

HENRIQUE PEREIRA DE OLIVEIRA

"FLUIDOS COM SPIN CLÁSSICO EM RELATIVIDADE GERAL:  
FORMULAÇÃO VARIACIONAL, ASPECTOS TERMODINÂMICOS E  
MODELOS COSMOLÓGICOS"

TESE  
DE  
DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS/CNPq

Rio de Janeiro, 1991

FLUIDOS COM SPIN CLASSICO EM  
RELATIVIDADE GERAL: FORMULACAO



1991/21

048

\*021398\*

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. SALIM pela orientação desta tese, pelas discussões sempre positivas em todos os aspectos, pela liberdade para que eu pudesse, na medida do possível, trilhar meus próprios caminhos e, antes de tudo, mais que um orientador, tive a ajuda de um amigo.
- Ao Prof. NOVELLO pelas discussões e críticas a muitos tópicos deste trabalho, além do convívio recheado de bom humor.
- Ao MAURÍCIO, que além de grande colega de mesmo orientador, tive a satisfação de trocar idéias acerca deste trabalho.
- Aos amigos ARNALDO, SOARES, EDGAR, HILÁRIO, JÚLIO e MAURÍCIO pelo estímulo, apoio e divertida convivência, bem como aos colegas e pesquisadores do CBPF, que proporcionaram excelente ambiente de trabalho.
- Ao MANNY pela amizade, ajuda em alguns momentos difíceis e pelas discussões que certamente nos auxiliarão a ampliar nossos horizontes.
- À Myriam, pelo carinho e esmero com que trata não só a mim, mas a todos os alunos da Pós-Graduação, além da paciência do decifrar de meus manuscritos que resultaram neste excelente trabalho de datilografia.
- Aos meus pais que proporcionaram condições para que eu chegasse até aqui.

- A todos vocês que dentro de um conceito objetivo não conheço e não vejo, mas cuja presença sinto e que tem me auxiliado durante muito tempo.
  
- Ao Programa de Capacitação Acadêmica da UERJ.
  
- Ao CNPq pela bolsa concedida.

## DEDICATÓRIA

*A todos que, de um modo direto e/ou indireto,  
contribuíram para a realização deste trabalho.*

"O diâmetro do Aleph seria de dois ou três centímetros,  
mas o espaço cósmico estava ali, sem diminuição de tamanho"

O Aleph, Jorge L. Borges

## ABSTRACT

In this work we study thermodynamical configurations of equilibrium and non-equilibrium spinning fluids interacting with the gravitational field.

We propose in the first chapter a lagrangean for spinning fluids in general relativity and in thermodynamical equilibrium. We deduce, besides the conservation law of spin angular momentum, the symmetric energy-momentum tensor for this fluid.

In the second chapter we present the phenomenological theory for irreversible processes in first order (local equilibrium hypothesis) for spinning fluids. As a next step we develop the extended or causal version for this theory. New phenomenological equations are deduced and some applications like the determination of propagation velocity of thermal and spin waves, and the calculus of equilibrium fluctuations of dissipative fluxes are performed. We exhibit the contribution of gravitational field via curvature tensor in the entropy production.

Finally, in the third chapter we study the influence of spin in the evolution of some cosmological models. We consider homogeneous and isotropic, anisotropic and rotating universes.

## RESUMO

Neste trabalho procuramos descrever fluidos dotados de momento angular de spin em interação com o campo gravitacional, onde abordamos as configurações de equilíbrio e não equilíbrio termodinâmico.

No capítulo I, propomos uma lagrangeana para fluidos com spin em relatividade geral que encontram-se em equilíbrio termodinâmico. Obtivemos, além da lei de conservação do momento angular de spin, o tensor momento-energia simétrico para esse fluido.

Em seguida, no capítulo 2, após apresentar a teoria fenomenológica de processos irreversíveis em primeira ordem para fluidos com spin, desenvolvemos a versão estendida ou causal da termodinâmica desses fluidos. Deduzimos as novas equações fenomenológicas e fazemos algumas aplicações como o cálculo da velocidade de ondas térmicas e de spin e o cálculo das flutuações dos fluxos dissipativos em torno do estado de equilíbrio. Por fim, mostramos como o campo gravitacional pode, via tensor de curvatura, contribuir para a produção de entropia.

No terceiro e último capítulo, investigamos a influência do spin na evolução de alguns modelos cosmológicos. Estudamos, então, universos homogêneos e isotrópicos, anisotrópicos e universos com rotação.

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS .....	ii
RESUMO .....	iv
ABSTRACT .....	v
SUMÁRIO .....	vi
CONVENÇÕES .....	viii
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1 - Fluidos Relativistas com Spin em Equilíbrio Termodinâmico: Formulação Variacional .....	10
1.1 - Fluidos Relativistas com Microestrutura Rígida .....	11
1.1.1 - Movimento das Tétradas .....	17
1.1.2 - Introdução do Spin .....	22
1.1.3 - Microestrutura Rígida .....	25
1.2 - Formulação Variacional .....	27
1.3 - Equações do Campo Gravitacional. Tensor momento-energia .....	35
CAPÍTULO 2 - Fluidos Relativistas com Spin fora do Equilíbrio Termodinâmico: Teoria Fenomenológica .....	41
2.1 - Termodinâmica de Processos Irreversíveis para Fluidos com Spin I: Regime Quasi-Estacionário .....	44
2.2 - Termodinâmica de Processos Irreversíveis para Fluidos com Spin II: Teoria Causal .....	66
2.3 - Propagação das Ondas Térmicas e de Spin .....	82
2.4 - Flutuações dos Fluxos Dissipativos em torno do Estado de Equilíbrio .....	88
2.5 - Contribuição do Campo Gravitacional na Produção de Entropia .....	97
2.5.1 - Equações Fenomenológicas I: Processos Quasi-Estacionários .....	203
2.5.2 - Equações Fenomenológicas II: Processos Não-Estacionários .....	108



CAPÍTULO 3 - Modelos Cosmológicos para Fluidos com Spin .....	111
3.1 - Modelos Homogêneos e Isotrópicos .....	114
3.1.1 - Modelos com Seção Espacial Plana ( $k = 0$ ) ....	118
3.1.2 - Modelos com Seção Espacial Aberta e Fechada .	124
3.1.3 - Influência da Constante Cosmológica .....	132
3.1.4 - Tetradas Girantes nos Modelos Homogêneos e Isotrópicos .....	134
3.2 - Modelos Anisotrópicos .....	140
3.2.1 - Análise do Sistema Dinâmico .....	144
3.2.2 - Análise das Curvas .....	149
3.3.3 - Observações Finais .....	158
3.3 - Modelos com Rotação .....	161
3.3.1 - Sobre a Violação da Causalidade e Considera- ções Finais .....	169
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....	172
Apêndice A .....	178
Apêndice B .....	191
Apêndice C .....	211
Apêndice D .....	225
Apêndice E .....	233
REFERÊNCIAS .....	243

## CONVENÇÕES

Os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3.

A métrica do espaço-tempo,  $g_{\alpha\beta}$ , tem assinatura -2, e a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é dada por:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

O campo de velocidade hidrodinâmico,  $U^\alpha(x)$ , é definido por:

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio. Esse quadrivetor tem módulo constante:

$$g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = c^2$$

onde  $c$  é a velocidade da luz.

Derivada covariante de um campo tensorial qualquer:

$$\nabla_\mu A^\alpha = \partial_\mu A^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A^\nu$$

onde  $\partial_\mu A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu}$  e  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$  é o símbolo de Christoffel.

Tensores de Levi-Civita  $\eta^{\alpha\beta\mu\nu}$  e  $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ .

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Propriedades:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{se } \alpha\beta\mu\nu \text{ é uma permutação par de } 0,1,2,3 \\ -1 & \text{se } \alpha\beta\mu\nu \text{ é uma permutação ímpar de } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{para qualquer outro caso} \end{cases}$$

Os valores das componentes de  $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  seguem a mesma regra.

$$\frac{1}{0!} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\tau\gamma\lambda\sigma} = -\delta_{\tau\gamma\lambda\sigma}^{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$\frac{1}{1!} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\gamma\lambda\sigma} = -\delta_{\gamma\lambda\sigma}^{\beta\mu\nu}$$

$$\frac{1}{2!} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\beta\lambda\sigma} = -\delta_{\lambda\sigma}^{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{3!} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\beta\mu\sigma} = -\delta_{\sigma}^{\nu}$$

$$\frac{1}{4!} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} = -1$$

$$\text{onde } \delta_{\lambda\sigma}^{\beta\mu} = \begin{vmatrix} \delta_{\lambda}^{\beta} & \delta_{\lambda}^{\mu} \\ \delta_{\sigma}^{\beta} & \delta_{\sigma}^{\mu} \end{vmatrix} ; \quad \delta_{\gamma\lambda\sigma}^{\beta\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\gamma}^{\beta} & \delta_{\gamma}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\nu} \\ \delta_{\lambda}^{\beta} & \delta_{\lambda}^{\mu} & \delta_{\lambda}^{\nu} \\ \delta_{\sigma}^{\beta} & \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\sigma}^{\nu} \end{vmatrix} \text{ e assim por}$$

diante.

Simetrização e antissimetrização de índices:

$$A^{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2} (A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha})$$

$$A^{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2} (A^{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha})$$

$$A^{\alpha\beta}{}_{\mu} = \frac{1}{2} (A^{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} A^{\mu}{}_{\mu})$$

sendo  $A^{\mu}{}_{\mu} = g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}$

Equações de Einstein:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - \Lambda g_{\alpha\beta} = -\chi T_{\alpha\beta}$$

$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ , sendo G a constante gravitacional universal,  $\Lambda$  é a constante cosmológica,  $R_{\alpha\beta}$  o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura e  $T_{\alpha\beta}$  é o tensor momento energia:

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\beta}$$

$$R = g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\mu}$$

onde  $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$  é o tensor curvatura, definido por:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - \partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}$$

Propriedades:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = -R_{\mu\alpha\beta\nu} = -R_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\beta\nu\alpha\mu}$$

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\nu\mu\beta} + R_{\alpha\beta\nu\mu} = 0$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$$

## INTRODUÇÃO

Em 1909 os irmãos Cosserat<sup>[1]</sup> publicaram uma importante monografia que lançou bases para a descrição da classe de meios contínuos conhecidos por meios polares ou com spin clássico. A idéia básica, utilizada até hoje, está em associar a cada elemento de volume do meio, um conjunto de três vetores rígidos e linearmente independentes, denominados de *diretores*, que poderiam girar independentemente dos deslocamentos translacionais dos elementos de volume (\*). Os elementos de volume ou partículas do meio são entendidos como pequenas réplicas de corpos rígidos. Do ponto de vista cinemático, esta formulação, bem como suas generalizações, difere daquela utilizada para meios contínuos não polares pela introdução de um novo campo de velocidade angular distinto da vorticidade, este último associado ao campo hidrodinâmico de velocidades. Já o campo de velocidade angular anteriormente mencionado é oriundo da rotação intrínseca da tríada conectada às partículas do meio.

O trabalho dos irmãos Cosserat ficou praticamente abandonado por quase cinquenta anos. Nesse interim, destacamos somente M. Born<sup>[3]</sup> que, em 1920, introduziu a noção de fluidos polares. Neste trabalho ele observa que esse fluido, ao adquirir vorticidade, encontra uma resistência que é devida

---

(\*) A rigor essa idéia foi originalmente sugerida por Duhem<sup>[2]</sup>.

ao spin, se tanto a vorticidade quanto o spin não estiverem sincronizados. Ainda nesse trabalho, ele mostrou que essa resistência é função da diferença entre a vorticidade e a velocidade angular de spin, ou mais especificamente de  $\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\Omega}$ , sendo  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , a velocidade hidrodinâmica e  $\vec{\Omega}(\vec{r}, t)$ , a velocidade angular de spin. Born sugeriu a parte antissimétrica do tensor das tensões para descrever apropriadamente a referida resistência. Posteriormente, tal efeito ficou conhecido por viscosidade rotacional.

Somente em 1952, Grad<sup>[4]</sup>, em consequência de um estudo em mecânica estatística, foi motivado a desenvolver a teoria fenomenológica para fluidos com spin. Ele introduziu o tensor das tensões-torques, que nada mais é que a difusão do momento angular de spin. É importante ressaltar que este tensor é análogo ao tensor das tensões, uma vez que este último representa a difusão de momento linear. Grad obteve a produção de entropia e mostrou que as partes irreduzíveis do tensor das tensões-torques são fluxos dissipativos associados aos gradientes do campo de velocidade angular de spin. Isso ocorre do mesmo modo que as partes irreduzíveis do tensor das tensões estão associadas aos gradientes do campo de velocidade hidrodinâmico. Neste trabalho foi também exibida a relação entre a parte antissimétrica do tensor das tensões com  $\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\Omega}$  que, como já frizamos, é denominada de viscosidade rotacional. Do ponto de vista termodinâmico, a viscosidade rotacional está associada à transferência irreversível entre o momento angular de spin e o momento angular externo. Investigações posteriores de processos dissipativos em fluidos com spin tiveram a participação de Baranowski e Romotowski<sup>[5]</sup>, que obtiveram as

equações fenomenológicas e mostraram o acoplamento entre o fluxo de calor e um dos fluxos dissipativos oriundos do spin. Esses mesmos autores também estendem o trabalho para englobar um fluido com várias componentes químicas. Snider e Lewchuk<sup>[6]</sup> consideram um fluido anisotrópico com spin onde não é mais válido o princípio de Curie<sup>[7]</sup>, e Meixner<sup>[8]</sup> estuda processos dissipativos de um fluido com spin em interação com o campo eletromagnético.

Nos trabalhos anteriormente citados, a termodinâmica de processos irreversíveis para fluidos com spin utilizada baseou-se na validade da hipótese do equilíbrio local<sup>[7,9]</sup>, onde a equação de Gibbs estabelecida para os estados de equilíbrio termodinâmico é mantida inalterada. Nessa formulação, o momento angular de spin não é encarado como sendo uma variável termodinâmica e, portanto, não altera a equação de Gibbs.

Após o trabalho de Grad uma série de contribuições generalizaram o trabalho original dos irmãos Cosserat. Destacamos os trabalhos de Eriksem e Truesdell<sup>[10]</sup>, Eringen e Suhubi<sup>[11]</sup> e Eringen<sup>[12]</sup> na construção da teoria dos meios micromórficos e de seu posterior desenvolvimento. Os meios contínuos micromórficos são caracterizados pela microestrutura deformável, ou seja, cada elemento de volume pode deformar-se. Os trabalhos seguiram tanto por uma abordagem variacional<sup>[13]</sup> quanto fenomenológica<sup>[14]</sup> nos domínios newtonianos e relativista (especial), bem como incluíram a interação com campos eletromagnéticos<sup>[15]</sup>. De um modo geral, a teoria de meios polares e micromórficos é aplicada para a descrição de substâncias tais como cristais líquidos, partículas carregadas, etc. Essas teorias po-



dem também ser utilizadas para descrever o fluido cósmico (\*), se considerarmos que as partículas do mesmo são galáxias, em sua maioria com spin não nulo, ou mesmo aglomerados de galáxias que possuem momento angular de spin.

Seguindo uma motivação distinta, Weyssenhoff e Raabe<sup>[16]</sup> apresentaram em 1947 uma teoria relativista (especial) para a descrição de fluidos e partículas com spin. Essencialmente eles propõem um método alternativo para deduzir as equações de movimento de partículas dotadas de spin(\*\*) ao estabelecer as leis dinâmicas de um fluido perfeito com spin clássico, e em seguida fazer a integração dessas equações num elemento de volume infinitesimal. Por um fluido com spin é entendido um fluido onde cada elemento de volume possui, além de energia e momento linear, momento angular que, tal qual energia e momento, é proporcional ao elemento de volume. Esses autores mostraram ainda neste trabalho que, ao contrário de fluidos sem spin, o tensor momento-energia tem de necessariamente possuir uma parte antissimétrica diferente de zero.

Mais tarde, em 1960, Halbwachs<sup>[20]</sup> publica o livro intitulado "Théorie Relativiste des Fluides a Spin", onde é apresentado, ainda no âmbito da relatividade especial, uma

---

(\*) Em cosmologia, devido a magnitude das distâncias envolvidas, o conteúdo material do universo observável é descrito de modo contínuo. Para o chamado modelo padrão<sup>[34]</sup>, o fluido cósmico é considerado um gás em equilíbrio termodinâmico. Temos, então, como generalização mais imediata deste fluido, aquele que possui uma propriedade adicional que é o momento angular de spin.

(\*\*) A determinação das equações de movimento para partículas com spin é encontrada nos trabalhos de Mathisson<sup>[17]</sup> e Lubanski<sup>[18]</sup>. Destacamos também Frenkel que, em 1926, deduz as equações de movimento de um elétron com spin num campo eletromagnético.

lagrangeana que descreve o fluido com spin anteriormente estudado por Weyssenhoff. Na construção dessa lagrangeana, é introduzida uma base ortogonal de quatro vetores unitários - a base de tétradas - um do tipo tempo e os outros três do tipo espaço, que é associado a cada elemento infinitesimal do fluido. A velocidade angular de spin é, desse modo, descrita pela rotação intrínseca dessa base de vetores. Note que essa construção nada mais é que a generalização relativista dos diretores introduzidos pelos irmãos Cosserat. Devemos ressaltar somente que Halbwachs pertencia a um grupo de físicos<sup>(\*)</sup> que na época trabalhavam na interpretação hidrodinâmica da função de onda da mecânica quântica, também conhecida como "re-interpretação causal da mecânica quântica"<sup>(\*\*)</sup>. A rigor eles consideravam o fluido quântico como sendo um campo de microscópicos piões girantes (*spinning tops*), que numa escala macroscópica eram descritos de modo contínuo.

Em 1982, Ray e Smalley<sup>[24]</sup>(RS) estenderam a formulação de Halbwachs para a relatividade geral. Adicionando à lagrangeana do fluido, a lagrangeana do campo gravitacional, foi possível deduzir as equações de Einstein. Como já havíamos mencionado anteriormente, o tensor momento-energia que representa um fluido com spin intrínseco é assimétrico, mas ocorre que as equações do campo gravitacional exigem um tensor momento-energia que seja necessariamente simétrico. Ray e Smalley obtiveram um tensor simétrico ao variar convenientemente a lagrangeana

---

(\*) Também citamos Aymart<sup>[21]</sup>, Unal e Vigier<sup>[22]</sup>, Takabayasi<sup>[23]</sup>.

(\*\*) De Broglie.

na do fluido com relação ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Posteriormente, esses autores introduziram o tensor momento angular de spin como sendo uma variável termodinâmica. Em consequência disso, termos adicionais apareceram no tensor momento-energia bem como determinadas relações envolvendo o tensor de spin, denominadas de relações de consistência. Essas relações devem necessariamente ser satisfeitas, apesar da falta de um sentido físico para as mesmas [25].

Outros trabalhos sobre formulações variacionais para fluidos perfeitos com spin surgiram desde então, tanto em relatividade geral, quanto na teoria de Einstein-Cartan. Entre esses gostaríamos de citar R. de Rittis et al [26] que utilizaram a representação potencial da velocidade; A. Teixeira [27] introduz um termo adicional na lagrangeana e o interpreta como sendo a energia potencial associada ao spin e Yu. N. Obhukov e W.A. Korotky (OK) [28] que propõem uma teoria por eles qualificada como a verdadeira contraparte variacional para a descrição axiomática de Weyssénhoff. Em linhas gerais, a lagrangeana de OK difere daquela de RS em alguns aspectos que passamos a descrever: o tensor de spin e as tétradas são variadas independentemente, ao contrário de RS onde o tensor de spin é dado em função das tétradas; além disso, o spin é arbitrariamente orientado com relação à base de tétradas, o que não ocorre na formulação de RS. No trabalho de OK, a introdução do tensor de spin projetado na base de tétradas como variável termodinâmica não fornece relações de vínculo adicionais.

Neste ponto é que inserimos uma das contribuições do presente trabalho. Propomos uma lagrangeana [29] para fluidos perfeitos com spin em relatividade geral, que apesar de sua

estruturará diferir muito pouco das lagrangeanas de RS e OK, possui características distintas dessas últimas que serão discutidas a seguir. Como já estabelecido, lançamos mão de uma base de tétradas associada a cada elemento infinitesimal de volume dotado de momento angular de spin. Utilizando a idéia introduzida pelos irmãos Cosserat, consideramos cada elemento de volume como pequenas réplicas de corpos rígidos com uma inércia de rotação. Tal propriedade é descrita macroscopicamente pelo tensor espacial e simétrico  $j^{\alpha\beta}$  [29], que generaliza o conceito de momento de inércia. Nesta formulação não fazemos variações com relação ao tensor de spin, uma vez que o mesmo é expresso em função das tétradas, além do que o spin é arbitrariamente orientado com relação aos vetores espaciais da base. Seguindo a termodinâmica não-relativista de fluidos com spin já estabelecida, não consideramos o spin como uma variável termodinâmica.

O tensor momento-energia obtido apresenta, como distinção básica dos mencionados anteriormente, o termo adicional de energia cinética de spin. Destacamos o fato de que este tensor momento-energia é o mesmo estabelecido por considerações fenomenológicas, como ficará claro no decorrer deste trabalho.

A teoria que desenvolvemos é aplicável somente nas situações de equilíbrio termodinâmico. O próximo passo é estender a teoria obtida de modo a englobar os processos irreversíveis para o fluido relativista com spin. Para isso dispomos da termodinâmica de processos irreversíveis de primeira ordem, onde é válida a hipótese do equilíbrio local, e da termodinâmica de processos irreversíveis estendida ou causal [31]. A

termodinâmica em primeira ordem, aplicável somente nas situações quasi-estacionárias<sup>(\*)</sup>, já é conhecida<sup>[30]</sup>. Já o mesmo não ocorre para a versão causal da termodinâmica para fluidos com spin. Essa, portanto, é a teoria que desenvolvemos e que, como veremos, vale nas situações não-estacionárias. Destacamos que ao considerarmos o fluido com spin o responsável pela dinâmica do espaço-tempo, encontramos uma contribuição do campo gravitacional via tensor de curvatura para a produção de entropia. Tal contribuição é inteiramente inédita na literatura.

O presente trabalho é dividido em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos com detalhes a formulação variacional para fluidos perfeitos com spin.

O segundo capítulo é composto de quatro partes. Na primeira, apresentamos a termodinâmica de processos irreversíveis em primeira ordem para fluidos com spin no espaço-tempo curvo, onde basicamente seguimos Maugin<sup>[30]</sup>. Esta é a versão relativista dos trabalhos de Grad e Baronowski e Romotowski. Na segunda parte propomos a versão causal da termodinâmica de fluidos com spin, onde incluímos na equação de Gibbs todos os fluxos dissipativos. Deduzimos as equações de evolução para os fluxos dissipativos que preveem propagação de ondas térmicas e viscosas com velocidade finita. Na terceira parte realizamos algumas aplicações da teoria causal tais como o cálculo da velocidade de propagação das ondas térmicas e de spin, e o cálculo das flutuações dos fluxos dissipativos em torno do estado

---

(\*) Os fenômenos quasi-estacionários são aqueles que variam lentamente nas escalas espaço-temporais caracterizadas pelo livre caminho médio e tempo médio de colisão<sup>[51]</sup> do fluido.

de equilíbrio. Na quarta e última parte, exigindo que o fluido dissipativo com spin seja fonte das equações de campo, tivemos que simetrizar o tensor momento-energia fenomenológico utilizando o processo de simetrização de Belinfante-Rosenfeld<sup>[32, 33]</sup>. A primeira lei da termodinâmica é alterada por um termo que envolve o acoplamento entre o tensor de curvatura e o tensor das tensões-torques, que é inédito. Em consequência disso, a produção da entropia também é alterada por esse termo extra. As equações fenomenológicas, cuja obtenção depende basicamente da produção de entropia, serão modificadas por esse termo extra.

No terceiro capítulo investigamos o papel do spin de um fluido cosmológico em equilíbrio termodinâmico, tal qual descrito no capítulo 1, na dinâmica de modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos, anisotrópicos e modelos com rotação.

# CAPÍTULO 1

## Fluidos Relativistas com Spin em Equilíbrio

### Termodinâmico: Formulação Variacional

Neste capítulo propomos uma lagrangeana para fluidos com spin onde as partículas do fluido são consideradas pequenas réplicas de corpos rígidos. O capítulo é dividido como mostrado a seguir.

Na seção 1.1 introduzimos as quantidades básicas que descrevem um fluido com spin, tais como velocidade angular de spin, tensor momento angular de spin, bem como a condição de rigidez de cada partícula do fluido. Na seção 1.2 postulamos uma lagrangeana para esse fluido, e realizamos todos os cálculos decorrentes da variação integral de ação com respeito às variáveis básicas escolhidas. Por fim, na seção 1.3, adicionamos à lagrangeana do fluido a lagrangeana de Einstein. Desse modo, obtivemos as equações do campo gravitacional e, conseqüentemente, o tensor momento-energia simétrico para o fluido com spin.

## 1.1 - Fluidos Relativistas com Microestrutura Rígida

O movimento de um meio contínuo qualquer (fluidos, sólidos elásticos, dielétricos, etc.) é especificado quando fornecemos as seguintes relações:

$$x^\mu = x^\mu(\tau, X^k) \quad (1.1)$$

Nesta expressão,  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) são as coordenadas espaço-temporais,  $\tau$  é o tempo próprio medido ao longo das linhas de universo dos elementos de volume <sup>(\*)</sup>,  $X^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) são as coordenadas lagrangeanas que especificam a posição de cada elemento de volume no estado de referência inicial. Dado que a eq. (1.1) possui inversa, podemos escrever alternativamente:

$$X^k = X^k(X^\mu) \quad (1.2)$$

$$\tau = \tau(X^\mu) \quad (1.3)$$

A quadrivelocidade hidrodinâmica de cada partícula ou elemento de volume do meio contínuo é definida por:

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (1.4)$$

A derivada medida ao longo da linha de universo das partículas de uma quantidade tensorial qualquer  $A^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots}$

---

(\*) Devemos ressaltar que na descrição do contínuo, cada elemento de volume é infinitesimal em vista das escalas macroscópicas de observação, mas suficientemente grande de modo a ser considerado um subsistema onde são atribuídos valores locais de energia, momento, etc. Ao longo do texto utilizamos por vezes a denominação partícula do meio que tem o mesmo significado de elemento de volume.



é dada por:

$$\dot{A}^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots} = U^\tau \nabla_\tau A^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots} \quad (1.5)$$

Uma propriedade importante a ser satisfeita pelas coordenadas  $X^k$  é:

$$\dot{X}^k = U^\alpha \partial_\alpha X^k = 0 \quad (1.6)$$

Isto significa que as coordenadas  $X^k$  e  $\tau$  são independentes. Esta relação é também conhecida como sendo a conservação da identidade das partículas do meio, ou seja, as coordenadas que caracterizam as partículas não mudam no decorrer da evolução do meio contínuo.

O operador projeção no tri-espaço perpendicular a  $U^\mu$  é definido por:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{U_\alpha U_\beta}{c^2} \quad (1.7)$$

onde  $g_{\alpha\beta}$  é o tensor métrico e  $c$  a velocidade da luz. Esse operador satisfaz as seguintes propriedades:

$$h_{\alpha\mu} h^\mu_\beta = h_{\alpha\beta}; \quad h^{\alpha\beta} U_\alpha = 0; \quad g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 3 \quad (1.8)$$

O tensor  $h_{\alpha\beta}$  permite-nos decompor qualquer outro tensor em componentes temporais, que são paralelos a  $U^\mu$ , e componentes espaciais, que estão situados no tri-espaço perpendicular a  $U^\alpha$  (vide fig. 1.1).

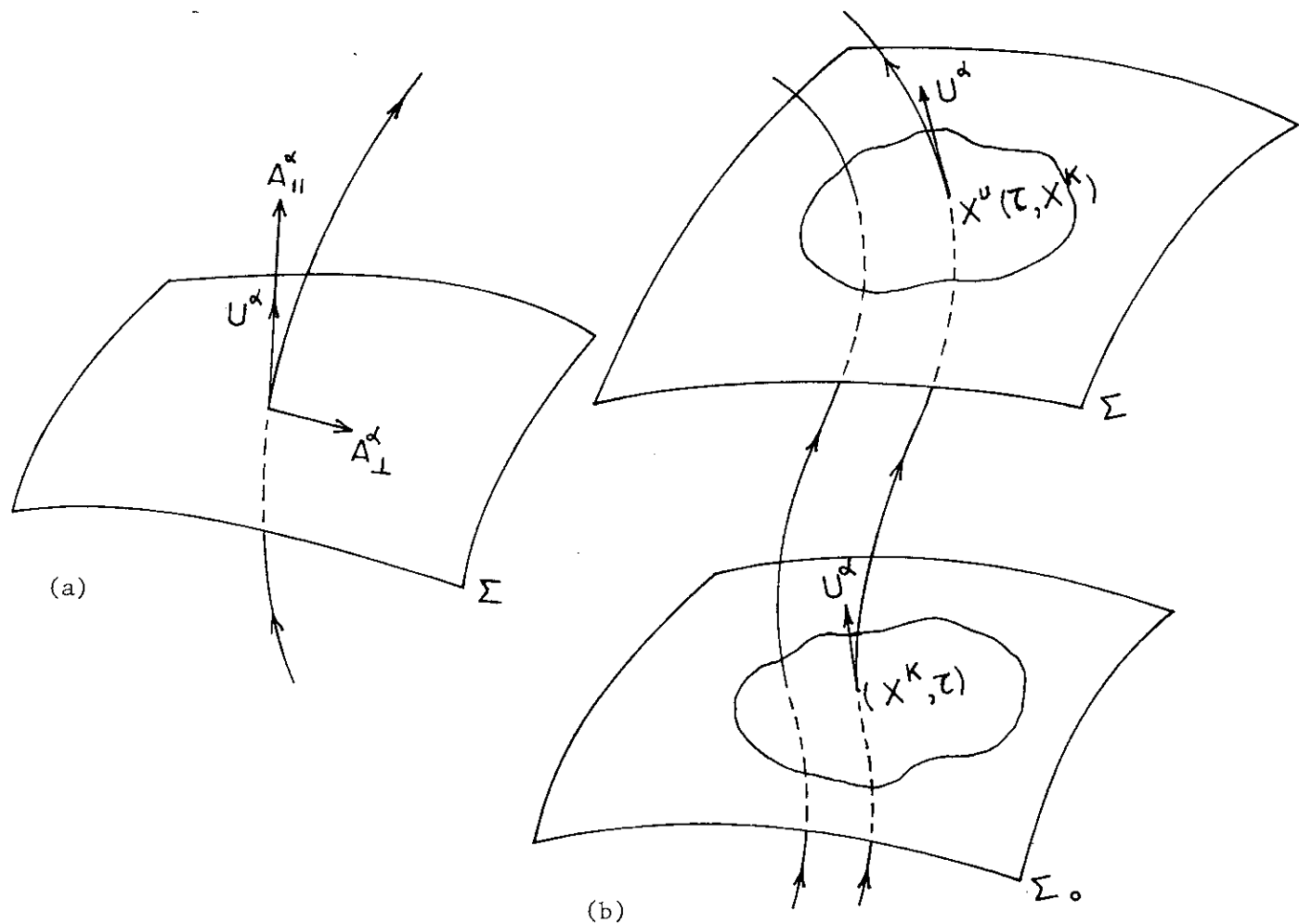


Fig. 1.1 - (a) Decomposição de um tensor  $A^\mu$  nas direções perpendicular e paralelo a  $U^\alpha$ .  
 (b) Evolução do meio contínuo. As novas coordenadas  $x^\mu$  serão funções das coordenadas lagrangeanas  $X^k$  e do tempo próprio  $\tau$ .

Informações importantes acerca da cinemática do meio contínuo decorrem da decomposição do gradiente do campo de velocidade  $U^\alpha$  em suas partes irreduzíveis:

$$\nabla_\beta U_\alpha = \frac{\dot{U}_\alpha U_\beta}{c^2} + \frac{\theta h_{\alpha\beta}}{3} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

Nesta expressão,  $\dot{U}^\alpha = U^\mu \nabla_\mu U^\alpha$  é a quadri-aceleração,  $\theta$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\omega_{\alpha\beta}$  são os parâmetros cinemáticos conhecidos como expansão, cisalhamento e vorticidade. Os três últimos são definidos a

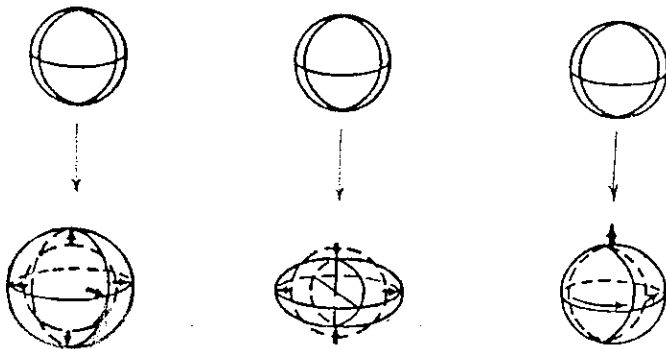
seguir:

$$\theta \equiv h^{\alpha\beta} (\nabla_{\beta} U_{\alpha}) = \nabla_{\alpha} U^{\alpha} \quad (1.10a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv h^{\mu}{}_{\alpha} h^{\nu}{}_{\beta} \nabla_{\nu} U_{\mu} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta \quad (1.10b)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv h^{\mu}{}_{\alpha} h^{\nu}{}_{\beta} [\nabla_{\nu} U_{\mu}] \quad (1.10c)$$

A interpretação desses objetos pode ser encontrada com detalhes nas refs. [34,35]. De modo sucinto, se considerarmos uma esfera constituída de partículas do meio, a expansão  $\theta$  atuando isoladamente transforma a esfera noutra de volume diferente; a ação isolada do cisalhamento  $\sigma_{\alpha\beta}$  distorce a esfera mantendo constante seu volume e a ação isolada da vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$  resulta na rotação rígida da esfera com relação a um dado eixo fixo. A aceleração  $\dot{U}^{\alpha}$  da partícula é interpretada de modo usual através de medidas de acelerômetros, enquanto que a interpretação dos parâmetros  $\theta$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\omega_{\alpha\beta}$  surge naturalmente quando estabelecemos a expressão da derivada de Lie com relação a  $U^{\mu}$  do quadrivetor que indica a posição relativa<sup>[34]</sup> das partículas. Na figura (1.2), mostramos esquematicamente o quadrivetor posição relativa e a ação dos parâmetros cinemáticos  $\theta$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\omega_{\alpha\beta}$ .



(a)

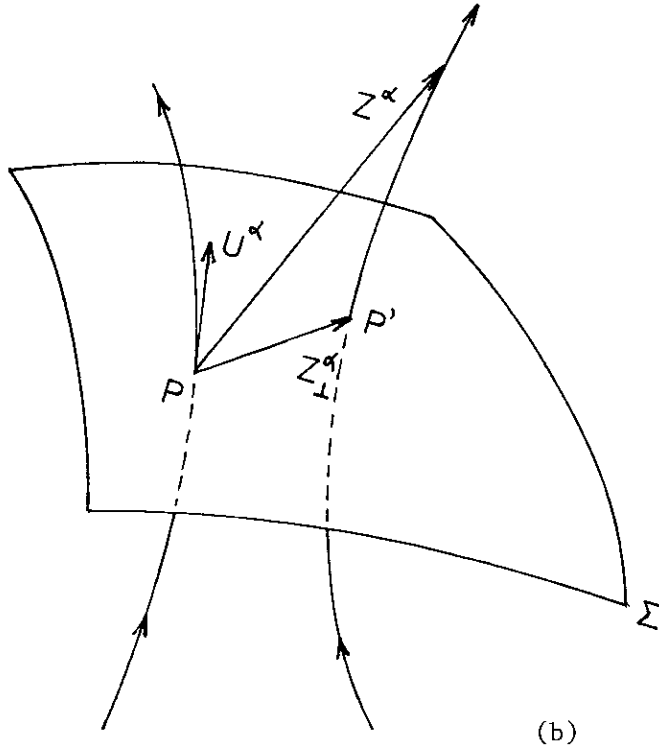


Fig. 1.2 - (a) Efeito da expansão, do cisalhamento e da vorticidade ou rotação numa esfera constituída de partículas do fluido.

(b) Vetor conexão  $Z^\alpha$  e sua rojeção em  $\Sigma$ .

O quadrivetor vorticidade  $\omega^\alpha$  é definido por:

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2c} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\alpha\mu} U_\nu \quad (1.11)$$

Mostramos no apêndice A que as componentes desse quadrivetor, quando calculado no limite newtoniano, coincidem com as do usual vetor vorticidade, isto é,  $\omega^\alpha \rightarrow (0, \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v})$ .

Quando o meio contínuo possuir estrutura interna no sentido de exibir momento angular interno, ou de spin não nulo, devemos lançar mão de grandezas convenientes para a descrição desses novos graus de liberdade. Seguindo Maugin<sup>[13,30]</sup>, vamos considerar que a cada ponto ou partícula do meio contínuo temos associado uma base formada por quatro vetores de módulo unitário e perpendiculares entre si (fig.1.3)..

Essa base, denominada *base de tetradas*, é indicada por  $\{e^{(A)}_{\alpha}\}$ , onde  $A = 0, 1, 2, 3$  indica o vetor e  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  indica a componente. Essa descrição resulta da generalização da idéia sugerida inicialmente por Duhem<sup>[2]</sup> e utilizada pelos irmãos Cosserat<sup>[1]</sup>. Tal idéia consiste em associar um dado número de direções (chamados mais tarde de diretores) que poderiam girar independente dos deslocamentos das partículas do meio.

A relação de ortonormalidade é escrita como:

$$g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} = \eta_{AB} \quad (1.12)$$

onde  $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Os índices de coordenadas  $\alpha, \beta, \mu \dots$  são abaixados e levantados utilizando o tensor métrico como usualmente é feito, enquanto que os índices da tetradas  $A, B, C, \dots$  são levantados e abaixados com a métrica de Minkowski  $\eta_{AB}$ . Em consequência disso, temos:

$$\eta_{AB} e^{(A)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

Tomemos o quadrivetor  $e^{(0)}_{\alpha}$  e façamos a seguinte escolha:

$$e^{(0)}_{\mu} = \frac{U_{\mu}}{c} \quad (1.14)$$

Naturalmente para os demais quadrivetores, segue:

$$e^{(k)}_{\alpha} U^{\alpha} = 0 \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.15)$$

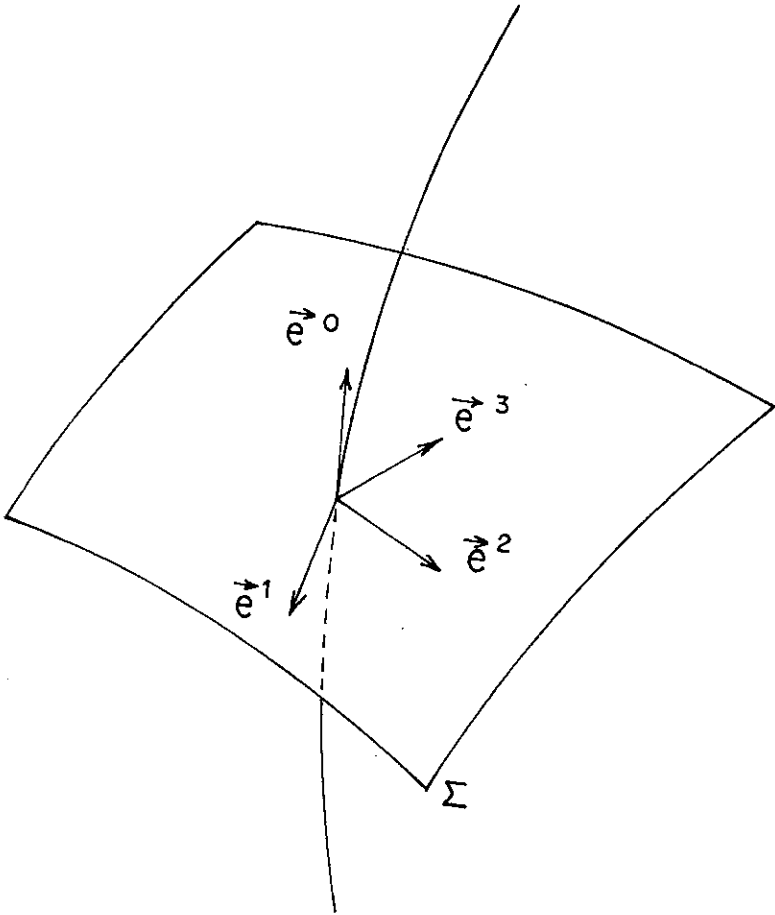


Fig. 1.3 - Base tetrádica  $\{e_{\alpha}^{(A)}\}$  associada a partícula estruturada do fluido.

### 1.1.1 - Movimento das Têtradas

Ao associarmos uma base de têtradas a cada partícula do meio, temos o que chamamos de *partícula estruturada*<sup>[13]</sup>. Assim, além do usual campo de velocidades  $U^{\alpha}(x)$ , necessitamos, para a descrição do movimento do meio, de outro campo que represente a rotação intrínseca das partículas. Tal rotação significa rotação da base tetrádica associada a cada partícula que é distinta daquela usualmente devido a vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$ .

Introduzamos o tensor  $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$ , dado por:

$$\dot{e}_{\alpha}^{(A)} e_{\beta(A)} = \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} \quad (1.16)$$

ou, de outro modo,

$$\dot{e}_{\alpha}^{(A)} = \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} e^{\beta(A)} \quad (1.17)$$

Tendo em vista (1.13), fica claro que  $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = -\tilde{\Omega}_{\beta\alpha}$ . A equação (1.17) é interpretada como sendo a equação de evolução da base tetrádica, que é resultante de uma transformação infinitesimal de Lorentz cujo gerador é exatamente o tensor  $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$ . É importante salientar que a forma de (1.17) é válida tanto no espaço-tempo plano como curvo, uma vez que a "curvatura pode somente ser sentida sobre distâncias finitas, e não sobre distâncias infinitesimais que são envolvidas na taxa temporal, em primeira ordem, de um quadrivetor" [37]. Esse resultado é decorrência direta do princípio de equivalência.

A decomposição de  $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$  relativamente ao campo de velocidades  $U^{\alpha}(x)$  é dado por:

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{c}(A_{\alpha}U_{\beta} - A_{\beta}U_{\alpha}) \quad (1.18)$$

onde  $\Omega_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \tilde{\Omega}_{\mu\nu}$  e  $A_{\alpha} = \frac{1}{c} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} U^{\beta}$ . Tendo em vista as equações (1.14) e (1.16), podemos escrever

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = \dot{e}^{(k)}_{[\alpha} e_{\beta]}(k) + \frac{\dot{U}_{[\alpha} U_{\beta]}}{c^2} \quad (1.19)$$

Igualando ambas as equações e isolando  $\Omega_{\alpha\beta}$ , vem:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \dot{e}^{(k)}_{[\alpha} e_{\beta]}(k) + \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{U}_{\alpha}}{2c} - A_{\alpha} \right) U_{\beta} - \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{U}_{\beta}}{2c} - A_{\beta} \right) U_{\alpha} \quad (1.20)$$

O quadrivetor  $A_{\alpha}$  deve ser escolhido de modo conveniente. Fazendo  $A=0$  na eq. (1.17) e utilizando a eq. (1.18), segue:

$$\begin{aligned} \dot{e}^{(0)}_{\alpha} &= \left[ \Omega_{\alpha\beta} + c^{-1} (A_{\alpha} U_{\beta} - A_{\beta} U_{\alpha}) \right] e^{\beta(0)} = c^{-1} A_{\alpha} U_{\beta} \frac{U^{\beta}}{c} = \\ &= A_{\alpha} \therefore A_{\alpha} = \frac{\dot{U}_{\alpha}}{c} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Substituindo (1.21) nas eqs. (1.18) e (1.20), obtemos as seguintes expressões que serão úteis para posterior desenvolvimento:

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + \frac{2}{c^2} \dot{U}_{[\alpha} U_{\beta]} \quad (1.22)$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \dot{e}^{(k)}_{[\alpha} e_{\beta]}(k) + \frac{1}{c^2} \dot{U}_{[\beta} U_{\alpha]} \quad (1.23)$$

Outra relação igualmente importante é mostrada a seguir:

$$\Omega_{ij} = e^{\alpha}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} \Omega_{\alpha\beta} = \dot{e}_{\mu}^{(j)} e^{\mu}_{(i)} \quad (1.24)$$

Para enriquecer a presente discussão, vamos calcular a derivada de Fermi<sup>[38]</sup> dos vetores da base de tétradas, que pode ser escrita como:

$$\frac{D_F e_{\alpha}^{(A)}}{Dt} = \dot{e}_{\alpha}^{(A)} + c^{-2} (U_{\alpha} \dot{U}_{\beta} - U_{\beta} \dot{U}_{\alpha}) e^{(A)\beta} \quad (1.25)$$



Para  $A = 0$  e  $A = k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , temos, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\frac{D_F e^{(0)}_{\alpha}}{D\tau} = 0 \quad (1.26a)$$

$$\frac{D_F e^{(k)}_{\alpha}}{D\tau} = \Omega_{\alpha\beta} e^{\beta(k)} \quad (1.26b)$$

Sendo  $e^{(0)}_{\alpha}$  num dado instante inicial dirigido na direção tangente às linhas de universo das partículas, ele sempre se manterá nesta direção pelo fato de ser Fermi-transportado ao longo das mesmas linhas de universo. Já em (1.26b) notamos que os quadrivetores espaciais  $e^{(k)}_{\alpha}$  possuem derivada de Fermi não nula, ou seja, não são Fermi-transportados. Este fato evidencia a rotação desses quadrivetores relativamente a direções especificadas por uma base tetrádica Fermi-transportada. Fisicamente tais direções são determinadas por giroscópios<sup>[37]</sup>. Daqui por diante vamos nos referir a base que é Fermi-transportada de base não-girante, enquanto que a outra, de base girante. Ainda de (1.26b) verifica-se que  $\Omega_{\alpha\beta}$  representa a velocidade angular da rotação das tétradas espaciais.

A maneira pela qual a base tetrádica girante,  $e^{(A)}_{\alpha}$ , e outra não girante,  $e'^{(A)}_{\alpha}$ , estão relacionadas a cada instante é dada por uma transformação de Lorentz, i.é.,

$$e^{(A)}_{\alpha} = \mathbb{L}^A_B e'^{(B)}_{\alpha} \quad (1.27)$$

onde  $\mathbb{L}^A_B$  é a matriz da transformação de Lorentz, que é gerada por  $\Omega_{\alpha\beta}$ . A seguinte condição deve ser observada:

$$e_{\alpha}^{(A)} = e'_{\alpha}{}^{(A)} = \frac{U_{\alpha}}{c} \quad (1.28)$$

que implica em:

$$\mathbb{L}^0_0 = 1 \quad , \quad \mathbb{L}^0_i = 0 \quad (1.29)$$

e então:

$$\mathbb{L}^A_B = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{L}^i_k \end{array} \right) \quad (1.30)$$

Como as relações de ortonormalidade são válidas tanto para  $e_{\alpha}^{(A)}$  como  $e'_{\alpha}{}^{(A)}$ , a matriz  $\mathbb{L}^A_B$  deve satisfazer as seguintes relações:

$$\eta_{EF} \mathbb{L}^E_A \mathbb{L}^F_B = \eta_{AB} \quad (1.31)$$

Para finalizar esta seção, vamos definir o quadrivetor  $\Omega_{\alpha}$  associado a  $\Omega_{\alpha\beta}$  por intermédio da seguinte expressão:

$$\Omega_{\alpha} \equiv \frac{1}{2c} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega_{\beta\mu} U_{\nu} \quad \left( \Omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \right) \quad (1.32)$$

É importante exibir também as expressões para  $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$  e  $\Omega_{\alpha}$  no referencial local de repouso:

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\dot{U}_i}{c} \\ \frac{\dot{U}_i}{c} & \Omega_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

$$\Omega_\alpha^* = (0, -\vec{\Omega}) \quad (1.34)$$

Nessas expressões,  $\Omega_{ij}$  é a velocidade angular tridimensional de rotação e  $\vec{\Omega}$  é o vetor axial associado a  $\Omega_{ij}$  através de:

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} \quad (1.35)$$

sendo  $\varepsilon_{ijk}$  o tensor de Levi-Civita tridimensional.

### 1.1.2 - Introdução do Spin

Vamos introduzir o quadrivetor axial  $S_\alpha$  que representa o momento angular de spin ou momento angular interno. Impomos que  $S_\alpha$  esteja completamente definido no espaço de repouso perpendicular a quadrivelocidade  $U^\alpha(x)$ , sendo, portanto, válida a seguinte relação:

$$S^\alpha U_\alpha = 0$$

que é também conhecida como condição de Frenkel<sup>[19]</sup>. Podemos as

sociar de modo único a  $S_\alpha$  o tensor  $S^{\alpha\beta}$ , igualmente espacial e antissimétrico, conhecido como tensor momento angular de spin, através de:

$$S^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2c} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} S_\mu U_\nu \left( S_\alpha = -\frac{1}{c} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\beta\mu} U^\nu \right) \quad (1.36)$$

A descrição do spin é estritamente clássica no sentido que, no modelo em questão, cada parte elementar ou partícula do fluido comporta-se como se fosse um corpo rígido infinitesimal dotado de inércia de rotação. Seguindo a teoria dos fluidos polares [13,15], a relação entre  $S^\alpha$  e  $\Omega_\beta$  é escrita como:

$$S^\alpha = J^{\alpha\beta} \Omega_\beta \quad (1.37)$$

Nesta expressão  $J^{\alpha\beta}$  é um tensor simétrico e completamente espacial que representa a inércia de rotação por partícula. Esse tensor é, na verdade, a generalização relativista do tensor de inércia. Note que a equação (1.37) é análoga àquelas encontradas nos textos de mecânica clássica. Esta equação pode ainda ser reescrita em termos de  $S^{\alpha\beta}$  e  $\Omega_{\alpha\beta}$  ao utilizarmos as equações (1.32) e (1.36), que após algum algebrismo, resulta em:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} J^\mu_{[\alpha\beta]\mu} \quad (1.38)$$

A energia cinética de rotação de cada partícula

do fluido é dada por:

$$e_{\text{spin}} = \frac{1}{2} J^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha} \Omega_{\beta} = \frac{1}{2} S^{\alpha} \Omega_{\alpha} \quad (1.39)$$

Devido as equações (1.32), (1.36) e (1.38), temos alternativa-mente a seguinte expressão:

$$e_{\text{spin}} = \frac{1}{2} J^{\mu}_{\alpha} \Omega_{\beta\mu} \Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \quad (1.40)$$

Será importante para desenvolvimentos posteriores exibir as expressões de  $J^{\alpha\beta}$ ,  $S^{\alpha}$  e  $S^{\alpha\beta}$  no referencial de repouso, que será feito a seguir:

$$J^{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & J_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

onde  $J_{ij}$  é o usual tensor de inércia. Para  $S^{\alpha}$ , obtemos que:

$$S^{\alpha} \stackrel{*}{=} (0, -\vec{\sigma}) \quad (1.42)$$

sendo  $\vec{\sigma}$  o vetor momento angular de spin. Introduzindo o ten sor tridimensional de momento angular de spin,  $\sigma_{jk}$ , e tendo em vista a relação  $\sigma_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk}$  [39] juntamente com (1.37) e (1.42), somos levados a escrever:

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & | & & \\ \hline & | & & \\ & | & & \\ 0 & & \frac{1}{2} \sigma_{jk} & \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Utilizando esses resultados, a energia cinética de rotação ou de spin será, no referencial de repouso, escrita como:

$$e_{\text{spin}} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{4} \sigma_{ij} \Omega_{ij} \quad (1.44)$$

como já era de se esperar.

### 1.1.3 - Microestrutura Rígida

Na subseção anterior mencionamos que cada partícula do fluido é encarado como sendo um corpo rígido infinitesimal sem que estabelecessemos rigorosamente tal condição de rigidez. A rigidez das partículas constituintes será caracterizada pelo valor constante das componentes de  $J^{\alpha\beta}$  projetada na base tetrádica  $e^{(A)}_{\alpha}$ . Matematicamente tal afirmação é expressa do seguinte modo:

$$(J^{AB}) \cdot = \left( e^{(A)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} J^{\alpha\beta} \right) \cdot = 0 \quad (1.45)$$

Essa equação pode ser reescrita de outra maneira se levarmos em conta (1.17) e (1.22):

$$(J^{\alpha\beta})_{\perp} \cdot = J^{\mu\alpha} \Omega_{\mu}^{\beta} + J^{\mu\beta} \Omega_{\mu}^{\alpha} \quad (1.46)$$

ou ainda:

$$\frac{D_{\Omega} J^{\alpha\beta}}{D\tau} = \left( J^{\alpha\beta} \right)_{\perp} \cdot - J^{\mu\alpha} \Omega_{\mu}^{\beta} - J^{\mu\beta} \Omega_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad (1.47)$$

A quantidade  $\frac{D_{\Omega} J^{\alpha\beta}}{D\tau}$  representa a derivada temporal corrotacional [15] de  $J^{\alpha\beta}$ , ou seja, a derivada temporal de  $J^{\alpha\beta}$  medida relativamente a base de tétradas que está precessionando ou girando. Portanto, podemos afirmar que a rigidez das partículas constituintes   expressa pelo valor nulo da derivada temporal corrotacional de  $J^{\alpha\beta}$ .

Como conseqüência da condi o de rigidez das partículas e das equa es (1.32), (1.36) e (1.37), a seguinte identidade pode ser demonstrada (vide apêndice B):

$$\dot{e}_{\text{spin}} = \frac{1}{2} \left( S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \right) \cdot = \Omega_{\alpha\beta} \left( S^{\alpha\beta} \right)_{\perp} \cdot \quad (1.48)$$

ou:

$$\dot{e}_{\text{spin}} = \frac{1}{2} \left( S^{\alpha} \cdot \Omega_{\alpha} \right) \cdot = \Omega_{\alpha} \left( S^{\alpha} \right)_{\perp} \cdot \quad (1.48')$$

Tais resultados serão importantes no estabelecimento da lei de conserva o da energia cinética de spin.

## 1.2 - Formulação Variacional

Como já ressaltamos na introdução, o interesse por formulações variacionais para fluidos com spin nos últimos anos tem sido muito grande. Nesta seção, vamos propor uma nova lagrangeana para fluidos com spin que apresentam microestrutura rígida em relatividade geral e explorar algumas de suas conseqüências.

A densidade de lagrangeana tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & -\sqrt{-g} \left[ F(n, s) + \frac{1}{4} n J^{ki} e_{\alpha(k)} e_{\alpha(i)} \dot{e}^{\alpha}_{(j)} \dot{e}_{\mu}{}^{(j)} + \right. \\ & + \lambda_1 \nabla_{\alpha} (n U^{\alpha}) + \lambda_2 U^{\alpha} \partial_{\alpha} s + \lambda_3 U^{\alpha} \partial_{\alpha} X + \lambda^{AB} \left( g_{\mu\nu} e^{\mu}_{(A)} e^{\nu}_{(B)} - \right. \\ & \left. \left. - \eta_{AB} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.49)$$

Nesta expressão,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda^{AB}$  ( $= \lambda^{BA}$ ) são multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos do sistema;  $n$  é a densidade do número de partículas;  $s$  é a entropia por partícula e  $X$  é a coordenada Lagrangeana associada a cada partícula do fluido. A função  $F(n, s)$  é dada por:

$$F(n, s) = n \left[ \rho c^2 + \epsilon(n, s) \right] \quad (1.50)$$

onde  $\rho c^2$  é a densidade de energia associada a massa de repouso e  $n\epsilon(n, s)$  é a densidade de energia interna. Toda a informação termodinâmica do fluido está contida em  $\epsilon(n, s)$  (ou



$s(n, \epsilon)$ ), que é determinada pela equação de Gibbs:

$$d\epsilon = T ds - p d\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.51)$$

onde  $p$  é a pressão termodinâmica do fluido. O segundo termo presente no membro direito de (1.49) representa a energia cinética de spin, que pode ser obtido como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} e_{\text{spin}} &= \frac{1}{2} n S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} n S^{ij} \Omega_{ij} = \\ &= -\frac{1}{4} n J^{ki} e_{(k)}^{\mu} e_{\alpha(i)} \dot{e}^{\alpha}_{(j)} \dot{e}^{(j)}_{\mu} \end{aligned} \quad (1.52)$$

sendo  $S^{ij} = e^{(i)}_{\alpha} e^{(j)}_{\beta} S^{\alpha\beta}$  e  $\Omega_{ij} = e^{\alpha}_{(i)} e^{(j)}_{\beta} \Omega_{\alpha\beta}$ .

A diferença da densidade de Lagrangeana (1.40) com relação a aquelas propostas por Ray e Smalley<sup>[24]</sup> (RS) e Obhukov e Korotky<sup>[28]</sup> (OK) são pequenas mas significantes. Tal qual OK, o tensor de spin não está alinhado com um dos vetores espaciais da base tetrádica (usualmente  $e^{(3)}_{\alpha}$ ) e, de modo semelhante a RS, não consideramos  $S_{ij}$  uma quantidade a ser variada independentemente das tétradas. A maneira pela qual associamos o quadrivetor de spin com  $\Omega_{\alpha}$  (eq. 1.37) e, em consequência disso, a nova expressão da energia cinética de spin, é sem dúvida alguma o que distingue substancialmente a densidade de Lagrangeana proposta com as de OK e RS. Outro aspecto importante a ser ressaltado é a não inclusão do tensor momento angular de spin,  $S_{ij}$ , como sendo uma variável termodinâmica. Isso é justificado pelo próprio estabelecimento da des

crição termodinâmica de fluidos polares no domínio não-relativista<sup>[4,5]</sup>. Por outro lado, veremos mais adiante que não encontramos relações de vínculo adicionais tal que RS, que devem ser impostas e, na verdade, mostraram ser desprovidas de sentido físico<sup>[25]</sup>. Na formulação de RS tais relações deixam de existir quando a equação de Gibbs é escrita em sua forma usual (eq. 1.51).

As quantidades que serão variadas na integral de ação associada a lagrangeana dada por (1.49) são:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^{AB}, n, s, X, e^\alpha_{(0)}(U^\alpha), e^\alpha_{(a)}$  ( $a=1,2,3$ ) e  $g_{\mu\nu}$ . As variações com relação a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, e \lambda_{AB}$  fornecerão as seguintes equações:

$$\nabla_\alpha (nU^\alpha) = 0 \quad (1.53)$$

$$U^\alpha \partial_\alpha s = \dot{s} = 0 \quad (1.54)$$

$$U^\alpha \partial_\alpha X = \dot{X} = 0 \quad (1.55)$$

$$g_{\mu\nu} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} - \eta_{(AB)} = 0 \quad (1.56)$$

A primeira equação nada mais é que a conservação do número de partículas, i.é., a equação da continuidade. A segunda nos informa que a entropia de cada parte elementar do fluido é constante, caracterizando a evolução isentrópica do fluido. A terceira equação é a conservação da identidade das partículas do fluido (vide eq. 1.6). Na última equação temos garantida a condição de ortonormalidade de base tetrádica. Note que devido a (1.14), esta relação reduz-se a  $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2$  (vide a parte referente às convenções).

