ARTHUR MATTOS NETO

REALIZAÇÃO DE TOMITA–TAKESAKI DE W^*–ÁLGEBRAS SEMI–FINITAS

E

GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA DAS TEORIAS CLÁSSICA E QUÂNTICA

Tese de Doutorado

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Maio – 1991.

Dedico este trabalho a

Bel, Daniela, Rafael

e Lucas.

AGRADECIMENTOS

Ao longo do período em que estivemos envolvidos na realização deste trabalho, muitos foram aqueles que, de alguma forma, participaram e contribuíram. A todos nos dirigimos para, reconhecidamente, agradecer.

De modo especial, queremos demonstrar nosso apreço ao Prof. J. David M. Vianna, orientador deste trabalho, pelo que tem representado ao longo de toda a nossa formação.

A Graça e a Nice pela inestimável ajuda na fase de revisão e pela presença incansável em todos os momentos.

A Ademir pelo estímulo proporcionado pelas discussões e trabalho conjunto desenvolvido nos últimos anos.

A Delmiro e Luiz, amigos constantes ao longo desta trajetória.

Aos grupos de discussão de Brasília (Nilo, Marciano, Neto, Suely, Logrado Zola, André) e de Salvador (Aurino, Jorge Mário, José Fernando, Raimundo, Goethe, Juarez, Milton) pelo papel fundamental que representaram no sentido do desenvolvimento deste trabalho.

A Ana pelo cuidadoso e paciente trabalho de digitação do texto.

Aos professores e funcionários do Departamento de Física da Universidade de Brasília pelos quatro anos e meio de convivência profícua e estimulante.

Aos professores e funcionários do Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia, nosso reconhecimento.

ABSTRACT

Based on the semi–infinite W^*–algebras we consider the classical and quantal descriptions of the non–relativistic motion of systems with a finite number of freedom degrees. We propose a new axiomatization for the Quantum Theory, setting a generalization and we compare it with that one introduced by Takahaski, Umezawa and Matsumoto. Some representations for our formulation are explicitly constructed, showing to be possible a consistent development of the Quantum Theory on the phase space and the establishment of relations between our formulation and those ones proposed by Bohm and by Klauder. Taking a Golfand's procedure we show an axiomatization of the Classical Theory in terms of abelian W^* algebras which reduces to the usual formulation of the classical description; following considering the standard realizations of the abelian W^*–algebras we introduce a new axiomatization for the Classical Theory which generalizes it and creates the possibility in duplicate the number of observables, we compare our formulation with that one proposed by Prigogine and co–workers and by Schönberg. Using three new representations for the Quantum Theory (canonical and mixed tensorial) we realize an inter–theoretical reduction where we show that the utilization of the Tomita–Takesaki realization (standard) of semi–finite W^*–algebras, sets the common language for, the classical limit of the non–relativistic Quantum Theory for a system with a finite number of freedom degrees can be developed in its formal aspects as well in the empirical ones. The concept of indistinguishibility of identical particles in the Classical Physics introduced by Schönberg it is taken again and studied in that aspect where the classical particles are considered as "quanta" of a field of operators $\phi = \phi(q, p)$ defined on phase space. Within this background we set a "second–quantized" form of the B.B.G.K.Y. equations system and we deduce irreversible or reversible microscopic cinetic equations depending on of self–interaction of the field $\phi = \phi(q, p)$. We show yet that our formulation besides to

permit deduction of standard cinetic equations of the nonequilibrium statistical theory, it makes possible the introduction of a new physical interpretation for the procedure of "coarse–graining" of Kirkwood. Finally, we present the main results of this work and we accentuate some perspectives in order to obtain additional developments.

RESUMO

Baseados na teoria de W^*–álgebras semi–finitas consideramos as descrições clássica e quântica do movimento não–relativístico de sistemas com um número finito de graus de liberdade. Propomos então uma nova axiomatização para a Teoria Quântica; estabelecemos uma generalização à mesma e comparamos a formulação introduzida com aquela proposta por Takahashi, Umezawa e Matsumoto. Algumas representações para a nossa formulação são construídas explicitamente, mostrando ser possível o desenvolvimento consistente da Teoria Quântica sobre espaços de fase e o estabelecimento de relações entre nossa formulação e aquelas propostas por Bohm e por Klauder. Tendo por base o procedimento de Gelfand, exibimos uma axiomatização da Teoria Clássica em termos de W^*–álgebras abelianas que se reduz à formulação usual da descrição clássica; em seguida, considerando as realizações de Tomita–Takesaki (standard) de W^*–álgebras abelianas introduzimos uma nova axiomatização para a Teoria Clássica que a generaliza e possibilita duplicar o número de observáveis; comparamos então a nossa formulação com a proposta por Prigogine e colaboradores e por Schönberg. Empregando três novas representações para a Teoria Quântica (canônicas e tensoriais mistas) realizamos um processo de redução inter–teórico onde mostramos que o uso da realização standard (Tomita–Takesaki) de W^*–álgebras semi–finitas, estabelece a linguagem comum sobre a qual, o limite clássico da Teoria Quântica não–relativística para um sistema com número finito de graus de liberdade, pode ser evidenciado, tanto nos seus aspectos formais quanto nos empíricos. O conceito de indistinguibilidade das partículas idênticas na Física Clássica introduzido por Schönberg, é retomado e explorado no aspecto que permite serem as partículas clássicas consideradas como "quanta" de um campo de operadores $\phi = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ definidos sobre os espaços de fase. Dentro desta visão estabelecemos a forma "segunda quantizada" do sistema de equações B.B.G.K.Y. a partir do qual deduzimos equações cinéticas microscópicas reversíveis ou irreversíveis a depender da natureza da auto–interação do campo $\phi = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Mostramos ainda que nosso desenvolvimento, além de permitir a dedução de equações cinéticas conhecidas da Teoria Estatística. Fora do Equilíbrio, possibilita a introdução de uma nova interpretação física para o procedimento de "coarse–graining" empregado por Kirkwood. Por fim, sistematizamos os principais resultados do trabalho e apontamos perspectivas de desdobramento do mesmo.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

INTRODUÇÃO

Uma axiomatização abstrata de qualquer teoria física consiste na identificação de estruturas matemáticas abstratas (entes e operações) que possam ser tomadas como noções primitivas. Desta forma, torna-se possível estudar a teoria independentemente do significado original atribuído aos entes e operações, os quais passam então a ser considerados como uma possível realização concreta da referida estrutura abstrata; neste sentido, gostaríamos de destacar pelo menos duas das prováveis vantagens existentes na utilização desse procedimento.

A) a de permitir a busca de novas realizações que viabilizem a superação de eventuais limitações da formulação original, podendo inclusive conduzir à generalização da mesma;

B) e a de possibilitar a transferência de métodos, de uma teoria para outra, já que pode tornar possível o emprego de uma mesma estrutura matemática abstrata à duas teorias, usualmente realizadas de forma diferente. Neste caso, pode-se ainda compará-las com maior clareza, identificando as suas semelhanças e diferenças de maneira mais significativa.

Deve-se em grande parte à Teoria Quântica o crescente interesse por estruturas matemáticas abstratas na Física, particularmente as estruturas de Grupo e de Álgebras [1]. No que tange às estruturas de álgebras usadas na axiomatização da Teoria Quântica, identificam-se duas grandes vertentes:

I) **Axiomatização Algébrica**: Jordan, Wigner e von Neumann [2], seguindo o caminho aberto por Heisenberg [3], ao considerar o conjunto das observáveis como o elemento básico da teoria, produziram uma axiomatização abstrata em termos de Álgebras Normadas [4]. Esta estrutura tem imediatamente um forte impacto no campo da Matemática Pura [5]; contudo, sua influência na Física se faz sentir principalmente após os trabalhos sobre Teoria Quântica de Campos realizados por Segal [6], Haag [7], Kastler e Haag [8], Araki [9] e outros [10, 11].

Desde então, essa axiomatização tem gerado uma significativa variedade de trabalhos, principalmente no âmbito do estudo de sistemas com um número infinito de graus de liberdade, como por exemplo, a Mecânica Estatística e a Teoria Quântica de Campos [12, 13, 14].

II) Axiomatização Proposicional: Von Neumann e Birkkoff [15], mostraram que é possível desenvolver–se uma nova axiomatização para a Teoria Quântica considerando como entes primitivos, apenas o sub–conjunto das observáveis constituído pelas projeções ortogonais. Isto, na realidade, significa dizer que a Teoria Quântica pode ser axiomatizada abstratamente usando um cálculo proposicional não distributivo (também chamado de Lógica Quântica). Esta formulação, desde então, tem sido desenvolvida em vários dos seus aspectos por Jauch e colaboradores [16]. Como exemplos da contribuição dessa axiomatização, vale citar a possibilidade de melhor compreender–se o papel desempenhado pelas regras de super–seleção e discutir–se a necessidade de variáveis ocultas na Teoria Quântica [16, 17].

Em se tratando da axiomatização algébrica, mostra–se que para sistemas quantum–mecânicos não–relativísticos com um número finito de graus de liberdade, a álgebra normada conveniente para uma axiomatização abstrata é a W^*–álgebra semi–finita [18]. Sucintamente, temos que na axiomatização algébrica as observáveis são representadas por elementos A pertencentes ao sub–conjunto R ($\mathscr{E}$), onde $\mathscr{E}$ é uma W^*–álgebra semi–finita; os estados são por sua vez, representados por funcionais lineares positivos normalizados ω, definidos sobre $\mathscr{E}$ e a relação com os resultados empíricos é dada, assumindo–se que $\omega(A)$ representa o valor esperado da observável $A \in R$ ($\mathscr{E}$) quando o sistema encontra–se no estado ω. As realizações lineares concretas da axiomatização algébrica podem ser determinadas através do Teorema G.N.S. (Gelfand–Naimark–Segal), que assegura que para qualquer estado dinâmico ω pode–se escrever [18]:

$$\omega(A) = \langle \Psi_\omega | \pi_\omega(A) | \Psi_\omega \rangle ;$$

sendo $|\Psi_\omega\rangle$ uma representação vetorial do estado ω em algum espaço de Hilbert H_ω, e $\pi_\omega(\mathscr{E})$ uma realização linear de W^*–álgebra semi–finita $\mathscr{E}$, via operadores lineares limitados sobre H_ω.

Neste trabalho, partindo da axiomatização algébrica para as descrições clássica e quântica, associadas a um sistema Σ não–relativístico com número finito de graus de liberdade em termos de uma W^*–álgebra semi–finita, e tomando por base a sua realização de Tomita–Takesaki (ou standard), apresentamos uma axiomatização concreta para estas descrições em termos de distintos conjuntos de operadores lineares auto–adjuntos atuando numa mesma álgebra de Hilbert [19]. Esta nova axiomatização concreta vai nos permitir propor uma generalização a ambas as descrições, pela incorporação de novas observáveis e estados acessíveis ao sistema.

