devemos lembrar que os vínculos de segunda classe trazem problemas na quantização da teoria, mais precisamente quando se faz a passagem dos parênteses de Poisson clássicos a (anti)comutadores.

A solução desse problema consiste em substituir os parênteses de Poisson por um novo tipo de parênteses, os quais permitem uma passagem consistente a teoria quântica. Devemos então construir tais parênteses. O método de Dirac se propõem exatamente a isto e requer que tenhamos a matriz Δ (cujos elementos são os parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe) inversível. Deve-se notar também que o fato de termos um número ímpar de vínculos de segunda classe não significa a priori que a matriz Δ tem determinante nulo, pois, tratando com vínculos fermiônicos não teremos Δ antissimétrica.

Devemos agora eliminar os vínculos de segunda classe da teoria. Aqui a matriz Δ,

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{\Xi_\alpha, \Xi_\beta\} & \{\Xi_\alpha, \Gamma_\beta\} \\ \{\Gamma_\alpha, \Xi_\beta\} & \{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

resulta

$$\Delta_{\alpha\beta(x-y)} = \begin{pmatrix} 0 & -i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y) \\ -i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

A inversa de $\Delta_{\alpha\beta(x-y)}$ é uma matriz $\Delta^{-1}_{\alpha\beta(x-y)}$ dada por :

$$\int d^2z \Delta_{\alpha\lambda(x-z)} \Delta^{-1}_{\lambda\beta(z-y)} = \delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

e resulta

$$\Delta^{-1}_{\alpha\beta(x-y)} = \begin{pmatrix} 0 & +i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y) \\ +i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Os parênteses de Dirac são dados por:

$$\{\ ,\ \}^D = \{\ ,\ \} - \int d^2z d^2w \ \{\ ,\Gamma_{\alpha}(z)\} \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(z-w) \{\Xi_\beta(w),\ \} -$$

$$- \int d^2z d^2w \ \{ \ , \Xi_{\alpha(z)}\} \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(z-w) \{\Gamma_{\beta(w)}, \ \}$$

e resultam nos parênteses preliminares:

$$\{A_0(x), \Pi_0(y)\}^* = \delta^2(x-y)$$

$$\{A_i(x), \Pi_j(y)\}^* = -\delta_{ij}\delta^2(x-y)$$

$$\{\psi_\alpha(x), \Pi_{(\psi)\beta}(y)\}^* = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi^\dagger_\beta(y)\}^* = -i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

$$\{\psi^\dagger_\alpha(x), \Pi_{(\psi^\dagger)\beta}(y)\}^* = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

quaisquer outros parênteses sendo nulos.

Tratando com esses parênteses, os vínculos de segunda classe valem fortemente de modo que podem ser sustituídos diretamente em $\mathcal{H}_c$. Tomando, $\psi^\dagger_\alpha = 2i\Pi_{(\psi)\alpha}$ e $\Pi_{(\psi^\dagger)\alpha} = -\frac{i}{2}\psi_\alpha$ podemos eliminar as variáveis $\psi^\dagger_\alpha$ e $\Pi_{(\psi^\dagger)\alpha}$. Vem que, $\mathcal{H}_c$ fica,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c \ = \ & \int d^2y \ (\ \Pi_0\dot{A}_0 - \Pi_i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}\Pi_0\Pi_0 - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j A_0 + \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j + \\ & + \frac{\mu^2}{8}A_iA_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + 2\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + 2mi\Pi_{(\psi)}\gamma^0\psi - \\ & - 2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^\mu A_\mu\psi \ ) \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Temos também:

$$\Lambda' = \partial_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - 2ie\Pi_{(\psi)}\psi$$

É interessante observar que Λ' é equivalente a eq. (1.6) para $\mu = 0$. Assim, utilizando os parênteses de Dirac "eliminou-se" os vínculos de segunda classe da teoria. Esta agora incorpora "apenas" os vínculos de primeira classe, $\Phi \cong 0$ e $\Lambda' \cong 0$.(O sentido preciso do termo eliminar é dado no apêndice A)

Aqui, considerando como geradores de transformações de gauge não apenas os vínculos primários de primeira classe mas também os vínculos secundários de primeira classe, introduz-se a hamiltoniana estendida,

$$\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_c + \int d^2y \, (\lambda^{(1)}\Pi_0 + \lambda'(\partial_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - 2ie\Pi_{(\psi)}\psi) \,) \tag{2.16}$$

onde os multiplicadores $\lambda^{(1)}$ e λ' são arbitrários. Devemos determinar esses multiplicadores. Isso é feito impondo condições subsidiárias ao sistema, de modo que pela sua condição de consistência obtenhamos um sistema de eqs. lineares compatível para $\lambda^{(1)}$ e λ'.

Usaremos como condições subsidiárias os gauges de Poincaré e de Coulomb. Para cada um desses, desenvolve-se a quantização de Dirac.

Antes de prosseguir, vejamos o efeito das transformações de gauge sobre os campos. Seguindo [9], temos que o gerador das transformações de gauge se escreve como,

$$G = \int d^2y \, (\, \omega_a\phi_a^{(s)} + \varepsilon_b\phi_b^{(p)} \,) \tag{2.17}$$

onde,

$$\dot{\omega}_a + \alpha_{al}\omega_l + \beta_{ac}\varepsilon_c = 0$$

com,

$$\{\phi_a^{(s)}, H_c\} = \alpha_{an}\phi_n^{(s)}$$

$$\{\phi_b^{(p)}, H_c\} = \beta_{bc}\phi_c^{(s)}$$

Aqui, $\phi_a^{(s)}$ refere-se ao vínculo secundário de primeira classe, e, $\phi_b^{(p)}$ ao vínculo primário de primeira classe. No nosso problema,

$$\phi_a^{(s)} \equiv \Lambda'$$

$$\phi_b^{(p)} \equiv \Phi$$

Os parênteses que utilizaremos serão os parênteses preliminares, com os quais eliminou-se os vínculos de segunda classe.

A determinação de α e β é imediata. De,

$$\{\Phi, H_c\}^* = -\Lambda'$$

e,

$$\{\Lambda', H_c\}^* = 0$$

temos, $\beta = -1$ e $\alpha = 0$. Vem que,

$$\dot{\omega}_a + \alpha_{al}\omega_l + \beta_{ac}\varepsilon_c = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = \varepsilon$$

Daí,

$$G = \int d^2y \, [\, \partial^\mu \omega \Pi_\mu + \frac{\mu}{2} \, (\, \varepsilon_{ij} \partial_i \omega \,) \, A_j - 2ie\omega \Pi_{(\psi)} \psi \,] \tag{2.18}$$

Segue-se então

$$\delta A_0 = \{A_0, G\}^* = \dot{\omega}$$

$$\delta A_i = \partial_i \omega$$

$$\delta \Pi_i = -\frac{\mu}{2} \varepsilon_{ij} \partial_j \omega$$

$$\delta\psi = ie\omega\psi$$

$$\delta\Pi_{(\psi)} = -ie\omega\Pi_{(\psi)}$$

Seja agora, a componente transversa de A_i, $A_i^t \equiv (\ \delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j\ )A_j$. Temos que,

$$\delta A_i^t = 0$$

o que nos diz que A_i^t é invariante de gauge. No entanto,

$$\delta\Pi_i^t = -\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j\omega$$

não é invariante de gauge. Mas,

$$\delta\Pi_i^l = 0$$

O campo elétrico é dado por, $E_i = \Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j$, daí,

$$\begin{aligned}\delta E_i &= \delta\Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\delta A_j \\ &= 0\end{aligned}$$

O campo magnético corresponde a, $B = -\varepsilon_{ij}\partial_i A_j$, sendo também invariante de gauge, pois,

$$\delta B = 0$$

(i) Gauge de Poincaré.

Este gauge é definido pela relação:

$$\Omega_1 = x_i A_i \cong 0 \tag{2.19}$$

e temos,

$$\dot{\Omega}_1 \cong 0 \cong \{\Omega_1, \mathcal{H}_c\}^* + \int d^2y\ \lambda'\{\Omega_1, \Lambda'\}^*$$

que resulta numa equação para o multiplicador Λ'. Devemos procurar outra condição subsidiária. Uma maneira de se fazer isso é através do cálculo do parênteses entre Ω_1 e $\mathcal{H}_c$ que produz um novo vínculo,

$$\Omega_2 = x_i\partial_i A_0 - x_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}x_i A_j \ .$$

Temos que, $\dot{\Omega}_2 \cong 0$ fornece uma equação em $\lambda^{(1)}$ e λ', não gerando assim novos vínculos.

Temos de verificar se as condições $\Omega_1 = 0$ e, $\Omega_2 = 0$ são boas condições de gauge. No formalismo de Dirac, uma condição necessária (mas não suficiente) para isto é que se tenha $det(\{\Omega_a, \phi_b\}) \neq 0$, sendo ϕ_b os vínculos de primeira classe da teoria. Por construção, os vínculos de gauge escolhidos satisfazem esse critério. Resta mostrar que tal escolha é atingível e que fixa totalmente o gauge.

(i) É atingível

Seja A_μ uma configuração de potenciais que não verifica, $\Omega_a(A_\mu) = 0$. Dado $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\omega$, temos que existe ω tal que $\Omega_a(A'_\mu) = 0$. De fato, de

$$x_i A'_i \ = \ 0 \ = \ x_i A_i + x_i\partial_i\omega$$

resulta,

$$\omega \ = \ (\ \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1}(\ x_i A_i\ ) + g_{(x_0;x_i)} \tag{2.20}$$

com, $g_{(x_0;x_i)} = \hat{\omega}_{(x_0)} f_{(x_i)}$, onde f é uma função homogênea de ordem 0. Tem-se também,

$$x_i\partial_i A'_0 - x_i\Pi'_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}x_i A'_j = 0$$

$$\Rightarrow \ x_i\partial_i\partial_0\omega = -x_i(\partial_i A_0 - \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j) = -x_i\dot{A}_i$$

que se constitui numa identidade, de modo que para ω dado por (2.20) temos satisfeita $\Omega_a(A'_\mu) = 0$.

(ii) Fixa o gauge

Sejam A'_μ e A_μ configurações que verificam $\Omega_1 = 0$ e $\Omega_2 = 0$. Então,

$$x_i A'_i \ = \ x_i \ (\ A_i + \partial_i \omega \ ) \ = \ 0$$

daí,

$$\vec{x}.\vec{\nabla} \ \omega \ = \ 0 \tag{2.21}$$

também,

$$x_i \partial_i A'_0 - x_i \Pi'_i - \frac{\mu}{2} \varepsilon_{ij} x_i A'_j \ = 0$$

resulta,

$$x_i \partial_i \partial_0 \omega = 0$$

que é satisfeita por (2.21). Entre possiveis soluções de (2.21) temos as funções homogêneas de ordem 1. A fixação do gauge deve ser feita então pela imposição de condições de contorno a (2.21) de modo a termos $\omega = cte.$.

Aqui, mudaremos de notação denotando os vínculos na forma:

$$\Phi_1 = \Pi_0$$

$$\Phi_2 = \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2} \varepsilon_{ij} \partial_i A_j - 2ie\Pi_{(\psi)} \psi$$

$$\Phi_3 = x_i A_i$$

$$\Phi_4 = x_i \partial_i A_0 - x_i \Pi_i - \frac{\mu}{2} \varepsilon_{ij} x_i A_j$$

Este conjunto de vínculos é de segunda classe, e devem assim ser eliminados. Note que eliminá-los é equivalente á determinação dos multiplicadores. Seguindo o procedimento usual, introduz-se a matriz Δ:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\Phi_1,\Phi_1\} & \{\Phi_1,\Phi_2\} & \{\Phi_1,\Phi_3\} & \{\Phi_1,\Phi_4\} \\ \{\Phi_2,\Phi_1\} & \{\Phi_2,\Phi_2\} & \{\Phi_2,\Phi_3\} & \{\Phi_2,\Phi_4\} \\ \{\Phi_3,\Phi_1\} & \{\Phi_3,\Phi_2\} & \{\Phi_3,\Phi_3\} & \{\Phi_3,\Phi_4\} \\ \{\Phi_4,\Phi_1\} & \{\Phi_4,\Phi_2\} & \{\Phi_4,\Phi_3\} & \{\Phi_4,\Phi_4\} \end{pmatrix}$$

que tem a forma:

$$\Delta_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vec{y}.\vec{\nabla}_y\delta^2(x-y) \\ 0 & 0 & -\vec{y}.\vec{\nabla}_x\delta^2(x-y) & 0 \\ 0 & \vec{x}.\vec{\nabla}_y\delta^2(x-y) & 0 & \vec{x}.\vec{y}\delta^2(x-y) \\ -\vec{x}.\vec{\nabla}_x\delta^2(x-y) & 0 & -\vec{x}.\vec{y}\delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix}$$

Sua inversa corresponde a,

$$\Delta^{-1}{}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{y}^2(2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-2} & 0 & (2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1} \\ -\vec{y}^2(2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-2} & 0 & (2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1} & 0 \\ 0 & (\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1} & 0 & 0 \\ (\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y)$$

ou equivalentemente,

$$\Delta^{-1}{}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{x}^2(2+\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-2} & 0 & -(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1} \\ -\vec{x}^2(2+\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-2} & 0 & -(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1} & 0 \\ 0 & -(2+\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1} & 0 & 0 \\ -(2+\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(x-y)$$

Utilizaremos a primeira forma.

