Marco Antônio de Andrade

Análise da Consistência Espectral de Modelos Fermiônicos Estendidos

Tese de Mestrado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Fevereiro de 1992

Agradecimentos

- A Renato M. Doria por ter cedido o tema o qual deu origem a este trabalho, por sua orientação e discussões.
- A José A. Helayël-Neto por sua orientação, apoio e empenho no decorrer deste deste trabalho.
- A Fernando A. R. Carvalho, por discussões no início deste trabalho.
- Aos membros do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da UCP pela cordialidade com que sempre me recebem e a todas as facilidades proporcionadas para o trabalho.
- A Sebastião A. Dias, Jose Luiz M. Valle, por valiosas discussões.
- A Fernando L. C. Carvalho, Ladário da Silva, Dirceu A. P. Jr., Sergio Duque, Oswaldo, Cambraia e os demais amigos do CBPF.
- À minha família, pelo apoio e estímulo.
- Ao meu pai (in memoriam).
- À minha mãe, por toda a sua força.
- À minha mulher e meu filho, pelos carinhos e alegrias.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

São tratados nesta tese sistemas fermiônicos estendidos, que se caracterizam pela presença, no setor livre da Lagrangeana, de termos cinéticos e de massa não-diagonais no espaço das famílias. A sua formulação clássica é estabelecida e sua quantização canônica é, em seguida, apresentada.

Mediante a análise dos propagadores estendidos, estabelecem-se as condições para que táquions e partículas-fantasma sejam suprimidos do espectro físico. Identificam-se também a presença de férmions de Dirac, Majorana e Weyl entre as excitações físicas.

Como aplicação imediata dos sistemas estendidos, ressalta-se a possibilidade de se acomodar o problema da violação de CP no setor se quarks.

Sumário

Introdução

A Física de Campos e, mais geralmente, a Física Teórica de Altas Energias têm fundamentado no conceito de simetrias o seu desenvolvimento no sentido de descrever as interações fundamentais da matéria conhecida. Atualmente, o consenso entre os teóricos é que os processos de interação das partículas consideradas realmente elementares, léptons e quarks, sejam representados através da troca dos bósons associados ao setor de gauge: mésons vetoriais (fóton, partículas Z^0 e $W^{\pm}$ e glúons) e os chamados escalares de Higgs. Este é o quadro geral da visão de gauge das interações eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte que se aglutinam no conhecido Modelo Padrão por meio do grupo $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ [1].

Tendo em vista que a Física de Partículas e Campos, a partir dos anos 70, tem avançado com substancial recurso ao conceito de simetrias de gauge, faz-se necessário procurar entender a abrangência e as limitações de tal conceito e, uma vez esclarecidos estes pontos, torna-se plenamente justificável a tentativa de estender o conceito de invariância de gauge no âmbito das teorias de campos. Neste sentido, os trabalhos listados na ref.[2] procuram apresentar uma linha de ação no propósito de ampliar as potencialidades das teorias de gauge e retirar das simetrias locais o maior número possível de informações relevantes à construção de modelos para as interações a nível fundamental.

Tomando como motivação inicial a tentativa de se formular modelos estendidos para campos de gauge de acordo com a sistemática dos trabalhos mencionados na ref.[2], apresentar-se-á nesta tese a construção e a discussão da consistência de modelos estendidos para campos fermiônicos de spin-1/2. A idéia de se estudar estes sistemas é, em geral, motivada pelo fato de que, nas teorias de gauge que descrevem modelos unificados ou grande-unificados, misturas entre férmions com números quânticos de sabor diferentes emergem, via acoplamentos de Yukawa aos escalares de Higgs, na fase em que a simetria de gauge é espontaneamente quebrada [3].

Os sistemas fermiônicos estendidos tratados nesta tese não assumem qualquer compromisso com possíveis mecanismos de geração de massa para léptons e quarks. Baseados exclusivamente na idéia de simetria, são propostas Lagrangeanas para sistemas de muitos férmions com termos cinéticos e de massa *a priori* mistos. Estes sistemas serão estudados em toda a sua generalidade e, caso se queira reobter os resultados conhecidos para os modelos de unificação existentes, é suficiente expressar os parâmetros que aqui são introduzidos em termos dos acoplamentos de Yukawa e dos valores esperados no vácuo dos campos de Higgs do dado modelo de unificação.

Sistemas estendidos mediante a introdução de múltiplos campos que se transformam sob a ação de um um único grupo de simetria têm que superar testes de consistência bem-precisos a nível clássico e, em função dos resultados destes testes, poder-se-á concluir se o programa de incorporar correções radiativas à teoria clássica será uma etapa sensata ou não. Problemas básicos, como a presença de modos taquiônicos, excitações-fantasma e interações renormalizáveis do ponto-de-vista da contagem de potências, têm que ser esclarecidos antes que passe a considerar os efeitos de "loops". Caso os testes iniciais que mencionamos sejam satisfeitos, e a incorporação das correções radiativas possa ser implementada, um outro cuidado a ser tomado é certificarmo-nos de que estas respeitem, a cada ordem em teoria de pertubação, os testes de consistência superados a nível clássico.

Poderíamos caracterizar a impostação desta tese no estudo e na análise dos critérios de consistência que sistemas estendidos de campos de spin-1/2 devem satisfazer, antes de se decidir pelo cômputo de efeitos quânticos. Para isto, o trabalho é dividido em três capítulos. No Capítulo 1, procede-se à formulação dos modelos fermiônicos estendidos e se estabelece um estudo de suas propriedades clássicas mais relevantes, entre elas o acoplamento a campos de gauge. O Capítulo 2 é dedicado à quantização canônica e à análise espectral destes modelos estendidos, no caso em que haja apenas férmions de Dirac. A seguir, no Capítulo 3, modelos estendidos são formulados em termos de férmions quirais, seus aspectos físicos mais importantes são estudados, a consistência é rediscutida e uma aplicação de possível conseqüência fenomenológica é apresentada. Finalmente, seguem-se as Conclusões Gerais e três Apêndices, A, B e C, onde podem ser encontradas convenções de notação e resultados auxiliares a problemas técnicos abordados nos três capítulos.

Capítulo 1

Campos de Dirac Estendidos

Considerar-se-á, no presente capítulo, o estudo de sistemas de férmions de Dirac caracterizados pelo acoplamento entre sabores diferentes já nos termos cinético e de massa da Lagrangeana.

Propõe-se que um dado sistema de férmions com termos quadráticos não-diagonais nos sabores - ao qual se atribuirá a denominação de *férmions de Dirac estendidos* - seja descrito por duas parametrizações equivalentes: o sistema chamado *original* e o sistema dos ditos *campos físicos*.

Uma primeira motivação para um estudo mais particularizado de tais sistemas é que estes resultam , naturalmente, a partir de modelos grande-unificados em sua fase de simetria espontaneamente quebrada [1]. A consideração destes sistemas também se justifica no caso em que se queira propôr algum modelo fenomenológico para o problema das massas e das oscilações de neutrinos [4], onde a mistura de famílias emerge como um fator essencial.

Assim, proceder-se-á ao estudo de aspectos clássicos de um dado sistema de férmions de Dirac estendidos. Entre eles, analisar-se-á o caráter tensorial das equações de movimento sob reparametrizações, estudar-se-ão condições para a presença de possíveis simetrias no sistema, discutir-se-á a a questão das cargas conservadas em termos dos campos originais e físicos e finalizar-se-á com a discussão do acoplamento dos férmions estendidos, originais e físicos, a campos de "gauge" Abelianos, também estes estendidos.

1.1 Lagrangeana de Dirac Estendida

A equação de Dirac ordinária descreve quatro graus-de-liberdade, que são traduzidos em termos físicos como os dois estados de helicidade do férmion e os dois estados de helicidade do anti-férmion correspondente. Portanto, o objeto fundamental da teoria de Dirac para partículas de spin-1/2, o espinor, deve, de alguma forma, abrigar estes graus-de-liberdade. Uma vez que a equação de Dirac é linear em $\partial/\partial t$, o espinor correspondente deverá possuir quatro (e não apenas duas) componentes complexas.

O espinor de Dirac estendido é definido como o objeto que acomoda, em associação ou não a um grupo de simetria, um número finito de espinores ordinários (no sentido das representações $(\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{2})$ ou $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ de $SO_0(1,3)$). Para distingüir os espinores ordinários que, eventualmente, se transformam sob um dado grupo de simetria, dir-se-á que cada um carrega um determinado sabor, identificando-se, assim, cada espinor ordinário com o sabor que este carrega. Sendo N o número de sabores presentes, esta teoria fermiônica estendida descreverá $4N$ graus-de-liberdade. As equações da teoria tratada neste trabalho serão lineares em $\partial/\partial t$, de modo que os espinores estendidos possuirão $4N$-componentes complexas denotadas por $\Psi_{a\,\alpha}$, onde $a = 1 \cdots N$ designa os diferentes sabores e $\alpha = 1 \cdots 4$ rotula as componentes de Lorentz de um determinado sabor. Supõe-se, até a ocasião da segunda quantização, que todos os tipos de espinores, e automaticamente suas componentes, sejam objetos clássicos que tomam valores em uma álgebra de Grassmann. Pode-se, agora, reunir os diferentes sabores em uma matriz-coluna, representando-se o espinor de Dirac estendido como segue :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} .$$

A partir de Ψ, define-se o conjugado de Dirac :

$$\overline{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1^\dagger & \ldots & \Psi_N^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 & \ldots & \overline{\Psi}_N \end{pmatrix} .$$

A Lagrangeana livre a ser considerada caracteriza-se pelo fato de possuir termos mistos entre os diferentes sabores. O termo cinético define uma matriz K e termo de massa define uma outra, M. Os elementos destas matrizes são parâmetros livres disponíveis que poderão, ou não, ter consequência física direta. Esta questão será abordada em mais detalhes no Capítulo 2. O Lagrangeano estendido que se propõe lê-se :

$$\mathcal{L} = \overline{\chi}(Ki\gamma \cdot \partial - M)\chi \ , \tag{1.1}$$

onde χ denota um espinor estendido. Para se ter $\mathcal{L}$ real, as matrizes K e M devem, sem qualquer perda de generalidade, ser tomadas Hermiteanas, lembrando-se para isto que estamos utilizando a segunda convenção para conjugação complexa, dada no Apêndice C.

O próximo passo é efetuar a reparametrização da Lagrangeana (1.1) em termos dos campos físicos, caracterizados pelo fato de apresentarem termos exclusivamentes diagonais no espaço dos sabores em nível da teoria livre. Mais precisamente, esta reparametrização será realizada pela transformação:

$$\chi \; = \; \Omega\psi \;\; ; \;\; \overline{\chi} \; = \; \overline{\psi}\Omega^{\dagger} \, , \tag{1.2}$$

tal que

$$K \rightarrow \mathbf{1} \quad \mathrm{e} \quad M \rightarrow m \, , \tag{1.3}$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade no espaço dos sabores e m é uma matriz-diagonal real (não necessariamente positivo-definida).

Com esta reparametrização, obtém-se:

$$\mathcal{L} \; = \; \overline{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi \, . \tag{1.4}$$

Deve-se, agora, obter a matriz de transformação Ω, a qual, em virtude de (1.3), deve satisfazer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^{\dagger}K\Omega \; = \; \mathbf{1} \\ \\ \Omega^{\dagger}M\Omega \; = \; m \;\; . \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Ligeiras modificações permitem reescrever estas relações como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega\Omega^{\dagger} \; = \; K^{-1} \\ \\ \Omega^{-1}K^{-1}M\Omega \; = \; m \;\; . \end{array} \right. \tag{1.6}$$

O sistema (1.6) é exatamente o que se encontra em (B.7), onde as matrizes A , B e ℓ são substituídas respectivamente por K^{-1} , M e m. De acordo com os resultados do Apêndice B, para que (1.6) tenha solução, ou seja, para que seja possível a reparametrização em termos dos campos físicos, é necessária uma restrição mais forte sobre K, além de sua Hermiticidade: que os autovalores de K sejam ***positivo-definidos.*** Por outro lado, não é necessária nenhuma restrição adicional sobre M, além de sua Hermiticidade. Verificadas estas restrições, pode-se definir

$$\mathcal{U} \;=\; K^{1/2}\Omega \tag{1.7}$$

e

$$L \;=\; K^{-1/2}MK^{-1/2}\;, \tag{1.8}$$

de modo que o sitema (1.6) seja reescrito como:

$$\begin{cases} \mathcal{U}^{\dagger}\mathcal{U} \;=\; \mathbf{1} \\ \mathcal{U}^{\dagger}L\mathcal{U} \;=\; m\;, \end{cases} \tag{1.9}$$

o qual define um problema perfeitamente solúvel.