Diversos autores têm demonstrado a necessidade da ampliação do conjunto de observáveis associadas a um dado sistema Σ, tanto ao nível da descrição clássica, quanto da quântica. Assim, por exemplo, Prigogine e colaboradores [20, 21], com base em resultados de Misra e Courbage [22, 23], têm mostrado que uma definição correta da entropia do não–equilíbrio, em termos de conceitos mecânicos e o seu consequente crescimento sobre as bases da dinâmica, seja clássica ou quântica, só é possível com a ampliação do conjunto das observáveis [24, 25]. Por sua vez, Takehashi, Umezawa, Matsumoto e colaboradores [26 , 27] têm mostrado que a duplicação do número de graus de liberdade na descrição quântica de Σ é fundamental para que se possa dar um tratamento consistente e unificado para a Teoria Quântica à temperatura e densidade finitas no equilíbrio termodinâmico. Cabe ainda citar Bohm e colaboradores [28], que foram também levados a propor a ampliação do conjunto das observáveis, na tentativa de interpretar a Teoria Quântica no contexto de ordem implícita [29].

Ao longo do presente trabalho estabelecemos de forma sistemática as relações existentes entre a nossa axiomatização concreta (e sua generalização) para as descrições clássica e quântica do movimento, e as supra citadas formulações, o que nos permite mostrar que:

A) a nossa formulação permite, em ambas as descrições, a introdução de uma nova observável associada ao tempo interno de um dado sistema Σ, o que, segundo Prigogine é fundamental para conciliar os aspectos irreversíveis observados nos fenômenos ao nível macroscópico com as leis temporalmente reversíveis das dinâmicas clássica e quântica [24];

B) a formulação de Takahaski–Umezawa, usualmente denominada de "Thermo Field Dynamics" para o estudo do equilíbrio termodinâmico, e mesmo a sua recente extensão, desenvolvida por Matsumoto [30, 31] para certas classes de estados do não–equilíbrio, estão inteiramente contidas na axiomatização que ora apresentamos. De fato, a nossa formulação permite estender os próprios resultados de Matsumoto, a uma classe maior de estados do não equilíbrio;

C) e no tocante à formulação de Bohm e colaboradores [28], mostramos, a menos do seu algorítimo de cálculo dos valores esperados, que ela é equivalente à representação canônica associada a nossa axiomatização concreta.

Parece–nos importante ressaltar, pelo que nos é dado conhecer, que a primeira generalização ao nível da Mecânica Clássica que de uma forma geral segue as linhas que orientam este trabalho, foi proposta por Schönberg [32, 33], usando, no entanto, uma outra abordagem e tendo outras preocupações. De fato, no presente trabalho nós mostramos que a formulação de Schönberg é equivalente a uma particular representação, ou seja, a representação canônica associada à nossa axiomatização concreta, no âmbito, é claro da Teoria Clássica.

Desde as origens da Teoria Quântica subtende–se que a Teoria Clássica deve surgir de algum processo limite da Teoria Quântica. Entretanto, o estabelecimento de tal processo de redução inter–teórico ainda não alcançou até os dias de hoje, um bom nível de satisfatoriedade, levando autores como Bohm e colaboradores [34], Holland–Kyprianidis [35] e

Rosen [36] a se posicionarem sob formas como:

A) "não deve existir um corte tão nítido entre as descrições clássica e quântica, para o movimento" [34, 35];

B) "a Teoria Clássica não pode ser considerada como caso limite da Teoria Quântica" [36].

Neste trabalho consideramos, o nosso ponto de vista, que a origem dessa controvérsia reside no fato de que na busca de tal redução têm-se empregado estruturas matemáticas distintas para as descrições clássica e quântica. Nesse sentido, usando nosso desenvolvimento unificado mostramos que o uso de estruturas algébricas comuns a ambas as teorias possibilita desenvolver de forma sistemática o processo de redução inter-teórico tanto ao nível formal como ao nível empírico.

Tendo em vista que a nossa formulação permite a ampliação do conjunto de representações que podem ser associadas às descrições clássica e quântica, mostramos também que, a partir de nossa formulação, podemos obter livres de qualquer inconsistência várias realizações da Teoria Quântica sobre espaços de fase. Desta forma elucidamos uma questão que há muito vem merecendo uma considerável atenção de físicos e matemáticos [37, 38, 39, 40]. De fato, a formulação que apresentamos neste trabalho, permite introduzir "funcões de onda" $\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p})$ sobre o espaço de fase $\Omega = \{(q,p)$ com $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in R\}$, o que a isenta do "dilema da não-positividade" de Wigner [41, 42]. Neste sentido, procuramos deduzir da nossa formulação os resultados de Klauder-Glauber e outros (estados coerentes sobre espaços de fase) [43] que também são livres do referido dilema. Deixamos claro que as formulações via estados coerentes sobre espaço de fase podem ser deduzidas da nossa, através do emprego de convenientes operadores de projeção, pois em verdade elas são realizações irredutíveis de W^*-álgebras $\mathscr{E}$ associadas ao sistema, enquanto que a nossa se baseia numa realização redutível.

Por fim, mostramos ainda que a nossa formulação possibilita ao nível clássico, uma outra generalização pela incorporação da noção de indistinguibilidade de partículas idênticas.

Este fato permite o emprego de uma Teoria de Campo com Operadores $\phi = \phi\,(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, definidos sob o espaço de fase clássico viabilizando assim a transposição de métodos usuais no âmbito da teoria quântica de campos, para o nível clássico [32]. Esta teoria, nós a denominamos Teoria Geral de Campos. Com o seu uso evidenciamos que a depender da natureza da auto interação do campo $\phi = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é possível obter–se resultados relativos a irreversibilidade já ao nível microscópico. Este último resultado vem por sua vez possibilitar, de forma sistemática e simples, a derivação das equações cinéticas de Boltzmann–Enskog [44] e a de Enskog, modificada ou não, com termo de Vlasov [45], muito utilizadas no estudo das propriedades de transporte de sistemas densos [46]; bem como viabilizar o estabelecimento de uma nova interpretação física para o procedimento adotado por Kirkwood nas suas deduções de equações cinéticas via primeiros princípios [47].

Em síntese, consideramos que o presente trabalho, ao permitir o tratamento de efeitos térmicos e dinâmicos de sistemas clássicos e quânticos não–relativísticos com um número finito de graus de liberdade de uma forma unificada, ou seja, através de distintos conjuntos de operadores lineares auto adjuntos atuando numa mesma álgebra de Hilbert, poderá contribuir para uma melhor compreensão acerca da natureza dessas descrições e superar inclusive certas limitações das teorias existentes pois, em princípio, torna possível, para ambas, o emprego de técnicas originalmente desenvolvidas apenas para uma delas, como por exemplo, desenvolvimentos oriundos da segunda quantização que empregamos ao nível clássico para dedução de equações cinéticas.

O presente trabalho está dividido em sete capítulos. Os dois primeiros foram introduzidos por questão de completeza pois compreendem elementos matemáticos que, embora essenciais no desenvolvimento do trabalho, são um resumo de conceitos existentes na literatura. Nos demais capítulos apresentamos nossos resultados, os quais são originais e em alguns aspectos extensões de trabalhos por nós publicados [48, 49, 50, 51, 52]. Especificamente, em cada capítulo teremos:

– no primeiro, fazemos um resumo dos principais tópicos concernentes às estruturas de ordem, algébrica e métrica de conjuntos, com o objetivo de explicitar a linguagem empregada ao longo do trabalho e fixar notação;

— o segundo conserva em parte as características do primeiro, sendo que nele apresentamos os principais elementos da teoria abstrata das C^*–álgebras (e W^*–álgebras), dando ênfase às suas realizações lineares;

— no terceiro propomos uma nova axiomatização para a Teoria Quântica de sistemas não–relativísticos com um número finito de graus de liberdade, o que nos possibilita o estabelecimento de uma generalização à referida teoria. Comparamos ainda a formulação introduzida com a formulação proposta por Takahashi, Umezawa e Matsumoto [53, 54, 55];

— iniciamos o quarto capítulo apresentando algumas representações para a nossa formulação; em seguida, apresentamos desenvolvimentos consistentes da Teoria Quântica sobre espaços de fase, mostrando também as relações existentes entre nossos desenvolvimentos e aqueles propostos por Bohm [28] e por Klauder [43]; finalizando, damos alguns exemplos simples do formalismo introduzido;

— no quinto capítulo exibimos uma axiomatização da Teoria Clássica em termos de W^*–álgebras abelianas a partir da qual reobtemos a formulação usual da descrição clássica, tendo por base o procedimento de Gelfand [56]; em seguida introduzimos uma nova axiomatização para Teoria Clássica (e sua correspondente generalização) baseada na realização standard (Tomita–Takesaki) de W^*–álgebras abelianas; por fim, comparamos a nossa formulação com a de Prigogine e colaboradores [57] e com a de Schönberg [32, 33], apresentando também algumas aplicações da formulação proposta;

— no sexto capítulo mostramos que a realização de Tomita–Takesaki de W^*–álgebras semi–finitas estabelece a linguagem comum sobre a qual o limite clássico da Teoria Quântica não relativística para um sistema de número finito de graus de liberdade, pode ser evidenciado de uma forma sistemática, tanto nos seus aspectos formais quanto nos empíricos. Este processo de redução inter–teórico nós realizamos empregando três novas representações para a Teoria Quântica, quais sejam canônica e tensoriais mistas;

— no sétimo capítulo o conceito de indistinguibilidade de partículas idênticas na Física Clássica, introduzido por Schönberg, é reexaminado. Este conceito permite considerar as partículas clássicas como os "quanta" de um campo de operadores $\phi = \phi\ (\mathbf{q},\ \mathbf{p})$ sobre o espaço de fase. Isto nos possibilita introduzir a forma "segundo quantizada" do sistema de equações B.B.G.K.Y., a partir do qual deduzimos equações cinéticas microscópicas reversíveis ou irreversíveis, a depender da natureza da auto–interação do campo. Mostramos, por fim, que estas equações, além de permitirem a dedução de equações cinéticas conhecidas da Teoria Estatística fora do equilíbrio, possibilitam o estabelecimento de uma nova interpretação física para o procedimento de "coarse–graining" empregado por Kirkwood [47] na sua dedução de equações cinéticas via primeiros princípios.

Nas considerações finais, sistematizamos os principais resultados obtidos bem como apontamos as perspectivas em termos dos possíveis desdobramentos deste trabalho.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos um resumo dos principais tópicos concernentes às estruturas **de ordem**, **algébrica** e **métrica** dos conjuntos. Com isto, objetivamos explicitar a linguagem matemática empregada ao longo do presente trabalho, bem como fixar notação. Neste sentido e tendo em vista a extensão dos assuntos tratados, não nos preocupamos em demonstrar as proposições enunciadas, nos limitando quando necessário, a fazer alguns comentários esclarecedores. Salvo onde indicado explicitamente, as referências básicas usadas neste capítulo são [58, 59, 60, 61, 62].