A equivalência entre as duas formas acima é vista no sentido de distribuições. Por exemplo, $\Delta_{14}^{-1}(x,y)$, admite as duas formas, $(2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\delta^2(x-y)$ e $-(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}\delta^2(x-y)$. Para mostrar a equivalência, tomemos uma função teste $f(x,y) = h(x)g(y)$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\iint d^2x\, d^2y\ \Delta_{14}^{-1}(x,y)\ f(x,y) &= \iint d^2x\, d^2y\ -(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}\ \delta^2(x-y)\ f(x,y) \\
&= \iint d^2y\, d^2x\ \delta^2(x-y)\left[\ (2+\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}\ h(x)\ \right] g(y) \\
&= \int d^2x\ \left[\ (2+\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}\ h(x)\ \right] g(x) \\
&= \int d^2x\ h(x)\ (-)(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1} g(x) \\
&= \iint d^2x\, d^2y\ \delta^2(x-y)\ h(x)\ (-)(\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1} g(y) \\
&= \iint d^2x\, d^2y\ \delta^2(x-y)\ (-)(\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\ (\ h(x)\ g(y)\ ) \\
&= \iint d^2x\, d^2y\ (2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\delta^2(x-y) f(x,y) \\
\Rightarrow\ \Delta_{14}^{-1}(x,y) &= -(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}\delta^2(x-y) = (2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\delta^2(x-y)
\end{aligned}
$$

Os parênteses de Dirac são dados por,

$$\{A(x), B(y)\}^D = \{A(x), B(y)\}^* - \int d^2\zeta\ d^2\eta\ \{A(x), \Omega_a(\zeta)\}^*\ \Delta_{ab}^{-1}(\zeta,\eta)\ \{\Omega_b(\eta), B(y)\}^*$$

e resultam,

$$\{A_0(x), A_i(y)\}^D = \partial_{iy}\Delta_{12}^{-1}(x,y) + y_i\Delta_{14}^{-1}(x,y)$$

$$\{A_0(x), \Pi_i(y)\}^D = \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ki}\partial_{ky}\Delta_{12}^{-1}(x,y) - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ki}y_k\Delta_{14}^{-1}(x,y)$$

$$\{A_0(x), \psi_\alpha(y)\}^D = ie\psi_\alpha(y)\Delta_{12}^{-1}(x,y)$$

$$\{A_0(x), \Pi_{(\psi)\alpha}(y)\}^D = -ie\Pi_{(\psi)\alpha}(y)\Delta_{12}^{-1}(x,y)$$

$$\{A_{i(x)}, \Pi_{j(y)}\}^D = -\delta_{ij}\delta^2(x-y) - y_j(2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\partial_{iy}\delta^2(x-y)$$

$$\{\Pi_{i(x)}, \Pi_{j(y)}\}^D = \left(-\frac{\mu}{2}\varepsilon_{ki}y_j + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{kj}y_i \right)(2+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\partial_{ky}\delta^2(x-y) - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}(1+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\delta^2(x-y)$$

$$\{\Pi_{i(x)}, \psi_{\alpha(y)}\}^D = ie\psi_{\alpha(y)}y_i(1+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\delta^2(x-y)$$

$$\{\Pi_{i(x)}, \Pi_{(\psi)\alpha(y)}\}^D = -ie\Pi_{(\psi)\alpha(y)}y_i(1+\vec{y}.\vec{\nabla}_y)^{-1}\delta^2(x-y)$$

$$\{\psi_{\alpha(x)}, \Pi_{(\psi)\beta(y)}\}^D = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

Temos também,

$$\{E_i, E_j\}^D = -\mu\varepsilon_{ij}\delta^2(x-y)$$

$$\{E_i, B\}^D = \varepsilon_{ij}\partial_{jy}\delta^2(x-y)$$

$$\{B, B\}^D = 0$$

Eqs. de movimento:

Uma vez calculados os parênteses de Dirac temos que os vínculos valem fortemente e daí podem ser substituídos em $\mathcal{H}_c$, resultando :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= \int d^2y \left(\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_iA_j + \frac{\mu^2}{8}A_iA_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \right. \\ &\left. + 2\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + 2mi\Pi_{(\psi)}\gamma^0\psi - 2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^iA_i\psi \right)\end{aligned}$$

As eqs. são,

$$\dot{\psi}_\alpha = \{\psi_\alpha, \mathcal{H}_c\}^D = ieA_0\psi_\alpha - \gamma^0\gamma^i\partial_i\psi - im\gamma^0\psi + ie\gamma^0\gamma^iA_i\psi$$

que corresponde a eq. de Dirac.

Também,

$$\dot{\Pi}_{(\psi)\alpha} = -ie\Pi_{(\psi)\alpha}A_0 - \partial_i(\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i)_\alpha + im(\Pi_{(\psi)}\gamma^0)_\alpha - ie(\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i)_\alpha A_i$$

$$\dot{A}_0 = (\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}(2iex_i\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\psi + x_i\nabla^2 A_i) + \partial_i A_i$$

e,

$$\dot{A}_i = -\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j + \partial_i A_0$$

que corresponde a definição do momento Π_i.

Finalmente, tem-se,

$$\dot{\Pi}_i = \frac{\mu^2}{4}A_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_j - 2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\psi - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j A_0 + \partial_j F_{ij}$$

A parte física de A_i é dada pela sua componente transversa,

$$A_i^t = (\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)A_j$$

Daí

$$\begin{aligned}\ddot{A}_i^t &= (\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)\ddot{A}_j \\ &= (\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)(-\dot{\Pi}_j - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{jk}\dot{A}_k + \partial_j\dot{A}_0)\end{aligned}$$

Substituindo $\dot{\Pi}_j$, $\dot{A}_k$ e $\dot{A}_0$ por suas respectivas expressões tem-se,

$$\begin{aligned}\ddot{A}_i^t &= (\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)\,[-\frac{\mu^2}{2}A_j + \mu\varepsilon_{jk}\Pi_k + 2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^j\psi - \partial_k F_{jk} + \\ &\quad + \partial_j(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}x_k(2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^k\psi) + \partial_j(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}x_k\nabla^2 A_k + \partial_j\partial_k A_k]\end{aligned}$$

Mas,

$$(\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)(\mu\varepsilon_{jk}\Pi_k) = \mu\varepsilon_{ij}\Pi_j^t$$

$$(\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)\partial_j(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}x_k(2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^k\psi) = 0$$

$$(\delta_{ij} - \partial_i\nabla^{-2}\partial_j)\partial_j(\vec{x}.\vec{\nabla}_x)^{-1}x_k\nabla^2 A_k = 0$$

$$(\delta_{ij} - \partial_i \nabla^{-2} \partial_j)\partial_j \partial_k A_k = 0$$

$$J_\mu = 2ie\Pi_{(\psi)}\gamma_0\gamma_\mu\psi$$

daí,

$$\ddot{A}_i^t = \nabla^2 A_i^t - \mu^2 A_i^t + J_i^t{}_{eff}$$

isto é,

$$(\Box + \mu^2)A_i^t = J_i^t{}_{eff}$$

onde,

$$J_i^t{}_{eff} = 2ie\mu\varepsilon_{ij}\partial_j\nabla^{-2}\Pi_{(\psi)}\psi - J_i^t.$$

(ii) Gauge de Coulomb.

Este gauge é definido pela relação:

$$\Omega_1 = \partial_i A_i = 0 \tag{2.22}$$

e temos,

$$\dot{\Omega}_1 \cong 0 \cong \{\Omega_1, \mathcal{H}_c\}^* + \int d^2y \ \lambda'\{\Omega_1, \Lambda'\}^*$$

que resulta numa equação para o multiplicador Λ'. Tomando o parênteses entre Ω_1 e $\mathcal{H}_c$ produz-se,

$$\Omega_2 = \nabla^2 A_0 - \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \ .$$

que é tomado como condição subsidiária. Temos que, $\dot{\Omega}_2 \cong 0$ fornece uma equação em $\lambda^{(1)}$ e λ', não gerando assim novos vínculos.

Condições $\Omega_1 = 0$ e $\Omega_2 = 0$ satisfazem $det(\ \{\Omega_a, \phi_b\} \ ) \neq 0$, sendo então condições necessárias para um bom gauge. Considere A_μ uma configuração de potenciais de gauge que não verifica $\Omega_a(A_\mu) = 0$. Seja $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$. Queremos que $\Omega_a(A'_\mu) = 0$. De $\Omega_1(A'_\mu) = 0$ obtem-se,

$$\omega = \nabla^{-2}(\ \partial_i A_i\ ) + f \tag{2.23}$$

onde f é tal que $\nabla^2 f = 0$. A outra condição $\Omega_2(A'_\mu)$ constitui-se numa identidade, não restringindo então a forma de f. Daí, basta tomar ω dado na forma (2.23). Com isso mostrmos que os gauges adotados são atingíveis. Considere agora A_μ e A'_μ configurações satisfazendo $\Omega_a = 0$. Daí, se obtem que

$$\nabla^2 \omega = 0$$

Adotando condições de contorno apropiadas podemos tomar $\omega = cte.$, e com isso satisfaz-se o critério da fixação do gauge.

Denotaremos os vínculos da teoria por,

$$\Phi_1 = \Pi_0$$

$$\Phi_2 = \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - 2ie\Pi_{(\psi)}\psi$$

$$\Phi_3 = \partial_i A_i$$

$$\Phi_4 = \nabla^2 A_0 - \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j$$

A matriz $\Delta = (\ \{\Phi_i, \Phi_j\}\ )$ tem a forma,

$$\Delta_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2\ \delta^2(x-y) \\ 0 & 0 & -\nabla_x^2\ \delta^2(x-y) & 0 \\ 0 & \nabla_x^2\ \delta^2(x-y) & 0 & -\nabla_x^2\ \delta^2(x-y) \\ \nabla_x^2\ \delta^2(x-y) & 0 & \nabla_x^2\ \delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix}$$

A sua inversa fica,

$$\Delta^{-1}{}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_y^{-2}\,\delta^2{}_{(x-y)} & 0 & \nabla_y^{-2}\,\delta^2{}_{(x-y)} \\ -\nabla_y^{-2}\,\delta^2{}_{(x-y)} & 0 & \nabla_y^{-2}\,\delta^2{}_{(x-y)} & 0 \\ 0 & -\nabla_y^{-2}\,\delta^2{}_{(x-y)} & 0 & 0 \\ -\nabla_y^{-2}\,\delta^2{}_{(x-y)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os parênteses de Dirac são,

$$\begin{aligned}
\{A_{0(x)}, \Pi_{i(y)}\}^D &= -\mu\varepsilon_{ij}\partial_{jy}\Delta_{12}^{-1}{}_{(x-y)} \\
\{A_{0(x)}, \psi_{\alpha(y)}\}^D &= ie\psi_{\alpha(y)}\Delta_{12}^{-1}{}_{(x-y)} \\
\{A_{0(x)}, \Pi_{(\psi)\alpha(y)}\}^D &= -ie\Pi_{(\psi)\alpha(y)}\Delta_{12}^{-1}{}_{(x-y)} \\
\{A_{i(x)}, \Pi_{j(y)}\}^D &= (\ -\delta_{ij} + \partial_i\nabla^{-2}\partial_j\ )\delta^2{}_{(x-y)} \\
\{\Pi_{i(x)}, \Pi_{j(y)}\}^D &= \frac{\mu}{2}(\ \varepsilon_{jk}\partial_k\nabla^{-2}\partial_i - \varepsilon_{ik}\partial_k\nabla^{-2}\partial_j\ )\delta^2{}_{(x-y)} \\
\{\Pi_{i(x)}, \psi_{\alpha(y)}\}^D &= -ie\psi_{\alpha(y)}\partial_{iy}\Delta_{12}^{-1}{}_{(x-y)} \\
\{\Pi_{i(x)}, \Pi_{(\psi)\alpha(y)}\}^D &= ie\Pi_{(\psi)\alpha(y)}\partial_{iy}\Delta_{12}^{-1}{}_{(x-y)} \\
\{\psi_{\alpha(x)}, \Pi_{(\psi)\beta(y)}\}^D &= -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta^2{}_{(x-y)}
\end{aligned}$$

tem-se também,

$$\{E_i, E_j\}^D = -\mu\varepsilon_{ij}\delta^2{}_{(x-y)}$$

$$\{E_i, B\}^D = \varepsilon_{ij}\partial_{jy}\delta^2{}_{(x-y)}$$

$$\{B, B\}^D = 0$$

Aqui obteve-se os mesmos resultados para os parênteses entre os $E_i's$ e $B's$ no gauge de Poincaré. Isto de fato teria de ocorrer, uma vez que essas quantidades eram invariantes de gauge. O termo de C.S. origina também parênteses não nulos para as componentes de $\Pi_{i(x)}$.

Sustituindo os vínculos anteriores na hamiltoniana canônica tem-se,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= \int d^2y \; (\; \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j + \frac{\mu^2}{8}A_iA_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \\ &\quad + 2\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + 2mi\Pi_{(\psi)}\gamma^0\psi - 2ie\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i A_i\psi \;)\end{aligned}$$

As eqs. de movimento que se obtêm são análogas às que foram obtidas no gauge de Poincaré, exceto por:

$$\dot{A}_0 = \nabla^{-2} \; (\; -\mu\varepsilon_{ij}\partial_i\Pi_j - 2ie\partial_i \; (\; \Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\psi \;) \;)$$

Capítulo 3

Propagadores da Teoria Livre

No cálculo de propagadores por integrais de caminho, faz-se integrações sobre as diversas configurações dos campos. Para sistemas descritos por lagrangeanas singulares, tem-se a presença de vínculos, $\phi_a = 0$, envolvendo os campos, de modo que, as integrações funcionais sobre estes devem respeitar tais relações. Faddeev [10] resolveu este problema para a situação de um sistema sujeito apenas a vínculos de primeira classe. Uma extensão ao caso de sistemas sujeitos a vínculos de segunda classe foi feita por Senjanovic [11]. No método de Faddeev, tem-se a seguinte expressão para o funcional gerador,

$$Z\,[J] \;=\; N \int \prod_i [d\phi_i] \; \prod_j \delta\,[\Omega_j]\, det(\{\phi_a, \chi\})\; exp\left\{ i \int d^3x \;\left[\, \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{H}_c + J^\mu A_\mu \,\right]\right\} \tag{3.1}$$

onde ϕ_i são os campos da teoria e, $\Omega_i \equiv (\phi_a, \chi_b)$ os vínculos, sendo : ϕ_a de primeira classe e χ_b os de fixação de gauge que verificam,

$$det(\{\phi_a, \chi_b\}) \neq 0$$

Embora a forma do funcional gerador incorpore os vínculos de gauge, pode-se mostrar que Z[J] independe deles.

A seguir, calcularemos o propagador para o campo de M.C.S. livre. A teoria livre apresenta os vínculos, $\phi_1 = \Pi_0$ e $\phi_2 = \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j$ que são de primeira classe. Daí, devemos usar o método de Faddeev.