Para se construir Ω deve-se, portanto, em primeiro lugar, verificar se as condições necessárias sobre K e M são satisfeitas. Como foi mencionado no Apêndice B, a solução do problema unitário dado por (1.9) é mais laboriosa que a solução do correspondente problema não-unitário, dado por (1.6). Assim, passamos à resolução do problema de autovalores

$$\left(K^{-1}M\right)\,\omega \;=\; \lambda\,\omega\;, \tag{1.10}$$

que implica na equação característica

$$\det(K^{-1}M - \lambda\mathbf{1}) = 0 . \tag{1.11}$$

De posse dos autovalores λ_a, soluções de (1.10), encontramos os auto-vetores ω_a não-normalizados. Para normalizá-los, usamos a relação de completeza (vide eq.(B.18));

$$\sum_a \omega_a \omega_a^\dagger = K^{-1} . \tag{1.12}$$

A eq.(B.20) garante que o auto-vetor ω_a normalizado coincide com a a-ésima coluna de Ω.

Um outro método, equivalente, de se alcançar a parametrização dos campos físicos, (o qual será denominado de construção explícita) será exposto a seguir. Seja S a matriz que diagonaliza K, de modo que

$$k = SKS^\dagger , \tag{1.13}$$

com k diagonal e real-positiva. Então, (1.1) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \overline{\chi} S^\dagger (k i\gamma\cdot\partial - SMS^\dagger) S\chi . \tag{1.14}$$

Como os elementos de k são todos positivos e não-nulos, pode-se definir

$$\widetilde{\chi} = k^{1/2} S\chi \quad \text{e} \quad \widetilde{M} = k^{-1/2} SMS^\dagger k^{-1/2} , \tag{1.15}$$

tal que (1.14) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \overline{\widetilde{\chi}}(i\gamma\cdot\partial - \widetilde{M})\widetilde{\chi} . \tag{1.16}$$

M é Hermiteana e, lembrando que as condições necessárias para k dadas acima são equivalentes à condição de que $k^{-1/2}$ seja Hermiteana, verifica-se que $\widetilde{M}$ é também Hermiteana. Seja R a matriz unitária que diagonaliza $\widetilde{M}$ e denotemos por $\widetilde{m}$ a matriz-diagonal similar a $\widetilde{M}$, isto é,

$$\widetilde{m} = R\widetilde{M}R^{\dagger} . \tag{1.17}$$

Assim, (1.16) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \overline{\widetilde{\psi}}(i\gamma \cdot \partial - \widetilde{m})\widetilde{\psi} , \tag{1.18}$$

onde

$$\widetilde{\psi} = R\widetilde{\chi} = Rk^{1/2}S\,\chi . \tag{1.19}$$

Para mostrar a equivalência entre os resultados do Apêndice B, utilizados no início desta seção, e os resultados proporcionados por este segundo método, resta mostrar que $\widetilde{m} = m$. Com base em (1.13), a relação (1.8) pode ser reescrita como

$$L = S^{\dagger}k^{-1/2}S\;M\;S^{\dagger}k^{-1/2}S . \tag{1.20}$$

Comparando (1.20) com a segunda das equações (1.15), chega-se ao resultado

$$L = S^{\dagger}\widetilde{M}S \tag{1.21}$$

isto é, L é similar a $\widetilde{M}$, e, portanto, similar a $\widetilde{m}$. Por outro lado L é similar à matriz-diagonal m (vide eq.(1.9)). Usando estas informações, chega-se a

$$\widetilde{m} = m \tag{1.22}$$

e $\widetilde{\psi} = \psi$, o que permite reescrever a eq.(1.19) como

$$\psi = Rk^{1/2}S\,\chi\,. \tag{1.23}$$

Comparando (1.23) com (1.2), conclui-se que

$$\Omega = S^{\dagger}k^{-1/2}R^{\dagger}\,, \tag{1.24}$$

que é unitária apenas no caso em que a matriz cinética K for um múltiplo da identidade.

1.2 Equações de Movimento e Simetrias

As equações de Euler-Lagrange na parametrização original dos campos,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \overline{\chi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\chi}} = 0\,, \tag{1.25}$$

pode ser relacionada às equações de movimento para os campos físicos, utilizando-se a regra da cadeia

$$\partial_\mu \frac{\partial \partial_\nu \overline{\psi}}{\partial \partial_\mu \overline{\chi}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\nu \overline{\psi}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \overline{\chi}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \overline{\psi}} = 0\,. \tag{1.26}$$

Mediante uso de (1.2), obtém-se que (1.25) assume a forma

$$(\Omega^{\dagger})^{-1} \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \overline{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} \right) = 0\,, \tag{1.27}$$

o que mostra que as equações de movimento têm caráter tensorial sob reparametrizações e que as informações sobre a camada de massa são preservadas.

As equações de movimento na parametrização original lêem-se:

$$(Ki\gamma \cdot \partial - M)\chi = 0\,. \tag{1.28}$$

Operando à esquerda da eq.(1.28) com $K^{-1}i\gamma\cdot\partial$, obtém-se

$$[\Box+(K^{-1}M)^2]\chi=0\ . \tag{1.29}$$

Já na parametrização física, tem-se :

$$(i\gamma\cdot\partial-m)\psi=0\ , \tag{1.30}$$

o que implica

$$(\Box+m^2)\psi=0\ . \tag{1.31}$$

Multiplicando Ω^{-1} à esquerda de (1.29) e lembrando que $\psi=\Omega^{-1}\chi$, pode-se reescrever a eq.(1.31) como

$$[\Box+(\Omega^{-1}K^{-1}M\Omega)^2]\psi=0\ . \tag{1.32}$$

o que evidencia que (1.29) e (1.31) possuem o mesmo espectro.

Dado que cada componente dos diferentes sabores está sobre a camada de massa, pode-se expandir os campos físicos ψ em ondas planas :

$$u_a^{(\alpha)}(p)e^{-ip_a\cdot x}\quad \text{e}\quad v_a^{(\alpha)}(p)e^{ip_a\cdot x}\ ,\ \alpha=1,2\ , \tag{1.33}$$

onde $u_a^{(\alpha)}$ e $v_a^{(\alpha)}$ possuem as propriedades de ortonormalização dadas abaixo:

$$\begin{cases} \overline{u}_a^{(\alpha)}(p)u_b^{(\beta)}(p)=\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\ , \\ \overline{v}_a^{(\alpha)}(p)v_b^{(\beta)}(p)=-\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\ , \\ \overline{u}v=\overline{v}u=0\ , \end{cases} \tag{1.34}$$

e satisfazem, respectivamente às equações:

$$(\gamma\cdot p-m_a)u_a^{(\alpha)}(p)=0\quad \text{e}\quad (\gamma\cdot p+m_a)v_a^{(\alpha)}(p)=0\ . \tag{1.35}$$

Desta forma, escreve-se:

$$\psi_a(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{k^0}\right)_a \sum_r \Big[b_{ar}(\boldsymbol{k})u_a^{(r)}(\boldsymbol{k})\exp\{-i(k_a^0x^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\} + \\ d_{ar}^*(\boldsymbol{k})v_a^{(r)}(\boldsymbol{k})\exp\{i(k_a^0x^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\}\Big] , \tag{1.36}$$

onde b_{ar} e d_{ar}^* são coeficientes complexos.

Pode-se, agora, via transformação Ω, construir as bases da expansão em ondas planas para os sabores na parametrização original. Denotando por $U_a^{(\alpha)}$ e $V_a^{(\alpha)}$ estes vetores básicos, tem-se as seguintes relações entre os vetores básicos nas parametrizações física e original:

$$\begin{cases} U_a^{(\alpha)}(p_a)e^{-ip_a\cdot x} = \Omega_{ab}u_b^{(\alpha)}(p_b)e^{-ip_b\cdot x} \\ V_a^{(\alpha)}(p_a)e^{ip_a\cdot x} = \Omega_{ab}v_b^{(\alpha)}(p_b)e^{ip_b\cdot x} . \end{cases} \tag{1.37}$$

A partir de (1.34) e (1.37), tem-se as propriedades de ortonormalização obedecidas por U e V:

$$\begin{cases} \overline{U}_a^{(\alpha)}(p_a)K_{ab}U_b^{(\beta)}(p_b) = \delta_{\alpha\beta}e^{-i(p_a-p_b)\cdot x} , \\ \overline{V}_a^{(\alpha)}(p_a)K_{ab}V_b^{(\beta)}(p_b) = -\delta_{\alpha\beta}e^{i(p_a-p_b)\cdot x} , \\ \overline{U}KV = \overline{V}KU = 0 , \end{cases} \tag{1.38}$$

além das equações de movimento

$$(K_{ab}\gamma\cdot p - M_{ab})U_b^{(\alpha)}(p) = 0 \quad \text{e} \quad (K_{ab}\gamma\cdot p + M_{ab})V_b^{(\alpha)}(p) = 0 . \tag{1.39}$$

Vamos, agora, procurar as relações entre as quantidades conservadas nas duas parametrizações. Utilizando as convenções do Apêndice C, (C.23), serão agora derivadas as correntes conservadas para uma transformação de simetria genérica, que pode ser de natureza interna ou espaço-temporal:

$$J^\mu_{\text{orig}} = (T_{\text{orig}})^\mu{}_\nu\delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{orig}}}{\partial\partial_\mu\chi}\delta\chi - \delta\overline{\chi}\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{orig}}}{\partial\partial_\mu\overline{\chi}} , \tag{1.40}$$

onde

$$(T_{\text{orig}})^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{orig}}}{\partial \partial_\mu \chi} \partial^\nu \chi + \partial^\nu \overline{\chi} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{orig}}}{\partial \partial_\mu \overline{\chi}} - \mathcal{L}_{\text{orig}} \eta^{\mu\nu} \; . \tag{1.41}$$

A relação entre as duas parametrizações estudadas até então pode ser vista através de

$$(T_{\text{orig}})^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\rho \psi} \frac{\partial \partial_\rho \psi}{\partial \partial_\mu \chi} \frac{\partial^\nu \chi}{\partial^\sigma \psi} \partial^\sigma \psi + \partial^\sigma \overline{\psi} \frac{\partial^\nu \overline{\chi}}{\partial^\sigma \overline{\psi}} \frac{\partial \partial_\rho \overline{\psi}}{\partial \partial_\mu \overline{\chi}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\rho \overline{\psi}} - \mathcal{L}_{\text{fis}} \eta^{\mu\nu} \; . \tag{1.42}$$

Utilizando (1.2), obtém-se

$$(T_{\text{orig}})^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\mu \psi} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \overline{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\mu \overline{\psi}} - \mathcal{L}_{\text{fis}} \eta^{\mu\nu} \; , \tag{1.43}$$

ou

$$(T_{\text{orig}})^{\mu\nu} = (T_{\text{fis}})^{\mu\nu} \; , \tag{1.44}$$

como esperado, já que o conteúdo de energia e momento do sitema não pode depender da parametrização escolhida para a sua descrição

A eq.(1.44) permite reescrever J^μ_{orig} como

$$J^\mu_{\text{orig}} = (T_{\text{fis}})^\mu{}_\nu(\psi) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\rho \psi} \frac{\partial \partial_\rho \psi}{\partial \partial_\mu \chi} \delta \chi - \delta \overline{\chi} \frac{\partial \partial_\rho \overline{\psi}}{\partial \partial_\mu \overline{\chi}} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\rho \overline{\chi}} \; . \tag{1.45}$$

Admitindo que $\delta\chi$ e $\overline{\delta}\chi$ tenham a mesma transformação que χ e $\overline{\chi}$, isto é,

$$\delta \chi = \Omega \delta \psi \quad \text{e} \quad \delta \overline{\chi} = \delta \overline{\psi} \Omega^\dagger \; , \tag{1.46}$$

chega-se a

$$J^\mu_{\text{orig}} = (T_{\text{fis}})^\mu{}_\nu \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\mu \psi} \delta \psi - \delta \overline{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{fis}}}{\partial \partial_\mu \overline{\psi}} \; , \tag{1.47}$$

de onde se vê que

$$J^\mu_{\text{orig}} = J^\mu_{\text{fis}} \; . \tag{1.48}$$

como também já seria esperado por considerações físicas.

Substituindo a Lagrangeana original nas expressões acima, obtém-se:

$$Q_{\rm orig} = \int d^3\boldsymbol{x} \left(T^{0\mu}_{\rm orig} \delta x_\mu - \chi^\dagger K i \delta\chi \right) \ , \tag{1.49}$$

com

$$(T_{\rm orig})^{0\mu} = \overline{\chi} K i \gamma^0 \partial^\mu \chi \eta^{0\mu} - \overline{\chi} K i \gamma^\rho \partial_\rho \eta^{0\mu} + \overline{\chi} M \chi \eta^{0\mu} \ . \tag{1.50}$$

Abaixo, são mostradas as cargas conservadas, na parametrização original, para o grupo de Poincaré restrito.

a) Translações temporais : $\varepsilon^\mu = (\varepsilon^0, \boldsymbol{0})$,

$$\delta x^0 = \varepsilon^0 \ , \ \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \ , \ \delta\chi = 0 \ \ , \tag{1.51}$$

neste caso a carga conservada é dada por $\varepsilon^0 H_{\rm orig}$, onde

$$H_{\rm orig} = \int d^3\boldsymbol{x} \chi^\dagger [K\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\nabla) + \gamma^0 M]\chi \ . \tag{1.52}$$

b) Translações espaciais : $\varepsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$,

$$\delta x^0 = 0 \ , \ \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varepsilon} \ , \ \delta\chi = 0 \ , \tag{1.53}$$

neste outro caso a carga conservada é dada por $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{P}_{\rm orig}$, onde

$$\boldsymbol{P}_{\rm orig} = \int d^3\boldsymbol{x} \chi^\dagger K(-i\nabla)\chi \ . \tag{1.54}$$

c) Rotação no espaço-tempo,

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \ , \ \delta\chi(x) = \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\chi(x) \ , \tag{1.55}$$

neste último caso ,para a carga conservada, temos $\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}J^{\mu\nu}_{\text{orig}}$, onde

$$J^{\mu\nu}_{\text{orig}} = \int d^3\boldsymbol{x}\left[(T^{0\nu}_{\text{orig}}x^{\mu} - T^{0\mu}_{\text{orig}}x^{\nu}) + \chi^{\dagger}K\frac{i}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\chi\right] . \tag{1.56}$$

No caso de simetrias internas, vale observar que, enquanto a manifestação destas simetrias na parametrização dos campos originais deve depender de restrições a serem impostas sobre os $N(N+1)$ parâmetros complexos independentes de K e M, na parametrização dos campos físicos tais restrições atuam nos N parâmetros reais independentes da matriz-diagonal m. Assim, é mais simples supôr que estas simetrias estejam manifestas na parametrização dos campos físicos e, a partir das transformações que retomam os campos originais, observar como estas simetrias se refletem no estabelecimento de restrições aos parâmetros independentes que caracterizam a Lagrangeana original.

