

VINICIUS MOLL DE CASTRO PEREIRA

ACOPLAMENTO NAO-MÍNIMO E COSMOLOGIA QUÂNTICA: UM MODELO

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF / CNPq

Rio de Janeiro, 1991

- A Lewis Carroll e Salman Rushdie,
por possuírem mil olhos, e pela arte
histórica e inconseqüente de descobrir
universos, e então embelezá-los, e então
partilhá-los com as criaturas do *underground*.

AGRADECIMENTOS

- A Mário Novello e Nelsinho Pinto Neto pela orientação e tolerância à minha natureza imperfeita.

- Ao Sergius, Titus, Gil, Guru, Fila, Fortuna, Marcius, Edison, Sérgio Capacete, Sérgio Duque, Sasse-Pererê, Welles, Tânia, Pardal, Tião, Anthony, Cristiane, Terezinha, Malica, Rick, Marg, Lúcia, Américo, Jaqueline, Alexandre, Luís (e Cia...), por existirem.

- A toda a fauna da sala 509B, Maurice, Emily, Henry, Alex, Myriam e Martinha, por criarem um habitat agradável e estimulante.

- Aos colegas do CBPF, pelo carinho e pela força.

- Aos pesquisadores e funcionários do CBPF, pelo bom funcionamento da instituição.

- Ao CNPq, pela bolsa concedida.

- Aos meus amigos britânicos, Syd Barrett, Peter Hammill, Peter Gabriel, Ian Anderson, Jon Anderson, os irmãos Shulman, Keith Emerson, Robert Fripp, Andrew Latimer, David Gilmour, Dave Brock, Mike Oldfield, Derek Dick, Anthony Phillips, Eddie Jobson (& Co...), por terem me alimentado durante todos esses anos.

RESUMO

Interpretamos um modelo cosmológico clássico, em que a gravitação de Einstein está não-minimalmente acoplada ao eletromagnetismo de Maxwell (e que contém tanto soluções singulares quanto não-singulares), como um modelo de minisuperespaço. Efetuamos a quantização deste modelo de minisuperespaço, e mostramos que no limite semi-clássico as soluções deste modelo quântico descrevem *ensembles* de universos clássicos; neste limite é possível construir uma medida de probabilidade, e efetivamente várias funções de onda prevêem um universo clássico.

SUMÁRIO

	pág.
Agradecimentos.....	iii
Resumo.....	iv
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO I - A EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT.....	5
CAPÍTULO II - MINISUPERESPAÇOS.....	20
CAPÍTULO III - O MODELO CLÁSSICO.....	42
CAPÍTULO IV - O MODELO QUÂNTICO.....	55
CONCLUSÃO.....	79
BIBLIOGRAFIA.....	82

INTRODUÇÃO

Conhecer a idade do universo é um desafio que já estimulou, e estimula, o pensamento de muitos físicos. A teoria gravitacional de Einstein talvez tenha sido a primeira estrutura científica capaz de fornecer uma resposta a esta questão. Em cosmologia clássica (baseada na gravitação einsteiniana) esta questão está intimamente ligada a uma outra, que se traduz matematicamente como a existência ou não, no modelo cosmológico empregado para a descrição do universo, de uma singularidade no espaço-tempo.

Na década de sessenta Penrose e Hawking estabeleceram teoremas^[1] que, uma vez satisfeitas certas condições fisicamente razoáveis, afirmavam que a presença de singularidades no espaço-tempo seria inevitável. (Isso criou, na época, um renovado interesse na quantização da gravitação, devido à expectativa quanto à possibilidade da teoria quântica dissipar as singularidades). As condições em que se baseiam os teoremas não são, contudo, suficientemente abrangentes a ponto de impedir que surjam modelos fisicamente interessantes não-singulares. Tais modelos foram estudados pelo Grupo de Gravitação e Cosmologia do CBPF, durante os programas de investigação do acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo, e de fluidos dissipativos como fonte de

curvatura^[2,3,4]. Além disso, recentemente foi obtida^[5] uma solução inomogênea, tendo como fonte um fluido perfeito, livre de uma singularidade cosmológica.

O modelo cosmológico padrão, singular, foi utilizado durante muito tempo, em virtude dos seus sucessos, sem que se dispensasse a devida atenção aos seus problemas, como o problema do horizonte; agora esta situação se modificou, e os cosmólogos têm procurado modelos alternativos (a partir de uma certa fase da evolução cósmica, porém, o modelo padrão deve ser re-obtido). O Grupo de Cosmologia do CBPF tem trabalhado nesse sentido (ver, por exemplo, ref.[6]), e neste trabalho estaremos interessados no modelo com acoplamento não-mínimo discutido por Novello e Salim^[2], e Novello e Heintzmann^[3]. Esse modelo possui, de fato, tanto soluções não-singulares quanto singulares, e a decisão sobre qual tipo de solução o modelo fornece para a descrição do cosmos fica associada à escolha de condições iniciais. Claro está que essa situação indesejável não é uma dificuldade específica deste modelo, uma vez que outros modelos propostos com a intenção de contornar os problemas do modelo padrão, como o modelo inflacionário (ao contrário do que se chegou a cogitar), também necessitam de condições iniciais para que se obtenham as soluções desejadas.

Há muitos autores apontando motivações para a quantização da gravitação, mas um consenso sobre de que modo este objetivo pode ser atingido parece distante; aceitando-se, como faremos aqui, que a hamiltoniana da Relatividade Geral é a correta para o regime quântico da gravitação, ainda assim

enfrentamos a dificuldade de que, na prática, é quase impossível lidar com a teoria quantizada completa. Não obstante, foi possível desenvolver modelos (especialmente cosmológicos) que se espera apresentem características qualitativas importantes do comportamento quântico de um sistema gravitacional. Nosso interesse básico nesses modelos quânticos é, em face da dificuldade mencionada no parágrafo anterior, analisar a possibilidade do "estado quântico do universo" substituir o papel desempenhado pelas condições iniciais em cosmologia clássica.

Os físicos estão realmente convencidos de que o universo se encontra em expansão, e assim, se extrapolarmos de volta no tempo, concluimos que ele já teve dimensões bastante reduzidas, e deve ter atravessado um regime quântico. De qualquer modo, como vivemos em um universo clássico, o estado quântico descrevendo o universo tem que possuir um limite semi-clássico. Estaremos interessados aqui justamente em como essa descrição semi-clássica pode estar contida no estado quântico do universo, de que modo ela se manifesta, e especificamente para o modelo com acoplamento não-mínimo contendo universos singulares e não-singulares; ou seja, de que modo esses dois tipos de universo podem emergir da descrição quântica do cosmos.

O trabalho está dividido da seguinte forma: No capítulo um vamos introduzir a equação de Wheeler-DeWitt, que governa a dinâmica quântica dos sistemas gravitacionais. No capítulo dois discutiremos detalhadamente os modelos de

minisuperespaço, que são os modelos, citados acima, em que é possível na prática obter o estado quântico do universo, e que se espera guardem características da teoria quântica exata. No capítulo três re-interpretaremos o modelo cosmológico clássico com acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo, desenvolvido nas referências [2] e [3], como um modelo de minisuperespaço; isso feito será possível obter novas variáveis (conduzindo a uma hamiltoniana livre de problemas de ordenamento), em que discutiremos as soluções clássicas. No quarto e último capítulo quantizaremos o modelo de minisuperespaço desenvolvido no capítulo anterior, obtendo as soluções quânticas e fazendo uma análise destas soluções, especialmente quanto à existência do limite semi-clássico e quanto à possibilidade de previsão de um universo clássico ser feita, em substituição às condições iniciais ao nível clássico.

CAPÍTULO I

A EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT

" 'Other maps are such shapes, with their islands and capes!
But we've got our brave Captain to thank'
(So the crew would protest) 'that he's bought us the best—
A perfect and absolute blank!'

This was charming, no doubt: but they shortly found out
That the Captain they trusted so well
Had only one notion for crossing the ocean,
And that was to tingle his bell. "

Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark*.

A EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT

O procedimento de quantização canônica da teoria da gravitação de Einstein conduz a uma equação (funcional) que governa a dinâmica do estado quântico descrevendo um sistema gravitacional, chamada de equação de Wheeler-DeWitt^[7,8]. Esta equação corresponde, de fato, à imposição de um vínculo (decorrente do formalismo canônico^[9,10,11]) ao estado quântico. Tal situação em que a dinâmica está contida num vínculo não é, porém, uma particularidade da Relatividade Geral, sempre ocorrendo nas teorias invariantes por reparametrizações^[11] (ou teorias parametrizadas; nesse tipo de teoria é empregado um número de variáveis maior do que o necessário para a descrição do sistema físico e, estando estas variáveis redundantes misturadas às outras como coordenadas canônicas, a presença de vínculos é inevitável).

Para que se possa dar crédito ao fato de que em teorias parametrizadas a dinâmica realmente se revela desse modo, seguiremos Kuchař^[12], tomando uma teoria não-parametrizada cujas equações dinâmicas sejam conhecidas, e então discutindo de que forma elas aparecem após parametrizarmos a teoria; especificamente, tomaremos um exemplo muito simples: o movimento de uma partícula não-relativística em um potencial, cuja ação tem a forma

$$S = \int dt L_* \left(t, x^i, \frac{dx^i}{dt} \right) , \quad (1.1)$$

onde t é o tempo newtoniano, x^i ($i=1,2,3$) são coordenadas cartesianas e a lagrangiana L_* é dada por

$$L_* = \frac{1}{2} m \delta_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} - V(t, x^i). \quad (1.2)$$

Vamos introduzir agora um arbitrário parâmetro temporal τ ,

$$t = t(\tau) , \quad \tau = \tau(t) . \quad (1.3)$$

Efetuada essa transformação de variável temporal no funcional da ação (denotaremos derivadas em relação ao parâmetro temporal arbitrário por um ponto), teremos

$$S = \int d\tau L \left(t, \dot{t} ; x^i, \dot{x}^i \right) , \quad (1.4)$$

$$\text{onde } L \left(t, \dot{t} ; x^i, \dot{x}^i \right) := \dot{t} L_* \left(t, x^i, \dot{x}^i \dot{t}^{-1} \right) . \quad (1.5)$$

Definiremos o momentum Π_i em relação à velocidade \dot{x}^i :

$$\Pi_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} .$$

Substituindo (1.5) na definição acima obtemos:

$$\Pi_i = \dot{t} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{x}^i} = \dot{t} \frac{\partial L_*}{\partial \left(\frac{dx^i}{dt} \right)} \dot{t}^{-1} = \Pi_{*,i} , \quad (1.6)$$

onde vemos que o momentum "físico" $\Pi_{*,i} = \frac{\partial L_*}{\partial \left(\frac{dx^i}{dt} \right)}$ é igual

àquele definido a partir da lagrangiana parametrizada. Calculando a nova hamiltoniana vemos que ela vai diferir da hamiltoniana física apenas por um fator \dot{t} :

$$H := \Pi_i \dot{x}^i - L = \Pi_{*,i} \frac{dx^i}{dt} \dot{t} - L_* \dot{t} = H_* \dot{t} . \quad (1.7)$$

Da equação (1.6) podemos vislumbrar o importante fato de que H_* , quando expressa em termos das novas variáveis canônicas Π_i e x^i , não depende de \dot{t} :

$$H_* = H_* \left(t, x^i, \Pi_{*,i} \right) = H_* \left(t, x^i, \Pi_i \right) . \quad (1.8)$$

Fazendo uso das equações (1.4), (1.7) e (1.8), podemos escrever o funcional da ação (1.1) na forma hamiltoniana

$$S = \int dt \left[\Pi_i \dot{x}^i - H_* \left(t, x^i, \Pi_i \right) \dot{t} \right] . \quad (1.9)$$

Até agora as quantidades $t(\tau)$ e $\dot{t}(\tau)$ foram encaradas como funções determinadas de τ , e não como variáveis dinâmicas. Por outro lado, notamos que a forma hamiltoniana do funcional da ação (1.9) é linear não somente em \dot{x}^i , mas também em \dot{t} . Isso sugere a introdução do tempo físico t como uma das coordenadas canônicas, $x^\nu = (t, x^i)$, e a identificação de $-H_*\left(t, x^i, \Pi_i\right) = \partial L / \partial \dot{t}$ como o momentum conjugado Π_t , $\Pi_\nu := (\Pi_t, \Pi_i) = (-H_*, \Pi_i)$. Assim, a ação (1.9) assume a forma

$$S = \int d\tau \Pi_\nu \dot{x}^\nu . \quad (1.10)$$

Obviamente as coordenadas canônicas x^ν e Π_ν não podem ser variadas livremente, pois estão sujeitas ao vínculo

$$\mathcal{H} := \Pi_t + H_*\left(t, x^i, \Pi_i\right) = 0 . \quad (1.11)$$

Podemos, contudo, agregar o vínculo (1.11) à ação, com o auxílio de um multiplicador de Lagrange $N(\tau)$:

$$S = \int d\tau \left(\Pi_\nu \dot{x}^\nu - N\mathcal{H} \right) , \quad (1.12)$$

e então variar todas as variáveis x^ν , Π_ν e N livremente.