(i) Gauge de Poincaré

Aqui temos,

$$\chi_1 = x_i A_i$$

$$\chi_2 = -x_i \partial_i A_0 + x_i \Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij} x_i A_j$$

(por conveniência, adotou-se para χ_2 uma forma distinta daquela do cap.2) Temos também,

$$(\{\phi_a, \chi_b\}) = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{y}.\vec{\nabla}_y \delta^2(x-y) \\ \vec{y}.\vec{\nabla}_y \delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix}$$

daí, $det(\{\phi_a, \chi_b\}) \neq 0$, e independe dos campos de modo que pode ser absorvido em N. O funcional gerador se escreve então como,

$$\begin{aligned} Z\,[J] &= N \int [\, dA_\mu \,]\,[\, d\Pi_\mu \,]\,\delta\,[\, \Pi_0 \,]\,\delta\,[\, \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \,]\,\delta\,[\, x_i A_i \,]\,\delta\,[\, -x_i \partial_i A_0 + \\ &\quad + x_i \Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij} x_i A_j \,]\, exp\,\{\, i \int d^3x\,[\, -\Pi_i \dot{A}_i - \frac{1}{4}\Pi_0^2 - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j \\ &\quad -\frac{\mu^2}{8} A_i^2 - \frac{1}{2}(\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j \,)^2 + \Pi_i \partial_i A_0 + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j A_0 + J_0 A_0 - J_i A_i \,]\,\} \end{aligned}$$

usando a delta funcional $\delta\,[\, \Pi_0 \,]$, a integração em Π_0 resulta,

$$Z\,[J] = N \int [\, dA_\mu \,]\,[\, d\Pi_i \,]\,\delta\,[\, \partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \,]\,\delta\,[\, x_i A_i \,]\,\delta\,[\, -x_i \partial_i A_0 +$$

$$+ x_i\Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}x_iA_j\ ]exp\ \{\ i\int d^3x\ [\ -\Pi_i\dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_iA_j -$$
$$- \frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}(\ \varepsilon_{ij}\partial_iA_j\ )^2 + \Pi_i\partial_iA_0 + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_iA_jA_0 + J_0A_0 - J_iA_i\ ]\ \}$$

As outras deltas funcionais, na forma em que se encontram, não nos permite sua utilização de maneira vantajosa. Daí introduzimos os campos η, ζ, ξ, e escrevemos as deltas funcionais como integrações sobre esses campos,

$$Z\ [J] \;=\; N\int[\ dA_\mu\ ]\ [\ d\Pi_i\ ]\ [\ d\eta\ ]\ [\ d\zeta\ ]\ [\ d\xi\ ]\ exp\ \{\ i\int d^3x\ [\ -\Pi_i\dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{\mu^2}{8}A_i^2$$
$$- \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_iA_j - \frac{1}{2}(\ \varepsilon_{ij}\partial_iA_j\ )^2 + \Pi_i\partial_iA_0 + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_iA_jA_0 + J_0A_0 - J_iA_i +$$
$$\eta\ (\ \partial_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j\ ) + \zeta\ (\ -x_i\partial_iA_0 + x_i\Pi_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}x_iA_j\ ) + \xi x_iA_i\ ]\ \}$$

<u>integração em Π_i</u>

Devemos integrar,

$$\int[\ d\Pi_i\ ]\ exp\ \{\ i\int d^3x\ [\ -\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \Pi_i\ (\ -\dot{A}_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j + \partial_iA_0 - \partial_i\eta + x_i\zeta\ )\ ]\ \}$$

Uma maneira de se resolver integrais desse tipo se suporta nos seguintes argumentos (por sua vez bem pouco rigoroso):

(i) fazemos uma expansão das quantidades Π_i *e* $-\dot{A}_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j + \partial_iA_0 - \partial_i\eta + x_i\zeta$ em termos de um conjunto de funções ortonormais $\{\phi_n\}$:

$$\Pi_i = \sum_n a_n\phi_{ni}$$

$$-\dot{A}_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j + \partial_iA_0 - \partial_i\eta + x_i\zeta = \sum_n b_n\phi_{ni}$$

(ii) e consideramos que a medida se transforma na forma:

$$[\ d\Pi_i\ ] \;\rightarrow\; \prod_n da_n$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\int d^3x \quad & [-\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \Pi_i \, (-\dot{A}_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j + \partial_i A_0 - \partial_i \eta + x_i \zeta)] = \\
= \quad & \sum_n \sum_m -\frac{1}{2} a_n a_m \int d^3x \; \phi_{ni}\phi_{mi} + a_n b_m \int d^3x \; \phi_{ni}\phi_{mi} \\
= \quad & \sum_n \sum_m -\frac{1}{2} a_n a_m \delta_{nm} + a_n b_m \delta_{nm} \\
= \quad & \sum_n -\frac{1}{2} a_n^2 + a_n b_n \\
= \quad & \sum_n -\frac{1}{2} \, (a_n - b_n)^2 + \frac{1}{2} b_n^2
\end{aligned}
$$

que resulta,

$$
\begin{aligned}
\int [\, d\Pi_i \,] \, exp \{ \quad \} \quad & = \quad cte. \, exp \, \{ \, \frac{i}{2} \sum_n b_n^2 \, \} \\
& = \quad cte. \, exp \, \{ \, \frac{i}{2} \int d^3x \, (-\dot{A}_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j + \partial_i A_0 - \partial_i \eta + x_i \zeta)^2 \, \}
\end{aligned}
$$

Daí o funcional gerador fica,

$$
\begin{aligned}
Z \, [J] \quad = \quad N \int & [\, dA_\mu \,] \, [\, d\eta \,] \, [\, d\zeta \,] \, [\, d\xi \,] \, exp \, \{ \, i \int d^3x \, [-\frac{\mu^2}{8} A_i^2 - \frac{1}{2} \, (\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j \,)^2 - J_i A_i \\
& - \eta \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + \xi x_i A_i + \frac{1}{2} \, (\dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j \,)^2 - \zeta x_i \dot{A}_i - \zeta x_i \partial_i \eta + \\
& + \frac{1}{2}\zeta^2 x^2 + \frac{1}{2} \, (\, \partial_i (A_0 - \eta) \,)^2 + (\, \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j \,) \, \partial_i \, (-A_0 + \eta \,) + \\
& + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j A_0 + J_0 A_0 \,] \, \}
\end{aligned}
$$

<u>integração em A_0</u>

Na integração em A_0, é conveniente fazer a mudança de variáveis, $-A_0 + \eta \;\rightarrow\; A_0'$, daí, $[\, dA_0 \,] \;\rightarrow\; [\, dA_0' \,]$ e então,

$$
\begin{aligned}
\int [\, dA_0 \,] \, exp \, \{ \quad \} \quad \rightarrow \quad & exp \, \{ \, i \int d^3x \, (\, \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0 \eta \,) \, \}. \\
& . \int [\, dA_0' \,] \, exp \, \{ \, i \int d^3x \, [-\frac{1}{2} A_0' \nabla^2 A_0' -
\end{aligned}
$$

$$-A_0' \,(\, \partial_i \dot{A}_i + \mu \varepsilon_{ij} \partial_i A_j + J_0 \,) \,] \,\}$$

Fazendo expansões do campo A_0' e de ∂_i $(\dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0\,)$ em termos de um conjunto completo de autofunções do operador ∇^2, $\nabla^2 \phi_n = \lambda_n \phi_n$, tem-se,

$$\int d^3x \,[\quad] \;\rightarrow\; \sum_n -\frac{1}{2}\lambda_n \,(\, a_n - \frac{b_n}{\lambda_n}\,)^2 + \frac{b_n^2}{2\lambda_n}$$

e resulta,

$$\begin{aligned}
\int [\, dA_0 \,] \, exp \,\{\quad\} \;&=\; cte.\, exp \,\{\, i \int d^3x \,(\, \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0 \,)\, \eta \,+ \\
&+ \frac{i}{2} \,(\, \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0 \,)\, \nabla^{-2} \,(\, \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l + J_0 \,)\}
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
Z\,[J] \;=\; \mathcal{N} \int &[\, dA_i \,]\,[\, d\eta \,]\,[\, d\zeta \,]\,[\, d\xi \,]\, exp \,\{\, i \int d^3x \,[\, -\frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}\,(\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j \,)^2 - J_i A_i \\
&- \eta \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + \xi x_i A_i + \frac{1}{2}\,(\dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\,)^2 - \zeta x_i \dot{A}_i - \zeta x_i \partial_i \eta + \frac{1}{2}\zeta^2 x^2 \\
&+ \frac{1}{2}\,(\, \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0 \,)\, \nabla^{-2} \,(\, \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l + J_0 \,) \,+ \\
&+ (\, \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0 \,)\, \eta \,]\,\}
\end{aligned}$$

<u>integração em ζ</u>

$$\begin{aligned}
\int [\, d\zeta \,]\, exp \,\{\, i \int d^3x \,[\, \frac{1}{2}\zeta^2 x^2 - \zeta \,(\, x_i \dot{A}_i + x_i \partial_i \eta \,)\,]\,\} \;=& \\
=\; \int [\, d\zeta \,]\, exp \,\{\, i \int d^3x \,[\, \frac{1}{2}\zeta^2 x^2 - x^2 \zeta \,\frac{(\, x_i \dot{A}_i + x_i \partial_i \eta \,)}{x^2}\,]\,\}&
\end{aligned}$$

Desta vez usaremos um conjunto de autofunções ortonomais com peso x^2, isto é, tal que se tenha, $\int d^2x \;\phi_n x^2 \phi_m = \delta_{nm}$. Daí, fazendo as expansões usuais obtêm-se,

$$\int [\, d\zeta \,]\, exp \,\{\quad\} \;\rightarrow\; cte.\, exp \,\{\, -\frac{i}{2} \int d^3x \,\frac{(\, x_i \dot{A}_i + x_i \partial_i \eta \,)^2}{x^2} \,\}$$

o que nos leva à,

$$\begin{aligned} Z\,[J] \;=\; & N \int [\, dA_i \,]\,[\, d\eta \,]\,[\, d\xi \,]\; exp\,\{\, i \int d^3x\, [\, -\frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}\,(\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j \,)^2 - J_i A_i + \\ & + \xi x_i A_i + \frac{1}{2}\,(\dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\,)^2 + \eta J_0 - \frac{1}{2}\frac{(\, x_i\dot{A}_i + x_i\partial_i\eta\,)^2}{x^2} + \\ & + \frac{1}{2}\,(\, \partial_i\dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0\,)\, \nabla^{-2}\,(\, \partial_k\dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l + J_0\,)\,]\,\} \end{aligned}$$

<u>integração em η</u>

$$\begin{aligned} & \int [\, d\eta\,]\; exp\,\{ i \int d^3x\,[\, -\frac{1}{2}\frac{(\, x_i\dot{A}_i + x_i\partial_i\eta\,)^2}{x^2} + \eta J_0\,]\,\} = exp\,\{ i \int d^3x\, [-\frac{1}{2x^2}(x_i\dot{A}_i)^2]\} \\ & .\int [\, d\eta\,]\; exp\,\{\, i \int d^3x\,[\, \eta\frac{1}{2x^2}\,(\, \vec{x}.\vec{\nabla}\,)^2\eta + \eta\,(\, J_0 - \frac{x_i\dot{A}_i}{x^2} + \frac{x_i x_j}{x^2}\partial_j\dot{A}_i\,)\,]\,\} \end{aligned}$$

o resultado é,

$$\begin{aligned} & \int [\, d\eta\,]\; exp\,\{\quad\} \;=\; exp\{\, i \int d^3x\; - \frac{1}{2x^2}\,(\, x_i\dot{A}_i\,)^2\,\}\,. \\ & .\, exp\,\{ -\frac{i}{4}\int d^3x\,(J_0 - \frac{x_i\dot{A}_i}{x^2} + \frac{x_i x_j}{x^2}\partial_j\dot{A}_i)2x^2\frac{1}{(\,2+\vec{x}.\vec{\nabla})^2}(J_0 - \frac{x_k\dot{A}_k}{x^2} + \frac{x_k x_l}{x^2}\partial_l\dot{A}_k)\} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} Z\,[J] \;=\; & N \int [\, dA_i\,]\,[\, d\xi\,]\; exp\,\{\, i\int d^3x\,[\, -\frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}\,(\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)^2 - J_i A_i + \xi x_i A_i + \\ & + \frac{1}{2}(\dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j)^2 + \frac{1}{2}(\, \partial_i\dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0\,)\nabla^{-2}(\, \partial_k\dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l + J_0\,) \\ & - \frac{1}{2}\,(\, J_0 - \frac{x_i\dot{A}_i}{x^2} + \frac{x_i x_j}{x^2}\partial_j\dot{A}_i\,)\; x^2\,(\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-2}\,(\, J_0 - \frac{x_k\dot{A}_k}{x^2} + \frac{x_k x_l}{x^2}\partial_l\dot{A}_k\,) - \\ & - \frac{1}{2x^2}\,(\, x_i\dot{A}_i\,)^2\,]\,\} \end{aligned}$$

Mas, tem-se que,

$$\int d^3x\,\frac{1}{2}\,(\, \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\,)^2 \;=\; \int d^3x\; \dot{A}_i\,\frac{1}{2}\,(\, \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}A_j\,) + \frac{\mu^2}{8}A_i^2$$

$$\int d^3x \ \frac{1}{2} (\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + J_0 \ ) \ \nabla^{-2} \ (\ \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l + J_0 \ ) \ =$$
$$= \int d^3x \ \{ \ \frac{1}{2} \ (\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \ ) \ \nabla^{-2} \ (\ \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l \ ) +$$
$$+ (\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \ ) \ \nabla^{-2} \ J_0 + \frac{1}{2} \ J_0 \ \nabla^{-2} \ J_0 \ \}$$

$$\int d^3x \ - \frac{1}{2}(\ J_0 - \frac{x_i \dot{A}_i}{x^2} + \frac{x_i x_j}{x^2}\partial_j \dot{A}_i \ )x^2(\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-2}(\ J_0 - \frac{x_k \dot{A}_k}{x^2} + \frac{x_k x_l}{x^2}\partial_l \dot{A}_k \ )$$
$$= \int d^3x \ - \frac{1}{2} \ J_0 \ x^2 \ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-2} \ J_0 + J_0 \ (\ \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-1} \ x_i \dot{A}_i +$$
$$+ \frac{1}{2} \ \frac{x_j}{x^2} \ (\ \partial_j \ (\ x_i \dot{A}_i \ ) \ ) \ (\ \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-1} \ x_l \dot{A}_l$$

e também,

$$\int d^3x \ - \frac{1}{2x^2} \ (\ x_i \dot{A}_i \ )^2 + \frac{1}{2} \ \frac{x_j}{x^2} \ (\ \partial_j \ (\ x_i \dot{A}_i \ ) \ ) \ (\ \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-1} \ x_l \dot{A}_l \ = \ 0$$

o que resulta,

$$\begin{aligned} Z\,[J] \ &= \ N \ \int [\ dA_i \ ] \ [\ d\xi \ ] \ exp \ \{ \ i \int d^3x \ [\ \frac{1}{2}\dot{A}_i \ (\ \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}A_j \ ) - \frac{1}{2} \ (\ \varepsilon_{ij}\partial_i A_j \ )^2 - \\ &- J_i A_i + \xi x_i A_i + \frac{1}{2}(\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \ ) \ \nabla^{-2} \ (\ \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l \ ) + \\ &+ (\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \ ) \ \nabla^{-2} \ J_0 + \frac{1}{2} \ J_0 \ \nabla^{-2} \ J_0 - \frac{1}{2} \ J_0 \ x^2 \ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-2} \ J_0 + \\ &+ J_0 \ (\ \vec{x}.\vec{\nabla} \ )^{-1} \ x_i \dot{A}_i \ ] \ \} \end{aligned}$$