Suponhamos, agora, que os N sabores fermiônicos sejam associados a um grupo de simetria interna e que os espinores ψ_a se transformem em uma representação complexa e unitária N-dimensional do grupo de simetria.

Seja $\mathcal{U}$ uma dada transformação unitária atuando nos campos-físicos :

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathcal{U}\psi \ . \tag{1.57}$$

Para que esta seja uma transformação de simetria de $\mathcal{L}$, deve ser verificada a equação

$$[\mathcal{U}, m] = 0 \ , \tag{1.58}$$

o que implica, automaticamente, numa degenerescência de massa para os N sabores de férmions.

O próximo passo é analisar o comportamento da simetria frente à reparametrização para os campos originais. Substituindo-se (1.2) em (1.57), resulta que

$$\chi \to \chi' = \mathcal{T}\chi \; , \tag{1.59}$$

onde

$$\mathcal{T} = \Omega\mathcal{U}\Omega^{-1} \; . \tag{1.60}$$

Vê-se, facilmente, que a não-unitariedade de Ω implica na não-unitariedade de $\mathcal{T}$. Para que (1.59) seja uma transformação de simetria da Lagrangeana dada por (1.1),

$$\mathcal{T}^{\dagger}K\mathcal{T} = K \;\; , \;\; \mathcal{T}^{\dagger}M\mathcal{T} = M \; , \tag{1.61}$$

o que, pode-se mostrar, desde que eq.(1.58) seja satisfeita.

Alguns exemplos de simetrias internas e suas correspondentes leis de conservação:

a) SU(N), na representação fundamental (N-dimensional), com

$$\mathcal{U} = e^{i\,\omega^A G^A} \;\; , \;\; A = 1, \cdots, N^2 - 1 \;\; , \tag{1.62}$$

onde os geradores G^A são Hermiteanos e satisfazem à álgebra de Lie

$$\left[G^A, G^B\right] = i f^{ABC} G^C \; . \tag{1.63}$$

Para explicitar as relações existentes entre os geradores nas diferentes parametrizações, é necessário escrever $\mathcal{U}$ em sua forma exponenciada e substitui-la na definição de $\mathcal{T}$ em (1.60), com o que se obtém :

$$\mathcal{T} = e^{i\,\omega^A H^A} \;\; , \tag{1.64}$$

onde

$$H^A = \Omega G^A \Omega^{-1} \neq H^{A\dagger} \ . \tag{1.65}$$

Pode-se, agora, escrever as condições que proporcionam a invariância de $\mathcal{L}_{\text{fis}}$ em termos dos geradores H^A:

$$H^{A\dagger}K = KH^A \quad e \quad H^{A\dagger}M = MH^A \ , \tag{1.66}$$

as cargas conservadas na parametrização original sendo

$$Q^A_{\text{orig}} = \int d^3\boldsymbol{x} \chi^\dagger K H^A \chi \ . \tag{1.67}$$

As condições especificadas em (1.66) asseguram que, para a invariância da Lagrangeana em sua parametrização original, é necessário que a matriz $(K^{-1}M)$ seja um múltiplo da identidade, confirmando, assim o resultado explicitado em (1.58)

b) $[\mathrm{U}(1)]^N \equiv \mathrm{U}_1(1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{U}_N(1)$

Neste caso:

$$\mathcal{U} = e^{i\,\omega^a I^a} \ , \quad a = 1, \cdots, N \tag{1.68}$$

onde I^a é a matriz cujos elementos são :

$$[I^a]_{bc} = \delta_{ba}\delta_{ac} \ , \tag{1.69}$$

sem soma em a. Logo, os geradores I^a são Hermiteanos e comutam entre si:

$$\left[I^a, I^b\right] = 0 \ . \tag{1.70}$$

As cargas conservadas na parametrização original resultam ser:

$$Q^a_{\text{orig}} = \int d^3\boldsymbol{x} \chi^\dagger K Y^a \chi \ . \tag{1.71}$$

Acoplando-se estes férmions a modelos-de-gauge também estendidos [2], tem-se as derivadas covariantes

$$\nabla_\mu \psi_a \equiv (\partial_\mu - igq_a D_\mu - if_a X\mu)\psi_a \ , \tag{1.75}$$

onde D_μ e X_μ são os potenciais vetoriais:

$$\left.\begin{aligned} &D_\mu \to D'_\mu = D_\mu + \tfrac{1}{g}\partial_\mu \alpha \ , \\ &X_\mu \to X'_\mu = X_\mu \ , \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

e os parâmetros g e f_a são constantes de acoplamento.

Em termos da parametrização correspondente ao sistema original, tem-se que a transformação-U(1) dada por (1.73) lê-se:

$$X' = e^{i\alpha(x)\widetilde{Q}}\chi \ , \tag{1.77}$$

onde

$$\widetilde{Q} \equiv \Omega Q \Omega^{-1} \ , \tag{1.78}$$

a qual não é em geral diagonal. A derivada covariante nesta parametrização resulta ser

$$\widetilde{\nabla}\chi = (\partial_\mu - ig\widetilde{Q}D_\mu - i\widetilde{F}X_\mu)\chi \ , \tag{1.79}$$

com

$$\widetilde{F} \equiv \Omega F \Omega^{-1} \ , \tag{1.80}$$

sendo F diagonal e com elementos dados por f_a. O resultado (1.79) reflete o caráter tensorial da derivada covariante sob as reparametrizações dos férmions:

$$\widetilde{\nabla}_\mu = \Omega \nabla_\mu \Omega^{-1} \ , \tag{1.81}$$

onde

$$Y^a = \Omega I^a \Omega^{-1} \, . \tag{1.72}$$

Não é necessário, neste caso, que a matriz $(K^{-1}M)$ seja múltipla da identidade, de tal modo que seus autovalores podem ser, em geral, todos diferentes.

Concluindo este capítulo, gostariamos de ressaltar que o seu propósito foi simplesmente introduzir um modo sistemático de se tratar sistemas de férmions de Dirac estendidos do ponto-de-vista do formalismo de campos clássicos. Foram introduzidas duas parametrizações para os graus-de-liberdade fermiônicos, no sentido de estabelecer um critério de trabalho para a verificação de simetrias que um dado sistema venha a demonstrar e foram discutidas que condições os parâmetros inicialmente livres, devem satisfazer para que as simetrias se revelem.

1.3 Acoplamento a Campos de Gauge Abelianos.

Consideremos, inicialmente, o sistema fermiônico estendido em sua forma parametrizada pelos campos físicos, ψ_a. Suponhamos que estes carreguem cargas q_a associadas a uma simetria U(1) local:

$$\psi' \rightarrow e^{i\alpha(x)Q}\psi \, , \tag{1.73}$$

com

$$Q_{ab} = q_a \delta_{ab} \, . \tag{1.74}$$

a sua transformação-U(1) sendo:

$$\widetilde{\nabla}'_\mu = e^{i\alpha(x)\widetilde{Q}}\, \widetilde{\nabla}_\mu\, e^{-i\alpha(x)\widetilde{Q}}\ . \tag{1.82}$$

Não é óbvio, contudo, que a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \overline{\chi} K i\gamma \cdot \widetilde{\nabla}\chi - \overline{\chi} M \chi\ , \tag{1.83}$$

covariantizada no sistema de campos originais, tenha simetria U(1) explícita, como ocorre em termos dos campos físicos.

Entretanto, pode-se demonstrar que são válidas as seguintes relações:

$$\left.\begin{aligned} K\widetilde{Q} &= \widetilde{Q}^\dagger K\ , \\ K\widetilde{F} &= \widetilde{F}^\dagger K\ , \\ M\widetilde{Q} &= \widetilde{Q}^\dagger M\ , \end{aligned}\right\} \tag{1.84}$$

que seguem das propriedades da transformação Ω. De posse destes resultados, pode-se garantir que a Lagrangeana (1.83) é invariante sob as transformações-U(1) não diagonais expressas por (1.77), e que o acoplamento mínimo de modelos fermiônicos estendidos pode ser efetuado como em (1.75) e (1.79), ficando a equivalência das duas descrições demonstrada graças à existência da matriz Ω e às relações dadas em (1.84). Como observação final, vale ressaltar que, como os autovalores de $\widetilde{Q}$ e $\widetilde{F}$ são exatamente os elementos da diagonal de Q e F, pode-se certamente afirmar que as cargas que se acoplam aos potenciais D_μ e X_μ são invariantes sob mudança de sistema de campos, que é um resultado fisicamente sensato.

Capítulo 2

A Quantização dos Campos de Dirac Estendidos

Uma informação fundamental que não é considerada em Física Clássica diz respeito ao conteúdo operatorial dos observáveis físicos. A Física Quântica surgiu com o propósito de resgatar esta informação: assim, pode-se implementar a quantização através de determinadas relações impostas entre os operadores associados à descrição de um dado sistema físico. Tal método de quantização constitui a chamada *quantização canônica*. Duas propriedades básicas distingüem operadores de grandezas não-operatoriais, a saber, a não-comutatividade entre operadores e a existência de um espaço de estados sobre o qual estes devem atuar. A primeira propriedade envolve unicamente operadores; já a segunda envolve o conceito de estados . Assim, por simplicidade, implementa-se a quantização a partir da primeira propriedade, que foi o caminho escolhido por Dirac em sua monografia "The Principles of Quantum Mechanics" [5]. Mais precisamente, Dirac observou que, quando se considera as grandezas dinâmicas de um sistema como sendo objetos que não comutam, e portanto operadores, ganha-se uma nova informação que não possui análogo na aproximação clássica, a saber: relações de incerteza associadas ao processo de medição dos observáveis correspondentes aos dados operadores. O objetivo central do presente capítulo é a apresentação do método de quantização canônica aplicado ao sistema de férmions de Dirac estendidos cujos aspectos clássicos mais relevantes foram discutidos no Capítulo 1.

2.1 Formulação Segundo-Quantizada de Campos de Dirac Estendidos.

Nesta seção, discutir-se-á o método de segunda quantização para um sistema de férmions de Dirac estendidos, onde as grandezas dinâmicas são operadores atuando no espaço de Hilbert de estados do sistema.