O significado do multiplicador de Lagrange $N(\tau)$ pode ser obtido das equações de Hamilton decorrentes do

funcional da ação (1.12). Variando Π_t teremos

$$\dot{t} = N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_t} = N \quad . \quad (1.13)$$

Assim, $N(\tau)$ determina o lapso do tempo físico t , sendo a taxa de variação de t em relação a τ ; por isso, o multiplicador de Lagrange $N(\tau)$ é chamado função lapso.

No funcional da ação (1.12) a expressão $N\mathcal{H}$ exerce o papel da hamiltoniana, e variando (1.12) em relação à função lapso N obtemos o vínculo (1.11), que informa que a hamiltoniana $N\mathcal{H}$ se anula. É comum referir-se ao vínculo \mathcal{H} como a super-hamiltoniana.

O processo de passar do funcional da ação (1.1) para o funcional da ação (1.12) tem o nome de parametrização, e o processo inverso chama-se desparametrização. Vimos que a parametrização de (1.1) se deu através da elevação de t , antes uma quantidade cinemática, a um status de variável dinâmica da teoria, e podemos compreender que na ação parametrizada as quantidades verdadeiramente dinâmicas estão misturadas a outras dentre as coordenadas canônicas. Em contrapartida, a descrição da dinâmica neste espaço de fases estendido se desenrola numa hiper-superfície deste espaço: a hamiltoniana é vinculada a se anular.

Nesse exemplo simples, se partíssemos da ação parametrizada (1.12) não teríamos problemas em identificar e separar a variável redundante, já que a energia $-\Pi_t$ aparece linearmente na super-hamiltoniana \mathcal{H} , distinguindo-se dos momenta dinâmicos Π_i . (A situação na teoria da gravitação de

Einstein será diferente, como veremos adiante; a ação em sua forma original é invariante sob reparametrizações (espaço-temporais), e a separação em variáveis dinâmicas e cinemáticas não é uma tarefa simples).

A equação de Hamilton-Jacobi pode ser obtida, na teoria parametrizada, através da seguinte prescrição:

$$\mathcal{H} \left[x^\nu, \Pi_\nu = \frac{\partial S(x)}{\partial x^\nu} \right] = 0 \quad , \quad (1.14)$$

que resulta exatamente em

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_* \left[t, x^i, \Pi_i = \frac{\partial S(x)}{\partial x^i} \right] = 0 \quad . \quad (1.15)$$

A equação de Hamilton-Jacobi constitui-se num importante elemento de ligação entre a teoria clássica e a teoria quântica, sendo o primeiro passo para a aproximação WKB da equação de Schrödinger.

Isso sugere que efetuemos a quantização utilizando-nos do método de Dirac para a quantização de uma teoria parametrizada, que consiste em:

a) Tomar todas as coordenadas canônicas x_ν e todos os momenta canônicos Π_ν , e considerá-los como operadores satisfazendo as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [\hat{\Pi}_\mu, \hat{\Pi}_\nu] = 0 \quad (1.16)$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{\Pi}_\nu] = i\delta_\nu^\mu \quad . \quad (1.17)$$

b) Substituir na super-hamiltoniana \mathcal{H} (se lidássemos com uma teoria de campo parametrizada haveria outros vínculos, chamados de super-momenta) as coordenadas canônicas pelos respectivos operadores, e impor o vínculo $\mathcal{H} = 0$ como uma restrição ao estado quântico do sistema,

$$\hat{\mathcal{H}}|\Psi\rangle = 0 \quad . \quad (1.18)$$

Para pormos em evidência como (1.18) contém a dinâmica do nosso sistema, escolhamos a representação- x^ν , substituindo os momenta por operadores diferenciais $\Pi_\nu = -i\frac{\partial}{\partial x^\nu}$:

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi(x) = -i\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\nabla^2 \Psi + V(x) = 0 \quad , \quad (1.19)$$

que é justamente a equação de Schrödinger (estamos usando $\hbar=1$).

Voltaremos agora nossa atenção para a teoria gravitacional de Einstein.

A formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral requer uma separação 3 + 1 do espaço-tempo^[13], o que levou Wheeler^[7,14] ao conceito de *superespaço*— a arena onde se

desenrolaria a dinâmica clássica da teoria— como o espaço de todas as tri-geometrias e configurações da matéria (definidas numa hipersuperfície). Se na teoria escolhermos um tempo e um conjunto de coordenadas espaciais, uma dada quadri-métrica que seja solução das equações de Einstein poderá ser encarada como uma sucessão de tri-geometrias, uma para cada instante de tempo, e assim a quadri-geometria é uma trajetória no superespaço. (Há soluções das equações de Einstein, como a de Gödel, que não admitem uma família uni-paramétrica de hipersuperfícies que não se interceptam mas, como é usual, não consideraremos tais soluções.)

A descrição clássica da evolução da tri-geometria é chamada de geometrodinâmica clássica e, para um dado sistema de coordenadas espacial $\{x\}$, podemos reconstruir o espaço-tempo quadridimensional fornecendo em cada instante de tempo as chamadas funções lapso, $N(x)$, e deslocamento, $N_i(x)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \\ &= - [N^2(x,t) + N^i N_i(x,t)] dt^2 + 2N_i(x,t) dt dx^i + h_{ik}(x,t) dx^i dx^k, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde h_{ik} , nossa variável dinâmica (comprovaremos adiante que N e N_i não são variáveis dinâmicas), é a tri-métrica sobre as hipersuperfícies espaciais da família parametrizada por t ; $N^i := h^{ik} N_k$, e h^{ik} é a matriz 3x3 inversa de h_{ik} . A forma (1.20) é a usualmente utilizada para a separação 3 + 1 do espaço-tempo^[13], e as funções lapso e deslocamento

descrevem de que modo a escolha de coordenadas numa hipersuperfície está relacionada à escolha numa hipersuperfície adjacente, sendo portanto arbitrárias^[13] (detalhes do significado geométrico das funções lapso e deslocamento, e do formalismo ADM, podem ser encontrados, por exemplo, em [10,14]).

A ação de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G} \left[\int d^4x \ (-{}^4g)^{1/2} \ {}^4R \right] + S_{\text{matéria}} \quad (1.21)$$

(onde G é a constante de Newton, 4g é o determinante da quadri-métrica e 4R o respectivo escalar de curvatura), quando expressa, via (1.18), em termos das variáveis h_{ik} , N_i e N , assume a forma^[11]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \ dt \ N \ h^{1/2} \left[K_{11} K^{11} - K^2 + {}^3R \right] + S_{\text{matéria}} \quad (1.22)$$

onde K é o traço da curvatura extrínseca K_{11} ,

$$K_{11} := \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h}{\partial t}{}^{11} + 2D_{(i} N_{1)} \right] \quad (1.23)$$

(D_i é a derivada covariante na hipersuperfície); h é o determinante da tri-métrica h_{ik} .

Efetuada a transição de (1.22) para a forma hamiltoniana^[11], a ação geometrodinâmica exhibe a forma geral da ação de uma teoria de campo parametrizada:

$$S = \int d^3x dt \left[\Pi^{11} \dot{h}_{11} + \Pi_{\phi} \dot{\phi} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i \right], \quad (1.24)$$

onde Π^{11} é o momentum conjugado a h_{11} , e ϕ e Π_{ϕ} simbolicamente representam os campos de matéria e seus momenta conjugados.

A hamiltoniana ($N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i$) que aparece na ação (1.24) é uma soma de vínculos, com a função lapso N e o vetor deslocamento N^i desempenhando o papel de multiplicadores de Lagrange. Há os vínculos do super-momentum \mathcal{H}_i ,

$$\mathcal{H}_i := -2D_j \Pi_i^j + \mathcal{H}_i^{\text{matéria}} = 0, \quad (1.25)$$

e o vínculo da super-hamiltoniana \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H} := 16\pi G G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \frac{1}{16\pi G} h^{1/2} {}^3R + \mathcal{H}^{\text{matéria}} = 0, \quad (1.26)$$

onde G_{ijkl} é a métrica de DeWitt^[8] dada por:

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}). \quad (1.27)$$

(Uma observação faz-se necessária: O super-momentum e a super-hamiltoniana foram apresentados, respectivamente, sob a seguinte forma: $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^G + \mathcal{H}_i^{\text{matéria}}$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}^G + \mathcal{H}^{\text{matéria}}$, onde \mathcal{H}_i^G e \mathcal{H}^G são o super-momentum e a super-hamiltoniana da ação puramente gravitacional; estes vínculos, porém, não apresentam tal estrutura para qualquer que seja o acoplamento entre a

gravitação e a matéria^[11,15]. No entanto, como neste trabalho vamos lidar com quantização no minisuperespaço (capítulo II) não seremos obrigados a enfrentar este problema, pois estaremos lidando com um sistema de um número finito de graus de liberdade, uma situação muito mais simples. Assim, não nos preocuparemos com essa questão aqui.)

Podemos perceber, examinando a estrutura de \mathcal{H}_1 , dado por (1.25), e \mathcal{H} , dado por (1.26), que as variáveis gravitacionais e seus momenta conjugados, ao contrário do exemplo de teoria parametrizada que discutimos acima, aparecem todos misturados de forma indistinta; em Relatividade Geral, portanto, não há um modo simples de separar os graus de liberdade redundantes, o que leva a uma situação bem particular. Por exemplo, o objeto normalmente utilizado na descrição quântica de um sistema gravitacional é um funcional $\psi [h_{ik}, \phi]$ definido no superespaço; esse objeto não depende explicitamente de um parâmetro temporal, mas o significado disto, tendo em conta a estrutura de teorias parametrizadas, é de que o "tempo" está contido entre as variáveis h_{ik} e ϕ ^[8]. (É interessante observar que a métrica de DeWitt (1.27), juntamente com uma métrica apropriada para o setor de matéria, provê uma métrica no superespaço, e sua assinatura é hiperbólica em cada ponto x das hipersuperfícies onde está definida^[8]).

Passando à quantização da teoria, tal como no exemplo descrito no início do capítulo vamos empregar o método de Dirac para a quantização de teorias parametrizadas. A métrica h_{ik} , os campos de matéria ϕ e seus momenta conjugados serão

transformados em operadores satisfazendo às relações de comutação

$$[\hat{h}_{ik}(\mathbf{x}), \hat{h}_{lm}(\mathbf{x}')] = [\hat{\Pi}^{ik}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}^{lm}(\mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{h}_{ik}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}')] = [\hat{\Pi}^{ik}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}_{\phi}(\mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{x}')] = [\hat{\Pi}_{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}_{\phi}(\mathbf{x}')] = 0$$

$$[\hat{h}_{ik}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}^{lm}(\mathbf{x}')] = \frac{1}{2} i (\delta_i^l \delta_k^m - \delta_i^m \delta_k^l) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\Pi}_{\phi}(\mathbf{x}')] = i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') ,$$

e o estado quântico será aniquilado pelas versões dos vínculos clássicos em termos de operadores:

$$\mathcal{H}_i \left(\hat{h}_{ik}, \hat{\Pi}^{ik}, \hat{\phi}, \hat{\Pi}_{\phi} \right) |\Psi\rangle = 0 \quad (1.28)$$

$$\mathcal{H} \left(\hat{h}_{ik}, \hat{\Pi}^{ik}, \hat{\phi}, \hat{\Pi}_{\phi} \right) |\Psi\rangle = 0 . \quad (1.29)$$

Na representação métrica o estado quântico é representado por um funcional no superespaço $\psi [h_{ik}, \phi]$, e os momenta são substituídos por derivadas funcionais em relação à tri-métrica e os campos de matéria:

$$\hat{\Pi}^{ik}(\mathbf{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{ik}(\mathbf{x})} , \quad \hat{\Pi}_{\phi}(\mathbf{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{x})} . \quad (1.30)$$

Substituindo estes operadores na equação do

super-momentum (1.28) obtemos:

$$\hat{\mathcal{H}}_i \psi = 2i D_i \left(\frac{\delta \psi}{\delta h_{ij}} \right) + \hat{\mathcal{H}}_i^{\text{matéria}} \psi = 0 . \quad (1.31)$$

A equação da super-hamiltoniana (1.29) se torna:

$$\hat{\mathcal{H}} \psi = \left[- G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - h^{1/2} {}^3R + \hat{\mathcal{H}}^{\text{matéria}} \right] \psi = 0, \quad (1.32)$$

que é a equação de Wheeler-DeWitt. (Nesta forma em que foi apresentada ignoramos problemas de ordenamento).