1.1 ESTRUTURA DE ORDEM

Definição 1.1.1. Um conjunto K é chamado um **conjunto ordenado** quando é possível definir uma relação entre seus elementos, notada por $x \leq y$, que possua as seguintes propriedades:

i) $x \leq x$ (reflexiva);

ii) $x \leq y,\ y \leq z \implies x \leq z$ (transitiva);

iii) $x \leq y,\ y \leq x \implies x = y$ (anti–simétrica), com $x, y, z \in K$.

Vale frisar que não necessariamente todos os elementos do conjunto precisam satisfazer a relação acima para que o conjunto se diga ordenado. Outrossim, uma relação com essas propriedades é denominada uma **relação de ordem**. Se além dessas propriedades a relação de ordem no conjunto K satisfizer:

iv) $x \leq y$ ou $y \leq x$, para todo $x, y \in K$;

diz–se que a ordem é total e K constitui então um conjunto **totalmente ordenado**.

Considerando agora um conjunto ordenado E, e sendo X uma parte de E, diz–se que X é **limitada superiormente** em E quando existe um elemento **a** $\in$ E tal que $x \leq$ **a**, para qualquer que seja $x \in X$. A um tal elemento **a** dá–se o nome de **cota superior** de X em E. Note–se que uma cota superior, quando existe, pode não ser única. Por outro lado, na hipótese de X não possuir nenhuma cota superior, diz–se que X é **ilimitada superiormente** em E.

Admitindo–se que X seja limitada superiormente em E, pode ocorrer que o conjunto não vazio das cotas superiores de X em E tenha um elemento mínimo, isto é, exista uma cota superior **a** de X em E, tal que qualquer outra cota superior **d** de X deva satisfazer : **a** $\leq$ **d**. Neste caso, o elemento mínimo do conjunto das cotas superiores de X em E, que é único, recebe o nome de **supremo** de X em E, sendo representado por **sup** X.

De modo dual, conceitua–se **parte limitada inferiormente**, **cota inferior**, **parte ilimitada inferiormente** e **ínfimo** (**inf** X) de X em E, fazendo–se as modificações duais pertinentes.

Definição 1.1.2. Um conjunto ordenado I é dito **direcionado** quando, para cada $x, y \in I$ existe sempre um $z \in I$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$. Se existe uma aplicação $f : I \longrightarrow N$, com N o conjunto dos naturais, diz–se que o conjunto direcionado I possui cardinalidade enumerável, sendo a cardinalidade de I dada pelo número de elementos do conjunto $f(I) \subseteq N$.

Definição 1.1.3. Sendo I um conjunto direcionado e M um conjunto qualquer, uma **rede** ou **sequência generalizada** é uma aplicação definida no conjunto I, tomando valores em M, isto é: $f : I \longrightarrow M$. O valor que a rede assume em M no ponto $\alpha \in I$ será indicado por f_α. A própria rede é representada por $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Os números naturais constituem o exemplo mais usual de conjunto direcionado, com relação de ordem total dada pelo menor ou igual. Neste caso, a rede torna-se simplesmente uma sequência de elementos de M, com a notação padrão $(f_n)_{n\in N}$. Cabe ressaltar que a sequência generalizada $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ induz no conjunto M uma relação de ordem, tornando-o um conjunto direcionado.

1.2 ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Definição 1.2.1. Considera-se que um conjunto K constitui um **grupo**, quando é possível definir sobre o conjunto uma operação binária, isto é, $K \times K \to K$; $(a, b) \to a \square b \in K$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$;

ii) existe $e \in K$; tal que: $e \square a = a \square e = a$ sendo e denominado elemento identidade;

iii) dado $a \in K$ existe $b \in K$, tal que: $a \square b = b \square a = e$; notando-se b por a^{-1}.

O grupo $(K, \square)$ é dito ser **abeliano** ou **comutativo**, se $a \square b = b \square a$, quaisquer que sejam $a, b \in K$.

Definição 1.2.2. Se num conjunto K pudermos introduzir duas operações binárias $a \square b \in K$ e $a \Delta b \in K$, que possuam as seguintes propriedades para quaisquer $a, b, c \in K$,

i) K é grupo abeliano em relação a $\square$;

ii) $a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c$;

iii) $a \,\Delta\, (b \,\square\, c) = (a \,\Delta\, b) \,\square\, (a \,\Delta\, c)$;

iv) $(a \,\square\, b) \,\Delta\, c = (a \,\Delta\, c) \,\square\, (b \,\Delta\, c)$;

diz–se que $(K, \square, \Delta)$ possui uma **estrutura algébrica de anel**. Se a operação Δ for abeliana o anel é **abeliano** e, quando existe $1 \in K$ tal que $1 \,\Delta\, a = a \,\Delta\, 1$ para todo $a \in K$, o anel é denominado **anel unitário**, sendo 1 a unidade.

Definição 1.2.3. Se K é um anel unitário e $K - \{e\}$ é um grupo com respeito à operação Δ, sendo e o elemento neutro da operação $\square$, diz–se que $(K, \square, \Delta)$ é um **corpo**. Se $(K - \{e\}, \Delta)$ for grupo abeliano, então o **corpo** $(K, \square, \Delta)$ é **comutativo**.

Definição 1.2.4. Um **K–espaço vetorial** $(\mathscr{E}, +, .)$ consiste de um conjunto $\mathscr{E}$, cujos elementos são chamados de **vetores** de um corpo K e que esteja munido das operações binárias $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \Longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathscr{E}$ (adição vetorial) e $(\mathbf{x}, \alpha) \in \mathscr{E} \times K \Longrightarrow \alpha\, \mathbf{x} \in \mathscr{E}$ (multiplicação escalar), com as seguintes propriedades:

i) $(\mathscr{E}, +)$ é grupo abeliano;

ii) $1\, \mathbf{x} = \mathbf{x}$, sendo 1 a unidade em K;

iii) $(\alpha_1 \,\Delta\, \alpha_2)\, \mathbf{x} = \alpha_1 (\alpha_2\, \mathbf{x})$;

iv) $(\alpha_1 \,\square\, \alpha_2)\, \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{x}$;

v) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\, \mathbf{x} + \alpha\, \mathbf{y}$;

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{E}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \in K$.

O elemento neutro da adição vetorial será denotado por ϕ e o inverso de um dado $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$, por $-\mathbf{x}$. Um subconjunto $\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}$ que também seja um K–espaço vetorial, é chamado de um **subespaço vetorial** do K–espaço vetorial $\mathscr{E}$.

Definição 1.2.5. Seja $(\mathbf{x}_\alpha)_{\alpha \in I}$, com I um conjunto direcionado, uma rede de vetores sobre um K–espaço vetorial $\mathscr{E}$. Uma **casca linear** ou **variedade linear** é definida como sendo o conjunto de todas as combinações do tipo $\sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{x}_\alpha$ com $\lambda_\alpha \in$ K. Este conjunto é claramente um subespaço do K–espaço vetorial $\mathscr{E}$.

Se o subespaço gerado pela rede de vetores $(\mathbf{x}_\alpha)_{\alpha \in I}$ coincide com o próprio K–espaço vetorial $\mathscr{E}$, diz–se que $(\mathbf{x}_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma **base**, usualmente chamada de **base de Hamel** do K–espaço vetorial $\mathscr{E}$. De fato, mostra–se que sempre é possível escolher uma rede de vetores tal que a casca linear gerada por ela seja o próprio K–espaço vetorial $\mathscr{E}$. Neste caso a cardinalidade do conjunto dirigido I, é conhecida como a **dimensão algébrica** do espaço vetorial. Entretanto, na maioria dos espaços vetoriais de dimensão infinita o conjunto I é não–enumerável e portanto a base de Hamel é de pouca significação prática.

Definição 1.2.6. Dados dois vetores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in \mathscr{E}$, o conjunto dos vetores $t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2$ com t_1, t_2 reais, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ e $t_1 + t_2 = 1$ é chamado **segmento** com pontos finais $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$. Pontos com $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ são denominados **pontos interiores do segmento.**

Definição 1.2.7. Um subconjunto S de um K–espaço vetorial $\mathscr{E}$ é chamado de **conexo** se, dados quaisquer dois pontos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ (vetores) $\in S \subset \mathscr{E}$, o segmento que os conecta esteja inteiramente contido em S. Por outro lado, considera–se um ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ como **ponto extremo** do conjunto S, se ele não for interior a qualquer segmento em S.

Definição 1.2.8. Um subconjunto $\mathscr{E}^+$ de um K–espaço vetorial $\mathscr{E}$ é denominado um **cone**, se dados quaisquer $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathscr{E}^+ \subset \mathscr{E}$ e λ_1, $\lambda_2 \geq 0$, a combinação linear $(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) \in \mathscr{E}^+$. Se ambos, $\pm\, \mathbf{x} \in \mathscr{E}^+$ então $\mathbf{x} = \phi$, e neste caso o cone $\mathscr{E}^+$ é dito ser **centrado** em ϕ.

O cone $\mathscr{E}^+$ introduz naturalmente uma relação de ordem no K−espaço vetorial $\mathscr{E}$ através da seguinte definição: $\mathbf{x}_1$ é maior ou igual a $\mathbf{x}_2$ ($\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{x}_2$), implica que $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \in \mathscr{E}^+$. Um elemento $\mathbf{x} \in \mathscr{E}^+$ é dito ser **puro** se e somente se, quando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathscr{E}^+$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, então existe λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}$; caso contrário, $\mathbf{x}$ é dito **misturado**.

Proposição 1.2.9. Seja $\mathscr{E}_1$ um dado subespaço do K−espaço vetorial $\mathscr{E}$. Então a relação $\mathbf{x}_1 \mathscr{R}\, \mathbf{x}_2 \iff \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \mathscr{E}_1$ é uma relação de equivalência em $\mathscr{E}$.

Note que a cada $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$, podemos associar o conjunto $\overline{\mathbf{x}} \equiv \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\, \mathbf{y} \in \mathscr{E}_1\}$ referido como a **classe de equivalência** de $\mathbf{x}$ módulo $\mathscr{E}_1$.

Definição 1.2.10. O conjunto constituído pelas classes de equivalência de $\mathbf{x}$ módulo $\mathscr{E}_1$ para todo $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$, notado por $\mathscr{E} / \mathscr{E}_1$, é denominado **espaço quociente** de $\mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_1$.

Observe que o conjunto espaço quociente de $\mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_1$ quando munido das operações,

i) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{v}} \equiv \{(\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{y};\, \mathbf{y} \in \mathscr{E}_1\}$;

ii) $\alpha\overline{\mathbf{x}} \equiv \{\alpha\,(\mathbf{x} + \mathbf{y});\, \mathbf{y} \in \mathscr{E}_1\}$;

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathscr{E} / \mathscr{E}_1$ e $\alpha \in$ K é um K−espaço vetorial, cujo vetor nulo coincide com o próprio $\mathscr{E}_1$.