Sejam B e B' grandezas dinâmicas bosônicas, enquanto que F e F' designam quantidades fermiônicas. Ψ representa genericamente os campos de uma Lagrangeana fermiônica, $\mathcal{L}$, e Π denota os momenta-conjugados correspondentes:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Psi} \,. \tag{2.1}$$

Segundo Casalbuoni, [6], definem-se as seguintes regras de quantização para objetos bosônicos e fermiônicos :

$$[B, B']^t = i \int d^3z \left(\frac{\delta B}{\delta \Psi(z)} \frac{\delta B'}{\delta \Pi(z)} - \frac{\delta B'}{\delta \Psi(z)} \frac{\delta B}{\delta \Pi(z)} \right) \,, \tag{2.2}$$

$$[B,F]^t = i\int d^3z \left(\frac{\delta B}{\delta\Psi(z)}\frac{\delta F}{\delta\Pi(z)} + \frac{\delta F}{\delta\Psi(z)}\frac{\delta B}{\delta\Pi(z)}\right) , \qquad (2.3)$$

$$\{F,F'\}^t = -i\int d^3z \left(\frac{\delta F}{\delta\Psi(z)}\frac{\delta F'}{\delta\Pi(z)} + \frac{\delta F'}{\delta\Psi(z)}\frac{\delta F}{\delta\Pi(z)}\right) , \qquad (2.4)$$

onde o índice (^{t}) indica que as expressões dadas só são definidas no mesmo instante de tempo. Em geral, os B's são funcionais de combinações de espinores que produzem escalares de Lorentz, já os F's normalmente coincidem com os próprios espinores. Assim, para que (2.4) seja bem-definida, o seu membro esquerdo deve ser interpretado como uma matriz cujos elementos são anticomutadores, e não como um anticomutador de matrizes como, à primeira vista, poderia parecer. Por exemplo:

$$\{F,F'\}^t_{ab,\alpha\beta} = \{F_{a\alpha}, F'_{b\beta}\}^t . \qquad (2.5)$$

A seguir, serão otidos alguns resultados a partir das regras de quantização dadas acima.

i) As relações de anticomutação canônicas são obtidas utilizando a relação (2.4) :

$$\{\Psi(x),\Pi(y)\}^t = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ \mathbf{1}_\gamma \otimes \mathbf{1} \qquad (2.6)$$

e

$$\{\Psi(x),\Psi(y)\}^t = \{\Pi(x),\Pi(y)\}^t = 0 , \qquad (2.7)$$

onde $\mathbf{1}_\gamma$ é a identidade no espaço das matrizes-γ e $\mathbf{1}$ é a identidade no espaço dos sabores.

ii) Considere a transformação global tal que $\delta\Psi = i\omega{\cdot}G\Psi$, onde os G's são os geradores de um possível grupo de simetria do sistema estendido. Associado a este grupo existe a carga de Noether $\omega{\cdot}Q$, onde os operadores Q_A são dados por

$$Q_A(t) = i\int d^3x \Pi(x) G_A \Psi(x) \ . \tag{2.8}$$

Utilizando a eq.(2.3), chega-se aos resultados

$$[Q,\Psi]^t = -G\Psi \quad \text{e} \quad [Q,\Pi]^t = \Pi G \ . \tag{2.9}$$

Para ilustar o significado físico dos operadores de carga Q_A, vamos recorrer ao seguinte argumento: seja $|q>$ um autoestado de uma certa carga Q com autovalor q :

$$Q|q> = q|q> \ , \tag{2.10}$$

logo,

$$Q\left(\Psi_i|q>\right) = \Psi_i Q|q> + [Q,\Psi_i]|q> \ , \tag{2.11}$$

onde o índice i especifica uma dada componente de sabor do férmion Ψ. Se o gerador G, correspondente à carga Q no espaço dos sabores, é diagonal, isto é $G_{ij} = \delta_{ij} q_i$, tem-se que

$$Q\left(\Psi_i|q>\right) = (q - q_i)\left(\Psi_i|q>\right) \ . \tag{2.12}$$

Analogamente, obtém-se que

$$Q\left(\Pi_i|q>\right) = (q + q_i)\left(\Pi_i|q>\right) \ . \tag{2.13}$$

Portanto, $\Psi_i|q>$ é autoestado de Q com autovalor $(q - q_i)$ e $\Pi_i|q>$ é autoestado de Q com autovalor $(q + q_i)$. Destes fatos, seguem as interpretações de Ψ_i *aniquilar* a carga q_i (ou *criar* a carga $(-q_i)$) , e Π_i *criar* a carga q_i (ou *aniquilar* a carga $(-q_i)$). A interpretação da carga em questão dependerá do número quântico associado à simetria sob a qual Ψ se transforma.

iii) Sejam G e G' geradores de um dado grupo de simetria e Q e Q' as cargas correspondentes no espaço de Hilbert de estados do sistema. Se estas cargas forem do tipo dado em (2.8), utilizando-se (2.2), obtém-se que

$$[Q, Q']^t = i \int d^3\boldsymbol{x} \Pi [G, G'] \Psi \ . \tag{2.14}$$

No caso em que a simetria considerada é por exemplo SU(N), por exemplo, a expressão anterior identifica-se com a álgebra de correntes

$$[Q^A, Q^B]^t = i f^{ABC} Q^C \ ; \tag{2.15}$$

no caso da simetria $[\mathrm{U}(1)]^N$,

$$[Q^a, Q^b] = 0 \tag{2.16}$$

Mediante uso da relação de invariância (1.48), decorre imediatamente que relações de anticomutação canônicas e as álgebra de correntes de uma eventual simetria são invariantes sob a reparametrização dos campos.

Dando prosseguimento ao programa de quantização de campos de Dirac estendidos, será dada a seguir a expansão destes em ondas planas para a parametrização física. Os vetores de base na expansão são aqueles dados em (1.34) e os coeficientes, b_{ar} e d_{ar}, são operadores do espaço de Hilbert de estados:

$$\begin{aligned} \psi_a(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{k^0}\right)_a \sum_r \Big[& b_{ar}(\boldsymbol{k}) u_a^{(r)}(\boldsymbol{k}) \exp\{-i(k_a^0 x^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\} + \\ & d_{ar}^\dagger(\boldsymbol{k}) v_a^{(r)}(\boldsymbol{k}) \exp\{i(k_a^0 x^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\} \Big] \ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

b_{ar} e d_{ar} satisfazem às seguintes regras de anticomutação:

$$\{b_{ar}(\boldsymbol{k})\ ,\ b^{\dagger}_{bs}(\boldsymbol{l})\} = \{d_{ar}(\boldsymbol{k})\ ,\ d^{\dagger}_{bs}(\boldsymbol{l})\} = 2\pi \left(\frac{k_0}{m}\right)_a \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})\delta_{ab}\delta_{rs}\ ; \tag{2.18}$$

$b_{ar}(\boldsymbol{k})$ e $b^{\dagger}_{ar}(\boldsymbol{k})$ são interpretados, respectivamente, como operadores aniquilação e criação de férmion com sabor a e momento linear $\boldsymbol{k}$. Os d's e $d^{\dagger}$'s têm interpretações análogas em termos dos anti-férmions correspondentes.

Vamos, agora, definir o estado de vácuo, $|0>$, como sendo aquele que é invariante sob qualquer transformação de simetria. Supõe-se com isto que esta não seja quebrada espontaneamente e que possa, portanto, ser unitariamente implementada:

$$b_{ar}(\boldsymbol{k})|0>=0 \quad \text{e} \quad b^{\dagger}_{ar}(\boldsymbol{k})|0>=|f_a(\boldsymbol{k}),r>\ , \tag{2.19}$$

onde $|f>$ é um estado de 1-férmion. Da mesma forma, d aniquila o vácuo e $d^{\dagger}$ cria o estado do anti-férmion, $|\overline{f}>$.

O propagador de Feynman na parametrização original dos campos é dado por

$$<0|T\left(\chi(x)\overline{\chi}(y)\right)|0>=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{S}_{\text{orig}}(k)e^{-ik\cdot(x-y)}\ , \tag{2.20}$$

onde

$$\widetilde{S}_{\text{orig}}(k) = \frac{i\left(\gamma\cdot k - K^{-1}M\right)}{k^2-\left(K^{-1}M\right)^2}K^{-1}\ . \tag{2.21}$$

É imediato verificar que

$$\widetilde{S}_{\text{orig}} = \Omega\widetilde{S}_{\text{fis}}\Omega^{\dagger}\ , \tag{2.22}$$

onde

$$\widetilde{S}_{\text{fis}}(k) = \frac{i(\gamma\cdot k - m)}{k^2-m^2}\ , \tag{2.23}$$

que é perfeitamente diagonal, ao passo que o propagador (2.20) acopla diferentes sabores entre si.

2.2 Análise dos Propagadores e Consistência dos Modelos Estendidos

O propagador é uma entidade que traz uma série de informações de imediato interesse no que diz respeito à consistência de uma teoria de campos, seja a nível semi-clássico (aproximação-árvore) que a nível da teoria corrigida radiativamente (incorporação dos efeitos de "loops").

Uma primeira inspeção, que permite decidir se o programa de incorporar efeitos de "loops" à teoria clássica deve ser implementado ou não, consiste na análise dos pólos dos propagadores e dos seus respectivos resíduos. Os primeiros revelam se a teoria apresenta massas fisicamente aceitáveis, se surgem problemas relativos à presença de modos com propagação não-causal (táquions) ou à presença de massas não-físicas que, no caso de uma teoria de "gauge", podem vir a ser "gauge-dependentes". A multiplicidade dos pólos é também um dado importante a ser observado: pólos múltiplos, ainda que associados a massas fisicamente sensatas, indicam problemas com a positividade da energia, o que assinala instabilidade do vácuo da teoria e compromete o programa de quantizar as excitações definidas em torno deste estado de vácuo . Por outro lado, é também fundamental controlar-se os resíduos associados aos pólos de um propagador. É mediante a análise destes que serão detectados eventuais estados-fantasma que a teoria possa apresentar, isto é, a presença de partículas descritas por funções-de-onda não-nulas, porém com norma nula ou negativa.

Os pólos correspondem aos autovalores das matrizes presentes nos denominadores dos propagadores em ambas as parametrizações. Da análise feita no Capítulo 1, foram impostas condições suficientes a se garantir que estes autovalores sejam sempre não-negativos (vide (1.9), de modo a se concluir que não aparecem táquions no espectro correspondente.

A matriz dos propagadores na parametrização original pode ser reescrita como

$$\tilde{S}_{\text{orig}} = \frac{i \,\text{cof}\left[p^2 - (K^{-1}M)^2\right]}{\det\left[p^2 - (K^{-1}M)^2\right]} \left(\gamma \cdot p + K^{-1}M\right) K^{-1} \, . \tag{2.24}$$

O cofator presente no numerador desta expressão consiste num polinômio de grau $(N-1)$ em p^2, logo a matriz (2.24) lê-se :

$$\tilde{S}_{\text{orig}} = \frac{i\left[A^{(1)}(p^2)^{N-1} + A^{(2)}(p^2)^{N-2} + \cdots + A^{(N)}\right]}{(p^2 - m_1^2)(p^2 - m_2^2) \cdot \cdots \cdot (p^2 - m_N^2)} \left(\gamma \cdot p + MK^{-1}\right) \, , \tag{2.25}$$

onde o determinante no denominador foi substituído pelo produto dos autovalores da matriz $\left[p^2 - (K^{-1}M)^2\right]$.

A este ponto, é importante ressaltar a necessidade de outra restrição sobre os parâmetros da Lagrangeana original . Para evitar o aparecimento de pólos múltiplos, os parâmetros de K e M têm que ser tais que os autovalores de $(K^{-1}M)$ não sejam degenerados :

$$m_1^2 \neq m_2^2 \neq \cdots \neq m_N^2 \, .$$

A presença de um pólo duplo, por exemplo, introduziria fatalmente um fantasma no modelo.

Com esta restrição levada em conta, pode-se garantir que (2.25) seja expandida em frações parciais *simples*, segundo a expressão :

$$\tilde{S}_{\text{orig}} = \left(\frac{i\, G^{(1)}}{p^2 - m_1^2} + \frac{i\, G^{(2)}}{p^2 - m_2^2} + \cdots + \frac{i\, G^{(N)}}{p^2 - m_N^2} \right) \left(\gamma \cdot p + M K^{-1} \right) . \tag{2.26}$$

Comparando-se, agora, as expressões (2.22) e (2.26) pólo a pólo, pode-se escrever que

$$G_{ab}^{(c)} = \Omega_{ac} \left(\Omega^{\dagger} \right)_{cb} , \tag{2.27}$$

sem soma em c. Alternativamente, pode-se apresentar a matriz $G^{(c)}$ como um produto tensorial :

$$G^{(c)} = w_c \otimes w_c^{\dagger} , \tag{2.28}$$

onde os vetores w_c são definidos no Apêndice B (vide B.20).

Para procedermos à analise da questão dos fantasmas, tem-se que calcular o espectro da matriz-resíduo $G^{(c)}$. Segundo as convenções aqui adotadas , a não-existência de fantasmas depende das matrizes $G^{(c)}$ não apresentarem autovalores negativos .

Um possível procedimento para a diagonalização da matriz-resíduo será exposto a seguir. Para isto, deve-se reescrevê-la como

$$G^{(a)} = \Omega I^a \Omega^{\dagger} , \tag{2.29}$$

onde os I^a são as matrizes dadas em (1.69). Sabemos, do Capítulo 1, que existe uma matriz unitária S que diagonaliza K. Lembrando que a matriz inversa de K identifica-se com $(\Omega\Omega^{\dagger})$, pode-se escrever que

$$S \Omega \Omega^{\dagger} S^{\dagger} = k^{-1} , \tag{2.30}$$

onde k é a matriz-diagonal formada pelos autovalores de K. Pode-se, agora, convenientemente introduzir em ambos os lados da equação anterior a identidade $\sum_a I^a = \mathbf{1}$, isto é

$$S\Omega \sum_a I^a \Omega^\dagger S^\dagger = k^{-1} \sum_a I^a \ , \tag{2.31}$$

de onde se conclui que

$$S G^{(a)} S^\dagger = k_a^{-1} I^a \ , \tag{2.32}$$

onde k^a é o a-ésimo autovalor da matriz K. Tal resultado indica a *não-existência de fantasmas no espectro*, o que é assegurado pelo fato de se ter tomado a matriz cinética K positivo-definida.

Concluindo este capítulo, gostariamos de mencionar que o sistema de férmions estendidos supera o teste de consistência na aproximação árvore desde que a matriz cinética K seja positivo-definida (ausência de fantasmas) e que a matriz de massa M seja tal que $K^{-1}M$ apresente auto-valores reais e não degenerados (ausência de táquions e fantasmas). Este resultado libera a passagem ao programa de incorporar efeitos de "loops" ao modelo clássico. Isto não será tratado nesta tese, porém é um problema que poderá ser atacado como prosseguimento do trabalho que aqui se propõe.