Como em todas as teorias de campo parametrizadas^[12], as $3 \times \infty^3$ equações no vínculo do super-momentum (1.31) informam que o funcional ψ é o mesmo para configurações $[h_{ik}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})]$ que estão relacionadas entre si por transformações de coordenadas na hipersuperfície. Para comprová-lo, seguiremos Halliwell^[16], restringindo nossa atenção ao caso sem matéria, e variando o argumento de ψ através de um difeomorfismo na hipersuperfície, $x^i \rightarrow x^i - \xi^i$ ($h_{ik} \rightarrow h_{ik} + D_{(i} \xi_{k)}$ ^[17]) ; teremos:

$$\psi [h_{ik} + D_{(i} \xi_{k)}] = \psi [h_{ik}] + \int d^3x D_{(i} \xi_{k)} \frac{\delta \psi}{\delta h_{ik}} \quad (1.33)$$

Integrando por partes o último termo em (1.33) (e desprezando o termo de superfície) encontramos que a variação de ψ é dada por

$$\delta\psi = - \int d^3x \xi_k D_1 \left(\frac{\delta\psi}{\delta h_{ik}} \right) = \frac{1}{2i} \int d^3x \xi_i \hat{\mathcal{H}}^i \psi, \quad (1.34)$$

demonstrando que os funcionais satisfazendo (1.31) permanecem inalterados. O vínculo do super-momentum (1.31) é então a expressão quântica da invariância da teoria sob difeomorfismos na hipersuperfície^[18].

Assim, o funcional de estado ψ depende apenas da tri-geometria, e não da particular tri-métrica escolhida para representá-la; a definição original de Wheeler estabelecia o superespaço como o espaço das tri-geometrias e dos campos de matéria. Não obstante, revela-se freqüentemente mais cômodo defini-lo como o espaço das tri-métricas e campos de matéria, e é o que faremos ao trabalharmos com minisuperespaços nos próximos capítulos.

A equação de Wheeler-DeWitt (1.32) é, portanto, a equação que encerra o conteúdo dinâmico da teoria quântica. A busca de soluções apresenta sérias dificuldades pois, além do fato de que em sua forma geral a equação de Wheeler-DeWitt é extremamente complexa, resta o problema do ordenamento (há propostas para se resolver o problema de forma geral, por exemplo em [19,20], mas até agora nada de definitivo foi atingido). Enfrentar tais questões é muito mais fácil no contexto dos minisuperespaços, e a quantização via estes modelos é particularmente tentadora em Cosmologia (capítulo II).

CAPÍTULO II

MINISUPERESPAÇOS

" 'You may seek it with thimbles — and seek it with care;
You may hunt it with forks and hope;
You may threaten its life with a railway-share;
You may charm it with smiles and soap — ' "

Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark*.

MINISUPERESPAÇOS

Como foi visto no capítulo anterior, a equação de Wheeler-DeWitt é uma equação funcional no superespaço e, na prática, é quase impossível divisar, dada a dificuldade da obtenção de soluções neste espaço de configurações de dimensão infinita, quaisquer particularidades do comportamento quântico de sistemas gravitacionais. Por esta razão, a maior parte das investigações feitas no sentido de se revelar algo desse comportamento quântico é efetuada no contexto dos modelos de minisuperespaço.

Um modelo de minisuperespaço, para o qual forneceremos uma definição precisa adiante, é essencialmente um modelo em que um alto grau de simetria é imposto *a priori* à tri-métrica e aos campos de matéria, de modo que ambos sejam descritos por um número finito de graus de liberdade. Podemos estabelecer coordenadas no superespaço em termos dos coeficientes da expansão da tri-métrica e dos campos de matéria em um conjunto completo de (conhecidas) funções f_n :

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)} f_n(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

$$h_{ik}(\mathbf{x}) = h_{ik}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} h_{ik}^{(n)} f_n(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.2)$$

Um minisuperespaço é o conjunto de todas as tri-métricas e configurações da matéria para as quais todos os coeficientes $\phi^{(n)}$ e $h_{ik}^{(n)}$, com a exceção de um conjunto finito deles, são postos identicamente iguais a zero. Estamos assim tomando um "hiperplano" de dimensão finita no espaço de dimensão infinita formado por todos os coeficientes.

Devido a evidências observacionais de que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, em cosmologia clássica os modelos foram quase que invariavelmente elaborados com um alto grau de simetria, na vizinhança da homogeneidade e isotropia; assim, a dinâmica descrita por esses modelos se desenrola em uma região limitada do superespaço, e a maior parte desses modelos se constitui no que chamaremos a seguir de modelos de minisuperespaço clássicos.

Essa característica da cosmologia clássica conduz naturalmente à tentativa de se fazer uma análise quântica da questão cosmológica através do que chamaremos de modelos de minisuperespaço quânticos. No entanto, ao contrário do que acontece nos modelos de superespaço clássicos (cujas soluções são exatamente as soluções das equações de Einstein quando restritas à simetria do modelo), no caso quântico as soluções do modelo não são soluções da teoria completa. Ainda assim espera-se que os modelos de minisuperespaço quânticos revelem aspectos da dinâmica quântica exata. (Voltaremos a comentar

sobre isso mais tarde). Passaremos então à caracterização dos modelos de minisuperespaço.

Ao definir minisuperespaço seguiremos Halliwell^[21], e essa definição compreenderá quase todos os modelos cosmológicos de interesse, isotrópicos e anisotrópicos, e evidentemente o modelo a ser discutido neste trabalho. Na forma 3 + 1 da quadri-métrica (1.20), a função lapso é tomada como sendo homogênea, $N = N(t)$, e o vetor deslocamento N^i se anula:

$$ds^2 = - N^2(t)dt^2 + h_{ik}(x,t)dx^i dx^k, \quad (2.3)$$

onde a tri-métrica $h_{ik}(x,t)$ é determinada, como sugerido acima, por um número finito de funções de t , o mesmo acontecendo com os campos de matéria $\phi(x,t)$; denotaremos por $q^a(t)$ essas funções do tempo ($a = 1, 2, \dots, n$).

Substituindo estas restrições na forma 3 + 1 da ação de Einstein-Hilbert acoplada à matéria, dada por (1.22), obtemos a ação do minisuperespaço (para campos de matéria bosônicos esta forma da ação compreende uma vasta gama de modelos^[21]):

$$S [q^a(t), N(t)] = \int dt N \left[\frac{1}{2N^2} \gamma_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - V(q) \right]. \quad (2.4)$$

(O ponto denota derivada temporal). O bloco de γ_{ab} correspondente às variáveis gravitacionais entre os q^a é uma

versão reduzida da métrica de DeWitt, possuindo assinatura indefinida^[22].

As equações de movimento no modelo de minisuperespaço são obtidas a partir da ação do minisuperespaço (2.4), que tem a forma da ação de uma partícula relativística movendo-se em um espaço curvo n-dimensional, sob a influência de uma força. Variando-se (2.4) em relação a q^a resulta em:

$$\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}^a}{N} \right) + \frac{1}{N^2} \Gamma_{bc}^a \dot{q}^b \dot{q}^c + \gamma^{ab} \frac{\partial V}{\partial q^b} = 0 \quad , \quad (2.5)$$

onde γ^{ab} é a inversa de γ_{ab} , e Γ_{bc}^a é a conexão de Christoffel construída a partir de γ_{ab} . Variando-se (2.4) em relação a N obtém-se o vínculo

$$\frac{1}{2N^2} \gamma_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b + V(q) = 0 \quad . \quad (2.6)$$

A solução geral das equações de movimento (2.5) e (2.6) envolve $(2n-1)$ constantes arbitrárias; uma destas constantes, porém, é a origem do inobservável parâmetro temporal t ^[16] (como verificaremos mais tarde), de modo que efetivamente há $(2n-2)$ constantes arbitrárias fisicamente relevantes.

O ingrediente final para que a ação (2.4) caracterize um modelo de minisuperespaço clássico é a exigência de que as equações de movimento resultantes de (2.4) ((2.5) e (2.6)) reproduzam as equações de Einstein acopladas às da matéria; ou

seja, se substituirmos (2.3) e as restrições sobre $h_{ik}(x,t)$ e $\phi(x,t)$ nas equações de Einstein e da matéria, exige-se que o sistema de equações resultante seja idêntico àquele formado pelas equações (2.5) e (2.6).

A principal motivação para definirmos modelos de minisuperespaço clássicos é a de que eles sirvam como uma preparação para a quantização, pois ao nível clássico eles já vêm sendo naturalmente estudados como situações particulares da dinâmica dos sistemas gravitacionais. A quantização desses modelos, porém, representa uma chance de se assimilar aspectos quânticos da Relatividade Geral (que podem ser essenciais à cosmologia), uma vez que neles não estaremos lidando com um complicado problema de teoria de campos, e sim com um de mecânica quântica (ou quase, pois o papel do tempo é bem diferente).

Para obtermos a forma hamiltoniana da ação, definiremos os momenta canônicos da maneira usual, obtendo

$$p_a = \gamma_{ab} \frac{\dot{q}^b}{N} \quad , \quad (2.7)$$

e a ação

$$S = \int dt \left[p_a \dot{q}^a - N\mathcal{H} \right] \quad , \quad (2.8)$$

onde a super-hamiltoniana \mathcal{H} é expressa por

$$\mathcal{H}(q^a, p_a) = \frac{1}{2} \gamma^{ab} p_a p_b + V(q) \quad . \quad (2.9)$$

O vínculo $\mathcal{H} = 0$ (equação (2.6)) corresponde ao vínculo da super-hamiltoniana (1.26) da teoria completa, cujo vínculo do super-momentum (1.25) deve ser identicamente satisfeito nesses modelos de minisuperespaço para que (2.5) e (2.6) reproduzam as equações de Einstein (pois fizemos $N^1 = 0$ de início).

Seguindo a prescrição de Dirac para a quantização de uma teoria parametrizada, discutida no capítulo anterior, a equação que governa a dinâmica quântica dos modelos de minisuperespaço — a equação de Wheeler-DeWitt para esses modelos — será

$$\hat{\mathcal{H}} \left(q^a, -i \frac{\partial}{\partial q^a} \right) \psi(q^a) = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Agora que podemos encontrar, resolvendo (2.10), quais são os estados quânticos possíveis em um dado modelo de minisuperespaço, cabe a pergunta: como interpretar $\psi(q)$, ou seja, como extrair seu significado físico? Tratando-se de um problema quântico, poderíamos colocar ainda: como construir uma distribuição de probabilidade a partir de $\psi(q)$?

A equação de Wheeler-DeWitt é uma equação do tipo Klein-Gordon, à qual podemos associar a corrente conservada

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) , \quad (2.11)$$

que satisfaz

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.12)$$

devido à equação de Wheeler-DeWitt. (* denota conjugação complexa e $(\nabla \cdot)$ é o divergente construído com a métrica γ_{ab}). Poderíamos então definir uma medida de probabilidade em hipersuperfícies de dimensão $(n-1)$, que teriam um papel similar às superfícies de tempo constante na mecânica quântica convencional, da seguinte forma:

$$dP = \mathbf{J} \cdot d\Sigma , \quad (2.13)$$

onde dP seria a probabilidade de se encontrar o universo (estamos encarando os modelos de minisuperespaço como modelos cosmológicos) representado por um ponto no elemento de superfície $d\Sigma$. A conservação da probabilidade estaria garantida pela conservação da corrente. O problema desta definição, obviamente, é que dP não tem sinal definido.

Alternativamente, alguns autores (ver por exemplo [19,23,24]) propuseram que a medida correta seria

$$dP = |\psi(q)|^2 d\Omega , \quad (2.14)$$

onde dP seria a probabilidade de se encontrar o universo representado por um ponto no elemento de volume do minisuperespaço $d\Omega$. O problema com esta definição vem do fato de que, em certo sentido, o "tempo" está incluído entre as coordenadas q . Na mecânica quântica usual trabalha-se com uma medida do tipo (2.14) normalizada,

$$\int |\psi(q,t)|^2 d\Omega = 1, \quad (2.15)$$

só que lá o elemento de volume $d\Omega$ do espaço de configurações, que está sendo integrado, não envolve o tempo t , um parâmetro externo. Em todos os modelos de minisuperespaço discutidos até agora na literatura, a integração de (2.14) sobre todo o minisuperespaço diverge, e a origem desse fato deve estar ligada ao procedimento análogo que seria integrar a equação (2.15) no tempo, resultando igualmente numa divergência. Vilenkin^[25] argumenta que, fazendo uso da medida (2.14), não parece ser possível obter — no limite apropriado — a conservação da probabilidade e a interpretação padrão dos sistemas quânticos usuais.