Fazendo a variação com respeito as quantidades  $n, s, X$  e levando-se em conta que a partir de agora os cálculos serão realizados num sistema de coordenadas localmente geodético ( $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  e  $\partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ , no ponto em questão), as equações de Euler-Lagrange obtidas são mostradas abaixo:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{4} J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}^{(j)}_\mu \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} - \nabla_\mu (\lambda_2 U_\mu) = 0 \quad (1.58)$$

$$\nabla_\mu (\lambda_3 U_\mu) = 0 \quad (1.59)$$

Façamos agora as variações com respeito a  $U^\nu$ . As equações de movimento resultantes são escritas como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial U^\nu} - \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} \right] = 0 \quad (1.60)$$

Vamos exibir cada um dos termos de (1.60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial U^\nu} = & -\sqrt{g} \left\{ \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \frac{\partial \left[ U^\tau (\nabla_\tau e^\alpha_{(j)}) U^\sigma (\nabla_\sigma e^{(j)}_\mu) \right]}{\partial U^\nu} \right. \\ & + \lambda_1 \frac{\partial (U^\alpha \partial_\alpha n)}{\partial U^\nu} + \lambda_2 \partial_\nu s + \lambda_3 \partial_\nu X + \\ & \left. + \lambda^{AB} g_{\mu\tau} \frac{\partial (e^\mu_{(A)} e^\tau_{(B)})}{\partial U^\nu} \right\} \quad \dots \\ \therefore \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial U^\nu} = & -\sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \left[ (\nabla_\nu e^\alpha_{(j)}) \dot{e}^{(j)}_\mu + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dot{e}^\alpha_{(j)} \left( \nabla_\nu e^{(j)}_{\mu} \right) \Big] + \lambda_1 \partial_\nu n + \lambda_2 \partial_\nu s + \lambda_3 \partial_\nu X + \\
 & + \frac{2}{c} \lambda_0^B e_{\nu(B)} \quad (1.61)
 \end{aligned}$$

Prosseguindo os cálculos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} & = - \sqrt{-g} \lambda_1 \frac{\partial \nabla_\alpha (n U^\alpha)}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} = - \sqrt{-g} \lambda_1 \frac{n \partial (\partial_\alpha U^\alpha)}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} = \\
 & = - \sqrt{-g} \lambda_1 n \delta^\rho_\nu \quad (1.62)
 \end{aligned}$$

Por fim:

$$\partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} \right] = - \sqrt{-g} \partial_\rho (n \lambda_1) \quad (1.63)$$

Substituindo (1.61) e (1.63) em (1.60), segue:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \left[ \left( \nabla_\nu e^\alpha_{(j)} \right) \dot{e}^{(j)}_{\mu} + \dot{e}^{(j)\alpha}_{(j)} \left( \nabla_\nu e^{(j)}_{\mu} \right) \right] + \\
 & + \lambda_2 \partial_\nu s + \lambda_3 \partial_\nu X + \frac{2}{c} \lambda_0^B e_{\nu(B)} - n \partial_\nu \lambda_1 = 0 \quad (1.64)
 \end{aligned}$$

A partir desta equação podemos determinar o multiplicador  $\lambda^{00}$ .

Multiplicando escalarmente (1.69) por  $U^\nu$ , vem:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \left( \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}^{(j)}_{\mu} + \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}^{(j)}_{\mu} \right) + \\
 & + \lambda_2 \dot{s} + \lambda_3 \dot{X} + \frac{2\lambda_0^B}{c} e_{\nu(B)} U^\nu - n \dot{\lambda}_1 = 0 \quad (1.65)
 \end{aligned}$$

Tendo-se em vista as equações (1.14), (1.54), (1.55) e (1.57), será possível explicitar  $\lambda^{00}$ :

$$2 \lambda^{00} = n \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}_\mu^{(j)} \quad (1.66)$$

As equações resultantes da variação de  $e^\tau_{(a)}$ , são (vide apêndice B):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial e^\tau_{(a)}} = & -\sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} n J^{ai} e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}^{(j)}_\tau + \right. \\ & \left. + \lambda^{aB} e_{\tau(B)} + \lambda^{Aa} e_{\tau(A)} \right) \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho e^\tau_{(a)})} \right] = \frac{-\sqrt{-g}}{2} n J^{ki} \left( e^\mu_{(k)} e_{\tau(i)} \dot{e}^{(a)}_\mu \right) \quad (1.68)$$

Portanto a equação de Euler-Lagrange obtida é escrita abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n J^{ka} e^\mu_{(k)} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}^{(j)}_\mu + 2\lambda^{Aa} e_{\tau(A)} - \\ - \frac{1}{2} n J^{ki} \left( e^\mu_{(k)} e_{\tau(i)} \dot{e}^{(a)}_\mu \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Esta equação manipulada convenientemente nos fornecerá os multiplicadores  $\lambda^{0a}$  e  $\lambda^{ab}$ . Inicialmente fazemos a contração de (1.69) com  $U^\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n J^{ka} e^\mu_{(k)} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}^{(j)}_\mu U^\tau + 2\lambda^{Aa} e_{\tau(A)} U^\tau - \\ - \frac{1}{2} n J^{ki} U^\tau \left( e^\mu_{(k)} e_{\tau(i)} \dot{e}^{(a)}_\mu \right) = 0 \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\therefore 2\lambda^{0a} = \frac{1}{2c} n U^{\tau} \left( J^{ki} \dot{e}_{\tau(i)} e^{\mu}_{(k)} \dot{e}_{\mu}^{(a)} - J^{ka} \dot{e}_{\tau(j)} e^{\mu}_{(k)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} \right) \quad (1.70)$$

Façamos agora a contração de (1.69) com  $e^{\tau(b)}$  e obter a expressão mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} n J^{ka} e^{\mu}_{(k)} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e^{\tau(b)} + 2\lambda^{ab} - \\ & - \frac{1}{2} n J^{ki} e^{\tau(b)} \left( e^{\mu}_{(k)} e_{\tau(i)} \dot{e}_{\mu}^{(a)} \right)' = 0 \quad (1.71) \end{aligned}$$

Os multiplicadores  $\lambda^{ab}$  são obtidos após a simetrização da eq. (1.71):

$$\begin{aligned} 2\lambda^{ab} &= \frac{1}{2} n J^{ki} e^{\tau(b)} \left( e^{\mu}_{(k)} e_{\tau(i)} \dot{e}_{\mu}^{(a)} \right)' - \\ & - \frac{1}{2} n J^{k((a)} e^{(b)\tau} e^{\mu}_{(k)} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} \quad (1.72) \end{aligned}$$

Resta agora verificar as implicações da expressão que resulta quando antissimetrizamos os índices a e b na equação (1.71). Tal expressão é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} n J^{k[a} e^{\tau(b)} e^{\mu}_{(k)} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} - \\ & - J^{ki} e^{[(b)} \left( \dot{e}_{\mu}^{(a)} \right) ] e^{\mu}_{(k)} e_{\tau(i)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} = 0 \quad (1.73) \end{aligned}$$

Após algum algebrismo (vide apêndice B), chegamos ao seguinte resultado:

$$\dot{S}^{ba} + S^{ja} \Omega^b_j + S^{bj} \Omega^a_j = 0 \quad (1.74)$$

Esta equação nada mais é que a lei de conservação do momento angular de spin. Expressando a equação (1.74) na base de coordenadas, obtemos:

$$\dot{S}^{\alpha\beta} + c^{-2} (S^{\alpha\beta} U^\beta - S^{\beta\mu} U^\alpha) \dot{U}_\mu = 0 \quad (1.75)$$

ou ainda:

$$(S^{\alpha\beta})_{;\perp} = 0 \quad ; \quad (S^\alpha)_{;\perp} = 0 \quad (1.76)$$

O tensor de spin  $S^{\alpha\beta}$  é Fermi-Walker transportado ao longo da linha de universo de cada partícula do fluido. Consequentemente a magnitude do spin,  $S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$  ou  $S^\mu S_\mu$ , é mantida constante a medida que o sistema evolui. Como veremos no capítulo seguinte, o tensor de spin não será conservado num contexto mais geral onde há a presença de certos termos no lado direito da eq. (1.75). Tais termos serão interpretados como fluxos dissipativos associados ao spin do fluido.

### 1.3 - Equações do Campo Gravitacional, Tensor Momento-energia

A fim de descrever o fluido perfeito com momento angular de spin e dotado de microestrutura rígida que integre gravitacionalmente, devemos adicionar à lagrangeana do fluido a lagrangeana de Einstein<sup>[40]</sup>. A densidade de lagrangeana total é então dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\chi} \sqrt{-g} R + \mathcal{L}_f \quad (1.77)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura,  $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ ,  $G$  é a constante gravitacional universal e  $\mathcal{L}_f$  é a densidade de lagrangeana do fluido dada pela eq. (1.49). A integral de ação associada a (1.77), é:

$$I = \int \left( \frac{\sqrt{-g} R}{2\chi} + \mathcal{L}_f \right) d^4x \quad (1.78)$$

A variação com relação a  $g_{\sigma\tau}$  nos fornece a seguinte expressão:

$$\delta I = \iint \left\{ \frac{-\sqrt{-g} G^{\sigma\tau}}{2\chi} + \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu g_{\sigma\tau})} \right] \right\} \delta g_{\sigma\tau} d^4x = 0 \quad (1.79)$$

onde  $G^{\sigma\tau} = R^{\sigma\tau} - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} R$ . A variação da ação construída com a densidade de lagrangeana do conteúdo material resulta no tensor momento-energia<sup>[40]</sup>. Assim, a expressão que envolve derivadas de  $\mathcal{L}_f$  na eq. (1.79) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu g_{\sigma\tau})} \right] = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\tau} \quad (1.80)$$



Abaixo, exibiremos os dois termos do membro esquerdo da eq. (1.80):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} = & -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n J^{ki} \left( e^\mu_{(k)} \dot{e}^{(j)}_{\mu} e^{(\tau}_{(i)} \dot{e}^{(j)}{}^{\sigma)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{(\sigma}_{(k)} \dot{e}^{(\tau)}{}^{(j)} e_{(i)\alpha} \dot{e}^\alpha_{(j)} \right) + \lambda^{AB} e^{(\sigma}_{(A)} e^{\tau)}_{(B)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \left( F(n, s) + \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}^{(j)}_{\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu g_{\sigma\tau})} \right] = & -\sqrt{-g} \left[ \nabla_\mu \left( n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} n J^{ki} \left( \Omega_k^j e^{(\tau}_{(i)} e^{\sigma)}_{(j)} \right) + \frac{\dot{\lambda}_1 n g^{\sigma\tau}}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.82)$$

No apêndice B veremos com detalhes o cálculo necessário para chegarmos a essas expressões. Voltando para (1.80) e tendo-se em vista as equações (1.57), (1.66), (1.70) e (1.72) chegamos, após um laborioso cálculo, ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} G^{\sigma\tau} = & -\chi \left[ g^{\sigma\tau} \left( F(n, s) - n \frac{\partial F}{\partial s} \right) + \right. \\ & + \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} \left( n \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{1}{4} n J^{ki} e^\mu_{(k)} e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}^{(j)}_{\mu} - \right. \\ & \left. \left. - 2 \nabla_\mu \left( n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)} \right) + \frac{2n}{c^2} \dot{U}_\mu S^{\mu(\tau} U^{\sigma)} \right] \end{aligned} \quad (1.83)$$

O membro direito dessa equação pode ainda ser escrito de modo mais conveniente ao utilizarmos as equações (1.50), (1.51) e (1.52). Obtemos, então, o resultado desejado:

$$G^{\sigma\tau} = -\chi \left[ \left( \rho + \frac{1}{2} n S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \right) \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} - p h^{\sigma\tau} - \right. \\ \left. - 2\nabla_\mu \left( n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)} \right) + \frac{2n}{c^2} \dot{U}_\mu S^{\mu(\tau} U^{\sigma)} \right] \quad (1.84)$$

sendo  $\rho = n(ac^2 + \epsilon)$ . O tensor momento-energia pode ser dividido em duas parcelas: um tensor momento-energia de fluido perfeito,  $T_f^{\sigma\tau}$ , e um tensor momento-energia associado ao spin da matéria,  $T_s^{\sigma\tau}$ , dados, respectivamente, por:

$$T_f^{\sigma\tau} = \rho \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} - p h^{\sigma\tau} \quad (1.85)$$

$$T_s^{\sigma\tau} = \frac{1}{2} n S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} - 2\nabla_\mu \left( n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)} \right) + \frac{2n}{c^2} \dot{U}_\mu S^{\mu(\sigma} U^{\tau)} \quad (1.86)$$

Algumas observações acerca do tensor momento-energia fazem-se necessárias. Inicialmente, a estrutura deste tensor é similar àqueles obtidos por RS<sup>[24]</sup> e OK<sup>[28]</sup>. A diferença básica está na presença da energia cinética de spin em nosso modelo (primeiro termo do segundo membro de (1.86)). Se calcularmos a partir de (1.85) e (1.86) a densidade total de energia  $\rho_{total} = (T_f^{\alpha\beta} + T_s^{\alpha\beta}) \frac{U_\alpha U_\beta}{c^2}$  de um elemento de volume arbitrário do fluido, obteremos:

$$\rho_{total} = n(ac^2 + \epsilon) + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} - 2n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \quad (1.87)$$

Nesta expressão,  $-2n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$  representa a interação do spin

com a vorticidade do fluido. Sendo assim, um observador em repouso com o elemento de volume em questão irá perceber as seguintes contribuições: a de energia de repouso e interna, a de rotação intrínseca do elemento e a de interação spin-vorticidade. Nos modelos de RS e OK, um cálculo semelhante mostra a ausência da energia de rotação intrínseca do elemento de volume.

Posteriormente veremos como a nova contribuição de energia pode mudar a dinâmica de modelos cosmológicos usuais com um fluido dotado de spin como fonte de curvatura. Enfatizamos também o fato de que  $T^{\alpha\beta} = T_f^{\alpha\beta} + T_s^{\alpha\beta}$  é o mesmo obtido por Maugin<sup>[30]</sup> de modo fenomenológico quando consideramos a situação de equilíbrio termodinâmico e ausência de interação eletromagnética (\*).

As leis de conservação (balanço) do momento e energia podem ser obtidas a partir das equações de campo (1.83) quando aplicamos as identidades de Bianchi. Sendo assim, temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \nabla_\tau \left[ n(ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}) \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} - p h^{\sigma\tau} + \frac{2n}{c^2} \dot{U}_\mu S^\mu \sigma U^\tau \right] + \\ + n R^\sigma_{\beta\mu\nu} S^{\nu\mu} U^\beta = 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

onde os detalhes de cálculo são deixados no apêndice B. O acoplamento entre a curvatura e o spin surge naturalmente nas equações de movimento para partículas com spin em relatividade geral<sup>[41]</sup>. O termo em questão é conhecido como força de

---

(\*) Na verdade, Maugin obteve um tensor momento-energia para um fluido dissipativo com spin dotado de microestrutura rígida e em interação com o campo eletromagnético.

Mathisson-Papapetrou. Projetando a eq. (1.88) paralelamente e perpendicularmente a  $U^\mu$ , obteremos as leis de conservação da energia e do momento, dadas, respectivamente, por:

$$n \left[ \dot{\epsilon} + p \left( \frac{1}{n} \right) \dot{\phantom{x}} \right] = 0 \quad (1.89)$$

$$n I_{\sigma\tau} \dot{U}^\sigma + \frac{2n}{c^2} S_{\mu\lambda} (\dot{U}^\mu)_\perp - (\nabla_\lambda p)_\perp + n h_{\sigma\lambda} R^\sigma_{\beta\mu\nu} S^{\nu\mu} U^\beta = 0 \quad (1.90)$$

Nesta expressão, o tensor  $I_{\sigma\tau}$  que é simétrico e completamente definido no tri-espaço perpendicular a  $U^\mu$ , é escrito como:

$$I_{\sigma\tau} = \left[ a + c^{-2} \left( \epsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} + \frac{p}{n} \right) \right] h_{\sigma\lambda} + \frac{2}{c^2} (S_{\sigma\lambda})'_\perp \quad (1.91)$$

Este tensor pode ser interpretado como sendo a generalização da inércia<sup>[30]</sup> de um dado elemento de volume arbitrário. Note a presença na eq.(1.90) do termo envolvendo a derivada segunda do campo de velocidades  $U^\mu$ . Este termo representa o usual fenômeno de auto-interação, de modo que necessitamos de três condições iniciais para especificar uma única solução da equação de movimento mesmo no caso de espaço-tempo plano.

Por fim, é importante ressaltar que na dedução da eq. (1.89) utilizamos a lei de conservação da energia cinética de spin<sup>[13,14,30]</sup>, escrita como:

$$\frac{1}{2} n (S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta})' = 0 \quad (1.92)$$

No apêndice B mostramos como obtemos esta equação a

partir da lei de conservação do momento angular de spin (eq. (1.75)) e da condição de rigidez das partículas do fluido.

## CAPITULO 2

### Fluidos Relativistas com Spin Fora do Equilíbrio

#### Termodinâmico: Teoria Fenomenológica

A formulação relativista da termodinâmica de processos irreversíveis deve-se essencialmente aos trabalhos de Eckart<sup>[45]</sup> e Landau e Lifshitz<sup>[46]</sup>. A característica básica encontrada em ambos trabalhos é a validade da hipótese do equilíbrio local, que consiste em manter inalterada a equação de Gibbs definida para estados de equilíbrio termodinâmico. Entretanto, esta formulação apresenta alguns aspectos inconvenientes: seus resultados são válidos somente nas situações quasi-estacionárias, além da predição de velocidade infinita de propagação das ondas térmicas e viscosas, sendo portanto, não aplicável aos fenômenos não-estacionários. Nestes fenômenos, os gradientes espaço-temporais das quantidades físicas não são pequenos quando comparados com o caminho médio livre e o tempo médio de colisão característicos do meio<sup>[51]</sup>.

Essas dificuldades foram superadas com a termodinâmica estendida ou causal, cuja formulação foi inicialmente proposta por Müller<sup>[50]</sup> (teoria não-relativista) em 1967 e depois retomada em 1976 por Israel<sup>[51]</sup>. Mais tarde, Pavon et al<sup>[52]</sup> introduziram a entropia de não equilíbrio que é função das variáveis dissipativas além das usuais de equilíbrio. Nessas teorias, as

equações fenomenológicas passam a ser equações de evolução para os fluxos dissipativos, ao contrário das teorias baseadas na hipótese do equilíbrio local. Em consequência disso, as equações de propagação das ondas térmicas e viscosas são do tipo hiperbólico que, por sua vez, fornecem valores finitos para as velocidades de propagação dessas ondas.

Ultimamente o interesse nos fenômenos dissipativos relativistas tem aumentado consideravelmente e, vários problemas em astrofísica e cosmologia têm sido atacados utilizando-se as teorias estendidas da termodinâmica. Podemos citar, por exemplo, Fuster e Pavon<sup>[54]</sup>, que fazem uma estimativa da produção de entropia devido a viscosidade volumar em nosso universo; Pavon et al<sup>[55]</sup> e Jou e Pavon<sup>[56]</sup> estudam as flutuações de equilíbrio dos fluxos dissipativos objetivando determinar os coeficientes dissipativos. O autor<sup>[57]</sup> analisa termodinamicamente um fluido dissipativo em contração no espaço-tempo curvo e, em colaboração com Salim<sup>[58]</sup>, exhibe soluções cosmológicas para um fluido com viscosidade volumar. Nesta mesma abordagem, Novello et al<sup>[59]</sup> exhibe um estudo mais geral desse cenário. Modelos inflacionários<sup>[60]</sup> também foram investigados à luz da termodinâmica causal. Calvão e Salim<sup>[61]</sup>, utilizando a formulação termodinâmica de Landau-Lifshitz, estudam modelos homogêneos e isotrópicos. Recentemente Pavon et al<sup>[65]</sup> analisaram a evolução desses modelos com fluidos viscosos.

Tendo em vista essas motivações, este capítulo será dividido como mostrado a seguir: a primeira seção será dedicada a apresentar a termodinâmica em primeira ordem (equilíbrio local) para fluidos com spin no espaço-tempo curvo, onde o tensor métrico é dado a priori. Introduzimos os ele-

mentos básicos para a descrição fenomenológica de um fluido, que é baseada nos objetos que representam a distribuição de momento-energia, partículas, entropia e momento angular de spin, bem como as leis de balanço associadas a cada uma dessas quantidades.

Na seção 2.2, propomos a versão causal da termodinâmica de processos irreversíveis para fluidos com spin. Nas duas seções subseqüentes fazemos algumas aplicações da teoria. Na seção 2.3 analisamos a propagação de ondas térmicas e de spin num exemplo bem simples e, na seção 2.4 estudamos o problema das flutuações dos fluxos dissipativos em torno do estado de equilíbrio termodinâmico.

Na seção 2.5 o fluido com o spin é o responsável pela curvatura do espaço-tempo. Então, devido ao processo de simetrização do tensor momento-energia assimétrico obtido na seção 2.1, mostramos como o campo gravitacional altera a primeira lei da termodinâmica via acoplamento entre o tensor de curvatura  $R^{\alpha\beta\mu\nu}$  e o tensor de difusão de momento angular de spin  $M^{\alpha\beta\mu}$ . Em consequência disso, termos adicionais aparecerão na produção de entropia alterando algumas equações fenomenológicas.



## 2.1 - Termodinâmica de Processos Irreversíveis para Fluidos com Spin I; Regime Quasi-Estacionário

A descrição fenomenológica de um fluido simples relativista dissipativo é feita tomando por base as variáveis dinâmicas do sistema que são a energia, o momento, a densidade do número de partículas (ou densidade de massa) e a entropia. Essas quantidades são representadas por campos tensoriais definidos na variedade espaço-tempo  $M^4(g, x)$ , a saber: o tensor momento-energia  $T^{\alpha\beta}$ , o quadrivetor densidade de fluxo de partículas  $N^\mu$  e o quadrivetor fluxo de entropia  $s^\mu$ . As leis dinâmicas da evolução são determinadas pelas leis de balanço do momento-energia, da conservação do número de partículas e pelo segundo princípio da termodinâmica. Entretanto, se o fluido possuir momento angular de spin não nulo, oriundo de alguma estrutura interna de seus constituintes, devemos acrescentar um outro campo tensorial,  $S^{\alpha\beta\mu}$ , conhecido por tensor fluxo de momento angular de spin. Este tensor é antissimétrico nos dois primeiros índices e contém toda a informação acerca da distribuição do momento angular de spin, bem como dos torques internos [30]. Os fluidos nos quais  $S^{\alpha\beta\mu} \neq 0$  são genericamente denominados de fluidos polares. O tensor  $S^{\alpha\beta\mu}$  satisfaz uma lei de balanço que expressa a evolução do momento angular de spin.

A lei de balanço do momento-energia engloba as usuais primeira lei da termodinâmica (conservação da energia) e a de movimento (balanço do momento linear), estabelecidas na descrição não relativista. A lei de conservação da massa en-

contra-sé incluída na primeira lei, visto a equivalência entre massa e energia estabelecida pela relatividade. Essa degeneração do sistema relativístico é superada definindo-se a lei de conservação do número de partículas, que substitui a usual equação de continuidade (lei de conservação da massa). Como o próprio nome sugere, esta lei afirma que o número de partículas contido num dado volume mantém-se constante. Na verdade, estabelecemos o que Dixon<sup>[42]</sup> denomina de conservação da massa inerte, ou seja, a conservação da massa que não é convertida em energia nos processos sob os quais o fluido está submetido.

A lei de balanço do momento angular de spin fornecerá, além da equação de evolução do momento angular de spin, a relação entre a densidade de momento e a densidade de fluxo da energia do fluido. A usual relação de Planck<sup>[43]</sup>, densidade de momento =  $c^{-2}$  (densidade de fluxo de energia), não será mais satisfeita para fluidos com spin, como mostrado mais adiante.

O segundo princípio da termodinâmica estabelece que a produção de entropia é sempre positiva. No estado de equilíbrio termodinâmico, a produção de entropia é nula. Esse princípio permitirá ainda a dedução de novas relações, denominadas equações fenomenológicas ou constitutivas, sem as quais não é possível especificar a evolução do fluido, uma vez que teríamos um número de equações menor que o número de incógnitas.

As expressões matemáticas das leis anteriormente mencionadas, cujas deduções podem ser encontradas no apêndice C, são:

$$\nabla_{\beta} \quad {}_m T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla_{\mu} \quad N^{\mu} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla_{\mu} \quad S^{\alpha\beta\mu} = {}_m T^{[\alpha\beta]} \quad (2.3)$$

$$\nabla_{\mu} \quad \delta^{\mu} \geq 0 \quad (2.4)$$

Temos, respectivamente, a conservação do momento-energia (não há fontes), a conservação do número de partículas, a lei de balanço do momento angular de spin e o segundo princípio da termodinâmica.

Com o intuito de obter explicitamente as equações que determinam a dinâmica do fluido, é fundamental que explicitemos a forma de  ${}_m T^{\alpha\beta}$ ,  $N^{\mu}$ ,  $S^{\alpha\beta\mu}$  e  $\delta^{\mu}$  em função de quantidades físicas relevantes tais como densidade de energia interna, pressão, quadrivelocidade hidrodinâmica, etc. Essa será a tarefa que nos ocuparemos daqui por diante.

O tensor momento-energia de um fluido qualquer pode ser decomposto relativamente ao campo de velocidades hidrodinâmico  $U^{\alpha}(x)$ , como mostramos abaixo:

$${}_m T^{\alpha\beta} = B c^{-2} U^{\alpha} U^{\beta} + p^{\alpha} U^{\beta} + c^{-2} Q^{\beta} U^{\alpha} + t^{\beta\alpha} \quad (2.5)$$

onde

$$B \equiv c^{-2} \quad {}_m T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \quad (2.6)$$

$$p^{\alpha} \equiv c^{-2} h^{\alpha\mu} \quad {}_m T_{\mu\beta} U^{\beta} \quad (2.7)$$

$$Q^{\beta} \equiv U^{\alpha} \quad {}_m T_{\alpha\mu} h^{\mu\beta} \quad (2.8)$$

$$t^{\beta\alpha} \equiv h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} \quad T_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

As quantidades definidas em (2.6), ... (2.9) têm um significado físico bem definido que é facilmente identificado quando pas

samos para o referencial de repouso local, ou comovente com um dado elemento de volume do fluido. Neste referencial podemos escrever  $U^\alpha \stackrel{*}{=} c \delta^\alpha_0$ , de modo que as expressões (2.6) ... (2.9) são escritas por:

$$B \stackrel{*}{=} {}_m \ddot{T}_{00} \quad (2.10)$$

$$P_0 \stackrel{*}{=} 0 \quad ; \quad P_i \stackrel{*}{=} \frac{1}{c} {}_m T_{i0} \quad (2.11)$$

$$Q_0 \stackrel{*}{=} 0 \quad ; \quad Q_i \stackrel{*}{=} c {}_m T_{0i} \quad (2.12)$$

$$t_{00} \stackrel{*}{=} t_{i0} = t_{0i} \stackrel{*}{=} 0 \quad ; \quad t_{ki} \stackrel{*}{=} {}_m T_{ik} \quad (2.13)$$

Seguindo de Groot<sup>[44]</sup>, B é a densidade da energia do fluido,  $p^\alpha$  é a densidade de momento,  $Q^\alpha$  é a densidade de fluxo de energia e, finalmente,  $t^{\beta\alpha}$  é o tensor relativista das tensões.

O quadrivetor densidade de fluxo de partículas é dado por<sup>(\*)</sup>:

$$N^\mu = n U^\mu \quad (2.14)$$

onde n é a densidade do número de partículas. Queremos ressaltar que estamos adotando, por conveniência, a definição de Eckart<sup>[45]</sup> para a quadrivelocidade hidrodinâmica. Alternativamente, existe a escolha feita por Landau-Lifshitz<sup>[46]</sup>, onde ao invés de adotar a velocidade do fluxo de partículas (Eckart), é considerado a velocidade associada ao fluxo de energia, que, de um modo geral, não coincidem<sup>[47]</sup>.

---

(\*) na ausência de reações químicas.

O tensor  $S^{\alpha\beta\mu}$  será, nos casos que iremos tratar, decomposto relativamente no campo de velocidades  $U^\alpha$  da seguinte maneira:

$$S^{\alpha\beta\mu} = n S^{\alpha\beta} U^\mu + M^{\alpha\beta\mu} \quad (2.15)$$

Nesta expressão  $S^{\alpha\beta} = -S^{\beta\alpha}$  é o tensor momento angular de spin já introduzido no capítulo anterior (vide seção 1.2.2). O tensor  $M^{\alpha\beta\mu}$ , antissimétrico nos dois primeiros índices e completamente definido no tri-espaço perpendicular a  $U^\alpha$  ( $M^{\alpha\beta\mu} = (S^{\alpha\beta\mu})_\perp$ ), é conhecido como sendo o tensor das tensões-torques. Na verdade, este tensor é a representação macroscópica das interações exercidas entre as partículas vizinhas girantes do fluido<sup>[30]</sup>.

Por último, o quadrivetor fluxo de entropia  $s^\mu$  é escrito do seguinte modo:

$$s^\mu = n s U^\mu + I^\mu \quad (2.16)$$

sendo  $s$  a entropia por partícula e  $I^\mu = h^\mu_\alpha s^\alpha$ , a parte espacial de  $s^\mu$  que nada mais é que a difusão de entropia.

Tendo obtido as decomposições de  ${}_m T^{\alpha\beta}$ ,  $N^\mu$ ,  $S^{\alpha\beta\mu}$  e  $s^\mu$ , o próximo passo será substituí-las, respectivamente, nas equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), para derivar as equações dinâmicas procuradas.

#### - Lei de balanço do momento-energia

As leis de conservação da energia (primeira lei da termodinâmica) e as equações de movimento são obtidas de (2.1) quando fazemos as projeções nas direções paralela e perpendicular a  $U^\alpha$ , resultando nas seguintes equações:

$$U_{\alpha} \nabla_{\beta} {}_m T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.17)$$

$$h_{\alpha\mu} \nabla_{\beta} {}_m T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.18)$$

Substituindo  ${}_m T^{\alpha\beta}$  dado em (2.3) nas duas expressões acima, chegamos, após algum algebrismo, aos seguintes resultados:

$$\dot{B} + B\theta - p^{\mu} \dot{U}_{\mu} + \nabla_{\mu} Q^{\mu} - t^{\beta\alpha} (\nabla_{\beta} U_{\alpha}) = 0 \quad (2.19)$$

$$c^{-2} B \dot{U}_{\mu} + h_{\alpha\mu} \dot{p}^{\alpha} + p^{\mu} \theta + c^{-2} Q^{\beta} h_{\alpha\mu} \nabla_{\beta} U^{\alpha} + h_{\alpha\mu} (\nabla_{\beta} t^{\beta\alpha}) = 0 \quad (2.20)$$

onde  $\theta = \nabla_{\mu} U^{\mu}$  é a expansão do fluido. Devemos ressaltar que as eqs. (2.19) e (2.20) não encontram-se em sua forma final, uma vez que não fornecemos as expressões correspondentes às quantidades  $B$ ,  $p^{\alpha}$ ,  $Q^{\alpha}$  e  $t^{\beta\alpha}$ . Essas expressões dependem da natureza do meio contínuo em questão. Por exemplo, ao definirmos o quadrivetor densidade de momento total  $P^{\alpha} \equiv c^{-2} {}_m T^{\alpha\beta} U_{\beta}$ , temos:

$$P^{\alpha} = c^{-2} B U^{\alpha} + p^{\alpha} \quad (2.21)$$

$p^{\alpha}$  é a densidade de momento de origem não-mecânica. Se o meio contínuo for constituído de campo eletromagnético, segue que  $p^{\alpha}$  será identificado como sendo a densidade de momento do campo eletromagnético. Ainda neste caso,  $Q^{\alpha}$  coincidirá com o vetor de Poynting, e assim por diante. Posteriormente, faremos a identificação das quantidades presentes em  ${}_m T^{\alpha\beta}$ .

- Lei de conservação do número de partículas

Substituindo a expressão de  $N^\mu$  dada em (2.14) na equação (2.2), obtemos:

$$\dot{n} + n\theta = 0 \quad (2.22)$$

Essa equação indica que a variação do número e partículas por unidade de volume é compensada pela variação do volume próprio.

- Lei de balanço do momento angular de spin

Substituindo a decomposição de  $S^{\alpha\beta\mu}$  dada em (2.19) na equação (2.3) e levando em conta a lei de conservação do número de partículas (2.22), vem:

$$n \dot{S}^{\alpha\beta} + \nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu} = {}_m T^{[\alpha\beta]} \quad (2.23)$$

Esta equação pode ser reescrita de modo mais conveniente quando substituimos a decomposição de  ${}_m T^{\alpha\beta}$  dada pela eq. (2.5):

$$n \dot{S}^{\alpha\beta} + \nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu} = p^{[\alpha} U^{\beta]} + c^{-2} Q^{[\beta} U^{\alpha]} + t^{[\beta\alpha]} \quad (2.24)$$

A lei de balanço do momento angular de spin nos fornece duas informações de importância fundamental. A primeira delas que é a relação entre  $p^\alpha$  e  $Q^\alpha$  é obtida quando projetamos (2.24) na direção paralela a  $U^\alpha$ :

$$\begin{aligned} n \dot{S}^{\alpha\beta} U_\alpha + U_\alpha \nabla_\mu M^{\alpha\beta\mu} &= -\frac{c^2 p^\beta}{2} + \frac{Q^\beta}{2} \quad \therefore \\ \therefore p^\beta &= c^{-2} [Q^\beta + 2n S^{\alpha\beta} \dot{U}_\alpha + 2M^{\alpha\beta\mu} (\nabla_\mu U_\alpha)_\perp] \quad (2.25) \end{aligned}$$

Fica claro, dessa expressão, que a relação de Planck não é sa-

tisfeita para fluidos com spin. Portanto, a parte antissimétrica do tensor momento-energia não é nula devido a  $t^{[\beta\alpha]} \neq 0$  (como veremos mais adiante) e a violação da relação de Planck.

A segunda informação proveniente de (2.24) é obtida quando projetamos esta equação no tri-espaço perpendicular a  $U^\alpha$ :

$$n(S^{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} + (\nabla_{\mu} M^{\alpha\beta\mu})_{\perp} = t^{[\beta\alpha]} \quad (2.26)$$

Esta equação expressa a lei de evolução do momento angular de spin. O tensor  $M^{\alpha\beta\mu}$  também pode ser entendido como densidade de difusão de momento angular de spin do mesmo modo que o tensor das tensões  $t^{\beta\alpha}$  é a densidade de difusão de momento linear. Note que o termo de produção de momento angular é dado pela parte antissimétrica do tensor das tensões.

No capítulo I obtivemos a lei de balanço da densidade de energia cinética de spin num contexto mais simples (eq. 1.92). Podemos, então, a partir da eq. (2.26), obter a mesma lei na presente situação fazendo inicialmente a contração de (2.26) com  $\Omega_{\alpha\beta}$ :

$$n(S^{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} \Omega_{\alpha\beta} + (\nabla_{\mu} M^{\alpha\beta\mu})_{\perp} \Omega_{\alpha\beta} = t^{[\beta\alpha]} \Omega_{\alpha\beta} \quad (2.27)$$

Sabendo-se que  $n \dot{e}_{\text{spin}} = n(S^{\alpha\beta})_{\perp} \Omega_{\alpha\beta}$ , onde  $e_{\text{spin}} = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}$  (vide eq. 1.40), podemos reescrever (2.27) como:

$$n \dot{e}_{\text{spin}} + \nabla_{\mu} (M^{\alpha\beta\mu} \Omega_{\alpha\beta}) = t^{[\beta\alpha]} \Omega_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta\mu} \nabla_{\mu} \Omega_{\alpha\beta} \quad (2.27')$$



De acordo com a estrutura geral de uma equação de balanço [ 9 ], o termo  $M^{\alpha\beta\mu} \Omega_{\alpha\beta}$  é a densidade de fluxo de energia cinética de spin e os termos do segundo membro de (2.27') são aqueles de produção de energia cinética de spin.

Com os resultados obtidos até agora estamos aptos para exibir as expressões correspondentes a  $B$ ,  $p^\alpha$ ,  $Q^\alpha$  e  $t^{\beta\alpha}$ . Como vimos,  $B$  é a densidade de energia percebida por um observador no referencial de repouso. Então, para um fluido sem spin,  $B$  é dado por [44,48]:

$$B = n(ac^2 + \varepsilon) \quad (2.28)$$

onde  $nac^2$  é a densidade de energia associada à massa de repouso, sendo  $a$ , uma constante e  $n\varepsilon$  é a densidade de energia interna. No modelo em questão, cada elemento de volume é dotado de momento angular de spin e, em consequência disso, possui energia cinética de spin ou de rotação. Logo, devemos acrescentar mais um termo em (2.28) e obter:

$$B = n(ac^2 + \varepsilon) + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

sendo  $\frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}$  a densidade de energia cinética de spin.

O vetor  $Q^\beta$  pode ser decomposto do seguinte modo:

$$Q^\beta = q^\beta + \tilde{Q}^\beta \quad (2.30)$$

Nessa equação  $q^\beta$  é o quadrivetor fluxo de calor [45,48], que no referencial de repouso é dado por  $q^\beta \doteq (0, \vec{q})$ , sendo  $\vec{q}$  o usual

vetor fluxo de calor. Este fluxo nada mais é que o fluxo de energia interna do fluido. Já o quadrivetor  $\tilde{Q}^\beta$  representa o fluxo de energia cinética de spin, cuja expressão é obtida diretamente da equação (2.27'). Assim, temos:

$$Q^\beta = q^\beta + M^{\mu\nu\beta} \Omega_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

A expressão final de  $p^\beta$  é obtida ao substituirmos a eq. (2.31) na eq. (2.25):

$$p^\beta = c^{-2} \left[ q^\beta + M^{\mu\nu\beta} \Omega_{\mu\nu} + 2n S^{\alpha\beta} \dot{U}_\alpha + 2M^{\alpha\beta\mu} (\nabla_\mu U_\alpha)_\perp \right] \quad (2.32)$$

Note que se  $M^{\mu\nu\beta} = q^\beta = 0$ , a expressão acima nos informa que a densidade de momento é  $\frac{2n}{c^2} S^{\alpha\beta} \dot{U}_\alpha$ . Este resultado é obtido em teorias mais simples de fluidos com spin [20,24,28,29].

Resta explicitar a expressão correspondente ao tensor relativista das tensões,  $t^{\beta\alpha}$ , que é dado por [30]:

$$t^{\beta\alpha} = - (p + \pi) h^{\beta\alpha} + \pi^{\beta\alpha} + \hat{\pi}^{\beta\alpha} \quad (2.33)$$

No lado direito desta expressão, os dois primeiros termos são conhecidos:  $p$  é a pressão hidrostática,  $\pi$  é a viscosidade volumar,  $\pi^{\beta\alpha}$  é a pressão anisotrópica (parte simétrica e sem traço de  $t^{\beta\alpha}$ ) e  $\hat{\pi}^{\beta\alpha}$  é a parte antissimétrica de  $t^{\beta\alpha}$ . Como veremos mais adiante  $\pi$  e  $\pi^{\beta\alpha}$  serão interpretados termodinamicamente como fluxos dissipativos e o mesmo valerá para  $\hat{\pi}^{\beta\alpha}$ , onde este último é conhecido por viscosidade rotacional [5,7].

Para finalizar esta etapa, tendo em mãos as ex-

pressões correspondentes a  $B$ ,  $p^\beta$ ,  $Q^\beta$  e  $t^{\beta\alpha}$ , iremos substituí-las nas eqs. (2.19) e (2.20) com a finalidade de exibir a primeira lei da termodinâmica e a lei de conservação do momento linear para o sistema em questão.

$$\begin{aligned}
 & (\dot{n} + n\theta) (ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}) + n \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} n (S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}) \cdot - \\
 & - c^{-2} \left[ q^\mu + M^{\alpha\beta\mu} \Omega_{\alpha\beta} + 2n S^{\alpha\mu} \dot{U}_\mu + 2M^{\alpha\mu\beta} (\nabla_\beta U_\alpha)_\perp \right] \dot{U}_\mu + \\
 & + \nabla_\mu (q^\mu + M^{\alpha\beta\mu} \Omega_{\alpha\beta}) - \left[ -(p + \pi) h^{\beta\alpha} + \pi^{\beta\alpha} \tilde{\pi}^{\beta\alpha} \right] \cdot \\
 & \cdot (\nabla_\beta U_\alpha)_\perp = 0 \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

Tendo em vista a eq. (2.22) e a equação de balanço da energia cinética de spin (2.27'), a equação acima reduz-se a:

$$\begin{aligned}
 & n \dot{\varepsilon} - \nabla_\mu (M^{\alpha\beta\mu} / \Omega_{\alpha\beta}) - \tilde{\pi}^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta\mu} (\nabla_\mu \Omega_{\alpha\beta}) - c^{-2} \left[ q^\mu + \right. \\
 & + M^{\alpha\beta\mu} \Omega_{\alpha\beta} + 2n S^{\alpha\mu} \dot{U}_\mu + 2M^{\alpha\mu\beta} (\nabla_\beta U_\alpha)_\perp \left. \right] \dot{U}_\mu + \nabla_\mu q^\mu + \\
 & + \nabla_\mu (M^{\alpha\beta\mu} / \Omega_{\alpha\beta}) + (p + \pi) \theta - \pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \tilde{\pi}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = 0
 \end{aligned}$$

Reordenando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & n (\dot{\varepsilon} + p\dot{v}) + \left( \frac{1}{\nabla_\mu} - 2c^{-2} \dot{U}_\mu \right) q^\mu = -\pi\theta + \pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \\
 & - \tilde{\pi}^{\alpha\beta} (\omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}) - M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu} \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

onde  $v = \frac{1}{n}$  é o volume por partícula,  $\overset{\perp}{\nabla}_\mu = h_\mu^\alpha \nabla_\alpha$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\omega_{\alpha\beta}$  são, respectivamente, a distorção e a vorticidade. Note a presença do termo  $-2c^{-2} q^\mu \dot{U}_\mu$ , de origem puramente relativista, e que está relacionado com a inércia do fluxo de calor<sup>[45]</sup>. Ainda na eq. (2.35) introduzimos o tensor  $A_{\alpha\beta\mu}$ , que é dado por:

$$A_{\alpha\beta\mu} = (\overset{\perp}{\nabla}_\mu \Omega_{\alpha\beta})_\perp - c^{-2} \left[ 2 (\overset{\perp}{\nabla}_\mu U_{[\alpha})_\perp \dot{U}_{\beta]} + \Omega_{\alpha\beta} \dot{U}_\mu \right] \quad (2.36)$$

Os termos do segundo membro de (2.35) são aqueles de produção de energia interna.

Fazendo a segunda substituição, teremos, após algum algebrismo, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & n I_{\alpha\mu} \dot{U}^\alpha + c^{-2} \left\{ (q_\mu)_\perp^\cdot + q_\mu \theta + q^\beta (\overset{\perp}{\nabla}_\beta U_\mu)_\perp + h_{\beta\mu} \left[ M^{\alpha\nu\beta} \Omega_{\alpha\nu} + \right. \right. \\ & + 2M^{\alpha\beta\nu} (\overset{\perp}{\nabla}_\nu U_\alpha)_\perp \left. \right] + \left[ M_{\alpha\beta\mu} \Omega^{\alpha\beta} + 2M_{\alpha\mu\nu} (\overset{\perp}{\nabla}^\nu U^\alpha)_\perp \right] \theta + \\ & + M^{\alpha\nu\beta} \Omega_{\alpha\nu} (\overset{\perp}{\nabla}_\beta U_\mu)_\perp \left. \right\} + \frac{2n}{c^2} S_{\alpha\mu} \dot{U}^\alpha - \frac{1}{\overset{\perp}{\nabla}_\mu} P + h_{\alpha\mu} \overset{\perp}{\nabla}_\beta (\pi^{\beta\alpha} + \tilde{\pi}^{\beta\alpha}) = \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde o tensor espacial  $I_{\alpha\mu}$  é definido por:

$$I_{\alpha\mu} = \left[ a + c^{-2} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} + \frac{P}{n} \right) \right] h_{\sigma\lambda} + \frac{1}{c^2} (S_{\sigma\lambda})_\perp^\cdot \quad (2.38)$$

sendo  $P = p + \pi$ . Este tensor, como já mencionado no capítulo anterior, representa a inércia de cada elemento do volume do fluido. Note novamente (vide eq. (1.90)) a presença do termo envolvendo derivada segunda do campo velocidade  $U^\mu$ , que, como já res

saltamos anteriormente, representa o efeito de auto-interação.

- 2º Princípio da termodinâmica - Lei de balanço da entropia

Fazendo a substituição de  $s^\mu$  dado pela equação (2.16) em (2.4), obtemos:

$$\nabla_\mu s^\mu = n\dot{s} + \nabla_\mu I^\mu \geq 0 \quad (2.39)$$

onde utilizamos a lei de conservação do número de partículas (eq. 2.22).

Para determinar a produção de entropia e obter as relações fenomenológicas necessárias para completar a descrição do sistema, será necessário fornecer informações acerca da entropia por partícula  $s$ , e o quadrivetor fluxo de difusão de entropia  $I^\mu$ .

Em qualquer descrição termodinâmica de um dado sistema macroscópico, é imprescindível o conhecimento da chamada relação fundamental da termodinâmica [7,9], traduzida pela expressão de  $s$  em função das grandezas termodinâmicas fundamentais. No presente caso, temos:

$$s = s(\epsilon, n) \quad (2.40)$$

Essa expressão deve satisfazer a equação de Gibbs:

$$T\dot{s} = \dot{\epsilon} + p\left(\frac{1}{n}\right)\dot{n} \quad (2.41)$$

onde  $T$  é a temperatura absoluta e  $p$  a pressão termodinâmica.

É importante destacar que a equação de Gibbs é derivada para situações de equilíbrio termodinâmico. Entretanto, como ressaltado na introdução, estamos adotando a hipótese do equilíbrio local, onde a despeito do fato do fluido não encontra-se em equilíbrio termodinâmico vale a equação (2.49) localmente. Uma última observação é necessária: note que em (2.40) ou (2.41) o tensor de spin  $S^{\alpha\beta}$  não é incluído como uma variável termodinâmica, o que está de acordo com a teoria de fluidos polares newtonianos.

O quadrivetor fluxo de difusão de entropia  $I^\mu$  é, em primeira ordem, dado por [4,5,7].

$$I^\mu = \frac{q^\mu}{T} \quad (2.42)$$

Substituindo as equações (2.41) e (2.42) em (2.39), vem:

$$\nabla_\mu \delta^\mu = \frac{n\dot{\epsilon}}{T} + \frac{np}{T} \left(\frac{1}{n}\right)^{\cdot} + \nabla_\mu \left(\frac{q^\mu}{T}\right) \geq 0 \quad (2.43)$$

Levando-se em conta a expressão referente à conservação da energia interna (primeira lei da termodinâmica, eq.(2.35)), temos:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \delta^\mu &= \frac{-np}{T} \left(\frac{1}{n}\right)^{\cdot} - \frac{\frac{1}{V} q^\mu}{T} + \frac{2c^{-2}}{T} q^\mu \dot{U}_\mu - \frac{\pi\theta}{T} + \\ &+ \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} - \frac{\tilde{\pi}^{\alpha\beta}}{T} (\omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}) - \frac{M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu}}{T} + \frac{np}{T} \left(\frac{1}{n}\right)^{\cdot} \\ &+ \nabla_\mu \left(\frac{q^\mu}{T}\right) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Após algumas simplificações chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \Delta^{\mu} = & - \frac{\pi \Theta}{T} + \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} - \frac{\bar{\pi}^{\alpha\beta} (\omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta})}{T} - \\ & - \frac{g^{\mu}{}_{\nu}}{T^2} (\nabla_{\mu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\mu}) - \frac{M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu}}{T} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

que nada mais é que a expressão da produção de entropia.

### - Equações fenomenológicas

A produção de entropia dada pela eq. (2.45) pode ser reescrita de modo mais conveniente, baseado tão unicamente nas propriedades de simetria de alguns tensores aí presentes. Iniciemos definindo o quadrivetor  $\pi^{\mu}$  por:

$$\pi^{\mu} \equiv \frac{1}{2c} \eta^{\mu\alpha\beta\nu} \bar{\pi}_{\alpha\beta} U_{\nu} \quad (2.46)$$

e que pode ser invertida:

$$\bar{\pi}_{\alpha\beta} = - \frac{1}{c} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \pi^{\mu} U^{\nu} \quad (2.47)$$

A partir dessas equações e das similares relacionando  $\omega_{\alpha}$  com  $\omega_{\alpha\beta}$  (eq. 1.11) e  $\Omega_{\alpha}$  com  $\Omega_{\alpha\beta}$  (eq. 1.32), podemos mostrar que:

$$- \bar{\pi}^{\alpha\beta} (\omega_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}) = 2\pi^{\mu} (\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) \quad (2.48)$$

No referencial de repouso temos  $\pi^{\mu} \stackrel{*}{=} (0, \bar{\pi}^{(a)})$ , e o limite newtoniano da equação (2.48) (vide apêndice A), é dado por:

$$2\pi^\mu (\omega_\mu - \Omega_\mu) \rightarrow -\vec{\pi}^{(a)} (\nabla_x \vec{V} - 2\vec{\Omega}) \quad (2.49)$$

o que está de acordo com a expressão obtida na teoria não-relativista [5,6,9].

Uma vez que tanto  $M^{\alpha\beta\mu}$  e  $A_{\alpha\beta\mu}$  são antissimétricos nos dois primeiros índices, definamos os tensores  $M_{\alpha\beta}$  e  $A^{\alpha\beta}$  através das seguintes relações e suas respectivas inversas:

$$M_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{c} \eta_{\alpha\mu\lambda\tau} M^{\mu\lambda}{}_{\beta} U^\tau ; \quad M^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2c} \eta^{\alpha\beta\lambda\tau} M_{\lambda}{}^{\mu} U_\tau \quad (2.50)$$

$$A^{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2c} \eta^{\lambda\alpha\beta\nu} A_{\alpha\beta}{}^{\mu} U_\nu ; \quad A_{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{c} \eta_{\alpha\beta\lambda\tau} A^{\lambda}{}_{\mu} U^\tau \quad (2.51)$$

Fica claro que  $M_{\alpha\beta}$  e  $A^{\alpha\beta}$  estão completamente definidos no tri-espaço perpendicular a  $U^\alpha$  e não tem simetria definida.

Utilizando as relações (2.50) e (2.51), pode ser facilmente encontrado o seguinte resultado:

$$-\frac{1}{T} M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{T} M^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \quad (2.52)$$

Fazendo a decomposição de  $M^{\alpha\beta}$  e  $A_{\alpha\beta}$  em suas partes irredutíveis, podemos escrever:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} M^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{T} (M^{\circ\alpha\beta} + M^{[\alpha\beta]} + M h^{\alpha\beta}) (A_{\alpha\beta}^{\circ} + A_{[\alpha\beta]} + \\ &+ \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} A) = -\frac{1}{T} (M^{\circ\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{\circ} + M^{[\alpha\beta]} A_{[\alpha\beta]} + MA) \quad (2.53) \end{aligned}$$



Nesta expressão, o símbolo  $\circ$  indica que estamos considerando a parte simétrica sem traço,  $M \equiv \frac{1}{3} M^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$  e  $A \equiv A^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ . As partes antissimétricas de  $M^{\alpha\beta}$  e  $A_{\alpha\beta}$  podem ser reexpressas com auxílio dos quadrivetores  $M_{\mu}$  e  $A^{\mu}$ , cujas definições são dadas abaixo:

$$M_{\mu} \equiv -\frac{1}{2c} \eta_{\mu\alpha\beta\nu} M^{[\alpha\beta]} U^{\nu} ; \quad M^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{c} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} M_{\mu} U_{\nu} \quad (2.54)$$

$$A^{\mu} \equiv \frac{1}{c} \eta^{\mu\alpha\beta\nu} A_{[\alpha\beta]} U_{\nu} ; \quad A_{[\alpha\beta]} = -\frac{1}{2c} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} A^{\mu} U^{\nu} \quad (2.55)$$

Com auxílio dessas relações, a equação (2.53) é escrita como:

$$-\frac{1}{T} M^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} (M^{\circ\alpha\mu} A_{\alpha\beta}^{\circ} + M^{\mu} A_{\mu} + M A) \quad (2.56)$$

Será importante, principalmente na obtenção do limite newtoniano da produção de entropia, expressar  $A_{\alpha\beta}$  levando-se em conta as eqs. (2.36) e (2.51), cujo resultado é mostrado a seguir:

$$A_{\alpha\beta} = (\nabla_{\beta} \Omega_{\alpha})_{\perp} - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{1}{c} \eta_{\alpha\mu\nu\tau} (\nabla_{\beta} U^{\mu}) \dot{U}^{\nu} + \Omega_{\alpha} \dot{U}_{\beta} \right] \quad (2.57)$$

Ao fazer  $c \rightarrow \infty$ , a expressão de  $A_{\alpha\beta}$  no referencial de repouso, é dada por:

$$A_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} 0 & | & 0 & \dots & \dots \\ \hline 0 & | & -(\nabla \vec{\Omega})_{ij} & & \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

onde  $(\nabla \vec{\Omega})_{ij} = (\partial_j \Omega_i)$ .

Voltando à expressão da produção de entropia e levando-se em conta as equações (2.48) e (2.56), temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} s^{\mu} = & -\frac{\pi \Theta}{T} - \frac{q^{\mu}}{T^2} (\nabla_{\mu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\mu}) + \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} + \\ & + \frac{2\pi^{\mu}}{T} (\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) - \frac{1}{T} M A - \frac{1}{T} M^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} - \frac{1}{T} M^{\mu} A_{\mu} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

A produção de entropia dada em (2.59) é constituída pelo somatório dos produtos dos fluxos termodinâmicos com suas respectivas forças. As quantidades  $\pi$ ,  $q^{\mu}$ ,  $\pi^{\alpha\beta}$ ,  $\pi^{\mu}$ ,  $M$ ,  $M^{\alpha\beta}$  e  $M^{\mu}$  são os fluxos termodinâmicos, enquanto que as forças são traduzidas pelos gradientes de  $U^{\alpha}$ ,  $\Omega_{\alpha}$  e da temperatura  $T$ . Tais gradientes são medidas das inomogeneidades internas do meio, que, por sua vez, são o indicativo do estado de não-equilíbrio termodinâmico do sistema. A separação entre fluxos e forças termodinâmicas está baseada nos conceitos de causa e efeito: devido a presença de forças termodinâmicas (causa), são estabelecidos os fluxos (efeito). As equações fenomenológicas nada mais são que relações algébricas entre fluxos e forças termodinâmicas, que naturalmente satisfazem a condição de positividade da produção de entropia. Ao estabelecermos tais equações, introduzimos os coeficientes fenomenológicos, que são independentes dos respectivos fluxos e forças. Nos estados próximos do equilíbrio termodinâmico, as equações fenomenológicas são relações lineares entre fluxos e forças termodinâmicas.

Objetivando deduzir as equações fenomenológicas

reescrevamos (2.59) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \delta^{\mu} = \frac{1}{T} [ & \pi {}^0X + q^{\mu} ({}^1X_{\mu})_{\perp} + \pi^{\alpha\beta} ({}^2X_{\alpha\beta})_{\perp} + \\ & + \pi^{\mu} ({}^3X_{\mu})_{\perp} + M^{\mu} X + M^{\alpha\beta} ({}^5X_{\alpha\beta})_{\perp} + M^{\mu} ({}^6X_{\mu})_{\perp} ] \geq 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde  ${}^0X$ ,  ${}^1X_{\mu}$ , ...,  ${}^6X_{\mu}$  são as forças termodinâmicas. As expressões correspondentes são obtidas de imediato ao compararmos (2.59) com (2.60):

$${}^0X = - \theta \quad (2.61a)$$

$$({}^1X_{\mu})_{\perp} = - \frac{h_{\mu}^{\alpha}}{T} (\partial_{\alpha} T - c^{-2} T \dot{U}_{\alpha}) \quad (2.61b)$$

$$({}^2X_{\alpha\beta})_{\perp} = \sigma_{\alpha\beta} \quad (2.61c)$$

$$({}^3X_{\mu})_{\perp} = 2(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) \quad (2.61d)$$

$${}^4X = - A \quad (2.61e)$$

$$({}^5X_{\alpha\beta})_{\perp} = - \overset{\theta}{A}_{\alpha\beta} \quad (2.61f)$$

$$({}^6X_{\mu})_{\perp} = - A_{\mu} \quad (2.61g)$$

Adotaremos o princípio de Curie<sup>[6,9]</sup>, traduzido pela imposição de que fluxos e forças de diferentes caráter tensorial não acoplam-se, ou, em outras palavras, os coeficientes fenomenológicos são escalares. Sendo assim, podemos, em primeira ordem, escrever:

$${}^0X = a_{00} \pi \quad (2.62a)$$

$$({}^1X)_{\perp} = a_{11} q_{\mu} + a_{16} M_{\mu} \quad (2.62b)$$

$$({}^2X_{\mu\nu})_{\perp} = a_{22} \pi_{\mu\nu} \quad (2.62c)$$

$$({}^3X_{\mu})_{\perp} = a_{33} \pi_{\mu} \quad (2.62d)$$

$${}^4X = a_{44} M \quad (2.62e)$$

$$({}^5X_{\mu\nu})_{\perp} = a_{55} \overset{\circ}{M}_{\mu\nu} \quad (2.62f)$$

$$({}^6X_{\mu})_{\perp} = a_{61} q_{\mu} + a_{66} M_{\mu} \quad (2.62g)$$

Note que os coeficientes  $a_{16}$  e  $a_{61}$  evidenciam a existência de acoplamento entre os fluxos termodinâmicos representados por  $q_{\mu}$  e  $M_{\mu}$ . O mesmo não ocorre entre  $M$  e  $\pi$ ,  $q_{\mu}$  ou  $M_{\mu}$  e  $\pi_{\mu}$ , e  $\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}$  e  $\pi^{\alpha\beta}$ . Isto porque, no primeiro caso,  $M$  é um pseudo-escalar e  $\pi$  um verdadeiro escalar; no segundo,  $q_{\mu}$  e  $M_{\mu}$  são verdadeiros vetores (vetores polares) e  $\pi_{\mu}$  um pseudo-vetor (vetor axial); e, por fim, no terceiro caso,  $\pi^{\alpha\beta}$  é um verdadeiro tensor enquanto que  $\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}$  é um pseudo-tensor.

Antes de especificarmos os coeficientes  $a_{00}$ ,  $a_{11}$ , ...,  $a_{66}$ , vejamos que condições estes devem satisfazer para que a produção de entropia seja sempre positiva em todas as configurações do sistema. Substituindo as equações (2.62) em (2.60), segue:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \Delta^{\mu} = & a_{00} \pi^2 + a_{11} q^{\mu} q_{\mu} + (a_{16} + a_{61}) q^{\mu} M_{\mu} + a_{66} M_{\mu} M^{\mu} + \\ & + a_{22} \pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} + a_{33} \pi_{\mu} \pi^{\mu} + a_{44} M^2 + a_{55} \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{M}_{\alpha\beta} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

e, em consequência disso, temos:

$$a_{00} \geq 0; \quad a_{22} \geq 0; \quad a_{33} \leq 0; \quad a_{44} \geq 0; \quad a_{55} \geq 0 \quad (2.64a)$$

$$a_{11} a_{66} \geq \frac{1}{4} (a_{16} + a_{61})^2 \quad (2.64b)$$

As constantes  $a_{00}$ ,  $a_{11}$ , ...,  $a_{66}$  serão identificadas com parâmetros físicos ao calcularmos o limite newtoniano das equações fenomenológicas (2.62). No apêndice A apresentamos detalhes do cálculo, e, abaixo, exibimos os resultados:

$$\left. \begin{aligned} a_{00} &= \frac{1}{\zeta}; & a_{11} &= \frac{-\xi T^{-1}}{\chi\xi - \mu'v'}; & a_{16} &= \frac{h' T^{-1}}{\chi\xi - \mu'v'} \\ a_{22} &= \frac{1}{\eta}; & a_{33} &= -\frac{1}{\eta_r}; & a_{44} &= \frac{1}{\xi^p} \\ a_{55} &= \frac{1}{\zeta_0}; & a_{61} &= \frac{v'}{\chi\xi - \mu'v'}; & a_{66} &= \frac{-\chi}{\chi\xi - \mu'v'} \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

onde  $\zeta$ ,  $\eta$  e  $\eta_r$  são os coeficientes de viscosidade volumar, de distorção e de viscosidade rotacional, respectivamente;  $\chi$  é o usual coeficiente da condução de calor;  $\xi^p$ ,  $\xi^0$  e  $\xi$  são os coeficientes associados aos fluxos dissipativos  $M$ ,  $M^{\alpha\beta}$  e  $M^\mu$  respectivamente. Por fim,  $\mu'$  e  $v'$  estão relacionados com o acoplamento entre os fluxos dissipativos  $q_\mu$  e  $M_\mu$ , e devido as relações de reciprocidade de Onsager [49] temos que:

$$\mu' T^{-1} = -v' \quad (2.66)$$

As equações fenomenológicas dadas pelas eqs. (2.62) são reescritas como mostrado a seguir:

$$\pi = -\zeta\theta \quad (2.67a)$$

$$q_\mu = (a_{11} a_{66} - a_{16} a_{61})^{-1} \left[ -\frac{a_{66} h_\mu^v}{T} (\partial_\nu T - c^{-2} T \dot{U}_\nu) + a_{16} A_\mu \right] \quad (2.67b)$$

$$\pi^{\alpha\beta} = \eta \sigma^{\alpha\beta} \quad (2.67c)$$

$$\pi_{\mu} = -2 \eta_{\mathbf{r}} (\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) \quad (2.67d)$$

$$M = -\xi^{\mathbf{p}} A \quad (2.67e)$$

$$M_{\alpha\beta}^{\mathbf{q}} = -\xi^{\mathbf{q}} A_{\alpha\beta}^{\mathbf{o}} \quad (2.67f)$$

$$M_{\mu} = (a_{11} a_{66} - a_{16} a_{61})^{-1} \left[ \frac{a_{61} h_{\mu}^{\nu}}{T} (\partial_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) - a_{11} A_{\mu} \right] \quad (2.67g)$$

O sistema de equações que rege a evolução do fluido a partir de uma dada configuração inicial é formado pelas leis de balanço do momento-energia, do momento angular de spin e da lei de conservação do número de partículas e, fica completo quando adicionamos as equações fenomenológicas (2.67). Temos agora o mesmo número de equações e de incógnitas. As variáveis ditas fundamentais ou primitivas  $U^{\alpha}$ ,  $\varepsilon$ ,  $S^{\alpha\beta}$  e  $n$  possuem uma equação de evolução ou propagação. Os fluxos dissipativos, ao contrário, estão relacionadas algebricamente com as variáveis fundamentais que caracterizam o estado do sistema. Este é um aspecto importante, pois faz a distinção entre dois tipos de variáveis: as variáveis dinâmicas fundamentais acima mencionadas, e aquelas secundárias, como os fluxos dissipativos. É bom frisar que a descrição apresentada é própria para situações denominadas de quasi-estacionárias<sup>[51]</sup>. Na próxima seção, vamos estender o formalismo apresentado de modo a abranger os regimes não-estacionários.