Capítulo 3

Aspectos Físicos de Sistemas de Férmions Quirais Estendidos

Uma questão já levantada no Capítulo 1, e que expressa um ponto relevante dos modelos fermiônicos estendidos aqui tratados, diz respeito às possíveis conseqüências observacionais dos parâmetros de "mixing" introduzidos nas Lagrangeanas cinética e de massa.

Mostrar-se-á, neste capítulo, que os parâmetros que sobrevivem às redefinições dos campos do modelo são apenas aqueles presentes nas diferentes matrizes complexas de massa. Os "mixings" nos termos cinéticos, dada a prescrição de se evitar excitações-fantasma, são inconseqüentes, podendo ser incorporados em reparametrizações dos campos.

Ainda que provenientes de um setor livre da teoria, os parâmetros de "mixing" de massa repercutem-se nos acoplamentos dos férmions a campos externos, que podem ser bósons escalares ou vetoriais. Tendo em vista o importante papel desempenhado pela matriz de Kobayashi-Maskawa [7] no contexto do modelo SU(2)×U(1) para as interações eletrofracas, finalizar-se-á o presente capítulo com uma discussão comparativa da influência dos parâmetros dos Lagrangeanos estendidos e das fases de Kobayashi-Maskawa no problema da violação de CP nas interações eletrofracas [8].

3.1 Sistema Estendido de N Férmions Quirais com Massas de Dirac e Majorana

Seja a Lagrangeana fermiônica

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cin}} + \mathcal{L}_{\text{massa}} \ , \tag{3.1}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = \overline{L} i\gamma \cdot \partial L + \overline{R} i\gamma \cdot \partial R \ , \tag{3.2}$$

com L e R vetores-coluna de N componentes e quiralidades opostas;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = -\left(\overline{L}\, M\, R + \overline{R}\, M^{\dagger}\, L\right) - & \\ \tfrac{1}{2}\left(\overline{L^{C}} M_L L + \overline{L} M_L^{\dagger} L^{C} + \overline{R^{C}} M_R R + \overline{R} M_R^{\dagger} R^{C}\right) & \ , \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde o índice (^{C}) sobre o espinor denota o conjugado de carga do mesmo, e as matrizes M , M_R e M_L são complexas e $(N \times N)$, sem qualquer vínculo de Hermiticidade. M é a matriz de massa de Dirac, ao passo que M_L e M_R são matrizes que dão aos férmions massas "à la Majorana" [4].

Poder-se-ia ter introduzido matrizes cinéticas K_L e K_R no Lagrangeano (3.2). Contudo, com a análise do Capítulo 2 , sabe-se que estas deveriam ser necessariamente *positivo-definidas*, a fim de se evitar a presença de possíveis fantasmas no espectro. Porém, com K_L e K_R ambas positivo-definidas, procede-se, sem qualquer perda de generalidade, a uma redefinição dos campos L e R de tal modo a absorver as matrizes K_L e K_R:

$$L \to K_L^{1/2} L \quad \text{e} \quad R \to K_R^{1/2} R \ ,$$

deixando apenas as matrizes de massa arbitrárias dadas em (3.3).

Para se chegar ao número mínimo de parâmetros necessários para uma descrição completa do sistema fermiônico associado à Lagrangeana (3.1), deve-se redefinir os campos fermiônicos convenientemente. Para esta tarefa, deve-se fazer uso das transformações bi-unitárias discutidas nas refs. [9] , [10]:

$$L \to U_L L \quad \text{e} \quad R \to U_R R \tag{3.4}$$

onde U_L e U_R são matrizes unitárias independentes. Assim, após tais redefinições dos campos, a Lagrangeana fica tal que $\mathcal{L}_{\text{cin}}$, a menos de uma quadri-divergência, permanece a mesma, enquanto que L_{massa} assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = \left(\overline{L}\, m\, R + \overline{R}\, m\, L\right) - & \\ \tfrac{1}{2}\left(\overline{L^C}\widetilde{M}_L L + \overline{L}\widetilde{M}_L^\dagger L^C + \overline{R^C}\widetilde{M}_R R + \overline{R}\widetilde{M}_R^\dagger R^C\right) \ , & \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde

$$\begin{cases} m = U_L m U_R^\dagger \ , \\ \widetilde{M}_L = U_L^* M_L U_L^\dagger \ , \\ \widetilde{M}_R = U_R^* M_R U_R^\dagger \ , \end{cases} \tag{3.6}$$

m sendo uma matriz-diagonal não-negativa, obtida a partir de M pelas transformações bi-unitárias que redefinem os campos de acordo com (3.4).

A questão, agora, é verificar se tal teoria, descrita pela Lagrangeana acima, possui um espectro saudável. Para esta tarefa ser realizada, propõe-se reescrever a Lagrangeana em termos de novos campos, f e F, definidos por :

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(L + L^{\mathrm{C}}\right) \quad \mathrm{e} \quad F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(R + R^{\mathrm{C}}\right) . \tag{3.7}$$

Observe que estes espinores estendidos são de Majorana, isto é,

$$f^{\mathrm{C}} = f \quad \mathrm{e} \quad F^{\mathrm{C}} = F .$$

Usemos, agora, o fato de que qualquer matriz complexa pode ser decomposta em duas partes, uma Hermiteana e a outra anti-Hermiteana. Sejam M_f e $\overline{M}_f$, respectivamente, as partes Hermiteana e anti-Hermiteana de $\widetilde{M}_L$, isto é,

$$M_f = \frac{\widetilde{M}_L + \widetilde{M}_L^{\dagger}}{2} \quad \mathrm{e} \quad \overline{M}_f = \frac{\widetilde{M}_L - \widetilde{M}_L^{\dagger}}{2} . \tag{3.8}$$

As matrizes M_F e $\overline{M}_F$, que aparecerão em seguida, são definidas de modo análogo a partir de $\widetilde{M}_R$. Convém observar, entretanto, que a notação $\overline{M}_f$ não envolve qualquer conjugação complexa.

A Lagrangeana fermiônica, em termos dos novos campos (3.7) e das partes Hermiteana e anti-Hermiteana de $\widetilde{M}_L$ e $\widetilde{M}_R$, lê-se agora:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cin}} = \overline{f} i\gamma \cdot \partial f + \overline{F} i\gamma \cdot \partial F \tag{3.9}$$

e

$$\mathcal{L}_{\mathrm{massa}} = -\left(\overline{f} m F + \overline{F} m f + \overline{f} M_f f + \overline{f}\gamma_5 \overline{M}_f f + \overline{F} M_F F + \overline{F}\gamma_5 \overline{M}_F F\right) . \tag{3.10}$$

Imediatamente, observa-se o aparecimento de termos de massa que possuem γ_5 e que, explicitamente, violam a simetria de paridade, já a nível de teoria livre. Estes termos também comprometem o espectro de excitações descrito por tal Lagrangeana, fato este que vai ser melhor ilustrado a seguir.

A Lagrangeana acima, $(\mathcal{L}_{\text{cin}} + \mathcal{L}_{\text{massa}})$, pode ser finalmente reescrita como

$$\mathcal{L} = \overline{\Upsilon}(i\gamma \cdot \partial - \mathcal{M} - \gamma_5 \mathcal{N})\Upsilon \ , \tag{3.11}$$

onde Υ é o espinor de Majorana com $2N$ componentes

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} , \tag{3.12}$$

e $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são, respectivamente, as matrizes $2N \times 2N$, Hermiteana e anti-Hermiteana, dadas por:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_f & m \\ m & M_F \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \overline{M}_f & 0 \\ 0 & \overline{M}_F \end{pmatrix} . \tag{3.13}$$

De posse destes resultados, pode-se imediatamente passar à discussão a respeito do espectro do modelo.

3.2 Propagadores Fermiônicos Estendidos e Espectro

O propagador de Feynman associado aos campos estendidos da Lagrangeana (3.11) é dado, no espaço dos momenta, pela expressão:

$$\tilde{S}(k) = i\mathcal{O}^{-1}(k) \; , \tag{3.14}$$

onde $\mathcal{O}(k)$ é o operador lido em (3.11):

$$\mathcal{O}(k) = \gamma \cdot k - \mathcal{M} - \gamma_5 \mathcal{N}. \tag{3.15}$$

Para se estudar os pólos do propagador, deve-se inverter a matriz $\mathcal{O}$. Encontra-se para $\mathcal{O}^{-1}$ a expressão:

$$\mathcal{O}^{-1} = X + Y\gamma_5 + Z\gamma \cdot k + W\gamma \cdot k\gamma_5 \; , \tag{3.16}$$

onde X, Y, Z e W devem satisfazer ao conjunto de equações

$$\begin{cases} X = \mathcal{M}Z - \mathcal{N}W \\ Y = \mathcal{M}W - \mathcal{N}Z \; , \end{cases} \tag{3.17}$$

com

$$Z = \left[\mathbf{1}_\Upsilon - \left(\frac{1}{k^2 - \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \left[\mathcal{M}, \mathcal{N} \right] \right)^2 \right]^{-1} \frac{1}{k^2 - \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \tag{3.18}$$

e

$$W = -\frac{1}{k^2 - \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \left[\mathcal{M}, \mathcal{N} \right] Z \; . \tag{3.19}$$

Com isto, as matrizes X e Y ficam também perfeitamente definidas, o que corresponde a se ter a expressão completa do propagador (3.14).

Os pólos do propagador serão dados pelos autovalores da matriz Hermiteana $(\mathcal{M}^2 - \mathcal{N}^2)$, e estes não são necessariamente positivo-definidos, como se pode verificar. Isto poderia levar, fatalmente, à presença de táquions no espectro correspondente. Para que estes não apareçam, deve-se impôr condições adequadas sobre os parâmetros de massa.

Também, deve-se observar o aparecimento de pólos múltiplos no caso em que $[\mathcal{M}, \mathcal{N}] \neq 0$. Estes, por sua vez, introduziriam estados não-nulos com norma nula ou negativa. Assim sendo, dever-se-ia ter

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = 0 \; , \tag{3.20}$$

a fim de eliminar estes fantasmas.

Observe, também, que a ausência da matriz $\mathcal{N}$ no propagador definido acima reproduz o caso de propagadores espinoriais ordinários, sem táquions no espectro, uma vez que a matriz $\mathcal{M}^2$ possui autovalores positivo-definidos, por se ter $\mathcal{M}$ Hermitiana. Assim, deve-se, de algum modo, eliminar o termo que contenha $\mathcal{N}$ na Lagrangeana, sem que para isto se tenha que impôr $\mathcal{N} = 0$. Logo, a próxima tarefa consiste em verificar sob quais restrições sobre as matrizes M_f , $\overline{M}_f$, M_F e $\overline{M}_F$, somente os termos desejáveis na Lagrangeana sobrevivem e a contribuição em γ_5 seja cancelada.

Uma vez que f é um campo de Majorana, $\overline{f}$ pode ser escrito como:

$$\overline{f} = -f^T C^{-1} \; , \tag{3.21}$$

onde C é a matriz conjugação de carga. Considerando, agora, as igualdades :

$$\begin{cases} f^T C^{-1} \gamma_5 \overline{M}_f f = \left(f^T C^{-1} \gamma_5 \overline{M}_f f \right)^T \\ f^T C^{-1} M_f f = \left(f^T C^{-1} M_f f \right)^T \; , \end{cases} \tag{3.22}$$

devido à anti-simetria das matrizes $C^{-1}\gamma_5$ e C, as eqs. (3.22) são simplificadas a:

$$\begin{cases} \overline{f}\gamma_5\overline{M}_f f = \overline{f}\gamma_5\overline{M}_f^T f \\ \overline{f}M_f f = \overline{f}M_f^T f \ . \end{cases} \tag{3.23}$$

Chega-se a um resultado análogo ao (3.23), para os termos de massa de Majorana, que envolvem o campo F.

Com isto, chega-se ao conjunto de restrições impostas sobre as matrizes de massa a fim de que os termos em γ_5 sejam eliminados da Lagrangeana de massa:

$$\begin{cases} \overline{M}_f^T = -\overline{M}_f \quad ; \quad M_f^T = M_f \\ \overline{M}_F^T = -\overline{M}_F \quad ; \quad M_F^T = M_F \ . \end{cases} \tag{3.24}$$

Em termos dos parâmetros iniciais da Lagrangeana, as restrições (3.24) tomam a forma:

$$\begin{cases} M_L = (V_L M_L V_L)^* \\ M_R = (V_R M_R V_R)^* \ , \end{cases} \tag{3.25}$$

onde V_L e V_R são matrizes unitárias definidas por :

$$V_{L/R}^{\dagger *} = U_{L/R}^{\dagger} U_{L/R}^{*} \ . \tag{3.26}$$

Providenciando para que estas restrições sejam sempre satisfeitas, $\mathcal{L}$ pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = \overline{\Upsilon}(i\gamma \cdot \partial - \mathcal{M})\Upsilon \ , \tag{3.27}$$

onde $\mathcal{M}$ agora é simétrica, podendo ser, portanto, diagonalizada por uma rotação no espaço dos vetores Υ, concluindo-se, então, que tal modelo fermiônico possui um espectro bem-definido e não afetado pela presença de táquions ou fantasmas.