Em meio ao conjunto de soluções da equação de Wheeler-DeWitt, haverá soluções que satisfazem e soluções que não satisfazem o princípio de correspondência, isto é, soluções que possuem e que não possuem um regime semi-clássico em alguma região do minisuperespaço (vamos precisar o que queremos dizer com isso logo adiante). No regime

semi-clássico, $\hbar \rightarrow 0$, a cosmologia quântica deveria aproximar-se da clássica, e a função de onda do universo deveria descrever um *ensemble* de universos clássicos. Daí vem o nosso interesse na possibilidade da função de onda do universo substituir o papel das condições iniciais em cosmologia clássica; além disso, é um fato observacional efetivamente irrefutável que o universo tem um comportamento clássico em alguma região (basta darmos uma olhadela ao nosso redor para nos convenceremos), por exemplo para grandes fatores de escala. Por estas razões procuraremos buscar soluções que satisfaçam o princípio de correspondência em alguma região do minisuperespaço. Para estas soluções, e nestas regiões do minisuperespaço onde elas apresentam um regime semi-clássico, será possível construir uma medida de probabilidade, baseando-nos em Vilenkin^[25] e Halliwell^[16]. Esta definição da medida de probabilidade terá um caráter aproximado por natureza, sendo sua validade limitada pela validade da aproximação semi-clássica.

Antes de realmente procedermos à construção dessa medida de probabilidade, devemos analisar que tipo de solução possui um regime semi-clássico, e de que modo podemos identificar esse comportamento.

Em certas regiões do minisuperespaço as soluções da equação de Wheeler-DeWitt podem ser representadas por uma forma WKB; vamos então explorar as soluções da aproximação WKB (que discutiremos de modo mais preciso adiante), que podem ser classificadas de maneira grosseira como soluções oscilatórias,

da forma $e^{iS(q)}$, ou exponenciais, da forma $e^{-I(q)}$, onde $S(q)$ e $I(q)$ são reais (pode haver também soluções WKB que em uma determinada região do minisuperespaço têm comportamento oscilatório, e em outra região, exponencial). Gerlach^[26] obteve as dez equações de Einstein (completas) a partir da interferência construtiva de soluções WKB da equação de Wheeler-DeWitt completa no superespaço (Princípio de Interferência Construtiva^[27]) do tipo oscilatório. As soluções WKB oscilatórias correspondem a um comportamento semi-clássico, enquanto que as exponenciais não. Vejamos porque isto acontece.

Primeiramente, é preciso deixar claro que neste trabalho estaremos considerando um forte pico na função de onda cosmológica (solução da equação de Wheeler-DeWitt no minisuperespaço) como uma previsão (veremos em breve que as soluções WKB oscilatórias têm um pico extremamente definido sobre um conjunto de trajetórias clássicas inteiras). Tal procedimento se encaixa dentro de interpretações tipo Everett^[28, 29, 30, 31] para a cosmologia quântica, defendida por diversos motivos por vários autores^[21, 31, 32, 33, 34] (não discutiremos aqui, contudo, essa questão da interpretação). Soluções WKB do tipo $\psi = e^{iS(q)}$ claramente não possuem um pico no espaço de configurações (o minisuperespaço), e sim em torno de correlações entre as coordenadas e os momenta. Essas funções de onda são auto-funções do operador momentum,

$$\hat{p}_a \psi = -i \frac{\delta}{\delta q^a} \psi = \frac{\partial S}{\partial q^a} \psi, \quad (2.16)$$

e mostraremos agora que elas efetivamente prevêem fortes correlações entre os momenta e as coordenadas, da forma:

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q^a}. \quad (2.17)$$

Para mostrar isto, foram utilizadas técnicas de integrais de caminho^[35] e distribuições de Wigner^[21,36], mas aqui utilizaremos um argumento menos formal porém mais simples, devido a Halliwell^[21].

Para simplificar, trataremos do problema uni-dimensional. Classicamente uma transformação das variáveis canônicas (p, q) para as variáveis (p', q') pode ser implementada através de uma função geradora $G_0(q, p')$:

$$p = \frac{\partial G_0}{\partial q}, \quad q' = \frac{\partial G_0}{\partial p'}. \quad (2.18)$$

Ao nível quântico a transformação de uma função de onda $\psi(q)$ para uma nova função $\psi'(p')$ se dá do seguinte modo^[37]:

$$\psi'(p') = \int dq e^{-iG(q,p')} \psi(q) \quad , \quad (2.19)$$

onde a função geradora quântica $G(q,p')$ não é exatamente G_0 , mas as duas concordam em primeira ordem na constante de Planck^[21]; como estamos trabalhando com um $\psi(q)$ semi-clássico, substituiremos $G(q,p')$ por $G_0(q,p')$. Se $\psi(q) = e^{iS(q)}$, então a transformação

$$p' = p - \frac{\partial S}{\partial q} \quad , \quad q' = q \quad (2.20)$$

pode ser implementada através da função geradora

$$G_0(q,p') = qp' + S(q) \quad . \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.19) obtemos (em primeira ordem):

$$\psi'(p') = \delta(p') \quad . \quad (2.22)$$

Assim, a função de onda $\psi = e^{iS(q)}$ tem um pico extremamente definido sobre a correlação (2.17).

Considerar um pico acentuado como uma previsão envolve a questão de quão acentuado tem que ser um pico para que ele seja considerado uma previsão. O pico da função de onda $\psi(q) = e^{iS(q)}$ sobre a correlação (2.17) é uma função delta, e



portanto não há dúvida quanto à previsão; é verdade que trabalhamos na aproximação semi-clássica, e provavelmente, se houvéssimos estendido o cálculo a ordens mais altas, encontraríamos um pico suavizado. Por outro lado, é bem possível que os resultados provenientes de modelos de minisuperespaço quânticos não possam ser confiados além da aproximação semi-clássica.

O mais importante no resultado (2.22) é que para essas funções de onda WKB, do tipo $e^{iS(q)}$, $S(q)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi, e a correlação (2.17) representa uma integral primeira das equações de movimento clássicas (como mostraremos após discutirmos brevemente a aproximação WKB). Assim, essas funções de onda apresentam um acentuado pico sobre um conjunto de trajetórias clássicas, e nesse sentido podemos afirmar que elas privilegiam estas trajetórias.

Para discutirmos a aproximação WKB vamos explicitamente inserir \hbar na equação de Wheeler-DeWitt (pois vamos usar \hbar como um pequeno parâmetro com o qual controlaremos a expansão):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 + V(q) \right) \psi(q) = 0 \quad (2.23)$$

(aqui o ordenamento dos operadores na equação de Wheeler-DeWitt (2.23) foi escolhido de maneira tal que $-\gamma^{ab} p_a p_b$ tenha sido substituído por $\hbar^2 \nabla^2$, onde ∇^2 é o laplaciano na métrica γ_{ab} ; outros ordenamentos seriam possíveis, mas nesse trabalho

lidaremos com um modelo de minisuperespaço quântico no qual conseguimos contornar o problema do ordenamento, e a equação de Wheeler-DeWitt apresentar-se-á na forma (2.23)).

Procuraremos as soluções WKB para a equação (2.23), da seguinte forma:

$$\psi(q) = A(q) \exp\{-I(q)/\hbar\} \quad , \quad (2.24)$$

onde $A(q)$ e $I(q)$ são funções complexas.

Substituindo a (2.24) na equação de Wheeler-DeWitt (2.23), e equacionando as potências de \hbar , obteremos

$$-\frac{1}{2}(\nabla I)^2 + V(q) = 0 \quad (2.25)$$

$$2\nabla I \cdot \nabla A + A\nabla^2 I = 0 \quad (2.26)$$

(o produto escalar representado por um ponto é relativo à métrica γ_{ab}).

Escreveremos $I(q)$ em termos de suas partes real e imaginária:

$$I(q) = I_R(q) - iS(q) \quad , \quad (2.27)$$

e as partes real e imaginária da equação (2.25) são:

$$-\frac{1}{2}(\nabla I_R)^2 + \frac{1}{2}(\nabla S)^2 + V(q) = 0 \quad (2.28)$$

$$\nabla I_R \cdot \nabla S = 0 \quad . \quad (2.29)$$

Estamos interessados nas funções de onda que descrevem um *ensemble* de universos clássicos e, como foi adiantado acima, estas são do tipo e^{iS} onde S é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{1}{2}(\nabla S)^2 + V(q) = 0 \quad ; \quad (2.30)$$

(esta equação corresponde à equação (1.14) de uma teoria parametrizada, para a nossa super-hamiltoniana (2.9)).

Se a parte imaginária de $I(q)$ varia muito mais rapidamente com q do que a parte real,

$$|\nabla S| \gg |\nabla I_R| \quad , \quad (2.31)$$

então $S(q)$ é uma solução aproximada da equação de Hamilton-Jacobi (2.30). Nesse caso, a função de onda (2.24) será predominantemente da forma e^{iS} , que mostramos indicar uma forte correlação entre as coordenadas e os momenta da forma (2.17). Vamos finalmente provar que (2.17) é uma integral primeira das equações de movimento clássicas.

Primeiramente, podemos perceber que a equação de Hamilton-Jacobi (2.30) implica que os momenta p_a definidos a partir da relação (2.17) satisfazem o vínculo da super-hamiltoniana (2.9). Agora, para obtermos as equações de

movimento de segunda ordem, derivemos a equação de Hamilton-Jacobi (2.30) em relação a q^c , o que fornecerá a seguinte equação:

$$\frac{1}{2} \gamma^{ab,c} \frac{\partial S}{\partial q^a} \frac{\partial S}{\partial q^b} + \gamma^{ab} \frac{\partial S}{\partial q^a} \frac{\partial^2 S}{\partial q^b \partial q^c} + \frac{\partial V}{\partial q^c} = 0 \quad . \quad (2.32)$$

Podemos definir um parâmetro temporal τ (a menos de uma constante) ao longo das curvas integrais de ∇S , requerendo que para qualquer função $F(q)$

$$\frac{dF}{d\tau} = \nabla S \cdot \nabla F \quad . \quad (2.33)$$

Identificando τ com o tempo próprio, $d\tau = N dt$, ao tomarmos $F(q) = q^c$ a equação (2.33) implica, através da correlação (2.17), na relação usual entre as coordenadas e os momenta (2.7). Assim, fazendo uso de (2.17) e (2.7), podemos obter as equações de movimento clássicas a partir da equação (2.32).

Desse modo, vimos que a função de onda (2.24), se a condição (2.31) é satisfeita, apresenta um acentuado pico sobre a correlação (2.17), que mostramos ser uma integral primeira das equações de movimento clássicas: ou seja, a função de onda (2.24) possui um forte pico sobre um conjunto de trajetórias clássicas.

O mais importante, contudo, é que a solução geral das equações de movimento clássicas possui $(2n-1)$ constantes de integração arbitrárias e, para uma dada solução S da equação de

Hamilton-Jacobi, a solução geral da relação (2.17) envolverá n constantes arbitrárias. A função de onda (2.24) tem então um pico sobre um subconjunto n -paramétrico do conjunto total $(2n-1)$ -paramétrico de todas as trajetórias clássicas. Privilegiando um subconjunto de trajetórias, a função de onda (2.24) está substituindo, dentro de certos limites, as condições iniciais em cosmologia clássica. (É claro que para que isto aconteça é necessário que se tenha uma função de onda específica — apresentando, no limite semi-clássico, uma determinada solução da equação de Hamilton-Jacobi — o que significa que precisamos de condições de contorno para a equação de Wheeler-DeWitt. A questão das condições iniciais fica então transportada para a questão das condições de contorno da equação de Wheeler-DeWitt; muitos autores defendem a idéia de que houve um ganho real nesta mudança de questão: impor condições iniciais em cosmologia clássica envolveria desenvolver um raciocínio clássico em regiões onde o universo seria essencialmente quântico, enquanto que a busca de condições de contorno para a equação da função de onda do universo estaria ligada a concepções físicas e filosóficas fundamentais^[38, 39, 40].)

Vamos agora efetuar a construção de uma medida de probabilidade sobre o *ensemble* de trajetórias clássicas privilegiadas por uma função de onda do tipo (2.24). Através de (2.17), uma função de onda desse tipo efetivamente fixa um conjunto de velocidades iniciais em uma hipersuperfície de

dimensão (n-1) mas, além disso, essas funções de onda contêm informação adicional nas funções $A(q)$ e $I_R(q)$.

Levando em conta a condição (2.31), a equação (2.26) pode ser escrita (multiplicando por A^*):

$$2A^* \nabla I \cdot \nabla A + |A|^2 \nabla^2 S = 0 \quad , \quad (2.34)$$

isto é,

$$\nabla \cdot (|A|^2 \nabla S) = 0 \quad . \quad (2.35)$$

Multiplicando a equação (2.34) por $\exp(-2I_R/\hbar)$, e usando (2.29), podemos acrescentar:

$$\nabla \cdot \left(\exp(-2I_R/\hbar) |A|^2 \nabla S \right) = 0 \quad . \quad (2.36)$$

A equação acima expressa uma lei de conservação,

$$\nabla \cdot J = 0 \quad , \quad (2.37)$$

onde

$$J = \exp(-2I_R/\hbar) |A|^2 \nabla S \quad . \quad (2.38)$$

Esta corrente J dada por (2.38) é um caso particular da corrente conservada (2.11) associada à equação de

Wheeler-DeWitt, para a função de onda (2.24) quando a condição (2.31) é satisfeita. A equação (2.37) sugere que o pré-fator diante de ∇S em (2.38), que é sempre positivo, fornecerá uma medida sobre o conjunto de trajetórias clássicas privilegiadas pela função de onda WKB.