No que se segue, é conveniente expresarmos o campo A_i em termos de suas componentes longitudinal e transversa. Daí obtêm-se,

$$\int d^3x \ \frac{1}{2}\dot{A}_i \ (\ \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}A_j \ ) \ =$$
$$= \int d^3x \ (\ \frac{1}{2}\dot{A}_i^t \dot{A}_i^t + \frac{1}{2}\dot{A}_i^l \dot{A}_i^l + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\dot{A}_i^t A_j^t + \mu\varepsilon_{ij}\dot{A}_i^t A_j^l + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\dot{A}_i^l A_j^l \ )$$

$$\int d^3x\ \frac{1}{2}\ (\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )\ \nabla^{-2}\ (\ \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l\ )\ =$$

$$= \int d^3x\ -\frac{\mu^2}{2}\ A_i^t A_i^t - \frac{1}{2}\dot{A}_i^l \dot{A}_i^l + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j^t\ \nabla^{-2}\partial_k \dot{A}_k^l$$

$$\int d^3x\ (\ \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )\ \nabla^{-2}\ J_0\ =$$

$$= \int d^3x\ (\ A_i^t \mu\varepsilon_{ij}\partial_j \nabla^{-2} J_0 + A_i^l \partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0\ )$$

o que resulta na expressão para o funcional,

$$\begin{aligned} Z\,[J] \ \ &= \ \ N \int [\ dA_i^t\ ]\ [\ dA_i^l\ ][\ d\xi\ ]\ exp\ \{\ i \int d^3x\ [\ -\frac{1}{2}A_i^t\ (\ \Box\ +\ \mu^2\ )\ A_i^t - A_i^t\ (\ J_i - \xi x_i\ ) \\ &+ A_i^t \mu\varepsilon_{ij}\partial_j \nabla^{-2} J_0 + A_i^t x_i\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1}\ \dot{J}_0 + \mu\varepsilon_{ij}\dot{A}_i^t A_j^l - A_i^l\ (\ J_i - \xi x_i\ ) \\ &+ \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j^t\ \nabla^{-2}\ \partial_k \dot{A}_k^l + A_i^l \partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0 + A_i^l x_i\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1}\ \dot{J}_0 \\ &+ \frac{1}{2}\ J_0\ \nabla^{-2}\ J_0 - \frac{1}{2}\ J_0\ x^2\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-2}\ J_0\ ]\ \} \end{aligned}$$

<u>integração em A_i^l</u>

$$\int [\ dA_i^l\ ]\ exp\ \{\ i \int d^3x\ A_i^l\ (\ -J_i + \xi x_i + \partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0 + x_i\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1} \dot{J}_0\ )\ \}\ =$$

$$= \delta\ [\ -J_i + \xi x_i + \partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0 + x_i\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1} \dot{J}_0\ ]$$

A delta funcional acima também é equivalente a,

$$\delta\ [\ \xi - \frac{x_i}{x^2} J_i + \frac{x_i}{x^2}\partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0 + (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1} \dot{J}_0\ ]$$

O funcional gerador se escreve então na forma,

$$\begin{aligned} Z\,[J] \ \ &= \ \ N \int [\ dA_i^t\ ]\ [\ d\xi\ ]\ \delta\ [\ \xi - \frac{x_i}{x^2} J_i + \frac{x_i}{x^2}\partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0 + (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1} \dot{J}_0\ ] \\ &exp\ \{\ i \int d^3x\ [\ -\frac{1}{2}A_i^t\ (\ \Box\ +\ \mu^2\ )\ A_i^t - A_i^t\ (\ J_i - \xi x_i\ ) + A_i^t \mu\varepsilon_{ij}\partial_j \nabla^{-2} J_0 \\ &+ A_i^t x_i\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-1}\ \dot{J}_0 + \frac{1}{2}\ J_0\ \nabla^{-2}\ J_0 - \frac{1}{2}\ J_0\ x^2\ (\ 2 + \vec{x}.\vec{\nabla}\ )^{-2}\ J_0\ ]\ \} \end{aligned}$$

Usando a delta funcional, a integração em ξ resulta,

$$
\begin{aligned}
Z[J] \; = \; & N \int [\, dA_i^t \,] \, exp \, \{ \, i \int d^3x \, [\, -\frac{1}{2} A_i^t \, (\, \Box \, + \, \mu^2 \,) \, A_i^t - A_i^t J_i + A_i^t \mu \varepsilon_{ij} \partial_j \nabla^{-2} J_0 + \\
& + A_i^t x_i \, (\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \,)^{-1} \, \dot{J}_0 + \frac{1}{2} \, J_0 \, \nabla^{-2} \, J_0 - \frac{1}{2} \, J_0 \, x^2 \, (\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \,)^{-2} \, J_0 + \\
& + x_i A_i^t \, (\, \frac{x_i}{x^2} J_i - \frac{x_i}{x^2} \partial_i \nabla^{-2} \dot{J}_0 - (\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \,)^{-1} \dot{J}_0 \,) \,] \, \}
\end{aligned}
$$

Finalmente, a integração sobre A_i^t nos dá,

$$
\begin{aligned}
Z[J] \; = \; & N \, exp \, \{ \, i \int d^3x \, [\, \frac{1}{2} J_0 \, \nabla^{-2} \, J_0 - \frac{1}{2} J_0 \, x^2 \, (\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \,)^{-2} \, J_0 + \\
& + \frac{1}{2} \, (\, J_i - x_i \frac{x_j}{x^2} J_j + x_i \frac{x_j}{x^2} \partial_j \nabla^{-2} \dot{J}_0 - \mu \varepsilon_{ij} \partial_j \nabla^{-2} J_0 \,) \, . \, (\, \Box \, + \, \mu^2 \,)^{-1} \\
& . \, (\, J_i - x_i \frac{x_k}{x^2} J_k + x_i \frac{x_k}{x^2} \partial_k \nabla^{-2} \dot{J}_0 - \mu \varepsilon_{ik} \partial_k \nabla^{-2} J_0 \,) \,] \, \}
\end{aligned}
$$

Arrumando os termos, tem-se a seguinte expressão para Z,

$$
\begin{aligned}
Z[J] \; = \; & N \, exp \, \{ \, i \int d^3x \, \frac{1}{2} J_0 \, \{ \nabla^{-2} - x^2 (2 + \vec{x}.\vec{\nabla})^{-2} - \mu^2 \nabla^{-2} (\Box + \mu^2)^{-1} + \\
& + [-2\mu \varepsilon_{ij} \partial_j \frac{\partial}{\partial z_0} \nabla^{-2} x_i + \frac{\partial^2}{\partial^2 z_0} (2 + \vec{x}.\vec{\nabla}) \nabla^{-2}] (\Box + \mu^2)^{-1} \frac{1}{x^2} (\vec{x}.\vec{\nabla}) \nabla^{-2} \} \, J_0 + \\
& + 2 J_0 \, \mu \varepsilon_{kj} \partial_j (\Box + \mu^2)^{-1} \nabla^{-2} (\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{x^2}) \, J_i + J_i \, (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x^2}) (\Box + \mu^2)^{-1} \, J_j \, \}
\end{aligned}
$$

donde se tem os propagadores,

$$
\begin{aligned}
K_{00} \; = \; & \frac{1}{2} \, [\, \nabla^{-2} - x^2 (\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \,)^{-2} - \mu^2 \nabla^{-2} (\, \Box \, + \, \mu^2 \,)^{-1} + (\, -2\mu \varepsilon_{ij} \partial_j \frac{\partial}{\partial z_0} \nabla^{-2} x_i + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial^2 z_0} (\, 2 + \vec{x}.\vec{\nabla} \,) \nabla^{-2} \,) . (\, \Box \, + \, \mu^2 \,)^{-1} \frac{1}{x^2} (\, \vec{x}.\vec{\nabla} \,) \nabla^{-2} \,] \, \delta^2(x-y) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

$$
K_{0i} \; = \; 2\mu \varepsilon_{kj} \partial_j (\, \Box \, + \, \mu^2 \,)^{-1} \nabla^{-2} (\, \delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{x^2} \,) \, \delta^2(x-y) \qquad (3.3)
$$

$$
K_{ij} \; = \; (\, \Box \, + \, \mu^2 \,)^{-1} \, (\, \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x^2} \,) \, \delta^2(x-y) \qquad (3.4)
$$

(ii) Gauge de Coulomb

Aqui temos,

$$\chi_1 = \partial_i A_i$$

$$\chi_2 = A_0 - \nabla^{-2}(\mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j)$$

(aqui trataremos com χ_2 distinto da forma usada no cap. 2) Temos também,

$$(\{\phi_a, \chi_b\}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^2(x-y) \\ -\nabla^2\delta^2(x-y) & 0 \end{pmatrix}$$

daí, $det(\{\phi_a, \chi_b\}) \neq 0$, e independe do campo sendo então absorvido em N. O funcional gerador se escreve então

$$\begin{aligned} Z\,[J] \;=\; & N \int [\,dA_\mu\,]\,[\,d\Pi_\mu\,]\,\delta\,[\,\Pi_0\,]\,\delta\,[\,\partial_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,]\,\delta\,[\,\partial_i A_i\,]\,\delta\,[\,A_0 - \\ & - \nabla^{-2}\,(\,\mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)\,]\; exp\,\{\,i \int d^3x\,[\,-\Pi_i\dot{A}_i - \frac{1}{4}\Pi_0^2 - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j - \\ & - \frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}(\,\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)^2 + \Pi_i\partial_i A_0 + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j A_0 + J_0 A_0 - J_i A_i\,]\,\} \end{aligned}$$

A integração em Π_0 é feita imediatamente usando $\delta\,[\,\Pi_0\,]$. Novamente, introduzindo os campos η, ζ, ξ, escrevemos as deltas funcionais restantes como integrações funcionais destes campos, de modo que o funcional Z resulta,

$$\begin{aligned} Z\,[J] \;=\; & N \int [\,dA_\mu\,]\,[\,d\Pi_i\,]\,[\,d\eta\,]\,[\,d\zeta\,]\,[\,d\xi\,]\; exp\,\{i \int d^3x\,[-\Pi_i\dot{A}_i - \frac{1}{2}\Pi_i^2 - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j \\ & - \frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}(\,\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)^2 + \Pi_i\partial_i A_0 + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j A_0 + J_0 A_0 - J_i A_i + \\ & + \eta\,(\,\partial_i\Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,) + \zeta\,(\,A_0 - \nabla^{-2}\,(\mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j)\,) + \xi\,(\,\partial_i A_i\,)\,]\,\} \end{aligned}$$

<u>integração em Π_i</u>

$$\int [\, d\Pi_i \,]\, exp\, \{\, i \int d^3x\, [\, -\frac{1}{2}\Pi_i^2 + \Pi_i\, (\, -\dot{A}_i + \partial_i A_0 - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j - \partial_i \eta\,)\,]\,\} \; =$$

$$= \; cte.\, exp\, \{\, \frac{i}{2} \int d^3x\, (\, \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\,)^2 + 2(\, \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\,)\partial_i\, (\, \eta - A_0\,) +$$

$$+ (\, \partial_i\, (\, \eta - A_0\,)\,)^2\, \}$$

Daí,

$$Z\,[J] \; = \; N \int [\, dA_\mu\,]\, [\, d\eta\,]\, [\, d\zeta\,]\, [\, d\xi\,]\, exp\, \{\, i \int d^3x\, [\, -\frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}(\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)^2 -$$

$$- J_i A_i + \xi\, (\, \partial_i A_i\,) + \frac{1}{2}(\, \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\,)^2 + \frac{1}{2}(\, \partial_i\, (\, A_0 - \eta\,)\,)^2 +$$

$$+ \; (\, A_0 - \eta\,)\, (\, \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,) + J_0 A_0 + \zeta\, (\, A_0 - \nabla^{-2}\, (\, \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)\,)\,]\, \}$$

<u>integração em A_0</u>

Na integração sobre A_0, novamente faz-se a mudança de variáveis, $-A_0 + \eta \; \rightarrow \; A_0'$, o que resulta,

$$\int [dA_0] exp\{i \int d^3x\, [\frac{1}{2}(\partial_i(A_0 - \eta))^2 + (A_0 - \eta)(\partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j) + J_0 A_0 + \zeta A_0]\} =$$

$$= \; exp\, \{\, i \int d^3x\, [\, \zeta\eta + J_0\eta\,]\, \}\, .$$

$$.\, \int [\, dA_0'\,]\, exp\, \{\, i \int d^3x\, [\, -\frac{1}{2}A_0'\nabla^2 A_0' + A_0'\, (\, \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j + \zeta + J_0\,)\,]\, \}$$

$$= \; cte\; exp\, \{\, i \int d^3x\, [\, \zeta\eta + J_0\eta\,]\, \}\, .$$

$$.\, exp\, \{\, \frac{i}{2} \int d^3x\, [\, (\, \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)\, \nabla^{-2}\, (\, \partial_k \dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l\,) +$$

$$+ (\, \zeta + J_0\,)\, \nabla^{-2}\, (\, \zeta + J_0\,) + 2(\, \partial_i \dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)\, \nabla^{-2}\, (\, \zeta + J_0\,)\,]\, \}$$

Daí,

$$Z\,[J] \; = \; N \int [\, dA_i\,]\, [\, d\eta\,]\, [\, d\zeta\,]\, [\, d\xi\,]\, exp\, \{\, i \int d^3x\, [\, -\frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}(\, \varepsilon_{ij}\partial_i A_j\,)^2 - J_i A_i +$$

$$+\xi\ (\ \partial_i A_i\ ) + \frac{1}{2}(\ \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\ )^2 - \zeta\ \nabla^{-2}\ (\ \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ ) + \zeta\eta + J_0\eta +$$

$$+\frac{1}{2}(\ \zeta + J_0\ )\ \nabla^{-2}\ (\ \zeta + J_0\ ) + (\ \partial_i\dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )\ \nabla^{-2}\ (\ \zeta + J_0\ ) +$$

$$+\frac{1}{2}(\ \partial_i\dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )\ \nabla^{-2}\ (\ \partial_k\dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l\ )\ ]\ \}$$

<u>integração em η</u>

$$\int[\ d\eta\ ]\ exp\ \{\ i\int d^3x\ [\ \zeta\eta + J_0\eta\ ]\ \}\ =\ \delta\ [\ \zeta + J_0\ ]$$

Usando essa delta funcional, a integração em ζ é imediata, resultando,

$$Z\ [J]\ =\ N\ \int[\ dA_i\ ]\ [\ d\xi\ ]\ exp\ \{\ i\int d^3x\ [\ -\frac{\mu^2}{8}A_i^2 - \frac{1}{2}(\ \varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )^2 - J_i A_i + \xi\ (\ \partial_i A_i\ ) +$$

$$+\frac{1}{2}(\ \dot{A}_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}A_j\ )^2 + \frac{1}{2}(\ \partial_i\dot{A}_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )\ \nabla^{-2}\ (\ \partial_k\dot{A}_k + \mu\varepsilon_{kl}\partial_k A_l\ ) +$$

$$J_0\nabla^{-2}\ (\ \mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\ )\ ]\ \}$$

Fazendo a decomposição de A_i em suas componentes transversa e longitudinal tem-se,

$$Z\ [J]\ =\ N\ \int[\ dA_i^t\ ]\ [\ dA_i^l\ ]\ [\ d\xi\ ]\ exp\ \{\ i\int d^3x\ [\ -A_i^l\ (\ J_i + \partial_i\xi\ ) - \frac{1}{2}A_i^t\ (\ \Box\ +\ \mu^2\ )\ A_i^t$$

$$+\ A_i^t\ (\ -J_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_j\ \nabla^{-2}\ J_0 - \partial_i\xi\ )\ ]\ \}$$

Aqui, deve-se notar que manteve-se o termo $A_i^t\partial_i\xi = -(\partial_i A_i^t)\xi$ no integrando. A presença dele é fundamental para que se faça as integrações funcionais restantes.