Seja $\mathcal{R}$ a matriz ortogonal que realiza esta rotação, tal que

$$\mathcal{R}\mathcal{M}\mathcal{R}^T = \mu \; , \tag{3.28}$$

onde μ é uma matriz-diagonal real. Após esta redefinição, a Lagrangeana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \overline{\eta}(i\gamma \cdot \partial - \mu)\eta \; , \tag{3.29}$$

com

$$\eta = \mathcal{R}\Upsilon \; , \tag{3.30}$$

onde η é também um espinor de Majorana estendido, o que se dá graças à propriedade de ortogonalidade da matriz $\mathcal{R}$

Embora, à primeira vista, possa se pensar que o espectro apresente $2N$ férmions de Majorana, este não é na verdade o caso. Uma análise mais cuidadosa, a partir dos autovalores de μ, revela que o espectro físico pode exibir, também, férmions de Weyl e de Dirac. Vamos estabelecer imediatamente esta discussão, abordando todas as possibilidades de férmions físicos presentes no espectro ditado pela Lagrangeana estendida aqui proposta.

i) Sejam μ_i, $i = 1, \cdots, 2N$, os autovalores de μ, e η_k um férmion de massa nula $(\mu_k = 0)$

$$\eta_k = \mathcal{R}_{kl}\Upsilon_l \; . \tag{3.31}$$

Dependendo dos elementos de matriz $\mathcal{R}_{kl}$, com k *fixo*, poderemos ter férmions de Weyl ou de Dirac não-massivos. Para se ter uma resposta a qual deles a massa nula corresponde, é necessário dispôr dos elementos da matriz $\mathcal{R}$ aparecendo em sua k-ésima linha. Se, na combinação linear (3.31) os elementos de matriz são tais que tanto os espinores f_l como os espinores F_l estão presentes, o férmion η_k apresentará componentes de quiralidades opostas (L e R) e independentes, correspondendo, portanto, a um *férmion de Dirac não-massivo.*

Se os $\mathcal{R}_{kl}$ forem tais que apenas f_l's (ou F_l's) entram na combinação linear (3.31), então η_k corresponderá a um *férmion de Weyl com quiralidade L (ou R).* A possibilidade de se ter um férmion de Majorana não-massivo não é considerada independentemente, por ser o mesmo equivalente a um férmion quiral.

ii) Para cada par de autovalores simétricos, aparecerá um férmion de Dirac massivo. Suponhamos, para isto, que se tenha um determinado $\mu_k = m'$ e outro $\mu_l = -m'$:

$$\mathcal{L}_{(k+l)} = \overline{\eta}_k(i\gamma \cdot \partial - m')\eta_k + \overline{\eta}_l(i\gamma \cdot \partial + m')\eta_l \ . \tag{3.32}$$

Com a redefinição de η_l dada a seguir

$$\eta_l \longrightarrow \rho_l \equiv \gamma_5 \eta_l \ , \tag{3.33}$$

(note que ρ_l é um férmion do tipo anti-Majorana, $\rho_l^C = -\rho_l$), a Lagrangeana (3.32) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{(k+l)} = \overline{\eta}_k(i\gamma \cdot \partial - m')\eta_k + \overline{\rho}_l(i\gamma \cdot \partial - m')\rho_l \ . \tag{3.34}$$

Formando, então, o espinor $\xi = \eta_k + \rho_l$, (3.32) assume a forma

$$\mathcal{L}_{(k+l)} = \overline{\xi}(i\gamma \cdot \partial - m')\xi \ . \tag{3.35}$$

Como $\xi^C \neq \pm\xi$, este corresponde a um *férmion de Dirac massivo.* Deste modo, conclui-se que, em termos de espinores de Majorana massivos, férmions de Dirac físicos correspondem a um par de autovalores simétricos na matriz $\mathcal{M}$.

iii) Os auto-valores de μ não-nulos e não formando pares simétricos corresponderão a *férmions de Majorana massivos.*

Tendo chegado a uma conclusão a respeito do espectro físico de nosso modelo estendido, propõe-se a seguir uma possível aplicação para o mesmo em termos de processos que poderiam servir como um guia na escolha dos parâmetros introduzidos nos termos de massa.

3.3 Violação de CP em Sistemas Fermiônicos Estendidos e Comparação com a Matriz de Kobayashi-Maskawa.

Como aplicação do modelo estendido apresentado neste capítulo, escolhe-se relacioná-lo a processos onde possa ocorrer violação de CP [8]. A fim de se mostrar que se pode implementar esta violação no contexto de modelos fermiônicos estendidos, incorpora-se ao espectro uma partícula escalar carregada e propõe-se fazê-la interagir com os férmions presentes. Introduz-se um termo de interação de Yukawa para descrever o acoplamento do escalar com os férmions:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\overline{L^{C}}R\varphi + g\overline{R^{C}}L\varphi^{*} \,, \tag{3.36}$$

onde φ descreve o escalar introduzido no modelo. Após as transformação bi-unitárias (3.4), $\mathcal{L}_{\text{int}}$ assume a forma:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\overline{L^C}UR\varphi + g\overline{R^C}U^\dagger L\varphi^* \,, \tag{3.37}$$

onde U é a matriz unitária dada por

$$U \equiv U_L^* U_R^\dagger \,. \tag{3.38}$$

Vê-se, por meio deste resultado, que os termos mistos de massa implicam, através das matrizes U_L e U_R, no aparecimento da matriz U a qual, por sua vez, introduz parâmetros complexos nos termos de interação. Esta constatação tem conseqüências imediatas. De fato, efetuando-se uma transformação CP sobre o Lagrangeano de interação (3.36), chega-se ao seguinte resultado:

$${\mathcal{L}_{\text{int}}}^{\text{CP}} = g\overline{R^C}U^T L\varphi^* + g\overline{L^C}U^* R\varphi \tag{3.39}$$

Logo, verifica-se que a interação descrita por (3.37) viola a simetria CP, uma vez que a matriz U possui $\frac{N(N+1)}{2}$ fases.

É, contudo, interessante que, a este ponto, levantemos a questão da comparação entre a parametrização da violação de CP nos modelos fermiônicos estendidos aqui apresentados e no modelo de Weinberg-Salam-Glashow. Neste último, as massas fermiônicas surgem única e exclusivamente dos acoplamentos de Yukawa, caracterizados por parâmetros complexos que, após a quebra espontânea de simetria, fornecem as massas das excitações fermiônicas em termos das grandezas complexas presentes nos acoplamentos entre léptons e o setor de Higgs.

Como no caso dos modelos estendidos aqui estudados, também no modelo SU(2)×U(1) resta uma matriz unitária que controla os acoplamentos de Yukawa e de "gauge" dos léptons e quarks massivos. Entretanto, dos N^2 parâmetros reais desta matriz unitária, $(2N-1)$ fases podem ainda ser reabsorvidas em redefinições dos campos fermiônicos, permanecendo finalmente as $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ fases que respondem pela violação de CP [7].

Em nosso caso, onde não há quebra espontânea de simetria (as massas fermiônicas "à la Dirac" não provêm de acoplamentos de Yukawa) e termos de massa de Majorana estão presentes, o número de fases é $\frac{N(N+1)}{2}$ e há, por conseguinte, um maior número de grandezas que parametrizam a violação de CP. No caso particular de N=2 gerações, para o qual o modelo SU(2)×U(1) não prevê violação de CP (pois resta apenas o ângulo de Cabibbo), em nosso modelo estendido restam três parâmetros que controlam a quebra de CP. Convém ressaltar que também a versão N=1-supersimetrizada do modelo de Weinberg-Salam-Glashow apresenta violação de CP no setor de quarks mesmo no caso em que há apenas duas gerações [11], [12].

Conseqüências experimentais diretas dos modelos estendidos em termos de sistemas que violam a simetria CP e aplicações à questão de neutrinos massivos [13] são o prosseguimento imediato dos resultados obtidos neste estudo aqui proposto.

Conclusões Gerais

Ao longo dos três capítulos que constituem esta tese, tentou-se esclarecer alguns dos aspectos essenciais de sistemas fermiônicos estendidos, caracterizados pela introdução de famílias de espinores que compartilham o mesmo grupo de simetria. Foi discutida em detalhes a formulação a nível clássico destes sistemas, em termos de espinores de Dirac, Majorana e Weyl. Estabeleceu-se a possibilidade de tratá-los sob o ponto-de-vista do que se chamou campos *originais* e campos *físicos* e, nestas duas diferentes parametrizações dos graus-de-liberdade fermiônicos, foi estudada a implementação de simetrias globais e locais. No caso destas últimas, foi efetuado o acoplamento mínimo de férmions estendidos a potenciais de gauge, também estendidos, no caso de uma simetria Abeliana.

Contudo, um maior sentido para os modelos fermiônicos estendidos só será encontrado no momento em que se demonstrar que estes constituem uma teoria quântica de campos saudável: renormalizável, unitária e relevante para a descrição de dados fenomenológicos observados. Ser apenas uma boa teoria clássica é necessário, mas de longe não-suficiente para se atribuir a estes modelos estendidos o status de teorias de campos aceitáveis. Este, entretanto, é um programa longo, que requer o esclarecimento e cumprimento de algumas etapas iniciais. Não foi o propósito desta tese estabelecer os tês pontos acima mencionados. Objetivou-se, sim, à análise destes passos iniciais, quais sejam: discussão dos propagadores, detecção de possíveis modos não-físicos, com a conseqüente busca de condições que os suprimam do espectro, e formulação de sua quantização canônica.

Da análise dos propagadores e do estudo de seus pólos e resíduos, constatou-se a possível presença de táquions e modos-fantasma. Para eliminá-los da teoria, foram estabelecidas condições específicas sobre os parâmetros livres presentes na Lagrangeana. Uma vez fixados estes vínculos sobre os parâmetros, e identificadas as excitações físicas através de seus números quânticos fundamentais (massa, spin, carga elétrica, sabor e outros eventuais atributos internos), pode-se dar continuidade ao programa de quantização, propondo-se o acoplamento dos férmions estendidos a bósons escalares e vetoriais, em compatibilidade com o requisito de renormalizabilidade.

Já que nesta tese cumpriu-se esta etapa de organização dos graus-de-liberdade e se concluiu pela consistência dos modelos estendidos a nível de processos na aproximação-árvore, o prosseguimento natural dos resultados aqui estabelecidos seria a análise da consistência dos mencionados modelos frente a correções radiativas à ordem-$\hbar$ (gráficos de 1-loop). Só, então, poder-se-á atribuir aos modelos estendidos a qualificação de uma boa teoria quântica de campos. Como a teoria de pertubações para estes modelos torna-se tecnicamente laboriosa em virtude da complexidade algébrica inerente aos propagadores e/ou aos vértices, o uso de linguagens algébricas no processo de cálculo dos gráficos de Feynman será uma estratégia essencial. Para isto, está-se fazendo uma análise comparativa entre os sistemas algébricos Schoonschip [14], Form [15] e Maple [16].

Do ponto-de-vista da fenomenologia, resta-nos estudar em detalhes os acoplamentos que respondem pela violação de CP no setor de quarks. Também, um interessante campo de aplicação dos modelos fermiônicos estendidos reside no problema dos neutrinos massivos e na conseqënte oscilação entre diferentes famílias. Mais recentemente, a evidência de uma massa de 17 keV para o neutrino do elétron vem motivando a formulação de modelos baseados, ou não, em supersimetria com o propósito de atacar o questão dos neutrinos massivos. Tais modelos prestam-se claramente à aplicação imediata dos métodos aqui abordados para tratar sistemas fermiônicos estendidos como teorias quânticas de campos.

Apêndice A

Notações e Definições

Neste trabalho, adota-se o sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$, e a métrica utilizada é do tipo-tempo :

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diagonal}(+1, -1, -1, -1) \;\; ; \;\; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \, .$$

Definições envolvendo o espaço-tempo

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x^{\mu} = (x^0; \boldsymbol{x}) \; ; \; x^0 = t \\ \\ \tilde{x} \equiv x_{\mu} = (x^0; -\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} x^2 \equiv x^{\mu} x_{\mu} \, , \tag{A.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_{\mu} = (\partial_0; \nabla) \; ; \; \partial_0 = \partial/\partial t \\ \\ \partial^{\mu} = (\partial_0; -\nabla) \end{array}\right\} \Box \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu} \, . \tag{A.2}$$

Notação para operações sobre matrizes:

Seja $\mathcal{O}$ uma matriz complexa; define-se a operação de Hermitização por

$$\mathcal{O}^{\dagger} \; = \; \mathcal{O}^{*T} \; = \; \mathcal{O}^{T*} \, , \tag{A.3}$$

(†) indica operação de Hermitização,

(*) indica operação de conjugação-complexa,

(^{T}) indica operação de transposição.