Vamos tomar um feixe de trajetórias dentre aquelas que têm como vetor tangente ∇S (sobre as quais a função de onda WKB tem um pico acentuado). Consideremos então duas hipersuperfícies de dimensão $(n-1)$ que interceptam o feixe, respectivamente, em regiões denotadas por σ_1 e σ_2 . Como $\nabla \cdot J = 0$, podemos escrever:

$$0 = \int_{\Omega} d\Omega \nabla \cdot J = \int_{\partial\Omega} J \cdot d\sigma, \quad (2.39)$$

onde Ω é um volume no minisuperespaço e $d\sigma$ é o elemento de área normal ao contorno de Ω . Substituindo por Ω em (2.39) o volume varrido pelo feixe considerado acima entre σ_1 e σ_2 , teremos:

$$\int_{\sigma_1} J \cdot d\sigma = \int_{\sigma_2} J \cdot d\sigma, \quad (2.40)$$

o que evidencia que o fluxo do feixe através de uma hipersuperfície é independente da hipersuperfície. Assim podemos definir uma medida de probabilidade conservada sobre o conjunto de trajetórias integrais de ∇S , da seguinte forma:

$$dP = J \cdot d\sigma \quad , \quad (2.41)$$

onde $d\sigma$ é o elemento de área de alguma hipersuperfície Σ que intercepta esse conjunto de trajetórias.

A questão do sinal de dP está ligada à escolha da família de hipersuperfícies- Σ . A escolha interessante para nós é uma família em que as hipersuperfícies interceptam a congruência de trajetórias apenas uma vez; nesse caso todas as trajetórias vão atravessar as hipersuperfícies no mesmo sentido, e a medida de probabilidade (2.41) terá sinal definido. Podemos sempre encontrar uma tal família de hipersuperfícies no minisuperespaço, e um exemplo é a família de hipersuperfícies $S(q) = \text{const}$, constituída de hipersuperfícies ortogonais às trajetórias.

É preciso observar que a medida de probabilidade definida pela equação (2.41) não deve ser considerada como fornecendo uma probabilidade absoluta, pois é provável que, se integrarmos dP sobre uma das hipersuperfícies Σ até as bordas do minisuperespaço, essa integral divirja, e a medida não seja normalizável. Devemos considerá-la então como uma medida fornecendo *probabilidades condicionais*: estabelecemos um subconjunto finito da hipersuperfície Σ , σ_0 , como o conjunto que encerra as trajetórias a serem consideradas, e daí calculamos a probabilidade de se encontrar o universo em um subconjunto de σ_0 , digamos σ_1 :

$$P(\sigma_1 | \sigma_0) = \frac{\int_{\sigma_1} J \cdot d\sigma}{\int_{\sigma_0} J \cdot d\sigma} \quad . \quad (2.42)$$

Estas probabilidades podem ser calculadas e comparadas, fornecendo uma previsão quando forem próximas de zero ou um.

Lembramos mais uma vez que a medida de probabilidade (2.41), com as propriedades discutidas acima, só pode ser definida para funções de onda que possuem um comportamento WKB em alguma região do minisuperespaço, e especificamente nestas regiões.

Nos próximos capítulos vamos aplicar os resultados deste a um modelo de minisuperespaço situado em uma teoria em que a gravitação e o eletromagnetismo estão acoplados de modo não-mínimo.

CAPÍTULO III

O MODELO CLÁSSICO

" 'To be born again,' sang Gibreel Farishta tumbling from the Heavens, 'first you have to die. Ho ji! Ho ji! To land upon the bosomy earth, first one needs to fly. Tat-taa! Takathun! How to ever smile again, if first you won't cry? How to win the darling's love, mister, without a sigh? Baba, if you want to get born again...' "

Salman Rushdie, *The Satanic Verses*.

O MODELO CLÁSSICO

Com o objetivo de evitar a singularidade cosmológica clássica (para uma motivação mais detalhada ver as referências [2] e [3]), o modelo cosmológico que neste capítulo vamos re-interpretar como um modelo de minisuperespaço foi desenvolvido no contexto de uma teoria em que a gravitação de Einstein está não-minimalmente acoplada ao eletromagnetismo de Maxwell, cuja lagrangiana é^[2]

$$\mathcal{L} = (-g)^{1/2} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{k} R + \sigma R W_{\mu} W_{\nu} g^{\mu\nu} \right], \quad (3.1)$$

onde g é o determinante da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, R é o respectivo (quadri-) escalar de curvatura, $k = 16\pi G$ (G é a constante de Newton), σ é uma constante de acoplamento, W_{μ} é o campo eletromagnético e $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} W_{\nu} - \partial_{\nu} W_{\mu}$.

Variando a ação construída a partir da lagrangiana (1.1), em relação a $g_{\mu\nu}$ e W_{μ} , obtemos as equações de campo:

$$\left(\frac{1}{k} + \sigma W^2\right) G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} + \sigma \square (W^2) g_{\mu\nu} - \sigma R W_{\mu} W_{\nu} - \sigma (W^2)_{,\mu;\nu} \quad (3.2)$$

$$F^{\mu\nu};_{\nu} = -\sigma R W^{\mu} \quad , \quad (3.3)$$

onde $W^2 = g^{\mu\nu} W_{\mu} W_{\nu}$, $g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$,
 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ ($R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci), \square é o
operador d'Alembertiano covariante, ";" denota derivada
covariante em relação à quadri-métrica $g_{\mu\nu}$, e
 $E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}(F_{\mu\nu}) := F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\kappa}F^{\alpha\kappa}$.

Tomando o traço da equação (3.2) teremos (a partir de
agora estamos fazendo $k = 1$) :

$$R = -3\sigma \square(W^2) \quad . \quad (3.4)$$

Agora faremos o seguinte ansatz, que caracteriza
o modelo:

$$\begin{cases} ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2 \\ W_{\mu} = (\phi(t), 0, 0, 0) \end{cases} \quad (3.5)$$

[a quadri-métrica tem a forma de Robertson-Walker e $d\Omega_3^2$ é a
métrica sobre as seções espaciais de curvatura constante
negativa, $d\Omega_3^2 = dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$].

De (3.5) concluímos que

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}W_{\nu} - \partial_{\nu}W_{\mu} = 0 \quad , \quad (3.6)$$

e conseqüentemente

$$E_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Além disso, podemos ver que

$$W^2 = g^{\mu\nu} W_{\mu} W_{\nu} = - \phi^2 / N^2 =: - \varphi^2 \quad . \quad (3.8)$$

Usando as equações (3.6), (3.7) e (3.8), as equações de campo (3.2), (3.3) e (3.4) se tornam:

$$R = 0 \quad (3.9)$$

$$(1 - \sigma\varphi^2)R_{\mu\nu} + \sigma(\varphi^2)_{,\mu;\nu} = 0 \quad (3.10)$$

$$\square(\varphi^2) = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Vamos então expressar as equações de movimento acima em termos das variáveis $N(t)$, $a(t)$ e $\varphi(t)$. As componentes do tensor de Ricci são dadas por:

$$R_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{N}}{N} \right) \quad (3.12)$$

$$R_{11} = \frac{1}{N^2 a^2} \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 2N^2 - a\dot{a} \frac{\dot{N}}{N} \right) h_{11} \quad (3.13)$$

(usamos a notação do capítulo anterior, $h_{ik} dx^i dx^k = a^2 d\Omega_3^2$ e o ponto significa derivada em relação a t). As outras componentes do tensor de Ricci se anulam.

O escalar de curvatura é dado por

$$R = \frac{\epsilon}{N^2 a^2} \left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 - N^2 - a\dot{a} \frac{\dot{N}}{N} \right) . \quad (3.14)$$

As equações de movimento resultantes são :

$$\left\{ \begin{array}{l} a\ddot{a} + \dot{a}^2 - N^2 - a\dot{a} \frac{\dot{N}}{N} = 0 \quad (3.15) \\ \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{N}}{N} \right) - \frac{\dot{\beta}}{\beta} \frac{\dot{N}}{N} = 0 \quad (3.16) \\ a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 2N^2 - a\dot{a} \frac{\dot{N}}{N} + a\dot{a} \frac{\dot{\beta}}{\beta} = 0 \quad (3.17) \end{array} \right.$$

$$\text{onde } \beta = (1 - \sigma\varphi^2) . \quad (3.18)$$

Vamos agora interpretar nosso modelo como um modelo de minisuperespaço.

Definiremos o funcional da ação do minisuperespaço $S = S [a(t), \beta(t), N(t)]$ da seguinte forma:

$$S := \int_{\omega} dt d^3x \mathcal{L} \left(a, \beta, N \right) . \quad (3.19)$$

De (3.1), (3.5), (3.6), (3.8), (3.14) e (3.18) resulta que S é expressa por

$$S = \Omega \int dt \beta \left(\frac{6\ddot{a}a^2}{N} + 6\frac{a\dot{a}^2}{N} - 6Na - 6\frac{\dot{a}a^2\dot{N}}{N^2} \right) \quad (3.20)$$

(Ω é a constante proveniente da integração sobre o espaço).

Para que realmente possamos estabelecer o nosso modelo como um modelo de minisuperespaço, é preciso que as equações de movimento obteneveis a partir do funcional da ação (3.20) reproduzam as equações de Einstein para o modelo; vamos então mostrar que isso realmente acontece.

Primeiramente é necessário fazer uma observação. O funcional (3.20) é linear em \ddot{a} , o que permite esconder \ddot{a} em um termo que é uma derivada temporal total ($\dot{\Delta}$):

$$\beta \frac{6\ddot{a}a^2}{N} = \dot{\Delta} + 12\sigma \frac{\dot{a}a^2\dot{\varphi}}{N} - \beta \left(12\frac{\dot{a}^2a}{N} - 6\frac{\dot{a}a^2\dot{N}}{N^2} \right) , \quad (3.21)$$

$$\Delta = \beta \frac{6\dot{a}a^2}{N} . \quad (3.22)$$

$\dot{\Delta}$ dá origem a um termo de superfície na ação (3.20). Na ação (puramente) gravitacional completa (Einstein-Hilbert) os termos contendo derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$ podem ser agrupados em uma divergência total, igualmente dando origem a um termo de superfície. Para que este termo de superfície não contribua para as equações de movimento, ao invés de se impor que as variações das derivadas primeiras de $g_{\mu\nu}$ se anulem no contorno da região de integração, atualmente se dá preferência

(para motivação mais detalhada ver, por exemplo, a ref.[41]) a definir a ação gravitacional com um termo de superfície adicional (compensando o termo com as derivadas segundas na ação de Einstein-Hilbert) :

$$S_{Gr} := \int_{\omega} d^4x (-g)^{1/2} {}^4R + \int_{\partial\omega} d^3x 2h^{1/2} K \quad (3.23)$$

(usamos a notação do capítulo I, K é o traço da curvatura extrínseca no contorno $\partial\omega$). Em nosso modelo de minisuperespaço com acoplamento não-mínimo, se quisermos evitar a imposição de que $\delta\bar{a} = 0$ nos extremos da região de integração, teremos que adicionar à ação (3.20) um termo de superfície um pouco diferente, explicitamente

$$\int dt \left(\beta 2h^{1/2} K \right)' , \quad (3.24)$$

$$\text{pois } 2h^{1/2} K = -\beta^{-1}\Delta . \quad (3.25)$$

Uma vez feita essa observação, as equações de movimento podem ser obtidas da seguinte ação (fizemos uso de (3.21) e a ação foi re-calibrada para que as constantes multiplicativas desaparecessem) :

$$\left\{ S = - \int dt \left[\beta \left(\frac{\dot{a}^2 a}{N} + Na \right) + \dot{\beta} \frac{\dot{a} a^2}{N} \right] \right. \quad (3.26)$$

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \left(\frac{N}{a} \right)^2 = 0 \quad . \quad (3.27)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \beta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{N}{a} \right)^2 - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{N}}{N} = 0 \quad . \quad (3.28)$$

$$\frac{\delta S}{\delta a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \left(2 \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{N}}{N} \right) + 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{N}{a} \right)^2 - 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{N}}{N} = 0 \quad . \quad (3.29)$$

O sistema composto pelas equações (3.27), (3.28) e (3.29) é equivalente às equações de Einstein (3.15), (3.16) e (3.17):

(i) A equação (3.28) é idêntica à equação (3.15), $R = 0$.

(ii) A soma das equações (3.27) e (3.28) fornece a equação (3.17), que é a componente (1-1) das equações de Einstein.

(iii) A operação $[(3.29) - 2x(3.27) + (3.28)]$ resulta

na equação (3.16), que é a componente (0-0) das equações de Einstein.

Esse resultado valida o modelo como um modelo de minisuperespaço.