<u>integração em A_i^t</u>

$$\int[\ dA_i^t\ ]\ exp\ \{i\int d^3x\ [-\frac{1}{2}A_i^t\ (\Box + \mu^2)\ A_i^t + A_i^t\ (-J_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_j\nabla^{-2}J_0 - \partial_i\xi)]\} = cte.$$

$$.exp\{\frac{i}{2}\int d^3x[(-J_i + \mu\varepsilon_{ij}\partial_j\nabla^{-2}J_0 - \partial_i\xi)(\Box + \mu^2)^{-1}(-J_i + \mu\varepsilon_{ik}\partial_k\nabla^{-2}J_0 - \partial_i\xi)]\}$$

Daí,

$$Z[J] = N\int [dA_i^l][d\xi]\, exp\,\{\, i\int d^3x\,[-A_i^l\,(J_i+\partial_i\xi) + \\ + \frac{1}{2}(-J_i+\mu\varepsilon_{ij}\partial_j\nabla^{-2}J_0-\partial_i\xi)(\Box+\mu^2)^{-1}(-J_i+\mu\varepsilon_{ik}\partial_k\nabla^{-2}J_0-\partial_i\xi)]\,\}$$

A integração em A_i^l resulta na delta funcional,

$$\delta\,[\,J_i+\partial_i\xi\,]$$

que admite a forma equivalente,

$$\delta\,[\,\nabla^{-2}\partial_i J_i+\xi\,]$$

Assim, integrando em ξ obtem-se,

$$Z[J] = N\,exp\,\{\, i\int d^3x\,[-\frac{\mu^2}{2}J_0\,(\Box+\mu^2)^{-1}\nabla^{-2}\,J_0+ \\ + J_0\,\nabla^{-2}(\Box+\mu^2)^{-1}\mu\varepsilon_{ij}\partial_j\,J_i+\frac{1}{2}J_i\,(\Box+\mu^2)^{-1}(\delta_{ij}-\partial_i\nabla^{-2}\partial_j)\,J_j]\,\}$$

donde se tem os propagadores,

$$K_{00(x,y)} = -\frac{\mu^2}{2}\,(\,\Box\,+\,\mu^2\,)^{-1}\,\nabla^{-2}\,\delta^2(x-y) \tag{3.5}$$

$$K_{0i(x,y)} = \mu\,(\,\Box\,+\,\mu^2\,)^{-1}\,\nabla^{-2}\varepsilon ij\,\partial_j\,\delta^2(x,y) \tag{3.6}$$

$$K_{ij(x,y)} = \frac{1}{2}\,(\,\Box\,+\,\mu^2\,)^{-1}\,(\,\delta_{ij}-\partial_i\nabla^{-2}\partial_j\,)\delta^2(x,y) \tag{3.7}$$

Tanto no gauge de Coulomb quanto no gauge de Poincaré, temos que os propagadores apresentam o termo comum, $(\,\Box+\mu^2\,)^{-1}$, que, no espaço dos momentos, resulta, $\frac{1}{k^2-m^2}$. Tem-se assim a presença de pólos em $k^2=\mu^2>0$ o que indica a existência de uma partícula massiva na teoria. Expressões (3.4) e (3.7) apresentam uma estrutura semelhante, sendo os operadores $(\delta_{ij}-\frac{x_ix_j}{x^2})$ e $(\delta_{ij}-\partial_i\nabla^{-2}\partial_j)$ relacionados diretamente ao gauge escolhido.

Conclusão

No estudo da quantização de nossa teoria obtivemos um sistema sujeito a vínculos de segunda classe, os quais foram eliminados usando o método de Dirac. Como condição subsidiária, consideramos os gauges de Poincaré e de Coulomb, dados respectivamente por $\Omega = x_i A_i$ e $\Omega' = \partial_i A_i = 0$. Tais escolhas apresentam características interessantes: a escolha $x_i A_i = 0$ nos diz que estamos tratando com um potencial vetor que é ortogonal ao vetor posição $\vec{x}$, enquanto que $\partial_i A_i = 0$, no espaço dos momentos, nos dá $k_i A_i = 0$, o que significa que estamos considerando A_i como tendo apenas a componente ortogonal ao momento. A cada uma dessas condições, temos de impor uma outra afim de que possamos determinar os multiplicadores presentes em $\mathcal{H}_e$. Da mesma forma que na QED usual, ao tratarmos o gauge de Coulomb, poderíamos tentar tomar $A_0 = 0$. Isto no entanto não seria possível, visto que $\dot{\Omega}' = 0 \Rightarrow \nabla^2 A_0 = \partial_i \Pi_i A + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j$ e daí, $A_0 = 0 \Rightarrow \partial_i \Pi_i A + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j = 0$ o que contraria o vínculo $\Lambda' = 0$ (ver cap.2). Tal comportamento reflete o fato de estarmos tratando uma teoria com interação, o que nos impede de tomar $A_0 = 0$. Isto é visto do seguinte modo: $\Lambda' = 0 \Rightarrow \partial_i A_i + \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j = 2ie\Pi_{(\psi)}\psi \equiv \rho$ logo, de $\dot{\Lambda}' = 0$ segue-se, $\nabla^2 A_0 = \rho \Rightarrow A_0 = \frac{1}{2\pi}\int d^2y ln|\vec{x} - \vec{y}|\rho(y) \neq 0$. Contrariamente a QED(3+1)d. no gauge de Coulomb em que se tem A_i^t e Π_i^t invariantes de gauge, no nosso problema não temos Π_i^t invariante.

Na obtenção dos propagadores livres do campo de M.C.S., utilizamos o método de Faddeev, pois a teoria livre incorporava apenas vínculos de primeira classe. Na derivação da expressão para o funcional gerador, Faddeev considerava condições subsidiárias $\chi_a' s$ que verificassem adicionalmente $\{\chi_a, \chi_b\} = 0$, o que lhe permitiria tomar os $\chi_a' s$ como novas coordenadas canônicas. Entretanto, tal consideração não parece ser necessária, visto que a expressão de Z[J] independe dos χ_a escolhidos.

Apêndice A

Quantização Dirac

Sistemas descritos por lagrangeanas singulares apresentam dificuldades na sua quantização. O método de Dirac fornece um procedimento consistente para quantizar tais sistemas. A seguir daremos uma breve exposição desse método.

Seja um sistema com N graus de liberdade $\{q_n\}$, descrito por uma lagrangeana $L(q_n, \dot{q}_n)$. Devemos dar ao sistema uma descrição hamiltoniana, daí introduzimos os momentos canônicos, p_n, as coordenadas q_n :

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \quad , \qquad n = 1.....N. \tag{A.1}$$

e definimos a função $H = p_n \dot{q}_n - L(q_n, \dot{q}_n)$, onde as velocidades $\dot{q}_n$ devem ser substituídas pelas respectivas expressões $\dot{q}_n = f(q_n, p_n)$ obtidas invertendo as equações (A.1). Isto no entanto só será possível caso $det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}) \neq 0$. Tratando com sistemas singulares tem-se $det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}) = 0$. Seja então F $= posto(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m})$. Temos que é possível eliminar F velocidades $\dot{q}_n$, surgindo também R=N-F relações do tipo $\phi(q_n, p_n) = 0$, estas relações são ditas vínculos primários. Embora não tenhamos eliminado todas as velocidades na expressão de H, tem-se que esta forma de H só é influenciada por variações de q_n e p_n. De fato :

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n. \\ &= \delta p_n \dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n. \end{aligned}$$

No caso não singular, a função H quando posta na forma $H = H(q_n, p_n)$ é dita a hamiltoniana canônica do sistema, H_c, e aqui no caso singular, por abuso de linguagem, usaremos a mesma nomenclatura. As equações de movimento do sistema são obtidas minimizando o funcional

$$S = \int dt(p_n \dot{q}_n - H_c) \quad , \tag{A.2}$$

sujeito aos vínculos $\phi_r(q_n, p_n) = 0$. Isto é obtido usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Daí, ao invés de H_c consideramos uma nova hamiltoniana,

$$H_t = H_c + u_r \phi_r(q_n, p_n). \tag{A.3}$$

Aqui, tanto H_t quanto H_c são fisicamente indistinguíveis. Os multiplicadores u_r são inicialmente funções independentes de (q_n, p_n). Daí,

$$\delta S = \delta \int dt(p_n \dot{q}_n - H_c - u_r \phi_r) = 0$$

resulta, para variações independentes de q_n e p_n (satisfazendo $\phi(q_n, p_n) = 0$) :

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \frac{\partial H_c}{\partial p_n} + u_r \frac{\partial \phi_r}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H_c}{\partial q_n} - u_r \frac{\partial \phi_r}{\partial q_n} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Definindo o parênteses de Poisson entre duas funções do espaço de fase, $f(q_n, p_n)$ e $g(q_n, p_n)$ como sendo :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} \tag{A.5}$$

temos as propriedades :

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

e daí podemos escrever (A.4) na forma :

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \{q_n, H_c\} + u_r\{q_n, \phi_r\} \\ \dot{p}_n &= \{p_n, H_c\} + u_r\{p_n, \phi_r\} \end{aligned} \tag{A.6}$$

Na forma acima pode surgir uma dúvida : sendo $\phi_r = 0$, teríamos $\{q_n, \phi_r\} = \{q_n, 0\} = 0$. Entretanto, deve-se notar que em (A.5) os parênteses são calculados levando em conta derivadas relativas a todas as variáveis do espaço de fase, de modo que as funções f e g devem ser vistas como funções definidas por todo o espaço de fase. Neste sentido, quando se calcular parênteses de Poisson envolvendo os vínculos ϕ_r, estes devem ser vistos como funções $\Phi_r = \phi_r(q_n, p_n)$, e não apenas como definindo superfícies no espaço de fase.

Poderíamos pensar também em estender o conceito de parênteses de Poisson a quantidades independentes dos $q_n's$ e $p_n's$, como os multiplicadores u_r por exemplo. Neste caso admitiremos que os parênteses de Poisson existem mas são indeterminados, valendo contudo as três propriedades anteriores. Assim, teríamos (A.6) na forma,

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_n &\cong \{q_n, H_c + u_r\phi_r\} \\
\dot{p}_n &\cong \{p_n, H_c + u_r\phi_r\}
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

ou em geral, para uma função $g(q_n, p_n)$,

$$
\dot{g} \cong \{g, H_c + u_r\phi_r\} \tag{A.8}
$$

De fato,

$$
\dot{g} \cong \{g, H_c\} + \{g, u_r\}\phi_r + u_r\{g, \phi_r\} \cong \{g, H_c\} + u_r\{g, \phi_r\}
$$

onde o símbolo $\cong$ é usado para indicar que os vínculos ϕ_r são feitos zero após termos calculados todos os parênteses de Poisson da teoria (aqui dizemos que os vínculos valem fracamente). Em outras palavras, significa que $\dot{g}$ está tomando valores sobre a superfície de vínculos.

A evolução dinâmica do sistema determina q_n e p_n como certas funções de t, $(q_n(t), p_n(t))$. Temos então uma aplicação $\gamma : I \subset \Re \rightarrow \Sigma$ onde Σ é a superfície determinada pelos vínculos $\phi_r = 0$. Mas, $\gamma(t) = (q_n(t), p_n(t))$ deve ser necessariamente uma curva em Σ, visto que $(q_n(t), p_n(t))$ deve sempre pertencer a Σ, daí devemos ter,

$$
\begin{gathered}
(\nabla \phi_{r(q_n, p_n)}).\dot{\gamma}(t) = 0 \\
\left(\frac{\partial \phi_r}{\partial q}, \frac{\partial \phi_r}{\partial p}\right).\left(\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0 \\
\frac{\partial \phi_r}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \phi_r}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial t} = \boxed{\frac{d\phi_r}{dt} = 0}
\end{gathered}
\tag{A.9}
$$

que se constitui na chamada condição de consistência dos vínculos. Vem que usando (A.8) temos que as condições (A.9) resultam :

$$
0 = \dot{\phi}_r \cong \{\phi_r, H_c\} + u_i\{\phi_r, \phi_i\} \quad (R \ \ eqs.) \tag{A.10}
$$

A análise destas R equações pode resultar nas três situações :

$$(i) \quad 0 \cong 0\,, \quad se \quad \{\phi_r, H_c\} \cong 0 \quad e \quad \{\phi_r, \phi_i\} \cong 0$$

$$(ii) \quad \{\phi_r, H_c\} \cong 0\,, \quad se \quad \{\phi_r, \phi_i\} \cong 0$$

$$(iii) \quad \text{relações do tipo, } \{\phi_r, H_c\} + u_i\{\phi_r, \phi_i\} \cong 0.$$

Inicialmente fixemos nossa atenção na situação (ii). Neste caso, têm-se novos vínculos $\chi_k = \{\phi_r, H_c\} \cong 0$, ditos vínculos secundários, ao qual devemos impor a condição de consistência, $\dot{\chi}_k \cong 0$. Aqui podemos ter novamente como resultado, as três situações anteriores. Caso tenhamos obtido novos vínculos, repete-se o mesmo processo a cada um deles, até que chegamos a um estágio em que não se produz mais nenhum vínculo secundário. Admitindo um conjunto de K vínculos secundários, englobamos todos os vínculos (primários + secundários) na notação

$$\Phi_\mu \equiv (\phi_r, \chi_k), \quad r = 1...R, \quad k = 1...K, \quad \mu = 1...R+K. \tag{A.11}$$

Para este conjunto de vínculos, Φ_μ, testamos a condição de consistência, $\dot{\Phi}_\mu \cong 0 \cong \{\Phi_\mu, H_c\} + u_r\{\Phi_\mu, \phi_r\}$, onde o que se obtêm agora são apenas os casos (i) e (iii) pois supomos não haver mais vínculos (o que exclui o caso (ii)). Então, as equações :

$$\{\Phi_\mu, H_c\} + u_r\{\Phi_\mu, \phi_r\} \cong 0 \tag{A.12}$$

costituem-se num sistema de equações lineares não homogêneo com l equações ($l \leq R+K$) e R incógnitas u_r (o fato de $l \leq R+K$ é porquê algum dos Φ_μ pode ter sua condição de consistência gerando o caso (i)).