Definição 1.2.11. Quando sobre um K−espaço vetorial $\mathscr{E}$ pudermos introduzir uma operação $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathbf{x} \square \mathbf{y} \in \mathscr{E}$, que possua as propriedades:

i) $\mathbf{x} \square (\mathbf{y} + \mathbf{v}) = \mathbf{x} \square \mathbf{y} + \mathbf{x} \square \mathbf{v}$;

Desde que uma álgebra $\mathscr{E}$ é primariamente um K−espaço vetorial, podemos definir a sua dimensão algébrica da forma usual. Contudo, como o produto de dois elementos de sua base de Hamel pode ser um outro elemento desta mesma base, somos conduzidos a introduzir o conceito de **conjunto gerador de $\mathscr{E}$**, como sendo o menor conjunto constituído de elementos de sua base de Hamel, que gera, através de produtos e conbinações lineares, todos os elementos da álgebra.

Observe ainda que, um subconjunto $\mathscr{E}_1$ de $\mathscr{E}$ é considerado uma **sub−álgebra**, quando o mesmo for uma álgebra sobre K, com respeito às mesmas operações de $\mathscr{E}$.

Definição 1.2.12. Uma álgebra $\mathscr{E}$ sobre um corpo K é denominada uma **álgebra com involução**, quando for possível definir em $\mathscr{E}$ uma aplicação $\mathbf{x} \in \mathscr{E} \to \mathbf{x}^* \in \mathscr{E}$, referida como involução em $\mathscr{E}$, que tenha as propriedades:

i) $(\mathbf{x}^*)^* = \mathbf{x}$;

ii) $(\mathbf{x} \square \mathbf{y})^* = \mathbf{y}^* \square \mathbf{x}^*$;

iii) $(\alpha\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})^* = \alpha^*\mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{y}^*$;

para quaisquer que sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{E}$, e α, $\lambda \in$ K. Se K fôr o corpo dos reais $\alpha^* = \alpha$, e se K fôr o corpo dos complexos α^* é o complexo conjugado de α. Uma álgebra $\mathscr{E}$ com involução será denominada por ***−álgebra $\mathscr{E}$**. Por sua vez, um sub−conjunto $\mathscr{E}_1$ de $\mathscr{E}$ é dito ser **auto−adjunto** se $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_1 \Longrightarrow \mathbf{x}^* \in \mathscr{E}_1$.

Deste ponto em diante, a não ser quando explicitado, vamos considerar K = C -corpo dos complexos− sempre que estivermos tratando com espaços vetoriais e/ou álgebras. Assim, por exemplo, uma álgebra sobre o corpo dos complexos, será simplesmente chamada de uma álgebra $\mathscr{E}$.

1.3 – ESTRUTURA MÉTRICA

Definição 1.3.1. Em um dado conjunto X, uma **topologia** é uma coleção de sub–conjuntos de X (notada por $\mathscr{N}$), chamados os **abertos da topologia** com as seguintes propriedades:

i) ϕ e $X \in \mathscr{N}$, sendo ϕ o conjunto vazio;

ii) se $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{N} \longrightarrow A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{N}$;

iii) dada uma rede $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ arbitrária, definida sobre $\mathscr{N} \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathscr{N}$.

A partir do conceito de topologia, define–se um **espaço topológico** como sendo um par $(X, \mathscr{N})$, onde X é um dado conjunto e $\mathscr{N}$ é uma topologia em X.

Por sua vez, um espaço topológico $(X, \mathscr{N})$ chama–se **espaço de Hausdorff** quando, para cada par de pontos distintos x e y $\in$ X existem abertos da topologia A_1, A_2, tais que $x \in A_1$, $y \in A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \phi$.

Observe que, dado um conjunto X, é possível introduzir em X várias topologias distintas, transformando–o em espaços topológicos distintos. Considerando que $\mathscr{N}_1$ e $\mathscr{N}_2$ são duas topologias distintas em X, diz–se que $\mathscr{N}_2$ é mais fina (ou mais forte) que $\mathscr{N}_1$ ($\mathscr{N}_1 < \mathscr{N}_2$) quando todos os abertos de $\mathscr{N}_1$, são também abertos de $\mathscr{N}_2$ mas existem abertos de $\mathscr{N}_2$ que não são abertos de $\mathscr{N}_1$.

Definição 1.3.2. Em um dado conjunto X, uma **métrica** é uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow R$, que associa a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in X \times X$, um número real $d(x, y)$ chamado a **distância** entre x e y que satisfaz as condições:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) Se $x \neq y \Longrightarrow d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; para quaisquer que sejam $x, y, z \in X$.

O conceito de métrica permite–nos introduzir a noção de **espaço métrico** como sendo um par (X, d), onde X é um dado conjunto e d uma métrica em X.

Tomando agora um ponto x de um espaço métrico (X, d), podemos introduzir os seguintes conceitos:

a) Uma **bola aberta** de centro em x com raio r, como sendo o conjunto de pontos de X cuja distância ao ponto x é menor que r, ou seja:

$$B(x ; r) = \{y \in X \text{, tal que } d(y ; x) < r\};$$

b) Uma **bola fechada** de centro em x com raio r, como sendo o conjunto formado pelos pontos de X, cuja distância ao ponto x é menor ou igual a r, ou seja:

$$B[x ; r] = \{y \in X \text{, tal que } d(y ; x) \leq r\};$$

c) Uma **esfera** em x com raio r, como sendo a interseção das correspondentes bolas abertas e fechadas ou seja:

$$S(x ; r) = B[x ; r] \cap B(x ; r).$$

Definição 1.3.3. Uma **base de vizinhança** de um ponto x pertencente a um espaço métrico (X, d), é a coleção de todas as bolas abertas de centro em x. Portanto, podemos dizer que um espaço métrico (X, d) possui uma base de vizinhança, quando existe uma base de vizinhança para todo $x \in X$.

Tomando a definição de base de vizinhança, segue diretamente que um espaço métrico (X, d) é um espaço topológico de Hausdorff, com os abertos da topologia sendo o conjunto vazio mais a base de vizinhança do espaço métrico. Esta topologia é dita ser induzida pelas bolas abertas.

É importante frisar, que as seguintes propriedades das bolas abertas,

i) $B(x\,;r_1) \cap B(x\,;r_2) = B(x\,;r_1)$, se $r_1 < r_2$;

ii) Se $y \in B(x\,;r_1) \Longrightarrow$ existe $B(y\,;r) \subset B(x\,;r_1)$, com $r < r_1$;

são, de fato, as responsáveis por induzirem uma topologia no espaço métrico (X, d). Logo, se a cada ponto $x \in (X, d)$ associarmos uma coleção de conjuntos de pontos de X, os quais notamos $Viz(\mathbf{x};\epsilon)$ com ϵ um real positivo que possua as propriedades,

i) $Viz(x\,;\epsilon_1) \cap Viz(x\,;\epsilon_2) = Viz(x\,;\epsilon_1)$, se $\epsilon_1 < \epsilon_2$;

ii) Se, $y \in Viz(x\,;\epsilon) \Longrightarrow$ existe $Viz(y\,;\overline{\epsilon}) \subset Viz(x\,;\epsilon)$, com $\overline{\epsilon} < \epsilon$,

torna-se possível induzir uma topologia no espaço métrico (X, d), considerando como os abertos da topologia as uniões de todos os $Viz(\mathbf{x};\epsilon)$ mais o conjunto vazio. Desta forma, podemos considerar que o conjunto constituído por todos os $Viz(\mathbf{x};\epsilon)$ que possuam as propriedades acima, é também uma base de vizinhança de (X ; d).

Sejam $\{Viz_1(x;\epsilon)\}$ e $\{Viz_2(x;\epsilon)\}$ duas bases de vizinhanças do espaço métrico (X ; d) e sejam $\mathscr{N}_1$ e $\mathscr{N}_2$ as topologias indusidas por elas. Se para cada $Viz_1(x\,;\epsilon)$ existir uma $Viz_2(x\,;\epsilon)$ tal que $Viz_2(x\,;\epsilon) \subset Viz_1(x\,;\epsilon)$, mostra-se que $\mathscr{N}_1 \leq \mathscr{N}_2$, i. é., $\mathscr{N}_2$ é mais fina ou igual a $\mathscr{N}_1$.

Embora na maior parte do trabalho estejamos tratando com espaços métricos, é importante notar que todos os resultados que decorram, de forma direta, do conceito de base de vizinhanças, podem ser generalizados para o caso de espaços topológicos em geral.

Definição 1.3.4. Sejam $(M_1 ; d_1)$ e $(M_2 ; d_2)$ espaços métricos. Diz–se que a aplicação $f : M_1 \to M_2$ é **contínua no ponto $x \in M_1$** quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta_{(\epsilon)} > 0$, tal que, se $d_1(y ; x) < \delta_{(\epsilon)} \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$. Quando a aplicação $f : M_1 \to M_2$ for contínua para todo $x \in M_1$, diz–se simplesmente que ela é contínua .

Definição 1.3.5. Sejam $(M_1 ; d_1)$ e $(M_2 ; d_2)$ espaços métricos. Um **homeomorfismo** de $(M_1 ; d_1)$ sobre $(M_2 ; d_2)$ é uma aplicação bijetora contínua $f : M_1 \longrightarrow M_2$, cuja inversa $f^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ também é contínua. Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços métricos, é usual dizer–se que eles são **homeomorfos.**

A partir da definição de homeomorfismo observa–se que dois espaços métricos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista **topológico**. Diz–se portanto, que uma propriedade de um dado espaço métrico é topológica, quando todo espaço homeomorfo a ele também goza da mesma propriedade.

Um homeomorfismo entre $(M_1 ; d_1)$ e $(M_2 ; d_2)$ é uma **isometria**, se para qualquer $(x ; y)$ pertencente a $M_1 \times M_2$, tivermos que $d_1(x ; y) = d_2\left[f(x) ; f(y)\right]$. As propriedades que são invariantes sobre aplicações isométricas, são chamadas **de propriedades métricas**. Segue então que, desde que toda isometria é um homeomorfismo, toda propriedade métrica é também topológica. Contudo a recíproca não é verdadeira.

Definição 1.3.6. Um subconjunto X de um espaço métrico $(M ; d)$ é dito ser **limitado,** quando existe uma constante $k \in R$, tal que $d(x ; y) \leq k$, para quaisquer $x, y \in X$; neste caso, podemos definir o diâmetro de $X \subset (M ; d)$ como sendo o supremo das cotas susperiores, i. é., a menor das constantes k.

Por sua vez, uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ num espaço métrico $(M ; d)$ é dita **limitada,** quando o conjunto dos seus termos é limitado, i. é., quando existe α real positivo, tal que,

$d(x_n ; x_m) \leq \alpha$, para quaisquer n e m $\in$ N.

Definição 1.3.7. Seja $(x_n)_{n \in N}$ uma sequência em um espaço métrico (M ; d). Diz–se que o ponto x $\in$ (M ; d) é o **limite** da sequência $(x_n)_{n \in N}$ quando, para todo número real $\alpha > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um $n_o \in N$, tal que, $d(x_n ; x) < \alpha$, sempre que $n > n_o$. Neste caso, diz–se também que $(x_n)_{n \in N}$ é **convergente** em (M ; d) e **converge** para x, notando–se $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ ou $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Quando x $\notin$ (M ; d) a sequência é dita divergente em (M ; d).