Se calcularmos a hamiltoniana a partir da ação (3.26) obteremos:

$$N \mathcal{H} = N \left[- \frac{\Pi_a \Pi_\beta}{a^2} + \beta \frac{\Pi_\beta^2}{a^3} + \beta a \right] , \quad (3.30)$$

onde Π_a e Π_β são respectivamente os momenta conjugados às variáveis a e β .

Podemos então perceber que, quando procedermos à quantização, a equação de Wheeler-DeWitt apresentará problemas de ordenamento de operadores, devido à estrutura da super-hamiltoniana \mathcal{H} . Contudo, vamos passar a trabalhar agora com um novo conjunto de variáveis (com as quais tais dificuldades serão evitadas); definiremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x := \beta a \\ y := \frac{a^2}{2} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Em termos destas novas variáveis o funcional da ação (3.26) assume a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = - \int dt \left[N\dot{x} + \frac{1}{N} \dot{x}\dot{y} \right] \end{array} \right. . \quad (3.32)$$

Esta ação tem a forma (2.4), e a métrica γ_{ab} se escreve:

$$[\gamma_{ab}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.33)$$

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -N^2\dot{x} + \dot{x}\dot{y} = 0 . \quad (3.34)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \dot{y}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{x}}{N} \right)' = 0 . \quad (3.35)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \dot{x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{y}}{N} - N - \frac{\dot{y}\dot{N}}{N^2} = 0 . \quad (3.36)$$

Escolhendo o gauge $N = 1$ (e fazendo uma primeira integração de (3.35)) o sistema formado pelas equações (3.34),

(3.35) e (3.36) se reduz a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}\dot{y} - x = 0 \\ \ddot{y} = 1 \\ \dot{x} = \text{constante} = c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.37) \\ (3.38) \\ (3.39) \end{array}$$

Integrando o sistema acima teremos:

$$\begin{aligned} x &= ct + d \\ y &= \frac{t^2}{2} + \frac{d}{c}t + \Sigma' \end{aligned} ,$$

onde d e Σ' são constantes.

Redefinindo a origem dos tempos, $t \rightarrow t - \frac{d}{c}$, apresentamos agora a solução geral das equações de movimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = ct \\ y = \frac{t^2}{2} + \Sigma \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.40) \\ (3.41) \end{array}$$

(Σ é uma constante). Ou ainda:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2c^2} + \Sigma \end{array} \right. \quad (3.42)$$

As constantes c e Σ parametrizam todas as trajetórias clássicas. De (3.40) e (3.41) podemos escrever a solução geral para a e φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (t^2 + 2\Sigma)^{1/2} \\ \varphi^2 = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{ct}{(t^2 + 2\Sigma)^{1/2}} \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.43) \\ (3.44) \end{array}$$

Concluimos portanto, de (3.43), que há soluções clássicas singulares e não-singulares, dependendo do sinal de Σ ; $\Sigma > 0$ corresponde a universos eternos; $\Sigma < 0$ corresponde a universos singulares; $\Sigma = 0$ corresponde ao espaço tempo de Minkowski em coordenadas de Milne^[42].

Partindo da ação (3.32) podemos calcular os momenta conjugados às variáveis x e y (no gauge $N = 1$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_y = -\dot{x} \\ \Pi_x = -\dot{y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.45) \\ (3.46) \end{array}$$

A super-hamiltoniana terá a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = -\Pi_x \Pi_y + x \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Essa super-hamiltoniana não trará problemas de

ordenamento de operadores, e será o ponto de partida para a quantização do nosso modelo de minisuperespaço (capítulo IV).

CAPÍTULO IV

O MODELO QUÂNTICO

" How does newness come into the world? How is it born?
Of what fusions, translations, conjoinings is it made?
How does it survive, extreme and dangerous as it is? What
compromises, what deals, what betrayals of its secret nature
must it make to stave off the wrecking crew, the exterminating
angel, the guillotine?
Is birth always a fall?
Do angels have wings? Can men fly? "

Salman Rushdie, *The Satanic Verses*.

O MODELO QUÂNTICO

Neste capítulo vamos quantizar o modelo de minisuperespaço discutido no capítulo três, descrito pelo fator de escala e pela componente longitudinal (homogênea) do campo eletromagnético, que estão não-minimalmente acoplados. Em termos das variáveis x e y definidas pelas equações (3.31), a super-hamiltoniana (3.47) do modelo clássico se escreve:

$$\mathcal{H} = - \Pi_x \Pi_y + x \quad . \quad (4.1)$$

Vimos no capítulo dois que soluções WKB para a equação de Wheeler-DeWitt, do tipo oscilatório $e^{iS(q)}$ (S uma função real satisfazendo a equação de Hamilton-Jacobi), descrevem um *ensemble* de universos clássicos. Vamos começar a análise do nosso modelo de minisuperespaço quântico discutindo soluções WKB.

Da super-hamiltoniana (4.1) podemos ver que a equação de Hamilton-Jacobi (equação (1.14)) para o nosso modelo é:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} - x = 0 \quad . \quad (4.2)$$

Para resolvermos esta equação vamos propor um *ansatz*

de separabilidade:

$$S(x,y) = X(x) + Y(y) \quad (4.3)$$

que, quando substituído em (4.2), resultará nas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dy} = c \\ \frac{dX}{dx} = \frac{x}{c} \end{array} \right. , \quad (4.4)$$

onde c é a constante de separação. Quando integradas as equações (4.4) fornecem uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi (4.2) :

$$S(x,y) = cy + \frac{x^2}{2c} \quad (4.5)$$

(a menos de uma constante aditiva irrelevante).

Estamos procurando soluções da equação de Wheeler-DeWitt da forma (2.24), $\psi(x,y) = A(x,y) \exp(-I(x,y))$ (estamos novamente fazendo $\hbar = 1$), $I(x,y) = I_R(x,y) - iS(x,y)$; $A(x,y)$ é uma função complexa, e I_R é uma função real que satisfaz a equação (2.29):

$$\nabla I_R \cdot \nabla S = 0 \quad (4.6)$$

(O produto escalar é relativo à métrica no minisuperespaço,

dada por (3.33)).

Para resolver a equação (4.6) novamente vamos utilizar o método de separação de variáveis, $I_R(x,y) = I_x(x) + I_y(y)$. As equações resultantes serão (w é a constante de separação):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI_y}{dy} = -cw \\ \frac{dI_x}{dx} = \frac{w}{c}x \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Integrando as equações (4.7) obtemos I_R :

$$I_R(x,y) = w \left(-cy + \frac{x^2}{2c} \right) \quad (4.8)$$

Não estaremos exatamente interessados em achar a função $A(x,y)$, mas sim $C(x,y) := |A|^2$. $C(x,y)$ satisfaz a equação (2.35) :

$$\nabla \cdot (C \nabla S) = 0 \quad (4.9)$$

Também vamos supor que $C(x,y)$ é uma função separável, do tipo $C(x,y) = C_x(x)C_y(y)$, obtendo as equações (escrevemos a constante de separação como $2z$):

$$\begin{cases} \frac{dC}{dy} = -2zc C_y \\ \frac{dC}{dx} = 2z \frac{x}{c} C_x \end{cases} \quad . \quad (4.10)$$

$C(x,y)$ é obtida integrando-se (4.10) (estamos omitindo uma irrelevante constante multiplicativa):

$$C(x,y) = \exp\left\{ 2z\left(-cy + \frac{x^2}{2c}\right) \right\} \quad . \quad (4.11)$$

Finalmente podemos escrever as soluções WKB que procurávamos:

$$\left[\psi(x,y) = \exp\left\{ \omega\left(-cy + \frac{x^2}{2c}\right) + i\left(cy + \frac{x^2}{2c}\right) \right\} \right] \quad , \quad (4.12)$$

onde $\omega := (z - w)$ é tal que $|\omega| \ll 1$, de modo que o pré-fator $C^{1/2} \exp(-I_R)$ varie muito mais lentamente que $S(x,y)$.

Como foi discutido no capítulo dois, soluções WKB do tipo oscilatório possuem um acentuado pico sobre um conjunto de trajetórias clássicas, pois o pico é sobre as correlações (2.17) entre as coordenadas e os momenta canônicos, que representam uma integral primeira das equações de movimento clássicas. Uma função de onda do tipo (4.12), com constantes

$c = c_0$ e $w = w_0$, tem assim um acentuado pico sobre as correlações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_y = \frac{\partial S_0}{\partial y} \\ \Pi_x = \frac{\partial S_0}{\partial x} \end{array} \right. , \quad (4.13)$$

onde $S_0(x,y)$ é dada por (4.5) (com $c = c_0$) e Π_x , Π_y são expressos em termos das velocidades pelas equações (3.45) e (3.46). Substituindo (4.5) (3.45) e (3.46) em (4.13) obteremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{x} = c_0 \\ -\dot{y} = \frac{x}{c_0} \end{array} \right. . \quad (4.14)$$

onde o ponto representa derivada em relação ao parâmetro temporal definido (a menos de uma constante aditiva) por (2.33). As equações acima podem ser trivialmente integradas, fornecendo (após uma redefinição da origem dos tempos e a eliminação de t):

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2c_0^2} + \Sigma \end{array} \right. , \quad (4.15)$$

onde Σ é uma constante arbitrária.

Todas as trajetórias clássicas possíveis estão contidas na equação (3.42), que possui dois parâmetros arbitrários, c e Σ . Nas coordenadas x e y as trajetórias clássicas no minisuperespaço são parábolas simétricas, e com a concavidade voltada para cima, em relação ao eixo y . A constante c está ligada à forma da parábola, enquanto que a constante Σ determina a altura do vértice ao longo do eixo y ; o sinal de Σ determina, portanto ($y = a^2/2$, onde a é o fator de escala), se a trajetória é singular ou não (ou se simplesmente representa o espaço-tempo de Minkowski, no caso $\Sigma = 0$).

Nossa solução WKB tem um pico sobre a família uni-paramétrica de trajetórias clássicas (4.15). Essas trajetórias são todas congruentes, pois o parâmetro ligado à forma está fixado, mas a constante de integração Σ é arbitrária; assim, as soluções WKB do tipo (4.12) privilegiam tanto trajetórias não-singulares quanto singulares. O pré-fator $C^{1/2} \exp\{-I_R\}$ nos permite, contudo, construir uma medida de probabilidade sobre esta família de trajetórias clássicas. Essa medida não é garantia de que uma dada função de onda contenha uma previsão, já que para isso é necessário que haja probabilidades condicionais próximas de zero ou um; vejamos o que acontece para uma de nossas soluções WKB.

A corrente conservada (2.38), para uma solução do tipo (4.12), se escreve:

$$J = \exp\left\{ 2\omega_0\left(-c_0 y + \frac{x^2}{2c_0}\right) \right\} \nabla S_0(x, y) \quad . \quad (4.16)$$

Agora vamos fazer uma transformação de coordenadas no minisuperespaço, definindo:

$$\eta := -y + \frac{x^2}{2c_0^2} \quad . \quad (4.17)$$

$$\xi := y + \frac{x^2}{2c_0^2} \quad . \quad (4.18)$$

Em termos das variáveis η e ξ a corrente (4.16) é expressa por:

$$J = \exp\{ 2c_0\omega_0 \eta \} \nabla(c_0\xi) \quad . \quad (4.19)$$

A medida de probabilidade é construída projetando-se J , $dP = J \cdot d\sigma$ (equação (2.41)), onde $d\sigma$ é o elemento de área normal a uma superfície apropriada; por isto entende-se uma superfície tal que as trajetórias do *ensemble* privilegiado pela nossa função de onda cruzem-na apenas uma vez (assim o sinal de dP está definido, conforme foi mostrado no capítulo dois). No plano ξ - η as superfícies $S_0 = \text{const}$, ortogonais às trajetórias do *ensemble*, são justamente as retas $\xi = \text{const}$; e as trajetórias do *ensemble* (4.15) são as retas $\eta = \text{const}$. Desse modo, se escolhermos uma superfície $\xi = \text{const}$ como a

superfície sobre a qual projetaremos J , estaremos garantindo que o sinal da medida de probabilidade está definido, obtendo (omitimos uma constante multiplicativa):

$$dP = \exp\{ 2c_0\omega_0 \eta \} d\eta \quad . \quad (4.20)$$

Esta é uma medida sobre as trajetórias (4.15), $\eta = \text{const} = -\Sigma$, e efetivamente uma medida sobre os possíveis valores de Σ , o parâmetro cujo sinal diferencia universos singulares de não-singulares. Analisando a medida (4.20) podemos perceber que uma função de onda WKB do tipo (4.12) realmente faz uma previsão sobre o universo, embora qual previsão depende crucialmente dos parâmetros presentes na função de onda. Suponhamos que $c_0\omega_0 < 0$; nesse caso a função onda prevê um universo não-singular, pois a probabilidade associada a um universo não-singular ($\Sigma > 0$) é:

$$\frac{\int_{\eta=-\infty}^{\eta=0} dP}{\int_{\eta=-\infty}^{\eta=+\infty} dP} = 1 \quad . \quad (4.21)$$

Por outro lado, se $c_0\omega_0 > 0$ a previsão é de um universo singular, pois a probabilidade condicional das trajetórias com $\Sigma < 0$ ($\eta > 0$) será igual a um. (Nenhuma dessas soluções WKB do tipo (4.12) prevê o espaço-tempo de Minkowski, $\Sigma = 0$).