## 2.2 - Termodinâmica de Processos Irreversíveis para Fluidos com Spin II: Teoria Causal

Como ressaltado na introdução do capítulo, uma das principais dificuldades da termodinâmica de processos irreversíveis apoiada na hipótese do equilíbrio local, é a predição de propagação de sinais térmicos e viscosos com velocidade infinita [31,50]. Isto é obviamente contra a bem estabelecida idéia de causalidade. Vimos ainda, na seção anterior, que a teoria desenvolvida é aplicável somente nas situações ditas quasi-estacionárias, ou seja, naquelas em que as variações espaço-temporais das grandezas básicas são pequenas relativamente a escalas caracterizadas pelo livre caminho médio e livre tempo médio [51].

Com o intuito de estabelecer uma formulação da teoria termodinâmica causal para fluidos com spin, livre dos prejuízos já mencionados, iremos seguir o procedimento delineado nas refs. [31,51,52]. Sendo assim, o primeiro passo é estabelecer a função entropia de não-equilíbrio por partícula:

$$s = s(\varepsilon, n, \pi, q^\mu, \pi^{\alpha\beta}, \pi^\mu, M, M^{\circ\alpha\beta}, M^\mu) \quad (2.68)$$

Os fluxos dissipativos passam a ser tão importantes na caracterização termodinâmica do sistema quanto as variáveis de equilíbrio  $\varepsilon$  e  $n$ . Da eq. (2.68), estabelecemos as seguintes equações de estado:

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = T^{-1}(\varepsilon, n, \pi, q^\mu, \pi^{\alpha\beta}, \pi^\mu, M, M^{\circ\alpha\beta}, M^\mu) \quad (2.69a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial (1/n)} = T^{-1}p(\varepsilon, n, \pi, q^\mu, \pi^{\alpha\beta}, \pi^\mu, M, M^{\circ\alpha\beta}, M^\mu) \quad (2.69b)$$

onde  $p$  e  $T$  são a pressão e a temperatura definidas fora do equilíbrio termodinâmico. As demais equações válidas exclusivamente para estados fora do equilíbrio são:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \pi} = T^{-1} v \alpha_0 \pi \quad (2.69c)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial q_\mu} = T^{-1} v (\alpha_1 q^\mu + \bar{\alpha}_1 M^\mu) \quad (2.69d)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \pi_{\alpha\beta}} = T^{-1} v \alpha_2 \pi^{\alpha\beta} \quad (2.69e)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \pi_\mu} = T^{-1} v \alpha_3 \pi^\mu \quad (2.69f)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial M} = T^{-1} v \alpha_4 M \quad (2.69g)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}} = T^{-1} v \alpha_5 \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} \quad (2.69h)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \overset{\circ}{M}_\mu} = T^{-1} v (\alpha_6 M^\mu + \bar{\alpha}_6 q^\mu) \quad (2.69i)$$

Os coeficientes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6$  são escalares e dependem das variáveis de equilíbrio. Note em (2.69d) e (2.69i) a introdução dos coeficientes  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_6$ . Tais parâmetros estão associados ao acoplamento dos efeitos de  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , uma vez que esses fluxos dissipativos tem o mesmo carater tensorial. Assim, a equação de Gibbs generalizada é dada por:

$$\begin{aligned} T_i = \dot{\varepsilon} + p \left( \frac{1}{n} \right) + v \alpha_0 \pi \dot{\pi} + v (\alpha_1 q^\mu + \bar{\alpha}_1 M^\mu) \dot{q}_\mu + v \alpha_2 \pi^{\alpha\beta} \dot{\pi}_{\alpha\beta} + \\ + v \alpha_3 \pi^\mu \dot{\pi}_\mu + v \alpha_4 M \dot{M} + v \alpha_5 \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}) + v (\alpha_6 M^\mu + \bar{\alpha}_6 q^\mu) \dot{\overset{\circ}{M}}_\mu \end{aligned} \quad (2.70)$$



Além da entropia de não-equilíbrio, devemos estabelecer o fluxo espacial de entropia de não-equilíbrio. A expressão mais geral para  $I^\mu$  contendo contribuições de todos os fluxos até segunda ordem é:

$$\begin{aligned}
 I^\mu = & \frac{1}{T} q^\mu + \beta_1 \pi q^\mu + \beta_2 \pi^\mu_{\nu} q^\nu + \frac{1}{C} \beta_3 \eta^{\mu\nu\alpha\beta} q_\nu \pi_\alpha U_\beta + \\
 & + \beta_4 M^\mu + \beta_5 \pi M^\mu + \beta_6 \pi^\mu_{\nu} M^\nu + \frac{1}{C} \beta_7 \eta^{\mu\nu\alpha\beta} M_\nu \pi_\alpha U_\beta + \\
 & + \beta_8 M \pi^\mu + \beta_9 M^\mu_{\nu} \pi^\nu
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

sendo  $\beta_i, i = 1, \dots, 9$ , coeficientes fenomenológicos que são funções apenas das variáveis de equilíbrio.

O procedimento para o cálculo da produção de entropia e, a conseqüente dedução das novas equações fenomenológicas, é o mesmo delineado na seção anterior. A partir da eq. (2.39), juntamente com as eqs. (2.70) e (2.71), obteremos:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu \Delta^\mu = & \frac{n\dot{\varepsilon}}{T} + \frac{np}{T} \left(\frac{1}{n}\right)^\cdot + \frac{\alpha_0 \pi \dot{\pi}}{T} + \frac{1}{T} (\alpha_1 q^\mu + \bar{\alpha}_1 M^\mu) \dot{q}_\mu + \\
 & + \frac{\alpha_2 \pi^{\alpha\beta} \dot{\pi}_{\alpha\beta}}{T} + \frac{\alpha_3 \pi^\mu \dot{\pi}_\mu}{T} + \frac{\alpha_4 M \dot{M}}{T} + \frac{\alpha_5 M^{\alpha\beta} \dot{M}_{\alpha\beta}}{T} + \\
 & + \frac{1}{T} (\alpha_6 M^\mu + \alpha_6 q^\mu) \dot{M}_\mu + \nabla_\mu \left( \frac{q^\mu}{T} + \beta_1 \pi q^\mu + \beta_2 \pi^\mu_{\nu} q^\nu + \right. \\
 & + \frac{1}{C} \beta_3 \eta^{\mu\nu\alpha\beta} q_\nu \pi_\alpha U_\beta + \beta_4 M^\mu + \beta_5 \pi M^\mu + \beta_6 \pi^\mu_{\nu} M^\nu + \\
 & \left. + \frac{1}{C} \beta_7 \eta^{\mu\nu\alpha\beta} M_\nu \pi_\alpha U_\beta + \beta_8 M \pi^\mu + \beta_9 M^\mu_{\nu} \pi^\nu \right) \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Tendo em vista a equação de balanço da energia interna (eq. 2.35), bem como as eqs. (2.49) e (2.56), podemos escrever a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \delta^{\mu} = \frac{1}{T} \left[ \pi^0 X + q^{\mu} ({}^1 X_{\mu})_{\perp} + \pi^{\alpha\beta} ({}^2 X_{\alpha\beta})_{\perp} + \pi^{\mu} ({}^3 X_{\mu})_{\perp} + \right. \\ \left. + M^{\mu} X + M^{\alpha\beta} ({}^5 X_{\alpha\beta})_{\perp} + M^{\mu} ({}^6 X_{\mu})_{\perp} \right] + \beta_4 \nabla_{\mu} M^{\mu} \geq 0 \quad (2.73) \end{aligned}$$

Como a produção de entropia é sempre dada por um somatório do produto entre fluxos e forças termodinâmicas, somos forçados a fazer  $\beta_4 = 0$ . Continuando, as forças termodinâmicas presentes em (2.73) são exibidas a seguir:

$$\begin{aligned} X = -\theta + \alpha_0 \dot{\pi} + T a_1 q^{\mu} \nabla_{\mu} \beta_1 + T \beta_1 \nabla_{\mu} q^{\mu} + T \beta_5 \nabla_{\mu} M^{\mu} + \\ + T b_1 M^{\mu} \nabla_{\mu} \beta_5 \quad (2.74a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}^1 X_{\mu})_{\perp} = -\frac{h_{\mu}^{\nu}}{T} (\nabla_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) + \alpha_1 (q_{\mu})_{\perp} + \alpha_6 (M_{\mu})_{\perp} + \\ + T a_2 \pi \frac{\perp}{\nabla_{\mu}} \beta_1 + T \beta_1 \frac{\perp}{\nabla_{\mu}} \pi + T c_1 \pi^{\alpha} \nabla_{\alpha} \beta_2 + T \beta_2 (\nabla_{\alpha} \pi^{\alpha})_{\perp} + \\ + \frac{T d_1 \beta_3}{c} \eta^{\tau \lambda} \pi_{\alpha} (\nabla_{\tau} U_{\beta}) h^{\lambda}_{\mu} + \frac{T \beta_3}{c} \eta^{\tau \mu} \pi^{\alpha\beta} (\nabla_{\tau} \pi_{\alpha}) U_{\beta} + \\ + \frac{T e}{c} \eta^{\tau \mu} \pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha} U_{\beta} (\nabla_{\tau} \beta_3) \quad (2.74b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}^2 X_{\alpha\beta})_{\perp} = \sigma_{\alpha\beta} + \alpha_2 (\pi_{\alpha\beta})_{\perp} + T c_2 q_{(\beta} \frac{\perp}{\nabla_{\alpha}} \beta_2 + \\ + T \beta_2 \left[ \nabla_{(\alpha} q_{\beta)} \right]_{\perp} + T \beta_6 \nabla_{(\alpha} M_{\beta)} + T f_1 M_{(\beta} \frac{\perp}{\nabla_{\alpha}} \beta_6 \quad (2.74c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ({}^3X_\mu)_\perp &= +2(\omega_\mu - \Omega_\mu) + \alpha_3 (\pi_\mu)_\perp + \frac{T\beta_3 d_2}{c} \eta^{\tau\nu}{}^\beta q_\nu; \\
 \cdot (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda{}_\mu &+ \frac{T\beta_3}{c} \eta^{\tau\nu}{}^\beta (\nabla_\tau q_\nu) U_\beta + \frac{T e_2}{c} \eta^{\tau\nu}{}^\beta q_\nu U_\beta \nabla_\tau \beta_3 + \\
 + \frac{T\beta_7 g_1}{c} \eta^{\tau\nu}{}^\beta M_\nu (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda{}_\mu &+ \frac{T\beta_7}{c} \eta^{\tau\nu}{}^\beta (\nabla_\tau M_\nu) U_\beta + \\
 + \frac{T h_1}{c} \eta^{\tau\nu}{}^\beta M_\nu U_\beta (\nabla_\tau \beta_7) &+ T\beta_8 \frac{\perp}{\nabla_\mu} M + T \ell_1 M \frac{\perp}{\nabla_\mu} \beta_8 + \\
 + T\beta_9 (\nabla_\alpha \overset{\circ}{M}{}^\alpha{}_\mu)_\perp &+ T m_1 \overset{\circ}{M}{}^\alpha{}_\mu \nabla_\alpha \beta_9 \quad (2.74d)
 \end{aligned}$$

$${}^4X = -A + \alpha_4 \overset{\circ}{M} + T\beta_8 \nabla_\mu \pi^\mu + T \ell_2 \pi^\mu \nabla_\mu \beta_8 \quad (2.74e)$$

$$\begin{aligned}
 ({}^5X_{\alpha\beta})_\perp &= -\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \alpha_5 (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta})_\perp + T\beta_1 (\nabla_\alpha \overset{\circ}{\pi}{}^\beta)_\perp + \\
 + T m_2 \pi (\overset{\circ}{\nabla}{}^\perp{}_\alpha) \beta_9 &\quad (2.74f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ({}^6X_\mu)_\perp &= -A_\mu + \alpha_1 (q_\mu)_\perp + \alpha_6 (M_\mu)_\perp + T\beta_5 \frac{\perp}{\nabla_\mu} \pi + \\
 + T b_2 \pi \frac{\perp}{\nabla_\mu} \beta_5 &+ T\beta_6 (\nabla_\alpha \pi^\alpha{}_\mu)_\perp + T f_2 \pi^\alpha{}_\mu \nabla_\alpha \beta_6 + \\
 + \frac{T\beta_7 g_2}{c} \eta^{\tau\alpha\beta} \pi_\alpha (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda{}_\mu &+ \frac{T\beta_7}{c} \eta^{\tau\alpha\beta} (\nabla_\tau \pi_\alpha) U_\beta + \\
 + \frac{T h_2}{c} \eta^{\tau\alpha\beta} \pi_\alpha U_\beta (\nabla_\tau \beta_7) &\quad (2.74g)
 \end{aligned}$$

Nestas expressões introduzimos as constantes adimensionais  $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots$ , etc, cuja função é eliminar a ambiguidade na separação das forças termodinâmicas. Tais parâmetros são tais que  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = \dots = m_1 + m_2 = 1$ .

Ao relacionarmos os fluxos e as forças termodinâmicas

micas, obteremos as novas equações fenomenológicas. Novamente adotaremos o princípio de Curie, de modo que podemos escrever:

$${}^0X = a_{00} \pi \quad (2.75a)$$

$$\left( {}^1X_{\mu} \right)_{\perp} = a_{11} q_{\mu} + a_{16} M_{\mu} \quad (2.75b)$$

$$\left( {}^2X_{\alpha\beta} \right)_{\perp} = a_{22} \pi_{\alpha\beta} \quad (2.75c)$$

$$\left( {}^3X_{\mu} \right)_{\perp} = a_{33} \pi_{\mu} \quad (2.75d)$$

$${}^4X = a_{44} M \quad (2.75e)$$

$$\left( {}^5X_{\alpha\beta} \right)_{\perp} = a_{55} M_{\alpha\beta}^0 \quad (2.75f)$$

$$\left( {}^6X_{\mu} \right)_{\perp} = a_{66} q_{\mu} + a_{66} M_{\mu} \quad (2.75g)$$

Substituindo as eqs. (2.75) em (2.73) teremos as mesmas restrições obtidas anteriormente dadas pelas eqs. (2.64a) e (2.64b).

No sentido de explicitar as novas equações fenomenológicas, substituamos as forças dadas pelas equações (2.74) nas eqs. (2.75) que resultam nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \dot{\pi} = & \theta - T a_1 q^{\mu} \nabla_{\mu} \beta_1 - T \beta_1 \nabla_{\mu} q^{\mu} - T \beta_5 \nabla_{\mu} M^{\mu} - \\ & - T b_1 M^{\mu} \nabla_{\mu} \beta_5 + a_{00} \pi \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \left( \pi_{\alpha\beta} \right)_{\perp} \dot{=} & - \sigma_{\alpha\beta} - T c_2 q_{(\beta} \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha)} \beta_2 - T \beta_2 \nabla_{(\alpha} \overset{\circ}{q}_{\beta)} - \\ & - T \beta_6 \nabla_{(\alpha} \overset{\circ}{M}_{\beta)} - T f_1 M_{(\beta} \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha)} \beta_6 + a_{22} \pi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 (\pi_\mu)^\cdot \perp &= -2(\omega_\mu - \Omega_\mu) - \frac{T \beta_3 d_2}{c} \eta^{\tau\nu} \lambda^\beta q_\nu (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda_\mu - \\
 &- \frac{T \beta_3}{c} \eta^{\tau\nu} \mu^\beta (\nabla_\tau q_\nu) U_\beta - \frac{T e_2}{c} \eta^{\tau\nu} \mu^\beta U_\beta (\nabla_\tau \beta_3) - \\
 &- \frac{T \beta_7 g_1}{c} \eta^{\tau\nu} \lambda^\beta M_\nu (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda_\mu - \frac{T \beta_7}{c} \eta^{\tau\nu} \mu^\beta (\nabla_\tau M_\nu) U_\beta - \\
 &- \frac{T h_1}{c} \eta^{\tau\nu} \mu^\beta M_\nu U_\beta (\nabla_\tau \beta_7) - T \beta_8 \overset{\perp}{\nabla}_\mu M - T \ell_1 M \overset{\perp}{\nabla}_\mu \beta_8 - \\
 &- T \beta_9 (\nabla_\alpha \overset{\circ}{M}^\alpha_\mu) \perp - T m_1 \overset{\circ}{M}^\alpha_\mu \nabla_\alpha \beta_9 + a_{33} \pi_\mu \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

$$\alpha_4 \dot{M} = A - T \beta_8 \nabla_\mu \pi^\mu - T \ell_2 \pi^\mu \nabla_\mu \beta_8 + a_{44} M \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_5 (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}) \perp &= \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} - T \beta_1 (\nabla_\alpha \overset{\circ}{\pi}^\beta) \perp - T m_2 \pi (\overset{\circ}{\nabla}^\perp_\alpha) \beta_9 + \\
 &+ a_{55} \overset{\circ}{M}_{\alpha\beta} \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 (q_\mu)^\cdot \perp + \bar{\alpha}_6 (M_\mu)^\cdot \perp &= \frac{h_\mu^\nu}{T} (\nabla_\mu T - c^{-2} T \dot{U}) - T a_2 \pi \overset{\perp}{\nabla}_\mu \beta_1 - \\
 &- T \beta_1 \overset{\perp}{\nabla}_\mu \pi - T c_1 \pi^\alpha_\mu \nabla_\alpha \beta_2 - T \beta_2 (\nabla_\alpha \pi^\alpha_\mu) \perp - \\
 &- \frac{T d_1 \beta_3}{c} \eta^{\tau\lambda} \alpha^\beta \pi_\alpha (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda_\mu - \frac{T \beta_3}{c} \eta^{\tau\mu} \alpha^\beta (\nabla_\tau \pi_\alpha) U_\beta - \\
 &- \frac{T e_1}{c} \eta^{\tau\mu} \alpha^\beta \pi_\alpha U_\beta (\nabla_\tau \beta_3) + a_{11} q_\mu + a_{16} M_\mu \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}_1 (q_\mu)^\cdot \perp + \alpha_6 (M_\mu)^\cdot \perp &= A_\mu - T \beta_5 \overset{\perp}{\nabla}_\mu \pi - T b_2 \pi \overset{\perp}{\nabla}_\mu \beta_5 - \\
 &- T \beta_6 (\nabla_\alpha \pi^\alpha_\mu) \perp - T f_2 \pi^\alpha_\mu \nabla_\alpha \beta_6 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{T \beta_7 g_2}{c} \eta^\tau_{\lambda} \alpha^\beta \pi_\alpha (\nabla_\tau U_\beta) h^\lambda_{\mu} - \frac{T \beta_7}{c} \eta^\tau_{\mu} \alpha^\beta (\nabla_\tau \pi_\alpha) U_\beta - \\
 & - \frac{T h_2}{c} \eta^\tau_{\mu} \alpha^\beta \pi_\alpha U_\beta (\nabla_\tau \beta_7) + a_{61} q_\mu + a_{66} M_\mu \quad (2.82)
 \end{aligned}$$

As equações fenomenológicas acima obtidas são mais complexas que aquelas da seção anterior. A derivada temporal de cada fluxo dissipativo é diretamente responsável pelo caráter finito de velocidade de propagação dos sinais térmicos, viscosos e das ondas de spin<sup>[53]</sup>. Temos, na verdade, equações de evolução para os fluxos dissipativos, que, como dissemos anteriormente, tem o mesmo status das variáveis de equilíbrio. Devido ao fato de  $M_\mu$  e  $q_\mu$  possuírem o mesmo caráter tensorial, suas equações de evolução são acopladas. Como veremos na próxima seção, a velocidade de propagação das ondas spin e das perturbações térmicas conterão informação deste acoplamento. Note que as equações deduzidas possuem termos de segunda ordem, que são especificamente aqueles que envolvem gradientes dos coeficientes  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), bem como os gradientes dos fluxos dissipativos. Isso porque os gradientes dos coeficientes fenomenológicos (termos de ordem zero) são considerados termos de primeira ordem, e gradientes dos fluxos dissipativos (termos de primeira ordem) são termos de segunda ordem.

Daqui por diante limitar-nos-emos a teoria linear por uma questão de simplicidade. Nesta aproximação os coeficientes  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , são considerados próximos de zero. As equações de evolução dos fluxos dissipativos reduzem-se a:

$$\alpha_0 \dot{\pi} = \Theta + a_{00} \pi \quad (2.76')$$

$$\alpha_2 (\pi_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} = -\sigma_{\alpha\beta} + a_{22} \pi_{\alpha\beta} \quad (2.77')$$

$$\alpha_3 (\pi_{\mu})_{\perp}^{\cdot} = -2(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) + a_{33} \pi_{\mu} \quad (2.78')$$

$$\alpha_4 \dot{M} = A + a_{44} M \quad (2.79')$$

$$\alpha_5 (\overset{o}{M}_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} = \overset{o}{A}_{\alpha\beta} + a_{55} \overset{o}{M}_{\alpha\beta} \quad (2.80')$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 (q_{\mu})_{\perp}^{\cdot} + \bar{\alpha}_6 (M_{\mu})_{\perp}^{\cdot} &= \frac{h_{\mu}^{\nu}}{T} (\nabla_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) + \\ &+ a_{11} q_{\mu} + a_{16} M_{\mu} \end{aligned} \quad (2.81')$$

$$\bar{\alpha}_1 (q_{\mu})_{\perp}^{\cdot} + \alpha_6 (M_{\mu})_{\perp}^{\cdot} = A_{\mu} + a_{61} q_{\mu} + a_{66} M_{\mu} \quad (2.82')$$

A identificação dos parâmetros  $\alpha_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_6$  é feita ao estabelecermos o limite newtoniano (apêndice A) das equações (2.76'), ..., (2.82'), e compararmos com as equações correspondentes encontradas na ref. [39]. Assim, temos:

$$\alpha_0 = -\tau_0 a_{00} \quad , \quad \alpha_2 = -\tau_2 a_{22} \quad , \quad \alpha_3 = -\tau_3 a_{33} \quad (2.83)$$

$$\alpha_4 = -\tau_4 a_{44} \quad , \quad \alpha_5 = -\tau_5 a_{55}$$

onde  $\tau_0, \tau_2, \dots, \tau_5$  são os tempos de relaxação associados com os respectivos fluxos dissipativos. Os coeficientes  $a_{00}, a_{22}, \dots$  e  $a_{55}$  já foram identificados anteriormente (vide eq. (2.65)). Os coeficientes  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_6$  e  $\bar{\alpha}_6$  são dados convenientemente por:

$$\alpha_1 = -\tau_1 a_{11} \quad , \quad \alpha_6 = -\tau_6 a_{66} \quad , \quad \bar{\alpha}_1 = -\bar{\tau}_1 a_{16} \quad ,$$

$$\bar{\alpha}_6 = +\bar{\tau}_6 a_{61} \tag{2.84}$$

onde  $a_{11}, a_{66}, a_{16}$  e  $a_{61}$  são encontrados em (2.65);  $\bar{\tau}_1$  e  $\bar{\tau}_6$  são os tempos de relaxação relativos ao acoplamento dos fluxos dissipativos  $q_\mu$  e  $M_\mu$ , enquanto que  $\tau_1$  e  $\tau_6$  são aqueles associados a esses fluxos dissipativos.

Substituindo (2.83) nas eqs. (2.76') ... (2.82'), obteremos as seguintes equações de evolução para o caso linear:

$$\tau_0 \dot{\pi} + \pi = -\zeta \theta \tag{2.85}$$

$$\tau_2 (\pi_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} + \pi_{\alpha\beta} = \eta \sigma_{\alpha\beta} \tag{2.86}$$

$$\tau_3 (\pi_\mu)_{\perp}^{\cdot} + \pi_\mu = -2\eta_T (\omega_\mu - \Omega_\mu) \tag{2.87}$$

$$\tau_4 \dot{M} + M = -\xi^p A \tag{2.88}$$

$$\tau_5 (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} + \overset{\circ}{M}_{\alpha\beta} = -\overset{\circ}{\xi} \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} \tag{2.89}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_\mu \\ \dot{M}_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{IM} \begin{pmatrix} q_\mu \\ M_\mu \end{pmatrix} + \mathbf{IN}_\mu \tag{2.90}$$

onde



$$\mathbb{M} = (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6)^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} \alpha_6 - a_{61} \bar{\alpha}_6 & a_{16} \alpha_6 - a_{66} \bar{\alpha}_6 \\ a_{61} \alpha_1 - a_{11} \bar{\alpha}_1 & a_{66} \alpha_1 - a_{16} \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

$$\mathbb{N}_\mu = (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_6 h_\mu^\nu}{T} (\partial_\nu T - c^{-2} T \dot{U}_\nu) - \bar{\alpha}_6 A_\mu - \\ - (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6) \frac{q^\nu \dot{U}_\nu}{c^2} U_\mu \\ - \bar{\alpha}_1 \frac{h_\mu^\nu}{T} (\partial_\nu T - c^{-2} T \dot{U}_\nu) + \alpha_1 A_\mu - \\ - (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6) \frac{M^\nu \dot{U}_\nu}{c^2} U_\mu \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

As equações lineares de evolução (2.85), ..., (2.90) são a versão relativista daquelas encontradas na ref. [39]. É interessante observar que os termos  $q^\nu \dot{U}_\nu \frac{U_\mu}{c^2}$  e  $M^\nu \dot{U}_\nu \frac{U_\mu}{c^2}$  são correções de origem relativista sem, portanto, contraparte na teoria newtoniana.

Além das restrições impostas aos coeficientes pela condição de positividade da produção de entropia (equação 2.64), temos outras que são obtidas quando levamos em conta as relações de reciprocidade de Onsager e a condição de estabilidade do estado de equilíbrio termodinâmico.

As relações de reciprocidade de Onsager<sup>[6,49]</sup> aplicadas aos coeficientes associados ao acoplamento dos fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$  foram exibidas em (2.66) e que ainda podem ser escritas como

$$a_{16} = - a_{61} = a \quad (2.92)$$

Se calcularmos a derivada segunda da entropia por partícula de não-equilíbrio,  $s$ , com relação a  $q^\mu$  e  $M_\mu$  e impondo que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial q^\mu \partial M_\nu} = \frac{\partial^2 s}{\partial M^\mu \partial q_\nu}, \text{ segue:}$$

$$\begin{aligned} v T^{-1} \bar{\alpha}_6 \delta^\nu_\mu + v \frac{\partial T^{-1}}{\partial q^\mu} (\alpha_6 M^\nu + \bar{\alpha}_6 q^\nu) = \\ = v T^{-1} \bar{\alpha}_1 \delta^\nu_\mu + v \frac{\partial T^{-1}}{\partial M^\mu} (\alpha_1 q^\nu + \bar{\alpha}_1 M^\nu) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Em consequência disso, temos, ao igualarmos os termos de ordem zero de ambos os membros, a seguinte igualdade:

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_6 \quad (2.95)$$

Os segundos termos de ambos os membros são quadráticos nos fluxos dissipativos (envolvem produtos do tipo  $q^\mu q_\nu$ ,  $q^\mu M_\nu$ ,  $q^\nu M_\mu$  e  $M^\nu M_\mu$ ). Agora, tendo em vista as eqs. (2.93), (2.95) e as relações entre  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_6$  com  $\bar{\tau}_1$ ,  $a_{16}$  e  $\bar{\tau}_6$ ,  $a_{61}$  dadas pela eq. (2.84), segue:

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_6 = \tau \quad (2.96)$$

Portanto, os tempos de relaxação envolvidos com os acoplamentos dos fluxos  $q_\mu$  e  $M_\mu$  são iguais.

Agora consideraremos uma situação em que os únicos fluxos dissipativos presentes sejam  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , e que as forças termodinâmicas são, a partir de um dado instante, colocadas iguais a zero no sentido que inexistam gradientes de temperatura, de velocidade angular de spin e aceleração. Desse modo, o sistema tenderá ao estado de equilíbrio caracterizado por  $q^\mu = M^\mu = 0$ . Então, tendo essa informação em mente, tomemos

sistema das equações de evolução de  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , que nesta situação é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}^\mu \\ \dot{M}^\mu \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} q^\mu \\ M^\mu \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

Podemos entender o sistema dado acima como um sistema autônomo de equações diferenciais<sup>[63]</sup>, uma vez que os elementos da matriz  $\mathbf{M}$  não apresentam dependência explícita da coordenada temporal<sup>(\*)</sup>. Note que esses mesmos elementos independem também de  $q^\mu$  e  $M^\mu$ . O ponto crítico do sistema (no sentido da teoria de sistemas autônomos de eqs. diferenciais) é obtido quando fazemos  $\dot{q}^\mu = \dot{M}^\mu = 0$ , obtendo simplesmente  $q^\mu = M^\mu = 0$ . Como tal ponto representa fisicamente o estado de equilíbrio termodinâmico, ele deve ser estável, de modo que todas as curvas no plano de fase tendem para o mesmo, como ilustrado na fig. (2.1). Duas condições devem ser satisfeitas para tal comportamento das curvas:

$$\det \mathbf{M} = \frac{a_{11} a_{66} + a^2}{a_{11} a_{66} \tau_1 \tau_6 - a^2 \tau^2} > 0 \quad (2.98)$$

e

$$\text{tr } \mathbf{M} = \frac{-(\tau_1 + \tau_6) a_{11} a_{66}}{a_{11} a_{66} \tau_1 \tau_6 - a^2 \tau^2} \leq 0 \quad (2.99)$$

---

(\*) Na verdade os elementos da matriz  $\mathbf{M}$  são funções das variáveis de equilíbrio  $\epsilon$  e  $v$ , que, por sua vez podem depender explicitamente do tempo.

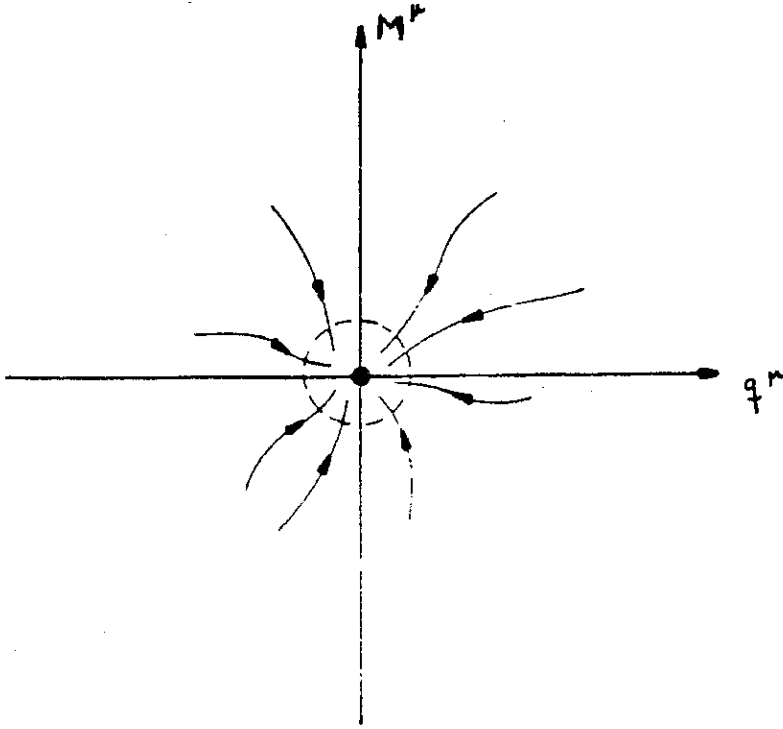


Fig. 2.1 - Estabilidade do estado de equilíbrio termodinâmico.

onde  $\det \mathbf{M}$  e  $\text{tr } \mathbf{M}$  são, respectivamente, o determinante e o traço da matriz  $\mathbf{M}$  calculados no ponto crítico. Para que as desigualdades dadas em (2.98) e (2.99) sejam satisfeitas, basta somente que seja satisfeita a seguinte relação:

$$\tau_1 \tau_6 \geq \frac{a^2 \tau^2}{a_{11} a_{66}} \quad (2.100)$$

Esta relação pode ser também deduzida ao impormos que  $\delta^2 s$  calculada no estado de equilíbrio seja necessariamente negativo, e em consequência disso, a entropia seja máxima neste estado. Então, tomando a eq. de Gibbs generalizada (2.70), obtemos:

$$(\delta^2 s)_{eq} = \delta^2 s_{eq} + \frac{V}{T_{eq}} (\alpha_1 \delta q^\mu \delta q_\mu + 2\alpha \delta q^\mu \delta M_\mu + \alpha_6 \delta M^\mu \delta M_\mu) \leq 0 \quad (2.101)$$

Nesta expressão  $s_{eq}$  é a entropia calculada no equilíbrio local, e que satisfaz a  $\delta^2 s_{eq} \leq 0$ . Para que (2.101) seja satisfeita é de fato necessário impor a condição (2.100) (vide apêndice C). Uma relação idêntica a esta é encontrada para o caso de fluidos termoelétricos relativistas<sup>[64]</sup>, onde há o acoplamento entre o fluxo de calor  $q^\mu$  e a corrente de condução elétrica  $I_e^\mu$ . Neste trabalho, a relação (2.100) garante que a entropia é máxima no estado de equilíbrio.

O quadro apresentado anteriormente pode ser estendido de modo a tratarmos de estados estacionários fora do equilíbrio termodinâmico. Tais estados são caracterizados pelo valor constante das quantidades tais como as variáveis de equilíbrio e dissipativas com relação a coordenada temporal. Então, vamos novamente levar em conta unicamente os fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , e impomos que a partir de dado momento as forças termodinâmicas (gradientes de temperatura, de velocidade angular de spin e a aceleração) sejam colocadas independentes do tempo. O sistema de equações de evolução para  $q^\mu$  e  $M^\mu$  são escritos da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} (\dot{q}^\mu)_\perp \\ (\dot{M}^\mu)_\perp \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} q^\mu \\ M^\mu \end{pmatrix} +$$

$$+ (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6) \left( \begin{array}{l} \frac{\alpha_6}{T} h_{\mu}^{\nu} (\partial_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) - \bar{\alpha}_6 A_{\mu} \\ - \frac{\bar{\alpha}_1 h_{\mu}^{\nu}}{T} (\partial_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) + \alpha_1 A_{\mu} \end{array} \right) \quad (2.102)$$

onde  $\mathbf{M}$  é dado por (2.91). O sistema pode ser novamente interpretado como um sistema autônomo de equações diferenciais. Entretanto, para evitar qualquer ambiguidade, imporemos que os coeficientes fenomenológicos sejam aproximadamente constantes. Teremos, desse modo, um único ponto crítico caracterizado por  $q^{\mu} = q^{\mu}_{est}$ ,  $M^{\mu} = M^{\mu}_{est}$ , que representa um estado estacionário fora do equilíbrio termodinâmico. Sendo o comportamento das curvas na vizinhança do ponto crítico determinado pelo primeiro termo do lado direito da eq. (2.102), e sendo válida a relação (2.100), segue que as curvas tenderão ao ponto crítico (fig. 2.2). Portanto, a despeito das simplificações, temos que o estado estacionário de não equilíbrio é também estável.

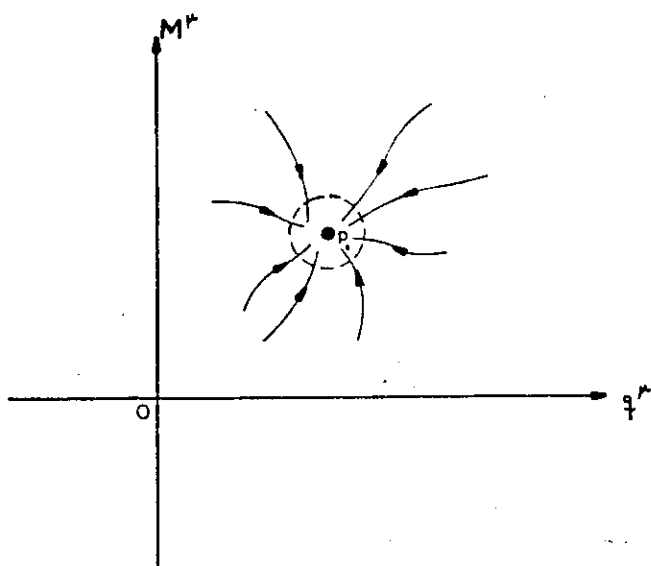


Fig. 2.2 - Estabilidade do estado rotacionário de não-equilíbrio (ponto  $P_0$ ).

### 2.3 - Propagação das Ondas Térmicas e de Spin

Nesta seção continuaremos a explorar as consequências do sistema acoplado de equações de evolução dos fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ . Num exemplo simples calcularemos as velocidades de propagação das ondas térmicas e de spin, onde verificaremos o efeito do acoplamento dos fluxos em questão.

Consideremos um fluido em repouso sem expansão e aceleração num campo gravitacional dado. O fluido está sujeito apenas aos processos dissipativos representados por  $q^\mu$  e  $M^\mu$ . Nesse caso as leis de conservação da energia e balanço de momento angular reduzem-se a:

$$n c_v \dot{T} + \nabla_\mu q^\mu = - M^\mu A_\mu \quad (2.103)$$

$$- n J h^\mu_\alpha \dot{\Omega}^\alpha + \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\tau\lambda} (\nabla_\nu M_\tau) U_\lambda = 0 \quad (2.104)$$

Na equação (2,103) fizemos  $\dot{\epsilon} = c_v T$ , sendo  $c_v = \frac{\partial \epsilon}{\partial T}$  o calor específico do fluido. A eq. (2.104) foi obtida a partir da eq. (2.26) após utilizarmos as relações (1.36), (1.37), (2.50) e (2.54). Por simplicidade, adotamos  $j^{\mu\alpha} = - J h^{\mu\alpha}$ , onde  $J$  é o momento de inércia por partícula. A condição de rigidez das partículas do fluido (eq. 1.46) nesse caso é reduzida a  $\dot{J} = 0$ .

Derivando covariantemente as equações (2.103) e (2.104) com relação ao tempo, vem:

$$n c_v \ddot{T} + (\nabla_\mu q^\mu)^\cdot = - \dot{M}^\mu A_\mu - M^\mu \dot{A}_\mu \quad (2.105)$$

$$- n J h^\mu_\alpha \ddot{\Omega}^\alpha + \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla_\nu M_\lambda)^\cdot U_\tau = 0 \quad (2.106)$$

onde  $c_v$  é considerado constante. Devido ao fato do espaço-tempo possuir curvatura não-nula, podemos escrever:

$$(\nabla_\mu q^\mu)^\cdot = U^\alpha \nabla_\alpha (\nabla_\mu q^\mu) = \nabla_\mu \dot{q}^\mu + R_{\sigma\nu} q^\sigma U^\nu \quad (2.107)$$

$$(\nabla_\nu M_\lambda)^\cdot = \nabla_\nu \dot{M}_\lambda - R^\sigma_{\lambda\nu\alpha} M_\sigma U^\alpha \quad (2.108)$$

sendo  $R_{\sigma\nu}$  e  $R^\sigma_{\lambda\nu\alpha}$  os tensores de Ricci e de curvatura, respectivamente.

Substituindo as eqs. (2.107) e (2.108) nas eqs. (2.105) e (2.106), obtemos:

$$n c_v \ddot{T} + \nabla_\mu \dot{q}^\mu = -\dot{M}^\mu A_\mu - M^\mu \dot{A}_\mu - R_{\sigma\nu} q^\sigma U^\nu \quad (2.109)$$

$$-n J(\ddot{\Omega}^\mu)_{\perp} + \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla_\nu \dot{M}_\lambda) U_\tau = + \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\lambda\tau} R^\sigma_{\lambda\nu\alpha} M_\sigma U^\alpha \quad (2.110)$$

O próximo passo será substituir as equações de evolução linearizadas de  $q^\mu$  e  $M^\mu$  (eq. 2.90) nas equações acima. Nas equações de evolução dos fluxos dissipativos é assumido, por simplicidade, que os elementos  $M_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) da matriz  $\mathbf{M}$ , bem como os coeficientes multiplicadores de  $A_\mu$  e  $h_\mu^\nu (\partial_\nu T - c^{-2} \dot{U}_\nu)$ , presentes em  $\mathbf{N}_\mu$ , sejam constantes. Prosseguindo, temos:

$$\begin{aligned} n c_v \ddot{T} + M_{11} \nabla_\mu q^\mu + M_{12} \nabla_\mu M^\mu + N_1 \nabla_\mu (h^{\mu\nu} \nabla_\nu T) + \bar{N}_1 \nabla_\mu A^\mu = \\ = - (M_{21} q_\mu + M_{22} M_\mu + \bar{N}_2 h_\mu^\nu \nabla_\nu T + N_2 A_\mu) A^\mu - M^\mu \dot{A}_\mu - R_{\sigma\nu} q^\sigma U^\nu \end{aligned} \quad (2.111)$$



$$\begin{aligned}
 -n J (\ddot{\Omega}^\mu)_{\perp} + \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\lambda\tau} \left[ M_{21} \nabla_\nu q_\lambda + M_{22} \nabla_\nu M_\lambda + \bar{N}_2 \nabla_\nu (h_\lambda^\sigma \nabla_\sigma T) + \right. \\
 \left. + N_2 \nabla_\nu A_\lambda \right] U_\tau = \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\lambda\tau} R^\sigma_{\lambda\nu\alpha} M_\sigma U^\alpha \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

Levando-se em conta as equações (2.103) e (2.104) podemos reespressar os termos  $\nabla_\mu q^\mu$  e  $\frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\lambda\tau} \nabla_\nu M_\lambda$  e substituí-los nas equações acima, obtendo, após algum algebrismo, o seguinte sistema de equações:

$$n c_V \ddot{T} - n c_V M_{11} \dot{T} + N_1 \nabla_\mu (\nabla^\mu T)_{\perp} + \bar{N}_2 A_\mu h^{\mu\nu} \nabla_\nu T = F(x^\alpha) \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned}
 -n J (\ddot{\Omega}^\mu)_{\perp} + n J M_{22} (\dot{\Omega}^\mu)_{\perp} - N_2 \nabla_\sigma (\nabla^\sigma \Omega^\mu)_{\perp} + N_2 \nabla_\sigma (\nabla^\mu \Omega^\sigma)_{\perp} = G^\mu(x^\alpha) \\
 (2.114)
 \end{aligned}$$

onde  $F(x^\alpha)$  e  $G^\mu(x^\alpha)$  são dados por:

$$\begin{aligned}
 F(x^\alpha) = -R_{\mu\nu} q^\mu U^\nu + (M_{11} - M_{22}) M^\mu A_\mu - M_{12} \nabla_\mu M^\mu + \\
 + \frac{\bar{N}_1}{2c} \eta^{\mu\lambda\sigma\nu} R^\alpha_{\lambda\sigma\mu} \Omega_\alpha U_\nu - (M_{21} q^\mu + N_2 A^\mu) A_\mu - \\
 - M^\mu \dot{A}_\mu + (\nabla_\mu U^\nu)_{\perp} (\nabla_\nu q^\mu) \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^\mu(x^\alpha) = \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\tau\lambda} R^\sigma_{\tau\nu\alpha} M_\sigma U_\lambda - \frac{1}{c} \eta^{\mu\nu\tau\lambda} \nabla_\nu (M_{21} q_\tau + \\
 + \bar{N}_2 h_\tau^\alpha \nabla_\alpha T) + (\nabla_\alpha M_\tau) (\nabla_\nu U^\alpha)_{\perp} \quad (2.116)
 \end{aligned}$$

O termo envolvendo o tensor de curvatura na equação (2.115) origina-se de  $\bar{N}_1 \nabla_\mu A^\mu$  juntamente com as equações (2.55) e (2.57).

Observando a estrutura das equações (2.113) e (2.114), constatamos que temos, como esperado, duas equações diferenciais de caráter hiperbólico. Note que as funções  $F(x^\alpha)$  e  $G^\mu(x^\alpha)$  não contêm explicitamente  $T$  e  $\Omega^\mu$ , respectivamente, de modo que podemos interpretá-las como sendo a fonte das equações homogêneas associadas. Ao impormos agora que  $\bar{N}_2 A_\mu h^{\mu\nu} (\nabla_\nu T) = N_2 \nabla_\sigma (\nabla^\mu \Omega^\sigma) = 0$ , as eqs. (2.113) e (2.114) resultam na versão relativista da equação de telegrafista para o caso inhomogêneo. A solução geral de tal equação é constituída da solução particular, que é devido ao termo de inhomogeneidade e da solução da homogênea associada. É interessante notar a contribuição explícita do campo gravitacional nas funções  $F(x^\alpha)$  e  $G^\mu(x^\alpha)$ , que é feita via tensores de curvatura e de Ricci.

Uma das dificuldades que encontraremos ao tentarmos resolver a parte homogênea da equação (2.114) é a influência da métrica do espaço-tempo. O termo envolvendo derivada covariante segunda de  $\Omega^\mu$  conterá também derivadas segundas do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , que mesmo escolhendo um sistema de coordenadas geodético não poderão ser anuladas. O mesmo não ocorre para a equação (2.113), pois sendo  $T$  um escalar, aparecerão somente derivadas primeiras de  $g_{\mu\nu}$  nos termos  $\nabla_\mu (\partial^\mu T)$  e  $\ddot{T}$ , que são anuladas quando adotamos um sistema de coordenadas geodético. Então, buscando uma situação a mais simples possível, consideraremos o espaço-tempo da relatividade especial onde a curvatura é nula. Fazendo  $U^\alpha = c\delta^\alpha_0$ , podemos escrever as equações (2.113) e (2.114) em suas respectivas formas tridimensionais. Em adição a isso, vamos impor que as funções  $F(x^\alpha)$  e  $G^\mu(x^\alpha)$  sejam muito pequenas de modo a serem desprezadas. As

sim sendo, as equações de propagação das ondas térmicas e de spin são escritas como mostramos a seguir:

$$n c_V \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - n c_V M_{11} \frac{\partial T}{\partial t} - N_1 \nabla^2 T = 0 \quad (2.117)$$

$$-n J \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} + n J M_{22} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + N_2 \nabla^2 \vec{\Omega} = 0 \quad (2.118)$$

Tais equações são encontradas na ref. [39]. A solução das mesmas pode ser escrita como  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  onde  $\vec{k} = \vec{k}_0 + i\vec{k}_1$  é vetor de onda e  $\omega$  a frequência. Novamente, por simplicidade, iremos supor que as ondas propagam-se na direção x. As velocidades de fase das ondas térmicas e de spin, bem como os fatores de atenuação são dados por:

$$v_T = \frac{\omega}{k_0} = \left( \frac{2\chi\omega\beta}{n c_V} \right)^{1/2} \left[ \omega\tau_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \omega^2\tau_1^2} \right]^{-1/2}$$

$$\alpha_T = \frac{1}{k_1} = \frac{2\chi}{n c_V v_T} \left( \frac{1 + \frac{\mu' |v'|}{\chi\xi}}{1 + \frac{\tau |v'| \mu'}{\tau_6 \chi\xi}} \right)$$

$$v_s = \left( \frac{2\xi\omega\beta}{n J} \right) \left[ \omega\tau_6 + \sqrt{\omega^2\tau_6^2 + \gamma_6^2} \right]^{-1/2}$$

$$\alpha_s = \frac{2\xi}{n J v_s} \left( \frac{1 + \frac{\mu' |v'|}{\chi\xi}}{1 - \frac{\tau \mu' |v'|}{\tau_1 \chi\xi}} \right)$$

$$\text{onde } \beta = \frac{1 + \frac{\mu' |v'|}{\chi\xi}}{1 - \frac{\tau^2 \mu' |v'|}{\tau_1 \tau_6 \chi\xi}}, \quad \gamma_1 = \frac{-1 - \frac{\tau \mu' |v'|}{\tau_6 \chi\xi}}{1 - \frac{\tau^2 \mu' |v'|}{\tau_1 \tau_6 \chi\xi}} \quad e$$

$$\gamma_6 = \frac{-1 + \frac{\tau \mu' |v'|}{\tau_1 \chi \xi}}{1 - \frac{\tau^2 \mu' |v'|}{\tau_1 \tau_6 \chi \xi}} . \quad \text{No limite de alta freqüência, ou seja,}$$

$\omega \tau_1 \gg \gamma_1$  e  $\omega \tau_6 \gg \gamma_6$ , as velocidades de fase tendem para os valores finitos dados por  $(\frac{2\chi\omega\beta}{n c_v})^{1/2}$  e  $(\frac{2\xi\omega\beta}{n J})^{1/2}$ . Ao compararmos esses resultados com aqueles obtidos quando não há acoplamento ( $\xi' = v' = \tau = 0$ ), facilmente concluímos que o efeito do acoplamento é o de aumentar as velocidades de propagação das ondas térmicas e de spin.

Para finalizar esta seção consideremos somente a presença do fluxo de calor  $q^\mu$ . A equação de propagação das ondas térmicas reduz-se a seguinte expressão:

$$n c_v \ddot{T} - n c_v M_{11} \dot{T} + N_1 \nabla_\mu (\nabla^\mu T)_{,1} = - R_{\mu\nu} q^\mu U^\nu \quad (2.119)$$

Obviamente o espaço-tempo, neste caso, apresenta curvatura não nula. O acoplamento entre o tensor de Ricci e o fluxo de calor não possui análogo na teoria não-relativista, de modo que será interessante investigar posteriormente a influência deste termo na solução desta equação.

## 2.4 - Flutuação dos Fluxos Dissipativos em torno do Estado de Equilíbrio

O estudo das flutuações perto do equilíbrio termodinâmico dentro da teoria termodinâmica de primeira ordem (processos quasi-estacionários) resultou num de seus mais importantes resultados que são as relações de reciprocidade de Onsager<sup>[65]</sup>. Em vários trabalhos, já utilizando a termodinâmica estendida, D. Jou et al<sup>[31]</sup> inestigaram o problema de flutuações perto do equilíbrio termodinâmico, bem como na proximidade de estados estacionários fora do equilíbrio termodinâmico.

Especificamente, as flutuações de equilíbrio dos fluxos dissipativos é de nosso interesse. A importância desse estudo reside, basicamente, na ligação das flutuações com os coeficientes fenomenológicos. Desse modo, podemos dizer que as flutuações determinam os coeficientes fenomenológicos<sup>[31,66]</sup>. D. Pavon et al<sup>[55]</sup> calcularam os coeficientes de fluxo de calor  $\chi$ , de viscosidade volumar  $\tau$  e de distorção  $\eta$  para um fluido relativista radiativo utilizando este método. Salientamos que tal procedimento situa-se no patamar intermediário entre as descrições fenomenológicas e a microscópica, ou seja, trata-se de uma descrição mesoscópica do sistema.

Dentro dessa perspectiva iremos estender o estudo das flutuações dos fluxos dissipativos presentes no fluido com spin em questão. Procuraremos enfatizar as conseqüências do acoplamento entre os fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , tendo em vista a analogia com os resultados obtidos para o caso de um fluido termoe-létrico<sup>[64]</sup>, onde há um acoplamento similar.

A propabilidade de flutuações de equilíbrio é calculada através da relação de Einstein<sup>[34,55,67]</sup>, dada por:

$$Pr \sim \exp \left( \frac{\delta^2 s}{2k_B} \right) \quad (2.120)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $\delta^2 s$  é a segunda diferencial da entropia por partícula. Introduzindo na eq. (2.120) a entropia por partícula de não-equilíbrio (eq. 2.68), temos generalizado a fórmula de Einstein para a descrição das flutuações de equilíbrio dos fluxos dissipativos.

Calculando  $\delta^2 s$  e substituindo na eq. (2.120), temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} Pr(\delta\pi, \delta q_\mu, \delta\pi_{\alpha\beta}, \delta\pi_\mu, \delta M, \delta M_{\alpha\beta}^0, \delta M_\mu) \sim \exp \left\{ \frac{v}{2k_B T} \left[ \alpha_0 \delta\pi \delta\pi + \right. \right. \\ + \alpha_2 \delta\pi^{\alpha\beta} \delta\pi_{\alpha\beta} + \alpha_3 \delta\pi^\mu \delta\pi_\mu + \alpha_4 \delta M \delta M + \alpha_5 \delta M^{\alpha\beta} \delta M_{\alpha\beta}^0 + \\ \left. \left. + \alpha_1 \delta q^\mu \delta q_\mu + (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \delta q^\mu \delta M_\mu + \alpha_6 \delta M^\mu \delta M_\mu \right] \right\} \quad (2.121) \end{aligned}$$

Os segundos momentos das flutuações dos fluxos dissipativos não obtidos a partir desta expressão, que na verdade é uma função distribuição do tipo gaussiana. Assim, temos (vide apêndice C):

$$\langle \delta\pi(x^\sigma) \delta\pi(x^\sigma) \rangle = - \frac{k_B T}{v\alpha_0} \quad (2.122)$$

$$\langle \delta\pi_{\alpha\beta}(x^\sigma) \delta\pi_{\mu\nu}(x^\sigma) \rangle = - \frac{k_B T}{v\alpha_2} \left( h_{\alpha(\mu} h_{\beta\nu)} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right) \quad (2.123)$$

$$\langle \delta\pi_\mu(x^\sigma) \delta\pi_\nu(x^\sigma) \rangle = \frac{k_B T h_{\mu\nu}}{v\alpha_3} \quad (2.124)$$

$$\langle \delta M(x^\sigma) \delta M(x^\sigma) \rangle = \frac{-k_B T}{v \alpha_4} \quad (2.125)$$

$$\langle \delta M_{\alpha\beta}^0(x^\sigma) \delta M_{\mu\nu}^0(x^\sigma) \rangle = -\frac{k_B T}{v \alpha_5} \left( h_{\alpha(\beta} h_{\nu)} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right) \quad (2.126)$$

$$\langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma) \rangle = \frac{-k_B T \alpha_6 h_{\mu\nu}}{v(\alpha_1 \alpha_6 - \alpha^2)} \quad (2.127)$$

$$\langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle = \frac{T \alpha h_{\mu\nu}}{v(\alpha_1 \alpha_6 - \alpha^2)} \quad (2.128)$$

$$\langle \delta M_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle = \frac{-k_B T \alpha_1 h_{\mu\nu}}{v(\alpha_1 \alpha_6 - \alpha^2)} \quad (2.129)$$

Essas expressões constituem-se nas versões relativistas do teorema de flutuação-dissipação que relacionam os coeficientes fenomenológicos com os segundos momentos das flutuações dos fluxos dissipativos. O sinal diferenciado que aparece nas expressões acima deve-se a imposição de que as mesmas reduzem-se as equivalentes no domínio não-relativista encontradas nas refs, [31,39]. Na dedução das três últimas expressões levamos em conta a seguinte forma para a função distribuição de probabilidade:

$$Pr(\delta Y^\mu \delta Z^\nu) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} E_{\mu\nu} \delta Y^\mu \delta Z^\nu\right) \quad (2.130)$$

onde os segundos momentos são dados por  $\langle \delta Y_\mu \delta Z_\nu \rangle = E^{-1}_{\mu\nu}$ .

Naturalmente as expressões (2.127), (2.128) e (2.129) contém informações acerca do acoplamento entre os fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ . Se fizermos o limite  $\tau \rightarrow 0$ , ou seja, se desejarmos verificar as expressões resultantes sem o acoplamento entre os

fluxos, temos de imediato que:

$$\langle \delta q_{\mu}(x^{\sigma}) \delta w_{\nu}(x^{\sigma}) \rangle = \frac{-k_B T h_{\mu\nu}}{v\alpha_1} \quad (2.131)$$

$$\langle \delta q_{\mu}(x^{\sigma}) \delta M_{\nu}(x^{\sigma}) \rangle = 0 \quad (2.132)$$

$$\langle \delta M_{\mu}(x^{\sigma}) \delta M_{\nu}(x^{\sigma}) \rangle = \frac{-k_B T h_{\mu\nu}}{v\alpha_6} \quad (2.133)$$

Logo, obtivemos os segundos momentos que seriam esperados nesta situação.

Nesta parte final, vamos explorar as conseqüências do acoplamento entre  $q^{\mu}$  e  $M^{\mu}$  na correlação temporal das flutuações. Tais correlações, como o próprio nome sugere, são os segundos momentos das flutuações calculadas em instantes distintos. A motivação com que estabeleceremos as correlações temporais dos fluxos está na determinação dos coeficientes fenomenológicos através das relações de Green-Kubo<sup>[31,66]</sup>. Por exemplo, a relação de Green-Kubo para o coeficiente de condução térmica calculada no domínio não relativista é dada por<sup>[31]</sup>:

$$\chi = \frac{V}{k_B T^2} \int_0^{\infty} \langle \delta q_i(0) \delta q_i(t) \rangle dt \quad (2.134)$$

onde não há soma sobre os índices repetidos e  $V$  é o volume do sistema. Pode ser mostrado que esta expressão reduz-se a aquela do teorema de dissipação-flutuação quando  $\delta q_i(t) \sim e^{-t/\tau_1}$ .

O ponto de partida para o cálculo das correlações temporais dos fluxos é determinar como as flutuações estão evoluindo no espaço-tempo. Para isso, algumas hipóteses simplifi-



cadoras serão assumidas: as flutuações da temperatura e da velocidade angular de spin são muito mais lentas que as flutuações de  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , e iremos considerar a aceleração do fluido nula. Logo, a partir do sistema de equações, para  $q^\mu$  e  $M^\mu$  as equações de evolução das flutuações  $\delta q^\mu$  e  $\delta M^\mu$  são:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{q}_\mu \\ \delta \dot{M}_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \delta q_\mu \\ \delta M_\mu \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

sendo  $\mathbf{M}$  a matriz dada pela eq. (2.91), cujos elementos, nessa aproximação, serão considerados constantes.

Após a integração de (2.135) obtemos as seguintes expressões para  $\delta q_\mu(x^\sigma)$  e  $\delta M_\mu(x^\sigma)$ :

$$\delta q_\mu(x^\sigma) = C_{1\mu} \beta_1 e^{k_1 s} + C_{2\mu} \beta_2 e^{k_2 s} \quad (2.136)$$

$$\delta M_\mu(x^\sigma) = C_{1\mu} \gamma_1 e^{k_1 s} + C_{2\mu} \gamma_2 e^{k_2 s} \quad (2.137)$$

onde  $\beta_1, \gamma_1$  e  $\beta_2, \gamma_2$  são as componentes dos autovetores da matriz  $\mathbf{M}$  associadas aos seus autovalores  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente. Isso significa que:

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

Os quadrivetores  $C_{1\mu}$  e  $C_{2\mu}$  são tais que  $\dot{C}_{1\mu} = \dot{C}_{2\mu} = 0$ , e, por fim,  $s$  é o parâmetro temporal medido ao longo da linha de univer

so de cada partícula do fluido.