Propriedades das matrizes-γ de Dirac e da matriz conjugação de carga

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0} \,. \tag{A.4}$$

Apesar das matrizes-γ não se transformarem como 4-vetores, elas podem ser representadas como se fossem tais:

$$\begin{cases} \gamma^{\mu} = (\gamma^{0}; \boldsymbol{\gamma}) \\ \gamma_{\mu} = (\gamma^{0}; -\boldsymbol{\gamma}) \quad . \end{cases} \tag{A.5}$$

Levando em conta (A.4) e (A.5), (A.6) pode se reescrita como

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_{\mu} \,. \tag{A.6}$$

Define-se a matriz γ_5 como :

$$\gamma_5 = i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} \,. \tag{A.7}$$

É fácil verificar que γ_5 satisfaz as seguintes propriedades

$$\{\gamma_5, \gamma^{\mu}\} = 0 \quad , \quad \gamma_5^{\dagger} = \gamma_5 \quad \text{e} \quad (\gamma_5)^2 = \mathbf{1}_{\gamma} \,, \tag{A.8}$$

onde $\mathbf{1}_{\gamma}$ é a idendidade no espaço das matrizes-γ de Dirac.

A matriz conjugação de carga C tem as seguintes propriedades :

$$C^{\dagger} = C \quad , \quad C^{T} = -C \tag{A.9}$$

e possui as seguintes relações com as matrizes-γ :

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \ , \ \ C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^T \ . \tag{A.10}$$

Convenções relativas às Transformações de simetrias discretas sobre campos fermiônicos $\Psi(x)$

a) Conjugação de carga: C

$$[\Psi(x)]^{\mathrm{C}} = C\overline{\Psi}^T(x) \ . \tag{A.11}$$

b) Paridade: P

$$[\Psi(x)]^{\mathrm{P}} = \gamma^0 \Psi(\tilde{x}) \ . \tag{A.12}$$

c) Reversão temporal: T (trata-se de uma transformação anti-unitária)

$$[\Psi(x)]^{\mathrm{T}} = C^{-1}\gamma_5 \Psi(-\tilde{x}) \ . \tag{A.13}$$

d) CP

$$[\Psi(x)]^{\mathrm{CP}} = C\gamma^{0*}\overline{\Psi}^T(\tilde{x}) \ . \tag{A.14}$$

e) CPT (trata-se, também, de transformação anti-unitária)

$$[\Psi(x)]^{\mathrm{CPT}} = \left(\gamma_5\gamma^0\right)^* \overline{\Psi}^T(-x) \ . \tag{A.15}$$

Todas estas transformações foram dadas a menos de um fator de fase.

Espinores quirais e termos de massa de Majorana.

Podemos decompor um espinor Ψ em suas componentes quirais :

$$\Psi_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi \quad \mathrm{e} \quad \Psi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi \ . \tag{A.16}$$

Expressões usuais envolvendo o espinor Ψ, e seu conjugado ($\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$), podem ser reescritas em termos dos espinores quirais, por exemplo :

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Psi}\Psi &= \overline{\Psi}_{\rm L}\Psi_{\rm R} + \overline{\Psi}_{\rm R}\Psi_{\rm L} \\ \overline{\Psi}\gamma_5\Psi &= \overline{\Psi}_{\rm L}\Psi_{\rm R} - \overline{\Psi}_{\rm R}\Psi_{\rm L} \\ \overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi &= \overline{\Psi}_{\rm L}\gamma_\mu\Psi_{\rm L} + \overline{\Psi}_{\rm R}\gamma_\mu\Psi_{\rm R} \,. \end{aligned}\right\} \tag{A.17}$$

É interessante observar que :

$$(\Psi_{\rm R})^{\rm C} = (\Psi^{\rm C})_{\rm L} \tag{A.18}$$

Assim, $(\Psi_{\rm R})^{\rm C}$ transforma-se na mesma representação do grupo de Lorentz que $\Psi_{\rm L}$, tal que podemos construir termos de massa do tipo: $M_{\rm R}\overline{(\Psi_{\rm R})^{\rm C}}\Psi_{\rm R}$. Do mesmo modo, se pode encontrar outro termo de massa compatível com a invariância de Lorentz: $M_{\rm L}\overline{(\Psi_{\rm L})^{\rm C}}\Psi_{\rm L}$. Tais termos de massa são conhecidos como massas de Majorana.

Apêndice B

Resultados Úteis da Álgebra Linear

$A \in \Re$, significa que *os autovalores de* A são reais;

$A > 0$, significa que *os autovalores de* A são todos reais positivos.

Observação importante :

"Se A é Hermiteana, então $A^{1/2}$ só é Hermiteana se A possuir autovalores reais e não negativos."

Para se verificar este resultado, note que a Hermiticidade de $A^{1/2}$, automaticamente, implica na Hermiticidade de A ; logo, existe S unitária que diagonaliza tanto A quanto $A^{1/2}$.

$$a = SAS^{\dagger} \; ; \; S^{\dagger} = S^{-1} \; ,$$

onde a é uma matriz-diagonal e real, então

$$A^{1/2} \; = \; S^{\dagger} a^{1/2} S \; ,$$

logo

$$(A^{1/2})^\dagger = S^\dagger (a^{1/2})^\dagger S$$

Assim para se ter $A^{1/2}$ Hermiteana, é necessário que:

$$(a^{1/2})^\dagger = a^{1/2} \, ,$$

o que mostra que os autovalores de A são reais e não-negativos, verificando-se assim o resultado da observação.

Teorema:

"Seja $A \mid A^\dagger = A$ e $A > 0$, seja $B \mid B^\dagger = B$; então, $(AB) \in \Re$."

Demonstração:

Se $\det A \neq 0$, AB pode ser reescrita como

$$AB = A^{1/2} L (A^{1/2})^{-1} \, , \tag{B.1}$$

onde

$$L \equiv A^{1/2} B A^{1/2} \, . \tag{B.2}$$

Logo, as Hermiticidades de $A^{1/2}$ e B implicam na Hermiticidade de L. Da observação feita precedentemente, vê-se que a Hermiticidade de $A^{1/2}$ equivale a A ser Hermiteana e não-negativa. Facilmente, verifica-se que estas condições, em conjunto com a condição de que $\det A \neq 0$, levam às restrições exigidas para A no teorema dado. A eq. (B.1) diz que AB e L são similares, portanto possuem os mesmos autovalores; uma vez que os autovalores de L são reais, conclui-se que se verificadas as restrições necessárias, AB possuirá *autovalores reais*, apesar de não ser Hermiteana, demonstrando-se, assim, o teorema.

Conseqüências do teorema

Dado que as imposições para A e B no teorema sejam satisfeitas, existe $\mathcal{U}$ unitária, que diagonaliza L , ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \;=\; \mathbf{1} \\ \mathcal{U}^\dagger L \mathcal{U} \;=\; \ell \,, \end{cases} \tag{B.3}$$

onde ℓ é uma matriz-diagonal e real. Uma vez que L é similar a AB, chega-se à conclusão de que ℓ deve ser similar a AB, como pode ser verificado por

$$AB \;=\; A^{1/2}L(A^{1/2})^{-1} \;=\; A^{1/2}\mathcal{U}\,\ell\,\mathcal{U}^\dagger(A^{1/2})^{-1} \;=\; \Omega\,\ell\,\Omega^{-1}\,, \tag{B.4}$$

onde

$$\Omega \;\equiv\; A^{1/2}\mathcal{U}\,. \tag{B.5}$$

De (B.5), acha-se que

$$\Omega\Omega^\dagger \;=\; A\,. \tag{B.6}$$

Note que (B.6) é equivalente à primeira equação do sistema (B.3) e que (B.4) é equivalente à segunda, deste modo pode-se reescrever (B.3) como

$$\begin{cases} \Omega\Omega^\dagger \;=\; A \\ \Omega^{-1}AB\Omega \;=\; \ell\,. \end{cases} \tag{B.7}$$

Assim, ganha-se um problema de diagonalização não-unitário completamente equivalente ao unitário (B.3).

Solução do problema de autovalor de AB

Este problema consiste em achar Ω e ℓ a partir dos dados disponíveis: A e B com as condições do teorema satisfeitas. Sabe-se que existem dois métodos para solucionar tal problema: o unitário e o não-unitário. Na prática, o método não-unitário precisa de menos cálculos para ser executado, o que o torna menos laborioso. Abaixo será feita uma descrição deste método.

Seja ω autovetor de AB e λ o autovalor correspondente; assim, tem-se para equação-de-autovalor

$$AB\,\omega \;=\; \lambda\,\omega\;, \tag{B.8}$$

logo

$$\Omega^{-1}AB\Omega\,\Omega^{-1}\omega \;=\; \lambda\,\Omega^{-1}\omega\;, \tag{B.9}$$

tal que utilizando a segunda das equações (B.7) obtém-se

$$\ell v \;=\; \lambda v\;, \tag{B.10}$$

onde

$$v \;\equiv\; \Omega^{-1}\omega \text{ ou } \omega \;=\; \Omega v\;, \tag{B.11}$$

o que mostra explicitamente que AB e ℓ possuem os mesmos autovalores. Observe que os v's são os autovetores triviais

$$v_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\;;\quad v_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\;;\quad \cdots;\quad v_N \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\;, \tag{B.12}$$

e estes têm as propriedades de ortonormalização e completeza, que são as de qualquer problema unitário, respectivamente dadas por

$$v_1^\dagger v_1 \;=\; v_2^\dagger v_2 \;=\; \cdots \;= v_N^\dagger v_N \;=\; 1 \tag{B.13}$$

e

$$\sum_a v_a v_a^\dagger \;=\; 1\;. \tag{B.14}$$

Para se achar ℓ deve-se resolver a equação característica

$$\det(AB - \lambda 1) \;=\; 0\;. \tag{B.15}$$

Seja N a dimensão das A e B; as soluções λ_a, $(a = 1, \cdots, N)$, desta equação são os elementos da matriz diagonal ℓ. Substituindo-se os λ_a em (B.8), encontra-se os ω_a não normalizados.

Propriedades dos ω_a's:

Utilizando (B.11), obtém-se

$$\omega_1^\dagger \omega_1 \;\neq\; \omega_2^\dagger \omega_2 \;\neq\; \cdots \;\neq\; \omega_N^\dagger \omega_N \;\neq\; 1\;, \tag{B.16}$$

o que reflete a não-ortonormalidade dos ω's, que é conseqüência da não-unitariedade de Ω. Utilizando (B.11) e (B.14), conclui-se que

$$\sum_a \omega_a \omega_a^\dagger \;=\; \Omega(\,\sum_a v_a v_a^\dagger\,)\Omega^\dagger \;=\; \Omega\Omega^\dagger\;, \tag{B.17}$$

tal que utilizando (B.7), encontra-se

$$\sum_a \omega_a \omega_a^\dagger \;=\; A\;; \tag{B.18}$$

esta é a relação de completeza deste problema específico. Assim, para normalizar os ω's, vistos estes não serem ortonormais, deve-se recorrer a esta relação de completeza. Normalizados os ω's segundo (B.18), resta a tarefa de construir Ω. Para isto, vamos chamar seus elementos de Ω_{ab}, tal que

$$\omega_1 = \Omega v_1 = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_{N1} & \cdots & \Omega_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} \\ \vdots \\ \Omega_{N1} \end{pmatrix} . \tag{B.19}$$

Da mesma forma, acha-se $\omega_2 \cdots$. Em geral, acha-se que

$$\omega_a = \begin{pmatrix} \Omega_{1a} \\ \vdots \\ \Omega_{Na} \end{pmatrix} , \tag{B.20}$$

tal que Ω é construída justapondo os ω's normalizados segundo (B.18).

Apêndice C

Aspectos da Álgebra de Grassmann

Impõem-se que a Hermitização, vide (A.3), seja válida para as matrizes que tomam valores em uma álgebra de Grassmann.