Agora que sabemos que em nosso modelo há soluções WKB com real poder de previsão (embora não de um único tipo), satisfazendo o princípio de correspondência, vamos obter e analisar soluções exatas.

A equação de Wheeler-DeWitt (2.10) para um modelo de minisuperespaço pode ser obtida para o nosso modelo sem ambigüidade, a partir da super-hamiltoniana (4.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta^2 \psi}{\delta x \delta y} + x\psi = 0 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

(essa equação de Wheeler-DeWitt possui naturalmente o ordenamento da equação (2.23)).

Vamos mais uma vez buscar uma solução através de separação de variáveis, escrevendo $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$. Escolhendo uma constante de separação imaginária, ic (c real), obteremos as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dy} = ic Y \\ \frac{dX}{dx} = i\frac{x}{c} X \end{array} \right. \quad (4.23)$$

A constante de separação foi escolhida imaginária para que os operadores momentum $\hat{\Pi}_j = -i(\partial/\partial q^j)$ tenham autovalores reais. A integração de (4.23) fornece:

$$\psi_c(x,y) = \exp \left\{ i \left(cy + \frac{x^2}{2c} \right) \right\} \quad (4.24)$$

(onde suprimimos uma constante multiplicativa); a constante c corresponde a um autovalor do operador $\hat{\Pi}_y$, o operador momentum associado à variável y .

A função de onda $\psi_c(x,y)$ dada por (4.24) é uma exponencial oscilatória, cuja fase é exatamente a solução completa da equação de Hamilton-Jacobi $S(x,y)$, dada por (4.5):

$$\psi_c = e^{iS} \quad (4.25)$$

Assim, a solução exata $\psi_c(x,y)$ é uma função de onda WKB (embora sem o pré-fator); isso mostra que as soluções WKB discutidas anteriormente, com pré-fatores que variam lentamente quando comparados a S , são aproximações muito boas em quase todo o minisuperespaço.

Conforme foi discutido acima, a função de onda (4.24) privilegia o *ensemble* de trajetórias (4.15), mas a ausência do pré-fator impede a construção de uma corrente conservada e de uma medida de probabilidade sobre esse conjunto de trajetórias. Contudo, a equação de Wheeler-DeWitt é uma equação linear, e podemos construir pacotes de onda a partir das soluções (4.24), que terão interessantes propriedades assintóticas. Denotando a amplitude (complexa) do pacote por $g(c)$, podemos escrever:

$$\Psi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dc g(c) \exp\left\{ i \left(cy + \frac{x^2}{2c} \right) \right\} , \quad (4.26)$$

onde $\Psi(x,y)$ é solução da equação de Wheeler-DeWitt (4.22).

Estamos interessados, como já foi dito, na possibilidade da função de onda do universo prever um universo clássico; para isso, temos que analisar seu comportamento no limite semi-clássico, que aqui estaremos identificando como o comportamento na região em que o fator de escala é muito grande. Ambas as quantidades y e x^2 (definidas em (3.31)) são proporcionais a a^2 (a é o fator de escala). Logo, a fase das funções de onda $\psi_c(x,y)$ (expressas por (4.24)), com as quais construímos o pacote $\Psi(x,y)$ (equação (4.26)), é proporcional a a^2 ; assim, quando $a \rightarrow \infty$ a fase sendo integrada em (4.26) varia muito rapidamente, o que vai nos permitir aproximar $\Psi(x,y)$, no limite semi-clássico, utilizando o método da fase estacionária. Para isso, vamos escrever a amplitude $g(c)$ na sua forma polar:

$$g(c) = |g(c)| e^{i\alpha(c)} =: f(c) e^{i\alpha(c)} ; \quad (4.27)$$

$\Psi(x,y)$ se escreve então:

$$\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dc f(c) \exp \left\{ i \left(\alpha(c) + cy + \frac{x^2}{2c} \right) \right\} . \quad (4.28)$$

A condição para que a fase sendo integrada em (4.28) seja estacionária é:

$$\frac{d\alpha}{dc}(c) + y - \frac{x^2}{2c^2} = 0 . \quad (4.29)$$

Suponhamos agora que a equação (4.29) tenha N soluções, $c = c_n(x, y)$ (onde n vai de 1 a N). No limite semi-clássico a integral (4.28) fornecendo $\Psi(x, y)$ será então proporcional a

$$\left[\Psi_{sc}(x, y) = \sum_{n=1}^N f(c_n(x, y)) \exp(i S_n(x, y)) \right] , \quad (4.30)$$

onde $S_n(x, y)$ é definida por:

$$S_n(x, y) := \alpha(c_n(x, y)) + y c_n(x, y) + \frac{x^2}{2c_n(x, y)} . \quad (4.31)$$

Calculemos as derivadas parciais de $S_n(x, y)$:

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = \frac{\partial c_n}{\partial x} \left(\frac{d\alpha}{dc}(c_n) + y - \frac{x^2}{2c_n^2} \right) + \frac{x}{c_n} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial y} \left(\frac{d\alpha}{dc}(c_n) + y - \frac{x^2}{2c_n^2} \right) + c_n \quad (4.33)$$

Como $c_n(x,y)$ satisfaz a condição (4.29), as derivadas parciais calculadas acima são simplesmente:

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = \frac{x}{c_n} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial y} = c_n \quad (4.35)$$

De (4.34) e (4.35) podemos perceber que

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} \frac{\partial S_n}{\partial y} - x = 0 \quad , \quad (4.36)$$

ou seja, $S_n(x,y)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi! De fato, essas soluções são chamadas de soluções gerais e, juntamente com a solução completa (4.5), compreendem todas as soluções da equação de Hamilton-Jacobi (4.2)^[43].

Com esse resultado podemos concluir que o pacote de ondas $\Psi(x,y)$, que no regime semi-clássico é dado por (4.30), é nesse regime uma superposição de funções de onda WKB do tipo oscilatório; conforme discussões anteriores, cada uma dessas funções de onda descreve um *ensemble* de universos clássicos. Vilenkin^[25] argumenta que dentro da aproximação semi-clássica

os termos de interferência entre as funções de onda WKB são desprezíveis (se as fases $S_n(x,y)$ não são soluções da equação de Hamilton-Jacobi infinitesimalmente próximas), e as distribuições de probabilidade oriundas destas funções de onda podem ser independentemente avaliadas.

Vamos agora tomar uma amplitude real para o pacote de ondas (4.28), isto é, vamos fazer $\alpha(c) = \text{const}$. Nesse caso, a solução da equação (4.29) será

$$c(x,y) = \pm x (2y)^{-1/2} \quad (4.37)$$

que, quando substituída em (4.30), fornecerá a expressão do pacote no regime semi-clássico:

$$\Psi_{sc}(x,y) = f\left(x(2y)^{-1/2}\right) \exp(iS_R) + f\left(-x(2y)^{-1/2}\right) \exp(-iS_R) \quad (4.38)$$

onde suprimimos a constante multiplicativa e S_R é dada por:

$$S_R = x (2y)^{1/2} \quad (4.39)$$

Vejamos qual é o *ensemble* de trajetórias descrito por $f \exp\{iS_R\}$, que é caracterizado pelas correlações.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_y = - \dot{x} = \frac{\partial S_R}{\partial y} \\ \Pi_x = - \dot{y} = \frac{\partial S_R}{\partial x} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Eliminando o tempo o sistema acima se torna:

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x} \right. ; \quad (4.41)$$

integrando (4.41) obtemos (k é uma constante)

$$\left\{ y = \frac{x^2}{2k^2} \right. \quad (4.42)$$

Vemos na equação (4.42) que o parâmetro Σ da equação (3.42) é igual a zero, e isso significa que todas as trajetórias em (4.42) correspondem ao espaço-tempo de Minkowski ($a^2 = 2y = t^2$ representa o espaço-tempo de Minkowski em coordenadas de Milne). Assim, qualquer pacote construído a partir das funções de onda ψ_c (dadas por (4.24)), com amplitude real, apresenta como previsão de universo clássico o espaço-tempo de Minkowski.

Há outras soluções exatas da equação de Wheeler-DeWitt que, no regime semi-clássico, descrevem exclusivamente um universo de um determinado caráter (eterno, singular ou Minkowski). A função de onda

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(\theta, \chi) = (\theta\chi)^{1/3} J_{1/3}(\theta) J_{1/3}(\chi) \end{array} \right. , \quad (4.43)$$

onde

$$\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}(x + y)^{3/2} \quad , \quad (4.44)$$

$$\chi = \frac{\sqrt{2}}{3}(y - x)^{3/2} \quad , \quad (4.45)$$

e $J_{1/3}$ é a função de Bessel de primeira espécie de ordem $1/3$, é uma solução exata da equação de Wheeler-DeWitt. Vejamos seu comportamento na região em que o fator de escala $a \rightarrow \infty$. Quando $|z| \rightarrow \infty$ a função de Bessel (na variável z) se comporta da seguinte forma^[44]:

$$J_m(z) \rightarrow (2/\pi z)^{1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}m\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad (4.46)$$

onde $|\arg(z)| < \pi$. (Sobre o eixo real negativo $J_m(z) = J_m(-z) e^{im\pi}$ ^[44]).

Tomaremos como a região em que a função de onda tem seu regime semi-clássico aquela em que $2y = a^2 \rightarrow \infty$ e $a \gg \varphi^2$ ($x = a\beta$, $\beta = (1 - \sigma\varphi^2)$); para todos os universos clássicos do modelo, podemos ver nas equações (3.43) e (3.44)

que, quando $a \rightarrow \infty$, $\varphi^2 \rightarrow \text{const}$; isso mostra que é razoável a suposição de que a região do minisuperespaço onde a função de onda tem comportamento semi-clássico é a sugerida acima). Nesta região θ e χ são reais, $\theta \rightarrow -\infty$ e $\chi \rightarrow +\infty$; a função de onda vai então se comportar como (fazendo uso de (4.46)):

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}(\theta, \chi) &= \\ &= (\theta\chi)^{-1/6} \left(\left[\exp(iS_+) + \exp(-iS_+) \right] + \left[\exp(iS_-) + \exp(-iS_-) \right] \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde omitimos a constante multiplicativa e

$$S_+ = \theta + \chi \quad (4.48)$$

$$S_- = \theta - \chi - \frac{5}{6}\pi \quad (4.49)$$

Calculemos as derivadas parciais de S_+ :

$$\frac{\partial S_+}{\partial x} = - (1/\sqrt{2}) \left\{ (x+y)^{1/2} + (y-x)^{1/2} \right\} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial S_+}{\partial y} = (1/\sqrt{2}) \left\{ - (x+y)^{1/2} + (y-x)^{1/2} \right\} \quad (4.51)$$

De (4.50) e (4.51) notamos que

$$\frac{\partial S_+}{\partial x} - \frac{\partial S_+}{\partial y} - x = 0, \quad (4.52)$$

S_+ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi!

Além disso,

$$\frac{\partial S_-}{\partial x} = \frac{\partial S_+}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S_-}{\partial y} = \frac{\partial S_+}{\partial x}, \quad (4.53)$$

logo S_- também satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi. Assim, a solução exata (4.43) possui um regime clássico (4.47) em que se reduz a uma soma de funções de onda WKB oscilatórias. Vejamos quais são as trajetórias clássicas descritas pela função de onda $\exp(iS_+)$, segundo as correlações (2.17) que nesse caso se escrevem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_y = -\dot{x} = \frac{\partial S_+}{\partial y} \\ \Pi_x = -\dot{y} = \frac{\partial S_+}{\partial x} \end{array} \right., \quad (4.54)$$

onde as derivadas parciais de S_+ são expressas por (4.50) e (4.51). Após algumas manipulações o sistema (4.54) assume a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dot{x}\dot{y} \\ 2y = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{array} \right. ; \quad (4.55)$$

Derivando em relação ao tempo ambas as equações acima, após novas manipulações obtemos as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 1 \end{array} \right. , \quad (4.56)$$

que ao serem integradas fornecem (redefinindo-se a origem do tempo):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = kt + b \\ y = \frac{t^2}{2} + \Sigma \end{array} \right. \quad (4.57)$$

(onde k , b , e Σ são constantes). Substituindo (4.57) em (4.55) obtemos que $b = 0$ e $\Sigma = \frac{k^2}{2}$; o conjunto de trajetórias sobre as quais a função de onda tem um pico é definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2k} + \frac{k^2}{2} \end{array} \right. , \quad (4.58)$$

compreendendo *somente* universos eternos, não-singulares ($\Sigma > 0$). Se houvéssemos trabalhado com a fase S_- chegaríamos ao mesmo *ensemble*, e a solução (4.43) efetivamente faz a previsão de um universo não-singular.