As correlações temporais das flutuações são deno-  
tadas por  $\langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle$ ,  $\langle \delta M_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle$ ,  $\langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle$  e  $\langle \delta q_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle$ . Para seu cálculo, necessitamos das expressões correspondentes a  $\delta q_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma)$  e  $\delta M_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma)$ . Utilizando as equações (2.136) e (2.137), temos:

$$\begin{aligned} \delta q_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) = & \frac{\left( \beta_1 \gamma_2 e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} - \beta_2 \gamma_1 e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right)}{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1} \delta q_\mu(x^\sigma) + \\ & + \frac{\beta_1 \beta_2 \left( e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} - e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} \right)}{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1} \delta M_\mu(x^\sigma) \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \delta M_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) = & \frac{\gamma_1 \gamma_2 \left( e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} - e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right)}{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1} \delta q_\mu(x^\sigma) + \\ & + \frac{\left( \beta_1 \gamma_2 e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} - \beta_2 \gamma_1 e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} \right)}{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1} \delta M_\mu(x^\sigma) \end{aligned} \quad (2.140)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz.

O cálculo das correlações temporais é, portanto, imediato:

$$\begin{aligned} \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle = & (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^{-1} \left[ \left( \beta_1 \gamma_2 e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta_2 \gamma_1 e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma) \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$+ \beta_1 \beta_2 \left( e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} - e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle \Big] \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta M_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle &= (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^{-1} \left[ \gamma_1 \gamma_2 \left( e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta M_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma) \rangle + (\beta_1 \gamma_2 e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_2 \gamma_1 e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta M_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle \right] \quad (2.142) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle &= (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^{-1} \left[ \gamma_1 \gamma_2 \left( e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma) \rangle + (\beta_1 \gamma_2 e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_2 \gamma_1 e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle \right] \quad (2.143) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \delta q_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle &= (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^{-1} \left[ (\beta_1 \gamma_2 e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} - \right. \\ &\quad \left. - \beta_2 \gamma_1 e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} \right) \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle + \beta_1 \beta_2 \left( e^{k_2 \frac{\Delta s}{c}} - \right. \end{aligned}$$

$$- e^{k_1 \frac{\Delta s}{c}} \left) \langle \delta M_\mu(x^\sigma) \delta M_\nu(x^\sigma) \rangle \right] \quad (2.144)$$

Devido as condições de estabilidade do ponto de equilíbrio termodinâmico (eqs. (2.98) e (2.99)),  $k_1$  e  $k_2$  são necessariamente negativos, o que, por sua vez, garantem o decaimento das flutuações  $\delta q_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma)$  e  $\delta M_\mu(x^\sigma + \Delta x^\sigma)$ .

Vamos agora fazer o limite das expressões anteriormente obtidas para a situação de desacoplamento entre  $q_\mu$  e  $M_\mu$ . Isso é feito ao considerarmos  $\tau$  e  $a \rightarrow 0$  e, sem muita dificuldade, pode ser mostrado que neste limite, temos:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{\tau_1} & ; & & k_2 &= -\frac{1}{\tau_2} \\ \left( \begin{array}{c} \beta_1 \\ \tau_1 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & ; & & \left( \begin{array}{c} \beta_2 \\ \tau_2 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

Voltando para as eqs. (2.141)...(2.144) e levando os resultados de (2.145) bem como de (2.131), (2.132) e (2.133) segue:

$$\begin{aligned} \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma + \Delta x^\sigma) \rangle &= e^{-\frac{\Delta s}{c\tau_1}} \langle \delta q_\mu(x^\sigma) \delta q_\nu(x^\sigma) \rangle = \\ &= \frac{-k_B T}{v\alpha_1} e^{-\frac{\Delta s}{c\tau_1}} h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \delta M_{\mu}(x^{\sigma}) \delta M_{\nu}(x^{\sigma} + \Delta x^{\sigma}) \rangle &= e^{-\frac{\Delta s}{c\tau_6}} \langle \delta M_{\mu}(x^{\sigma}) \delta M_{\nu}(x^{\sigma}) \rangle = \\
 &= \frac{-k_B T}{v\alpha_6} e^{-\frac{\Delta s}{c\tau_1}} h_{\mu\nu} \quad (2.147)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \delta q_{\mu}(x^{\sigma}) \delta M_{\nu}(x^{\sigma} + \Delta x^{\sigma}) \rangle &= \langle \delta q_{\mu}(x^{\sigma} + \Delta x^{\sigma}) \delta M_{\nu}(x^{\sigma}) \rangle = 0 \\
 & \quad (2.148)
 \end{aligned}$$

Essas expressões estão de acordo com as encontradas nas referências [31,39]. Quando  $\tau_1, \tau_6 \rightarrow 0$ , nós recuperamos as correlações temporais expressas em termos da função delta de Dirac, pois

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{\Delta s}{c\tau_1}}}{\tau_1} \sim \delta\left(\frac{\Delta s}{c}\right) \quad (2.149)$$

Este resultado está de acordo com aqueles encontrados por Landau-Lifshitz [67] e Fox-Uhlembeck [68], onde os tempos de relaxação são nulos a priori.

## 2.5 - Contribuição do Campo Gravitacional na Produção de Entropia

Nas seções anteriores consideramos que os processos irreversíveis estão se processando num espaço-tempo riemanniano, cuja métrica  $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$  é conhecida a priori. Isso significa que o fluido dissipativo com spin não é a fonte da curvatura do espaço-tempo. Entretanto, na situação onde o fluido em questão é o responsável pela curvatura do espaço-tempo, as equações de Einstein para o campo gravitacional têm de ser introduzidas:

$$G^{\alpha\beta} = - \chi T^{\alpha\beta} \quad (2,150)$$

onde  $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ ,  $G$  é a constante gravitacional universal,  $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$  é o tensor de Einstein e  $T^{\alpha\beta}$  é o tensor momento-energia necessariamente simétrico. Surge, então, o seguinte problema: derivamos fenomenologicamente na seção 2.1 um tensor momento-energia cuja parte antissimétrica é não-nula devido ao momento angular de spin da matéria, mas necessitamos de um tensor que seja simétrico como exigem as equações do campo gravitacional (2.150).

A solução para tal problema é encontrada na teoria clássica de campos com o bem estabelecido procedimento de simetrização de Belinfante-Rosenfeld<sup>[32,33]</sup>. De acordo com esse procedimento, o tensor simétrico  $T^{\alpha\beta}$  pode ser construído a partir de  ${}_m T^{\alpha\beta}$ , sem simetria definida, através da seguinte expressão:

$$T^{\alpha\beta} = {}_m T^{\alpha\beta} + \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) \quad (2.151)$$

onde  $S^{\alpha\beta\mu}$  é o tensor fluxo de momento angular de spin. A constatação de que  $T^{[\alpha\beta]}$  é nula segue imediatamente:

$$\begin{aligned} T^{[\alpha\beta]} &= {}_m T^{[\alpha\beta]} + \nabla_{\mu} (-S^{\mu[\alpha\beta]} - S^{\mu[\beta\alpha]} - S^{\alpha\beta\mu}) = \\ &= {}_m T^{[\alpha\beta]} - \nabla_{\mu} S^{\alpha\beta\mu} = 0 \quad \therefore T^{[\alpha\beta]} = 0 \quad (2.152) \end{aligned}$$

sendo que utilizamos a lei de balanço do momento angular de spin dada pela equação (2.3).

Na verdade, é bom destacar que o processo de simetrização é justificado quando levamos em conta dois fatores. Primeiro, o tensor momento-energia canônico do campo eletromagnético não é invariante de gauge, enquanto que o simétrico é invariante de gauge. E segundo, a teoria da gravitação proposta por Einstein exige que a fonte do campo gravitacional seja necessariamente dada por um tensor simétrico.

Antes de analisarmos as conseqüências do tensor simétrico (2.151), será de grande utilidade exibirmos sua decomposição relativamente ao campo de velocidades  $U^{\alpha}$ . Sendo assim, podemos escrever a seguinte expressão:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_{ef} c^{-2} U^{\alpha} U^{\beta} + p_{ef}^{\alpha} U^{\beta} + c^{-2} Q_{ef}^{\beta} U^{\alpha} + t_{ef}^{\beta\alpha} \quad (2.153)$$

onde as quantidades  $\rho_{ef}$ ,  $p_{ef}^{\alpha}$ ,  $Q_{ef}^{\beta}$  e  $t_{ef}^{\beta\alpha}$  são os valores efetivos ou totais da densidade de energia, densidade de momento, densidade de fluxo de energia e tensor relativista das tensões.

Após um laborioso cálculo (vide apêndice D), pode ser mostrado que:

$$\rho_{ef} = n(ac^2 + \epsilon) + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} - 2n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \quad (2.154)$$

$$p_{ef}^{\lambda} = c^{-2} (q^{\lambda} + M^{\mu\nu\lambda} \Omega_{\mu\nu}) + n c^{-2} S^{\alpha\lambda} \dot{U}_{\alpha} - 2c^{-2} M^{\lambda\beta\mu} (\sigma_{\beta\mu} + \frac{1}{3} \Theta h_{\beta\mu}) + \\ + h_{\alpha}^{\lambda} \nabla_{\mu} (n S^{\alpha\mu}) - c^{-2} M^{\beta\mu\lambda} \omega_{\beta\mu} \quad (2.155)$$

$$Q_{ef}^{\lambda} = c^{-2} p_{ef}^{\lambda} \quad (2.156)$$

$$t_{ef}^{\beta\alpha} = - p_{ef} h^{\beta\alpha} + \pi_{ef}^{\beta\alpha} \quad (2.157)$$

sendo

$$P_{ef} = p + \pi - \frac{2}{3} \nabla_{\mu} M^{\alpha\mu}_{\alpha} - \frac{2}{3} n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \quad (2.158)$$

$$\pi_{ef}^{\beta\alpha} = \pi^{\beta\alpha} + \nabla_{\lambda} (M^{\alpha\lambda\beta} + M^{\beta\lambda\alpha}) - 2n (S^{\lambda(\alpha} \sigma^{\beta)}_{\lambda} + S^{\lambda(\alpha} \omega^{\beta)}_{\lambda}) + \\ + \frac{2}{c^2} M^{\lambda\mu(\alpha} U^{\beta)} \omega_{\mu\lambda} + \frac{2}{c^2} U^{(\alpha} M^{\beta)\lambda\mu} (\nabla_{\lambda} U_{\mu}) - \\ - \frac{2}{3} (\nabla_{\mu} M^{\nu\mu}_{\nu} + n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}) h^{\beta\alpha} \quad (2.159)$$

É interessante observar as contribuições adicionais provenientes do processo de simetrização. Na expressão da densidade de energia, por exemplo, temos o acoplamento spin-vorticidade; devido aos termos extras na densidade de momento, a relação de Planck é satisfeita; a pressão efetiva deixa



de ser dada somente por  $p$  e  $\pi$  e tem contribuições do acoplamento spin-vorticidade e da divergência do tensor das tensões-torques. Outros acoplamentos entre o tensor de spin  $S^{\alpha\beta}$  e o tensor das tensões-torques com os parâmetros cinemáticos surgem naturalmente na expressão referente ao tensor das pressões anisotrópicas (eq. (2.159)). Em particular temos o acoplamento de  $S^{\alpha\beta}$  com a vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$  e o cisalhamento  $\sigma_{\alpha\beta}$ , que, por sua vez, serão importantes ao investigarmos o papel do momento angular de spin na evolução dos modelos cosmológicos anisotrópicos e modelos com rotação.

É fundamental ressaltar que o tensor (2.154) reduz-se ao tensor momento-energia obtido via formalismo variacional proposto no capítulo I no limite em que os fluxos dissipativos são nulos, ou seja, quando  $q^\mu, \pi^{\mu\nu}, \hat{\pi}^\mu, M^{\alpha\beta\mu}$  e  $\pi \rightarrow 0$ . Fazendo este limite e levando em conta que  $S^{\alpha\beta\mu} = n S^{\alpha\beta} U^\mu$  nesta situação, o tensor dado pela expressão (2.148) reduz-se a:

$$T^{\alpha\beta} = n(ac^2 + \epsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}) \frac{U^\alpha U^\beta}{c^2} + 2n c^{-2} S^{\mu\nu} U_\mu U^\beta - p h^{\alpha\beta} + \nabla_\mu (n S^{\alpha\mu} U^\beta + n S^{\beta\mu} U^\alpha - n S^{\alpha\beta} U^\mu) \quad (2.160)$$

Após simples algebrismo no último membro desta equação, obtemos:

$$T^{\alpha\beta} = n(ac^2 + \epsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}) \frac{U^\alpha U^\beta}{c^2} - p h^{\alpha\beta} + \frac{2n}{c^2} \dot{U}_\mu S^{\mu(\alpha} U^{\beta)} - 2\nabla_\mu (n S^{\mu(\alpha} U^{\beta)}) \quad (2.161)$$

que, como afirmamos, é o tensor momento-energia deduzido no ca

pítulo I.

A lei de conservação do momento-energia é obtida a partir das identidades de Bianchi, que resultam em:

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.162)$$

Substituindo a equação (2.151) nesta expressão:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} \left[ {}_m T^{\alpha\beta} + \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) \right] &= 0 \quad \therefore \\ \nabla_{\beta} {}_m T^{\alpha\beta} + \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) &= 0 \quad (2.163) \end{aligned}$$

Ao compararmos esta equação com a eq. (2.1), verificamos a presença de um termo adicional, que pode ser entendido como sendo o termo de fonte de momento e energia e cuja origem está na interação entre o spin do fluido com o campo gravitacional. Esta afirmação ficará mais clara ao reexpressarmos o termo adicional de modo mais conveniente. Assim, definamos o tensor  $P^{\alpha\mu\beta}$  dado por:

$$P^{\alpha\mu\beta} \equiv S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu} \quad (2.164)$$

Sabendo-se que  $S^{\alpha\beta\mu} = -S^{\beta\alpha\mu}$ , constatamos facilmente que  $P^{\alpha\mu\beta}$  é antissimétrico nos dois últimos índices, ou seja:

$$P^{\alpha\beta\mu} = S^{\alpha\beta\mu} + S^{\mu\beta\alpha} - S^{\alpha\mu\beta} = S^{\alpha\beta\mu} - S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\mu\beta} = -P^{\alpha\mu\beta} = \therefore$$

$$\therefore P^{\alpha\beta\mu} = -P^{\alpha\mu\beta} \quad (2.165)$$

Prosseguindo, o termo adicional é reescrito como mostramos a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) &= \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} P^{\alpha\mu\beta} = \nabla_{[\beta} \nabla_{\mu]} P^{\alpha\mu\beta} = \\ &= R^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} S^{\lambda\mu\beta} \end{aligned} \quad (2.166)$$

Deixamos para o apêndice D os detalhes do cálculo que tem como resultado a expressão acima.

Voltando à lei de balanço do momento-energia (eq. 2.163), e levando em conta o resultado anterior, temos:

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} + R^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} S^{\lambda\mu\beta} = 0 \quad (2.167)$$

Portanto, o termo adicional é dado pelo acoplamento do tensor fluxo de momento angular de spin com a curvatura do espaço-tempo. Em consequência disso, a evolução do fluido dissipativo autogravitante e dotado de momento angular de spin, é modificada devido a presença deste novo termo. As usuais leis de balanço de energia e de momento linear são obtidas ao projetarmos (2.167) na direção de  $U^{\alpha}$ , e na direção perpendicular a  $U^{\alpha}$ , respectivamente. Então, segue:

$$U_{\alpha} \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} + U_{\alpha} R^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} S^{\lambda\mu\beta} = 0 \quad (2.168)$$

$$h_{\alpha\sigma} \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} + h_{\alpha\sigma} R^{\alpha}_{\beta\mu\lambda} S^{\lambda\mu\beta} = 0 \quad (2.169)$$

Na lei de balanço do momento linear dada pela eq. (2.169), o termo de a-

acoplamento spin-curvatura é conhecido como força de Mathisson-Papapetrou também encontrado no capítulo I (eq. 1.90).

Do ponto de vista termodinâmico, o que nos interessa são as modificações que surgem como consequência da equação (2.168). Levando a decomposição de  $S^{\alpha\beta\mu}$  dado pela equação (2.15) na eq. (2.167), temos o seguinte resultado:

$$U_{\sigma} \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} + U^{\alpha} R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu\beta} = 0 \quad (2.170)$$

Note que no caso de uma distribuição de spin convectivo, ou seja  $S^{\alpha\beta\mu} = n S^{\alpha\beta} U^{\mu}$ , não há contribuição da curvatura na lei de balanço de energia.

O acoplamento do tensor das tensões-torque com a curvatura na lei de balanço de energia é uma novidade. Se realizarmos o mesmo procedimento da seção (1.2) para o cálculo da produção de entropia, teremos inequivocamente a contribuição deste termo adicional implicando que algumas equações fenomenológicas serão corrigidas por um termo proporcional à curvatura. A seguir vamos investigar as duas situações anteriores: a termodinâmica do equilíbrio local e a causal.

### 2.5.1 - Equações Fenomenológicas I: Processos Quasi-Estacionários

A equação de balanço da energia interna (2.170), devido ao acoplamento da curvatura com o tensor difusão de spin (tensor das tensões-torques), é modificada da seguinte maneira:

$$n(\dot{\epsilon} + p\dot{v}) + (\nabla_{\mu}^{\perp} - 2c^{-2}\dot{U}_{\mu})q^{\mu} = -\pi\theta + \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + 2\pi^{\mu}(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) -$$

$$- MA - M^{\circ\alpha\beta\circ} A_{\alpha\beta} - M^{\mu} A_{\mu} - R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]} \quad (2.171)$$

Ao escrevermos esta equação, utilizamos as eqs. (2.35), (2.48) e (2.56).

A lei de balanço da entropia em situações quasi-estacionárias é dada por (vide eq. 2.43):

$$\nabla_{\mu} \delta^{\mu} = \frac{n}{T} (\dot{\epsilon} + p\dot{v}) + \nabla_{\mu} \left( \frac{q^{\mu}}{T} \right) \geq 0 \quad (2.172)$$

onde utilizamos a hipótese do equilíbrio local. Substituindo o primeiro termo do segundo membro de (2.172) pela expressão correspondente em (2.171), obtemos, após algumas passagens, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \delta^{\mu} = & - \frac{\pi\theta}{T} - \frac{q^{\mu}}{T^2} (\nabla_{\mu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\mu}) + \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} + \frac{2\pi^{\mu} (\omega_{\mu} - \Omega_{\mu})}{T} - \\ & - \frac{1}{T} MA - \frac{1}{T} M^{\circ\alpha\beta\circ} A_{\alpha\beta} - \frac{1}{T} M^{\mu} A_{\mu} - \frac{R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]}}{T} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.173)$$

A produção de entropia, como vimos na seção (2.1), é constituída do somatório dos produtos dos fluxos termodinâmicos pelas forças correspondentes. Comparando a eq. (2.173) com a (2.59), temos a presença do termo envolvendo o acoplamento do tensor das tensões-torque com a curvatura do espaço-tempo. Do ponto de vista termodinâmico, a curvatura desempenha o papel de uma força termodinâmica, e o termo adicional  $-\frac{1}{T} R_{\alpha\beta\mu\nu} M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]}$  é entendido como sendo uma produção de entropia "externa", uma vez que a chamada produção interna deve-se a inhomogeneidades nas

distribuições de velocidade  $U^\alpha$ , temperatura, etc.

Com o intuito de expressar o termo de acoplamento do tensor das tensões-torque com a curvatura de modo mais conveniente, fazemos a decomposição do tensor de curvatura em suas partes irredutíveis que é escrito como mostrado abaixo:

$$R_{\alpha\beta\mu\lambda} = C_{\alpha\beta\mu\lambda} + \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\lambda} + g_{\beta\lambda}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\lambda}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\lambda}) + \frac{R}{6}(g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\lambda}) \quad (2.174)$$

onde  $C_{\alpha\beta\mu\lambda}$  é o tensor de Weyl, que fisicamente é a parte da curvatura não gerada pela distribuição local de matéria. Assim, temos:

$$- \frac{U^{[\alpha} R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu\beta]}}{T} = - \frac{1}{T} \left[ C_{\alpha\beta\mu\lambda} + \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\lambda} + g_{\beta\lambda}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\lambda}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\lambda}) + \frac{R}{6}(g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\lambda}) \right] M^{\lambda\mu[\beta} U^{\alpha]} \quad (2.175)$$

Após algum algebrismo, chegamos a seguinte expressão:

$$- \frac{R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta} U^{\alpha]}}{T} = - \frac{C_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta} U^{\alpha]}}{T} + \frac{R_{\alpha\lambda} M^{\lambda\mu} U^{\alpha}}{T} \quad (2.176)$$

Continuando, utilizemos a seguinte decomposição do tensor de Weyl [69]:

$$C_{\alpha\beta\mu\lambda} = c^{-2}(\eta_{\alpha\beta\gamma\rho}\eta_{\mu\lambda\sigma\tau} - g_{\alpha\beta\gamma\rho}g_{\mu\lambda\sigma\tau})U^\gamma U^\sigma E^{\rho\tau} + c^{-2}(\eta_{\alpha\beta\gamma\rho}g_{\mu\lambda\sigma\tau} + g_{\alpha\beta\gamma\rho}\eta_{\mu\lambda\sigma\tau})U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} \quad (2.177)$$

onde  $E^{\rho\tau}$  e  $H^{\rho\tau}$  são, respectivamente, as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, e  $g_{\alpha\beta\gamma\rho} \equiv g_{\alpha\gamma}g_{\beta\rho} - g_{\alpha\rho}g_{\beta\gamma}$ . Substituindo (2.177) em (2.179), encontramos, depois de algumas passagens (vide apêndice D), a equação dada a seguir:

$$-\frac{R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu} [\beta U^{\alpha}]}{T} = \frac{c M_{\alpha\beta}^0 H^{\alpha\beta}}{T} + \frac{R_{\alpha\beta} U^{\alpha} M^{\beta]}]}{T} \quad (2.178)$$

Note que pode ser facilmente mostrado a partir das eqs. (2.50) e (2.54) a relação  $M^{\lambda\mu}_{\mu} = M^{\lambda}$ .

Voltando à expressão (2.173), onde levamos em conta o resultado encontrado em (2.178), vem:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \Delta^{\mu} = & -\frac{\pi\theta}{T} - \frac{q^{\mu}}{T^2} (\nabla_{\mu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\mu}) + \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} + \frac{2\pi^{\mu} (\omega_{\mu} - \Omega_{\mu})}{T} - \\ & - \frac{1}{T} MA - \frac{1}{T} M^{\alpha\beta} (A_{\alpha\beta}^0 - c H_{\alpha\beta}) - \frac{1}{T} M^{\mu} (A_{\mu} - U^{\alpha} R_{\alpha\mu}) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.179)$$

De imediato constatamos que tanto a parte magnética do tensor de Weyl como o tensor de Ricci fazem parte do que já identificamos como sendo forças termodinâmicas.

As forças termodinâmicas dadas abaixo, são obtidas fazendo uma leitura direta em (2.179):

$${}^0X = -\theta \quad (2.180)$$

$$({}^1X_{\mu})_{\perp} = -\frac{h_{\mu}^{\nu}}{T} (\nabla_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) \quad (2.181)$$

$$({}^2X_{\alpha\beta})_{\perp} = \sigma_{\alpha\beta} \quad (2.182)$$

$$({}^3X_{\mu})_{\perp} = 2(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) \quad (2.183)$$

$${}^4X = -A \quad (2.184)$$

$$({}^5X_{\alpha\beta})_{\perp} = -(\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} - c H_{\alpha\beta}) \quad (2.185)$$

$$({}^6X_{\mu})_{\perp} = -h_{\mu}{}^{\nu} (A_{\nu} - U^{\alpha} R_{\alpha\nu}) \quad (2.186)$$

As equações fenomenológicas serão relações lineares entre fluxos e forças como exibidos pelas equações (2.62). Aos coeficientes introduzidos  $a_{00}, a_{11}, \dots, a_{66}$  permanecerão válidas as relações (2.63), (2.64a) e (2.64b). Logo, as equações fenomenológicas são:

$$\pi = -\zeta\theta \quad (2.187)$$

$$\pi_{\alpha\beta} = \eta\sigma_{\alpha\beta} \quad (2.188)$$

$$\pi_{\mu} = -2\eta_{\mu}(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) \quad (2.189)$$

$$M = -\xi^P A \quad (2.190)$$

$$\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta} = -\overset{\circ}{\xi} (\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} - c H_{\alpha\beta}) \quad (2.191)$$

$$q_{\mu} = (a_{11}a_{66} - a_{16}a_{61})^{-1} \left[ -\frac{a_{66}h_{\mu}{}^{\nu}}{T} (\nabla_{\nu}T - c^{-2}T\dot{U}_{\nu}) + a_{16} (A_{\mu} - U^{\alpha}R_{\alpha\nu}H^{\nu}_{\mu}) \right] \quad (2.192)$$

$$M_{\mu} = (a_{11}a_{66} - a_{16}a_{61})^{-1} \left[ \frac{a_{61}h_{\mu}{}^{\nu}}{T} (\nabla_{\nu}T - c^{-2}T\dot{U}_{\nu}) - a_{11} (A_{\mu} - U^{\alpha}R_{\alpha\nu}H^{\nu}_{\mu}) \right] \quad (2.193)$$

Os coeficientes  $a_{11}, a_{61}, a_{66}, a_{16}$  são identificados via relações



(2.65). As equações para  $\overset{\circ}{M}_{\alpha\mu}$ ,  $q_{\mu}$  e  $M_{\mu}$  recebem, portanto, contribuições explícitas do campo gravitacional.

### 2.5.2 - Equações Fenomenológicas II: Processos Não-Estacionários

As equações fenomenológicas deduzidas para o regime de processos não-estacionários, são, como vimos anteriormente, equações de evolução para os fluxos dissipativos. Na dedução dessas equações de evolução, temos de obter a expressão da produção de entropia, onde será introduzida a entropia por partícula de não-equilíbrio bem como o fluxo de entropia por partícula de não-equilíbrio (vide eqs. (2.68) e (2.71), respectivamente). Por simplicidade trataremos da teoria linear, onde adotaremos o fluxo de entropia dado pela eq. (2.42). Então, tendo em vista essas considerações, bem como a lei de balanço de energia modificada com o termo adicional de acoplamento do tensor das tensões-torques com a curvatura (eq. 2.171), a produção de entropia é reescrita como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} s^{\mu} = & - \frac{\pi}{T} (\theta - \alpha_0 \dot{\pi}) - \frac{q_{\mu}}{T} \left[ \frac{h^{\mu\nu}}{T} (\nabla_{\nu} T - c^{-2} T \dot{U}_{\nu}) - \alpha_1 \dot{q}^{\mu} - \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}_1 \dot{M}_{\mu} \right] + \frac{\pi^{\alpha\beta}}{T} (\sigma_{\alpha\beta} + \alpha_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta}) + \frac{\pi^{\mu}}{T} \left[ 2(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) + \dot{\pi}_{\mu} \right] + \\ & - \frac{M}{T} (A - \alpha_4 \dot{M}) - \frac{\overset{\circ}{M}^{\alpha\beta}}{T} \left[ \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} - c H_{\alpha\beta} - \alpha_5 (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}) \dot{\phantom{M}} \right] - \\ & - \frac{M^{\mu}}{T} (A_{\mu} - \bar{\alpha}_1 \dot{q}_{\mu} - \alpha_6 \dot{M}_{\mu} - U^{\alpha} R_{\alpha\mu}) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.194)$$

Seguindo o mesmo procedimento delineado na seção

(2.2), podemos, sem muita dificuldade, encontrar as equações de evolução para os fluxos dissipativos. As equações para  $\pi$ ,  $\pi^{\alpha\beta}$ ,  $\pi^\mu$ ,  $M$  são as mesmas dadas por (2.85), (2.86), (2.88) e (2.89) respectivamente. Já as equações para  $\overset{\circ}{M}^{\alpha\beta}$ ,  $\overset{\circ}{q}^\mu$  e  $M^\mu$  são modificadas pelo termo adicional como mostrado a seguir:

$$\alpha_5 (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} = a_{55} \overset{\circ}{M}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} - c H_{\alpha\beta} \quad (2.195)$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{q}_\mu \\ \overset{\circ}{M}_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} q_\mu \\ M_\mu \end{pmatrix} + \mathbf{N}_\mu \quad (2.196)$$

onde os coeficientes  $\alpha_5$  e  $a_{55}$  são dados por (2.65) e (2.83), e a matriz  $\mathbf{M}$  foi obtida na seção (2.1) (vide eq. 2.91). A expressão referente a  $\mathbf{N}^\mu$  é exibida a seguir:

$$\mathbf{N}^\mu = (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_6 h_\mu^\nu}{T} (\partial_\alpha T - c^{-2} T \dot{U}_\alpha) - \bar{\alpha}_6 (A_\mu - R_{\alpha\mu} U^\alpha) - \\ - (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6) \frac{q^\nu \dot{U}_\nu}{c^2} U_\mu \\ - \frac{\bar{\alpha}_1 h_\mu^\alpha}{T} (\partial_\alpha T - c^{-2} T \dot{U}_\alpha) + \alpha_1 (A_\mu - R_{\alpha\mu} U^\alpha) - \\ - (\alpha_1 \alpha_6 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_6) \frac{M^\nu \dot{U}_\nu}{c^2} U_\mu \end{pmatrix} \quad (2.197)$$

## CAPÍTULO 3

### MODELOS COSMOLÓGICOS PARA FLUIDOS COM SPIN

O estudo de cosmologias em relatividade geral utilizando-se fluidos com spin é muito restrito. Devemos citar, no entanto, algumas contribuições importantes. Obhukov e Piskareva<sup>[70]</sup> mostraram que um fluido com spin, cujo tensor momento-energia fora obtido num trabalho anterior (Obhukov e Korotky<sup>[28]</sup>), não altera a usual evolução dos modelos homogêneos e isotrópicos. Recentemente<sup>[71]</sup>, esses mesmos autores analisaram o efeito do spin no desenvolvimento de perturbações para um universo homogêneo e isotrópico com seção plana. Israel<sup>[72]</sup> argumenta que o efeito do spin é significativo somente em estágios recentes da evolução do universo, onde as partículas do fluido são protogaláxias girantes, "*turbulent eddies*" ou buracos negros primordiais. Então, ele estuda modelos anisotrópicos Bianchi tipo-I cujo conteúdo material é uma poeira com spin, e mostra que a evolução do modelo não é afetada pelo spin. Na verdade, a influência do mesmo é induzir uma rotação tipo *Lenze-Thirring* dos eixos locais inerciais relativamente às direções principais do cisalhamento com uma dada velocidade angular.

Um pouco mais freqüente tem sido o estudo de modelos com rotação, ou seja, modelos onde a vorticidade do fluido é não-nula. Nesse caso, há uma direção preferencial segundo a

qual o spin do fluido pode ser naturalmente alinhado. Dentro desta linha de investigação podemos citar os trabalhos de Krish e Smalley<sup>[73]</sup> que tratam um fluido com spin cuja descrição variacional é dada por Ray e Smalley<sup>[24]</sup>.

Nossa proposta neste capítulo é de estudar a influência do spin na evolução de alguns modelos cosmológicos. O fluido com spin em equilíbrio termodinâmico, gerador da curvatura do espaço-tempo, tem sua descrição dada no capítulo 1. As equações de Einstein, escritas abaixo, serão modificadas pela introdução da constante cosmológica:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta} = -\chi T^{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

Como teremos a oportunidade de verificar no decorrer do capítulo, essa modificação enriquece de modo considerável a dinâmica dos modelos. Escolhemos três estruturas espaço-temporais distintas, sendo que cada caso será discutido em seções, como indicado a seguir

Na primeira seção consideramos modelos homogêneos e isotrópicos que, como sabemos, descrevem satisfatoriamente o atual estágio da evolução de nosso universo observável. Devido ao fato da usual equação de estado manter-se inalterada, obtivemos, para os casos em que a pressão é diferente de zero, alterações na evolução do modelo padrão. Para modelos com seção espacial plana foi possível encontrar uma solução geral, enquanto que para os demais, lançamos mão da análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais<sup>[63]</sup>.

De acordo com o modelo padrão, o universo foi praticamente sempre homogêneo e isotrópico. Esse fato tem incomo-

dado muitos pesquisadores<sup>[74]</sup> que conjecturavam uma fase inicial anisotrópica para nosso cosmos e, nessa busca de uma descrição mais realista, o conteúdo material passou a ser considerado mais complexo que um fluido simples, como por exemplo um fluido dissipativo. Nesses modelos, o problema central é que o processo de isotropização, ocorrendo num intervalo de tempo da ordem da idade do universo, não é suficiente para dar conta da isotropia atualmente observada. Recentemente Novello e Duque<sup>[75]</sup> estudaram esse problema num enfoque diferente, utilizando a transição de fase anisotrópica para isotrópica gerada pelo campo gravitacional. Com essa motivação como guia, analisaremos modelos anisotrópicos Bianchi tipo-I na segunda seção para um fluido perfeito com spin. Temos, portanto, um conteúdo material que é a generalização mais imediata de um fluido perfeito e, tal qual nos modelos homogêneos e isotrópicos, somente nos casos em que a pressão é não nula, o spin tem influência na evolução dos modelos. Utilizando a análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais, pudemos verificar a existência de várias classes de soluções, dentre as quais aquelas que apresentam uma fase isotropizante.

Desde que Gödel<sup>[76]</sup> publicou uma solução das equações de Einstein, onde o fluido cósmico possui vorticidade, diversos autores tem se dedicado a explorar as propriedades dos modelos com rotação tais como a violação da causalidade e, também, generalizar a solução original de Gödel. A obtenção de novas soluções foi possível ao generalizar-se o elemento de linha para modelos com rotação juntamente com fontes mais complexas do que poeira, tais como fluidos dissipativos<sup>[77]</sup> e não-stokesianos<sup>[78]</sup>. Assim sendo, dando continuidade a proposta deste capítulo, considera-

mos, na terceira e última seção, universos com rotação dependente do tempo cuja fonte é um fluido perfeito com spin.

### 3.1 - Modelos Homogêneos e Isotrópicos

O elemento de linha utilizado na descrição dos modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - A^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (3.2)$$

onde  $k = 0, \frac{1}{r_0^2}, \frac{-1}{r_0^2}$ , para seção espacial plana, aberta e fechada, respectivamente, e  $A(t)$  é o fator de escala.

O conteúdo material, fonte da curvatura do espaço-tempo, é um fluido com spin em equilíbrio termodinâmico. Seu tensor momento-energia foi deduzido a partir da densidade da lagrangeana proposta no capítulo 1 (vide seção 1.2) e cuja expressão é mostrada a seguir:

$$T^{\alpha\beta} = n \left( ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^\alpha U^\beta}{c^2} - p h^{\alpha\beta} + \frac{2n}{c^2} \dot{U}_\mu S^{\mu(\alpha} U^{\beta)} + \\ - 2 \nabla_\mu \left( n S^{\mu(\alpha} U^{\beta)} \right) \quad (3.3)$$

Nesta expressão,  $\varepsilon$  é a energia interna por partícula,  $S^{\mu\nu}$  é o tensor momento angular de spin,  $\Omega_{\mu\nu}$  o tensor velocidade angular de spin,  $p$  a pressão hidrostática e  $nac^2$  a densidade de energia de repouso.

Tomando o sistema de coordenadas determinado por (3.2) comovente com as partículas do fluido, a quadrivelocidade será dada por  $U^\alpha = c \delta^\alpha_0$  e as equações de Einstein escritas como mostrado a seguir:

$$\frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{kc^2}{A^2} \right) = \chi \left( \rho + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) - \Lambda \quad (3.4)$$

$$\frac{2A\ddot{A} + \dot{A}^2 + kc^2}{c^2 A^2} = -\chi p - \Lambda \quad (3.5)$$

$$\nabla_i (n S^{ij}) = 0 \quad (3.6)$$

As equações (3.6) correspondem a  $G^{oi} = -\chi T^{oi} = 0$ . Adicionalmente, temos de levar em conta a condição de Frenkel  $S^{\alpha\beta} U_\beta = 0$ , que no sistema de coordenadas escolhido, impõe que somente três componentes de  $S^{\alpha\beta}$  são não-nulas, a saber:  $S^{12}$ ,  $S^{23}$  e  $S^{31}$ .

As equações do campo gravitacional não são suficientes para a determinação completa da evolução de um modelo cosmológico. São necessárias outras informações oriundas das propriedades físicas do conteúdo material caracterizado pelo seu tensor momento-energia. Na presente situação, devemos exibir as leis de balanço do momento angular de spin, da energia cinética de spin, bem como de alguma relação envolvendo  $\rho = n(ac^2 + \varepsilon)$  e  $p$ . As duas primeiras leis são dadas pelas equações escritas abaixo (vide eqs. (1.76) e (1.92)).

$$n \left( S_{\alpha\beta} \right)'_{\perp} = 0 \quad (3.7)$$

$$n \left( \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \right)' = 0 \quad (3.8)$$

A equação (3.7) pode ser integrada sem muita dificuldade. Da relação entre  $S^{\alpha\beta}$  e  $S^\alpha$  introduzida no capítulo 1 (eq. 1.36), a lei de balanço do momento angular de spin é, no sistema de co-



ordenadas comovente, escrita como:

$$\frac{\partial S^i}{\partial t} + \frac{\dot{A}}{A} S^i = 0 \quad (3.9)$$

Integrando, obtemos que  $S^i$  é inversamente proporcional ao fator de escala, ou seja:

$$S^i \sim \frac{1}{A(t)} \quad (3.10)$$

Da equação (3.8) é imediato que  $S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}$  (ou  $S^{\alpha} \Omega_{\alpha}$ ) independe do tempo  $t$ . Para que haja compatibilidade com a eq. (3.4) devemos impor ainda que  $S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}$  independa também da posição espacial, significando que este termo é constante (\*).

A terceira e última relação a ser introduzida é a usual equação de estado envolvendo  $p$  e  $\rho$ , que é dada por:

$$p = \lambda \rho \quad (3.11)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  e  $\rho = n(ac^2 + \epsilon)$ . Note que esta equação é a mesma estabelecida para fluidos sem spin.

A determinação do fator de escala  $A(t)$  e, conseqüentemente, a completa caracterização do modelo cosmológico é feita se utilizarmos as equações (3.4), (3.5), (3.10) e o fato

---

(\*) De um modo geral, a dependência de  $S^{ij}$  com as coordenadas espaciais é determinada ao integrarmos a equação (3.6).

de que  $n(t)$  obtido pela integração da equação de continuidade (eq.2.22) é dado por:

$$n(t) = \frac{n_0}{A^3(t)} \quad (3.12)$$

onde  $n_0$  é uma constante. Então, após algum algebrismo, chegamos a seguinte equação para  $A(t)$ :

$$2A\ddot{A} + (3\lambda + 1) (\dot{A}^2 + kc^2) + \Lambda(\lambda + 1)A^2c^2 - \frac{\lambda\Lambda_s c^2}{A} = 0 \quad (3.13)$$

onde  $\Lambda_s = \frac{n_0 \chi S^{\alpha\beta\Omega}}{2} \alpha\beta$ . Observe que a energia cinética de spin contribui com um termo adicional inversamente proporcional a  $A(t)$ , de modo que a usual evolução dos modelos FRW é alterada. No entanto, para o caso de poeira ( $\lambda = 0$ ) com spin, nenhuma modificação na evolução dos referidos modelos é encontrada. Aí, o spin da matéria apenas redefine o valor de  $\rho = n(ac^2 + \epsilon)$ . Por esse motivo, iremos nos concentrar em analisar as soluções da equação (3.13) para  $\lambda \neq 0$ , buscando exibir a alteração da dinâmica dos modelos homogêneos e isotrópicos devido ao spin da matéria cósmica. Analisaremos então, separadamente, os modelos com seção espacial plana ( $k = 0$ ), fechada e aberta com a constante cosmológica nula. Os casos em que  $\Lambda \neq 0$  serão tratados independentemente.

### 3.1.1 - Modelos com Seção Espacial Plana (k = 0)

Fazendo  $k = 0$  e  $\Lambda = 0$  em (3.13), obtemos a seguinte equação:

$$2A\ddot{A} + (3\lambda + 1)\dot{A}^2 - \frac{\lambda\Lambda_s c^2}{A} = 0 \quad (3.14)$$

A solução geral dessa equação foi encontrada por Assad<sup>[79]</sup>. Seguindo o seu procedimento, a integral primeira de (3.14) é:

$$\dot{A}^2 = \left(\frac{A_0}{A}\right)^{3\lambda+1} \left[ 1 + \frac{\Lambda_s}{3A_0} \left(\frac{A}{A_0}\right)^{3\lambda} \right] \quad (3.15)$$

onde  $A_0$  é uma constante de integração. Podemos expressar  $p$  e  $\rho_{ef} = \rho + \frac{1}{2} n S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}$  em função do fator de escala  $A(t)$ , ao substituirmos (3.15) em (3.4) e utilizarmos a eq. (3.12):

$$\chi \rho_{ef} = \frac{3}{c^2 A^2} \left(\frac{A_0}{A}\right)^{3\lambda+1} \left[ 1 + \frac{\Lambda_s}{3A_0} \left(\frac{A}{A_0}\right)^{3\lambda+1} \right] \quad (3.16)$$

$$\chi p = \frac{3\lambda}{c^2 A^2} \left(\frac{A_0}{A}\right)^{3\lambda+1} \quad (3.17)$$

Caso  $\Lambda_s = 0$ , as expressões acima reduzem-se para aquelas obtidas no modelo padrão. A condição fraca de energia  $T^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta \geq 0$  é sempre satisfeita visto que  $\Lambda_s$  e  $A_0$  são quantidades positivas.

Vamos introduzir uma variável auxiliar  $Y$  definida por:

$$Y \equiv \frac{\Lambda_s}{3A_0} \left(\frac{A}{A_0}\right)^{3\lambda} \quad (3.18)$$

e cuja relação inversa é facilmente calculada:

$$A = \left( \frac{3A_0^{3\lambda+1}}{\Lambda_s} Y \right)^{\frac{1}{3\lambda}} \quad (3.19)$$

Voltando para a eq. (3.15) e reexpressando-a em função de  $Y(t)$ , obtemos, após algum algebrismo, o seguinte resultado:

$$\frac{dt}{dY} = \frac{A_0^{\frac{1+3\lambda}{2\lambda}}}{\lambda \Lambda_s} \left( \frac{3Y}{\Lambda_s} \right)^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}} (1+Y)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

Derivando com relação a  $Y$ , vem:

$$\frac{d^2t}{dY^2} = \frac{A^{\frac{1+3\lambda}{2\lambda}} (1-\lambda) Y^{\frac{1-3\lambda}{2\lambda}}}{2\lambda^2 \Lambda_s} \left( \frac{3}{\Lambda_s} \right)^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}} \left[ 1 - \frac{(1-Y)^{-1\lambda}}{(1-\lambda)} Y \right] \quad (3.21)$$

Escrevendo, a partir da eq. (3.20),  $(1+Y)^{-1/2}$  em função de  $\frac{dt}{dY}$  e  $Y$  e substituindo na eq. (3.21), temos:

$$\frac{d^2t}{dY^2} = \frac{1}{(1+Y)} \left[ -\frac{1}{2} + \left( \frac{1-\lambda}{2\lambda} \right) \left( \frac{1+Y}{Y} \right) \right] \frac{dt}{dY} \quad (3.22)$$

e, após algumas passagens simples aqui omitidas, chegamos a seguinte equação:

$$(1+Y) \frac{d^2t}{dY^2} + \left[ \left( \frac{\lambda-1}{2\lambda} \right) + \left( \frac{2\lambda-1}{2\lambda} \right) Y \right] \frac{dt}{dY} = 0 \quad (3.23)$$

Definindo uma nova variável  $X$  dada por:

$$X \equiv 1+Y \quad (3.24)$$

a equação (3.23) pode ser reescrita na forma desejada:

$$(1 - x)X \frac{d^2t}{dx^2} + \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1 - 2\lambda}{2\lambda} \right) X \right] \frac{dt}{dx} = 0 \quad (3.25)$$

A equação (3.25) está expressa na forma das equações que admitem como solução geral, funções hipergeométricas<sup>[80]</sup>. Tais equações são escritas como:

$$X(1 - X) \frac{d^2t}{dX^2} + \left[ c - (a + b + 1)X \right] \frac{dt}{dX} - a b t = 0 \quad (3.26)$$

Comparando a eq. (3.26) com a (3.25), determinamos facilmente os coeficientes a, b e c:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \\ b &= -\frac{1}{2\lambda} \\ a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

A solução geral da eq. (3.26) é dada por:

$$t(X) = \alpha F(a, b; c; X) + \beta X^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; X) \quad (3.28)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $F(a, b; c; X)$  é a função hipergeométrica. Tendo em vista os coeficientes a, b e c identificados em (3.27), podemos escrever:

$$\begin{aligned} F(a, b; c; X) &= F\left(0, -\frac{1}{2\lambda}; \frac{1}{2}; X\right) = 1 \\ F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; X) &= F\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; X\right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim:

$$t(X) = \alpha + \beta X^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda-1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; X\right) \quad (3.30)$$

Voltando para a variável Y, temos:

$$t(Y) = \alpha + \beta (1+Y)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda-1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1+Y\right) \quad (3.31)$$

As seguintes propriedades satisfeitas pelas funções hipergeométricas são importantes para posterior desenvolvimento:

$$\frac{d}{dz} \left[ \chi^{c-1} F(a, b; c; z) \right] = (c-1) z^{c-2} F(a, b; c-1; z) \quad (3.32a)$$

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} \quad (3.32b)$$

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \quad (3.32c)$$

Resta apenas a determinação das constantes  $\alpha$  e  $\beta$  para a completa especificação da solução desejada. Dando início com a determinação de  $\beta$ , derivemos (3.31) com relação a Y:

$$\frac{dt}{dY} = \frac{1}{2} \beta (1+Y)^{-1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda-1}{2\lambda}; \frac{1}{2}; 1+Y\right) \quad (3.33)$$

onde utilizamos a propriedade (3.32a). Aplicando (3.32c), vem:

$$\frac{dt}{dY} = \frac{1}{2} \beta (1+Y)^{-1/2} (-Y)^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}} \quad (3.34)$$

e igualando  $\frac{dt}{dY}$  dado pela expressão anterior com a correspondente encontrada em (3.20), obtemos, após algumas simplifica-

ções, o seguinte resultado:

$$\beta = \frac{2A_0^2}{\lambda \Lambda_S} \left( \frac{3A_0}{\Lambda_S} \right)^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2\lambda}} \quad (3.35)$$

Substituindo na eq. (3.35) na (3.31), temos:

$$t(Y) = \alpha - \frac{2A_0}{3\lambda} \left[ 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{3\lambda} \right]^{1/2} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{\frac{3(\lambda+1)}{2\lambda}} \cdot \\ \cdot F \left( 1, \frac{(2\lambda+1)}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{3\lambda} \right) \quad (3.36)$$

A determinação de  $\alpha$  é feita simplesmente escolhendo a origem da contagem do tempo na eq. (3.36):

$$t_0 \equiv t \left( Y_0 = \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right) \quad \therefore \\ \therefore t = t(Y_0) = \alpha - \frac{2A_0}{3\lambda} \left( 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right)^{1/2} F \left( 1, \frac{2\lambda+1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right) \therefore \\ \therefore \alpha = t_0 + \frac{2A_0}{3\lambda} \left( 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right)^{1/2} F \left( 1, \frac{2\lambda+1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right) \quad (3.37)$$

Por fim, substituindo a eq. (3.37) na eq. (3.36), vem:

$$t(A) - t_0 = \frac{2A_0}{3\lambda} \left( 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right)^{1/2} F \left( 1, \frac{2\lambda+1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \right) - \\ - \frac{2A_0}{3\lambda} \left[ 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{3\lambda} \right]^{1/2} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{\frac{3(\lambda+1)}{2\lambda}} F \left( 1, \frac{2\lambda+1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1 + \frac{\Lambda_S}{3A_0} \left( \frac{A}{A_0} \right)^{3\lambda} \right) \quad (3.38)$$

Portanto, em consequência do spin, a solução é expressa por meio de funções hipergeométricas da maneira acima indicada. Claro está que no limite  $\Lambda_s \rightarrow 0$ , devemos recuperar as soluções usuais dos modelos FRW. Fazendo então, esse limite, temos:

$$t(A) - t = \frac{2A}{3\lambda} F\left(1, \frac{2\lambda + 1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right) - \frac{2A}{3\lambda} \left(\frac{A}{A_0}\right)^{\frac{3(\lambda+1)}{2}} F\left(1, \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}; \frac{3}{2}; 1\right) \quad (3.39)$$

Utilizando a propriedade  $F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(b)}$ , onde  $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ :

$$A(t) = A_0 \left[ 1 + \frac{3(\lambda+1)}{2} \left(\frac{t-t_0}{A_0}\right) \right]^{\frac{2}{3(\lambda+1)}} \quad (3.40)$$

Essa é a usual solução de FRW com  $p$  e  $\rho$  interligados pela equação de estado (3.10).



### 3.1.2 - Modelos com seção espacial aberta e fechada

Para  $k \neq 0$  e  $\Lambda = 0$  em (3.13), teremos a seguinte equação:

$$2A\ddot{A} + (3\lambda + 1) (\dot{A}^2 + kc^2) - \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{A} = 0 \quad (3.41)$$

A fim de analisarmos as possíveis soluções dessa equação, utilizaremos o método da análise qualitativa de sistema autônomo de equações diferenciais. Tal sistema é obtido ao introduzirmos as variáveis  $x$  e  $y$  dadas por:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A(t) \\ y(t) &= \dot{A}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Então, a equação (3.41) é transformada no seguinte sistema de equações diferenciais em  $x$  e  $y$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= y = F(x, y) \end{aligned} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{2x^2} - \frac{(3\lambda + 1)y^2}{2x} - \frac{(3\lambda + 1)kc^2}{2x} = G(x, y) \end{aligned} \right. \quad (3.44)$$

Seguindo Andronov et al<sup>[63]</sup> ou Sansoni e Conti<sup>[81]</sup>, vamos traçar no plano de fase  $xy$  todas as curvas que são soluções do sistema constituído pelas equações (3.43) e (3.44), e, desse modo, analisar os modelos representados por tais soluções. O primeiro passo é determinarmos os pontos críticos  $P_0(x_0, y_0)$  (também conhecidos por pontos singulares) do sistema. Tais pontos são obtidos fazendo  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $G(x_0, y_0) = 0$ . Fa

almente encontramos um único ponto crítico  $P_0(x_0, y_0)$ , cujas coordenadas são:

$$x_0 = \frac{\lambda \Lambda_s}{(3\lambda + 1)k} ; \quad y_0 = 0 \quad (3.45)$$

Caso  $k > 0$  (modelos fechados) temos que  $x_0 > 0$  e, para  $k < 0$  (modelos abertos),  $x_0 < 0$ . Só consideraremos as soluções com  $x = A(t) > 0$  (fig. 3.1), apesar de ser possível que  $A(t)$  seja negativo, visto que este fator aparece na métrica elevado ao quadrado.

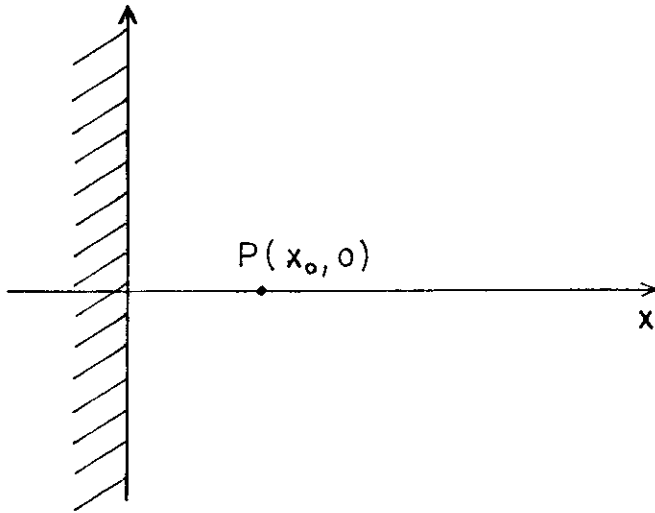


Fig. 3.1 - Ponto crítico no plano de fase para  $k > 0$ .

O próximo passo é a determinação da estrutura topológica das curvas na vizinhança do ponto crítico  $P_0(x_0, y_0)$ . Isso é obtido quando expandimos  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  numa série de potências a partir do ponto crítico e considerarmos somente termos lineares, ou seja, linearizando o sistema de equações, como mostrado a seguir:

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) \quad (3.46)$$

$$\dot{y} = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) \quad (3.47)$$

Duas quantidades irão indicar qual a estrutura das curvas na vizinhança do ponto crítico: o determinante  $\Omega(P_0)$  e o traço  $I(P_0)$  da matriz construída a partir das derivadas parciais de  $F(x,y)$  e  $G(x,y)$ , como mostrado a seguir:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 & \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \\ \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_0 & \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Calculando  $\Omega(P_0)$  e  $I(P_0)$ , temos:

$$\left. \begin{aligned} \Omega(P_0) &= \frac{(3\lambda + 1)^3 k^3 c^2}{2\lambda^2 \Lambda_s^2} \\ I(P_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

$P_0$  será um centro para  $k > 0$  e um ponto de sela para  $k < 0$ . Na figura (3.2) são mostradas as curvas traçadas na vizinhança de  $P_0(x_0, y_0)$  quando  $k > 0$ .

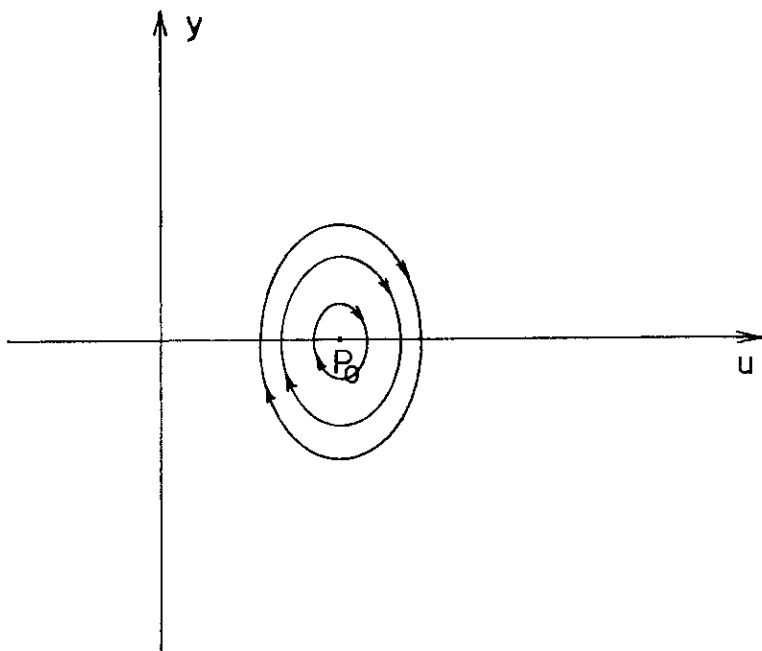


Fig. 3.2 - Estrutura das curvas na vizinhança de  $P_0(x_0, y_0)$ .

A etapa final será estudarmos o comportamento das curvas no infinito. Utilizamos o método da projeção estereográfica de Poincaré<sup>[63]</sup>, cujos detalhes de cálculo são deixados para o apêndice E. O gráfico resultante para o caso  $k > 0$  é mostrado na fig. (3.3). Note a deformação das elipses devido a influência dos termos não-lineares. A análise das curvas no plano de fase é feita a seguir.

O ponto  $P_0$  representa um modelo homogêneo, isotrópico e estático (tipo Einstein), cujo fator de escala é dado por  $A_0 = \frac{\lambda \Lambda_s}{(3\lambda + 1)k}$ . As curvas representam uma classe de soluções com características notáveis: não possuem singularidade e são oscilantes. O fator de escala  $A(t)$  oscila entre um valor mínimo até um máximo, sendo que as oscilações são realizadas em torno do modelo estático (ponto  $P_0$ ). Os valores

máximo e mínimo de  $A(t)$  podem ser calculados a partir da seguinte equação:

$$\dot{A}^2 = \frac{A_0}{A^{3\lambda+1}} + \frac{\Lambda_s c^2}{3A} - kc^2 \quad (3.50)$$

que nada mais é que a integral primeira de (3.41). Um resultado idêntico a este foi encontrado por Assad e Romero<sup>[82]</sup> analisando universos homogêneos e isotrópicos na teoria de Einstein Cartan. Como ressaltado por esses autores, há uma fase expansiva inflacionária onde  $\ddot{A}(t) \geq 0$ . Na presente situação, esta condição é equivalente a  $\dot{y}(t) \geq 0$ . Ao verificarmos a equação (3.44) constatamos que a energia cinética de spin é responsável por esta desigualdade ou, em outras palavras, responsável pela fase inflacionária. Já as soluções representadas pelas curvas  $SS'$  tem início numa singularidade (ponto S), onde o fator de escala  $A(t)$  atinge um valor máximo e, a partir daí tem início a contração. O estágio final desses modelos é a singularidade representada pelo ponto  $S'$ .