Antes de prosseguir na análise desse sistema de eqs., introduziremos a noção de vínculos de primeira e segunda classe. Uma variável $A_{(q_n,p_n)}$ é dita ser de primeira classe se $\{A, \Phi_\mu\} \cong 0$, $\forall \mu$. Caso isso não aconteça, $A_{(q_n,p_n)}$ é dita ser de segunda classe. Na nossa teoria, os vínculos Φ_μ são as únicas quantidades linearmentes independentes fracamente zero, qualquer outra quantidade fracamente zero será uma combinação linear destes, isto é, algo do tipo $a_\mu \Phi_\mu$. Daí se $A_{(q_n,p_n)}$ é de primeira classe, $\{A, \Phi_\mu\} \cong 0$, o que pode ser reescrito numa igualdade forte como sendo, $\{A, \Phi_\mu\} = r_{\mu\nu}\Phi_\nu$. É fácil mostrar que se $A_{(q_n,p_n)}$ e $B_{(q_n,p_n)}$ forem de primeira classe tem-se $\{A, B\}$ também de primeira classe.

Separemos então o conjunto de vínculos Φ_μ em vínculos de primeira classe $\varphi_\mu \equiv (\phi_i, \chi_a)$ (digamos em número D, com d vínculos primários ϕ_i, e (D-d) secundários χ_a) e de segunda classe $\xi_\mu \equiv (\phi_{\bar{i}}, \chi_{\bar{a}})$ (digamos em número T, com t vínculos primários $\phi_{\bar{i}}$, e (T-t) secundários $\chi_{\bar{a}}$). Obviamente, D+T=R+K. Temos que as eqs. (A.12) se escrevem então,

$$\{\varphi_\mu, H_c\} + u_i\{\varphi_\mu, \phi_i\} + u_{\bar{i}}\{\varphi_\mu, \phi_{\bar{i}}\} \cong 0 \tag{A.13}$$

$$\{\xi_\mu, H_c\} + u_i\{\xi_\mu, \phi_i\} + u_{\bar{i}}\{\xi_\mu, \phi_{\bar{i}}\} \cong 0 \tag{A.14}$$

Sendo φ_μ de primeira classe tem-se que a eq.(A.13) resulta, $\{\varphi_\mu, H_c\} \cong 0$, e como não existem mais novos vínculos temos que está última ou será algo do tipo $0 \cong 0$ ou se reduz a algum dos vínculos já obtidos. Da eq.(A.14) obtêm-se

$$\{\xi_\mu, H_c\} + u_{\bar{i}}\{\xi_\mu, \phi_{\bar{i}}\} \cong 0 \tag{A.15}$$

que se constitui num sistema de T eqs. e t incógnitas $u_{\bar{i}}$. Admitindo que a teoria estudada é consistente, deve ser possível resolver o sistema de eqs.(A.15). Para isto devemos ter, posto(matriz aumentada)= posto(matriz dos coeficientes). Note que a solução desse sistema só permite determinar os t multiplicadores $u_{\bar{i}}$, ficando indeterminados d multiplicadores u_i. Considere então $U_{\bar{i}}$, solução particular de (A.15). A solução mais geral é dada por, $u_{\bar{i}} = U_{\bar{i}} + \lambda_b V_{(b)\bar{i}}$ onde $V_{(b)\bar{i}}$ são soluções linearmente independentes(l.i.) do sistema homogêneo. A análise de sistemas homogêneos nos diz que existirão soluções não triviais se r=posto (matriz dos coeficientes)<t. Neste caso teremos (t-r) soluções l.i. $V_{(b)\bar{i}}$. Por uma rearrumação das linhas ou colunas do sistema homogêneo podemos escrever a matriz dos coeficientes na forma,

$$
(\{\xi_\mu, \phi_{\bar{i}}\}) = \left(\begin{array}{c}
\{\phi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{1}}\} \; \dots \; \{\phi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{t}}\} \\
\{\phi_{\bar{2}}, \phi_{\bar{1}}\} \; \dots \; \{\phi_{\bar{2}}, \phi_{\bar{t}}\} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\{\phi_{\bar{t}}, \phi_{\bar{1}}\} \; \dots \; \{\phi_{\bar{t}}, \phi_{\bar{t}}\} \\
\hline
\{\chi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{1}}\} \; \dots \; \{\chi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{t}}\} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\{\chi_{\overline{T-t}}, \phi_{\bar{1}}\} \; \dots \; \{\chi_{\overline{T-t}}, \phi_{\bar{t}}\}
\end{array} \right)
$$

Temos que posto $(\{\xi_\mu, \phi_{\bar{i}}\})$=t. De fato, temos que $r \leq t$. Se $r < t$ então as colunas de

$(\{\xi_\mu, \phi_{\bar{i}}\})$ seriam linearmente dependentes [12]. Daí, existe δ $(1 \leq \delta \leq t)$ tal que,

$$\begin{pmatrix} \{\phi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{\delta}}\} \\ \{\phi_{\bar{2}}, \phi_{\bar{\delta}}\} \\ \cdots \\ \{\phi_{\bar{i}}, \phi_{\bar{\delta}}\} \\ \{\chi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{\delta}}\} \\ \cdots \\ \{\chi_{\widetilde{T-t}}, \phi_{\bar{\delta}}\} \end{pmatrix} \equiv \sum_{\bar{j}} \lambda_{\bar{j}} \begin{pmatrix} \{\phi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{j}}\} \\ \{\phi_{\bar{2}}, \phi_{\bar{j}}\} \\ \cdots \\ \{\phi_{\bar{i}}, \phi_{\bar{j}}\} \\ \{\chi_{\bar{1}}, \phi_{\bar{j}}\} \\ \cdots \\ \{\chi_{\widetilde{T-t}}, \phi_{\bar{j}}\} \end{pmatrix}$$

e daí,

$$\{\xi_\mu, \phi_{\bar{\delta}}\} = \{\xi_\mu, \sum_{\bar{j}} \lambda_{\bar{j}} \phi_{\bar{j}}\}, \ \ \forall \mu.$$

ou também,

$$\{\xi_\mu, \phi_{\bar{\delta}} - \sum_{\bar{j}} \lambda_{\bar{j}} \phi_{\bar{j}}\} = 0, \ \ \forall \mu \tag{A.16}$$

Mas, $\{\xi_\mu\}$ se constitui num conjunto de vínculos de segunda classe irredutíveis e linearmente independentes, d'onde se tem que,

$(i)\phi_{\bar{\delta}} - \sum_{\bar{j}} \lambda_{\bar{j}} \phi_{\bar{j}}$ não pode ser vínculo de primeira classe (pela irreducibilidade)

$(ii)\phi_{\bar{\delta}} - \sum_{\bar{j}} \lambda_{\bar{j}} \phi_{\bar{j}}$ não pode ser zero (os vínculos são linearmente independentes)

Daí tem-se que a eq.(A.16) não pode ser satisfeita, o que nos leva a ter r=t (obs.:a irreducibilidade significa que por uma combinação linear qualquer dos vínculos de segunda classe se obtem um vínculo de "segunda classe," onde por "segunda classe" entendemos não ser de primeira. Caso isso não se verifique, devemos fazer combinações lineares prévias no conjunto de vínculos Φ_μ afim de ter a irreducibilidade assegurada.).

A solução de (A.15) fica então,

$$u_{\bar{i}} = U_{\bar{i}}$$

e a hamiltoniana se escreve como:

$$H = H_c + U_{\bar{i}}\phi_{\bar{i}} + \mu_i\phi_i$$

Considere,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\phi_{\bar{i}}, \phi_{\bar{j}}\} & \{\phi_{\bar{i}}, \chi_{\bar{a}}\} \\ \{\chi_{\bar{a}}, \phi_{\bar{i}}\} & \{\chi_{\bar{a}}, \chi_{\bar{b}}\} \end{pmatrix}$$

a matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe $\xi_\mu \equiv (\phi_{\bar{i}}, \chi_{\bar{a}})$. Temos que Δ não é singular. De fato, se Δ fosse singular então existiria pelo menos uma relação linear entre suas linhas (ou colunas), digamos, $\lambda_\alpha \Delta_{\alpha\mu} \cong 0,\ \forall_\mu$. Mas daí decorre que,

$$\begin{aligned} \{\lambda_\alpha \xi_\alpha, \xi_\mu\} &= \lambda_\alpha\{\xi_\alpha, \xi_\mu\} + \xi_\alpha\{\lambda_\alpha, \xi_\mu\} \\ &\cong \lambda_\alpha\{\xi_\alpha, \xi_\mu\} = \lambda_\alpha \Delta_{\alpha\mu} \cong 0, \quad \forall_\mu \end{aligned}$$

isto é, $\lambda_\alpha \xi_\alpha$ teria parênteses de Poisson nulo com todos os vínculos de segunda classe da teoria, e consequentemente $\lambda_\alpha \xi_\alpha$ seria vínculo de primeira classe, o que supondo a irreducibilidade dos vínculos não seria permissível. As eqs. lineares em (A.15) ficariam então,

$$\{\xi_\mu, H_c\} + U_{\bar{i}}\Delta_{\mu\bar{i}} \cong 0$$

multiplicando por $\Delta^{-1}_{\alpha\mu}$ temos:

$$\Delta^{-1}_{\alpha\mu}\{\xi_\mu, H_c\} + \Delta^{-1}_{\alpha\mu}\Delta_{\mu\bar{i}}U_{\bar{i}} \cong 0$$

$$\Delta^{-1}_{\alpha\mu}\{\xi_\mu, H_c\} + \delta_{\alpha\bar{i}}U_{\bar{i}} \cong 0$$

isto é:

$$U_{\tilde{i}} = -\Delta^{-1}_{\tilde{i}\mu}\{\xi_\mu, H_c\}, \quad se \ \ \alpha = \tilde{i}$$

$$\Delta^{-1}_{\alpha\mu}\{\xi_\mu, H_c\} = 0 \quad se \ \ \alpha = \tilde{a}$$

Então:

$$H = H_c - \phi_{\tilde{i}}\Delta^{-1}_{\tilde{i}\mu}\{\xi_\mu, H_c\} + u_i\phi_i$$

ou

$$H = H_c - \chi_{\tilde{a}}\Delta^{-1}_{\tilde{a}\mu}\{\xi_\mu, H_c\} - \phi_{\tilde{i}}\Delta^{-1}_{\tilde{i}\mu}\{\xi_\mu, H_c\} + u_i\phi_i$$

$$H = H_c - \xi_\nu\Delta^{-1}_{\nu\mu}\{\xi_\mu, H_c\} + u_i\phi_i$$

neste ponto analisaremos mais cuidadosamente o papel desempenhado pelos vínculos de primeira e segunda classe.

A nível clássico a presença de vínculos de segunda classe não apresenta nenhuma inconsistência. A nível quântico é a presença deles que torna inconsistente a passagem a teoria quântica. A quantização canônica da teoria requer que façamos a substituição dos parênteses de Poisson a comutadores de acordo com a prescrição usual, $\{\ \ ,\ \ \} \rightarrow \frac{1}{i}\ [\ \ ,\ \ ]$, e que imponhamos os vínculos (ξ_μ, φ_μ) como condições sobre os vetores de estado quântico,

$$\xi_\mu \ \mid \psi >= 0$$

$$\varphi_\mu \ \mid \psi >= 0$$

Agora, tomando quaisquer dois vínculos de segunda classe ξ_1 e ξ_2, devemos ter,

$$\xi_1 \ \mid \psi >= 0$$

$$\xi_2 \ \mid \psi >= 0$$

e daí

$$[\,\xi_1, \xi_2\,] \ \mid \psi >= 0$$

o que corresponderia classicamente a algo do tipo, $\{\ \xi_1, \xi_2\ \} \cong 0$, o que não pode ser tendo em conta que os $\xi'_\mu s$ são de segunda classe. Temos então que uma passagem consistente à teoria quântica só pode ser feita com vínculos de primeira classe. Devemos então "eliminar" os vínculos de segunda classe da teoria. Uma maneira de se fazer isso é utilizá-los diretamente para eliminar algumas das variáveis (que não são fisicamente importantes) e a partir daí redefinir os parênteses de Poisson referindo-se apenas aos graus de liberdade restantes. Pode ocorrer que não seja fácil fazer tal eliminação diretamente. Neste caso a "eliminação " dos vínculos de segunda classe é feita introduzindo o parênteses de Dirac, definido como:

$$\{\ A, B\ \}^D = \{\ A, B\ \} - \{\ A, \xi_\alpha\ \}\Delta^{-1}_{\alpha\beta}\{\ \xi_\beta, B\ \} \tag{A.17}$$

em termos desses, temos,

$$\begin{aligned}\{\ \xi_\mu, B\ \}^D &= \{\ \xi_\mu, B\ \} - \{\ \xi_\mu, \xi_\alpha\ \}\Delta^{-1}_{\alpha\beta}\{\ \xi_\beta, B\ \} \\ &= \{\ \xi_\mu, B\ \} - \delta_{\mu\beta}\{\ \xi_\beta, B\ \} = 0\end{aligned}$$

isto é, os vínculos de segunda classe valem fortemente dentro dos parênteses de Dirac, e com isso não se tem mais a inconsistência anterior. Esta propriedade permite que substituamos os vínculos de segunda classe $\xi'_\mu s$ por igualdades fortes $\xi_\mu = 0$, "eliminando-os" da teoria. O sentido dado ao termo:"eliminar os vínculos de segunda classe da teoria" é exatamente esse, o de substituí-los por igualdades fortes. Eles, no entanto, continuam presentes na teoria atuando sobre os vetores de estado.

Quanto aos vínculos primários de primeira classe, $\phi'_i s$, temos que eles são os geradores de transformações que deixam o estado físico do sistema inalterado. Dirac [7] mostra isso do seguinte modo: seja g uma váriavel dinâmica, temos que:

$$g_{(t+\delta t)} = g_{(t)} + \dot{g}\delta t = g_{(t)} + \{g, H\}\delta t$$
$$= g_{(t)} + \delta t\left(\{g, H_c\} + u_i\{g, \phi_i\}\right)$$

onde $H = H_c + u_i\phi_i$.