Dizer que o ponto x $\in$ (M ; d) é o limite da sequência $(x_n)_{n \in N}$ significa afirmar, intuitivamente, que para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam–se e mantêm–se tão próximos de x quanto se deseje.

Definição 1.3.8. Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ em um espaço métrico é denominada **sequência de Cauchy** quando, para qualquer $\alpha > 0$ dado arbitrariamente, existir um inteiro n_o, tal que $d(x_m ; x_n) < \alpha$, para todo m , n > n_o.

Portanto, dizer que uma sequência é de Cauchy, significa que seus termos, para valores suficientemente grandes de m, n, aproximam–se arbitrariamente um do outro. Logo , toda sequência convergente deve ser também sequência de Cauchy. A recíproca naturalmente não é necessariamente verdadeira.

Definição 1.3.9. Um espaço métrico (M ; d) é chamado **completo**, se e somente se, toda sequência de Cauchy convergir para um ponto deste espaço.

Vale frisar que se um espaço métrico não for completo, o que intuitivamente significa que "faltam alguns elementos", é possível completá–lo de uma forma canônica, unívoca, a menos de uma aplicação isométrica.

Para finalizar esta seção vamos empregar o conceito de convergência de sequências em espaços métricos, para definir certos tipos de subconjuntos de um dado espaço métrico (M ; d).

Definição 1.3.10. Seja $S \subset M$, um subconjunto do espaço métrico (M ; d). O **fecho** de S em M denotado por $\overline{S}$ é o conjunto constituído por todos os pontos $x \in M$ que sejam limite de qualquer sequência constituída por pontos de S, sendo $S \subseteq \overline{S}$.

No caso em que $S = \overline{S}$, diz–se que o conjunto S é fechado em M caso contrário, é dito que S é aberto em M.

Definição 1.3.11. Um subconjunto $X \subset M$ do espaço métrico (M ; d) é considerado **denso** quando, qualquer ponto de M é o limite de uma sequência de pontos de X, ou seja, $\forall\, x \in M$ e $\alpha > 0$, dados arbitrariamente, existe uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ de pontos de X, tal que, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$. De forma intuitiva podemos dizer que X "quase preenche" M.

Das definições (1.3.10, 11), temos de imediato que, se o conjunto $X \subset M$ é denso em M, então seu fecho é o próprio M.

Definição 1.3.12. Um subconjunto $X \subset M$ de um espaço métrico (M ; d) é chamado **relativamente compacto** quando, a qualquer sequência dos elementos de X, pudermos associar uma subsequência convergente. Se esta subsequência converge para um elemento $x \in X$, diz–se que X é **compacto**.

De forma imediata temos que, se X for relativamente compacto, o seu fecho é compacto.

1.4 – ESPAÇOS VETORIAIS MÉTRICOS

Nesta seção consideramos conjuntos que possam ser munidos simultaneamente de estruturas métricas e algébricas.

Definição 1.4.1. Um dado conjunto $\mathscr{E}$ é dito ser um **espaço vetorial métrico** quando:

i) $(\mathscr{E}, +, .)$ é um espaço vetorial;

ii) $(\mathscr{E}; d)$ é um espaço métrico;

iii) As operações vetoriais $(\mathscr{E}, +, .)$ são contínuas com respeito a métrica em $(\mathscr{E}; d)$.

Definição 1.4.2. Em um dado espaço vetorial $\mathscr{E}$, uma **norma** em $\mathscr{E}$ é uma aplicação $\| \ \| : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$ o número real $\| \mathbf{x} \|$, tendo as seguintes propriedades:

i) Se $\mathbf{x} \neq 0$ então $\| \mathbf{x} \| \neq 0$;

ii) $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| \mathbf{x} \|$, onde $| \lambda |$ significa o módulo do número complexo λ;

iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

A norma nos permite introduzir o conceito de espaço vetorial **normado**, como sendo o par $(\mathscr{E}, \| \ \|)$, onde $\mathscr{E}$ é um espaço vetorial e $\| \ \|$ é uma norma em $\mathscr{E}$. Além disto, podemos também definir uma distância em $(\mathscr{E}, \| \ \|)$ como $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, a qual transforma o referido espaço vetorial normado em um espaço métrico. É usual denominar–se a métrica induzida pela norma em $(\mathscr{E}, \| \ \|)$, por **topologia uniforme**, sendo a base de vizinhanças de um vetor $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$ dada por:

$$\text{Viz}\,(\mathbf{x}\,;\,\epsilon\,) \equiv \{\mathbf{y} \in \mathscr{E}\,;\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon \ \text{ para todo } \epsilon > 0\ \}.$$

Observe–se ainda que todo espaço vetorial normado é de fato, um espaço vetorial métrico.

Definição 1.4.3. Um **espaço de Banach** é definido como sendo um espaço vetorial normado completo na topologia uniforme.

Definição 1.4.4. Seja $\mathscr{E}$ um espaço vetorial. Uma **forma sesquilinear** sobre $\mathscr{E}$ é uma aplicação $g : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{C}$, que associa a cada par de vetores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, um número complexo $g(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, de modo a serem cumpridas as condições abaixo:

i) $g(\mathbf{x}, \alpha\, \mathbf{y}) = g(\alpha^* \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;

ii) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{v}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathrm{v})$;

iii) $g(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + g(\mathrm{y}, \mathrm{v})$;

quaisquer que sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathscr{E}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

A forma sesquilinear $g: \mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamada **hermitiana** se, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{E}$, temos que $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})^*$. Por sua vez, uma forma sesquilinear hermitiana é dita ser **positiva definida** se $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$. Quando esta forma sesquilinear hermitiana positiva definida sobre $\mathscr{E}$ satisfizer $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \phi \in \mathscr{E}$, é usual denotá–la por $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ e chamá–la de um produto interno em $\mathscr{E}$.

Definição 1.4.5. Um **Espaço Euclidiano** é um par $(\mathscr{E}, (\ |\ ))$, onde $\mathscr{E}$ é um espaço vetorial e $(\ |\ )$ é um produto interno em $\mathscr{E}$. O produto interno em $(\mathscr{E}\ (\ |\ ))$ permite introduzir uma norma em $(\mathscr{E}, (\ |\ ))$ dada por $\|\mathbf{x}\| = +\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$. Então conclui–se que um Espaço Euclidiano é também um espaço métrico.

Proposição 1.4.6. A qualquer espaço vetorial $\mathscr{E}$ munido de uma forma sesquilinear hermitiana positiva definida $g : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow C$, pode–se associar o espaço quociente $\mathscr{E} / \mathscr{E}_o$ com $\mathscr{E}_o \equiv \{\mathbf{x} \in \mathscr{E}$ tal que $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0\}$. Este espaço quando dotado da aplicação $(\overline{x} \mid \overline{y}) = g(x ; y)$, para quaisquer que sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \mathscr{E} / \mathscr{E}_o$, transforma–se em um Espaço Euclidiano.

Definição 1.4.7. Um Espaço Euclidiano que é completo com respeito à topologia uniforme, é denominado **Espaço de Hilbert**.

Observe que, como os espaços vetoriais Normados ou Euclidianos são métricos, eles podem ser completados de forma unívoca (a menos de uma isometria) em Espaços de Banach ou de Hilbert, respectivamente.

Sejam H um espaço de Hilbert e $(\mathbf{x}_n)_{n \in N}$ uma sequência de vetores em H. As $S_n = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n$ com $n \in N$, constituem então somas vetoriais parciais da sequência $(\mathbf{x}_n)_{n \in N}$. Quando existe $\mathbf{x} \in H$ tal que, $\mathbf{x} = \lim_{n \to \infty} S_n$, diz–se que $\mathbf{x}$ é a soma vetorial da série $\sum_n \mathbf{x}_n$. Neste caso, a série $\sum_n \mathbf{x}_n$ é dita ser convergente em H; caso contrário, diz–se que a mesma diverge em H.

Definição 1.4.8. Um espaço de Hilbert H é dito **separável** ou de caráter enumerável, quando existe em H bases de Hamel enumeráveis. Em outras palavras, qualquer que seja $\mathbf{x} \in H$, tem–se que: $\mathbf{x} = \lim_{n \to \infty} S_n$ com $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$, sendo $(\mathbf{b}_n)_{n \in N}$ a referida base. Deste ponto em diante trataremos apenas com Espaços de Hilbert separáveis.

Definição 1.4.9. Dois espaços de Hilbert H_1 e H_2 são **isomorfos (anti–isomorfos)**, quando existe uma aplicação linear (antilinear) bijetora e bicontínua $f : H_1 \longrightarrow H_2$ com as propriedades:

i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$;

ii) $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$; $(f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^{*} f(\mathbf{x}))$;

iii) $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_1 = (f(\mathbf{x})|f(\mathbf{y}))_2$; quaisquer que sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ e $\alpha \in C$.

Segue da definição acima que qualquer espaço de Hilbert H é isomorfo ao $C^N \equiv \underbrace{C \times C \times \ldots \times C}_{n \text{ vezes}}$ quando $\dim H < \infty$, se $\dim H = \infty$ tem–se então que o isomorfismo é com $\mathscr{L}^2(R) \equiv$ {funções complexas de quadrado integrável no sentido de Lebesgue definidas sobre o espaço métrico R}.

1.5 – ESPAÇO DUAL DE ESPAÇOS NORMADOS

Definição 1.5.1. O conjunto de todas as formas lineares contínuas na topologia uniforme, definidas sobre um Espaço de Banach $\mathscr{E}$, é chamado de **espaço dual** de $\mathscr{E}$, sendo usualmente notado por $\mathscr{E}^*$.

Da noção de continuidade sobre Espaço de Banach, tem–se que uma forma linear, $\omega : \mathscr{E} \longrightarrow C$, é contínua, se e somente se, ela é **limitada** ou seja, $\dfrac{|\omega(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} < \infty$, para todo $\mathbf{x} \in \mathscr{E}$.

Proposição 1.5.2. O espaço dual $\mathscr{E}^*$ quando munido das operações:

i) $(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{x}) \equiv \omega_1(\mathbf{x}) + \omega_2(\mathbf{x})$;

ii) $(\alpha\omega_1)(\mathbf{x}) \equiv \alpha\omega_1(\mathbf{x})$;

para quaisquer que sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{E}^*$ e $\alpha \in C$, torna–se um espaço vetorial. Além disso, se introduzirmos em $\mathscr{E}^*$ a norma,

$$\text{iii) } \|\omega\| \equiv \sup\left\{\frac{|\omega(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|}\text{ , para todo } \mathbf{x} \in \mathscr{E}\right\};$$

para todo $\omega \in \mathscr{E}^*$, o espaço dual adquire uma estrutura de Espaço de Banach.

Embora uma caracterização geral do espaço dual $\mathscr{E}^*$ constitua–se em uma delicada questão da análise funcional, no caso particular de $\mathscr{E}$ ser um Espaço de Hilbert, essa caracterização segue diretamente da proposição seguinte.