A condição fraca de energia é sempre satisfeita, o que pode ser facilmente verificado abaixo:

$$c^{-2} T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} = \frac{3}{\chi} \left( \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{k}{A^2} \right) \geq 0 \quad (3.51)$$

Apesar da densidade total de energia ser sempre positiva, a energia interna pode adquirir valores negativos permitindo que a pressão  $p = \lambda\rho$  seja suficientemente negativa em determinada parte da evolução cosmológica e, assim, evitar a singularidade. Para os modelos com singularidade, é sempre positivo e o mesmo vale para a pressão. A determi-

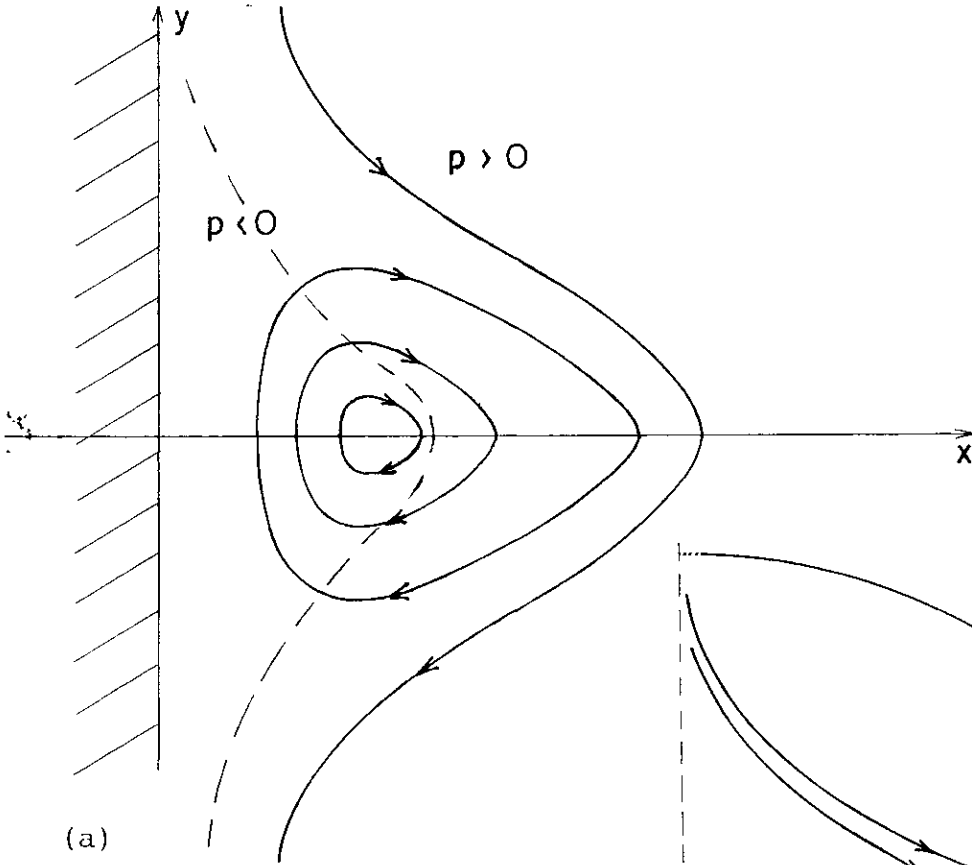
nação das regiões onde  $\rho$  é negativo pode ser obtida se reescrevermos a equação (3.4) como mostrado a seguir:

$$\chi\rho = \frac{3(y^2 + kc^2)}{c^2x^2} - \frac{\Lambda_s}{x^3} \quad (3.52)$$

Na figura (3.3) delineamos as regiões segundo as quais  $p \leq 0$ . Como esperado, os modelos entram neste regime a medida que estão contraindo e, uma vez vencido o colapso gravitacional, dá-se o início à expansão e a pressão volta a assumir valores positivos. Note que, se fizermos o limite de  $\Lambda_s \rightarrow 0$ , ou seja, na ausência do momento angular de spin, recuperamos a expressão para  $\rho$  estabelecida para os modelos de FRW. O conteúdo material se interpretado como um gás perfeito com spin levaria, nas soluções que apresentam  $\rho$  negativo, a estados não físicos. Essa interpretação, no entanto, não é necessária pelos argumentos que seguem: (i) o fato de escolhermos a equação de estado  $p = \lambda\rho$  não implica na completa caracterização termodinâmica do sistema; (ii) para as equações de campo, temos um fluido que apresenta uma densidade total ou efetiva de energia positiva e uma pressão que pode assumir valores negativos. Na verdade, o fluido com spin no presente contexto pode ser reinterpretado como um fluido simples sujeito a seguinte equação de estado [47]:

$$\rho_{ef} = \rho_{spin} + \frac{p}{\lambda} \quad (3.53)$$

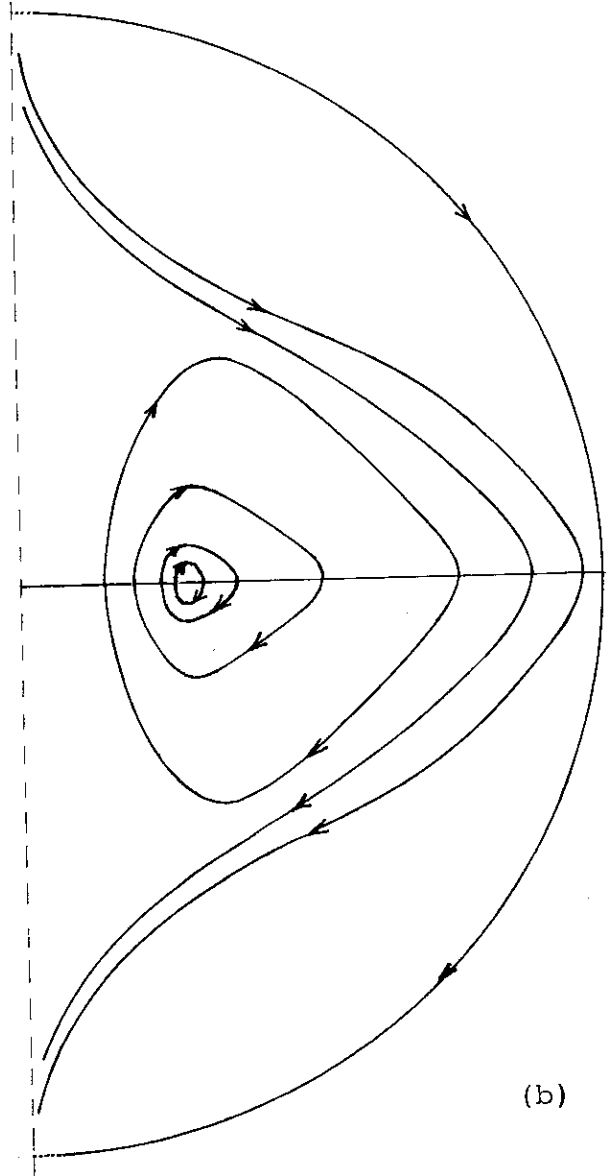
onde  $\rho_{ef} = \rho + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}$  e  $\rho_{spin} = \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}$ . A densidade de energia cinética de spin neste caso faz o papel de massa de repouso das partículas do fluido.



(a)

Figs. 3.3 - (a) Regiões em que a pressão assume valores positivos e negativos.

(b) Curvas no plano de fase para  $k > 0$ .



(b)

Para  $k < 0$ , não há ponto crítico na região considerado plano de fase. Além do mais, praticamente todas as curvas situadas nesta região representam modelos que violam a condição fraca de energia em pelo menos alguma fase de sua evolução. Isto pode ser constatado se fizermos:

$$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} - \frac{\chi}{c^2} G^{00} = \frac{3\chi}{c^4} \left( \frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{|k|c^2}{A^2} \right) \geq 0 \quad (3.54)$$

Tendo em vista as variáveis  $x$  e  $y$  introduzidas em (3.42), a desigualdade acima reduz-se a:

$$-\sqrt{|k|c^2} \geq y \geq \sqrt{|k|c^2} \quad (3.55)$$

Na figura 3.4, traçamos a região onde é violada a condição fraca de energia.

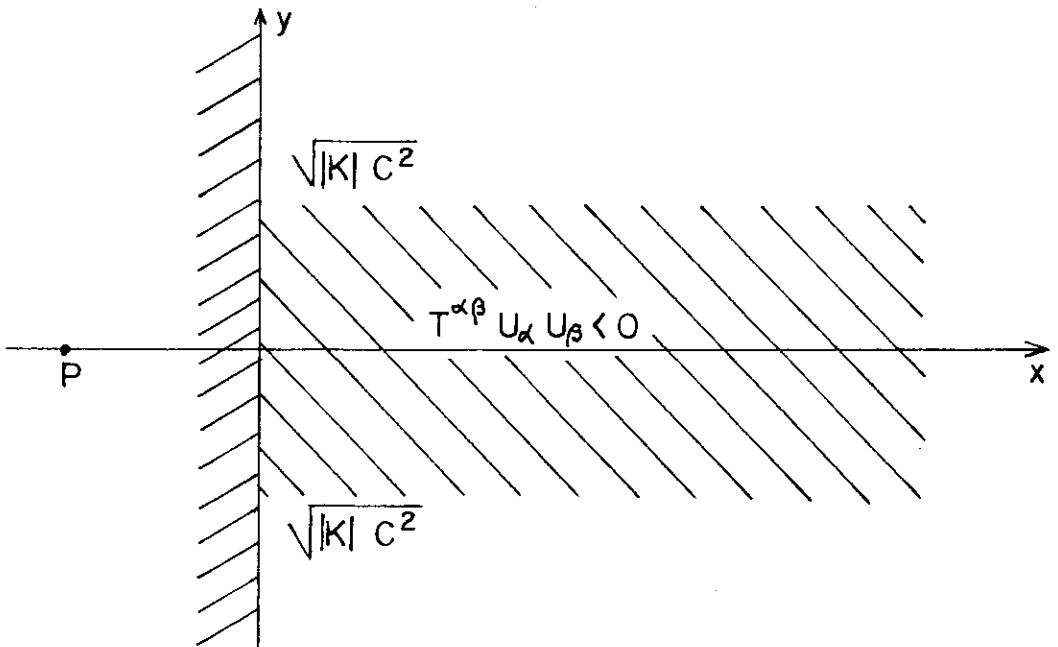


Fig. 3.4 - Região no plano de fase onde é violada a condição.



### 3.1.3 - Influência da Constante Cosmológica

Nesta sub-seção, faremos algumas considerações a cerca da influência da constante cosmológica na evolução dos modelos cosmológicos. Estas basear-se-ão no sistema dinâmico resultante da equação (3.41), que é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{2x^2} - \frac{(3\lambda + 1)(y^2 + kc^2)}{2x^2} - \frac{(\lambda + 1)\Lambda c^2 x}{2} \end{array} \right. \quad (3.56)$$

$$(3.57)$$

Os pontos críticos  $P(x_0, y_0)$  do sistema estarão necessariamente sobre o eixo-x, uma vez que  $y_0 = 0$ . A determinação da coordenada  $x_0$  é obtida ao resolvermos a seguinte equação algébrica:

$$(\lambda + 1)\Lambda x_0^3 + (3\lambda + 1)kx_0 - \lambda\Lambda_s = 0 \quad (3.58)$$

O número de pontos críticos irá depender do número de raízes reais de (3.58), que, por sua vez, depende da relação entre  $\Lambda$ ,  $\Lambda_s$ ,  $k$  e  $\lambda$ . A análise de tais pontos críticos é deixada para uma posterior investigação. Entretanto, para  $k = 0$  encontramos um único ponto crítico cujo valor da coordenada  $x$  é dado por:

$$x_0 = \left[ \frac{\lambda \Lambda_s}{(\lambda + 1)\Lambda} \right]^{1/3} \quad (3.59)$$

Pode ser mostrado que o ponto crítico obtido para o caso de modelos planos será um centro para  $\Lambda > 0$ , e um ponto da sela para  $\Lambda < 0$ . A estrutura das curvas na vizinhança do pon

to crítico para  $\Lambda > 0$  é idêntica a mostrada na figura 3.2. Essencialmente, nesta situação, não há mudança considerável no comportamento das curvas no plano de fase.

A condição fraca de energia deve sempre ser satisfeita, de modo que podemos selecionar casos que mais tarde, podem ser investigados. A expressão resultante da desigualdade  $T^{\alpha\beta}U_{\alpha}U_{\beta} \geq 0$  é escrita abaixo:

$$\frac{3}{c^2} \left( \frac{y^2}{x^2} + \frac{kc^2}{x^2} \right) + \Lambda \geq 0 \quad (3.60)$$

onde utilizamos a equação (3.4) e as relações dadas em (3.42). Na tabela (3.1) mostramos, para cada situação, as conseqüências da desigualdade (3.60) no plano de fase xy.

CONSTANTE COSMOLÓGICA  $\Lambda$

Seção espacial	$\Lambda > 0$	$\Lambda < 0$
plana - $k = 0$	$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \geq 0$ é satisfeita em todo o plano de fase	$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \geq 0$ não é satisfeita na região do plano de fase definido por: $-c \sqrt{\frac{ \Lambda }{3}} x \leq y \leq +c \sqrt{\frac{ \Lambda }{3}} x$
fechada - $k > 0$	$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \geq 0$ é satisfeita em todo o plano de fase	$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \geq 0$ não é satisfeita na região do plano de fase definido por: $-c \left( \frac{ \Lambda  x^2}{3} - k \right) \leq y \leq +c \left( \frac{ \Lambda  x^2}{3} - k \right)$
aberta - $k < 0$	$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \geq 0$ não é satisfeita na região do plano de fase definido por: $-c \left( -\frac{\Lambda x^2}{3} +  k  \right) \leq y \leq +c \left( -\frac{\Lambda x^2}{3} +  k  \right)$	$T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} \geq 0$ não é satisfeita na região do plano de fase definido por: $-c \left( \frac{ \Lambda  x^2}{3} +  k  \right) \leq y \leq +c \left( \frac{ \Lambda  x^2}{3} +  k  \right)$

Tabela 3.1

### 3.1.4 - Tétradas Girantes nos Modelos Homogêneos e Isotrópicos

Na descrição de fluidos com spin em relatividade geral desenvolvida nos capítulos I e II, utilizamos dois campos tensoriais que caracterizam completamente o movimento deste fluido: o já conhecido campo de velocidade hidrodinâmico  $U^\alpha(x)$  e o campo de velocidade angular de spin  $\Omega_{\alpha\beta}(x)$  (ou  $\Omega_\alpha(x)$ ). A introdução deste segundo campo deve-se ao fato das partículas do fluido possuírem estrutura interna, de modo que as mesmas podem girar independentemente dos seus deslocamentos. No modelo, as partículas do fluido são consideradas como pequenas réplicas de corpos rígidos dotados de velocidade angular de spin que é determinada pela rotação intrínseca de uma base tetrádica ligada à partícula (vide seção 1.1, cap. I). Como já ressaltamos, essa rotação se faz relativamente a uma base Fermi-Walker transportada ao longo das linhas de universo das partículas do fluido. É nosso objetivo, nesta subseção, determinar a base tetrádica girante a partir da equação de evolução das mesmas, como ficará claro no decorrer do texto.

Inicialmente, denominamos de base de tétradas naturalmente adaptada ao elemento de linha (3.1), aquela que é obtida por uma leitura direta do referido elemento de linha levando-se em conta que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - A^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (3.61)$$

onde

$$\Theta^{(A)} = a^{(A)}_{\mu} dx^{\mu} \quad (3.62)$$

Então, a base de tétradas natural  $\{a^{(A)}_{\mu}\}$  é dada por:

$$\left. \begin{aligned} a^{(0)}_{\mu} &= (1, 0, 0, 0) \\ a^{(1)}_{\mu} &= \left(0, \frac{A(t)}{1 - kr^2}, 0, 0\right) \\ a^{(2)}_{\mu} &= (0, 0, r A(t), 0) \\ a^{(3)}_{\mu} &= (0, 0, 0, r A(t) \sin\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Obviamente poderíamos escolher uma outra base ortonormal de tétradas, uma vez que há liberdade fornecida pelas transformações de Lorentz locais entre as mesmas:

$$e^{(A)}_{\mu} = \mathbb{L}^A_B a^{(B)}_{\mu} \quad (3.64)$$

onde  $\mathbb{L}^A_B(x)$  é a matriz de transformação local de Lorentz, que satisfaz a seguinte relação:

$$\mathbb{L}^A_B \mathbb{L}^C_D \eta^{BD} = \eta^{AC} \quad (3.65)$$

Pode ser mostrado sem dificuldade que a base natural  $\{a^{(A)}_{\mu}\}$  é Fermi-Walker transportada ao longo das linhas de universo das partículas do fluido, indicando, portanto, tratar-se de uma base não girante:

$$\dot{a}^{(A)}_{\mu} = U^{\alpha} \nabla_{\alpha} a^{(A)}_{\mu} = 0 \quad (3.66)$$

A base de tetradas solidária com cada partícula estruturada do fluido gira relativamente a base natural  $\{a^{(A)}_{\mu}\}$ . A cada instante tais bases estão relacionadas por uma transformação local de Lorentz dada pela equação (3.64), que na verdade é uma rotação de Lorentz, cujo gerador é a velocidade angular de spin  $\Omega_{\alpha\beta}$ . A transformação tem as seguintes características:

$$a^{(0)}_{\alpha} = e^{(0)}_{\alpha} = \frac{U_{\alpha}}{c} \quad (3.67)$$

ou seja:

$$\mathbb{L}^0_0 = 1; \quad \mathbb{L}^0_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.68)$$

A base de tetradas  $\{e^{(A)}_{\mu}\}$  pode ser determinada ao integrarmos a sua equação da evolução dada pela equação (1.17), e que pode ser reescrita como mostrado abaixo:

$$\dot{e}^{(A)}_{\alpha} = \left( \Omega_{\alpha\beta} + \frac{2}{c^2} \dot{U}_{[\alpha} U_{\beta]} \right) e^{\beta(A)} \quad (3.69)$$

onde utilizamos a equação (1.22). Tendo em vista que a aceleração do fluido é nula, a equação (3.67), a relação entre  $\Omega_{\alpha\beta}$  e  $\Omega_{\alpha}$  (eq. 1.32), podemos decompor a equação (3.69) nas seguintes expressões:

$$\dot{e}^{(0)}_{\alpha} = \frac{\dot{U}_{\alpha}}{c} = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial e^{(a)}_{\underline{1}}}{\partial t} = \eta_{ijk} \Omega^j e^{(a)k} + \frac{\dot{A}}{A} e^{(a)}_{\underline{1}} \quad (3.71)$$

onde  $i = 1, 2, 3$  e  $a = 1, 2, 3$ . Após integrada, esta última equação

nos fornece os vetores espaciais da base tetrádica.

Como exemplo, vamos integrar (3.69) numa situação resultante da validade das seguintes hipóteses simplificadoras:

(i) o quadrivetor momento angular de spin  $S^\alpha$  só tem componente na direção  $r$ , ou seja,  $S^\alpha = (0, S^1, 0, 0)$ ; (ii) o tensor inércia de rotação por partícula  $j^{\alpha\beta}$  é dado por:

$$j^{\alpha\beta} = - J h^{\alpha\beta} \quad (3.72)$$

Como consequência disso, o quadrivetor velocidade angular de spin  $\Omega^\alpha$ , em virtude de  $S^\alpha = j^{\alpha\beta} \Omega_\beta$ , fica sendo escrito como:

$$\Omega^\alpha = (0, \Omega, 0, 0) \quad (3.73)$$

Outras informações adicionais serão úteis. A condição de rigidez das partículas do fluido (eq. 1.47), traduzida para esta situação, reduz-se a:

$$\dot{J} = 0 \quad (3.74)$$

Por fim, a lei de balanço do momento angular de spin, juntamente com as equações (3.72), (3.74), resulta em:

$$\dot{\Omega} = 0 \quad (3.75)$$

Estando  $S^\alpha$  e  $\Omega^\alpha$  dirigidos na direção de  $r$ , vamos propor que a base tetrádica  $\left\{ e^{\binom{A}{\mu}} \right\}$  seja escrita como mostrado a seguir:

$$\left. \begin{aligned} e^{(0)}_{\alpha} &= (1, 0, 0, 0) \\ e^{(1)}_{\alpha} &= \left(0, \frac{A(t)}{\sqrt{1-kr^2}}, 0, 0\right) \\ e^{(2)}_{\alpha} &= (0, 0, rA(t)f_1, rA(t)f_1 \text{ sen } \theta) \\ e^{(3)}_{\alpha} &= (0, 0, rA(t)h_1, rA(t)h_2 \text{ sen } \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Substituindo os quadrivetores espaciais  $\vec{e}^1$ ,  $\vec{e}^2$  e  $\vec{e}^3$  em (3.71) juntamente com a restrição (3.73), chegamos ao seguinte sistema de equações para as funções  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $h_1$  e  $h_2$ :

$$\dot{f}_1 - \frac{\Omega}{\sqrt{1-kr^2}} f_2 = 0 \quad (3.77)$$

$$\dot{f}_2 + \frac{\Omega}{\sqrt{1-kr^2}} f_1 = 0 \quad (3.78)$$

$$\dot{h}_1 - \frac{\Omega}{\sqrt{1-kr^2}} h_2 = 0 \quad (3.79)$$

$$\dot{h}_2 + \frac{\Omega}{\sqrt{1-kr^2}} h_1 = 0 \quad (3.80)$$

Após a integração e levando-se em conta as condições de ortogonalidade, temos:

$$f_1 = \cos \left( \frac{\Omega t}{\sqrt{1-kr^2}} \right) \quad ; \quad f_2 = \text{sen} \left( \frac{\Omega t}{\sqrt{1-kr^2}} \right) \quad (3.81)$$

$$h_1 = -\text{sen} \left( \frac{\Omega t}{\sqrt{1-kr^2}} \right) \quad ; \quad h_2 = \cos \left( \frac{\Omega t}{\sqrt{1-kr^2}} \right) \quad (3.82)$$

Caso  $\Omega = 0$ , a base  $\left\{ e^{(A)}_{\mu} \right\}$  reduz-se àquela que é Fermi-Walker transportada dada por (3.61) como seria de se esperar.



Por fim, vamos exibir a matriz de transformação  $\mathbb{L}_B^A$ , obtida diretamente a partir de  $e_\mu^{(A)}$  e  $a_\mu^{(A)}$  :

$$\mathbb{L}_B^A = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \cos \Omega_{ef} t & \sin \Omega_{ef} t \\ & 0 & -\sin \Omega_{ef} t & \cos \Omega_{ef} t \end{array} \right) \quad (3.83)$$

onde  $\Omega_{ef} = \frac{\Omega}{\sqrt{1 - kr^2}}$

### 3.2 - Modelos anisotrópicos

Consideremos modelos homogêneos e anisotrópicos do tipo Bianchi-I, cujo elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - A_1^2(t) dx^2 - A_2^2(t) dy^2 - A_3^2(t) dz^2 \quad (3.84)$$

Novamente elegendo um sistema de coordenadas no qual  $U^\alpha = c\delta^\alpha_0$ , as equações do campo gravitacional para a métrica dada em (3.84) e o tensor momento-energia expresso pela equação (3.3) são:

$$-\frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{A}_1 \dot{A}_2}{A_1 A_2} + \frac{\dot{A}_1 \dot{A}_3}{A_1 A_3} + \frac{\dot{A}_2 \dot{A}_3}{A_2 A_3} \right) = -\chi \left( \rho + \frac{1}{2} n S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \right) + \Lambda \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{A}_2}{A_2} + \frac{\ddot{A}_3}{A_3} + \frac{\dot{A}_2 \dot{A}_3}{A_2 A_3} \right) = -\chi p - \Lambda \quad (3.86)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{A}_1}{A_1} + \frac{\ddot{A}_3}{A_3} + \frac{\dot{A}_1 \dot{A}_3}{A_1 A_3} \right) = -\chi p - \Lambda \quad (3.87)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{A}_2}{A_2} + \frac{\ddot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_1 \dot{A}_2}{A_1 A_2} \right) = -\chi p - \Lambda \quad (3.88)$$

$$\nabla_k S^{ki} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.89)$$

$$S^{k(i\sigma j)}_k = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i \neq j) \quad (3.90)$$

As equações diagonais são (3.85) ... (3.88) enquanto que as equações (3.89) e (3.90) correspondem a  $G^{0i} = -\chi T^{0i} = 0$  e  $G^{ij} = -\chi T^{ij}$ , para  $i \neq j$ , respectivamente. Na última equação,  $\sigma^i_k$  é o tensor de cisalhamento cujas componentes não-nulas no sis

tema de coordenadas eleito, são:

$$\sigma^{11} = \frac{1}{3cA_1^2} \left( \frac{\dot{A}_2}{A_2} + \frac{\dot{A}_3}{A_3} - \frac{2\dot{A}_1}{A_1} \right) \quad (3.91)$$

$$\sigma^{22} = \frac{1}{3cA_2^2} \left( \frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_3}{A_3} - \frac{2\dot{A}_2}{A_2} \right) \quad (3.92)$$

$$\sigma^{33} = \frac{1}{3cA_3^2} \left( \frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_2}{A_2} - \frac{2\dot{A}_3}{A_3} \right) \quad (3.93)$$

Vamos dar início a investigação do sistema de equações (3.85) ... (3.90). Substituindo as expressões correspondentes de  $\sigma^i_k$  dadas acima na equação (3.90), obtemos as seguintes relações:

$$S^{12} \left( \frac{\dot{A}_1}{A_1} - \frac{\dot{A}_2}{A_2} \right) = 0 \quad (3.94)$$

$$S^{32} \left( \frac{\dot{A}_3}{A_3} - \frac{\dot{A}_2}{A_2} \right) = 0 \quad (3.95)$$

$$S^{23} \left( \frac{\dot{A}_2}{A_2} - \frac{\dot{A}_3}{A_3} \right) = 0 \quad (3.96)$$

Claro está que, se  $A_1(t) \neq A_2(t) \neq A_3(t)$ , o tensor momento angular de spin é necessariamente nulo. Façamos, então, a seguinte imposição sobre os eixos de anisotropia:

$$A_1(t) = A_2(t) = A(t) \quad (3.97)$$

$$A(t) \neq A_3(t) = B(t) \quad (3.98)$$

Em consequência dessa imposição, a única componente não-nula

do tensor momento angular de spin é  $S^{12}$ , ou alternativamente, a componente  $S^3$  do quadrivetor momento angular de spin.

As equações indicadas por (3.89) apresentam resultado similar ao obtido para modelos homogêneos e isotrópicos relativamente a dependência espacial de  $S^{ij}$ . Mais informações acerca do spin é fornecida pelas leis de conservação de momento angular de spin e da energia cinética de spin, dadas respectivamente pelas eqs. (3.7) e (3.8). Desta última equação temos novamente que o produto  $S^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}$  é independente do tempo. Além disso, vamos impor, tal qual fizemos antes, que este termo não dependa das coordenadas espaciais.

Reescrevendo as equações de campo (3.95), ... , (3.98), onde levaremos em conta as equações (3.97) e (3.98), bem como  $n(t) = \frac{n_0}{A^2B}$ , obtido após integrarmos a equação de conservação do número de partículas, temos:

$$-\frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{A}^2}{A_2} + \frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) = -\chi \left( \rho + \frac{n_0 S^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}}{2A^2B} \right) + \Lambda \quad (3.99)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) = -\chi p - \Lambda \quad (3.100)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{2\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}^2}{A^2} \right) = -\chi p - \Lambda \quad (3.101)$$

Para compatibilizar o número de equações com o número de incógnitas, adicionaremos mais uma equação que é a relação entre  $p$  e  $\rho$ , dada por:

$$p = \lambda \rho \quad (3.102)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Passemos agora para a determinação de  $A(t)$  e  $B(t)$ . Igualando (3.100) e (3.101), obtemos a seguinte relação de compatibilidade entre as funções  $A(t)$  e  $B(t)$ :

$$\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\dot{A}^2}{A^2} \quad (3.103)$$

Isolando  $\rho$  em (3.99), utilizando (3.92) e substituindo a expressão obtida para  $p$  na equação (3.101), chegamos, após algum algebrismo, ao seguinte resultado:

$$\frac{2\ddot{A}}{A} + (1 + \lambda) \frac{\dot{A}^2}{A^2} + 2\lambda \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{A^2 B} + (\lambda + 1) \Lambda c^2 = 0 \quad (3.104)$$

onde  $\Lambda_s = \frac{n_0 \chi S^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta}}{2}$ .

No sentido de expressar de modo conveniente o sistema formado pelas equações (3.103) e (3.104), introduziremos as variáveis  $F(t)$  e  $\phi(t)$  definidas, respectivamente, por:

$$F(t) \equiv A^2 B \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \quad (3.105)$$

$$\phi(t) \equiv (A^2 B)^{1/3} \quad (3.106)$$

Após algumas passagens simples, o sistema de equações (3.103), (3.104) reduz-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{F} = 0 \Rightarrow F = F_0 = \text{constante} \\ \frac{2\ddot{\phi}}{\phi} + (3\lambda + 1) \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{(1 - \lambda) F_0^2}{3\phi^6} - \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{\phi^3} + (\lambda + 1) \Lambda c^2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.107)$$

$$(3.108)$$

É interessante notar que  $F_0$  pode ser interpretado como sendo a medida da anisotropia do modelo. Caso este parâmetro seja nulo, recaímos nos modelos isotrópicos ( $A = B$ ).

Com a finalidade de estudar a evolução dos modelos anisotrópicos iremos transformar a equação (3.108) num sistema de equações diferenciais autônomo nos moldes do que foi implementado na seção anterior. Introduziremos, então, as variáveis  $x$  e  $y$ , definidas por:

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv \phi(t) \\ y &\equiv \dot{\phi}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.109)$$

de modo que o sistema resultante é dado por:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= y \end{aligned} \right. \quad (3.110)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{y} &= - \frac{(3\lambda + 1)y^2}{2x} - \frac{(1 - \lambda)F_0^2}{6x^5} + \frac{\lambda\Lambda_g c^2}{2x^2} - \frac{(\lambda + 1)\Lambda c^2 x}{2} \end{aligned} \right. \quad (3.111)$$

Como antes, só consideraremos a região do plano de fase para  $x > 0$ .

### 3.2.1. - Análise do Sistema Dinâmico

O primeiro passo é a determinação dos pontos críticos do sistema na região finita. Realizando os cálculos, obtemos que os pontos críticos serão do tipo  $P(x, 0)$ , onde a coordenada  $x$  é calculada ao resolvermos a seguinte equação algé

brica:

$$(\lambda + 1)\Lambda c^2 x^6 - \lambda \Lambda_s c^2 x^3 + \frac{(1 - \lambda)F_0^2}{3} = 0 \quad (3.112)$$

As raízes desta equação vão depender da relação entre os parâmetros  $\lambda, \Lambda, \Lambda_s$  e  $F_0$ , como abaixo mostrado:

i) se  $\Lambda < 0$ , teremos apenas duas raízes distintas e de sinais contrários:

$$x_{\pm} = \left[ \frac{\lambda \Lambda_s}{2(\lambda + 1)\Lambda} (1 \pm \Delta) \right]^{1/3} \quad (3.113)$$

$$\text{onde } \Delta = \sqrt{1 - \frac{4\Lambda(1 - \lambda^2)F_0^2}{3\lambda^2\Lambda_s^2c^2}} \quad (3.114)$$

ii) se  $\Lambda = 0$ , teremos apenas uma única raiz positiva, cujo valor da coordenada  $x$  é:

$$x_0 = \left[ \frac{(1 - \lambda)F_0^2}{3\lambda\Lambda_s c^2} \right]^{1/3} \quad (3.115)$$

iii) se  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr} = \frac{3\lambda^2 c^2 \Lambda_s^2}{4(1 - \lambda^2)F_0^2}$  as raízes são iguais e de mesmo sinal, cuja expressão correspondente da coordenada  $x$  é dada por (3.113).

iv) se  $\Lambda = \Lambda_{cr}$ , teremos uma única raiz positiva:

$$x = \left[ \frac{\lambda \Lambda_s}{2(\lambda + 1)\Lambda_{cr}} \right]^{1/3} \quad (3.116)$$

v) se  $\Lambda > \Lambda_{cr}$ , não teremos raízes reais.

A determinação da natureza dos pontos críticos é deixada para o apêndice E, de modo que nos limitaremos a escrever apenas os resultados obtidos. No caso (i),  $P_+(x_+,0)$  e  $P_-(x_-,0)$ , são pontos de sela (fig. 3.5). No caso (ii), o ponto crítico também é um ponto de sela (fig. 3.6). Em (iii),  $P_+(x_+,0)$  é um centro, enquanto que  $P_-(x_-,0)$  é novamente um ponto de sela, como mostrado na fig. (3.7). Por fim, em (iv) o único ponto crítico é múltiplo, pois o determinante da parte linear calculada nesse ponto é nulo. A determinação das curvas na vizinhança deste ponto é deixada para uma outra oportunidade.

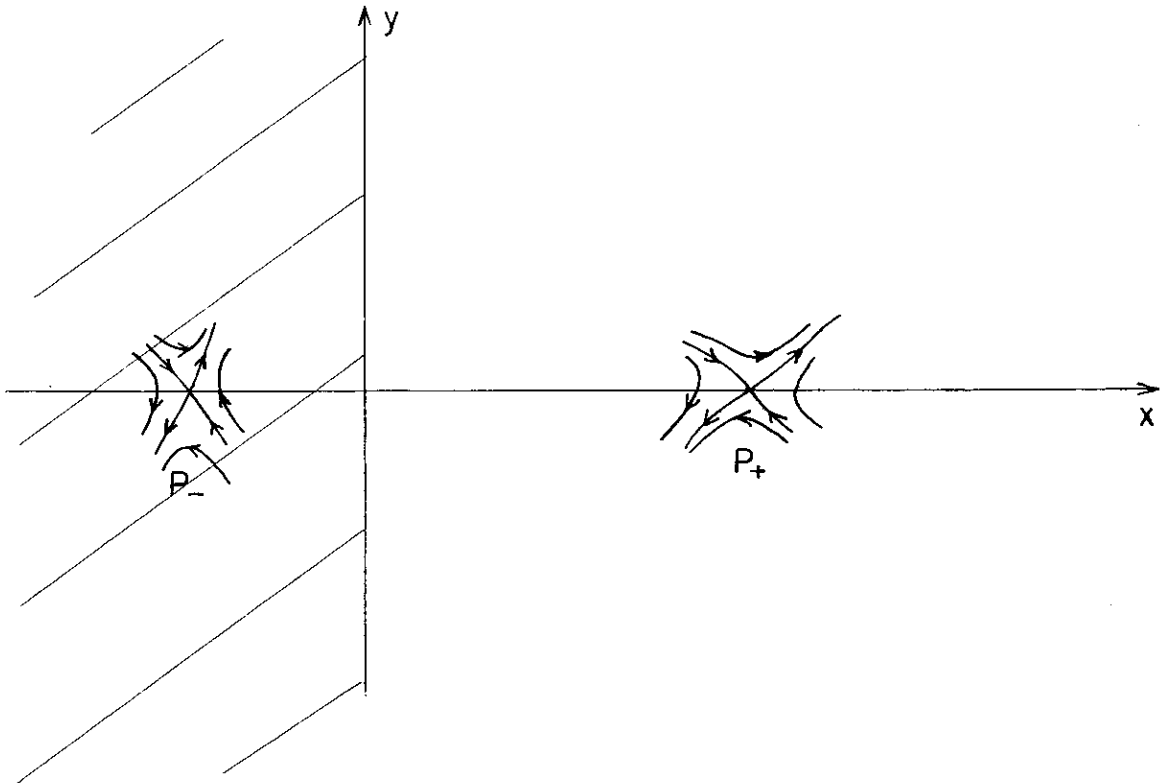


Fig. 3.5 - Natureza dos pontos críticos  $P_+(x_+,0)$  e  $P_-(x_-,0)$  para  $\Lambda < 0$ . Note que  $x_+ > 0$  e  $x_- < 0$ .



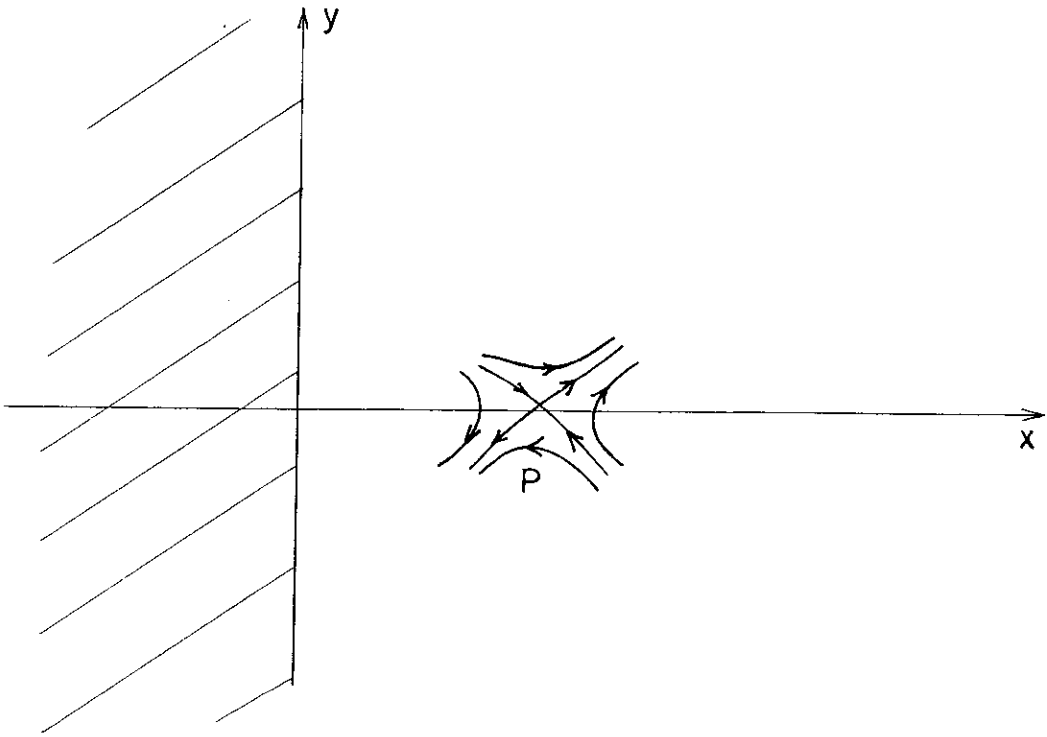


Fig. 3.6 - Curvas na vizinhança do ponto crítico para o caso  $\Lambda = 0$ .

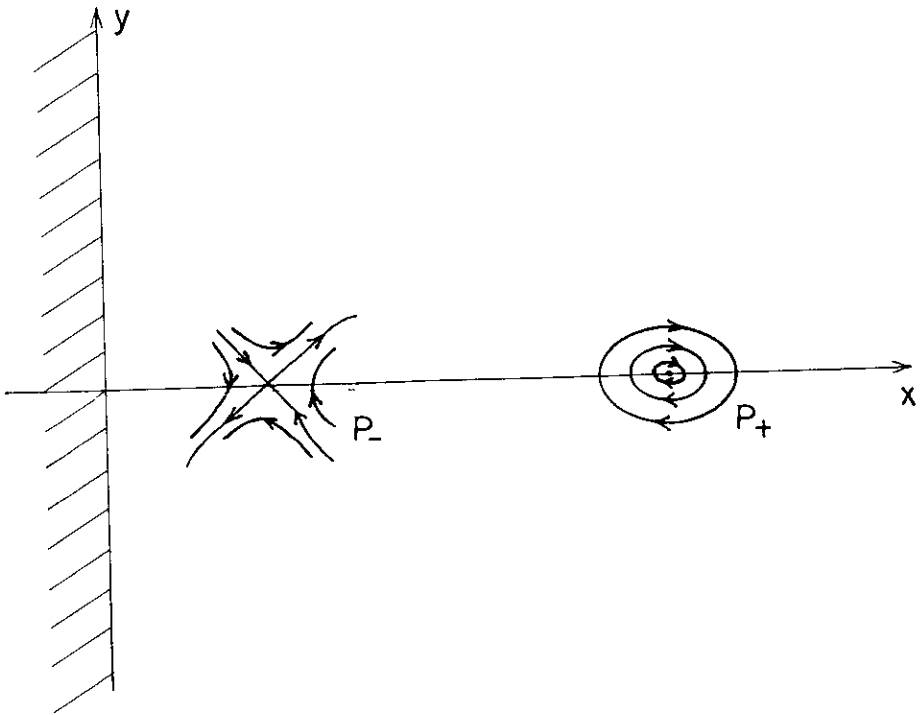


Fig. 3.7 - Curvas na vizinhança dos pontos críticos  $P_+(x_+, 0)$  e  $P_-(x_-, 0)$  com  $x_+ > 0$  e  $x_- > 0$ , para o caso  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$ .

Para completar as curvas em todo o plano de fase, faz-se necessária a análise do comportamento das curvas na região infinita (vide apêndice E). Antes, porém, verificaremos que restrições a condição fraca de energia impõe aos fatores de escala  $A(t)$  e  $B(t)$ , bem como suas derivadas. Tal restrição pode ser facilmente obtida ao utilizarmos as eqs. de campo e cujo resultado é mostrado abaixo:

$$T^{\alpha\beta}U_{\alpha}U_{\beta} = \frac{c^2}{\chi} \left( \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{2\ddot{A}B}{AB} + \Lambda \right) \geq 0 \quad (3.117)$$

Levando-se em conta as variáveis  $F$  e  $\phi$  dadas pelas eqs. (3.115) e (3.116), assim como a equação (3.117) e as variáveis  $x$  e  $y$  (eq. 3.119), a desigualdade acima pode ser reescrita como:

$$\frac{3y^2}{x^2} - \frac{F_0^2}{3x^6} + \Lambda c^2 \geq 0 \quad (3.118)$$

Com esta desigualdade poderemos identificar as regiões do plano de fase onde a densidade total de energia é positiva ou negativa. Dessa maneira conheceremos que curvas passam por tais regiões e, em consequência, os modelos que violam ou não a condição de positividade de energia. Nas figuras (3.8), (3.9) e (3.10) exibimos os planos de fase para os casos  $\Lambda < 0$ ,  $\Lambda = 0$  e  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$ , respectivamente, juntamente com as regiões definidas pela equação (3.118).

Os pontos críticos  $P(x,0)$  obtidos são soluções particulares do sistema constituído pelas equações (3.110) e (3.111). Tais soluções representam modelos cosmológicos anisotrópicos que não possuem expansão, uma vez que a mesma pode ser escrita em função das variáveis  $x$  e  $y$  como mostrado a seguir:

$$\theta = \frac{2\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} = \frac{2\dot{\phi}}{3\phi} = \frac{3\dot{y}}{x} \quad (3.119)$$

No entanto, isso não significa que os fatores de escala  $A(t)$  e  $B(t)$  sejam constantes, pois eles podem variar de modo que o produto  $A^2B$  permaneça constante. Isso implica que um hipotético observador neste universo detetaria um desvio para o vermelho numa direção e azul noutra. Devemos frisar que a existência de modelos com essas características só é possível devido ao termo de energia cinética de spin proporcional a  $\Lambda_s$ .

Passamos a seguir para a análise das curvas obtidas para cada caso.

### 3.3.2 - Análise das Curvas

#### - Caso $\Lambda < 0$

Na figura (3.18), temos as curvas no plano de fase para  $\Lambda < 0$ . O ponto crítico  $P_0$  é, como vimos, um ponto de sela. Isso indica que o modelo representado por  $P_0$  é instável, pois qualquer pequena perturbação poderia fazer com que nos afastássemos indefinidamente deste modelo. Além do mais, é violada a condição fraca de energia, ou seja, o conteúdo material possui densidade total de energia negativa.

Os pontos críticos no infinito, indicados por  $Q_+$  e  $Q_-$ , representam modelos onde os fatores de escala  $A(t)$  e  $B(t)$  são infinitamente grandes e, conseqüentemente, a densidade total de energia é nula. Podemos dizer que temos um estágio de máxima diluição. Outra característica a destacar

é que esses modelos são isotrópicos visto que  $\frac{F_0}{x^3} = 0$  e, portanto,  $A=B$  (vide eq. 3.105). A diferença entre ambos modelos está no fato de  $Q_+$  possui expansão dada por  $\theta_+ = \left(-\frac{\Lambda c^2}{3}\right)^{1/2}$ , enquanto  $Q_-$  contrai-se a uma taxa constante  $\theta_- = \left(-\frac{\Lambda c^2}{3}\right)^{1/2}$ . Como podemos notar ainda,  $Q_+$  é um atrator representando assim o estágio final de uma classe de soluções. Já a partir de  $Q_-$  as curvas saem, indicando ser este o estágio inicial de outra classe de soluções. Do gráfico da fig. (3.8), identificamos classes de soluções representadas pelas curvas  $SQ_+, Q_-S', Q_-Q_+, SS'$  e as separatrizes  $SP_0, P_0S', P_0Q_+$  e  $Q_-P_0$ , que serão analisadas a seguir:

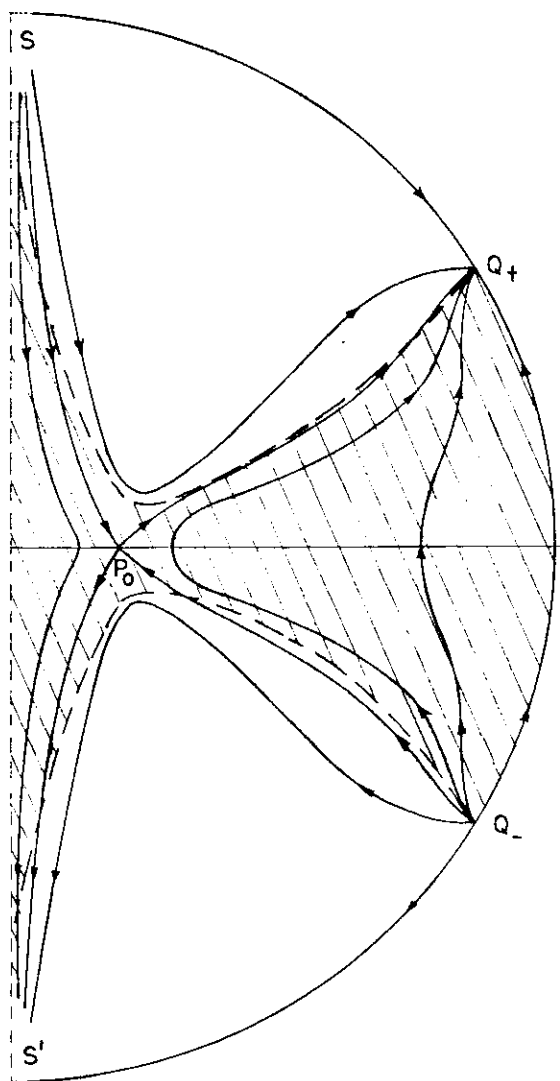


Fig. 3.8 - Curvas no plano de fase para  $\Lambda < 0$ .

(a) Curvas  $SQ_+$

As curvas  $SQ_+$ , com origem em  $S$  e término em  $Q_+$ , representam uma classe de soluções com as seguintes características: são singulares, pois a medida que tendemos para  $S$ ,  $y \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow 0$ , onde quantidades como a densidade de energia do fluido, bem como a expansão, divergem. No decorrer do tempo, a expansão varia até que, em  $t = \infty$ , atinge o valor  $\left(-\frac{\Lambda c^2}{3}\right)^{1/2}$ . Outro fenômeno importante é a isotropização dos modelos, visto que o fator  $\frac{F_0}{x^3}$  assume valores cada vez menores a medida que  $x$  cresce. Por fim, destacamos que esses modelos podem satisfazer a condição fraca de energia em toda sua evolução, pela observação de que temos curvas que não penetram na região onde tal condição é violada.

(b) Curvas  $Q_S'$

Temos a situação inversa daquela discutida anteriormente. Os modelos tem início num estágio isotrópico com diluição máxima e em contração. A medida que o tempo passa, a contração varia e  $x$  diminui. Os modelos anisotropizam-se tendo como estágio final a singularidade em  $S'$ , onde  $x \rightarrow \infty$  e  $y \rightarrow \infty$ . Como podemos notar, algumas soluções podem não violar a condição fraca de energia em nenhum estágio de suas evoluções.

(c) Curvas  $Q_Q_+$

As curvas que partem de  $Q_-$  e  $Q_+$  representam modelos que violam a condição fraca de energia em grande parte (quando não totalmente) de suas evoluções. Os modelos não a-

presentam singularidade: eles tem início num universo isotrópico apresentando máxima diluição e em contração. Com o passar do tempo ocorre anisotropização, mas a partir de um dado instante, cessa a contração e dá-se início ao estágio de expansão. Tais modelos tem, então, como estágio final o universo com diluição máxima representado por  $Q_+$ .

(d) Curvas  $SS'$

Novamente essas curvas representam modelos que violam em grande parte de suas evoluções a condição fraca de energia. São uma classe de soluções singulares que expandem até um certo momento e, a partir daí, começam a contrair-se até atingirem novamente a singularidade.

(e) Separatrizes

As separatrizes são curvas que, como o próprio nome sugere, separam duas regiões do plano de fase cujas curvas podem possuir comportamento distinto. No plano de fase para  $\Lambda < 0$  identificamos quatro separatrizes:  $SP_0$ ,  $P_0S'$ ,  $P_0Q_+$  e  $Q_+P_0$ , que serão analisadas a seguir.

A separatriz  $SP_0$  representa uma solução anisotrópica e singular (início em S). A expansão decresce a medida que o tempo passa até tender a um valor nulo em  $P_0$ . Como já mencionamos, este estágio final é um universo instável, além de violar a condição de positividade da energia da matéria cósmica.

O modelo representado pela curva  $P_0S'$  viola, como no caso anterior, a condição fraca de energia em grande parte de sua

evolução. Podemos entender que este modelo é oriundo de uma dada perturbação no universo estático  $P_0$ , que por sua vez faz com que se estabeleça uma contração com uma taxa que cresce a cada instante. Em consequência disso, o modelo tende a singularidade  $S'$ .

O modelo representado pela curva  $P_0Q_+$  tem início em um universo anisotrópico sem expansão, que devido a uma perturbação, expande-se gradativamente até atingir, em  $t = +\infty$ , um estágio isotrópico de diluição máxima. Em parte da evolução do modelo há violação da condição fraca de energia. Note que a solução não possui singularidade.

Por fim, a curva  $Q_-P_0$  possui um comportamento inverso do modelo acima. O estágio inicial, representado por  $Q_-$ , é de máxima diluição e contração constante. A evolução se faz até o universo anisotrópico e sem expansão representada por  $P_0$ . Novamente a condição fraca de energia é violada em parte da evolução do modelo.

- Caso  $\Lambda = 0$

Para  $\Lambda = 0$  as curvas no plano de fase são mostradas na figura (3.11). Como podemos constatar, há apenas um ponto na região infinita, que representa uma solução cosmológica sem expansão e com diluição máxima (vazio). Além disso,  $\frac{F_0}{X^3} = 0$ , indicando que este modelo é isotrópico. Logo, este ponto pode ser entendido como sendo o universo de Minkowski. Observando a estrutura das curvas em sua vizinhança, concluímos que o mesmo é instável. A seguir analisaremos as soluções representadas pelas curvas  $SQ_0$ ,  $Q_0S'$ ,  $Q_0Q_0$ , bem como as separatrizes  $SP_0$ ,  $P_0S'$ ,

$P_0 Q_0$  e  $Q_0 P_0$ .

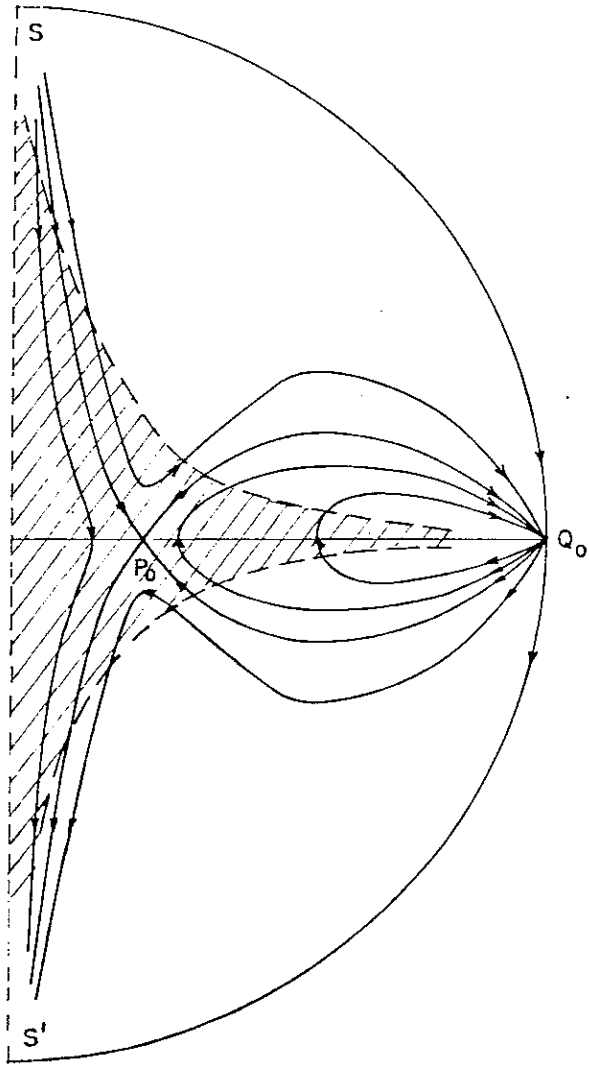


Fig. 3.9 - Curvas no plano de fase para  $\Lambda = 0$ .

(a) - Curvas  $SQ_0$

Tais curvas representam modelos anisotrópicos que tem início na singularidade indicada por S. Neste ponto as quantidades fisicamente relevantes, tais como densidade de energia interna, densidade de energia cinética de spin e pressão, divergem. A medida que os modelos evoluem, a expansão, inicialmente infinita, decresce para valores finitos, bem como as quan



tidades mencionadas anteriormente. Quando  $t \rightarrow \infty$ , as curvas tendem para  $Q_0$ , ou seja, para o universo de Minkowski. Devemos ressaltar que eventualmente algumas curvas cortam a região onde a condição fraca de energia é violada.

(b) - Curvas  $Q_0S'$

Os modelos representados pelas curvas  $Q_0S'$  emergem do universo de Minkowski (ponto  $Q_0$ ), e, a medida que contraem, anisotropizam-se. Para  $t \rightarrow \infty$ , as curvas tendem para  $S'$ , isto é, o estágio final dessa classe de solução é uma singularidade. Como no caso anterior, algumas curvas passam pela região onde a condição fraca de energia é violada.

(c) - Curvas que saem de  $Q_0$  e voltam a  $Q_0$

Os modelos representados pelas curvas  $Q_0Q_0$  violam, em pelo menos algum estágio de suas evoluções, a condição de positividade do conteúdo material. Tais modelos não apresentam singularidade e tem início em  $Q_0$ , quando inicia-se a contração. Chega um dado instante que a contração cessa e inicia-se a expansão até que para  $t \rightarrow \infty$ , os modelos tendem para  $Q_0$  novamente.

(d) - Curvas  $SS'$

Os modelos representados pelas curvas  $SS'$  tem características idênticas àqueles dados pelas mesmas curvas para o caso  $\Lambda < 0$ .

(e) Separatrizes

As separatrizes  $SP_0$ ,  $P_0S'$ ,  $P_0Q_0$  e  $Q_0P_0$  representam modelos que violam a condição fraca de energia em alguma etapa de suas respectivas evoluções. As separatrizes  $SP_0$  e  $P_0S'$  tem a mesma interpretação dada para o caso  $\Lambda < 0$ . Já o comportamento dos modelos representados por  $P_0Q_0$  e  $Q_0P_0$  são similares àqueles representados por  $P_0Q_+$  e  $Q_-P_0$  no caso  $\Lambda < 0$ , onde a diferença está no fato de que  $Q_0$  não possui expansão ou contração.

- Caso  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$

Quando a constante cosmológica é positiva surgem classes de soluções distintas daquelas discutidas anteriormente. Como podemos notar a partir da fig. (3.10), temos dois pontos críticos na região finita e nenhum na região infinita. As curvas  $SS'$  e as separatrizes  $SP_0$  e  $P_0S'$  tem interpretação idêntica aos casos  $\Lambda < 0$  e  $\Lambda = 0$ . Passemos, então, para a análise das curvas que representam modelos com novas características:

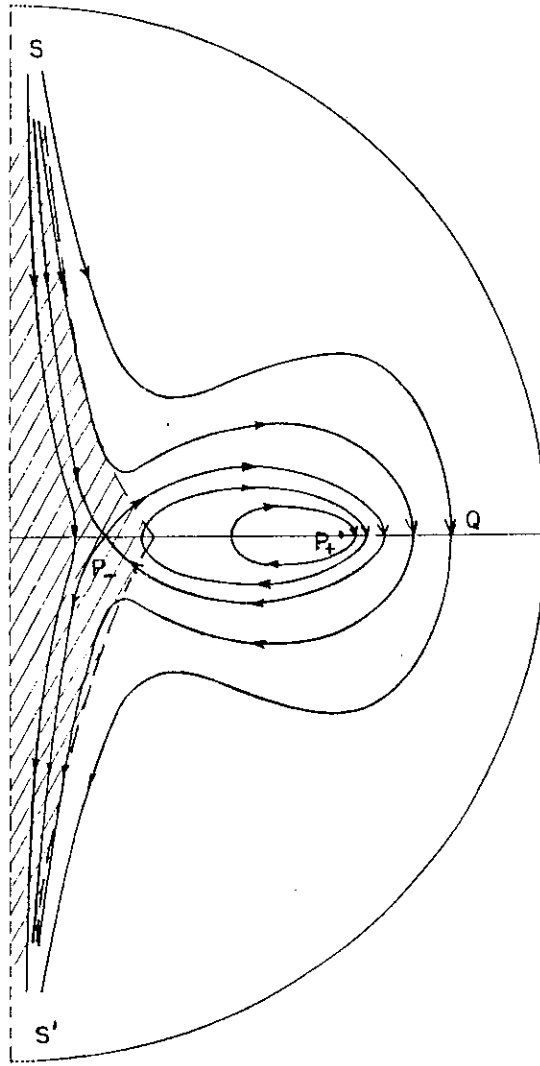


Fig. 3.10 - Curvas no plano de fase para  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$ .

(a) - Curvas SQS'

Essa família de curvas representam modelos que e mergem de uma singularidade, passam por uma fase expansiva e i sotropizante até que atingem um máximo valor de  $x = (A^2B)^{1/3}$ . A partir daí inicia-se a fase de contração que leva os modelos novamente para a singularidade. Como já ressaltamos anteriormente, durante a contração ocorre a anisotropização. Eventualmente, algumas curvas dessa família cruzam a região onde a condição de positividade de energia é violada.

(b) - Curvas fechadas em torno de  $P_+$

A classe de soluções representadas pelas curvas fechadas em torno de  $P_+$  tem características peculiares: são não-singulares, oscilantes e podem não violar a condição de positividade de energia. O produto  $A^2B$  oscila entre um valor máximo e um mínimo, e as oscilações são feitas em torno de um modelo anisotrópico estático (ponto  $P_+$ ). Este comportamento também foi obtido para os modelos homogêneos e isotrópicos. Então, como neste caso, teremos uma fase expansiva inflacionária caracterizada por  $\ddot{\phi} = \dot{y} \geq 0$ . Tendo em vista a equação (3.111), notamos que o termo responsável pela expansão acelerada é aquele associado à energia cinética de spin.

(c) - Separatriz  $P_0P_0$

Esta separatriz representa um modelo que tem início numa configuração estática (ponto  $P_0$ ). A expansão cessa a partir de um dado instante e passa a ocorrer a contração, até que o modelo tenda novamente para o universo estático indicado por  $P_0$ . Este modelo viola a condição fraca de energia em pelo menos algum estágio de sua evolução.

### 3.3.3 - Observações Finais

A determinação de soluções exatas foi deixada de lado devido a complexidade do sistema das equações diferenciais obtidas. Entretanto, podemos fornecer solução para uma

situação bem simples que é a dos modelos representados pelos pontos críticos na região finita  $P_0(x_0, 0)$ . Os modelos em questão tem expansão nula, ou seja,  $A^2B = \text{constante}$ . A solução trivial é  $A = A_0$  e  $B = B_0$ , onde  $A_0$  e  $B_0$  são constantes. Por outro lado, os fatores A e B podem variar, como já havíamos assinalado anteriormente. Façamos, então, a seguinte escolha:

$$A(t) = A_0 e^{\alpha t} \tag{3.120}$$

$$B(t) = B_0 e^{\beta t}$$

De imediato, segue que  $2\alpha + \beta = 0$ . Substituindo (3.120) em (3.103) e levando em conta a relação entre  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos facilmente o seguinte valor de  $\alpha$ :

$$\alpha^2 = \frac{1}{3(1-\lambda)} \left[ \frac{\lambda \Lambda_s}{A_0^2 B_0} - (\lambda + 1) \Lambda c^2 \right] \tag{3.121}$$

para  $\lambda \neq 1$ . Quando  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  e vice-versa, ou seja, a expansão numa dada direção implica contração noutra.

Na seção 3.1.3 obtivemos a base tetrádica girante  $\left\{ e^{(A)}_{\mu} \right\}$  para modelos homogêneos e isotrópicos após integrarmos a equação de evolução das tétradas dada por (1.17). Para o caso anisotrópico, semelhante cálculo pode ser feito fornecendo-nos a base tetrádica girante. As expressões resultantes da equação de evolução da base são dadas a seguir:

$$\dot{e}^{(0)}_{\mu} = 0 \tag{3.122a}$$

$$\frac{\partial e^{(i)}_k}{\partial t} = \Omega_{kj} e^{(i)j} + c \Gamma^i_{ko} e^{(i)}_j, \quad \begin{matrix} (i) = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{matrix} \tag{3.122b}$$

A primeira equação nos informa que o fluido não tem aceleração, enquanto que a segunda nos permite o cálculo das componentes espaciais da base em função da velocidade angular  $\Omega_{kj}$ . Esta velocidade angular é dada a priori como uma característica intrínseca do fluido evidenciada pelo seu momento angular de spin não nulo. As equações (3.120 a e b) foram exibidas por Israel<sup>[51]</sup> analisando a influência do spin da matéria nos modelos anisotrópicos. Como ressaltado naquele trabalho, o spin induz uma rotação tipo Lense-Thirring dos eixos locais inerciais relativamente às direções principais de anisotropia com velocidade angular  $\Omega_{\mu\nu}$ . As direções principais de anisotropia são aquelas determinadas por giroscópios inerciais, e que tem alinhada a base tetrádica não-girante  $\left\{ a_{\mu}^{(A)} \right\}$ . Por fim, devido ao fato do momento angular de spin ser conservado (vide eqs. (1.75) ou (1.76)) implica que seu eixo permanece fixo relativamente às direções principais de anisotropia.