Propriedade fundamental da álgebra de Grassmann

Dados n geradores, a_i da álgebra de Grassmann (simbolizada por $G^{(n)}$), qualquer que seja o par destes geradores escolhidos, por exemplo a_i e a_j, tem-se a propriedade

$$a_i a_j = -a_j a_i \ . \tag{C.1}$$

Note a partir de (C.1) que $a_i^2 = 0$, portanto $a_i^k = 0$ qualquer que seja o número inteiro $k > 1$. A partir destes geradores, pode-se construir as seguintes funções linearmente independentes

$$
\begin{aligned}
&1\ ,\\
&a_1\ ,\ a_2\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ ,\\
&a_1a_2\ ,\ a_1a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_{n-1}a_n\ ,\\
&a_1a_2a_3\ ,\ a_1a_2a_4\ ,\ \cdots\ ,\\
&\cdots\\
&a_1a_2\cdots a_n\ .
\end{aligned}
$$

Tais funções constituem uma base em espaço de dimensão

$$C_{n,0} + C_{n,1} + \cdots + C_{n,n} = 2^n\ ,$$

que é a própria álgebra $G^{(n)}$. Um elemento típico desta álgebra pode ser escrito como

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}_{i_1} a_{i_1} + f^{(2)}_{i_1 i_2} a_{i_1} a_{i_2} + \cdots + f^{(n)}_{i_1 \cdots i_n} a_{i_1} \cdots a_{i_n}\ , \qquad \text{(C.2)}$$

onde os $f^{(0)}$, $f^{(1)}_{i_1}$, $f^{(2)}_{i_1 i_2}$, $\cdots$ são funções ordinárias de um dado conjunto de variáveis. O espaço $G^{(n)}$ pode ser dividido nos subconjuntos: $G^{(n)}_{\text{par}}$, cujas bases são formadas por produtos de números pares de geradores, e $G^{(n)}_{\text{impar}}$, cujas bases são formadas por produtos de números ímpares de geradores. Observa-se, facilmente, que os respectivos elementos de tais subconjuntos comutam e anticomutam com os elementos de $G^{(n)}$, logo

$$f = f_{\mathrm{C}} + f_{\mathrm{A}} \qquad \text{(C.3)}$$

onde o índice (C) indica a parte do elemento f que comuta com os demais elementos de $G^{(n)}$ e o (A) a parte que anticomuta

$$f_{\mathrm{C}} = f^{(0)} + f^{(2)}_{i_1 i_2} a_{i_1} a_{i_2} + \cdots \qquad \text{(C.4)}$$

e

$$f_{\mathrm{A}} = f^{(1)}_{i_1} a_{i_1} + f^{(3)}_{i_1 i_2 i_3} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} + \cdots \tag{C.5}$$

Neste apêndice, como objetos comutantes deve-se entender como sendo aqueles objetos que comutam com os elementos de $G^{(n)}$; do mesmo modo, objetos anticomutantes são os que anticomutam com os elementos de $G^{(n)}$

Sejam $\eta, \eta^{'}, \zeta, \zeta^{'}$ elementos anticomutantes. Qualquer que seja o par destes escolhido, por exemplo η e ζ, tem-se a propriedade

$$\eta\zeta \;=\; -\zeta\eta\;. \tag{C.6}$$

Sejam H e Z os espinores de Grassmann

$$H = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^{'} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^{'} \end{pmatrix} \quad ; \tag{C.7}$$

a partir desses espinores, pode-se construir o elemento comutante

$$H^{\dagger} Z \;=\; \begin{pmatrix} \eta^{*} & \eta^{'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^{'} \end{pmatrix} \;=\; \eta^{*}\zeta + \eta^{'*}\zeta^{'}\;. \tag{C.8}$$

A operação de transposição por definição não pode afetar o valor deste número

$$\left(H^{\dagger}Z\right)^{T} \;=\; H^{\dagger}Z \;=\; \eta^{*}\zeta + \eta^{'*}\zeta^{'}\;. \tag{C.9}$$

Utilizando a propriedade dada por (C.6), chega-se a

$$\left(H^{\dagger}Z\right)^{T} \;=\; -(\zeta\eta^{*} + \zeta^{'}\eta^{'*}) \;=\; -Z^{T}H^{*} \tag{C.10}$$

que é a propriedade para espinores equivalente àquela (C.6) dada para números. Um resultado que se obtém de (A.3) e (C.9) é que

$$\left(H^{\dagger}Z\right)^{\dagger} \;=\; \left(H^{\dagger}Z\right)^{*} \tag{C.11}$$

Abaixo, serão descritas duas possíveis convenções que podem ser empregadas para a operação de conjugação-complexa de um produto de dois elementos anticomutantes.

Conjugação-complexa

Primeira convenção:

$$(\eta\zeta)^* = \eta^*\zeta^* \tag{C.12}$$

A conjugação-complexa de (C.8), conforme a convenção fixada por (C.12), leva ao resultado

$$\left(H^\dagger Z\right)^* = \eta\zeta^* + \eta'\zeta'^* \,. \tag{C.13}$$

Utilizando a propriedade dada por (C.6), chega-se a

$$\left(H^\dagger Z\right)^* = -(\zeta^*\eta + \zeta'^*\eta') = -Z^\dagger H \,, \tag{C.14}$$

que é a propriedade para espinores equivalente à (C.12) .

Segunda convenção:

$$(\eta\zeta)^* = \zeta^*\eta^* \tag{C.15}$$

A conjugação-complexa de (C.8), conforme a convenção dada por (C.15), leva ao resultado

$$\left(H^\dagger Z\right)^* = \zeta^*\eta + \zeta'^*\eta' = Z^\dagger H \,, \tag{C.16}$$

que é a propriedade para espinores equivalente à (C.15) . Os resultados desta seção foram obtidos a partir de matrizes de dimensão 2, a generalização destes para matrizes de dimensões superiores, por exemplo 4 ou $4N$, N sendo um inteiro, pode ser realizada sem problemas.

Comparação das convenções:

Um dos pontos que se enfrentará no presente trabalho é o de provar a realidade da Lagrangeana fermiônica que, por sua vez, deve ser um elemento comutante de $G^{(\infty)}$. Assim, a conjugação-complexa do termo de massa desta Lagrangeana fornece um bom exemplo para se comparar as duas convenções mencionadas.

Seja Ψ um espinor fermiônico genérico e $\mathcal{M}$ uma matriz que carrega as informações sobre as massas dos férmions. O termo de massa da Lagrangeana fermiônica para a *primeira convenção* deve ter a forma

$$i\Psi^\dagger \mathcal{M} \Psi \ . \tag{C.17}$$

Conjugação-complexa da expressão anterior, segundo (C.14), fornece

$$i\Psi^\dagger \mathcal{M}^\dagger \Psi \ ; \tag{C.18}$$

então, uma das condições para que a Lagrangeana seja real é que

$$\mathcal{M}^\dagger = \mathcal{M} \ . \tag{C.19}$$

Já, para a *segunda convenção*, a Lagrangeana fermiônica deve diferir daquela da primeira convenção por um fator i, tal que seu termo de massa tenha a forma

$$\Psi^\dagger \mathcal{M} \Psi \ . \tag{C.20}$$

Conjugação-complexa da expressão anterior, segundo (C.16), fornece

$$\Psi^\dagger \mathcal{M}^\dagger \Psi \ . \tag{C.21}$$

Assim, para a Lagrangeana ser real é necessária a mesma condição: Hermiticidade de $\mathcal{M}$, como no caso anterior. Os resultados acima permitem concluir que a forma da Lagrangeana fermiônica depende da convenção de conjugação-complexa utilizada, desde que se queira manter as mesmas condições para a realidade da correspondente Lagrangeana.

Variações e Derivadas

Seja f uma função de variáveis anticomutantes, a_i. Existem duas convenções alternativas para se definir a variação δf , como discutido em detalhes nas refs.[6]; [17]:

$$f = f(a_1 \cdots a_n) \tag{C.22}$$

Primeira convenção:

$$\delta f = \delta a_i \frac{\partial}{\partial a_i} f \ , \tag{C.23}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial a_k} (a_{i_1} \cdots a_{i_p}) = \delta_{k i_1} (a_{i_2} \cdots a_{i_p}) - \delta_{k i_2} (a_{i_1} a_{i_3} \cdots a_{i_p}) + \cdots \tag{C.24}$$

Segunda convenção:

$$\delta f = f \ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a_i} \ \delta a_i \ , \tag{C.25}$$

onde

$$(a_{i_1} \cdots a_{i_p}) \ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a_k} = \delta_{k i_p} (a_{i_1} \cdots a_{i_{p-1}}) - \delta_{k i_{p-1}} (a_{i_1} \cdots a_{i_{p-2}} a_{i_p}) + \cdots \tag{C.26}$$

Em todo este trabalho, utilizar-se-á para variação de uma função de variáveis anticomutantes, a convenção (C.23), de modo a sempre se utilizar a derivada definida por (C.24)

Parênteses de Poisson

Sejam q_r's variáveis comutantes e a_i's variáveis anticomutantes. Sejam $\dot{q}_r$'s e $\dot{a}_i$'s as respectivas velocidades. Dada uma Lagrangeana $L(q_r \ , \dot{q}_r \ ; \ a_i \ , \ \dot{a}_i)$ que sistematize a evolução dos q_r's e a dos a_i's, e que por definição deve ser uma função comutante, pode-se definir os momenta conjugados aos q_r's e aos a_i's respectivamente por

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{e} \quad \pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} \ , \tag{C.27}$$

onde p_r's são objetos comutantes, e π_i's são objetos anticomutantes. Sejam as funções do espaço de fases

$$A = A(q_r \ , \ p_r \ ; \ a_i \ , \ \pi_i) \quad \text{e} \quad B = B(q_r \ , \ p_r \ ; \ a_i \ , \ \pi_i) \ . \tag{C.28}$$

Como foi visto, veja (C.3), pode-se separar A nas partes comutante (A_{C}) e anticomutante (A_{A}); o mesmo pode ser feito para B. Deste modo o parênteses de Poisson de A e B pode ser escrito como

$$\{A, B\} = \{A_{\mathrm{C}}, B_{\mathrm{C}}\} + \{A_{\mathrm{A}}, B_{\mathrm{C}}\} + \{A_{\mathrm{C}}, B_{\mathrm{A}}\} + \{A_{\mathrm{A}}, B_{\mathrm{A}}\} \tag{C.29}$$

Casalbuoni [6], dá os seguites resultados para tais parênteses de Poisson

$$\{A_{\mathrm{C}}, B_{\mathrm{C}}\} = \left(\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial q_r}\frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial p_r} - \frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial q_r}\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial p_r}\right) + \left(\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial a_i}\frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial a_i}\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial \pi_i}\right) \tag{C.30}$$

$$\{A_{\mathrm{A}}, B_{\mathrm{C}}\} = \left(\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial q_r}\frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial p_r} - \frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial q_r}\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial p_r}\right) - \left(\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial a_i}\frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial \pi_i} + \frac{\partial B_{\mathrm{C}}}{\partial a_i}\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial \pi_i}\right) \tag{C.31}$$

$$\{A_{\mathrm{C}}, B_{\mathrm{A}}\} = \left(\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial q_r}\frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial p_r} - \frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial q_r}\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial p_r}\right) + \left(\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial a_i}\frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial \pi_i} + \frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial a_i}\frac{\partial A_{\mathrm{C}}}{\partial \pi_i}\right) \tag{C.32}$$

$$\{A_{\mathrm{A}}, B_{\mathrm{A}}\} = \left(\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial q_r}\frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial p_r} + \frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial q_r}\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial p_r}\right) - \left(\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial a_i}\frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial \pi_i} + \frac{\partial B_{\mathrm{A}}}{\partial a_i}\frac{\partial A_{\mathrm{A}}}{\partial \pi_i}\right) \tag{C.33}$$

Referências

[1] R. N. Mohapatra, Unification and Supersymmetry, Contemporary Physics, Springer-Verlag, New York, 1986.

[2] R. M. Doria, J. A. Helayël-Neto, S. Pugnetti and A. William Smith, *Il Nuovo Cimento*, **A91** (1986) 398 ; R. M. Doria, J. A. Helayël-Neto and S. Mokhtari, *Europhys. Lett.*, **16** (1991) 23 ; R. M. Doria and C. Pombo, *Il Nuovo Cimento* **B96** (1986) 153; R. M. Doria and F. A. B. Rabelo de Carvalho, "An Extended Scalar Model", UCP Preprint UCP-91/5, Submetido para publicação.

[3] S. Weinberg, Brandeis Lectures, 1970 ; G. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Advances in High-Energy Physics, edited by R. Cool and R. E. Marshak, Wiley, New York, 1969.

[4] B. Kayser, F. Gibrat-Debu and F. Perrier, The Physics of Massive Neutrinos, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol.25, Singapore, 1989.

[5] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1958.

[6] R. Casalbuoni, *Il Nuovo Cimento*, **33A** (1976) 115.

[7] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theo. Phys*, **49** (1973) 652.

[8] L. Wolfenstein, Theory and Phenomenology in Particles Physics, edited by A. Zichicchi, Academic Press, New York, 1969; E. Paul, in Elementary Particle Physics, Springer Tracts in Modern Physics, Vol.79; H. Georgi, Weak Interactions and Modern Particle Theory, Benjamin & Cummings, California, 1984.

[9] R. A. Horn and C. A. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985.

[10] T.-P. Cheng and L.-F. Li, Gauge Theory of Elementary Particles, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[11] Y. Nir, *Nucl. Phys.*, **B273** (1986) 567.

[12] H. Haber and G. Kane, *Phys. Rep.*, **117** (1984) 76.

[13] M. A. Andrade, artigo em preparação.

[14] M. J. G. Veltman, Schoonschip: A Program for Symbol Handling, May 1991.

[15] J. A. N. Vermaseren, Symbolic Manipulation with Form - Version 2 - Tutorial and Reference Manual, Published by CAN, 1991.

[16] B. W. Char et al., Maple Language - Reference Manual, Maple Publishing, 1991.

[17] K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol.169, Springer-Verlag, 1982.

"ANÁLISE DA CONSISTÊNCIA ESPECTRAL DE MODELOS FERMIÔNICOS ESTENDIDOS"

MARCO ANTÔNIO DE ANDRADE

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Renato Melchiades Dória- Presidente

José Abdalla Helayël-Neto - Coorientador

João Barcelos Neto

Arthur Kós Antunes Maciel

Ignácio Alfonso de Bediaga e Hickman - Suplente

Rio de Janeiro, 13 de março de 1992