Proposição 1.5.3. Para todo funcional linear contínuo $\omega : H \longrightarrow C$ sobre um espaço de Hilbert H, existe um único vetor $\mathbf{x}$, tal que:

$$\omega(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{y} \in H.$$

Segue desta proposição que o Espaço de Hilbert H e o seu dual H^* são anti–isomorfos e que $(H^*)^* = H$. Isto justifica a introdução de uma nova notação (notação de Dirac) para os elementos de H e H^*. Nesta notação, um vetor $\mathbf{x} \in H$ é denotado por $|\mathbf{x}\rangle$ e chamado um "**vetor ket**". A forma $\omega_y \in H^*$, anti–isomorfa ao vetor $\mathbf{y} \in H$, é denotada por $\langle\mathbf{y}|$ e chamada um "**vetor bra**". O produto interno $(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ é então notado como $\langle\mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle = \omega_y(\mathbf{x})$.

Observe que deste ponto em diante, utilizaremos a notação padrão ou a notação de Dirac, a depender da conveniência.

1.6 – SOMA DIRETA DE ESPAÇOS DE HILBERT

Proposição 1.6.1. Seja $\{\mathscr{E}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência de Espaços Euclidianos, com produtos internos $(\ |\ )_1, \ldots, (\ |\ )_n, \ldots$, respectivamente. O conjunto de todas as sequências $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots) \in \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2 \times \ldots$ que possuam a propriedade $\sum_k (\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k)_k < \infty$,é um Espaço Euclidiano, usualmente notado por $\bigoplus_k \mathscr{E}_k = \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \oplus \ldots$, e chamado a soma direta de $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ quando dotado das operações:

i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \equiv (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2, \ldots)$;

ii) $\alpha\mathbf{x} \equiv (\alpha\mathbf{x}_1, \alpha\mathbf{x}_2, \ldots)$;

e do produto interno $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \equiv \sum_k (\mathbf{x}_k \mid \mathbf{y}_k)_k$.

Observe que, no caso em que os $\mathscr{E}_k = H_k$ sejam espaços de Hilbert, segue que $\bigoplus_k H_k$ é também um espaço de Hilbert. Além disso, se $\{\mathbf{b}_i^k\ , i = 1, 2, \ldots\}$ é uma base ortonormal de H_k, ou seja, $(\mathbf{b}_i^k | \mathbf{b}_j^k) = \delta_{ij}$, então $\left\{(\mathbf{b}_{i_1}^1\ , \mathbf{b}_{i_2}^2\ , \ldots , \mathbf{b}_{i_n}^n)\ , \text{com } i_i = 1, 2, \ldots\right\}$ é uma base ortonormal de $\bigoplus_k H_k$.

1.7 PRODUTO TENSORIAL DE ESPAÇOS DE HILBERT

De acordo com a Proposição 1.5.2., qualquer Espaço Euclidiano pode ser visto como sendo constituído de formas lineares limitadas definidas sobre um outro Espaço Euclidiano (em verdade o seu dual). Assim sendo, desenvolvemos o conceito de produto tensorial de espaços de Hilbert a partir desta assertiva.

Definição 1.7.1. O conjunto de todas as formas p–lineares limitadas sobre um espaço de Hilbert H (linear em cada um dos seus p–argumentos $\mathbf{x}_i \in H$), é chamado de **potência**

tensorial p–ésima de H* e usualmente notado por $(H^*)^{\otimes p}$. Para p = 1, tem–se $(H^*)^{\otimes 1}$ = H ou seja o conjunto das formas lineares contínuas sobre H.

Proposição 1.7.2. A potência tensorial p–ésima $(H^*)^{\otimes p}$, quando munida
operações,

$$\text{i)} (\omega_1 + \omega_2)(x_1, x_2, \ldots, x_p) \equiv \omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) + \omega_2(x_1, x_2, \ldots, x_p);$$

$$\text{ii)} (\alpha\omega_1)(x_1, x_2, \ldots, x_p) \equiv \alpha\omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_p);$$

para quaisquer que sejam $\omega_1, \omega_2 \in (H^*)^{\otimes p}$ e $\alpha \in C$, torna–se um espaço vetorial. Além disso, existir em $(H^*)^{\otimes p}$ a norma para todo $\omega \in (H^*)^{\otimes p}$ definida por:

$$\text{iii)} \|\omega\| \equiv \operatorname{Sup}\left\{ \frac{|\omega(x_1, x_2, \ldots, x_p)|}{\|x_1\|\,\|x_2\| \ldots \|x_p\|} \quad ; \quad \text{para todo} \quad x_i \in H \right\}$$

a potência tensorial p–ésima de H^* torna–se um espaço de Hilbert.

De forma análoga podemos definir a potência tensorial p–ésima de H, ou seja, H via as formas p–lineares limitadas sobre H^*. Em vista da reciprocidade existe entre H e H^*, temos que $H^{\otimes p}$ é também um espaço de Hilbert. Agora, quando p = 1, $H^{\otimes 1}$
H.

Definição 1.7.3. Sejam $x \in H^{\otimes p}$ e $v \in H^{\otimes q}$. Define–se o **produto tensorial** x
como sendo um elemento de $H^{\otimes p+q}$ dado por:

$$(x \otimes v)(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_{p+q}) \equiv x(\omega_1, \ldots, \omega_p)\, v(\omega_{p+1}, \ldots, \omega_{p+q});$$

com $\omega_i \in H^*$ e i = 1, 2,..., p+q.

Através do conceito de produto tensorial podemos considerar o produto tensorial f–vezes de um espaço de Hilbert H, ou seja, $\bigotimes_{i} H_i = H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_f$, como sendo o conjunto de todas as formas $\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{x}_f$, com $\mathbf{x}_i \in H_i$, definidas por:

$$\{\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{x}_f\}(\omega_1,\omega_2,...,\omega_f) = \mathbf{x}_1(\omega_1)\, \mathbf{x}_2(\omega_2) ... \mathbf{x}_f(\omega_f)$$

com $\omega_i \in H^*$, $i = 1...f$. Contudo, devido ao anti–isomorfismo entre H e o seu dual H^*, podemos considerar as formas f–lineares sobre H^* como formas f–antilineares sobre H, ou seja:

$$\{\mathbf{x}_1 \otimes, ..., \otimes \mathbf{x}_f\}(\omega_1,...,\omega_f) \equiv \{\mathbf{x}_1 \otimes, ..., \otimes \mathbf{x}_f\}\ (\mathbf{y}_{\omega_1}, ..., \mathbf{y}_{\omega_f})$$

$$= \langle \mathbf{y}_{\omega_1} | \mathbf{x}_1 \rangle ... \langle \mathbf{y}_{\omega_f} | \mathbf{x}_f \rangle,$$

sendo $y_i = y_{\omega_i}$ o elemento de H que corresponde (através do anti–isomorismo) à $\omega_i \in H^*$.

Proposição 1.7.4 Tomando **h** como o conjunto das formas f–antilineares sobre H, de ordem finita, i.é., do tipo $\xi = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i\, (\mathbf{x}_1^i \otimes \mathbf{x}_2^i \otimes ... \otimes \mathbf{x}_f^i)$, com $\mathbf{x}_k^i \in H$, se em **h** estiverem definidas as operações:

i) $(\xi_1 + \xi_2)(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_f) = \xi_1\,(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_f) + \xi_2(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_f)$;

ii) $(\alpha\xi_1)(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_f) = \alpha\xi_1(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_f)$;

para quaisquer que sejam $\xi_1, \xi_2 \in \bigotimes_{i} H_i$, $\alpha \in C$ e $\mathbf{y}_i \in H$, **h** torna–se um Espaço Vetorial. Outrossim, tomando a norma de ξ, $\|\xi\|$, como:

$$iii)\ \|\xi\|^2 = \sum_{i,j=1}^{q} \lambda_i^{*} \lambda_j \, (x_1^i | x_1^j)(x_2^i | x_2^j)...(x_f^i | x_f^j);$$

h fica dotado de uma estrutura de Espaço Euclidiano. Este quando completado é identifica como o $H^{\otimes f}$, a f–ésima potência tensorial de H.

Vale a pena frisar que, se $\{b_i \ ; \ i = 1,2,...\}$ é uma base ortogonal de H entã conjunto constituído pelos $b_{i_1 i_2 \cdots i_f} \equiv b_{i_1} \otimes b_{i_2} \otimes ... \otimes b_{i_f}$ com $i_1, i_2, ..., i_f = 1, 2, ...$ é uma b ortogonal para $H^{\otimes f}$. Portanto, um elemento qualquer $\xi \in H^{\otimes f}$ pode ser escrito como:

$$\xi = \sum_{i_1, \dots, i_f} \xi_{\, i_1, \dots, i_f} \left[b_{i_1} \otimes b_{i_2} \otimes .... \otimes b_{i_f} \right]$$

com as componentes $\xi_{i_1, ... i_f}$ dadas por,

$$\xi_{i_1, ..., i_f} \equiv \xi(b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_f}).$$

Por fim, ressaltamos que se considera $H^{\otimes 0} = C$. Em particular, d $\alpha \in H^{\otimes 0}$ e $\xi \in H^{\otimes f}$, define–se o produto tensorial de α por ξ ou de ξ por α, como o produt vetor ξ pelo escalar α, ou seja, $\alpha \otimes \xi = \xi \otimes \alpha \equiv \alpha \, \xi$.

1.8 – OPERADORES SOBRE ESPAÇOS DE HILBERT

Definição 1.8.1. Um operador linear $\hat{T}$ sobre um espaço de Hilbert H, é aplicação linear de um subespaço $D(\hat{T})$, chamado o **domínio de definição** de $\hat{T}$, sobre H. S outro operador linear $\hat{B}$, definido sobre $D(\hat{B}) \supset D(\hat{T})$, coincide com $\hat{T}$ sobre $D(\hat{T})$,

$\hat{B}(\mathbf{x}) = \hat{T}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D(\hat{T})$, então $\hat{B}$ é chamado uma **extensão** de $\hat{T}$, notando-se $\hat{T} \subseteq$ Quándo o domínio de definição de $\hat{T}$ for um subconjunto denso de H diz-se que $\hat{T}$ **densamente** definido.

Como no caso das formas lineares sobre espaço de Hilbert, tem-se que um opera linear é contínuo, se e somente se, ele for limitado, ou seja, $\frac{\|\hat{T}\ (\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} < \infty$ p todo $\mathbf{x} \in D(\hat{T})$. Além disso, mostra-se que o mesmo, quando densamente definido, possui u única extensão contínua sobre H. Neste sentido, vamos considerar o domínio dos definição operadores lineares limitados como sendo o próprio H.

Proposição 1.8.2. $\mathscr{L}(H)$, o conjunto de todos os operadores lineares limita definidos sobre H, quando dotado das operações,

i) $(\hat{T}_1 + \hat{T}_2)(\mathbf{x}) \equiv \hat{T}_1(\mathbf{x}) + \hat{T}_2(\mathbf{x})$;
ii) $(\alpha\, \hat{T}_1)(\mathbf{x}) \equiv \alpha\, \hat{T}_1(\mathbf{x})$;

para quaisquer que seja $\hat{T}_1$ e $\hat{T}_2 \in \mathscr{L}(H)$, $\alpha \in C$ e tendo como norma

iii) $\|\hat{T}\| \equiv \sup \left\{ \frac{\|\hat{T}_1\ (\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}\quad ,\ \text{para todo } \mathbf{x} \in H \right\}$, para todo $\hat{T} \in \mathscr{L}(H)$.

possui uma estrutura de espaço de Banach.