### 3.3 - Modelos com Rotação

Nesta seção trataremos de modelos cosmológicos com rotação dependente do tempo, cujo elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - dz^2 + g(r,t) d\phi^2 + 2h(r,t) cd\phi dt \quad (3.123)$$

Novamente a fonte da curvatura será o fluido perfeito com spin cujo tensor momento-energia foi deduzido no capítulo 1 (vide equação 3.3)).

Vamos escolher uma base tetrádica ortonormal

$\left\{ a_{\mu}^{(A)} \right\}$  dada por:

$$\left. \begin{aligned} a_{\mu}^{(0)} &= (1, 0, h(r,t), 0) \\ a_{\mu}^{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\ a_{\mu}^{(2)} &= (0, 0, \Delta(r,t), 0) \\ a_{\mu}^{(3)} &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.124)$$

onde  $\Delta^2(r,t) = h^2(r,t) - g(r,t)$ . O campo de velocidades hidrodinâmico  $U^{\alpha}$ , bem como os parâmetros cinemáticos calculados relativamente a essa base são escritos a seguir:

$$U^A = c \delta^A_0 \quad (3.125)$$

$$\dot{U}^A = \left( 0, 0, -\frac{c \dot{h}}{\Delta}, 0 \right) \quad (3.126)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \quad (3.127)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{\dot{\Delta}}{3\Delta} \quad ; \quad \sigma_{22} = - \frac{2\dot{\Delta}}{3\Delta} \quad (3.128)$$

$$\omega^A = \left( 0, 0, 0, - \frac{c h'}{2\Delta} \right) \quad \text{ou} \quad \omega_{12} = - \frac{c h'}{2\Delta} \quad (3.129)$$

Nessas expressões o ponto e a linha significam derivadas parciais com relação às coordenadas  $t$  e  $r$ , respectivamente.

A seguir, vamos escrever as equações de campo na base tetrádica escolhida para a métrica dada pela eq. (3.124) e o tensor momento-energia dado pela equação ( 3.3 ). Dividiremos as equações em três grupos como indicado abaixo, e onde também fizemos  $\Lambda = 0$  por simplicidade:

1º grupo:  $R^{ab} = - x T^{ab}$  , sendo  $a, b = 1, 2, 3$  e  $a \neq b$

$$\frac{-h'}{2c\Delta} - \frac{h'\dot{\Delta}}{2c\Delta^2} + \frac{\dot{h}\Delta'}{c\Delta^2} = \frac{n_0 \chi \dot{\Delta}'}{2\Delta^2} S^3 \quad (3.130)$$

$$0 = \frac{-n_0 \chi S_2 \omega^1_2}{2\Delta} \quad (3.131)$$

$$0 = \frac{n_0 \chi \dot{\Delta} S_1}{2\Delta^2} - \frac{n_0 \chi S_2 \omega^2_1}{2\Delta} \quad (3.132)$$

Na dedução dessas equações utilizamos  $n(r, t) = \frac{n_0}{\Delta(r, t)}$ , que é obtido após integrarmos a equação de conservação do número de partículas e a relação entre  $S^a$  e  $S^{ab}$  dada por  $S^{ab} = - \frac{1}{2c} \epsilon^{abmn} S_m U_n$ . Das equações (3.131) e (3.132), é imediato que:

$$S_2 = S_1 = 0 \quad (3.133)$$



Portanto, as equações de campo restringem as componentes do quadrivetor  $S^a$ . A única componente não-nula está dirigida na direção da vorticidade  $\omega^A$ .

$$2^\circ \text{ grupo: } R^{0a} = -\chi T^{0a}, \quad a = 1, 2, 3$$

$$-\frac{1}{2c\Delta^2} \left( \dot{h}\dot{h}' + 2\dot{h}h' - 2\Delta\dot{\Delta}' - \frac{hh'\dot{\Delta}}{\Delta} \right) = \chi \left[ \frac{n_0\dot{h}S^3}{\Delta^2} + \frac{n_0h}{2\Delta} \left( \frac{S^3}{\Delta} \right)' \right] \quad (3.134)$$

$$\frac{h'\Delta'}{2\Delta^2} - \frac{h''}{2\Delta} = \frac{n_0\chi c}{2} \left( \frac{S^3}{\Delta} \right)' \quad (3.135)$$

A equação  $R^{03} = -\chi T^{03}$  é satisfeita identicamente.

$$3^\circ \text{ grupo: } R^{aa} - \frac{1}{2} \eta^{aa} R = -\chi T^{aa}, \quad a = 0, 1, 2, 3 \text{ (sem soma)}$$

$$-\frac{3h'^2}{4\Delta^2} + \frac{\Delta''}{\Delta} = -\chi \left[ \rho + \frac{n_0 S^3}{2\Delta} \left( \Omega_3 - \frac{2h'c}{\Delta} \right) \right] \quad (3.136)$$

$$-\frac{h'^2}{4\Delta^2} + \frac{1}{c^2\Delta^2} \left( \frac{hh\ddot{\Delta}}{\Delta} - h\ddot{h} - \dot{h}^2 + \Delta\ddot{\Delta} \right) = -\chi \left( p - \frac{n_0 ch'}{2\Delta^2} S^3 \right) \quad (3.137)$$

$$-\frac{1}{4} \frac{h'^2}{\Delta^2} = -\chi \left( p - \frac{n_0 ch'}{2\Delta^2} S^3 \right) \quad (3.138)$$

$$\frac{h'^2}{4\Delta^2} - \frac{\Delta''}{\Delta} + \frac{1}{c^2\Delta^2} \left( \frac{hh\ddot{\Delta}}{\Delta} - h\ddot{h} - \dot{h}^2 + \Delta\ddot{\Delta} \right) = -\chi p \quad (3.139)$$

Antes de iniciarmos a busca de possíveis soluções das equações de campo, devemos escrever as leis de balanço do momento angular de spin, bem como da energia cinética de

spin, dadas respectivamente por:

$$n \dot{S}^3 = 0 \quad (3.140)$$

$$\frac{1}{2} n \left( S^3 \Omega_3 \right)' = 0 \quad (3.141)$$

Em consequência dessas equações, temos que:

$$S^3 = S^3(r) \quad (3.142)$$

$$S^3 \Omega_3 = k(r) \quad (3.143)$$

Dessas duas últimas equações constatamos facilmente que  $\Omega_3 = \Omega_3(r)$ .

Integrando a equação (3.135), obtemos a seguinte expressão para  $S^3$ :

$$S^3 = \frac{\Delta}{n_0 \chi c} \left( \phi - \frac{h'}{\Delta} \right) \quad (3.142)$$

onde  $\phi$  é uma constante de integração que, de um modo geral, pode depender do tempo. Outra relação importante surge quando comparamos as equações (3.137) e (3.138);

$$\frac{h\dot{h}\ddot{\Delta}}{\Delta} - h\ddot{h} - \dot{h}^2 + \Delta\ddot{\Delta} = 0 \quad (3.143)$$

Como hipótese de trabalho, admitiremos que  $h(r,t)$  e  $\Delta(r,t)$  sejam escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} h(r,t) &= R(r) T(t) \\ \Delta(r,t) &= \psi(r) F(t) \end{aligned} \tag{3.144}$$

Assim, as equações (3.142) e (3.143) ficam sendo reescritas por:

$$S^3(r) = \frac{\psi(r)}{n_0 \chi c} \left( \phi(t) F(t) - \frac{R'(r) T(t)}{\psi(r)} \right) \tag{3.145}$$

$$\frac{T \ddot{T} \ddot{F}}{F} - T \ddot{T} - \dot{T}^2 + \left( \frac{\psi}{R} \right)^2 F \ddot{F} = 0 \tag{3.146}$$

Para que  $S^3$  seja uma função unicamente da coordenada  $r$ , devemos impor que  $\phi(t) F(t) = k_0$ , sendo  $k_0$  uma constante. Segue, então, que somos forçados a fazer  $T = T_0 = \text{constante}$ . Levando esta última condição para a equação (3.146), obtemos:

$$\ddot{F} = 0 \tag{3.147}$$

Essa equação nos fornece trivialmente que:

$$F(t) = \alpha t \tag{3.148}$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Voltando à equação (3.145), temos:

$$S^3(r) = \frac{\psi}{n_0 \chi c} \left( k_0 - \frac{R' T_0}{\psi} \right) \tag{3.149}$$

Devemos observar que as equações (3.130) e (3.134), relacionam  $S^3(r)$  com as funções  $h$ ,  $\Delta$  e suas derivadas. Assim sendo, façamos a substituição da eq. (3.149) nessas equações onde levaremos em

conta as equações (3.144) e (3.147), e que  $T = T_0$ . Fazendo então a primeira substituição, vem:

$$-\frac{R' T_0}{2c \alpha t} = \frac{\psi}{2c \alpha t} \left( k_0 - \frac{R' T_0}{\psi} \right) \quad (3.150)$$

que, de imediato, implica em:

$$k_0 = 0 \quad (3.151)$$

Fazendo agora a substituição de (3.145) em (3.134), temos:

$$-\frac{1}{2c\alpha^2 t^2 \psi^2} \left( -2\alpha^2 t \psi \psi' - \frac{T_0^2 \psi R R'}{t} \right) = -\frac{R T_0}{2\alpha^2 \psi c t^2} \left( k_0 - \frac{R' T_0}{\psi} \right) \quad (3.152)$$

Considerando o resultado dado pela eq. (3.150) a expressão acima nos fornece:

$$\psi = \psi_0 = \text{constante} \quad (3.153)$$

Com os resultados obtidos anteriormente dados pelas equações (3.152) e (3.153), a expressão correspondente a  $S^3(r)$  é escrita em sua forma mais simples:

$$S^3(r) = -\frac{R' T_0}{n_0 \chi c} \quad (3.154)$$

Com as informações obtidas até agora para as funções  $R, \psi, F$  e  $T$ , os parâmetros cinemáticos são dados por:

$$\dot{U}^A = 0 \quad (3.155)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{t} \quad (3.156)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{1}{3t} \quad ; \quad \sigma_{22} = -\frac{2}{3t} \quad (3.157)$$

$$\omega^3 = -\frac{c R'(r)}{2\psi_0 \alpha t} \quad (3.158)$$

O fluido não é acelerado, expande-se e apresenta cizalhamento indicando a anisotropia do modelo, além de apresentar vorticidade dependente do tempo. Como podemos notar, em  $t=0$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_{AB}$  e  $\omega_3$  divergem e, a medida que o tempo passa, assumem valores finitos cada vez menores. Constatamos facilmente que neste instante inicial temos uma singularidade física, uma vez que, pelo menos uns dos invariantes do campo gravitacional, o escalar de curvatura  $R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ , por exemplo, diverge como indicado ao exibirmos a expressão deste invariante:

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{R'^2(r) T_0^2}{2\psi_0^2 \alpha^2 t^2} \quad (3.159)$$

O fato do modelo isotropizar-se e perder rotação a medida que se expande são características atraentes, visto que o universo observável é isotrópico e apresenta rotação praticamente nula. Com relação ao decaimento de rotação, veremos mais adiante que implicações decorrem a respeito da violação da causalidade nestes modelos.

A condição de positividade da energia do conteúdo material é facilmente verificada através da seguinte expressão:

$$c^{-2} T^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = \rho + \frac{1}{2} n S^\alpha (\Omega_\alpha - 4\omega_\alpha) = \frac{3R'(r) T_0^2}{4\chi\psi_0^2 \alpha^2 t} \geq 0 \quad (3.160)$$

Entretanto, se calcularmos a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $p$ , obtemos os seguintes resultados:

$$\rho(r,t) = - \frac{R'^2(r) T_0^2}{4\chi\psi_0^2\alpha^2t^2} - \frac{n_0 k(r)}{2\chi\psi_0\alpha t} \quad (3.161)$$

$$p(r,t) = - \frac{R'^2(r) T_0^2}{4\chi\psi_0^2\alpha^2t^2} \quad (3.162)$$

onde utilizamos as equações (3.136), (3.138), (3.144) e (3.148). Novamente a densidade de energia interna é negativa. A usual relação entre  $\rho$  e  $p$ , dada por  $p = \lambda\rho$ , sendo  $\lambda = \text{constante}$ , não é satisfeita. Isso ocorre porque, ao contrário dos modelos homogêneos e isotrópicos e anisotrópicos, não necessitamos da especificação de uma relação adicional entre  $p$  e  $\rho$  para a determinação das funções  $g(r,t)$  e  $h(r,t)$ . Devido a vorticidade do fluido, os valores efetivos ou totais de densidade de energia e pressão, calculados a partir do tensor momento-energia (vide seção 2.5), tem, para o modelo em questão, a seguinte forma:

$$\rho_{\text{ef}} = \frac{3R'^2(r) T_0^2}{4\chi\psi_0^2\alpha^2t^2} \geq 0 \quad (3.163)$$

$$p_{\text{ef}} = p - \frac{2}{3} n S^3 \omega_3 = \frac{R'^2(r) T_0^2}{12\chi\psi_0^2\alpha^2t^2} \geq 0 \quad (3.164)$$

É curioso notar que os valores efetivos e densidade de energia e pressão podem ser relacionados pela equação  $p_{\text{ef}} = \lambda\rho_{\text{ef}}$  com  $\lambda = \frac{1}{9}$ .

### 3.3.1 - Sobre a Violação da Causalidade<sup>(\*)</sup> e Considerações Finais

Uma das características mais intrigantes dos modelos cosmológicos do tipo Godel é a possibilidade da existência de curvas do tipo-tempo fechadas. Isso significa que um observador poderia influenciar seu próprio passado, sendo portanto violado o princípio de causalidade. Devido à homogeneidade espacial desses modelos temos que, a partir de um dado ponto qualquer o chamado raio crítico,  $r_c$ , que separa duas regiões: as ditas causais, onde as curvas fechadas são necessariamente do tipo-espaço, e as acausais, que possuem curvas fechadas do tipo-tempo, como indicado na figura (3.11).

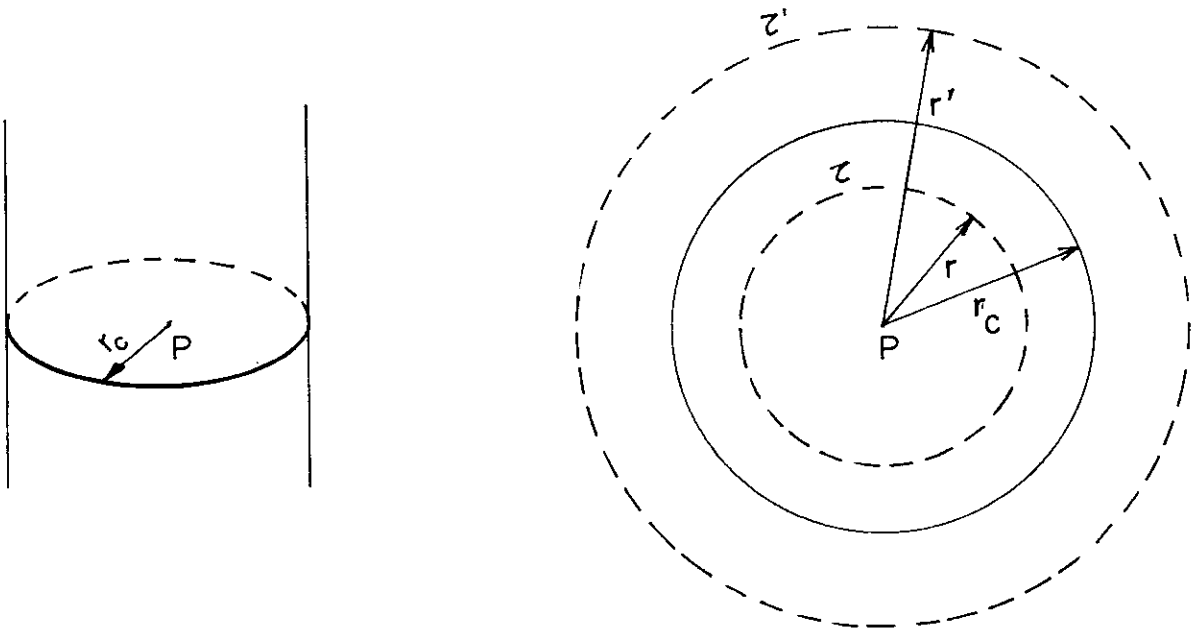


Fig. 3.11 - (a) Raio crítico em torno de um ponto qualquer P.

(b) Região causal e região acausal:

Curva  $\tau$ :  $ds^2 = g(r,t)d\phi^2 > 0$  ;  $r < r_c$

Curva  $\tau'$ :  $ds^2 = g(r,t)d\phi^2 < 0$  ;  $r > r_c$

Se  $r = r_c$  ,  $g(r_c,t) = 0$

(\*) Comunicação particular do Prof. M. Novello.

Calculemos o raio crítico para o modelo com rotação dependente do tempo obtido anteriormente. Para isso, devemos determinar sob que condições o sinal da função  $g(r,t) = h^2(r,t) - \Delta^2(r,t)$  varia. Assim, para a presente solução, temos:

$$g(r,t) = R^2(r) T_0^2 - \psi_0^2 \alpha^2 t^2 \quad (3,165)$$

Desta expressão concluímos que, para cada instante, teremos um valor de  $r_c$  para o qual  $g(r_c, t) = 0$ . Então, com uma escolha conveniente da função  $R(r)$ , que fora deixada em aberto, poderemos ter em  $t=0$  valor nulo para  $r_c$ . A medida que o tempo passa, o raio crítico assume valores cada vez maiores. No limite  $t \rightarrow \infty$ ,  $r_c \rightarrow \infty$  efetivamente não há problemas de causalidade.

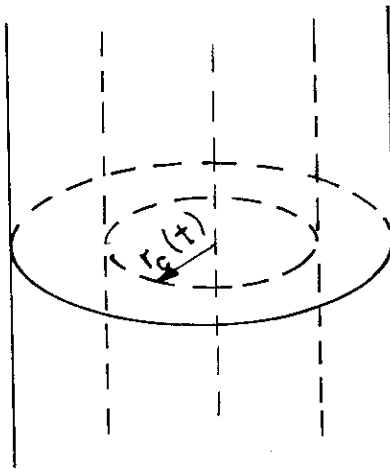


Fig. 3.12 - Raio crítico dependente do tempo.



Ao estudarmos os modelos com rotação gerados por fluidos com spin nos deparamos com dois campos de velocidade angular: a vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$  e a velocidade angular de spin  $\Omega_{\alpha\beta}$ . Na descrição do fluido que estamos adotando, esses dois campos são, de um modo geral, independentes entre si, e apresentam interpretações distintas. O efeito da vorticidade pode ser visualizado ao considerarmos duas partículas do fluido  $O$  e  $O'$  infinitesimalmente próximas e o vetor conexão projetado na tri-superfície de repouso. Então, a ação isolada da vorticidade é de fazer com que a partícula  $O'$  realize uma rotação rígida relativamente a  $O$ . A velocidade angular de spin, por seu turno, nada mais é que a rotação intrínseca de cada partícula ou elemento do fluido em torno de seu centro de massa. Uma situação especial ocorre quando a vorticidade e a velocidade angular de spin são iguais. Dizemos, nesse caso, que o fluido com spin encontra-se em rotação rígida [30].

No capítulo 2, analisando a termodinâmica de processos irreversíveis para fluidos com spin, constatamos a existência da viscosidade rotacional que é um efeito dissipativo associado a diferença entre a velocidade angular de spin e a vorticidade. Surge, então, uma possibilidade interessante de, mais tarde, analisar a evolução de modelos com rotação tendo como fonte um fluido dissipativo com spin. Como podemos constatar no capítulo 2, o momento angular de spin, neste novo cenário, não é mais conservado ao longo das linhas de universo do fluido.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese procuramos dar uma abordagem completa dos sistemas identificados como fluidos relativistas com spin em interação com o campo gravitacional, tanto nas configurações de equilíbrio como fora do equilíbrio termodinâmico.

Inicialmente propomos uma lagrangeana que descreve fluidos com spin em relatividade geral e em equilíbrio termodinâmico. No modelo, as partículas do fluido são consideradas pequenas réplicas de corpos rígidos dotados de inércia de rotação representada pelo tensor  $j^{\alpha\beta}$ . Obtivemos, em decorrência das equações oriundas da variação da integral de ação do fluido com relação às variáveis básicas, a lei de conservação do momento angular de spin, bem como o tensor momento-energia. Este tensor difere dos encontrados na literatura pelo termo adicional representando a energia cinética de spin. Mostramos que esta é a contraparte variacional da teoria fenomenológica dos fluidos com microestrutura rígida em equilíbrio termodinâmico (vide ref. [15]). Adicionando à lagrangeana do fluido a lagrangeana do campo gravitacional obtivemos as equações de Einstein, e no capítulo 3 fazemos algumas aplicações à cosmologia.

Procurando descrever estados mais gerais de fluidos com spin, escrevemos numa linguagem covariante a termodinâmica de processos irreversíveis de primeira ordem para esses fluidos. Trata-se, portanto, da generalização da teoria fenomenológica estabelecida no domínio não relativista<sup>[5]</sup>. Desen

volvemos em seguida a versão da teoria termodinâmica causal para fluidos com spin no espaço-tempo curvo, onde inicialmente consideramos a métrica dada a priori. Obtivemos as equações de evolução para os fluxos dissipativos que têm o mesmo status das variáveis de equilíbrio na caracterização do estado termodinâmico do sistema. Devido ao acoplamento entre os fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , suas equações de evolução ficam acopladas. Em seguida, algumas implicações da teoria foram investigadas com os seguintes resultados:

1. Analisando o sistema acoplado de equações da evolução de  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , obtivemos uma relação adicional entre os coeficientes fenomenológicos novos impondo simplesmente a condição de estabilidade do estado de equilíbrio termodinâmico.
2. Tendo em vista que a termodinâmica causal prevê a propagação de sinais térmicos e viscosos com velocidade finita, deduzimos, para um fluido com spin em repouso e não acelerado num campo gravitacional dado, as equações de propagação das ondas térmicas e de spin. Por simplicidade consideramos os coeficientes fenomenológicos constantes. As equações são do tipo hiperbólico, e com o intuito de verificar as consequências do acoplamento entre os fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ , fizemos as seguintes hipóteses: passamos a analisar o problema no espaço-tempo de Minkowski e desprezamos a parte inomogênia das equações obtidas. Desse modo, concluímos que as velocidades das ondas térmicas e de spin são maiores do que aquelas calculadas sem o acoplamento entre os fluxos.
3. O estudo das flutuações dos fluxos dissipativos em tor-

no do estado de equilíbrio é uma ferramenta poderosa para a determinação dos coeficientes fenomenológicos associados a tais fluxos. Com essa motivação, calculamos as flutuações dos fluxos dissipativos através da generalização da usual fórmula de Einstein de distribuição da probabilidade das flutuações. Daí, obtivemos que os segundos momentos das flutuações de equilíbrio dos fluxos são proporcionais aos coeficientes introduzidos, tais como tempos de relaxação envolvidos nos processos dissipativos. Especializando novamente numa situação em que  $q^\mu$  e  $M^\mu$  são os únicos fluxos não nulos, calculamos as correlações temporais das flutuações desses fluxos. Como esperado as correlações diminuem a medida que o tempo aumenta. Quando fazemos o desacoplamento entre os fluxos e os tempos da relaxação tenderem a zero, recuperamos as usuais fórmulas de Landau-Lifshitz para as correlações temporais, que são calculadas considerando-se a priori os tempos de relaxação iguais a zero.

4. Ao considerarmos o fluido com spin como fonte da curvatura do espaço-tempo, temos necessariamente que fornecer um tensor momento-energia simétrico. Sendo o tensor momento-energia obtido fenomenologicamente assimétrico, utilizamos o bem conhecido método de simetrização de Belinfante-Rosenfeld. A consequência mais importante e nova deste procedimento é o acoplamento entre o tensor de curvatura e o das tensões-torque na primeira lei da termodinâmica. Em vista disso, ao calcularmos a produção da entropia encontramos uma contribuição explícita do campo gravitacional através do acoplamento do tensor de

curvatura com o tensor das tensões-torques. Deduzimos novamente as equações fenomenológicas na teoria em primeira ordem e na causal. As modificações são traduzidas pela presença da parte magnética do tensor de Weyl,  $H^{\alpha\beta}$ , na equação fenomenológica de  $M^{\alpha\beta}$ , e do tensor de Ricci,  $R^{\alpha\beta}$ , nas equações envolvendo  $q^\mu$  e  $M^\mu$ .

Na última parte da tese fazemos aplicações em cosmologia. Utilizamos o fluido com spin em equilíbrio termodinâmico como gerador de estruturas espaço-temporais homogêneas e isotrópicas, anisotrópicas e apresentando rotação. Os principais resultados são listados a seguir.

Mostramos, via análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais, a existência de uma classe de soluções homogêneas e isotrópicas com seção espacial fechada que são oscilantes e não-singulares. As oscilações são realizadas em torno de um modelo estático (tipo Einstein). Existe uma fase expansiva inflacionária que é devido a energia cinética de spin.

Analisando modelos anisotrópicos Bianchi tipo-I, vimos ser necessário que o eixo de anisotropia seja paralelo ao spin, ambos perpendiculares ao plano de isotropia do modelo. Ainda utilizando a técnica de análise qualitativa de sistema de equações diferenciais, constatamos que o spin é responsável por várias soluções estáticas (apresentadas por pontos críticos na região finita). Obtivemos classes de soluções que são singulares e a medida que se expandem isotropizam-se. No entanto, o resultado mais interessante é a existência dos universos anisotrópicos oscilantes e não singulares.

Considerando um espaço-tempo com rotação dependente do tempo, encontramos uma solução exata singular cuja fon

te é possuidora de vorticidade, expansão e cizalhamento. A medida que o universo expande-se, a vorticidade e o cizalhamento decrescem. O momento angular de spin é alinhado na direção  $z$  e permanece constante em consequência de sua conservação. Uma característica interessante apresentada por este modelo é o valor do raio crítico, calculado a partir de qualquer ponto do espaço-tempo e que separa as regiões causais das não causais, aumentar a medida que o universo expande-se. No limite  $t \rightarrow \infty$ , pode ser mostrado que o raio crítico torna-se infinito, indicando, portanto, a inexistência de regiões onde a causalidade é violada.

Devemos ressaltar que apresentamos soluções que não violam a condição de positividade da energia do conteúdo material. No entanto, em alguns casos, a densidade de energia interna do fluido pode assumir valores negativos. Do ponto de vista puramente termodinâmico, isso não se constitui problema, pois o que importa são as variações de energia interna. Mas, por outro lado, não poderemos interpretar o fluido em questão como sendo um gás perfeito com spin, onde é proibido valores negativos de energia interna.

Finalmente, achamos importante listar algumas perspectivas futuras deste trabalho:

1. Podemos generalizar a lagrangeana proposta no capítulo 1 de modo a descrever fluidos com microestrutura rígida carregados, e que possuem momento de dipolo magnético proporcional ao tensor momento angular de spin. Tal generalização é feita ao adicionarmos à lagrangeana do fluido dada pela equação (1.49), termos que descrevem o campo eletromagnético e as interações da carga e do momento

de dipolo das partículas do fluido com o campo eletromagnético.

2. Como aplicações em cosmologia e astrofísica, será interessante generalizar os modelos estudados no capítulo 3, propondo métricas menos simplificadas. Também podemos estudar distribuições localizadas de matéria com spin que apresentam simetria esférica ou cilíndrica.

Especial atenção é dada aos modelos com rotação no sentido que podemos introduzir a viscosidade rotacional. Como já mencionado, isso é possível devido a presença de dois campos distintos de rotação: a vorticidade e a velocidade angular de spin. Nesta situação, o momento angular de spin não é mais conservado (vide equação (2.26)).

3. A formulação variacional apresentada no capítulo I pode ser generalizada para a teoria de Einstein-Cartan, que é considerada como sendo uma natural generalização à teoria da Relatividade Geral.

## APÊNDICE    A

Será importante obter, a partir das expressões estabelecidas nos capítulos 2 e 3, seu limite newtoniano. Isso é feito ao passarmos para o espaço-tempo de Minkowski e em seguida  $c \rightarrow \infty$ . Uma vez estabelecidas tais expressões poderemos compará-las com as já existentes na teoria não-relativista e, desse modo, determinar certos parâmetros introduzidos, como veremos mais adiante.

Definimos o quadrivetor vorticidade por:

$$\omega^\alpha \equiv \frac{1}{2c} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\beta\mu} U_\nu \quad (\text{A.1})$$

onde  $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ . A transição para o espaço-tempo de Minkowski é feita quando  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  e as derivadas covariantes são substituídas pelas simples. Então a expressão (A.1) é reescritas como:

$$\omega^\alpha = -\frac{1}{2c} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\beta\mu} U_\nu = -\frac{1}{2c} \epsilon^{\alpha\beta\mu 0} \omega_{\beta\mu} U_0 - \frac{1}{2c} \epsilon^{\alpha\beta\mu i} \omega_{\beta\mu} U_i \quad (\text{A.2})$$

A quadrivelocidade  $U^\alpha$  é definida segundo a expressão mostrada abaixo:

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (\text{A.3})$$

onde  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  e  $\vec{v}$  é a usual velocidade tridimensional. Substituindo (A.3) em (A.2), vem:



$$\omega^\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu 0} \omega_{\beta\mu}{}^\gamma - \frac{1}{2c} \varepsilon^{\alpha\beta\mu j} \omega_{\beta\mu}{}^\gamma v_j \quad (\text{A.2'})$$

Fazendo o limite  $c \rightarrow \infty$  nesta expressão, vem:

$$\left. \begin{aligned} \omega^0 &= 0 \\ \omega^i &= \frac{1}{4} \varepsilon^{0ijk} \left( \partial_k U_j - \partial_j U_k \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

onde utilizamos  $\omega_{\beta\mu} = \left( \partial_{[\mu} U_{\beta]} \right)_\perp$ . Levando em conta a equação (A.3), temos:

$$\omega^i = \frac{1}{4} \varepsilon^{0ijk} \left( \partial_i v_k - \partial_k v_j \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Entretanto: } \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \left( \partial_j v_k - \partial_k v_j \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left( \partial_j v_k - \partial_k v_j \right) = \left( \nabla \times \vec{v} \right)_i$$

Logo:

$$\omega^i = \frac{1}{2} \left( \nabla \times \vec{v} \right)_i \quad (\text{A.6})$$

e assim:

$$\omega^\alpha = \left( 0, \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \right) \quad ; \quad \omega_\alpha = \left( 0, -\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \right) \quad (\text{A.7})$$

O procedimento delineado anteriormente será feito para as expressões a seguir exibidas:

Expansão:

$$\Theta \equiv \nabla_\mu U^\alpha = \partial_0 U^0 + \partial_i U^i \underset{c \rightarrow \infty}{=} \partial_i v_i = \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.8})$$



PARTE ANTISSIMÉTRICA DO TENSOR RELATIVISTA DAS TENSÕES

A partir de  $\hat{\pi}^{\alpha\beta} = -\hat{\pi}^{\beta\alpha}$ , o quadrivetor  $\pi^\mu$  foi definido pela equação (2.46). Fazendo o mesmo procedimento de lineado anteriormente, vem:

$$\pi^\mu \equiv \frac{1}{2c} \eta^{\mu\alpha\beta\nu} \hat{\pi}_{\alpha\beta} U_\nu = -\frac{1}{2c} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \hat{\pi}_{\alpha\beta} U_\nu = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta 0} \hat{\pi}_{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} \pi^0 = 0 & \text{(A.14)} \\ \pi^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \hat{\pi}_{jk} \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{\pi}_{jk} & \text{(A.15)} \end{cases}$$

O vetor axial  $\vec{\pi}^{(a)}$  tem suas componentes dadas por  $\pi_i^{(a)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{\pi}_{jk}$ , cujo valor coincide com aquele dado em (A.15).

Logo:

$$\pi^\mu = (0, \vec{\pi}^{(a)}) \quad ; \quad \pi_\mu = (0, -\vec{\pi}^{(a)}) \quad \text{(A.16)}$$

no limite desejado.

Vejamos agora como fica a expressão  $2\pi^\mu (\omega_\mu - \Omega_\mu)$ :

$$2\pi^\mu (\omega_\mu - \Omega_\mu) = 2\vec{\pi}^{(a)} \cdot \left( -\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} + \vec{\Omega} \right) = -\vec{\pi}^{(a)} \cdot (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\Omega}) \quad \text{(A.17)}$$

onde  $\Omega = (0, \vec{\Omega})$ . A equação (A.17) está de acordo com aquela obtida na teoria não-relativista<sup>[39]</sup>, como era de se esperar.

GRADIENTE RELATIVISTA DA VELOCIDADE ANGULAR DE SPIN

O quadrivetor  $A^\mu$  foi definido por intermédio da seguinte expressão:

$$A^\mu \equiv \frac{1}{c} \eta^{\mu\alpha\beta\nu} A_{[\alpha\beta]} U_\nu \quad (\text{A.18})$$

onde  $A_{\alpha\beta} = (\nabla_\beta \Omega_\alpha)_\perp - c^{-2} \left[ c^{-1} \eta_{\alpha\mu\nu\tau} (\nabla_\beta U^\mu) \dot{U}^\nu + \Omega_\alpha \dot{U}_\beta \right]$ . Então:

$$A^\mu = \frac{1}{c} \eta^{\mu\alpha\beta\nu} \left\{ (\nabla_\beta \Omega_\alpha)_\perp - c^{-2} \left[ c^{-1} \eta_{\alpha\sigma\lambda\tau} (\nabla_\beta U^\sigma) \dot{U}^\lambda + \Omega_\alpha \dot{U}_\beta \right] \right\} U_\nu \quad (\text{A.18'})$$

Fazendo a transição para o espaço-tempo de Minkowski e, em seguida tomar o limite  $c \rightarrow \infty$ , vem:

$$A^\mu = -\varepsilon^{\mu\alpha\beta 0} \partial_\beta \Omega_\alpha = +\varepsilon^{0\mu\alpha\beta} \partial_\beta \Omega_\alpha \Rightarrow \begin{cases} A^0 = 0 \\ A^i = -\varepsilon^{0ijk} \partial_j \Omega_k \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$(\text{A.20})$$

As componentes  $A^i$  tem no limite newtoniano o mesmo valor que  $(\nabla \times \vec{\Omega})$ . Logo:

$$A^\mu = (0, \nabla \times \vec{\Omega}) \quad ; \quad A_\mu = (0, -\nabla \times \vec{\Omega}) \quad (\text{A.21})$$

PRODUÇÃO ENTROPIA DEVIDO AO TERMO  $-\frac{1}{T} M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu}$

Decompondo convenientemente  $M^{\alpha\beta\mu}$  e  $A_{\alpha\beta\mu}$  (vide equação (2.53)), mostramos que:

$$-\frac{1}{T} M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{T} (M^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu}^0 + M^\mu A_\mu + MA) \quad (A.22)$$

Devemos mostrar que esta expressão reduz-se no limite newtoniano àquela encontrada na referência [5] e reescrita abaixo:

$$-\frac{1}{T} Q_{ijk} \partial_{i,jk} \Omega = -\frac{1}{T} \left[ \overset{0}{Q}_{ij} (\overset{0}{\nabla} \Omega)_{ij} + \vec{Q} \cdot (\nabla \times \vec{\Omega}) + Q \nabla \cdot \vec{\Omega} \right] \quad (A.23)$$

onde  $\overset{0}{Q}_{ij}$ ,  $Q$  e  $\vec{Q}$  são oriundos da decomposição do tensor das tensões-torques tridimensional  $Q_{ijk} = -Q_{jik}$  em suas partes irreduzíveis. Analisemos isoladamente cada termo da equação (A.22):

$$-\frac{1}{T} MA = -\frac{1}{T} M g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} M \eta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

Mas,

$$g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \Omega^\alpha) - c^{-2} \left[ c^{-1} \eta_{\alpha\mu\nu\tau} (\partial^\alpha U^\mu) U^\nu + \Omega_\alpha \dot{U}^\alpha \right]_{c \rightarrow \infty} \nabla \cdot \vec{\Omega}$$

Logo:

$$-\frac{1}{T} MA = -\frac{1}{T} M \nabla \cdot \vec{\Omega} \Rightarrow M = Q \quad (A.24)$$

Prosseguindo, temos:

$$-\frac{1}{T} M^\mu A_\mu \Big|_{c \rightarrow \infty} = -\frac{1}{T} M^i A_{i1} = +\frac{1}{T} M^i (\nabla \times \vec{\Omega})_i \quad (A.25)$$

Portanto, devemos fazer:

$$M^\mu = (0, -\vec{Q}) \quad (\text{A.26})$$

Para o último termo, temos:

$$-\frac{1}{T} M^{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta} \underset{c \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{T} M^{ij} (\nabla \vec{Q})_{ij} \Rightarrow M^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -Q_{ij}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Assim, no limite newtoniano, as componentes de  $M^{\alpha\beta}$  são dadas por:

$$M^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -Q_{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$M^{\alpha\beta}$  e  $M^{\alpha\beta\mu}$  estão relacionados através da seguinte expressão:

$$M^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2c} \eta^{\alpha\beta\lambda\tau} M_\lambda^\mu U_\tau \quad (\text{A.29})$$

Então:

$$M^{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{2c} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\tau} M_\lambda^\mu U_\tau \underset{c \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\lambda} M_\lambda^\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M^{ij0} = M^{i0j} = M^{i00} = 0 \\ M^{ijk} = \frac{1}{2} \epsilon^{0ijl} M_l^k \rightarrow + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} Q_{lk} = \frac{1}{2} Q_{ijk} \end{array} \right. \quad (\text{A.30})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M^{ij0} = M^{i0j} = M^{i00} = 0 \\ M^{ijk} = \frac{1}{2} \epsilon^{0ijl} M_l^k \rightarrow + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} Q_{lk} = \frac{1}{2} Q_{ijk} \end{array} \right. \quad (\text{A.31})$$

$$\Rightarrow M^{\alpha\beta\mu} = \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \frac{1}{2} Q_{ijk} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)$$

LIMITE NEWTONIANO DAS EQUAÇÕES FENOMENOLÓGICAS

Reduzindo as equações fenomenológicas relativistas para o limite newtoniano, teremos condições de fazer a identificação dos coeficientes introduzidos. Consideremos, então, as equações escritas na aproximação linear (eqs. 2.75'... 2.81'), e analisaremos separadamente cada uma delas.

- Viscosidade volumar  $\pi$ :

$$\alpha_0 \dot{\pi} = \Theta + a_{00} \pi \rightarrow \frac{d\pi}{dt} - a_{00} \pi = \nabla \cdot \vec{v} \quad \therefore$$

$$\therefore - \frac{\alpha_0}{a_{00}} \frac{d\pi}{dt} + \pi = - \frac{1}{a_{00}} \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.33})$$

Para que (A.33) seja dada por [31,39]

$$\tau_0 \frac{d\pi}{dt} + \pi = - \zeta \nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.34})$$

é necessário que façamos a seguinte escolha:

$$a_{00} = \frac{1}{\zeta} \quad ; \quad \alpha_0 = - \tau_0 a_{00} \quad (\text{A.35})$$

- Viscosidade anisotrópica  $\pi_{\alpha\beta}$ :

$$\alpha_2 (\pi_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} = -\sigma_{\alpha\beta} + a_{22} \pi_{\alpha\beta} \rightarrow \alpha_2 \frac{d\pi_{ij}}{dt} = + (\overset{o}{\nabla\vec{v}})_{ij} + a_{22} \pi_{ij} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\alpha_2}{a_{22}} \frac{d\pi_{ij}}{dt} - \pi_{ij} = \frac{1}{a_{22}} (\overset{o}{\nabla\vec{v}})_{ij} \quad (\text{A.36})$$

onde  $(\pi_{\alpha\beta})_{\perp}^{\cdot} = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} U^{\lambda} (\nabla_{\lambda} \pi_{\alpha\beta}) = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} U^{\lambda} \pi_{\alpha\beta} \quad (c \rightarrow \infty) \quad \frac{d\pi_{ij}}{dt}$  (A.37)

Tendo em vista que, na teoria não-relativista<sup>[31]</sup> é estabelecida a seguinte equação:

$$\tau_2 \frac{d\pi_{ij}}{dt} + \pi_{ij} = -\eta (\overset{o}{\nabla\vec{v}})_{ij} \quad (\text{A.38})$$

somos forçados a fazer:

$$a_{22} = \frac{1}{\eta} \quad ; \quad \alpha_2 = -\tau_2 a_{22} \quad (\text{A.39})$$

- Viscosidade anisotrópica  $\pi^{\mu}$ :

$$\alpha_3 (\pi_{\mu})_{\perp}^{\cdot} = -2(\omega_{\mu} - \Omega_{\mu}) + a_{33} \pi_{\mu} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\alpha_3 \frac{d\vec{\pi}(a)}{dt} = 2\left(\frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} - \vec{\Omega}\right) - a_{33} \vec{\pi}(a) \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\alpha_3}{a_{33}} \frac{d\vec{\pi}(a)}{dt} - \vec{\pi}(a) = -\frac{1}{a_{33}} (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\Omega}) \quad (\text{A.40})$$

onde  $(\pi_{\mu})_{\perp}^{\cdot} = h_{\mu}^{\alpha} \dot{\pi}_{\alpha} = \dot{\pi}_{\mu} - \frac{U_{\mu} U^{\alpha}}{c^2} \dot{\pi}_{\alpha} \quad c \rightarrow \infty \quad \frac{d\pi_i}{dt}$  (A.41)



Na teoria não-relativista, temos:

$$\tau_3 \frac{d\vec{\pi}(a)}{dt} + \vec{\pi}(a) = -\eta_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\Omega}) \quad (\text{A.42})$$

Comparando (A.40) com (A.42), a seguinte escolha é necessária:

$$a_{33} = -\frac{1}{\eta_r} \quad ; \quad \alpha_3 = -\tau_3 a_{33} \quad (\text{A.43})$$

- Fluxo dissipativo M:

$$\alpha_4 \dot{M} = A + a_{44} M \rightarrow \alpha_4 \frac{dQ}{dt} = \nabla \cdot \vec{\Omega} + a_{44} Q \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\alpha_4}{a_{44}} \frac{dQ}{dt} - Q = \frac{1}{a_{44}} \nabla \cdot \vec{\Omega} \quad (\text{A.44})$$

Novamente, na teoria não-relativista<sup>[39]</sup> foi estabelecido que:

$$\tau_4 \frac{dQ}{dt} + Q = -k \nabla \cdot \vec{\Omega} \quad (\text{A.45})$$

Comparando (A.45) com (A.44), vem:

$$a_{44} = \frac{1}{k} \quad ; \quad \alpha_4 = -\tau_4 a_{44} \quad (\text{A.46})$$

- Fluxo dissipativo  $\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta}$ .

$$\alpha_5 (\overset{\circ}{M}_{\alpha\beta})^* = \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + a_{55} \overset{\circ}{M}_{\alpha\beta} \rightarrow -\alpha_5 \frac{dQ_{ij}}{dt} = -(\overset{\circ}{\nabla \Omega})_{ij} - a_{55} \overset{\circ}{Q}_{ij} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\alpha_5}{a_{55}} \frac{d\overset{\circ}{Q}_{ij}}{dt} - \overset{\circ}{Q}_{ij} = \frac{1}{a_{55}} (\overset{\circ}{\nabla \Omega})_{ij} \quad (\text{A.47})$$

Comparando (A.47) com a expressão:

$$\tau_5 \frac{d\overset{\circ}{Q}_{ij}}{dt} + \overset{\circ}{Q}_{ij} = -\overset{\circ}{\xi} (\overset{\circ}{\nabla \Omega})_{ij} \quad (\text{A.48})$$

temos:

$$a_{55} = + \frac{1}{\tau_5} \quad ; \quad \alpha_5 = -\tau_5 a_{55} \quad (\text{A.49})$$

- Equações acopladas dos fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 (q_\mu)_\perp + \alpha_6 (M_\mu)_\perp = a_{11} q_\mu + a_{16} M_\mu + \frac{h_\mu^\nu}{T} (\partial_\nu T - c^{-2} T \dot{U}_\nu) \\ \bar{\alpha}_1 (q_\mu)_\perp + \alpha_6 (M_\mu)_\perp = a_{61} q_\mu + a_{66} M_\mu + A_\mu \end{array} \right. \quad (\text{A.50})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 (q_\mu)_\perp + \alpha_6 (M_\mu)_\perp = a_{61} q_\mu + a_{66} M_\mu + A_\mu \end{array} \right. \quad (\text{A.51})$$

Fazendo o limite newtoniano, essas equações passam a ser escritas como mostrado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1 \frac{d\vec{q}}{dt} + \bar{\alpha}_6 \frac{d\vec{Q}}{dt} = -a_{11} \vec{q} + a_{16} \vec{Q} + \frac{\nabla T}{T} \\ -\bar{\alpha}_1 \frac{d\vec{q}}{dt} + \alpha_6 \frac{d\vec{Q}}{dt} = -a_{61} \vec{q} + a_{66} \vec{Q} - (\nabla \times \vec{\Omega}) \end{array} \right. \quad (\text{A.52})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\bar{\alpha}_1 \frac{d\vec{q}}{dt} + \alpha_6 \frac{d\vec{Q}}{dt} = -a_{61} \vec{q} + a_{66} \vec{Q} - (\nabla \times \vec{\Omega}) \end{array} \right. \quad (\text{A.53})$$

Analisemos o caso em que  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 = \alpha_6 = \bar{\alpha}_6 = 0$ :

$$- a_{11} \vec{q} + a_{16} \vec{Q} = - \frac{\nabla T}{T} \quad (\text{A.54})$$

$$- a_{61} \vec{q} + a_{66} \vec{Q} = \nabla \times \vec{\Omega} \quad (\text{A.55})$$

Comparando essas equações com aquelas obtidas na teoria não-relativista:

$$\vec{q} = - \chi \nabla T + \mu' \nabla \times \vec{\Omega} \quad (\text{A.56})$$

$$\vec{Q} = - \xi \nabla \times \vec{\Omega} + \nu' \nabla \times \vec{\Omega}$$

temos a seguinte identificação dos coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{16}$ ,  $a_{61}$ , e  $a_{66}$ :

$$a_{11} = \frac{-\xi T^{-1}}{\chi\xi - \mu'\nu'} \quad ; \quad a_{16} = \frac{\mu' T^{-1}}{\chi\xi - \mu'\nu'} \quad (\text{A.57})$$

$$a_{61} = \frac{\nu'}{\chi\xi - \mu'\nu'} \quad ; \quad a_{66} = \frac{-\chi}{\chi\xi - \mu'\nu'}$$

Consideremos agora as equações de evolução para os fluxos  $q^\mu$  e  $M^\mu$  quando inexistente acoplamento, ou seja,  $a_{61} = a_{66} = \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_6 = 0$ . Temos, então, que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 (q_\mu)_\perp \dot{\phantom{q}} = a_{11} \vec{q} + \frac{h_\mu^\nu}{T} (\partial_\nu T - c^{-1} T \dot{U}_\nu) \\ \alpha_6 (M_\mu)_\perp \dot{\phantom{M}} = a_{66} M_\mu + A_\mu \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} - \alpha_1 \frac{d\vec{q}}{dt} = - a_{11} \vec{q} + \frac{\nabla T}{T} \\ + \alpha_6 \frac{d\vec{Q}}{dt} = + a_{66} \vec{Q} - \nabla \times \vec{\Omega} \end{array} \right. \therefore$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\alpha_1}{a_{11}} \frac{d\vec{q}}{dt} - \vec{q} = - \frac{1}{a_{11}} \frac{\nabla T}{T} \\ \frac{\alpha_6}{a_{66}} \frac{d\vec{Q}}{dt} - \vec{Q} = - \frac{1}{a_{66}} \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

Nesta situação, as equações estabelecidas na teoria não-relativista são:

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{d\vec{q}}{dt} + \vec{q} = - \chi \nabla T \\ \tau_6 \frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{Q} = - \xi \nabla \times \vec{\Omega} \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Logo:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= - \frac{1}{\chi T} & ; & & \alpha_1 &= - \tau_1 a_{11} \\ a_{66} &= - \frac{1}{\xi} & ; & & \alpha_6 &= - \tau_6 a_{66} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.60})$$

Com relação a  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_6$ , façamos a seguinte escolha que posteriormente se mostrará conveniente:

$$\bar{\alpha}_1 = - \bar{\tau}_1 a_{16} \quad ; \quad \bar{\alpha}_6 = + \bar{\tau}_6 a_{61} \quad (\text{A.61})$$

## APÊNDICE B

### 1. Demonstração das relações (1.48) e (1.48')

Devemos demonstrar a seguinte relação:

$$\frac{1}{2} \left( S^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \right)^{\cdot} = \Omega_{\alpha\beta} \left( S^{\alpha\beta} \right)^{\cdot}_{\perp} \quad (\text{B.1})$$

Desenvolvendo o primeiro membro, vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( S^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \right)^{\cdot} &= \frac{1}{2} \left[ \dot{S}^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} + S^{\alpha\beta}_{\dot{\Omega}_{\alpha\beta}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( j^{\mu[\alpha}_{\Omega^{\beta]} \mu} \right)^{\cdot} \Omega_{\alpha\beta} + \right. \\ &+ \left. S^{\alpha\beta}_{\dot{\Omega}_{\alpha\beta}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( j^{\mu\alpha} \right)^{\cdot} \Omega^{\beta}_{\mu\Omega_{\alpha\beta}} + \underbrace{\frac{1}{2} j^{\mu\alpha}_{\dot{\Omega}^{\beta}}}_{S^{\alpha\beta}_{\dot{\Omega}_{\alpha\beta}}} \mu \Omega_{\alpha\beta} + \right. \\ &+ \left. S^{\alpha\beta}_{\dot{\Omega}_{\alpha\beta}} \right] \end{aligned}$$

Tendo em vista a condição de rigidez das partículas do fluido, temos:

$$\frac{1}{2} \left( S^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \right)^{\cdot} = \frac{1}{2} j^{\lambda(\mu}_{\Omega^{\alpha)} \lambda \Omega^{\beta}}_{\mu \Omega_{\alpha\beta}} + S^{\alpha\beta}_{\dot{\Omega}_{\alpha\beta}} \quad (\text{B.2})$$

Devido às propriedades de simetria de  $j^{\mu\lambda}$  e  $\Omega_{\alpha\beta}$ , o primeiro termo do lado direito de (B.2) é nulo. Logo:

$$\frac{1}{2} \left( S^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \right)^{\cdot} = S^{\alpha\beta}_{\dot{\Omega}_{\alpha\beta}} = \left( S^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \right)^{\cdot} - \dot{S}^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left( S^{\alpha\beta}_{\Omega_{\alpha\beta}} \right)^{\cdot} = \Omega_{\alpha\beta} \left( S^{\alpha\beta} \right)^{\cdot}_{\perp} \quad (\text{B.3})$$

2. Cálculo das variações da integral de ação  $I_f = \int \mathcal{L}_f d^4x$  com relação as variáveis  $n, U^\alpha, e_{(k)}^\alpha$  ( $k=1,2,3$ ) e  $g_{\alpha\beta}$ .

2.1 - Variação com relação a n:

Equação de Euler-Lagrange obtida na variação de

n:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial n} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu n)} \right] = 0 \quad (B.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial n} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{4} j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} + \lambda_1 \partial_\mu U^\mu \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu n)} = -\sqrt{-g} \left[ \lambda_1 U^\alpha \frac{\partial (\partial_\alpha n)}{\partial (\partial_\mu n)} \right] = -\sqrt{-g} \lambda_1 U^\alpha \delta^\mu_\alpha =$$

$$= -\sqrt{-g} \lambda_1 U^\mu \quad \therefore \quad \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\mu n)} \right] = -\sqrt{-g} \partial_\mu (\lambda_1 U^\mu)$$

Nesta última expressão o termo  $-\lambda_1 U^\mu \partial_\mu (\sqrt{-g})$  é nulo no sistema de coordenadas geodético utilizado. Voltando para a equação

B.4, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{4} j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} + \lambda_1 \partial_\mu U^\mu - \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \partial_\mu U^\mu = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \dot{\lambda}_1 = \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{4} j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} \quad (B.5)$$

2.2 - Variação com relação a  $U^\nu$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial U^\nu} - \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} \right] = 0 \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial U^\nu} = & -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n^{jki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \frac{\partial (\dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)})}{\partial U^\nu} + \right. \\ & + \lambda_1 \frac{\partial (U^\alpha \partial_\alpha n)}{\partial U^\nu} + \lambda_2 \frac{\partial (U^\alpha \partial_\alpha \delta)}{\partial U^\nu} + \lambda_3 \frac{\partial (U^\alpha \partial_\alpha X)}{\partial U^\nu} + \\ & \left. + \lambda^{AB} g_{\alpha\beta} \frac{\partial (e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta)}{\partial U^\nu} \right] \end{aligned} \quad (B.7)$$

Analiseemos algumas expressões do membro direito de (B.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)})}{\partial U^\nu} &= \frac{\partial \dot{e}_{(j)}^\alpha}{\partial U^\nu} \dot{e}_\mu^{(j)} + \dot{e}_{(j)}^\alpha \frac{\partial \dot{e}_\mu^{(j)}}{\partial U^\nu} = \frac{\partial (U^\sigma \partial_\sigma e_{(j)}^\alpha)}{\partial U^\nu} \dot{e}_\mu^{(j)} + \\ &+ \dot{e}_{(j)}^\alpha \frac{\partial (U^\sigma \partial_\sigma e_{\mu}^{(j)})}{\partial U^\nu} \quad \therefore \frac{\partial (\dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)})}{\partial U^\nu} = \\ &= \dot{e}_\mu^{(j)} (\partial_\nu e_{(j)}^\alpha) + \dot{e}_{(j)}^\alpha (\partial_\nu e_\mu^{(j)}) \end{aligned} \quad (B.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{AB} g_{\alpha\beta} \frac{\partial (e_{(A)}^\alpha e_{(B)}^\beta)}{\partial U^\nu} &= \lambda^{AB} g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial e_{(A)}^\alpha}{\partial U^\nu} e_{(B)}^\beta + e_{(A)}^\alpha \frac{\partial e_{(B)}^\beta}{\partial U^\nu} \right) = \\ &= \lambda^{AB} g_{\alpha\beta} (\delta_{\nu A}^\alpha \delta_{(B)}^\beta + e_{(A)}^\alpha \delta_{\nu B}^\beta) = \frac{2}{c} \lambda^{0B} g_{\alpha\nu} e_{(B)}^\alpha \end{aligned} \quad (B.9)$$

Voltando para (B.7), vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial U^\nu} = & -\sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{4} n^{jki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \left[ \dot{e}_\mu^{(j)} (\partial_\nu e_{(j)}^\alpha) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \dot{e}_{(j)}^\alpha (\partial_\nu e_\mu^{(j)}) \right] + \lambda_1 (\partial_\nu n) + \lambda_2 (\partial_\nu \delta) + \lambda_3 (\partial_\nu X) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{2}{c} \lambda^{0B} g_{\alpha\nu} e_{(B)}^{\alpha} \right\} \quad (B.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} = -\sqrt{-g} \lambda_1 \frac{n \partial (\partial_\mu U^\mu)}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} = -\sqrt{-g} \lambda_1 n \delta_\nu^\rho \quad \therefore$$

$$\therefore \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho U^\nu)} \right] = -\sqrt{-g} \partial_\nu (n \lambda_1) \quad (B.11)$$

Inserindo (B.10) e (B.11) em (B.6), vem:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \left[ \dot{e}_\mu^{(j)} (\partial_\nu e_{(j)}^\alpha) + \dot{e}_{(j)}^\alpha (\partial_\nu e_{\mu}^{(j)}) \right] + \\ & + \lambda_1 (\partial_\nu n) + \lambda_2 (\partial_\nu s) + \lambda_3 \partial_\nu X + \frac{2}{c} \lambda^{0B} g_{\alpha\nu} e_{(B)}^{\alpha} - \\ & - \partial_\nu (n \lambda_1) = 0 \end{aligned} \quad (B.12)$$

Contraindo com  $U^\nu$ , segue:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} (\dot{e}_\mu^{(j)} \dot{e}_{(j)}^\alpha + \dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)}) + \lambda_1 \dot{n} + \\ & + \frac{2}{c} \lambda^{0B} g_{\alpha\nu} e_{(B)}^{\alpha} U^\nu - (n \lambda_1)^\cdot = 0 \end{aligned}$$

Tendo em vista (B.5) e o fato de  $U^\nu = c e_{(0)}^\nu$ , vem:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}_\mu^{(j)} \dot{e}_{(j)}^\alpha + 2\lambda^{00} - n \frac{\partial F}{\partial n} - \\ & - \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)} = 0 \quad \therefore \end{aligned}$$



$$\therefore 2\lambda^{00} = n \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}_\mu^{(j)} \dot{e}^\alpha_{(j)} \quad (\text{B.13})$$

2.3 - Variação com relação a  $e_{(a)}^\tau$ :

Equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial e_{(a)}^\tau} - \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho e_{(a)}^\tau)} \right] = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial e_{(a)}^\tau} &= -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n j^{ki} \frac{\partial (e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)})}{\partial e_{(a)}^\tau} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}_\mu^{(j)} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{AB} g_{\mu\nu} \frac{\partial (e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu)}{\partial e_{(a)}^\tau} \right] = \\ &= -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n j^{ki} \dot{e}^\alpha_{(j)} \dot{e}_\mu^{(j)} (\delta^\mu_\tau \delta_{(k)}^{(a)} e_{\alpha(i)} + e_{(k)}^\mu g_{\alpha\tau} \delta_{(i)}^{(a)}) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{AB} g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\tau \delta_{(A)}^{(a)} e_{(B)}^\nu + e_{(A)}^\mu \delta_{\tau}^{\nu(A)} \delta_{(B)}^{(a)}) \right] \therefore \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial e_{(a)}^\tau} = \\ &= -\sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} n j^{ai} \dot{e}_\tau^{(j)} \dot{e}_\mu^{(j)} e_{(i)}^\mu + \underbrace{\lambda^{AB} g_{\tau\nu} e_{(B)}^\nu + \lambda^{Aa} g_{\mu\tau} e_{(A)}^\mu}_{2\lambda^{aB} g_{\tau\mu} e_{(B)}^\mu} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Passando para o segundo termo do primeiro membro de (B.14):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho e_{(a)}^\tau)} = -\sqrt{-g} \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \frac{[U^\sigma (\partial_\sigma e_{(j)}^\alpha) U^\lambda (\partial_\lambda e_{(j)}^\mu)]}{\partial (\partial_\rho e_{(a)}^\tau)}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{\sqrt{-g}}{4} n^{jki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} U^\sigma U^\lambda \left[ \delta_\sigma^\rho \delta_\tau^\alpha \delta_{(j)}^{(a)} (\partial_\lambda e_\mu^{(j)}) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_\lambda^\rho g_{\tau\mu} \eta^{ja} \dot{e}_{(j)}^\alpha \right] \therefore \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho e_{(a)}^\tau)} = \\
 &= - \frac{\sqrt{-g}}{2} n^{jki} e_{(k)}^\mu \dot{e}_\mu^{(a)} e_{\tau(i)} U^\rho \\
 \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho e_{(a)}^\tau)} \right] &= - \frac{\sqrt{-g}}{2} n U^\rho \partial_\rho (j^{ki} e_{(k)}^\mu \dot{e}_\mu^{(a)} e_{\tau(i)}) \quad \therefore \\
 \therefore \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho e_{(a)}^\tau)} \right] &= - \frac{\sqrt{-g}}{2} n^{jki} (e_{(k)}^\mu \dot{e}_\mu^{(a)} e_{\tau(i)})
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

onde, na dedução de (B.16), utilizamos a lei de conservação do número de partículas (eq. 2.22) e a condição de rigidez das partículas do fluido (eq. 1.46).