Sendo os multiplicadores u_i arbitrários, poderíamos ter escolhido outro conjunto $\overline{u}_i$ para representá-lo, e teríamos então,

$$\tilde{g}_{(t+\delta t)} = g_{(t)} + \delta t\left(\{g, H_c\} + \overline{u}_i\{g, \phi_i\}\right)$$

tanto $g_{(t+\delta t)}$ quanto $\tilde{g}_{(t+\delta t)}$ representariam fisicamente a mesma variável $g_{(t)}$ em $(t + \delta t)$, isto porquê a escolha dos multiplicadores não deve alterar a situação física. Entretanto a nível formal, temos,

$$\delta g_{(t+\delta t)} = \tilde{g}_{(t+\delta t)} - g_{(t+\delta t)}$$
$$= \delta t(\overline{u}_i - u_i)\{g, \phi_i\}$$
$$= \varepsilon_i\{g, \phi_i\} \quad \varepsilon_i : \text{ parâmetro inf. arbitrário.}$$

Nesse sentido é que dizemos que os vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações que levam a mudanças em q e p mas que não alteram o estado físico do sistema. Realizando duas destas transformações de maneira consecutiva:

$$\tilde{g}_{(t+\delta t)} = g_{(t+\delta t)} + \varepsilon_i\{g, \phi_i\}$$
$$\overline{g}_{(t+\delta t)} = \tilde{g}_{(t+\delta t)} + \overline{\varepsilon}_j\{\tilde{g}, \phi_j\}$$
$$= g_{(t+\delta t)} + \varepsilon_i\{g, \phi_i\} + \overline{\varepsilon}_j\{g + \varepsilon_i\{g, \phi_i\}, \phi_j\}.$$

Aplicando essas transformações na ordem inversa temos:

$$g*_{(t+\delta t)} = g_{(t+\delta t)} + \overline{\varepsilon}_j\{g, \phi_j\} + \varepsilon_i\{g + \overline{\varepsilon}_j\{g, \phi_j\}, \phi_i\}.$$

Daí teríamos que:

$$\delta g = \bar{\varepsilon}_j \varepsilon_i \{g, \{\phi_i, \phi_j\}\}$$

o que mostra que $\{\phi_i, \phi_j\}$ também pode ser usado como gerador daquelas transf.. Uma vez que os $\phi_i^{\prime}s$ são vínculos de primeira classe tem-se que $\{\phi_i, \phi_j\}$ é de primeira classe, e daí, se escreve como uma combinação linear de vínculos de primeira classe (primários + secundários). Com isso temos a possibilidade de incluir como geradores das transf. que deixam o estado físico do sistema invariante todos os vínculos de primeira classe da teoria. Com isso em mente, escrevemos em vez de H uma hamiltoniana estendida,

$$H_e = H_c + u_{\bar{i}} \phi_{\bar{i}} + u_i \phi_i + u_a \chi_a$$

ou eliminando os vínculos de segunda classe, usando por exemplo os parênteses de Dirac,

$$He = H_c + u_\alpha \varphi_\alpha \tag{A.18}$$

Neste ponto ainda temos o problema da presença dos multiplicadores indeterminados $u_\alpha^{\prime}s$, que se manifestam na eq. de evolução de qualquer quantidade $g_{(q_n, p_n)}$:

$$\delta g = \delta t (\overline{u}_\alpha - u_\alpha) \{g, \varphi_\alpha\}$$

Daí, variando o valor u_α, obtêm-se um conjunto de valores para $g_{(q_n, p_n)}$, todos estes sendo fisicamente equivalentes. Para resolver um problema específico, devemos fixar unicamente em cada instante um valor de u_α. Para fazer isso, impomos ao sistema condições subsidiárias, $\Omega_{\mu (q_n, p_n)} \cong 0$, de modo que suas condições de consistência,

$$0 \cong \dot{\Omega}_\mu \cong \{\Omega_\mu, H_c\} + u_\alpha \{\Omega_\mu, \varphi_\alpha\}$$

resultem num sistema de eqs. lineares que possibilite determinar os $u'_\alpha s$. Afim de que isto seja obtido é aconselhável que:

(i) O número de vínculos φ_α seja igual ao número de condições subsidiárias Ω_μ.

(ii) $\det(\{\varphi_\alpha, \Omega_\mu\}) \neq 0$.

Além disso é conveniente tomar $\Omega'_\mu s$ tal que se tenha $\{\Omega_\mu, \Omega_\nu\} = 0$ (isto para o cál culo de propagadores por integrais de caminho). Temos então um sistema de D eqs. e D incógnitas u_α:

$$\{\Omega_\mu, H_c\} + u_\alpha\{\Omega_\mu, \varphi_\alpha\} \cong 0 \tag{A.19}$$

considere também a relação (óbvia):

$$\{\varphi_\beta, H_c\} + u_\alpha\{\varphi_\beta, \varphi_\alpha\} \cong 0$$

Seja $\varsigma_a \equiv (\varphi_\alpha, \Omega_\mu)$. Podemos então compactificar aquelas duas últimas eqs. na forma:

$$\{\varsigma_a, H_c\} + u_\alpha\{\varsigma_a, \varphi_\alpha\} \cong 0 \tag{A.20}$$

Seja,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\varphi_\alpha, \varphi_\gamma\} & \{\varphi_\alpha, \Omega_\mu\} \\ \{\Omega_\mu, \varphi_\alpha\} & \{\Omega_\mu, \Omega_\nu\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \{\varphi_\alpha, \Omega_\mu\} \\ \{\Omega_\mu, \varphi_\alpha\} & 0 \end{pmatrix}$$

Temos Δ inversível, de modo que aplicando, Δ^{-1} em (A.20) obtêm-se,

$$\Delta^{-1}_{ba}\{\varsigma_a, H_c\} + u_\alpha\Delta^{-1}_{ba}\{\varsigma_a, \varphi_\alpha\} \cong 0$$

$$\Delta^{-1}_{ba}\{\varsigma_a, H_c\} + u_\alpha\Delta^{-1}_{ba}\Delta_{a\alpha} \cong 0$$

$$\Delta^{-1}_{ba}\{\varsigma_a, H_c\} + u_\alpha\delta_{b\alpha} \cong 0$$

que resulta,

$$u_\alpha = -\Delta^{-1}_{\alpha a}\{\varsigma_a, H_c\} \quad se \quad b = \alpha$$

e

$$\Delta^{-1}_{\mu a}\{\varsigma_a, H_c\} = 0 \quad se \quad b = \mu$$

Daí,

$$H_e = H_c - \varphi_\alpha \Delta^{-1}_{\alpha a}\{\varsigma_a, H_c\}$$

mas, $\Delta^{-1}_{\mu a}\{\varsigma_a, H_c\} = 0$ daí $\Omega_\mu \Delta^{-1}_{\mu a}\{\varsigma_a, H_c\} = 0$, então:

$$H_e = H_c - \Omega_\mu \Delta^{-1}_{\mu a}\{\varsigma_a, H_c\} - \varphi_\alpha \Delta^{-1}_{\alpha a}\{\varsigma_a, H_c\}$$

$$H_e = H_c - \varsigma_b \Delta^{-1}_{ba}\{\varsigma_a, H_c\} \tag{A.21}$$

Ao introduzirmos os vínculos de gauge temos que o conjunto total destes é agora de segunda classe e, portanto, deve ser eliminado. Novamente redefinimos os parênteses da teoria, escrevendo,

$$\{\ ,\ \}^D = \{\ ,\ \}^* - \{\ ,\varsigma_a\}^* \Delta^{-1}_{ab}\{\varsigma_b,\ \}^* \tag{A.22}$$

onde por $\{\ ,\ \}^*$ entendemos um parênteses de Dirac preliminar, usado para eliminar os vínculos de segunda classe que surgem na definição dos momentos e/ou no teste da condição de consistência dos vínculos.

Uma vez que estamos tratando com parênteses de Dirac os vínculos valem fortemente e daí ao invés de usar H_e usa-se H_c. Finalmente vale dizer que na passagem dos parênteses de Dirac aos comutadores quânticos podem surgir problemas referentes a ordenação dos operadores.

Apêndice B

Sobre operadores em 2d.

Em 2d. definimos o rotacional e o divergente de um campo vetorial como sendo

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} = -\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \qquad (escalar)$$

$$\text{div } \vec{A} \equiv \nabla . \vec{A} = \partial_i A_i \qquad (escalar)$$

Para um campo escalar, definimos,

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla\phi = \partial_k \phi \qquad (vetor)$$

$$\text{rot } \phi = \varepsilon_{ij}\partial_j \phi \qquad (vetor)$$

Em 2d., temos também que,

$$\nabla^2 \log(|\vec{y} - \vec{x}|) = 2\pi\delta^2(\vec{y}-\vec{x})$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\varepsilon_{ij}A_{ki} + \varepsilon_{ki}A_{ij} = \varepsilon_{kj}A_{ii} \qquad para \quad A_{ij} = A_{ji}$$

Um campo vetorial no plano, pode ser decomposto em componentes transversal, A^t e longitudinal A^l satisfazendo $\partial_i A_i^t = 0$ e, $-\varepsilon_{ij}\partial_j A^l = 0$. Isto é feito escrevendo,

$$A_i \;=\; +\varepsilon_{ij}\frac{1}{\sqrt{\nabla^{-2}}}\partial_j\phi - \frac{1}{\sqrt{\nabla^{-2}}}\partial_i\eta$$

onde a presença do operador não local $\sqrt{\nabla^{-2}}$ garante a mesma dimensionalidade nos dois lados da equação.

<u>Algumas propriedades de operadores</u>

(i)

$$x_i\,(\,a+\vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-1} \;=\; (\,a-1+\vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-1}x_i$$

(ii)

$$\partial_i\,(\,a+\vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-1} \;=\; (\,a+1+\vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-1}\partial_i$$

(iii)

$$(\vec{x}.\vec{\nabla})\,(\,a+\vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-1} \;=\; (\,a+\vec{x}.\vec{\nabla}\,)^{-1}(\vec{x}.\vec{\nabla})$$

(iv)

$$\int d^3x\;(\,\Box+\mu^2\,)^{-1}(x_i f) \;=\; \int d^3x\;x_i(\,\Box+\mu^2\,)^{-1}f$$

para funções f que verifiquem, $\int d^3x\;\partial_i(Of) \;=\; 0$, onde O contém apenas operadores diferenciais.

Mostraremos (iv), os outros resultados (de (i) a (iii)) se justificam de maneira análoga.

Usando a expansão binomial escrevemos,

$$(\,\partial^\mu\partial_\mu+\mu^2\,)^{-1} \;=\; \sum_{k=i}^{\infty}(-1)^{n-1}\mu^{-2n}(\,\partial^\mu\partial_\mu\,)^{n-1}$$

Para mostrar (iv) basta mostrar a validade de

$$\int d^3x \, (-1)^{n-1} \mu^{-2n} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^{n-1} (x_i f) \; = \; \int d^3x \; x_i (-1)^{n-1} \mu^{-2n} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^{n-1} f \quad \forall n$$

Para n=1 temos,

$$\int d^3x \; \mu^{-2} x_i f \; = \; \int d^3x \; x_i \mu^{-2} f$$

Suponhamos que para n=m tenhamos,

$$\int d^3x \, (-1)^{m-1} \mu^{-2m} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^{m-1} (x_i f) \; = \; \int d^3x \; x_i (-1)^{m-1} \mu^{-2m} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^{m-1} f$$

então,

$$\begin{aligned} \int d^3x \, (-1)^{(m+1)-1} \mu^{-2(m+1)} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^{(m+1)-1} (x_i f) \; &= \\ &= \int d^3x \, (-1) \mu^{-2} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,) \, [\, (-1)^{(m-1)} \mu^{-2m} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^{(m-1)} (x_i f) \,] \\ &= \int d^3x \; x_i (-1)^m \mu^{-2(m+1)} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^m f + 2 \partial_i (\, \mu^{-2(m+1)} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^m f \,) \\ &= \int d^3x \; x_i (-1)^m \mu^{-2(m+1)} (\, \partial^\mu \partial_\mu \,)^m f \end{aligned}$$

O que finaliza a prova por indução. Tem-se assim a validade de (iv). (uma demonstração rigorosa contudo ainda deveria ser feita ,uma vez que não se mostrou a convergência da expansão binomial do operador ($\Box + \mu^2$)).

(v)

$$A_{(x)} B_{(y)} \delta^2{}_{(x-y)} \; = \; B_{(y)} A^\dagger{}_{(y)} \delta^2{}_{(x-y)} \; = \; A_{(x)} B^\dagger{}_{(x)} \delta^2{}_{(x-y)}$$

onde A e B são operadores.

A demonstração disso segue o mesmo procedimento utilizado no cap. (2), quando se mostrou a equivalência entre duas distribuições. Quando escrevemos $B^\dagger$ estamos nos referindo a forma que o operador B assume quando trocado de posição na expressão, $\int d^2x\ f_{(x)}B_{(x)}g_{(x)}$, isto é,

$$\int d^2x\ f_{(x)}B_{(x)}g_{(x)} = \int d^2x\ g_{(x)}B^{\dagger}{}_{(x)}f_{(x)}$$

Nesse sentido é fácil ver que,

$$(\vec{x}.\vec{\nabla})^{\dagger} = -(2+\vec{x}.\vec{\nabla})$$

$$(1+\vec{x}.\vec{\nabla})^{\dagger} = -(1+\vec{x}.\vec{\nabla})^{\dagger}$$

etc.. Para um operador inversível O, tem-se que,

$$(O^{-1})^{\dagger} = (O^{\dagger})^{-1}$$

o que permite obter,

$$\left(\frac{1}{\vec{x}.\vec{\nabla}}\right)^{\dagger} = -\frac{1}{2+\vec{x}.\vec{\nabla}}$$
$$\left(\frac{1}{1+\vec{x}.\vec{\nabla}}\right)^{\dagger} = -\frac{1}{1+\vec{x}.\vec{\nabla}}$$

Apêndice C

O Termo de Chern Simons e a Estatística Fracionária

Teorias contendo o termo de Chern Simons levam naturalmente a uma transmutação na estatística. Em teorias de campos, isto pode ser feito do seguinte modo. Dado um campo de matéria ϕ, com corrente U(1) conservada j_μ, e lagrangeana $\mathcal{L}_{mat(\phi)}$, introduz-se um campo vetorial A_μ, acoplado minimamente a ϕ, e considera-se a lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha + A_\mu J^\mu + \mathcal{L}_{mat(\phi)} \tag{C.1}$$

Aqui, J_μ e $\mathcal{L}_{mat}$ são construídos de modo a serem, isoladamente, invariantes de gauge. Daí, pelas transformações de gauge de A_μ,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\omega$$

e do campo de matéria, tem-se,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu(\frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha + \omega J^\mu)$$

o que torna a ação invariante de gauge se consideramos ω indo a zero no infinito.