Definição 1.8.3. Um operador linear $\hat{T} : H \longrightarrow H$ é denominado **compacto** quan relaciona subconjuntos limitados de H, com subconjuntos relativamente compactos.

Observe que, embora todo operador compacto seja limitado, a reciproca r verdadeira. Isto pode ser percebido facilmente se considerarmos o operador identidade 1, $(1 \,.\, \hat{T} = \hat{T}.\, 1$, qualquer que seja $\hat{T}$ limitado), que é limitado mas não é compacto.

Proposição 1.8.4. Seja $\mathscr{CL}(H) \subset \mathscr{L}(H)$, o conjunto de todos os operadores compactos sobre o espaço de Hilbert H. Segue então que:

i) $\mathscr{CL}(H)$ é um subespaço de Banach do espaço de Banach $\mathscr{L}(H)$;

ii) Se $\hat{A} \in \mathscr{L}(H)$, então $\hat{A}\hat{T}$ e $\hat{T}\hat{A}$, para qualquer $\hat{T} \in \mathscr{CL}(H)$, pertencem a $\mathscr{CL}(H)$.

Definição 1.8.5. Sendo $\hat{T}$ um operador limitado sobre o espaço de Hilbert H define-se o **operador adjunto** de $\hat{T}$ como o único operador limitado $\hat{T}^{\dagger} : H \longrightarrow H$, ta que $(\hat{T}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \mid \hat{T}^{\dagger}(\mathbf{y}))$. Quando $\hat{T}^{\dagger} = \hat{T}$, diz-se que o operador $\hat{T}$ é **auto-adjunto** (o hermitiano).

Segue desta definição que a operação de tomar o adjunto de operadores linear limitados, corresponde a uma involução em $\mathscr{L}(H)$. Note-se ainda, que o próprio subconjun $\mathscr{CL}(H)$, é fechado com relação a esta involução, ou seja, o adjunto de um operador compac é também um operador compacto.

Proposição 1.8.6. Tomando $\mathscr{R}(H) \subset \mathscr{L}(H)$ como sendo o conjunto constituído todos os operadores auto-adjuntos de $\mathscr{L}(H)$, tem-se que:

i) $\mathscr{R}(H)$ é um espaço de Banach sobre o corpo dos reais, com respeito à topol uniforme;

ii) $\mathscr{R}(H)$ é por definição fechado com relação à operação de tomar o adjunto.

Definição 1.8.7. Um operador linear $\hat{T} : H \longrightarrow H$ é chamado de **classe traço** quan série $\sum_i (b_i \mid \hat{T}(b_i))$ convergir para um dado valor, independente da base ortonormal $\{b_i \, ; \, i = 1, 2, ...\}$ de H, empregada. Neste caso, $\sum_i (b_i \mid \hat{T}(b_i))$ é chamado de **traço** operador $\hat{T}$.

Proposição 1.8.8. Considerando $\mathscr{L}_1(H)$ como sendo o conjunto de todos operadores classe traço sobre H, tem–se que:

i) embora $\mathscr{L}_1(H)$ seja um subespaço vetorial de $\mathscr{CL}(H)$, quando completado segundo a topologia uniforme, ele se torna o próprio $\mathscr{CL}(H)$, ou seja, $\mathscr{L}_1(H)$ é denso em $\mathscr{CL}(H)$ com respeito à topologia uniforme;

ii) se $\hat{A} \in \mathscr{L}(H)$, então $\hat{A}\hat{T}$ e $\hat{T}\hat{A}$, para qualquer $\hat{T} \in \mathscr{L}_1(H)$ pertencem a $\mathscr{L}_1$(H

Segue da definição (1.8.7) que $\|\hat{T}\| \equiv \text{traço} \sqrt{\hat{T}^\dagger \hat{T}}$ pode ser visto como uma n em $\mathscr{L}_1(H)$, denominada **norma traço**. E então, $\mathscr{L}_1(H)$ quando completado segun topologia induzida pela norma traço, adquire uma estrutura de espaço de Banach. Note q (H) é também fechado, com relação a operação de tomar o adjunto.

Definição 1.8.9. Um operador linear $\hat{T} : H \longrightarrow H$, é dito ser de **Hilbert–Schmidt** somente se, $\hat{T}^\dagger \hat{T}$ for de classe traço.

De acordo com esta definição e segundo as propriedades dos operadores de traço, observa–se que todo operador classe traço é também de Hilbert–Schmidt; a recí entretanto, não é verdadeira. De forma natural pode–se introduzir no conjunto $\mathscr{L}$ constituído por todos os operadores de Hilbert–Schmidt, um produto i dado por : $(\hat{T}_1 | \hat{T}_2)_2 \equiv \text{traço } \hat{T}_1^\dagger \hat{T}_2$, para quaisquer que sejam $T_1, T_2 \in \mathscr{L}_2(H)$.

Proposição 1.8.10. Considerando $\mathscr{L}_2(H)$, tem–se que:

i)de forma similar a $\mathscr{L}_1(H)$, o conjunto $\mathscr{L}_2(H)$ é também denso em $\mathscr{CL}(H)$, com respeito à topologia uniforme;

ii) se $\hat{A} \in \mathscr{L}(H)$, então $\hat{A}\hat{T}$ e $\hat{T}\hat{A}$, para qualquer $\hat{T} \in \mathscr{L}_2(H)$, pertencem a $\mathscr{L}_2(H)$;

iii) $\mathscr{L}_2(H)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por $(\hat{T}_1 \mid \hat{T}_2)_2$, para qualquer T_1, $T_2 \in \mathscr{L}_2(H)$;

iv) $\mathscr{L}_2(H)$ é fechado com relação a operação de tomar o adjunto.

Definição 1.8.11. Seja $\{\hat{A}_n\}_{n\in N}$ uma sequência de operadores lineares atuando sobr a sequência $\{H_n\}_{n\in N}$ de espaços de Hilbert, de forma tal que cada $\hat{A}_n$ atue no correspondent H_n, ou seja, $\hat{A}_n : H_n \longrightarrow H_n$. A **soma direta** destes operadores $\hat{A} = \bigoplus_n \hat{A}_n$, é um operado linear atuando sobre a soma direta dos espaços de Hilbert H_n, i. é., $\hat{A}_n : \bigoplus_n H_n \longrightarrow \bigoplus_n H_n$ definido como:

$$\hat{A}\Big[(x_1,\ldots, x_n)\Big] \equiv \Big[\hat{A}_1(x_1),\ldots, \hat{A}_n(x_n)\Big].$$

Proposição 1.8.12. O operador soma direta $\hat{A} = \bigoplus_n \hat{A}_n$, será de classe traço, Hilbert–Schmidt, compacto ou limitado, caso a sequência $\{A_n\}$, $n \in N$, seja constituída ɪ operadores lineares de classe traço de Hilbert–Schmidt, compactos ou limitad respectivamente.

Definição 1.8.13. Seja $\hat{A}_1, \hat{A}_2,\ldots, \hat{A}_n$, operadores lineares atuando respectivame sobre os espaços de Hilbert $H_1, H_2,\ldots, H_n$. O **produto tensorial** (ou produto de Kronec destes operadores, $\hat{A} = \bigotimes_i \hat{A}_i$, é um operador linear atuando sobre o produto tensorial espaços de Hilbert H_i, i.é., $\hat{A} : \bigotimes_i H_i \longrightarrow \bigotimes_i H_i$:

$$(\hat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \equiv \hat{A}_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \hat{A}_n(x_n)$$

Proposição 1.8.14. O operador produto tensorial $\hat{A} = \bigotimes_i \hat{A}_i$, será de classe traço, Hilbert–Schmidt, compacto ou limitado, caso os $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n$, sejam operadores lineares classe traço de Hilbert–Schmidt, compactos ou limitados, respectivamente.

Ao finalizar esta secção é interessante notar que, quando a dimensão do espaço Hilbert é finita, os vários conjuntos de operadores introduzidos são iguais, $\mathscr{L}(H) = \mathscr{C}\mathscr{L}(H) = \mathscr{L}_2(H) = \mathscr{L}_1(H)$.

1.9 – TOPOLOGIA SOBRE CONJUNTOS DE OPERADORES LIMITADOS

Como vimos na secção anterior, a um dado subespaço vetorial de $\mathscr{L}(H)$ po corresponder estruturas diversas, a depender da topologia empregada para completarm conjunto. Com a finalidade de obtermos maior clareza no que tange às relações exist entre os espaços vetoriais métricos de operadores $\mathscr{L}(H)$, $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)$, $\mathscr{L}_2(H)$ e $\mathscr{L}_1(H)$, v discorrer sobre algumas topologias que podem ser introduzidas sobre conjuntos de opera limitados.

Além da usual topologia uniforme, podemos introduzir sobre $\mathscr{L}(H)$, dentre outr seguintes topologias:

a) **Topologia forte**, cuja base de vizinhança de um elemento $\hat{T} \in \mathscr{L}($

$\text{Viz}(\hat{T}, \epsilon ; F \subset H) \equiv \{\hat{S} \in \mathscr{L}(H), \text{ tal que } \|(\hat{S} - \hat{T})(x)\| < \epsilon, \text{ para todo } x \in F\}$, sendo $F \subset H$, um subconjunto finito de H, e $\epsilon > 0$;

b) **Topologia fraca**, cuja base de vizinhança de um elemento $\hat{T} \in \mathscr{L}(H)$ é $\text{Viz}(\hat{T}, \epsilon; S) \equiv \{\hat{S} \in \mathscr{L}(H), \text{ tal que } |(x_i|(\hat{S} - \hat{T})\, y_i)| < \epsilon \text{ para todo } x_i, y_i \in S\}$, onde S é um conjunto finito de pares de vetores de H, e $\epsilon > 0$.

Sendo $\mathscr{N}_1$, $\mathscr{N}_2$, $\mathscr{N}_3$ as topologias uniforme, forte e fraca, respectivamente, observa–se pela análise de suas bases de vizinhança que elas se relacionam da seguinte forma: $\mathscr{N}_1 > \mathscr{N}_2 > \mathscr{N}_3$.

Definição 1.9.1. Um operador limitado $\hat{T} : H \longrightarrow H$ é dito ser **não–degenerado** ou de **posto finito**, quando $D(\hat{T})$ é um subespaço vetorial de H com dimensão finita.

Observe que todo operador de posto finito é simultaneamente compacto, de Hilbert–Schmidt e de classe traço; assim, além das topologias $\mathscr{N}_1$, $\mathscr{N}_2$, $\mathscr{N}_3$, podemos introduzir sobre o conjunto M constituído por todos estes operadores, as topologias $\mathscr{N}_{\|\ \|_1}$ e $\mathscr{N}_{\|\ \|_2}$, induzidas respectivamente pela norma traço e pelo produto interno de Hilbert–Schmidt.