A equação (B.14) fica sendo dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} n^{jai} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_\mu^{(j)} e_{(i)}^\mu + 2 \lambda^{aB} g_{\tau\mu} e_{(B)}^\mu - \\
 - \frac{n}{2} j^{ki} (e_{(k)}^\mu \dot{e}_\mu^{(a)} e_{\tau(i)}) = 0
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Os coeficientes  $\lambda^{0a}$  e  $\lambda^{ab}$  podem ser determinados de (B.17). Contraíndo (B.17) com  $U^\tau$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} n^{jai} \dot{e}_{\tau(j)} U^\tau \dot{e}_\mu^{(j)} e_{(i)}^\mu + 2 \lambda^{aB} g_{\tau\mu} U^\tau e_{(B)}^\mu - \\
 - \frac{n}{2} j^{ki} U^\tau (e_{(k)}^\mu \dot{e}_\mu^{(a)} e_{\tau(i)}) = 0 \quad \therefore
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore \frac{n}{2} j^{ai} \dot{e}_{\tau(j)} U^{\tau} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu} + 2c\lambda^{a0} - \\
 & - \frac{n}{2} j^{ki} e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\mu}^{(a)} U^{\tau} \dot{e}_{\tau(i)} = 0 \quad \therefore \\
 & \therefore \lambda^{a0} = \frac{1}{4c} n \left( j^{ki} e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\mu}^{(a)} U^{\tau} \dot{e}_{\tau(i)} - j^{ai} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu} U^{\tau} \dot{e}_{\tau(j)} \right)
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Contraindo (B.17) com  $e^{\tau(b)}$ , vem:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} n j^{ai} \dot{e}_{\tau(j)} e^{\tau(b)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu} + 2\lambda^{aB} g_{\tau\mu} e_{(B)}^{\mu} e^{\tau(b)} - \\
 & - \frac{n}{2} j^{ki} e^{\tau(b)} \left( e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\mu}^{(a)} e_{\tau(i)} \right) = 0 \quad \therefore \\
 & \therefore \frac{n}{2} j^{ai} \dot{e}_{\tau(j)} e^{\tau(b)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu} + 2\lambda^{ab} - \\
 & - \frac{n}{2} j^{ki} e^{\tau(b)} \left( e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\mu}^{(a)} e_{\tau(i)} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Note que (B.19) não possui simetria definida nos índices de tetrada a e b. Tomando parte simétrica nesses índices, temos:

$$\begin{aligned}
 2\lambda^{ab} &= \frac{1}{2} n j^{ki} e^{\tau((b)} \left( e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\mu}^{(a)} \right) e_{\tau(i)} - \\
 & - \frac{1}{2} n j^i \left( a_{e(b)} \right)_{\tau} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu}
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

que nada mais são que os multiplicadores  $\lambda^{ab}$ . Tomando agora a parte antissimétrica, vem:

$$j^{i[a(b)]\tau} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu} - j^{ki} e^{\tau[(b)]} (\dot{e}_{\mu}^{(a)}) e_{(k)}^{\mu} e_{\tau(i)} = 0 \quad (B.21)$$

- Conseqüência da eq. (B.21) - lei de conservação do momento angular de spin (eqs. (1.74) e (1.75)):

Desenvolvendo (B.21), temos:

$$\begin{aligned} & j^{i[a(b)]\tau} \dot{e}_{\tau(j)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{(i)}^{\mu} - j^{ki} e^{\tau[(b)]} \ddot{e}_{\mu}^{(a)} e_{(k)}^{\mu} e_{\tau(i)} - \\ & - j^{ki} e^{\tau[(b)]} \dot{e}_{\mu}^{(a)} \dot{e}_{(k)}^{\mu} e_{\tau(i)} - j^{ki} e^{\tau[(b)]} \dot{e}_{\mu}^{(a)} e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\tau(i)} = \\ & = 0 \end{aligned}$$

Sabendo-se que  $\Omega_{ij} = e_{(i)}^{\alpha} e_{(j)}^{\beta} \Omega_{\alpha\beta} = \dot{e}_{(j)\mu} e_{(i)}^{\mu}$ , vem:

$$\begin{aligned} & j^{i[a_{\Omega} b]} j_{\Omega i}^j - j^{k[b \ddot{e}^{(a)}]} e_{\mu}^{\mu} e_{(k)}^{\mu} - j^{k[b \dot{e}^{(a)}]} \dot{e}_{\mu}^{\mu} e_{(k)}^{\mu} - \\ & - j^{ki} \Omega_{i \Omega k}^{[b a]} = 0 \quad (B.22) \end{aligned}$$

Outra expressão importante para o desenvolvimento acima:

$$\ddot{e}_{(j)\mu} e_{(i)}^{\mu} = \dot{\Omega}_{ij} - \dot{e}_{(j)\mu} \dot{e}_{(i)}^{\mu} \quad (B.23)$$

Introduzindo (B.23) em (B.22) e fazendo algum algebrismo chegamos na seguinte expressão:

$$j^{i[a_{\Omega} b]} j_{\Omega i}^j + \left( j^{k[b \Omega a]} \right)' + j^{k[b \dot{e}^{(a)}]} \dot{e}_{\mu}^{\mu} e_{(k)}^{\mu} - j^{k[b \dot{e}^{(a)}]} \dot{e}_{\mu}^{\mu} e_{(k)}^{\mu} -$$

$$- j^{ki} \Omega_i [b_{\Omega_k}^a] = 0$$

No entanto  $S^{ij} = \frac{1}{2} j^k [i_{\Omega_k}^j]$ , logo:

$$2\dot{S}^{ba} + (j^{i[a} \Omega_i^j - j^{kj} \Omega_k^{a]}) \Omega_j^b = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore 2S^{ba} + \underbrace{(j^{kj} \Omega_k^{[a} - j^{k[a} \Omega_j^k])}_{4S^{ja}} \Omega_j^b = 0$$

Portanto:

$$\dot{S}^{ab} + S^{jb} \Omega_j^a + S^{aj} \Omega_j^b = 0 \quad (B.24)$$

Multiplicando (B.24) por  $e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta$ , ou seja, escrevendo esta equação na base de coordenadas, segue:

$$\dot{S}^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta + S^{\mu\beta} \Omega_\mu^\alpha + S^{\alpha\mu} \Omega_\mu^\beta = 0 \quad (B.25)$$

Desenvolvendo o primeiro termo:

$$\begin{aligned} \dot{S}^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta &= (S^{\mu\nu} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)})^\cdot e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta = \dot{S}^{\mu\nu} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta + \\ &+ S^{\mu\nu} \dot{e}_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta + S^{\mu\nu} e_\mu^{(a)} \dot{e}_\nu^{(b)} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta \end{aligned}$$

Tendo em vista que  $e_\mu^{(a)} e_{(a)}^\lambda = h_\mu^\lambda$  e  $\dot{e}_{\alpha(j)} = \Omega_{ij} e_\alpha^{(i)} - \frac{\dot{U}^\alpha e_{(j)\mu} U_\alpha}{c^2}$ , temos:

$$\dot{S}^{ab} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta = (S^{\alpha\beta})_{\perp} - S^{\mu\beta} \Omega_\mu^\alpha + S^{\mu\alpha} \Omega_\mu^\beta \quad (B.26)$$

Substituindo (B.26) em (B.25), vem:

$$\begin{aligned}
 (S^{\alpha\beta})_{\perp} &= S^{\mu\beta}_{\Omega^{\alpha}} + S^{\mu\alpha}_{\Omega^{\beta}} + S^{\mu\beta}_{\Omega^{\alpha}} + S^{\alpha\mu}_{\Omega^{\beta}} = 0 \quad \therefore \\
 \therefore (S^{\alpha\beta})_{\perp} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{B.27}$$

ou ainda:

$$S^{\alpha\beta} + c^{-2} (U^{\beta} S^{\alpha\mu} \dot{U}_{\mu} + U^{\alpha} S^{\mu\beta} \dot{U}_{\mu}) = 0
 \tag{B.28}$$

#### 2.4 - Variação com respeito a $g_{\mu\nu}$ . Determinação do tensor momento-energia

Integral de ação total:

$$I = \int \left( \frac{\sqrt{-g} R}{2\chi} + \mathcal{L}_f \right) d^4x
 \tag{B.29}$$

Variação com relação ao tensor métrico<sup>[83]</sup>:

$$\begin{aligned}
 \delta I = \delta \int \left( \frac{\sqrt{-g} R}{2\chi} + \mathcal{L}_f \right) d^4x &= \int \left[ \frac{\sqrt{-g} G^{\sigma\tau}}{2\chi} \delta g_{\sigma\tau} + \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} - \right. \\
 &\quad \left. - \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_{\mu} g_{\sigma\tau})} \right] \right] d^4x
 \end{aligned}
 \tag{B.30}$$

onde  $G^{\sigma\tau} = R^{\sigma\tau} - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} R$  é o tensor de Einstein. O primeiro termo do último membro de (B.30) tem dedução encontrada nas refs. [40 e 83]. O tensor momento-energia é dado por<sup>[40]</sup>:

$$- \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\sigma\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} - \partial_{\rho} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_{\rho} g_{\sigma\tau})} \right]
 \tag{B.31}$$

Calculemos cada termo separadamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} &= - \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\sigma\tau}} \left[ F(n, s) + \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)} + \right. \\
 &+ \lambda_1 \nabla_\alpha (nU^\alpha) + \lambda_2 U^\alpha \partial_\alpha s + \lambda_3 U^\alpha \partial_\alpha X + \\
 &+ \left. \lambda^{AB} (g_{\mu\nu} e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu - \eta_{AB}) \right] - \\
 &- \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{(i)}^\beta \dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_{(j)\nu} \frac{\partial (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu})}{\partial g_{\sigma\tau}} + \right. \\
 &+ \left. \lambda^{AB} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\sigma\tau}} e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu \right] \therefore \\
 \therefore \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial g_{\sigma\tau}} &= - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \left[ F(n, s) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)} \right] - \\
 &- \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n j^{ki} (e_{\nu(k)} \dot{e}_{(j)\nu} e_{(i)}^{(\tau} \dot{e}_{(j)}^{\sigma)} + \right. \\
 &+ \left. e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^\alpha e_{(k)}^{(\sigma} \dot{e}_{(j)}^{\tau)}) \right] + \lambda^{AB} e_{(A)}^{(\sigma} e_{(B)}^{\tau)} \quad (B.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} &= - \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} \frac{\partial \dot{e}_{(j)}^\alpha \dot{e}_\mu^{(j)}}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} + \right. \\
 &+ \left. \lambda_1 \frac{\partial (\nabla_\alpha nU^\alpha)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} \right] \quad (B.33)
 \end{aligned}$$

Vejamos cada termo isoladamente. Iniciemos pelo segundo termo

do membro direito da equação anterior:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \nabla_\alpha (nU^\alpha)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} &= \lambda_1 \frac{n \partial \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha U^\mu}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} = \frac{nU^\mu \lambda_1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[ \frac{\partial (\partial_\alpha g_{\lambda\mu})}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial (\partial_\mu g_{\alpha\lambda})}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} - \frac{\partial (\partial_\lambda g_{\alpha\mu})}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} \right] \therefore \\ \therefore \lambda_1 \frac{\partial \nabla_\alpha (nU^\alpha)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} &= \frac{nU^\mu \lambda_1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \delta_\alpha^\rho \delta_\lambda^{(\sigma} \delta_\mu^{\tau)} + \right. \\ &+ \left. \delta_\mu^\rho \delta_\alpha^{(\sigma} \delta_\lambda^{\tau)} - \delta_\lambda^\rho \delta_\alpha^{(\sigma} \delta_\mu^{\tau)} \right) = \frac{n\lambda_1}{2} U^\rho g^{\sigma\tau} \end{aligned} \quad (B.34)$$

Passemos agora para o primeiro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} g_{\mu\xi} \frac{\partial (\dot{e}^\xi(j) \dot{e}^\alpha(j))}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} &= \\ &= \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} g_{\mu\xi} \left[ \dot{e}^\alpha(j) \left( \frac{\partial \dot{e}^\xi(j)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} \right) + \right. \\ &+ \left. \dot{e}^\xi(j) \left( \frac{\partial \dot{e}^\alpha(j)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} \right) \right] = \frac{1}{4} n j^{ki} e_{\mu(k)} \Omega_{ij} \frac{\partial \dot{e}^\mu(j)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} + \\ &+ \frac{1}{4} n j^{ki} e_{\alpha(i)} \Omega_k^j \frac{\partial \dot{e}^\alpha(j)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} = \frac{1}{2} n j^{ki} e_{\mu(k)} \Omega_i^j \frac{\partial \dot{e}^\mu(j)}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} = \\ &= \frac{1}{4} n j_\mu^\nu \Omega_\nu^j \left( g^{\mu(\sigma} U^{\tau)} e_{(j)}^\rho + g^{\mu(\tau} e_{(j)}^\sigma) U^\rho - g^{\mu\rho} U^{(\sigma} e_{(j)}^{\tau)} \right) \therefore \\ \therefore \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^\mu e_{\alpha(i)} g_{\mu\xi} \frac{\partial (\dot{e}^\xi(j) \dot{e}^\alpha(j))}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} &= \\ &= \frac{1}{4} n \left( j_\mu^{(\sigma} \Omega_\mu^{\rho\tau)} U^\mu + j_\mu^{(\tau} \Omega_\mu^{\sigma)} U^\rho - j^{\mu\rho} U^{(\sigma} \Omega_\mu^{\tau)} \right) \end{aligned} \quad (B.35)$$



Substituindo (B.34) e (B.35) em (B.33), vem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} n (j^\mu (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\rho U^\tau) + j^\mu (\tau_{\Omega_\mu}{}^\sigma) U^\rho - j^{\mu\rho} U (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\tau)) + \frac{n \lambda_1 U^\rho g^{\sigma\tau}}{2} \right] \quad (B.36)$$

Prosseguindo:

$$\partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} \right] = -\sqrt{-g} \left\{ \partial_\rho \left[ \frac{n}{4} (j^\mu (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\rho U^\tau) - j^{\mu\rho} U (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\tau)) \right] + \frac{n}{4} (j^\mu (\tau_{\Omega_\mu}{}^\sigma))^\cdot + \frac{n \dot{\lambda}_1 g^{\sigma\tau}}{2} \right\}$$

Novamente, vejamos cada termo:

$$\begin{aligned} \frac{n}{4} (j^\mu (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\rho U^\tau) - j^{\mu\rho} U (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\tau)) &= \frac{n}{4} (j^{\mu\rho} \Omega_\mu (\sigma_\mu - j^\mu (\sigma_{\Omega_\mu}{}^\rho)) U^\tau) = \\ &= n S^\rho (\sigma_{U^\tau}) \end{aligned}$$

$$\frac{n}{4} (j^\mu (\tau_{\Omega_\mu}{}^\sigma))^\cdot = \frac{n}{4} j^{ki} (e_{(k)}^\mu e_{(i)} (\tau_{\Omega_\mu}{}^\sigma)) = \frac{n}{4} j^{ki} (\Omega_k^j e_{(j)} (\sigma_{(i)}^\tau))^\cdot$$

Logo:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial (\partial_\rho g_{\sigma\tau})} \right] &= -\sqrt{-g} \left[ \nabla_\rho (n S^\rho (\sigma_{U^\tau})) + \right. \\ &\left. + \frac{n}{4} j^{ki} (\Omega_k^j e_{(j)} (\sigma_{(i)}^\tau))^\cdot + \frac{n \dot{\lambda}_1 g^{\sigma\tau}}{2} \right] \quad (B.37) \end{aligned}$$

Voltando à equação (B.34), tendo em vista as equações (B.32) e (B.37), vem:

$$\begin{aligned}
 - \frac{\sqrt{-g} T^{\sigma\tau}}{2} = & - \frac{\sqrt{-g}}{2} \left[ g^{\sigma\tau} F(n, \delta) + \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^{\mu} e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^{\alpha} \dot{e}_{(j)}^{(j)v} g_{\nu\mu} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} n j^{ki} \left( e_{\nu(k)} \dot{e}_{(j)}^{(j)v} e_{(i)}^{(\tau\cdot\sigma)} + e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^{\alpha} e_{(k)}^{(\sigma\cdot\tau)(j)} \right) + \\
 & + 2 \lambda^{AB} e_{(A)}^{(\sigma} e_{(B)}^{\tau) - 2 \nabla_{\rho} (n S^{\rho(\sigma} U^{\tau)}) - \frac{n}{2} j^{ki} \left( \dot{\Omega}_k^j e_{(j)}^{(\sigma} e_{(i)}^{\tau)} \right) - \\
 & - n \dot{\lambda}_1 g^{\sigma\tau} \left. \right] \tag{B.38}
 \end{aligned}$$

A tarefa agora é colocar, quando possível, os termos numa forma mais simplificada. Iniciando pelo segundo termo no lado direito de (B.38), vem:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} n j^{ki} \left( e_{\nu(k)} \dot{e}_{(j)}^{(j)v} e_{(i)}^{(\tau\cdot\sigma)} + e_{\alpha(i)} \dot{e}_{(j)}^{\alpha} e_{(k)}^{(\sigma\cdot\tau)(j)} \right) = \\
 = \frac{1}{2} n \left[ j^{\mu(\tau} \dot{\Omega}_{\mu}^j \left( \dot{\Omega}_{kj} e_{(k)}^{\sigma)} - \frac{\dot{U}^{\lambda} e_{\lambda(j)} U^{\sigma)}}{c^2} \right) + \right. \\
 \left. + j^{\mu(\sigma} \dot{\Omega}_{\mu j} \left( \dot{\Omega}^{kj} e_{(k)}^{\tau)} - \frac{\dot{U}^{\nu} e_{\nu(j)} U^{\tau)}}{c^2} \right) \right] = \\
 = - n \left( j^{\mu(\tau} \dot{\Omega}_{\mu}^{\nu} \dot{\Omega}^{\sigma)}_{\nu} - j^{\mu(\sigma} \dot{\Omega}_{\mu}^{\lambda} \frac{\dot{U}_{\lambda} U^{\tau)}}{c^2} \right) \tag{B.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{2} j^{ki} \left( \dot{\Omega}_k^j e_{(j)}^{(\sigma} e_{(i)}^{\tau)} \right) = \frac{n}{2} \left[ j^{ki} \dot{\Omega}_k^j e_{(j)}^{(\sigma} e_{(i)}^{\tau)} + j^{ki} \dot{\Omega}_k^i \left( \dot{e}_{(j)}^{(\sigma} e_{(i)}^{\tau)} + \right. \right. \\
 \left. \left. + e_{(j)}^{(\sigma\cdot\tau)} e_{(i)} \right) \right] = \frac{n}{2} \left( j^{ki} e_{(j)}^{(\sigma} e_{(i)}^{\tau)} \dot{\Omega}_k^j - j^{\mu(\tau} \dot{\Omega}_{\mu}^{\nu} \dot{\Omega}^{\sigma)}_{\nu} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ j^{\mu} \left( \tau_{\Omega}^{\nu} \frac{\dot{U}_{\nu} U^{\sigma}}{c^2} - j^{\mu\nu} \Omega_{\mu} (\sigma_{\nu} \Omega^{\tau})_{\nu} + j^{\mu\nu} \Omega_{\mu} \left( \frac{\dot{U}_{\nu} U^{\tau}}{c^2} \right) \right) \quad (B.40)$$

$$2\lambda^{AB} e_{(A)}^{(\sigma} e_{(B)}^{\tau)} = 2\lambda^{00} \frac{U^{(\sigma} U^{\tau)}}{c^2} + 4\lambda^{0a} \frac{U^{(\sigma}}{c} e_{(a)}^{\tau)} + 2\lambda^{ab} e_{(a)}^{(\sigma} e_{(b)}^{\tau)}$$

Tendo em vista as expressões obtidas para os multiplicadores  $\lambda^{AB}$  (eqs. B.13, B.18 e B.20), vem:

$$\begin{aligned} 2\lambda^{AB} e_{(A)}^{(\sigma} e_{(B)}^{\tau)} &= \left( n \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{1}{4} n j^{ki} e_{(k)}^{\mu} e_{\alpha(i)} \dot{e}_{\mu}^{(j)} \dot{e}_{(j)}^{\alpha} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} + \\ &+ \frac{n}{c^2} \left( j^{ki} e_{(k)}^{\mu} \underbrace{\dot{e}_{\mu}^{(a)}}_{\Omega_k^a} \dot{e}_{\nu(i)}^{(j)} U^{\nu} - j^{ai} e_{(i)}^{\mu} \underbrace{\dot{e}_{\mu}^{(j)}}_{\Omega_i^j} \dot{e}_{\nu(j)} U^{\nu} \right) U^{(\sigma} e_{(a)}^{\tau)} + \\ &+ \left[ \frac{n}{2} j^{ki} e^{\nu((b)} \underbrace{\left( e_{(k)}^{\mu} \dot{e}_{\mu}^{(a)} \right)}_{\Omega_k^a} e_{\nu(i)} \right) - \\ &- \frac{n}{2} j^{i(a} e_{(b)}^{\nu)} \underbrace{\dot{e}_{\nu(j)}^{(j)}}_{\Omega_j^b} \underbrace{\dot{e}_{\mu}^{(j)} e_{\mu(i)}}_{\Omega_i^j} \left. \right] e_{(a)}^{(\sigma} e_{(b)}^{\tau)} \quad \therefore \\ \therefore 2\lambda^{AB} e_{(A)}^{(\sigma} e_{(B)}^{\tau)} &= \left( n \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} + \\ &+ \frac{n}{c^2} \left( - j^{ki} \Omega_k^a \dot{U}^{\nu} e_{\nu(i)} + j^{ai} \Omega_i^j \dot{U}^{\nu} e_{\nu(j)} \right) U^{(\sigma} e_{(a)}^{\tau)} + \\ &+ \frac{n}{2} \left( j^{ki} e^{\nu((b)} e_{\nu(i)} \dot{\Omega}_k^a \right) + j^{ki} e^{\nu((b)} \dot{e}_{\nu(i)} \Omega_k^a \left. \right) - \\ &- j^{i(a} \Omega_j^b \dot{\Omega}_i^j \left. \right) e_{(a)}^{(\sigma} e_{(b)}^{\tau)} \quad \therefore \\ \therefore 2\lambda^{AB} e_{(A)}^{(\sigma} e_{(B)}^{\tau)} &= \left( n \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4n}{c^2} S^{\mu(\tau_U\sigma)} \dot{U}_\mu + \frac{n}{2} j^{kb} e_{(a)}^{(\sigma} e_{(b)}^{\tau)} \dot{\Omega}_k^a + \frac{n}{2} \left( j^{\mu\nu\Omega} (\tau_{\nu\Omega}^\sigma) + \right. \\
 & \left. + j^{\mu(\sigma\Omega^\nu} \Omega^{\tau)}_{\nu} \right) \tag{B.41}
 \end{aligned}$$

Substituindo as equações (B.39), (B.40), (B.41), bem como o valor de  $\dot{\lambda}_1$  dado pela equação (B.5) na equação (B.38), segue:

$$\begin{aligned}
 T^{\sigma\tau} &= g^{\sigma\tau} \left( F(n, s) - \frac{1}{2} n S^{\mu\nu\Omega}_{\mu\nu} \right) - n j^{\mu(\tau_{\Omega^\nu}^\sigma)}_{\mu} + n j^{\mu(\sigma_{\Omega^\lambda})}_{\mu} \frac{U^\tau \dot{U}_\lambda}{c^2} + \\
 & + \left( n \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu\Omega}_{\mu\nu} \right) \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} + \frac{4n}{c^2} S^{\mu(\tau_U\sigma)} \dot{U}_\mu + \\
 & + \frac{n}{2} j^{kb} e_{(a)}^{(\sigma} e_{(b)}^{\tau)} \dot{\Omega}_k^a + \frac{n}{2} \left( j^{\mu\nu\Omega} (\tau_{\nu\Omega}^\sigma) + j^{\mu(\sigma_{\Omega^\nu}^\tau)}_{\nu} \right) - \\
 & - 2\nabla_\rho \left( n S^\rho(\sigma_U\tau) \right) - \frac{n}{2} j^{ki} e_{(j)}^{(\sigma} e_{(i)}^{\tau)} \dot{\Omega}_k^j + \frac{n}{2} j^{\mu(\tau_{\Omega^\nu}^\sigma)}_{\nu} - \\
 & - \frac{n}{2} j^{\mu(\tau_{\Omega^\nu}^\sigma)}_{\mu} \frac{\dot{U}_\nu U^\sigma}{c^2} + \frac{n}{2} j^{\mu\nu\Omega} (\sigma_{\mu\Omega}^\tau)_{\nu} - \frac{n}{2} j^{\mu\nu\Omega} (\sigma_{\mu\Omega}^\tau)_{\nu} \frac{\dot{U}_\nu U^\tau}{c^2} - \\
 & - g^{\sigma\tau} \left( n \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{1}{2} n S^{\mu\nu\Omega}_{\mu\nu} \right) = \\
 & = g^{\sigma\tau} \left( F(n, s) - n \frac{\partial F}{\partial n} \right) + \left( n \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu\Omega}_{\mu\nu} \right) \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} + \\
 & + \frac{4n}{c^2} S^{\mu(\tau_U\sigma)} \dot{U}_\mu - 2\nabla_\mu \left( n S^\mu(\sigma_U\tau) \right) + \frac{2n}{c^2} S^{\mu(\sigma_{\Omega^\nu}^\tau)}_{\mu} + \\
 & - \underbrace{n j^{\mu(\tau_{\Omega^\nu}^\sigma)}_{\nu}}_{/} + \frac{n}{2} j^{\mu\nu\Omega} (\tau_{\nu\Omega}^\sigma)_{\nu} + \frac{n}{2} j^{\mu(\sigma_{\Omega^\nu}^\tau)}_{\nu} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{n}{2} j^{\mu} \left( \frac{\tau}{\Omega} \frac{\nu}{\mu} \Omega^{\sigma} \right)_{\nu} + \frac{n}{2} j^{\mu\nu} \left( \frac{\sigma}{\mu} \Omega^{\tau} \right)_{\nu} \quad \therefore$$

$$\therefore T^{\sigma\tau} = \left( n \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} + \left( F(n, \delta) - n \frac{\partial F}{\partial n} \right) g^{\sigma\tau} +$$

$$+ \frac{2n}{c^2} S^{\mu} (\tau U^{\sigma}) \dot{U}_{\mu} - 2 \nabla_{\mu} \left( n S^{\mu} (\sigma U^{\tau}) \right) \quad (B.42)$$

No entanto,  $F(n, \delta) = n(ac^2 + \varepsilon(n, \delta))$ , de modo que:

$$n \frac{\partial F}{\partial n} = n(ac^2 + \varepsilon) + n^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \quad \therefore$$

$$\therefore n \frac{\partial F}{\partial n} = n(ac^2 + \varepsilon) + p \quad (B.43)$$

onde  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \frac{p}{n^2}$  (\*). Logo:

$$T^{\sigma\tau} = \left[ n(ac^2 + \varepsilon) + p + \frac{1}{2} n S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right] \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} + \left[ n(ac^2 + \varepsilon) - n(ac^2 + \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - p \right] g^{\sigma\tau} + \frac{2n}{c^2} S^{\mu} (\tau U^{\sigma}) \dot{U}_{\mu} - 2 \nabla_{\mu} \left( n S^{\mu} (\sigma U^{\tau}) \right) \quad \therefore$$

$$\therefore T^{\sigma\tau} = n \left( ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} - p h^{\sigma\tau} +$$

---

(\*) Da eq. de Gibbs  $Td\delta = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{n}\right)$ , podemos escrever sem dificuldade:

$$d\varepsilon = Td\delta - p d\left(\frac{1}{n}\right) = Td\delta + \frac{p}{n^2} dn$$

Portanto:  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \frac{p}{n^2}$

$$+ \frac{2n}{c^2} S^{\mu(\tau_U\sigma)} \dot{U}_\mu - 2\nabla_\mu (n S^{\mu(\sigma_U\tau)}) \quad (B.44)$$

### 3. Lei de conservação do momento-energia

As identidades de Bianchi<sup>[40]</sup> tem como consequência a seguinte relação:

$$\nabla_\tau G^{\sigma\tau} = 0 \quad (B.45)$$

e que devido as equações do campo gravitacional, temos:

$$\nabla_\tau T^{\sigma\tau} = 0 \quad (B.46)$$

Esta equação expressa a lei de conservação do momento-energia. Substituindo o tensor momento-energia dado em (B.44), temos:

$$\begin{aligned} \nabla_\tau \left[ n \left( ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^\sigma U^\tau}{c^2} - p h^{\sigma\tau} + \frac{2n}{c^2} S^{\mu(\tau_U\sigma)} \dot{U}_\mu \right] - \\ - 2\nabla_\tau \nabla_\mu (n S^{\mu(\sigma_U\tau)}) = 0 \end{aligned} \quad (B.47)$$

Tomemos o último termo do membro esquerdo:

$$\begin{aligned} 2\nabla_\tau \nabla_\mu (n S^{\mu(\sigma_U\tau)}) &= 2 \left( R^\mu_{\lambda\mu\tau} n S^{\lambda(\sigma_U\tau)} + R^\sigma_{\lambda\mu\tau} n S^{\mu\lambda U\tau} \right) + \\ &+ R^{\tau(\sigma_U\lambda)} n S^{\mu\sigma) U^\lambda} + 2\nabla_\mu \nabla_\tau (n S^{\mu(\sigma_U\tau)}) = 2n R_{\lambda\tau} S^{\lambda(\sigma_U\tau)} + \\ &+ R^\sigma_{\lambda\mu\tau} n S^{\mu\lambda U\tau} + \overbrace{R^\tau_{\lambda\mu\tau}}^{-R_{\lambda\mu}} n S^{\mu\lambda U\sigma} - R_{\lambda\mu} n S^{\mu\sigma U\lambda} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R_{\lambda\mu\tau}^{\sigma} n S^{\mu\tau} U^{\lambda} + 2 \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)}) \quad \therefore \\
 & \therefore 2 \nabla_{\tau} \nabla_{\mu} (n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)}) = \\
 & = n S^{\mu\lambda} U^{\tau} (R_{\lambda\mu\tau}^{\sigma} + R_{\tau\mu\lambda}^{\sigma}) + 2 \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)}) \quad (\text{B.48})
 \end{aligned}$$

No entanto:

$$\begin{aligned}
 2 \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)}) & = \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu\sigma} U^{\tau} + n S^{\mu\tau} U^{\sigma}) = \\
 & = \nabla_{\tau} (n \dot{S}^{\tau\sigma}) + \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu\tau} U^{\sigma}) \quad \therefore \\
 \therefore 2 \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)}) & = \nabla_{\tau} (n \dot{S}^{\tau\sigma}) + \frac{n}{2} R_{\lambda\tau\mu}^{\sigma} S^{\mu\tau} U^{\lambda} \quad (\text{B.49})
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mu} \nabla_{\tau} (n S^{\mu\lambda} U^{\tau}) & = \nabla_{[\mu} \nabla_{\tau]} (n S^{\mu\tau} U^{\sigma}) = \underbrace{-\frac{R_{\lambda\tau}^{\sigma}}{2} n S^{\lambda\tau} U^{\sigma}}_0 + \\
 & + \underbrace{\frac{R_{\lambda\mu}^{\sigma}}{2} n S^{\mu\lambda} U^{\sigma}}_0 + \frac{n}{2} R_{\lambda\tau\mu}^{\sigma} S^{\mu\tau} U^{\lambda}
 \end{aligned}$$

Voltando a (B.48), vem:

$$\begin{aligned}
 2 \nabla_{\tau} \nabla_{\mu} (n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)}) & = n S^{\mu\lambda} U^{\tau} (R_{\lambda\mu\tau}^{\sigma} + R_{\tau\mu\lambda}^{\sigma} + \frac{1}{2} R_{\tau\lambda\mu}^{\sigma}) + \nabla_{\tau} (n \dot{S}^{\tau\sigma}) = \\
 & = n S^{\mu\lambda} U^{\tau} (R_{\lambda\mu\tau}^{\sigma} + \frac{1}{2} R_{\tau\mu\lambda}^{\sigma}) + \nabla_{\tau} (n \dot{S}^{\tau\sigma})
 \end{aligned}$$

Levando em conta a lei de conservação do momento angular de spin, temos:

$$2 \nabla_{\tau} \nabla_{\mu} \left( n S^{\mu(\sigma} U^{\tau)} \right) = n S^{\mu\lambda} U^{\tau} \left( R^{\sigma}_{\lambda\mu\tau} + \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\tau\mu\lambda} \right) - \nabla_{\mu} \left( \frac{n}{c^2} S^{\dot{\mu}\nu} U^{\sigma} \dot{U}_{\nu} \right) + \nabla_{\mu} \left( \frac{n}{c^2} S^{\sigma\nu} U^{\mu} \dot{U}_{\nu} \right) \quad (\text{B.50})$$

Substituindo (B.50) em (B.47), vem:

$$\begin{aligned} \nabla_{\tau} \left[ n \left( a c^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} - p h^{\sigma\tau} + \frac{n}{c^2} S^{\mu\tau} \dot{U}^{\sigma} \dot{U}_{\mu} + \frac{n}{c^2} S^{\mu\sigma} U^{\tau} \dot{U}_{\mu} \right] - \\ - n S^{\mu\lambda} U^{\tau} \left( R^{\sigma}_{\lambda\mu\tau} + \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\tau\mu\lambda} \right) + \nabla_{\mu} \left( \frac{n}{c^2} S^{\dot{\mu}\nu} U^{\sigma} U_{\nu} - \right. \\ \left. - \frac{n}{c^2} S^{\sigma\nu} U^{\mu} \dot{U}_{\nu} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

onde, após fazer:

$$\begin{aligned} - n S^{\mu\lambda} U^{\tau} \left( R^{\sigma}_{\lambda\mu\tau} + \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\tau\mu\lambda} \right) &= - n S^{\mu\lambda} U^{\tau} \left( - \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\tau\lambda\mu} + \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\tau\mu\lambda} \right) = \\ &= - n S^{\mu\lambda} U^{\tau} R^{\sigma}_{\tau\mu\lambda} = n R^{\sigma}_{\tau\mu\lambda} S^{\lambda\mu} U^{\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

chegamos na expressão desejada:

$$\begin{aligned} \left[ n \left( a c^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\sigma} U^{\tau}}{c^2} - p h^{\sigma\tau} + \frac{2n}{c^2} S^{\mu\sigma} U^{\tau} \dot{U}_{\mu} \right] + \\ + n R^{\sigma}_{\lambda\mu\tau} S^{\lambda\mu} U^{\tau} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$



## APÊNDICE C

### 1. Expressões relativistas das leis de balanço

Ao formularmos a mecânica do contínuo em relatividade especial, a lei de balanço de uma dada quantidade  $\psi(x^\alpha)$  é obtida como mostrado a seguir. Seja  $\psi^\mu(x^\alpha)$  o quadrivetor associado à densidade do fluxo de  $\psi(x^\alpha)$ , que é decomposto relativamente ao campo de velocidades  $U^\mu$  da seguinte maneira:

$$\psi^\mu = n\psi \frac{U^\mu}{c^2} + (\psi^\mu)_\perp \quad (\text{C.1})$$

onde  $n$  é a densidade do número de partículas e  $n\psi$  é a densidade da quantidade representada por  $\psi(x^\alpha)$ . Os dois termos do membro direito de (C.1) são, respectivamente, as densidades dos fluxos convectivos e de difusão de  $\psi(x^\alpha)$ . A lei de balanço de  $\psi(x^\alpha)$  é, então, escrita como:

$$\oint \psi^\mu d^3\Sigma_\mu = \oint h_\psi d^4x \quad (\text{C.2})$$

Dessa expressão, temos que o fluxo de  $\psi^\mu(x^\alpha)$  através da tri-superfície  $\Sigma$  que envolve um dado volume do quadriespaço é igual a produção de  $\psi(x^\alpha)$ . O segundo membro de (C.2) pode ser positivo, negativo ou nulo. Neste último caso, dizemos que  $\psi(x^\alpha)$  é conservado, ou seja:

$$\oint \psi^\mu d^3\Sigma_\mu = 0 \quad (\text{C.3})$$

A forma diferencial da equação de balanço (C.2) é obtida ao aplicarmos o teorema de Gauss:

$$\oint \psi^\mu d^3 \Sigma_\mu = \int (\partial_\mu \psi^\mu) d^4 x = \int h_\psi d^4 x \quad (C.4)$$

e então:

$$\partial_\mu \psi^\mu = h_\psi \quad (C.5)$$

Para conservação de  $\psi(x^\alpha)$ , segue:

$$\partial_\mu \psi^\mu = 0 \quad (C.6)$$

Os resultados anteriores podem ser generalizados caso a quantidade que procuramos estabelecer a lei de balanço seja um tensor, como por exemplo,  $P^\mu$ . Então:

$$\oint T^{\mu\nu} d^3 \Sigma_\nu = \int f^\mu d^4 x \quad (C.7)$$

onde  $T^{\mu\nu}$  é a densidade de fluxo associado a  $P^\mu$  e  $f^\mu$  é a medida de produção deste tensor. Na forma diferencial, a lei de balanço é escrita como:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = f^\mu \quad (C.8)$$

A generalização para quantidades tensoriais de ordem mais elevada é feita sem muita dificuldade.

Como vimos no início do capítulo 2, necessitamos das leis de balanço de momento, energia, número de partículas,

momento angular e entropia para a descrição da evolução do meio contínuo em questão. De acordo com que estabelecemos através das equações (C.2), (C.5), (C.7) ou (C.8), e juntamente com os tensores  $N^\mu$ ,  ${}_m T^{\mu\nu}$  e  $s^\mu$  introduzidos, podemos escrever as leis de conservação do número de partículas, do momento-energia e de balanço da entropia, por:

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \tag{C.9}$$

$$\partial_\nu {}_m T^{\mu\nu} = 0 \tag{C.10}$$

$$\partial_\mu s^\mu = \sigma \tag{C.11}$$

onde os termos de produção de partículas e de momento-energia são nulos e  $\sigma$  é a densidade de produção de entropia.

Se o meio contínuo não possuir momento angular de spin, o tensor densidade de momento angular total é definido por<sup>[30]</sup>:

$$L^{\alpha\beta\mu} \equiv \frac{1}{2} \left( x_m^\alpha T^{\beta\mu} - x_m^\beta T^{\alpha\mu} \right) \tag{C.12}$$

Como o momento angular total é sempre conservado, temos:

$$\oint L^{\alpha\beta\mu} d^3\Sigma_\mu = 0 \tag{C.13}$$

ou, na forma diferencial é escrita como:

$$\partial_\mu L^{\alpha\beta\mu} = 0 \tag{C.14}$$

Tendo em vista (C.10), temos, como consequência:

$${}_m T^{[\alpha\beta]} = 0 \quad (C.15)$$

Logo, a parte antissimétrica do tensor momento-energia é nula.

Numa situação mais geral onde há momento angular de spin, o tensor  $L^{\alpha\beta\mu}$  passa a ser escrito da seguinte maneira:

$$L^{\alpha\beta\mu} = x^{[\alpha} {}_m T^{\beta]\mu} + S^{\alpha\beta\mu} \quad (C.16)$$

onde  $S^{\alpha\beta\mu}$  é conhecido como a densidade de momento angular interno ou de spin, enquanto que o primeiro termo, já introduzido, representa o momento angular orbital ou externo. Sendo o momento angular total conservado, temos:

$$\partial_\mu L^{\alpha\beta\mu} = - {}_m T^{[\alpha\beta]} + \partial_\mu S^{\alpha\beta\mu} = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \partial_\mu S^{\alpha\beta\mu} = {}_m T^{[\alpha\beta]} \quad (C.17)$$

Portanto, a parte antissimétrica do tensor momento-energia é fonte do momento angular de spin.

A generalização das expressões correspondentes às leis de balanço na forma diferencial é feita aplicando o acoplamento mínimo, de modo que as equações são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\mu N^\mu = 0 \\ \nabla_\beta {}_m T^{\alpha\beta} = 0 \\ \nabla_\mu \delta^\mu = \sigma \\ \nabla_\mu S^{\alpha\beta\mu} = {}_m T^{[\alpha\beta]} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (C.18) \\ (C.19) \\ (C.20) \\ (C.21) \end{array}$$

Observações:

A energia e o momento totais são sempre conservados. Se  $T^{\alpha\beta}$  é o tensor momento-energia total em questão, temos necessariamente que:

$$\partial_{\mu} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{C.22}$$

Entretanto, se pudermos escrever  $T^{\alpha\beta} = {}_m T^{\alpha\beta} + T'^{\alpha\beta}$ , onde  ${}_m T^{\alpha\beta}$  é, por exemplo, o tensor momento-energia da matéria ponderável e  $T'^{\alpha\beta}$  o tensor associado a um outro campo qualquer, a equação (C.22) fica sendo reescrita por:

$$\partial_{\mu} {}_m T^{\alpha\beta} = f^{\alpha} \tag{C.23}$$

onde  $f^{\alpha} = -\partial_{\mu} T'^{\alpha\beta}$  é o termo de fonte de momento-energia da matéria ponderável.

Neste caso, o tensor momento angular associado a  $T^{\alpha\beta}$ , dado por  $L^{\alpha\beta\mu} = x^{\alpha} [{}_m T^{\beta}]_{\mu} + S^{\alpha\beta\mu}$ , não é mais conservado e, portanto, está sujeito à seguinte lei de balanço<sup>[30]</sup>:

$$\partial_{\mu} L^{\alpha\beta\mu} = N^{\alpha\beta} + x^{\alpha} [f^{\beta}] \tag{C.24}$$

onde o segundo membro desta equação é o torque devido a ação de um outro campo externo. Desenvolvendo (C.24), temos:

$$\partial_{\mu} S^{\alpha\beta\mu} = {}_m T^{[\alpha\beta]} + N^{\alpha\beta} \tag{C.25}$$

As equações (C.23) e (C.25) generalizadas para o espaço curvo

resulta em:

$$\nabla_{\beta} \text{ }_m T^{\alpha\beta} = f^{\alpha} \tag{C.26}$$

$$\nabla_{\mu} L^{\alpha\beta\mu} = N^{\alpha\beta} + \text{ }_m T^{\alpha\beta}$$

## 2. Estabilidade de estado de equilíbrio

Sendo a entropia por partícula a máxima no estado de equilíbrio termodinâmico, temos que sua diferencial segunda,  $\delta^2 s$ , é negativa, ou seja:

$$\left( \delta^2 s \right)_{eq} \leq 0 \tag{C.27}$$

Considerando a entropia por partícula de não-equilíbrio  $s = s(\varepsilon, \pi, q^{\mu}, \pi^{\alpha\beta}, \pi^{\mu}, M^{\alpha}, M^{\alpha\beta}, M^{\mu})$  introduzida na seção 2.3, temos:

$$\begin{aligned} \delta s &= \frac{1}{T} \delta \varepsilon + \frac{p}{T} \delta v + \frac{v \alpha_0}{T} \pi \delta \pi + \frac{v \alpha_2}{T} \pi^{\alpha\beta} \delta \pi_{\alpha\beta} + \frac{v \alpha_3}{T} \pi^{\mu} \delta \pi_{\mu} + \\ &+ \frac{v \alpha_4}{T} M \delta M + \frac{v \alpha_5}{T} M^{\alpha\beta} \delta M_{\alpha\beta} + \frac{v}{T} \left( \alpha_1 q^{\mu} + \bar{\alpha}_1 M^{\mu} \right) \delta q_{\mu} + \frac{v}{T} \left( \alpha_6 M^{\mu} + \right. \\ &\left. + \bar{\alpha}_6 q^{\mu} \right) \delta M_{\mu} \quad \therefore \\ \therefore \left( \delta s \right)_{eq} &= \left( \frac{1}{T} \delta \varepsilon + \frac{p}{T} \delta v \right)_{eq} = \delta s_{eq} = 0 \end{aligned} \tag{C.28}$$

Calculando agora  $\delta^2 s$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \Delta = & \delta \left( \frac{1}{T} \delta \varepsilon + \frac{p}{T} \delta v \right) + \frac{v \alpha_0}{T} (\delta \pi)^2 + \frac{v \alpha_2}{T} \delta \pi^{\alpha \beta} \delta \pi_{\alpha \beta} + \\
 & + \frac{v \alpha_3}{T} \delta \pi^\mu \delta \pi_\mu + \frac{v \alpha_4}{T} (\delta M)^2 + \frac{v \alpha_5}{T} \delta M^{\circ \alpha \beta} \delta M_{\alpha \beta}^{\circ} + \frac{v \alpha_1}{T} \delta q^\mu \delta q_\mu + \\
 & + \frac{v}{T} (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \delta M^\mu \delta q_\mu + \frac{v \alpha_6}{T} \delta M^\mu \delta M_\mu + \pi \delta \left( \frac{v \alpha_0}{T} \right) \delta \pi + \\
 & + \pi^{\alpha \beta} \delta \left( \frac{v \alpha_2}{T} \right) \delta \pi_{\alpha \beta} + \pi^\mu \delta \left( \frac{v \alpha_3}{T} \right) \delta \pi_\mu + M \delta \left( \frac{v \alpha_4}{T} \right) \delta M + \\
 & + M^{\circ \alpha \beta} \delta \left( \frac{v \alpha_5}{T} \right) \delta M_{\alpha \beta}^{\circ} + q^\mu \left[ \delta \left( \frac{v \alpha_1}{T} \right) \delta q_\mu + \delta \left( \frac{v \bar{\alpha}_6}{T} \right) \delta M_\mu \right] + \\
 & + M^\mu \left[ \delta \left( \frac{v \bar{\alpha}_1}{T} \right) \delta q_\mu + \delta \left( \frac{v \alpha_6}{T} \right) \delta M_\mu \right] \quad \therefore
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\delta^2 \Delta)_{eq} = & \left[ \delta \left( \frac{\delta \varepsilon}{T} + \frac{p}{T} \delta v \right) \right]_{eq} + \frac{v \alpha_0}{T_{eq}} (\delta \pi)^2 + \\
 & + \frac{v \alpha_2}{T_{eq}} \delta \pi^{\alpha \beta} \delta \pi_{\alpha \beta} + \frac{v \alpha_3}{T_{eq}} \delta \pi^\mu \delta \pi_\mu + \frac{v \alpha_4}{T_{eq}} (\delta M)^2 + \\
 & + \frac{v \alpha_5}{T_{eq}} \delta M^{\circ \alpha \beta} \delta M_{\alpha \beta}^{\circ} + \frac{v}{T_{eq}} \left[ \alpha_1 \delta q^\mu \delta q_\mu + (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \delta M^\mu \delta q_\mu + \right. \\
 & \left. + \alpha_6 \delta M^\mu \delta M_\mu \right] \leq 0 \quad (C.29)
 \end{aligned}$$

onde  $T_{eq} = T_{eq}(\varepsilon, v)$  é a temperatura definida no equilíbrio local. O primeiro termo do membro direito de (C.29) nada mais é que o diferencial segundo da entropia por partícula definida no equilíbrio local, que é negativa:

$$\left[ \delta \left( \frac{\delta \varepsilon}{T} + \frac{p}{T} \delta v \right) \right]_{eq} = \delta^2 \Delta_{eq} \leq 0 \quad (C.30)$$

Para garantir que cada um dos termos que restam sejam também negativos, é necessário impormos:

$$\alpha_0 \leq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \leq 0, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \leq 0, \alpha_5 \leq 0, \alpha_6 \geq 0, \quad (C.31)$$

$$\alpha_1 \delta q_\mu \delta q^\mu + (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \delta M_\mu \delta q^\mu + \alpha_6 \delta M^\mu \delta M_\mu \leq 0 \quad (C.32)$$

As desigualdades indicadas por (C.31) estão de acordo com as expressões obtidas no apêndice A. Resta obter a relação entre  $\alpha_1$ ,  $\alpha_6$ ,  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_6$  a partir de (C.32). Para isso, consideraremos os seguintes casos:

$$1^\circ) \quad (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) < 0$$

$$a) \quad \delta M_\mu \delta q^\mu \geq 0 \quad (C.33)$$

Não há restrições impostas aos coeficientes, uma vez que (C.6) é satisfeita automaticamente.

$$b) \quad \delta M_\mu \delta q^\mu < 0$$

A relação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta q^\mu \delta q_\mu - 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_6} \delta q^\mu \delta M_\mu + \alpha_6 \delta M_\mu \delta M^\mu) + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_6} \delta q^\mu \delta M_\mu + \\ & + (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \delta q^\mu \delta M_\mu \leq 0 \end{aligned} \quad (C.34)$$

A expressão entre parênteses é sempre negativa, de modo que para a desigualdade ocorrer, é necessário que:

$$2\sqrt{\alpha_1 \alpha_6} \geq |\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6| \quad (C.35)$$



$$2^{\circ}) \quad (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \geq 0$$

$$a) \quad \delta M_{\mu} \delta q^{\mu} < 0$$

Novamente a desigualdade (C.33) é satisfeita não havendo necessidade de impor alguma restrição aos coeficientes.

$$b) \quad \delta q^{\mu} \delta M_{\mu} \geq 0$$

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta q^{\mu} \delta q_{\mu} + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_6} \delta q^{\mu} \delta M_{\mu} + \alpha_6 \delta M_{\mu} \delta M^{\mu}) - 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_6} \delta q^{\mu} \delta M_{\mu} + \\ & + (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6) \delta M_{\mu} \delta q^{\mu} \leq 0 \end{aligned} \quad (C.36)$$

A expressão entre parênteses é negativa. Então, para (C.36) ser menor ou igual a zero, é necessário que:

$$2\sqrt{\alpha_1 \alpha_6} \geq \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6 \quad (C.37)$$

As desigualdades (C.35) e (C.37) são expressas por:

$$\alpha_1 \alpha_6 \geq \frac{1}{4} (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_6)^2 \quad (C.38)$$

### 3. Expressão tridimensional das equações de propagação das on das térmicas e de spin

Tomemos somente a parte homogênea das equações (2.111) e (2.112), (seção 2.3, capítulo 2):

$$nc_{\nu} \ddot{T} - nc_{\nu} M_{11} \dot{T} + N_1 \nabla_{\mu} (\partial^{\mu} T)_{\perp} = 0 \quad (C.39)$$

$$-nJ(\ddot{\Omega}^\mu)_\perp + nJM_{22}(\dot{\Omega}^\mu)_\perp - N_2 \nabla_\sigma (\nabla^\sigma \Omega^\mu)_\perp = 0 \quad (C.40)$$

onde impusemos que  $\bar{N}_2 A_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu T = N_2 \nabla_\sigma (\nabla^\mu \Omega^\sigma)_\perp = 0$

Fazendo  $U^\mu = c \delta_0^\mu$  e considerando que o espaço-tempo seja o de Minkowski ( $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ), temos:

$$\ddot{T} = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}; \quad \nabla_\mu (\partial^\mu T)_\perp = \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu T = h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu T = -\nabla^2 T \quad (C.41)$$

onde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Assim, a equação (C.39) é escrita como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - M_{11} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{N_1}{nc_\nu} \nabla^2 T = 0 \quad (C.42)$$

Passando para a equação (C.40), segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{\Omega}^\mu)_\perp = h^\mu_\nu \ddot{\Omega}^\nu = \frac{\partial^2 \Omega^i}{\partial t \partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2}; \\ (\dot{\Omega}^\mu)_\perp = h^\mu_\nu \dot{\Omega}^\nu = \frac{\partial \Omega^i}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}; \\ \nabla_\sigma (\nabla^\sigma \Omega^\mu)_\perp = \partial_\sigma (h^\sigma_\nu \partial^\nu \Omega^\mu) = h^{\sigma\nu} \partial_\sigma \partial_\nu \Omega^\mu = -\nabla^2 \Omega^i \rightarrow -\nabla^2 \vec{\Omega} \end{array} \right. \quad (C.43)$$

Então, (C.40) é reescrita do seguinte modo:

$$-\frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} + M_{22} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \frac{N_2}{nJ} \nabla^2 \vec{\Omega} = 0 \quad (C.44)$$

4. Cálculo das flutuações dos fluxos dissipativos em torno do estado de equilíbrio

Dado um sistema qualquer em equilíbrio termodinâmico e um dado número de grandezas que caracterizam este estado. Podemos afirmar com uma boa precisão que os valores de tais grandezas são iguais a seus respectivos valores médios. Entretanto, há pequenos desvios relativamente a esses médios, ou seja, dizemos que os valores dessas grandezas flutuam. Segue, então, o problema de determinar a distribuição de probabilidades dessas flutuações.

A probabilidade de flutuações em torno do estado de equilíbrio é calculada seguindo a fórmula de Einstein:

$$\text{Pr}(x) = \text{const.} \exp. \Delta(x) \tag{C.45}$$

onde  $\Delta(x)$  é a entropia que depende apenas da grandeza  $x$ .

No estado de equilíbrio, a entropia é máxima para  $x = \langle x \rangle$ , ou seja:

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right|_{x = \langle x \rangle} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} \right|_{x = \langle x \rangle} < 0 \tag{C.46}$$

Sendo  $\delta x = x - \langle x \rangle$  pequena quantidade,  $\Delta(x)$  pode ser desenvolvida numa série de potências onde nos limitaremos até o termo de segunda ordem:

$$\Delta(x) = \Delta(\langle x \rangle) - \frac{\beta}{2} (x - \langle x \rangle)^2 \tag{C.47}$$

onde  $\beta$  é uma constante. Substituindo (C.47) em (C.45), temos:

$$\text{Pr}(\delta x) = A \exp \left[ - \frac{\beta (\delta x)^2}{2} \right] \quad (\text{C.48})$$

A constante A é determinada segundo a condição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Pr}(x) dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ - \frac{\beta (\delta x)^2}{2} \right] dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \quad (\text{C.49})$$

Assim, a distribuição de probabilidades para as flutuações  $x$  é escrita como:

$$\text{Pr}(\delta x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp \left[ - \frac{\beta (\delta x)^2}{2} \right] \quad (\text{C.50})$$

que é uma distribuição gaussiana com um máximo para  $x = \langle x \rangle$  (ou  $\delta x = 0$ ), e diminui rapidamente, de modo simétrico quando aumentamos  $|\delta x|$ .

O segundo momento da flutuação de  $x$ , representado por  $\langle \delta x \delta x \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ , é calculada a partir de (C.30) através da seguinte expressão:

$$\langle \delta x \delta x \rangle = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta x)^2 \exp \left[ - \frac{\beta (\delta x)^2}{2} \right] d(\delta x) = \frac{1}{\beta} \quad (\text{C.51})$$

Podemos reexpressar a fórmula de distribuição de probabilidades, levando-se em conta que  $\beta = \frac{1}{\langle \delta x \delta x \rangle}$ , ou seja:

$$\text{Pr}(\delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\delta x\delta x\rangle}} \exp\left[-\frac{(\delta x)^2}{2\langle\delta x\delta x\rangle}\right] \quad (\text{C.52})$$

Como esperado, a medida que  $\langle\delta x\delta x\rangle$  aumenta, diminui a probabilidade de encontrarmos a flutuação  $\delta x$  correspondente.

O tratamento anterior pode ser facilmente generalizado caso estejamos considerando a probabilidade de flutuação de várias grandezas termodinâmicas com relação a seus respectivos valores médios. As grandezas termodinâmicas serão simbolizadas por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e as flutuações são  $\delta x_1 = x_1 - \langle x_1 \rangle, \delta x_2 = x_2 - \langle x_2 \rangle, \dots, \delta x_n = x_n - \langle x_n \rangle$ .

A entropia é função das grandezas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , isto é,  $s = s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A distribuição de probabilidades das flutuações é dada por (C.45) onde, após desenvolvermos a entropia numa série de potências e limitando-nos somente até termos de segunda ordem, temos:

$$\text{Pr}(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n) = A \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_{ij} \delta x_i \delta x_j\right) \quad (\text{C.53})$$

onde  $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\text{estado de equilíbrio}} = -\beta_{ij} < 0$ . Claro está que  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ .

A constante A é determinada por intermédio da condição da normalização:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_{ij} \delta x_i \delta x_j\right) d(\delta x_1) \dots d(\delta x_n) = 1 \quad (\text{C.54})$$

Após a integração (vide referência [84]), temos:

$$A = (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\beta} \quad (C.55)$$

onde  $\beta$  é o determinante da matriz constituída dos elementos  $\beta_{ij}$ .

A distribuição de probabilidades para várias grandezas é:

$$\Pr(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n) = \frac{\sqrt{\beta}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_{ij} \delta x_i \delta x_j\right) \quad (C.56)$$

A partir de (C.56) podemos calcular os segundos movimentos das flutuações  $\delta x_i$  e  $\delta x_j$ , que são representados por  $\langle \delta x_i \delta x_j \rangle$ ;

$$\langle \delta x_i \delta x_j \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta x_i \delta x_j \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_{rs} \delta x_r \delta x_s\right) d(\delta x_1) \dots \dots d(\delta x_n) \quad (C.57)$$

onde, após algumas passagens aqui omitidas [84], temos o seguinte resultado:

$$\langle \delta x_i \delta x_j \rangle = \beta_{ij}^{-1} \quad (C.58)$$

As quantidades  $\beta_{ij}^{-1}$  são elementos da matriz inversa daquela construída com  $\beta_{ij}$  dados anteriormente.

## APÊNDICE D

### 1. Decomposição do tensor momento-energia simétrico relativamente a suas partes irreduzíveis

$$T^{\alpha\beta} = {}_m T^{\alpha\beta} + \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) \quad (D.1)$$

onde:

$$S^{\alpha\mu\beta} = n S^{\alpha\mu} U^{\beta} + M^{\alpha\beta\mu} \quad (D.2)$$

e

$${}_m T^{\alpha\beta} = n \left( a c^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) \frac{U^{\alpha} U^{\beta}}{c^2} + p^{\alpha} U^{\beta} + c^{-2} Q^{\beta} U^{\alpha} + t^{\beta\alpha} \quad (D.3)$$

As quantidades  $p^{\alpha}$ ,  $Q^{\beta}$  e  $t^{\beta\alpha}$  são dadas, respectivamente, por (2.32), (2.31) e (2.33).