O conjunto de soluções da equação de Wheeler-DeWitt (4.22) é bastante rico, em verdade. Como já foi sugerido pela nossa análise de soluções WKB no início do capítulo, deve haver soluções exatas da equação de Wheeler-DeWitt prevendo, em seus regimes semi-clássicos, universos clássicos de qualquer caráter. Voltemos nossa atenção para o pacote de ondas geral dado por (4.26); no regime semi-clássico ele se comporta como (4.30) e, a despeito da quase arbitrariedade de $c_n(x,y)$, $S_n(x,y)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi: nesse caso, através das correlações (2.17), $S_n(x,y)$ necessariamente descreve um *ensemble* de universos clássicos, pois foi mostrado no capítulo dois que (2.17) corresponde a uma integral primeira das equações de movimento clássicas. Para verificarmos isto, analisemos o sistema de equações fornecido pelas correlações (2.17) no caso de uma função $S_n(x,y)$ geral; suas derivadas parciais são expressas por (4.34) e (4.35), e o sistema tem a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} - \dot{x} = c_n(x, y) \\ - \dot{y} = \frac{x}{c_n(x, y)} \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Derivando as equações do sistema acima em relação ao tempo, teremos que

$$\left\{ \begin{array}{l} - \ddot{x} = c_n (\partial c_n / \partial x) + \frac{x}{c_n} (\partial c_n / \partial y) \\ - \ddot{y} = -1 + \ddot{x} (x/c_n^2) \end{array} \right. \quad (4.60)$$

onde fizemos uso de (4.59). Consideremos agora a condição (4.29), satisfeita por $c_n(x, y)$; vamos derivá-la em relação a x e y , obtendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2 \alpha}{dc^2}(c_n) + \frac{x^2}{c_n^3} \right) \frac{\partial c_n}{\partial x} = \frac{x}{c_n^2} \\ \left(\frac{d^2 \alpha}{dc^2}(c_n) + \frac{x^2}{c_n^3} \right) \frac{\partial c_n}{\partial y} = -1 \end{array} \right. ; \quad (4.61)$$

combinando as duas equações em (4.61) concluímos que

$$c_n (\partial c_n / \partial x) + \frac{x}{c_n} (\partial c_n / \partial y) = 0 \quad (4.62)$$

Substituindo (4.62) em (4.60) finalmente obtemos

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 1 \end{cases} \quad (4.63)$$

Multiplicando as duas equações em (4.59) obtemos ainda o vínculo:

$$\begin{cases} \dot{x}\dot{y} - x = 0 \end{cases}, \quad (4.64)$$

e assim (4.64) e (4.63) são idênticas ao sistema formado pelas equações (3.37), (3.38) e (3.39), que fornecem todas as soluções clássicas do modelo, como deveria ser. O fato de que o pré-fator em (4.30), $C^{1/2}(x,y) = f(c_n(x,y))$, é uma função real arbitrária, evidencia que as soluções da equação de Wheeler-DeWitt podem fornecer qualquer medida de probabilidade sobre o conjunto de trajetórias clássicas, isto é, podem levar a todos os tipos de previsão possíveis. Esperamos que condições de contorno possam ser formuladas de maneira tal que sejam restringidas, por exemplo, as seguintes quantidades:

(i) os parâmetros ω e c nas soluções WKB (4.12) (o sinal de $c\omega$ determina o caráter do universo previsto);

(ii) a função $\alpha(c)$ no pacote (4.28), pois $\alpha(c)$ determina as fases WKB na aproximação semi-clássica; por exemplo, $\alpha(c) = k$ (Minkowski), $\alpha(c) = c \pm k^2$ (eterno ou singular), $\alpha(c) = \pm k^2 c$ (singular ou eterno), e outras, levam

a *ensembles* contendo apenas universos clássicos de um único caráter;

(iii) $f(c)$, o módulo da amplitude do pacote (4.28), responsável pelos pré-fatores nos termos WKB da aproximação semi-clássica, que por sua vez fornecem uma medida de probabilidade sobre os *ensembles* associados às fases; ainda que o *ensemble* descrito nesta aproximação contenha universos de diferentes caracteres, a medida de probabilidade pode levar a uma previsão, se conduzirmos a probabilidades condicionais próximas de zero ou um.

CONCLUSÃO

Todos os resultados que obtivemos são provenientes de um modelo de minisuperespaço. Contudo, as soluções de um modelo de minisuperespaço quântico não representam exatamente soluções da teoria da Relatividade Geral quantizada. Vimos no capítulo dois que, ao estabelecermos no superespaço coordenadas da forma (2.1) e (2.2), um modelo de minisuperespaço corresponde a tomarmos todos os "modos" $\phi^{(n)}$ e $h_{ik}^{(n)}$ como sendo nulos, com a exceção de um conjunto finito deles, correspondendo a um "hiperplano" no espaço formado por todos os "modos"; para soluções quânticas, "congelar" quase todos os "modos", ou seja, ajustá-los de início como sendo nulos e impor que eles não sejam excitados durante a evolução quântica, é uma clara violação do princípio da incerteza. Logo, os resultados da quantização via minisuperespaço devem ser considerados como "aproximados"; o caráter dessa aproximação foi discutido por Ryan^[22], argumentando que sua validade depende da existência de soluções da teoria completa, funções de onda no superespaço, que em uma região apropriada praticamente restrinjam-se ao "hiperplano" definindo o minisuperespaço. Kuchař^v e Ryan têm estudado esta possibilidade (outros autores trabalhando em cosmologia quântica não têm demonstrado tanto interesse por esta importante questão) através do conceito de

BIBLIOGRAFIA

- [1] - S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, "The Large Scale Structure of Space-time". Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [2] - M. Novello, J.M. Salim, "Non Linear Photons on the Universe", Phys.Rev. D20 (1979), 377.
- [3] - M. Novello, H. Heintzmann, "An Eternal Universe", GRG 16 (1984), 535.
- [4] - H.P. de Oliveira, "Um Estudo em Cosmologia e Termodinâmica Causal" . Tese de Mestrado, CBPF (1986).
- [5] - J.M.M. Senovilla, "New Class of Inhomogeneous Cosmological Perfect-Fluid Solutions without a Big-Bang Singularity", Phys.Rev.Lett. 64 (1990), 2219.
- [6] - M. Novello, S.D. Jorda, "Does There Exist a Cosmological Horizon Problem?", Mod.Phys.Lett. A4 (1989), 1809.
- [7] - J.A. Wheeler, "Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics", in "Batelles Rencontres", ed. by C. DeWitt and J.A. Wheeler. Benjamin, New York (1968).
- [8] - B.S. DeWitt, "Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory", Phys.Rev. 160 (1967), 1113.

- [9] - Nelson Pinto Neto, "Teoria da Gravitação em Termos das Variáveis de Fierz-Lanczos". Tese de doutorado, CBPF (1989).
- [10]- Alexandre da Fonseca Velasco, "Formalismo de Primeira Ordem e Suas Aplicações para a Quantização Canônica da Gravitação". Tese de Mestrado, CBPF (1990).
- [11]- K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics". Springer-Verlag, Berlin (1982).
- [12]- K. Kuchař, "Canonical Methods of Quantization", in "Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium", ed. by C.J. Isham, R. Penrose and D.W. Sciama. Clarendon Press, Oxford (1982).
- [13]- R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, "The Dynamics of General Relativity", in "Gravitation: An Introduction to Current Research", ed. by L. Witten. John Wiley, New York (1962).
- [14]- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, "Gravitation". Freeman, San Francisco (1973).
- [15]- J.A. Isenberg, J.M. Nester, "Canonical Gravity", in "General Relativity and Gravitation", ed. by A. Held. Plenum Press, New York/London (1980).
- [16]- J.J. Halliwell, "Introductory Lectures on Quantum Cosmology". Preprint MIT — CTP no.1845 (1990).
- [17]- B.F. Schutz, "Geometrical Methods of Mathematical Physics". Cambridge University Press, Cambridge (1980).

- [18]- P.W. Higgs, "Integration of Secondary Constraints in Quantized General Relativity", Phys.Rev.Lett. 1 (1958), 373.
- [19]- S.W. Hawking, D.N. Page, "Operator Ordering and the Flatness of the Universe", Nucl.Phys. B264 (1986), 185.
- [20]- T. Christodoulakis, J. Zanelli, "Canonical Approach to Quantum Gravity", Class.Quant.Grav. 4 (1987), 851.
- [21]- J.J. Halliwell, "Correlations in the Wave Function of the Universe", Phys.Rev. D36 (1987), 3626.
- [22]- M.P. Ryan, notas do curso ministrado durante a "VIth. Brazilian School of Cosmology and Gravitation", Itacuruçá, Rio de Janeiro (1989).
- [23]- S.W. Hawking, "The Quantum State of the Universe", Nucl.Phys. B239 (1984), 257.
- [24]- J.B. Hartle, "Quantum Kinematics of Spacetime II: a Model Quantum Cosmology with Real Clocks", Phys.Rev. D38 (1988), 2985.
- [25]- A. Vilenkin, "The Interpretation of the Wave Function of the Universe", Phys.Rev. D39 (1989), 1116.
- [26]- U.H. Gerlach, "Derivation of the Ten Einstein Field Equations from the Semi-classical Approximation to Quantum Geometrodynamics", Phys.Rev. 177 (1969), 1929.

- [27]- J.A. Wheeler, "Einstein's Vision". Springer-Verlag, Berlin (1968).
- [28]- H. Everett, "Relative State Formulation of Quantum Mechanics", Rev.Mod.Phys. 29 (1957), 454.
- [29]- B.S. DeWitt, N. Graham (eds.), "The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics". Princeton University Press, Princeton (1973).
- [30]- J.B. Hartle, "Quantum Mechanics of Individual Systems", Am.Jour.Phys. 36 (1968), 704.
- [31]- R. Geroch, "The Everett Interpretation", Noûs 18 (1984), 617.
- [32]- J.B. Hartle, "Prediction and Observation in Quantum Cosmology", in "Gravitation in Astrophysics, Cargèse 1986", ed. by B. Carter and J.B. Hartle. Plenum, New York/London (1986).
- [33]- S. Wada, "Interpretation and Predictability in Quantum Mechanics and Quantum Cosmology", Mod.Phys.Lett. A3 (1988), 645.
- [34]- Y. Kazama, R. Nakayama, "Wave Packet in Quantum Cosmology", Phys.Rev. D32 (1985), 2500.
- [35]- J.B. Hartle, citado por J.J. Halliwell; trabalho a aparecer em "Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes", ed. by T. Piran (1990).
- [36]- T.P. Singh, T. Padmanabhan, "Notes on Semiclassical Gravity", Ann.Phys.(N.Y.) 196 (1989), 296.

- [37]- G.I. Ghandour, "Effective Generating Functions for Quantum Canonical Transformations", Phys.Rev. D35 (1987), 1289.
- [38]- J.B. Hartle, S.W. Hawking, "Wave Function of the Universe", Phys.Rev. D28 (1983), 2960.
- [39]- T. Banks, "TCP, Quantum Gravity, the Cosmological Constant and All That...", Nucl.Phys. B249 (1985), 332.
- [40]- A. Vilenkin, "Boundary Conditions in Quantum Cosmology", Phys.Rev. D33 (1986), 3560.
- [41]- S.W. Hawking, "The Path-Integral Approach to Quantum Gravity", in "General Relativity — an Einstein Centenary Survey", ed. by S.W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, Cambridge (1979).
- [42]- W.Rindler, "Essential Relativity". Springer-Verlag, New York (1977).
- [43]- I.N. Sneddon, "Elements of Partial Differential Equations". McGraw-Hill, New York/Toronto/London (1957).
- [44]- P. Dennery, A. Krzywicki, "Mathematics for Physicists". Harper and Row, New York/London (1967).
- [45]- M.P. Ryan, comunicação pessoal.
- [46]- S.W. Hawking, "The Boundary Conditions of the Universe", in "Astrophysical Cosmology", ed. by H.A. Brück, G.V. Coyne and M.S. Longair.

Pontificia Academia Scientiarum, Vatican City
(1982).

"ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO E COSMOLOGIA QUÂNTICA: UM MODELO"

VINICIUS MOLL DE CASTRO PEREIRA

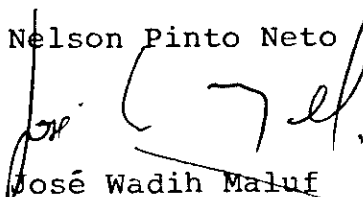
Tese de Mestrado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



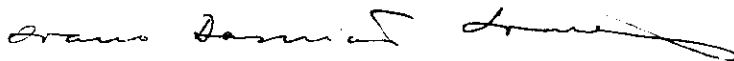
Mário Novello - Presidente



Nelson Pinto Neto (Co-orientador)



José Wadih Maluf



Ivano Damião Soares

Rio de Janeiro, 15 de março de 1991