Das equações de movimento para A_μ obtem-se,

$$\mu\varepsilon_{ij}\partial_i A_j = -J_0 \tag{C.2}$$

A discussão que se segue é uma aplicação imediata da ref.[2], ao caso de um campo de matéria fermiônico. O procedimento consiste em eliminar-se o campo de gauge, usando para isso a eq.(C.2) para eliminar A_i^T, e posteriormente, uma transformação de gauge para eliminar A_i^L. Como resultado, os campos de matéria passarão a exibir uma relação de anticomutação distinta.

Em (C.1) consideraremos então,

$$\mathcal{L}_{mat} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

e

$$J^\mu = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Fazendo a decomposição de A_i em componentes tranversal ($A_i^T = \varepsilon_{ij}\partial_j\phi$) e longitudinal ($A_i^L = -\partial_i\xi$) temos que (C.2) determina ϕ,

$$\phi_{(x)} = \frac{1}{4\pi\mu}\int d^2y\ (\ln|\vec{x}-\vec{y}|^2 + cte.)\ J_{0(y)} \tag{C.3}$$

que por sua vez nos dá,

$$A_i^T = \frac{1}{2\pi\mu}\varepsilon_{ij}\int d^2y\ \frac{(x_j - y_j)}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}\ J_{0(y)} \tag{C.4}$$

Com isso eliminou-se a parte transversa de A_i.

Definindo, $\Omega = \tan^{-1}\frac{(x_2-y_2)}{(x_1-y_1)}$, como sendo o ângulo entre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e usando que, $\partial_{ix}\Omega_{(\vec{x}-\vec{y})} = -\varepsilon_{ij}\frac{(x_j-y_j)}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}$ tem-se $A_i^T = \partial_{ix}(-\frac{1}{2\pi\mu}\int d^2y\ \Omega_{(\vec{x}-\vec{y})}\ J_{0(y)})$. Definindo,

$$\Theta_{(x)} = -\frac{e}{2\pi\mu}\int d^2y\ \Omega_{(\vec{x}-\vec{y})}\ J_{0(y)} \tag{C.5}$$

obtem-se,

$$e\ A_i^T = \partial_i\Theta \tag{C.6}$$

Usando (C.2) e a decomposição de A_i em termos de suas componentes transversa e longitudinal tem-se $\mathcal{L}$ na forma,

$$\mathcal{L} = -\mu\varepsilon_{ij}A_i^T\dot{A}_j^L - A_i^T J_i - A_i^L J_i + \overline{\psi}(\ i\gamma^\mu\partial_\mu - m\ )\psi \tag{C.7}$$

Podemos eliminar o termo $-A_i^L J_i$ de $\mathcal{L}$ fazendo uma transformação de gauge dos campos fermiônicos,

$$\psi \ \rightarrow\ \psi = e^{-i\omega}\psi$$

$$\overline{\psi} \ \rightarrow\ \overline{\psi} = \overline{\psi}e^{i\omega}$$

Daí, em (C.7),

$$-A_i^L J_i + \overline{\psi}(\ i\gamma^\mu\partial_\mu - m\ )\psi \ \rightarrow\ (-A_i^L + e^{-1}\partial_i\omega)\ J_i - e^{-1}\dot{\omega}J_0 + \overline{\psi}(\ i\gamma^\mu\partial_\mu - m\ )\psi$$

que nos diz para escolher ω verificando, $\partial_i\omega = e\ A_i^L$, isto é,

$$\omega = \frac{e}{4\pi}\int d^2y\ (\ \ln|\vec{x}-\vec{y}|^2 + cte.\ )\ \partial_{iy}A_i^L{}_{(y)} \tag{C.8}$$

Após a eliminação de A_i^L a lagrangeana fica sendo,

$$\mathcal{L} = -A_i^T J_i + \overline{\psi}(\ i\gamma^\mu\partial_\mu - m\ )\psi \tag{C.9}$$

Substituindo a eq.(C.4) em (C.9) elimina-se A_i^T de $\mathcal{L}$. Uma outra maneira de se proceder é redefinir os campos fermiônicos de forma a anular o termo $-A_i^T J_i$. Esta segunda alternativa é o que nos vai permitir observar a transmutação da estatística do campo de matéria. Assim, fazemos a redefinição,

$$\psi \;\longrightarrow\; \psi = e^{i\Theta}\hat{\psi}$$

$$\overline{\psi} \;\longrightarrow\; \overline{\psi} = \hat{\overline{\psi}} e^{-i\Theta}$$

com Θ dado de (C.5). A lagrangeana fica então,

$$\mathcal{L} \;=\; -A_i^T J_i + e\, A_i^T\, \hat{\overline{\psi}}\gamma_i\hat{\psi} - \dot{\Theta}\, \hat{\overline{\psi}}\gamma_0\hat{\psi}$$

mas,

$$J_i \;=\; e\,\overline{\psi}\gamma_i\psi \;=\; e\,\hat{\overline{\psi}}\gamma_i\hat{\psi}$$

Daí,

$$\mathcal{L} \;=\; -\dot{\Theta}\,\hat{\overline{\psi}}\gamma_0\hat{\psi} + \hat{\overline{\psi}}(\, i\gamma^\mu\partial_\mu - m\,)\hat{\psi}$$

Inicialmente, tratando a teoria na sua forma invariante de gauge temos para o campo de matéria os parênteses fundamentais,

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} \;=\; -i\delta_{\alpha\beta}\delta^2(x-y)$$

(note que usamos por parênteses fundamentais os parênteses de Dirac, isto porque a lagrangeana do campo de matéria é singular)

Em termos deste parênteses tem-se,

$$\{\psi_\alpha(x), J_0\} \;=\; -ie\psi_\alpha(x)\delta^2(x-y)$$

Supondo não haver problemas de ordenamento dos operadores, temos a prescrição usual da passagem á teoria quântica,

$$\{\ ,\ \} \to \frac{1}{i}[\ ,\ ]$$

Daí, tem-se,

$$[\psi_{\alpha(x)}, \Theta_{(y)}] = \frac{e^2}{2\pi\mu}\Omega_{(\vec{y}-\vec{x})}\psi_{\alpha(x)} \tag{C.10}$$

Uma vez realizada a quantização da teoria, obtemos relações do tipo,

$$[\psi_{(x)}, \psi_{(y)}] = \ ....$$

Mas,

$$e^{i\Theta(x)}\hat{\psi}_{(x)}e^{i\Theta(y)} = e^{i(\Theta(x)+\Theta(y)-\frac{e^2}{2\pi\mu}\Omega(\vec{y}-\vec{x}))}\hat{\psi}_{(x)}$$

Daí,

$$\psi_{(x)}\psi_{(y)} = e^{i\Theta(x)}\hat{\psi}_{(x)}e^{i\Theta(y)}\hat{\psi}_{(y)} = e^{i(\Theta(x)+\Theta(y)-\frac{e^2}{2\pi\mu}\Omega(\vec{y}-\vec{x}))}\hat{\psi}_{(x)}\hat{\psi}_{(y)}$$

o que resulta,

$$\psi_{(x)}\psi_{(y)} + \psi_{(y)}\psi_{(x)} = \ ... = e^{i(\Theta(x)+\Theta(y)-\frac{e^2}{2\pi\mu}\Omega(\vec{y}-\vec{x}))}(\ \hat{\psi}_{(x)}\hat{\psi}_{(y)} + e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))}\hat{\psi}_{(y)}\hat{\psi}_{(x)}\ )$$

isto é,

$$(\ \hat{\psi}_{(x)}\hat{\psi}_{(y)} + e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))}\hat{\psi}_{(y)}\hat{\psi}_{(x)}\ ) = \ .... \tag{C.11}$$

Nesta expressão, as relações de anticomutação dos campos $\hat{\psi}$ apresentam uma fase arbitrária. Sendo $\Omega_{(\vec{x}-\vec{y})}$ o ângulo entre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tem-se que,

$$e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))} = e^{\frac{ie^2}{2\mu}(2n+1)}$$

que nos dá as seguintes situações,

$$(i)\ \frac{e^2}{2\mu} = 2m\pi \quad (m \in Z) \ \longrightarrow \ e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))} = 1$$

Daí,

$$\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) + e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))}\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) + \hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x) = \ldots$$

que é a relação característica dos campos fermiônicos. Aqui não houve mudança na estatística das partículas.

$$(ii)\ \frac{e^2}{2\mu} = (2m+1)\pi \ \longrightarrow e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))} = -1$$

Daí,

$$e^{\frac{ie^2}{2\pi\mu}(\Omega(\vec{y}-\vec{x})-\Omega(\vec{x}-\vec{y}))} = \hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) - \hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x) = \ldots$$

que é uma relação característica de bósons.

Finalmente,

$$(iii)\ \frac{e^2}{2\mu} \neq m\pi \quad (m \in Z)$$

o que nos leva ao caso de uma estatística intermediária a de Fermi e Bose.

Apêndice D

A Matriz U

Numa formulação puramente operatorial, o cálculo da matriz S pode ser feito pertubativamente através de uma expansão em série de potências envolvendo o parâmetro de interação. Para realizar isto, devemos expressar os campos independentes da teoria com interação, $\phi(x)$ e $\pi(x)$, em termos dos campos livres, denotados por $\phi_{in}(x)$, $\pi_{in}(x)$ (que correspondem aos estados assintóticos da teoria). Isto é feito supondo que há uma correspondência um a um entre esses campos,

$$\phi(x) = U^{-1}(t)\phi_{in}(x)U(t)$$

$$\pi(x) = U^{-1}(t)\pi_{in}(x)U(t)$$

onde $U(t)$ é um operador unitário. A evolução temporal dos campos livres é dada por,

$$\dot{\phi}_{in} = [\phi_{in}, H^0_{in}(t)] \tag{D.1}$$

onde, $H^0_{in}(t) \equiv U^{-1}(t)\ H\ U(t)|_{e=0}$ é a correspondente transformação da hamiltoniana livre. No caso de termos uma teoria com vínculos, não teremos relações de comutação canônicas envolvendo os campos, de modo que, (D.1) não se verifica. Uma maneira de se resolver isso é adicionar á $H^0_{in}(t)$ um contratermo H^2_I de modo a termos a equação correta para o campo livre. A seguir, construiremos a matriz U usando os gauges de Poincaré e de Coulomb. O procedimento usado segue o método desenvolvido em [13].

(i) gauge de Poincaré

De (2.15) temos, fazendo e=0 e em seguida usando os vínculos $\Pi_0 = 0$ e $\partial_i \Pi_i - \frac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - 2ie\Pi_{(\psi)}\psi = 0$,

$$\begin{aligned} H_c|_{e=0} &= \int d^2y(2ie\Pi_{(\psi)}\psi A_0 + \tfrac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \tfrac{\mu}{2}\varepsilon_{ij}\Pi_i A_j + \tfrac{\mu^2}{8}A_iA_i + \\ &\quad + \tfrac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + 2\Pi_{(\psi)}\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + 2mi\Pi_{(\psi)}\gamma^0\psi) \end{aligned} \tag{D.2}$$

Daí, tomando por exemplo $[\psi_{\alpha in}, H^0_{in}(t)]$ com $H^0_{in}(t) = U^{-1}(t)H_c|_{e=0}U(t)$ temos,

$$[\psi_{\alpha in}, H^0_{in}] = 2e^2\psi_{\alpha in}\vec{x}^2(2+\vec{x}.\vec{\nabla})^{-2}\Pi_{(\psi)in}\psi_{in} - \gamma^0\gamma^i\partial_i\psi_{\alpha in} - im\gamma^0\psi_{\alpha in} \tag{D.3}$$

Em (D.3) temos que apenas os dois últimos termos aparecem na equação de $\dot{\psi}_{\alpha in}$ livre. (daqui em diante não se escreverá mais o índice in , todos os campos sendo considerados como campos livres). Devemos então introduzir H^2_I tal que,

$$[\psi_\alpha(x), H^2_I] = 2e^2\psi_\alpha\vec{x}^2(2+\vec{x}.\vec{\nabla})^{-2}$$

Isto é obtido se tomarmos,

$$H^2_I = 2e^2\iint d^2z\, d^2y\,\Pi_{(\psi)}(z)\psi(z)\Pi_{(\psi)}(y)\psi(y)\vec{y}^2(2+\vec{y}.\vec{\nabla})^{-2}\delta^2(y-z) \tag{D.4}$$

Daí, a equação para o campo livre ψ_{in} é obtida usando $H^0_{in} - H^2_I$. Seguindo o procedimento mostrado em [14], tem-se que a matriz U é solução da equação,

$$\dot{U} = -iH\,U$$

com,

$$H = H_I^1 + H_I^2 = -2ie\int d^2y \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^i A_i \psi + H_I^2$$

(ii) gauge de Coulomb

Novamente, partindo de (D.2) e considerando $[\psi_{\alpha in}, H^0_{in}(t)]$, obtem-se a mesma equação (D.3). Tem-se aqui,

$$H_I^2 = -2e^2 \int\int d^2z\, d^2y \Pi_{(\psi)}(z)\psi(z)\Pi_{(\psi)}(y)\psi(y)\nabla^{-2}\delta^2(y-z) \tag{D.5}$$

o que nos permite determinar a forma da matriz U.

Referências

[1] J.F.Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981)157

[2] T.Matsuyama, *Phys. Lett.* **B228**(1989)99

[3] G.W.Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **61**(1988)517

[4] G.W.Semenoff, *Nucl. Phys.* **B238**(1989)753

[5] R.Mackenzie e F.Wilczek, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988)2827

[6] E.C.G.Sudarshan e N.Mukunda, Classical Dynamics: A Modern Perspective, Wiley, New York

[7] P.A.M.Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York

[8] K.Sundermeyer, Constrained Dynamics, Lect. Notes in Phys., vol.169, Springer-Verlag,New York

[9] C.A.P.Galvão e J.B.T.Boechat, *J.Math.Phys.* **31**(2)(1990)448

[10] L.D.Faddeev, *Theoret.Math.Phys.* **1**(1970)1

[11] P.Senjanovic, *Ann. Phys.* **100**(1976)227

[12] G.E.Shilov, Linear Álgebra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[13] C.Kiefer e K.D.Rothe, *Nuovo Cimento* **83A**,(2) (1984)140

[14] J.D.Bjorken e S.D.Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, Inc.

"QUANTIZACÃO DE DIRAC DA QED(2 + 1)d. COM O TERMO DE CHERN-SIMONS"

MARCELO FERREIRA LIMA CARVALHO

Tese de Mestrado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:

Francisco Caruso Neto - Presidente

João Barcelos Neto

Juan Alberto Mignaco

Rio de Janeiro, 15 de setembro de 1992