Desejamos escrever (D.1) da seguinte maneira:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_{ef} \frac{U^{\alpha} U^{\beta}}{c^2} - P_{ef} h^{\alpha\beta} + P_{ef}^{\alpha} U^{\beta} + c^{-2} Q_{ef}^{\beta} U^{\alpha} + \pi_{ef}^{\alpha\beta} \quad (D.4)$$

onde  $\rho_{ef} = c^{-2} T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta}$ ;  $P_{ef} = -\frac{1}{3} T^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ ;  $P_{ef}^{\alpha} = c^{-2} T^{\alpha\beta} h_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta} = c^{-2} Q_{ef}^{\alpha}$ ;  $\pi_{ef}^{\alpha\beta} = T^{\mu\nu} h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)} - \frac{1}{3} (T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) h^{\alpha\beta}$ . Sendo assim, devemos analisar cada um dos termos separadamente.

$$\begin{aligned} \rho_{ef} &= T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} = c^{-2} {}_m T^{\alpha\beta} U_{\alpha} U_{\beta} + c^{-2} U_{\alpha} U_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) = \\ &= n \left( a c^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) + c^{-2} \nabla_{\mu} \left[ U_{\alpha} U_{\beta} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) \right] - \\ &- c^{-2} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) (\nabla_{\mu} U_{\alpha} U_{\beta}) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \rho_{ef} = n \left( ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) - c^{-2} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) (U_\alpha \nabla_\mu U_\beta + \\ + U_\beta \nabla_\mu U_\alpha) = n \left( ac^2 + \varepsilon + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \right) - n S^{\beta\mu} \nabla_\mu U_\beta - n S^{\alpha\mu} \nabla_\mu U_\alpha \end{aligned}$$

Logo, a expressão de  $\rho_{ef}$  em sua forma final é dada por:

$$\rho_{ef} = n(ac^2 + \varepsilon) + \frac{n S^{\mu\nu}}{2} (\omega_{\mu\nu} - 4\omega_{\mu\nu}) \quad (D.5)$$

onde  $\omega_{\mu\nu} = (\nabla_{[\nu} U_{\mu]})$ .

$$\begin{aligned} p_{ef} = -\frac{1}{3} T^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = + (p + \pi) - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \nabla_\mu (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) = \\ = p + \pi - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \nabla_\mu (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha}) = p + \pi - \frac{2}{3} \nabla_\mu M^{\alpha\mu}_\alpha - \\ - \frac{(S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha})}{3} (U_\alpha \nabla_\mu U_\beta + U_\beta \nabla_\mu U_\alpha) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\therefore p_{ef} = p + \pi - \frac{2}{3} \nabla_\mu M^{\alpha\mu}_\alpha - \frac{2}{3} n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} p_{ef}^\lambda = c^{-2} T^{\alpha\beta} h_\alpha^\lambda U_\beta = p^\lambda + c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta \nabla_\mu (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) = \\ = p^\lambda + c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta \nabla_\mu (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha}) - c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta \nabla_\mu S^{\alpha\beta\mu} \quad (D.7) \end{aligned}$$

Calculemos cada termo separadamente:

$$\begin{aligned} -c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta \nabla_\mu S^{\alpha\beta\mu} = -c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta \nabla_\mu T^{[\alpha\beta]} = \\ = -c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta (c^{-2} Q^{[\beta U \alpha]} + p^{[\alpha U \beta]} + t^{[\beta \alpha]}) \quad \therefore \\ \therefore -c^{-2} h_\alpha^\lambda U_\beta \nabla_\mu S^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} (c^{-2} Q^\lambda - p^\lambda) \quad (D.8) \end{aligned}$$



$$c^{-2} h_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha}) = c^{-2} h_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta} \left[ \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} U_{\beta} + \underbrace{S^{\beta\mu\alpha} U_{\beta}}_0) - \right. \\ \left. - (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha}) \nabla_{\mu} U_{\beta} \right] = h_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta} \nabla_{\mu} (n S^{\alpha\mu}) - (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha}) (\omega_{\beta\mu} + \\ + \sigma_{\beta\mu} + \frac{1}{3} \theta h_{\beta\mu} + c^{-2} U_{\mu} \dot{U}_{\beta})$$

Tendo em vista a decomposição de  $S^{\alpha\beta\mu}$  dado pela eq. (D.2), chegamos sem muitas dificuldades ao seguinte resultado:

$$c^{-2} h_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha}) = h_{\alpha}^{\lambda} U_{\beta} \nabla_{\mu} (n S^{\alpha\mu}) - c^{-2} (M^{\lambda\mu\beta} \omega_{\beta\mu} + \\ + M^{\lambda\mu\beta} \sigma_{\beta\mu} + \frac{M^{\lambda\mu}}{3} \mu \theta + M^{\beta\mu\lambda} \omega_{\beta\mu}) \quad (D.9)$$

Substituindo (D.8) e (D.9) em (D.7) e levando-se em conta a expressão de  $p^{\lambda}$  dada por (2.32), temos:

$$p_{ef}^{\lambda} = \frac{c^{-2}}{2} (Q^{\lambda} + 2n S^{\alpha\lambda} \dot{U}_{\alpha} + 2M^{\alpha\lambda\mu} \nabla_{\mu} U_{\alpha}) + h_{\alpha}^{\lambda} \nabla_{\mu} (n S^{\alpha\mu}) - \\ - c^{-2} (M^{\lambda\mu\beta} \omega_{\beta\mu} + M^{\lambda\mu\beta} \sigma_{\beta\mu} + \frac{1}{3} M^{\lambda\mu} \mu \theta + M^{\beta\mu\lambda} \omega_{\beta\mu}) + \frac{c^{-2} Q^{\lambda}}{2}$$

Após simples algebrismo e substituindo a expressão correspondente a  $Q^{\lambda}$  dada pela equação (2.31), obtemos o seguinte resultado:

$$p_{ef}^{\lambda} = c^{-2} (q^{\lambda} + M^{\alpha\beta\lambda} \Omega_{\alpha\beta}) + n c^{-2} S^{\alpha\lambda} \dot{U}_{\alpha} - 2c^{-2} M^{\lambda\beta\mu} (\sigma_{\beta\mu} + \frac{1}{3} h_{\beta\mu} \theta) + \\ + h_{\alpha}^{\lambda} \nabla_{\mu} (n S^{\alpha\mu}) - c^{-2} M^{\beta\mu\lambda} \omega_{\beta\mu} \quad (D.10)$$

Finalmente para  $\pi_{ef}^{\alpha\beta}$ , temos:

$$\pi_{ef}^{\alpha\beta} = h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)} T^{\mu\nu} - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} h^{\beta\alpha} = \pi^{\alpha\beta} + h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)} \nabla_{\lambda} (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\mu\nu\lambda}) - \frac{1}{3} h_{\mu\nu} \left[ \nabla_{\lambda} (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\mu\nu\lambda}) \right] h^{\alpha\beta} \quad (D.11)$$

$$\frac{2}{3} (\nabla_{\mu} M^{\nu\mu}_{\nu} + n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}) h^{\alpha\beta}$$

Isolemos o segundo termo do último membro:

$$h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)} \nabla_{\lambda} (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\mu\nu\lambda}) = \nabla_{\lambda} \left[ h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)} (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\mu\nu\lambda}) \right] - (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\mu\nu\lambda}) \nabla_{\lambda} (h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)}) \quad (D.12)$$

Substituindo  $S^{\alpha\beta\mu} = n S^{\alpha\beta} U^{\mu} + M^{\alpha\beta\mu}$  na expressão anterior, o seguinte resultado é alcançado após tedioso, mas direto cálculo:

$$h_{\mu}^{(\alpha} h_{\nu}^{\beta)} \nabla_{\lambda} (S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu} - S^{\mu\nu\lambda}) = \nabla_{\lambda} (M^{\alpha\lambda\beta} + M^{\beta\lambda\alpha}) - 2n (S^{\lambda(\alpha} \sigma^{\beta)})_{\lambda} + S^{\lambda(\alpha} \omega^{\beta)}_{\lambda}) + \frac{2}{c^2} M^{\mu\lambda(\alpha} U^{\beta)} \omega_{\mu\lambda} + \frac{2}{c^2} U^{(\alpha} M^{\beta)\lambda\mu} (\nabla_{\lambda} U_{\mu}) \quad (D.13)$$

Portanto, a expressão final de  $\pi^{\alpha\beta}$  é exibida a seguir:

$$\pi_{ef}^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta} + \nabla_{\lambda} (M^{\alpha\lambda\beta} + M^{\beta\lambda\alpha}) - 2n (S^{\lambda(\alpha} \sigma^{\beta)})_{\lambda} + S^{\lambda(\alpha} \omega^{\beta)}_{\lambda}) + \frac{2}{c^2} M^{\mu\lambda(\alpha} U^{\beta)} \omega_{\mu\lambda} + \frac{2}{c^2} U^{(\alpha} M^{\beta)\lambda\mu} (\nabla_{\lambda} U_{\mu}) - \frac{2}{3} (\nabla_{\mu} M^{\nu\mu}_{\nu} + n S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}) h^{\alpha\beta} \quad (D.14)$$

2. Contribuição da curvatura na lei da conservação do momento-  
-energia

$$T^{\alpha\beta} = {}_m T^{\alpha\beta} + \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) \quad (D.15)$$

Calculemos  $\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$ :

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = \nabla_{\beta} {}_m T^{\alpha\beta} + \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) \quad (D.16)$$

Definindo  $P^{\alpha\mu\beta} = S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}$ , que devido as propriedades de simetria de  $S^{\alpha\beta\mu}$ , temos que  $P^{\alpha\mu\beta} = -P^{\alpha\beta\mu}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) &= \nabla_{[\beta} \nabla_{\mu]} P^{\alpha\mu\beta} = \\ &= \frac{1}{2} (R^{\alpha}_{\sigma\mu\beta} P^{\sigma\mu\beta} + R^{\mu}_{\sigma\mu\beta} P^{\alpha\sigma\beta} + R^{\beta}_{\sigma\mu\beta} P^{\alpha\mu\sigma}) \end{aligned} \quad (D.17)$$

Substituindo as expressões correspondentes aos  $P^{\alpha\mu\beta}$ , vem:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} + S^{\alpha\beta\mu}) &= \frac{1}{2} (R^{\alpha}_{\sigma\mu\beta} S^{\sigma\mu\beta} + R^{\alpha}_{\sigma\mu\beta} S^{\beta\mu\sigma} - R^{\alpha}_{\sigma\mu\beta} S^{\sigma\beta\mu} + \\ &- R^{\mu}_{\sigma\mu\beta} S^{\alpha\sigma\beta} + R^{\mu}_{\sigma\mu\beta} S^{\beta\sigma\alpha} - R^{\mu}_{\sigma\mu\beta} S^{\alpha\beta\sigma} + R^{\beta}_{\sigma\mu\beta} S^{\alpha\mu\sigma} + \\ &+ R^{\beta}_{\sigma\mu\beta} S^{\sigma\mu\alpha} - R^{\beta}_{\sigma\mu\beta} S^{\alpha\sigma\mu}) \end{aligned} \quad (D.18)$$

Utilizando as propriedades de simetria do tensor curvatura bem como de  $S^{\alpha\beta\mu}$ , chegamos, após algum algebrismo, a seguinte expressão:

$$\nabla_{\beta} \nabla_{\mu} (S^{\alpha\mu\beta} + S^{\beta\mu\alpha} - S^{\alpha\beta\mu}) = R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu} S^{\mu\sigma\beta} \quad (D.19)$$

Portanto, a lei de conservação do momento - energia fica sendo dada por:

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu} S^{\mu\sigma\beta} = 0 \quad (D.20)$$

### 3. Contribuição do campo gravitacional na produção de entropia

Obtivemos na seção 2.5 o seguinte termo adicional para a produção de entropia:

$$\begin{aligned} \sigma' &= - \frac{U^{\alpha} R_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu\beta}}{T} = - \frac{1}{T} \left[ C_{\alpha\beta\mu\lambda} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} R_{\beta\lambda} + g_{\beta\lambda} R_{\alpha\mu} - \right. \\ &\quad \left. - g_{\alpha\lambda} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\lambda}) + \frac{R}{6} (g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda}) \right] M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]} = \\ &= - \frac{1}{T} C_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]} - \frac{1}{2T} (R_{\beta\lambda} M^{\lambda}_{\alpha}{}^{[\beta_U\alpha]} + R_{\alpha\mu} M^{\mu}_{\beta}{}^{[\beta_U\alpha]} - \\ &\quad - R_{\beta\mu} M^{\mu}_{\alpha}{}^{[\beta_U\alpha]} - R_{\alpha\lambda} M^{\lambda}_{\beta}{}^{[\beta_U\alpha]}) - \frac{R}{6T} \left( \underbrace{M_{\alpha\beta}{}^{[\beta_U\alpha]}}_0 - \underbrace{M_{\beta\alpha}{}^{[\beta_U\alpha]}}_0 \right) \end{aligned} \quad (D.21)$$

Tendo em vista que a expressão acima apresenta antissimetrização nos índices  $\alpha$  e  $\beta$ , vem:

$$\begin{aligned} \sigma' &= - \frac{1}{T} C_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]} - \frac{1}{2T} \left( - \frac{1}{2} M^{\lambda\mu}_{\mu} U^{\beta} R_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} M^{\lambda\mu}_{\lambda} U^{\alpha} R_{\alpha\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} M^{\lambda\mu}_{\lambda} R_{\beta\mu} U^{\beta} - \frac{1}{2} M^{\lambda\mu}_{\mu} U^{\alpha} R_{\alpha\lambda} \right) \therefore \\ \therefore \sigma' &= - \frac{1}{T} C_{\alpha\beta\mu\lambda} M^{\lambda\mu[\beta_U\alpha]} + \frac{1}{T} M^{\lambda\mu}_{\mu} U^{\alpha} R_{\alpha\lambda} \end{aligned} \quad (D.22)$$

Mas,  $M^{\lambda\mu}_{\mu} = M^{\lambda}$  (vide equações (2.50) e (2.54)). Então:

$$\sigma' = -\frac{1}{T} C_{\alpha\beta\mu\nu} M^{\lambda\mu[\beta U^{\alpha}]} + \frac{1}{T} R_{\alpha\mu} M^{\mu U^{\alpha}} \quad (D.23)$$

Analisemos agora o primeiro termo onde utilizaremos a decomposição do tensor de Weyl segundo suas partes magnética,  $H_{\alpha\beta}$ , e elétrica,  $E_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} C_{\alpha\beta\mu\nu} M^{\lambda\mu[\beta U^{\alpha}]} &= -\frac{1}{T} \left[ c^{-2} (\eta_{\alpha\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} - g_{\alpha\beta\gamma\rho} g_{\mu\lambda\sigma\tau}) U^{\gamma} U^{\sigma} E^{\rho\tau} + \right. \\ &\quad \left. + c^{-2} (\eta_{\alpha\beta\gamma\rho} g_{\mu\lambda\sigma\tau} + g_{\alpha\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau}) U^{\gamma} U^{\sigma} H^{\rho\tau} \right] M^{\lambda\mu[\beta U^{\alpha}]} \end{aligned} \quad (D.24)$$

onde  $g_{\alpha\beta\gamma\rho} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\rho} - g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma}$ . Tomando cada termo separadamente, vem:

$$\begin{aligned} -\frac{c^{-2}}{T} \eta_{\alpha\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} U^{\gamma} U^{\sigma} E^{\rho\tau} M^{\lambda\mu[\beta U^{\alpha}]} &= \\ &= -\frac{c^{-2}}{2T} (M^{\lambda\mu\beta} U^{\alpha} - M^{\lambda\mu\alpha} U^{\beta}) \eta_{\alpha\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} U^{\gamma} U^{\sigma} E^{\rho\tau} = 0 \end{aligned} \quad (D.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{c^{-2}}{T} g_{\alpha\mu\lambda\rho} g_{\mu\lambda\sigma\tau} U^{\gamma} U^{\sigma} E^{\rho\tau} M^{\lambda\mu[\beta U^{\alpha}]} &= \\ &= \frac{c^{-2}}{2T} (M^{\lambda\mu\beta} U^{\alpha} - M^{\lambda\mu\alpha} U^{\beta}) (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\rho} - g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma}) \cdot \\ &\cdot g_{\mu\lambda\sigma\tau} U^{\gamma} U^{\sigma} E^{\rho\tau} = \frac{1}{2T} M^{\lambda\mu\beta} U^{\sigma} E^{\rho\tau} (g_{\mu\sigma} g_{\lambda\tau} - g_{\mu\tau} g_{\lambda\sigma}) = 0 \end{aligned} \quad (D.26)$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{c^{-2}}{T} \eta_{\alpha\beta\gamma\rho} g_{\mu\lambda\sigma\tau} U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} M^{\lambda\mu} [\beta_U \alpha] &= \\
 &= -\frac{c^{-2}}{2T} (M^{\lambda\mu\beta_U \alpha} - M^{\lambda\mu\alpha_U \beta}) \eta_{\alpha\beta\gamma\rho} (g_{\mu\sigma} g_{\lambda\tau} - g_{\mu\tau} g_{\lambda\sigma}) U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} = \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{c^{-2}}{T} g_{\alpha\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} M^{\lambda\mu} [\beta_U \alpha] &= \\
 &= -\frac{c^{-2}}{2T} (M^{\lambda\mu\beta_U \alpha} - M^{\lambda\mu\alpha_U \beta}) \eta_{\mu\sigma\lambda\tau} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\rho} - g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma}) U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} = \\
 &= -\frac{c^{-2}}{2T} \eta_{\mu\sigma\lambda\tau} (c^2 M^{\lambda\mu\beta_U \sigma} H_{\beta \tau} + c^2 M^{\lambda\mu\alpha_U \sigma} H_{\alpha \tau}) \quad \therefore \\
 \therefore -\frac{c^{-2}}{T} g_{\alpha\beta\tau\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} M^{\lambda\mu} [\beta_U \alpha] &= \\
 &= -\frac{1}{T} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} M^{\lambda\mu\alpha_U \sigma} H_{\alpha \tau}
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

De acordo com a eq. (2.50), esta expressão reduz-se a:

$$-\frac{c^{-2}}{T} g_{\alpha\beta\gamma\rho} \eta_{\mu\lambda\sigma\tau} U^\gamma U^\sigma H^{\rho\tau} M^{\lambda\mu} [\beta_U \alpha] = \frac{c M_{\sigma}^{\mu} H_{\mu}^{\sigma}}{T} \tag{D.29}$$

Voltando para (D.24), temos:

$$-\frac{1}{T} C_{\alpha\beta\mu\nu} M^{\lambda\mu} [\beta_U \alpha] = \frac{c M^{\sigma\mu} H_{\mu\sigma}}{T} = \frac{c M^{\sigma\mu} H_{\sigma\mu}}{T} \tag{D.30}$$

Lembramos que  $H^{\alpha}_{\alpha} = 0$  e  $H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha}$ .

Finalmente a expressão procurada é dada por:

$$\sigma' = \frac{c M_{\alpha\beta}^{\circ} H^{\alpha\beta}}{T} + \frac{R_{\alpha\beta} U^{\alpha} M^{\beta}}{T} \tag{D.31}$$

## APÊNDICE E

### ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS CURVAS NA REGIÃO INFINITA DO PLANO DE FASE

Dado o sistema de equações diferenciais autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

delineamos na seção (3.1) o procedimento básico para traçar as curvas-soluções do sistema (E.1) na região dita finita do plano de fase  $xy$ . Será de grande importância traçar as curvas na região infinita do plano de fase, e isso é conseguido utilizando as transformações de Poincaré<sup>[63,81]</sup>, que compactificam o infinito numa circunferência, como mostrado na figura (E.1):

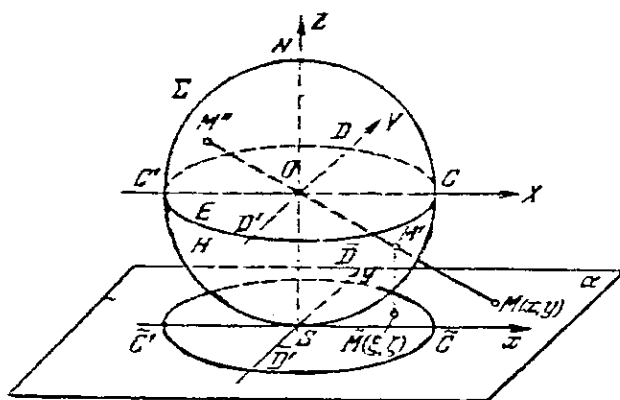


Fig. E.1 - Compactificação dos pontos situados no infinito no equador C'D'CD da esfera.

A seguir exibiremos, sem entrar em detalhes de cálculo, a análise dos pontos críticos na região infinita bem como os gráficos resultantes. Para a descrição deste método recomendamos a ref. [63].

- MODELOS HOMOGÊNEOS E ISOTRÓPICOS

Na seção (3.2.2) deduzimos o seguinte sistema de equações diferenciais em x e y:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{2x^2} - \frac{(3\lambda + 1)y^2}{2x} - \frac{(3\lambda + 1)kc^2}{2x} \end{cases} \quad (E.2)$$

A primeira transformação de Poincaré consiste em fazer:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{z} \\ y &= \frac{u}{z} \end{aligned} \right\} \quad (E.3)$$

O sistema (E.2) escrito nas variáveis u e z é dado por:

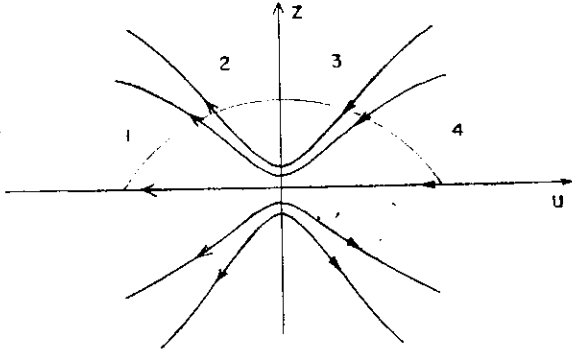
$$\begin{cases} \dot{z} = -uz \\ \dot{u} = -\frac{3(\lambda + 1)u^2}{2} + \frac{\lambda \Lambda_s c^2 z^3}{2} - \frac{(3\lambda + 1)kc^2 z^2}{2} \end{cases} \quad (E.4)$$

Os pontos críticos no infinito serão do tipo P(u,0). Fazendo z=0 no lado direito das equações do sistema (E.4), encontramos um único ponto crítico P<sub>0</sub>(0,0).

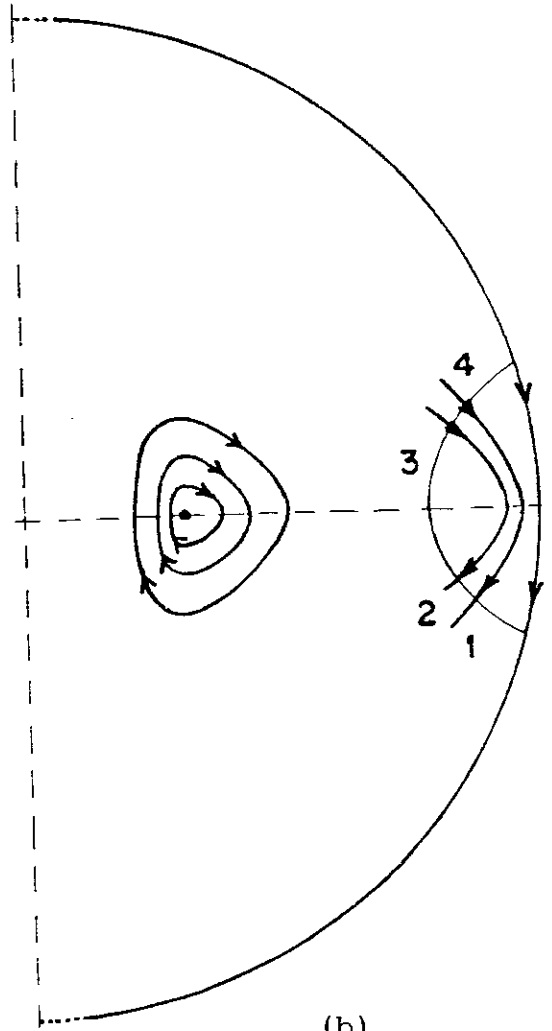
A estrutura das curvas nas vizinhanças deste ponto



crítico  $\hat{e}$  mostrado na fig. (E.2), onde omitiremos os detalhes de cálculo para a obtenção dessas curvas. Ainda na mesma figura, temos as curvas traçadas no plano já compactificado.



(a)



(b)

Fig. E.2 - (a) Curvas na vizinhança de  $P_0$ .

(b) Passagem para o plano compactificado.

Na figura (E.3) mostramos as curvas em todo o plano de fase considerado. Note que os pontos S e S' não estão definidos para o sistema (E.1). Por uma reparametrização conveniente, os pontos S e S', bem como o eixo, passam a ser definidos no sistema sem que isto altere a estrutura das curvas.

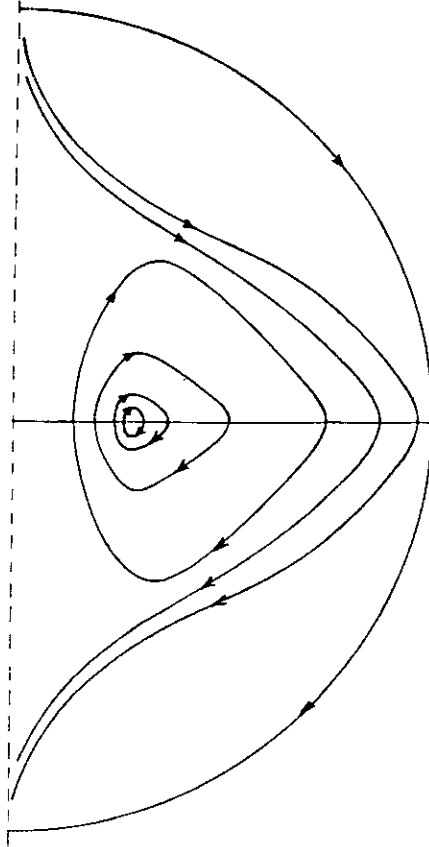


Fig. E.3 - Curvas no plano considerado.

Os resultados da análise qualitativa estão de acordo com os resultados da integral primeira (eq. 3.49) colocada numa expressão do tipo:

$$\dot{A} + V(A) = -kc^2 \tag{E.5}$$

onde  $V(A) = -\frac{\Lambda_s c^2}{3A} - \frac{A_0}{A^{3\lambda+1}}$  e  $A_0$  é uma constante de integração. Para valores positivos e negativos de  $A_0$ , os gráficos resultantes são mostrados na fig.(E.4). No primeiro caso, os modelos possuem o fator de escala  $A(t)$  inicial nulo e que chega a

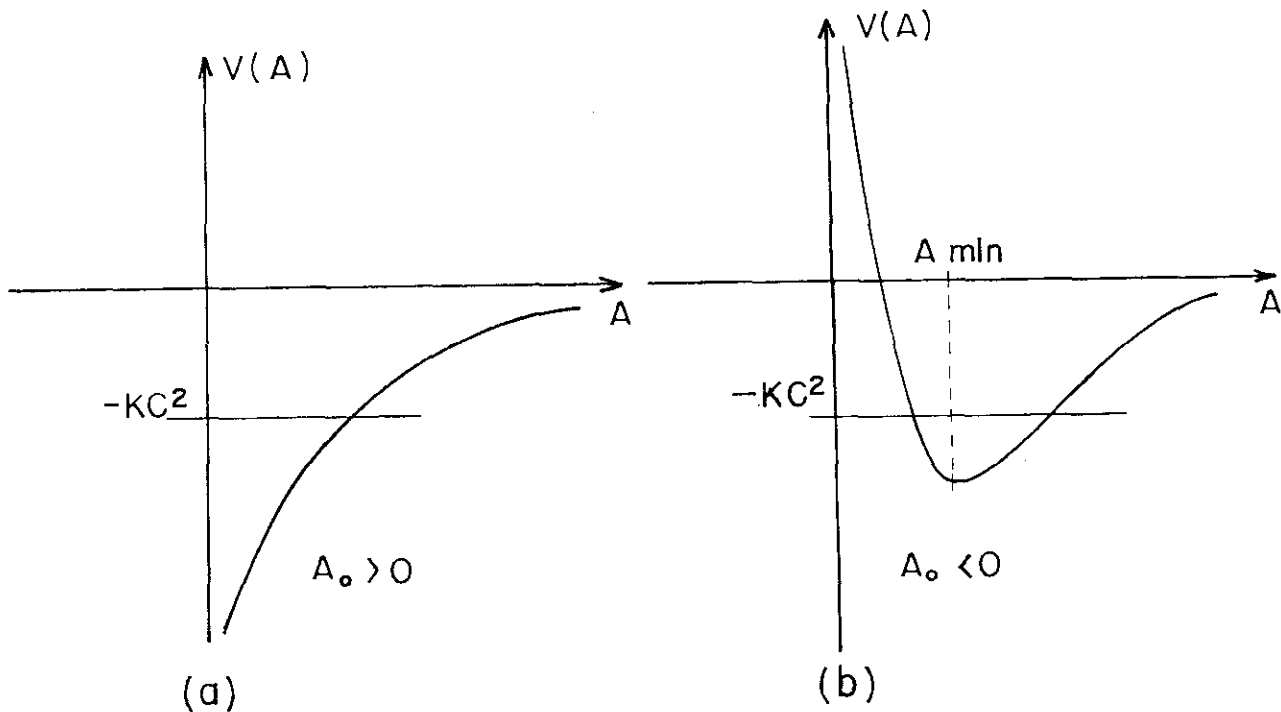


Fig. E.4 - Gráficos da expressão (E.5) para valores positivos e negativos de  $A_0$  (ítem (a) e (b), respectivamente).

um valor máximo, para, em seguida, tender ao valor inicialmente nulo. Tais soluções são representadas pelas curvas  $SS'$ . Para  $A_0 < 0$ , os modelos possuem fatores de escala que variam entre um máximo e um mínimo. No plano de fase esses modelos são representados pelas curvas fechadas.

- MODELOS ANISOTRÓPICOS

O sistema de equações diferenciais obtido é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{(3\lambda + 1)y^2}{2x} - \frac{(1 - \lambda)F_0^2}{6x^5} - \frac{(\lambda + 1)\Lambda c^2 x}{2} + \frac{\lambda \Lambda_s c^2}{2x^2} \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

onde  $x = (A^2 B)^{1/3}$ . O número de pontos críticos na região finita, bem como a estrutura das curvas nas vizinhanças desses pontos depende da constante cosmológica  $\Lambda$ , como mostrado na seção 3.2. Este fato também é válido para a análise no infinito, de modo que dividiremos a presente seção nos casos:

- (a)  $\Lambda < 0$ ,
- (b)  $\Lambda = 0$ ,
- (c)  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$ .

Fazendo a primeira transformação de Poincaré dada por (E.3), que, como ressaltamos anteriormente, é suficiente para a análise no infinito, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{3}{2}(\lambda + 1)u^2 - \frac{(1 - \lambda)F_0^2 z^6}{6} - \frac{(\lambda + 1)\Lambda c^2}{2} + \frac{\lambda \Lambda_s z^3}{2} \\ \dot{z} = -uz \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Os pontos críticos são do tipo  $P_0(u_0, 0)$ . Procurando os valores de  $u$  no sistema (E.7), obtemos os seguintes pontos:

$$P_+ \left( \sqrt{-\frac{c^2}{3}}, 0 \right), P_- \left( -\sqrt{-\frac{c^2}{3}}, 0 \right) \quad \text{para } \Lambda < 0 \quad \text{e}$$

$P(0;0)$  para  $\Lambda = 0$ . Caso  $\Lambda > 0$ , não há pontos na região infinita do plano de fase em questão. Faremos adiante a análise global das curvas para cada acoplamento.

a)  $\Lambda < 0$

Seguindo o procedimento delineado na seção 3.2, de vemos calcular o determinante da matriz  $\tilde{\Omega}$  (eq. 3.47), bem como seu traço no ponto crítico em questão. Fazendo tais cálculos, chegamos aos seguintes resultados:

$$\Omega(P_+) = -\Lambda c^2 (\lambda + 1) > 0, \quad I(P_+) = -\sqrt{-\frac{c^2}{3}} (3\lambda + 4) < 0 \tag{E.8}$$

$$\Omega(P_-) = -\Lambda c^2 (\lambda + 1) > 0, \quad I(P_-) = +\sqrt{-\frac{c^2}{2}} (3\lambda + 4) > 0$$

Portanto,  $P_+$  é um ponto de sela estável e  $P_-$  é um ponto de sela instável. Nas figs. (E.5), mostramos as curvas nas vizinhanças de  $P_+$  e  $P_-$ .

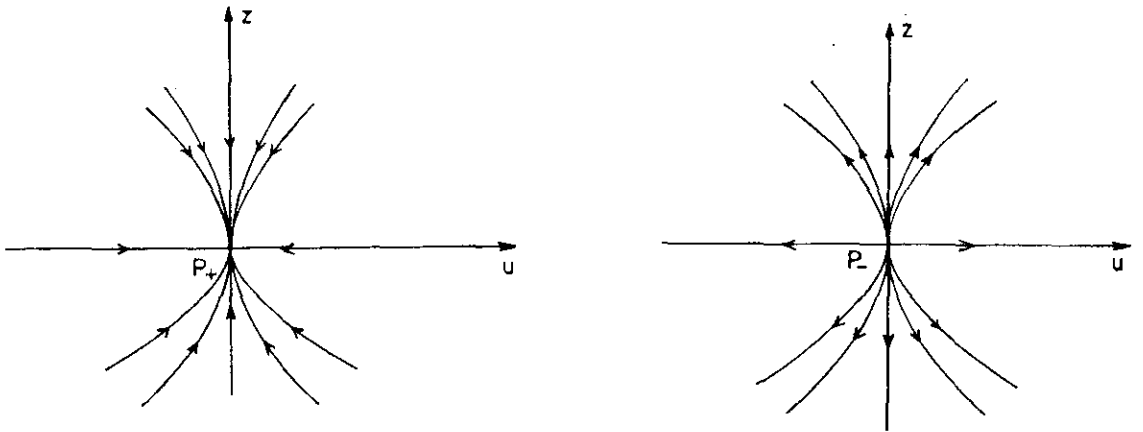


Fig. E.5 - Curvas nas vizinhanças de  $P_+$  e  $P_-$ .

Segundo Andonov et al<sup>[63]</sup> mostrados na fig. (E.6), a passagem das curvas obtidas na vizinhança dos pontos críticos para o plano de fase onde a região infinita é comparctada numa circunferência. Ainda nesta figura temos o plano de fase completo.

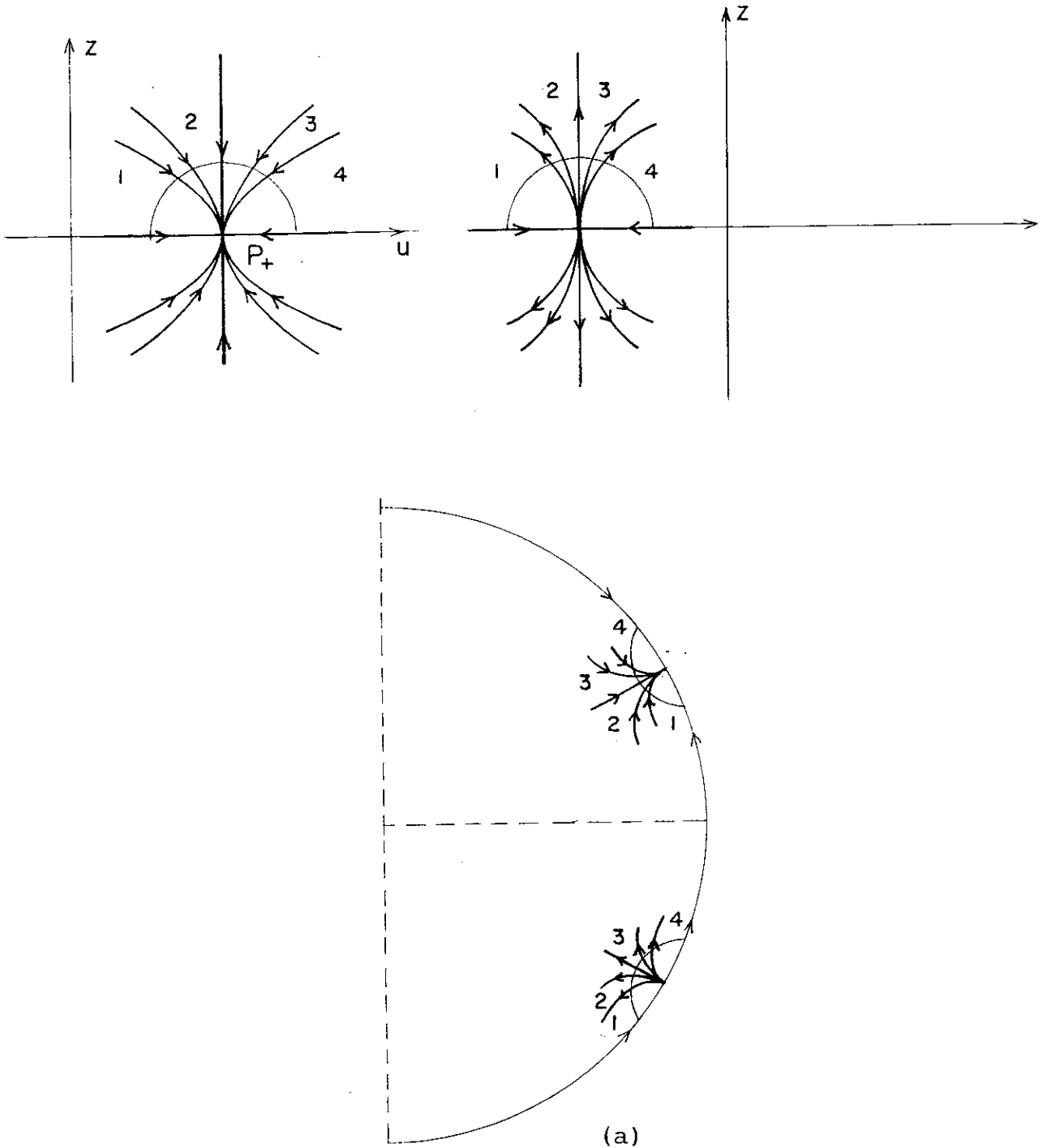
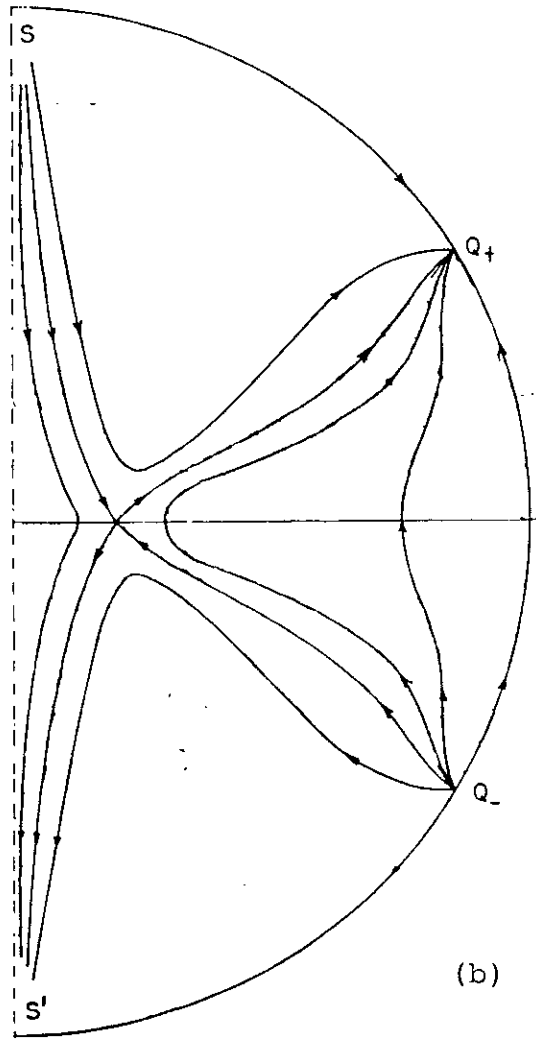


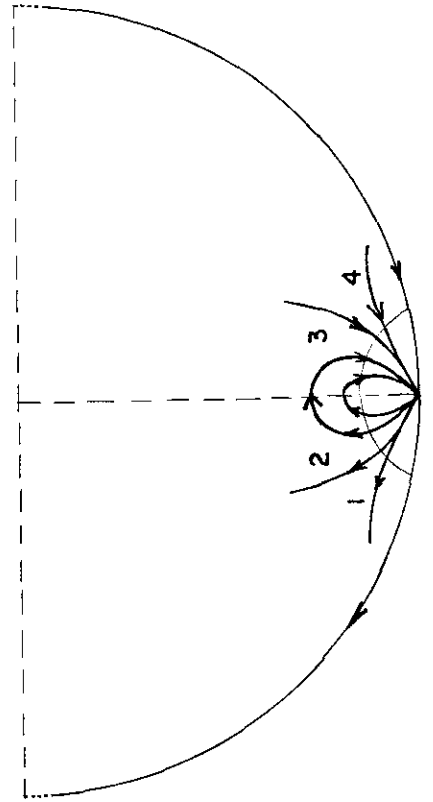
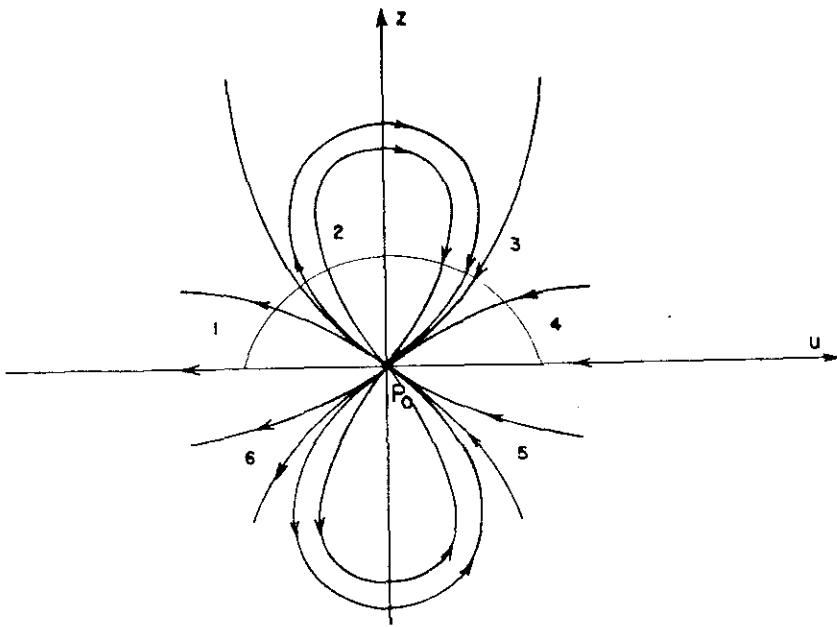
Fig. E.6 - (a) Passagens das curvas na vizinhança  $P_+$  e  $P_-$  para o plano de fase compartilhado.

(b) Curvas no plano para  $\Lambda < 0$ .

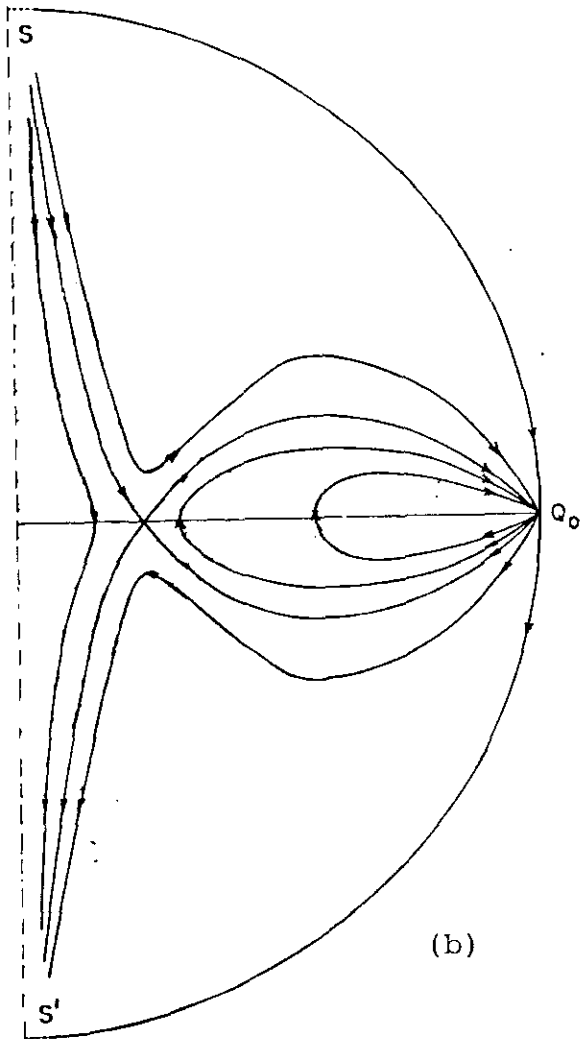


b)  $\Lambda = 0$

Calculando o determinante de  $\tilde{\Omega}$  no ponto  $P_0(0,0)$ , obtemos  $\Omega(P_0) = 0$ , indicando que este é um ponto crítico múltiplo. A determinação da estrutura das curvas na vizinhança deste ponto é conseguida seguindo o procedimento encontrado no capítulo 9 da ref. [63]. Omitiremos as passagens e cálculos, fornecendo somente o resultado final (fig. E.7). Nesta mesma figura, temos a passagem das curvas em torno de  $P_0$  para o plano de fase. Na fig. (E.7b), completamos as curvas obtidas na região infinita com a finita.



(a)



(b)

Fig. E.7 - (a) Curvas na vizinhança de  $P_0$  e sua passagem para o plano compactificado.

(b) Curvas no plano de fase para  $\Lambda = 0$ .



c)  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$

Neste caso não temos pontos críticos na região in finita considerada. Entretanto, analisando as curvas na região finita e observando que  $\dot{y} \rightarrow \infty$  a medida que  $x \rightarrow \infty$ , para valores finitos de  $y$ , chegamos sem muita dificuldade ao gráfico mostrado na fig. (E.8).

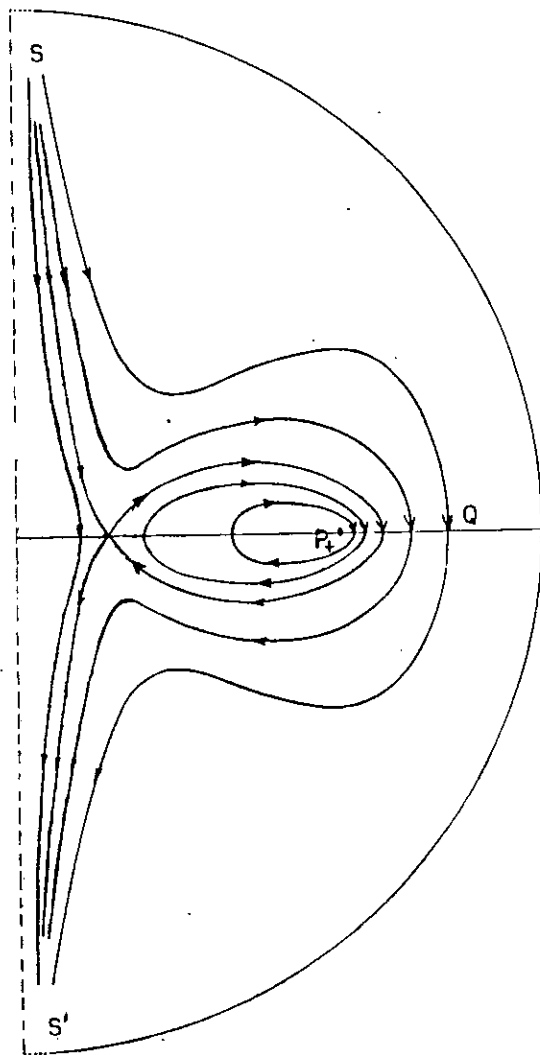


Fig. E.8 - Curvas no plano de fase para  $0 < \Lambda < \Lambda_{cr}$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] E. et F. Cosserat, "Théorie des Corps Déformables", Hermann, Paris, (1905).
- [2] P. Duhem, Ann. Ecole Norm., Paris, 10, 187 (1983).
- [3] Born, M. "Über die Beweglichkeit der Elektrolytischen Ionen", Z. Phys. 1, 229-249 (1920).
- [4] H. Grad, "Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals", Comm. of Pure and App. Math., vol.V, 455-494, (1952).
- [5] Baranowski, B. and Romotowski, T., "Non-Equilibrium Thermodynamic of a Multicomponent Fluid System with an Antisymmetric Pressure Tensor I. Basic Equations", Bull. Acad. Pol. Sc., serie des sciences chimiques, vol.XII, nº1, 71-77 (1964); "Non-Equilibrium Thermodynamic of a Multicomponent Fluid System with an Antisymmetric Pressure Tensor II. Cross-Effects", Bull. Acad. Pol. Sc., serie des sciences chimiques, vol.XII, nº2, 128-134, (1964).
- [6] Snider, R.F. and Lewchuk, K.S., "Irreversible Thermodynamics of a Fluid System with Spin", J. Chem. Phys. vol.46, 8, 3163-3172, (1967).
- [7] S.R. de Groot and P. Mazur, "Non-Equilibrium Thermodynamics", Dover Publications, Inc., New York (1983).
- [8] Meixner, J., "Der Drehimpulssatz in der Thermodynamik der Irreversiblen Prozesse", Z. Physik, 164, 145-155 (1961).
- [9] G. Nicolis and I. Prigogine, "Self-Organization in Nonequilibrium Systems", John Wiley & Sons (1977); I. Gyarmati, "Non-Equilibrium Thermodynamics", Springer-Verlag, (1970).

- [10] J.L. Ericksen and C. Truesdell, "Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells", Arch. Rat. Mec. An., 1, 215 (1958).
- [11] A.C. Eringen and E.S. Suhubi, Int. J. Eng. Sc., 2, 189, (1964).
- [12] A.C. Eringen, "Simple Microfluids", Int. J. Eng. Sc., 2, 205, (1964).
- [13] G.A. Maugin and A.C. Eringen, "Relativistic Continua with Directors", J. Math. Phys., 13, 11, 1788-1797, (1972).
- [14] C.B. Kafadar and A.C. Eringen, "Micropolar Media-I The Classical Theory", Int. J. Eng. Sc., 9, 271-305, (1971); "Micropolar Media-II The Relativistic Theory", Int. J. Eng. Sc., 9, 307-329, (1971); A.C. Eringen and C.B. Kafadar, "Polar Field Theories", Continuum Physics, Vol. IV, Academic Press (1976).
- [15] G.A. Maugin and A.C. Eringen, "Polarized Elastic Materials with Electronic Spin - A Relativistic Approach", J. Math. Phys., 13, 11, 1777-1788 (1972).
- [16] J. Weissenhoff and A. Raabe, "Relativistic Dynamics of Spin-Fluids and Spin-Particles", Acta Phys. Polon., vol. IX, fasc. 1, 7-18 (1947).
- [17] M. Mathisson, Acta Phys. Polon., vol. VI, 163, 218 (1937).
- [18] J. Lubański, Acta Phys. Polon., vol. VI, 356 (1937).
- [19] J. Frenkel, "Die Elektrodynamik des Rotierenden Elektrons", Z. Phys., 37, 243 (1926).
- [20] F. Halbwachs, "Théorie Relativiste des Fluides à Spin", Gauthier-Villars, Paris (1960).
- [21] A. Aymart, Compt. Rend., 243, 885 (1956).
- [22] B.C. Unal et J.P. Vigié, "Introduction des Paramètres Relativistes d'Einstein-Kramers et de Cayley-Klein dans la Théorie Relativiste des Fluides dotés de Moment Cinétique Interne (Spin)". Compt. Rend., 245, 1785 (1957); "Dans l'Hydrodynamique Relativiste du Fluide à

- "Spin de Weyssenhoff", *Compt. Rend.*, 245, 1980 (1957).
- [23] Takabayasi *Suppl. Prog. Theoret. Phys.* (Kioto), 4 (1957).
- [24] J.R. Ray and L.L. Smalley, "Spinnings Fluids in General Relativity", *Phys. Rev. D*, 26, 10, 2619-2622, (1982); "Spinning Fluids in the Einstein-Cartan Theory", *Phys. Rev. D*, 27, 6, 1383-1385 (1983).
- [25] R. Amorim, "Charged Spinning Fluids with Magnetic Dipole Moment in the Einstein-Cartan Theory", *Phys. Rev. D*, 31, 12, 3099-3103 (1985); J. R. Ray and L.L. Smalley, "Consistency Relations for Spinning Matter in Gravitational Theories", *Phys. Rev. D*, 34, 10, 3268-3269 (1986). J.R. Ray, L.L. Smally and J.P. Krisch, "Spinning Fluids in General Relativity II. Self-Consistent Formulation", *Phys. Rev. D*, 35, 10, 3261-3262 (1987).
- [26] R. de Ritz, M. Lavourga, G. Platania and C. Stornaiolo, "Spin Fluid in Einstein-Cartan Theory: A Variational Principle and an Extension of a Velocity Potential Representation", *Phys. Rev. D*, 28, 4, 713-717 (1983).
- [27] A.F.F. Teixeira, "Extended General Relativistic Lagrangean for Spinning Fluids", *Rev. Bras. Fís.*, 18, 2, 182-190, (1980).
- [28] Yu N. Obukhov and V.A. Korstky, "The Weyssenhoff Fluid in Einstein-Cartan Theory", *Class. Quantum Grav.*, 4, 1633-1657 (1987).
- [29] H.P. de Oliveira and J.M. Salim, "Spinning Fluids in General Relativity: A Variational Formulation", *Class. Quantum Grav.*, 8, 1199-1204 (1991).
- [30] G.A. Maugin, "On the Covariant Equations of the Relativistic Electrodynamics of Continua IV. Media with Spin", *J. Math. Phys.*, 19, 5, 1220-1226 (1977), e as referências citadas neste artigo.
- [31] D. Jou, J. Casas-Vazquez and G. Lebon, "Extended Irreversible Thermodynamics", *Rep. Prog. Phys.*, 51, 1105-1179, (1988).

- [32] F.J. Belinfante, "On the Current and the Density of the Electric Charge, the Energy, the Linear Momentum and the Angular Momentum of Arbitrary Fields", *Phys.VII*, 5, 449-474, (1940).
- [33] L. Rosenfeld, "Sur le Tenseur d'Impulse-Energie", *Mem. Acad. R. Belg. Sci.*, 18, n<sup>o</sup>6
- [34] G.F.R. Ellis, "Relativistic Cosmology", *Scuola Internazionale de Fisica Enrico Fermi*, Academic Press, (1971), Corso XLVII.
- [35] J.M. Salim, "Monopulos Gravitacionais", *Tese de Mestrado*, CBPF, (1976).
- [36] Para uma discussão detalhada acerca da vorticidade, recomendamos a monografia "Kinematics of Vorticity", de C. Truesdell (*Indiana Univ. Publ. Sc. Ser.*, vol.19, (1954)).
- [37] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, "Gravitation", (W.H. Freeman and Company, 1970).
- [38] J.L. Synge, "Relativity The General Theory", North-Holland Publishing Company (1960).
- [39] H.P. de Oliveira and J.M. Salim, "Extended Thermodynamics for Spinning Fluids", Preprint CBPF (1990).
- [40] J.L. Anderson, "Principles of Relativity Physics", Academic Press (1967); L. Landau and L. Lifschitz, "Teoria do Campo", Editora Mir (1978).
- [41] A. Papapetrou, "Spinning Test-Particle in General Relativity I", *Proc. R. Soc. London*, A209, 248-258, (1951).
- [42] W.G. Dixon, "Special Relativity Cambridge University Press, (1978).
- [43] F.W. Hehl, "On the Energy Tensor of Spinning Massive Matter in Classical Field Theory and General Relativity", *Rép. Math. Phys.*, 9, 1, 55-82, (1976).
- [44] S.R. de Groot, "The Laws of Relativistic Thermodynamics", I, II, III, *Physica* 88A, 172-182; 183-189; 425-434, (1977).

- [45] C. Eckart, "The Thermodynamic of Irreversible Processes", Phys. Rev. 58, 919 (1940).
- [46] L. Landau and E. Lifschitz, "Fluid Mechanics", Pergamon Press Ltda, (1959).
- [47] M.O. Calvão, Tese de Doutorado, CBPF (1991).
- [48] M. Novello, "Cosmologia Relativista", II Escola de Cosmologia e Gravitação, (1980).
- [49] C. Perez-Garcia, J.M. Rubi and J. Casas-Vázquez, "On the Stability of Micropolar Fluids", J. Non-Eq. Thermodyn., 6, 65-78 (1981).
- [50] I. Müller, "Zum Paradox der Wärmeleitungstheorie", Z. Physik, 198 (1967).
- [51] W. Israel, "Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory", Annals of Physics, 100, 310-331, (1976).
- [52] D. Pavon, D. Jou and J. Casas-Vázquez, "On a Covariant Formulation of Dissipative Phenomena", Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.XXXVI, 1, 79-88, (1982).
- [53] J.M. Rubi and J. Casas-Vázquez, "Thermodynamical Aspects of Micropolar Fluids: A Non-Linear Approach", J. Non-Equilib. Thermodyn., 5, 155-164, (1980).
- [54] X. Fustero and D. Pavon, "Relaxation Terms and Entropy Production in a Cosmological Model", Lett. al Nuovo Cim., 35, 427, (1982).
- [55] D. Pavon, D. Jou and J. Casas-Vázquez, "Equilibrium and Non-Equilibrium Fluctuations in Relativistic Fluids", J. Phys. A: Math. Gen., 16, 775-782, (1983).
- [56] D. Jou and D. Pavon, "Second-Order Coefficients for Radiating Fluids", Astroph. J., 291, 447-449, (1985).
- [57] H.P. de Oliveira, "Um Estudo em Cosmologia e Termodinâmica Causal", Tese de Mestrado, CBPF (1986).
- [58] H.P. de Oliveira and J.M. Salim, "Non-Equilibrium Friedmann Cosmologies", Acta Phys. Pol., B19, D, 649-657, (1988).

- [59] M. Novello, H.P. de Oliveira, J.M. Salim and J.R.T.M. Neto, "Viscous Causal Cosmologies", *Acta Phys. Pol.*, B21, 7, 571-579, (1990).
- [60] J.A.S. Lima, R. Portugal and I. Waga, "Bulk-Viscosity-Driven Asymmetric Inflationary Universe", *Phys. Rev.*, D37, 2755, (1989).
- [61] M.O. Calvão and J.M. Salim, "Extended Thermodynamic Approach to Friedmann-Robertson-Walker Models in the Landau-Lifschitz Frame", *aceito para publicação na Classical and Quantum Gravity*.
- [62] D. Pavon, J. Bafaluy and D. Jou, "FRW Cosmology and Extended Irreversible Thermodynamics", *aceito para publicação na Classical and Quantum Gravity*.
- [63] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon and A.G. Maier, "Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems", John Wiley & Sons, (1966).
- [64] D. Pavon, D. Jou and J. Casas-Vázquez, "Equilibrium Fluctuations in Relativistic Thermoelectric Fluids", *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 42, 1, 31-38, (1985).
- [65] L. Onsager, "Reciprocal Relations in Irreversible Processes I", *Phys. Rev.*, 37, 405-426, (1931); "Reciprocal Relations in Irreversible Processes II", 38, 2265-2279, (1931).
- [66] R. Balescu, "Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics", New York Wiley, (1975).
- [67] L. Landau and E. Lifschitz, "Física Estadística", Editorial Reverte, S.A., (1975).
- [68] R.F. Fox and G. Uhlenbeck, "Contributions to Non-Equilibrium Thermodynamics I: Theory of Hydrodynamical Fluctuations", *Phys. Fluids*, 13, 1893, (1970)
- [69] M. Novello and J.M. Salim, "Non-Equilibrium Cosmologies", *Fundamentals of Cosmic Physics*, 8, 3, (1983).
- [70] Yu. N. Obukhov and O.B. Piskareva, "Spinning Fluid in General Relativity", *Class. Quantum Gravity*, 6, L15-L19, (1989).


- [71] Yu. N. Obukhov and O.B. Piskareva, "Development of Small Perturbations of Cosmological Models in the General Theory of Relativity: Spin Effects", Soviet Phys., JETP 71(1), (1990).
- [72] W. Israel, "Electrodynamics, Gravitation and Spin", Lett. al Nuovo Cimento, 7, 860, (1973).
- [73] J.P. Krisch and L.L. Smalley, "Cartan and Relativistic Spin Fluids in a Rotating Cylinder", J. Math. Phys., 27(7), 1640-1644, (1988); "Spin Fluids in a Van Stockum Cylinders", Class. Quantum Grav., 7, 481-486, (1990).
- [74] M. Demianski, "Relativistic Astrophysics", Pergamon Press (1985), e as referências citadas.
- [75] M. Novello and S.L.S. Duque, "Gravitationally Self-Induced Phase Transition", Physica A, 168, 1073-1081, (1990).
- [76] K. Gödel, "An Exemple of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equation of Gravitation", Rev. Mod. Phys., 21, 447, (1949).
- [77] A.V. Tozini, "Modelos de Universo com Rotação", Tese de Mestrado, CBPF; (1984). M. Novello and M. Rebouças, "The Stability of a Rotating Universe", Astrophys. J., 225, 719, (1978).
- [78] M. Novello and M. Rebouças, "Rotating Universe with Successive Causal and Noncausal Regions", Phys. Rev. D, 29, 10, 2850-2852, (1979).
- [79] M.J.D. Assad, Tese de Doutorado, CBPF (1991).
- [80] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds), "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, (1965).
- [81] G. Sansoni and R. Conti, "Non-Linear Differential Equations", Pergamon Press, (1964).
- [82] M.J.D. Assad, and C. Romero, "Eternal and Pulsating Universes in a Riemann-Cartan Spacetime", Preprint, UFPb (1990).
- [83] R. Adler, M. Bazin and Menahem Schiffer, "Introduction to General Relativity", Mc Graw-Hill Kogakuska, Ltd, (1965).




"FLUIDOS COM SPIN EM RELATIVIDADE GERAL: FORMULAÇÃO VARIACIONAL,  
ASPECTOS TERMODINÂMICOS E MODELOS COSMOLÓGICOS"

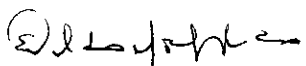
HENRIQUE PEREIRA DE OLIVEIRA

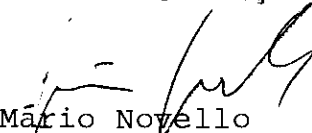
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
José Martins Salim - Presidente

  
Ricardo Machado de Amorim

  
Silvestre Ragusa

  
Evaldo Mendonça Fleury Curado

  
Mário Novello

  
Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira  
- Suplente

Rio de Janeiro, 06 de setembro de 1991