Proposição 1.9.2. O subconjunto constituído pelos operadores de posto finito $M \subset \mathscr{L}(H)$, além de ser um subespaço vetorial de $\mathscr{L}(H)$, possui as seguintes propriedades:

i) M é denso em $\mathscr{L}(H)$ com respeito à topologia fraca, i.é., $\overline{M}^{\mathscr{N}_3} = \mathscr{L}(H)$;

ii) M é denso em $\mathscr{CL}(H)$ com respeito à topologia uniforme, i. é., $\overline{M}^{\mathscr{N}_1} = \mathscr{CL}(H)$;

iii) M é denso em $\mathscr{L}_2(H)$ com respeito à topologia de Hilbert–Schmidt, i. é., $\overline{M}^{\underline{\mathscr{N}}_2} = \mathscr{L}_2(H)$, sendo $\underline{\mathscr{N}}_2 \equiv \mathscr{N}_{\|\ \|_2}$;

iv) M é denso em $\mathscr{L}$(H) com respeito à topologia de norma traço, i, é.,

$$\overline{\mathrm{M}}^{\mathscr{N}_1} = \mathscr{L}_1(\mathrm{H}) \text{ , sendo } \mathscr{N}_1 \equiv \mathscr{N}_{\| \|_1}.$$

Finalizando este Capítulo é importante observar que, a qualquer operador linear limitado $\hat{T} \in \mathscr{L}(H)$, pode-se associar, univocamente, uma forma linear contínua segundo a topologia uniforme sobre $\mathscr{L}_1(H)$, dada por:

$$\omega_{\hat{T}}(\hat{A}) \equiv \text{traço } \hat{T}\,\hat{A} \quad , \quad \forall\, \hat{A} \in \mathscr{L}_1(\mathrm{H}).$$

Portanto, pode-se identificar $\mathscr{L}(H)$ como $(\mathscr{L}_1(H))^*$, ou seja, $\mathscr{L}(H)$ pode ser identificado como o dual de $\mathscr{L}_1(H)$.

CAPÍTULO II

REALIZAÇÕES LINEARES DE C^*–ÁLGEBRAS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos, também de forma sucinta, os principais elementos da Teoria Abstrata de C^*–álgebras, dando ênfase às suas representações lineares. Sempre que possível, ilustramos a teoria com exemplos de álgebras de operadores limitados, atuando sobre espaços de Hilbert. Observe–se que em todo o Capítulo usaremos $\square$ para representar o produto nas C^*–álgebras e utilizaremos como textos básicos para as definições e proposições as referências [18, 19, 56, 63, 64, 65].

2.1. CONCEITOS BÁSICOS

Definição 2.1.1. Uma álgebra associativa $\mathscr{E}$ é dita ser **normada** quando, para todo $A \in \mathscr{E}$, pode–se definir uma norma $\| \ \|$ que satisfaz:

$$\| A \square B \| \leq \| A \| \ \| B \|;$$

quaisquer que sejam $A, B \in \mathscr{E}$. Quando $\mathscr{E}$ for completa com respeito a esta norma, diz–se que $\mathscr{E}$ é uma **álgebra de Banach**. Além disto, se $\mathscr{E}$ for munido de uma involução, tal que $\| A \| = \| A^* \|$ para todo $A \in \mathscr{E}$, a álgebra de Banach $\mathscr{E}$ é dita ser uma **B^*–álgebra.**

Exemplo 2.1.a: Como vimos na Proposição 1.6.8, $\mathscr{L}_1(H)$ é um espaço de Banach, com involução. Definindo o produto em $\mathscr{L}_1(H)$ como $(\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2)(\mathbf{x}) = \hat{T}_1(\hat{T}_2(\mathbf{x}))$, quaisquer que sejam $\hat{T}_1, \hat{T}_2 \in \mathscr{L}_1(H)$ e $\mathbf{x} \in H$, segue que $\| \hat{T}_1 \hat{T}_2 \|_1 \leq \| \hat{T}_1 \|_1 \| \hat{T}_2 \|_1$ e $\|\hat{T}_1\|_1 = \|\hat{T}_1\|_1$. Portanto, $\mathscr{L}_1(H)$ é um exemplo de uma B^*–álgebra.

Definição 2.1.2. Uma B^*–álgebra $\mathscr{B}$, recebe o nome de **C^*–álgebra**, quando possui a propriedade:

$$\| A \square A^* \| = \| A \|^2 \text{ ; para todo } A \in \mathscr{B}.$$

Exemplo 2.1.b: Segundo a Proposição 1.8.2., $\mathscr{L}(H)$ é um espaço de Banach com involução. Tomando o produto entre seus elementos da forma usual (idêntica a considerada em $\mathscr{L}_1(H)$), mostra–se que $\mathscr{L}(H)$ é um exemplo de uma C^*–álgebra. Observe–se que a norma considerada em $\mathscr{L}(H)$ é distinta daquela em $\mathscr{L}_1(H)$.

Exemplo 2.1.c: Segue diretamente do Exemplo 2.1.a que, $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)$ é uma C^*–sub–álgebra de $\mathscr{L}(H)$. Note contudo que $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)$ não possui a identidade, embora $\mathscr{L}(H)$ possua.

Os exemplos acima mostram que, mesmo quando uma C^*–álgebra $\mathscr{B}$ possui identidade, podem existir sub–álgebras que não a possuam. Contudo, vale a pena ressaltar que existem procedimentos canônicos que permitem reduzir o estudo das C^*–álgebras sem identidade ao daquelas com identidade. Sendo assim, de agora em diante, suporemos que as C^*–álgebras estudadas possuem identidade.

Definição 2.1.3. Uma **álgebra de von Neumann** $\mathscr{B}$ ou W^*–álgebra, é uma C^*–álgebra com identidade, que pode ser vista como o dual de algum espaço de Banach.

Exemplo 2.1.d: De acordo com o último parágrafo do primeiro capítulo, tem–se que a C^*–álgebra $\mathscr{L}(H)$ pode ser vista como o dual de $\mathscr{L}_1(H)$, sendo portanto, um exemplo de W^*–álgebra. Observe que o mesmo não ocorre com a C^*–álgebra $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)$.

Definição 2.1.4. Uma **álgebra de Hilbert** $\mathscr{B}$ ou H^*–álgebra, é uma B^*–álgebra cuja norma é induzida por um produto interno que possui as seguintes propriedades:

$$\text{i) } (A \mid B) = (B^{*} \mid A^{*});$$

$$\text{ii) } (A \,\square\, B \mid C) = (B \mid A^{*} \,\square\, C);$$

quaisquer que sejam A, B, C $\in \mathscr{E}$.

Exemplo 2.1.e: Pela Proposição 1.8.10, $\mathscr{L}_2$ (H) é um espaço de Hilbert com involução. Considerando o produto igual ao dos exemplos anteriores (produto usual entre operadores), tem-se de imediato que $\mathscr{L}_2$(H) é um exemplo de H^{*}-álgebra.

Sejam $\mathscr{L}_2$ (H_1), $\mathscr{L}_2$ (H_2),... $\mathscr{L}_2$ (H_n), álgebras de Hilbert-Schmidt de operadores lineares limitados atuando respectivamente sobre os espaços de Hilbert H_1, H_2,... H_n. Segundo o Exemplo 2.1.e. da Definição 2.1.4., os $\mathscr{L}_2$ (H) são, em primeiro lugar, espaços de Hilbert, e portanto, em virtude das Proposições 1.6.1., 1.8.11 e 1.8.12., a soma direta $\bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i)$, é um espaço de Hilbert, constituido pelos operadores lineares de Hilbert-Schmidt $\hat{A} = \bigoplus_i \hat{A}_i$ com $\hat{A}_i \in \mathscr{L}_2(H_i)$, e com produto interno dado por:

$$(\hat{A} \mid \hat{B}) \equiv \sum_i (\hat{A}_i \mid \hat{B}_i) \quad , \quad \text{para todo } \hat{A}, \hat{B} \in \bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i).$$

Definição 2.1.5. Considerando $\hat{A}$, $\hat{B}$, como sendo dois elementos quaisquer de $\bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i)$, define-se o **produto** e a operação de tomar o **adjunto**, por:

$$\text{1) } \hat{A}.\hat{B} \equiv \hat{A}_1.\hat{B}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{A}_n.\hat{B}_n \ \ (\text{produto});$$

$$2)\ \hat{A}^\dagger \equiv \hat{A}_1^\dagger \oplus \hat{A}_2^\dagger \oplus \ldots \hat{A}_n^\dagger.$$

Proposição 2.1.6. O espaço de Hilbert $\bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i)$, quando munido das operações produto e tomar o adjunto, dadas acima, adquire uma estrutura de álgebra de Hilbert–Schmidt de operadores atuando em $\bigoplus_i H_i$, chamada de soma direta das álgebras de Hilbert–Schmidt $\mathscr{L}_2(H_1)$, $\mathscr{L}_2(H_2)$,... $\mathscr{L}_2(H_n)$.

Demonstração: É suficiente que demonstremos as propriedades (i), (ii), da Definição 2.1.4. desde que $\bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i)$ é diretamente, por sua definição, uma álgebra de operadores com involução. Tomando então o produto interno de $\hat{A}^\dagger$, $\hat{B}^\dagger \in \bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i)$, i, é.

$$(\hat{A}^\dagger|\hat{B}^\dagger) = \sum_i (\hat{A}_i^\dagger|\hat{B}_i^\dagger) ;$$

e considerando que os $\mathscr{L}_2(H_i)$ são álgebras de Hilbert–Schmidt, ou seja,

$$(\hat{A}_i^\dagger \mid \hat{B}_i^\dagger) = (\hat{B}_i|\hat{A}_i),$$

podemos reescrever $(\hat{A}^\dagger|\hat{B}^\dagger)$ como:

$$(\hat{A}^\dagger|\hat{B}^\dagger) = \sum_i (\hat{B}_i|\hat{A}_i).$$

Logo, usando a definição de produto interno em $\bigoplus_i \mathscr{L}_2(H_i)$ temos $(\hat{A}^\dagger|\hat{B}^\dagger) = (\hat{B}|\hat{A})$; e portanto, a propriedade (i) da Definição 2.1.4. está demonstrada. Por sua vez a propriedade

(ii) segue diretamente via o mesmo procedimento. C.Q.D.

Consideremos o produto tensorial de $\mathscr{L}_2$ (H_1), $\mathscr{L}_2$ $(H_2),\ldots,\mathscr{L}_2$ (H_n), i. é., $\bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$. De acordo com as Proposições 1.7.4., 1.8.13 e 1.8.14, o produto tensorial $\bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$, é um espaço de Hilbert constituído pelos operadores lineares de Hilbert–Schmidt $\hat{A} = \bigotimes_i \hat{A}_i$, $\hat{A}_i \in \mathscr{L}_2(H_i)$ e com produto interno dado por:

$$(\hat{A}|\hat{B}) = \prod_{i=1}^{n}{}' (\hat{A}_i|\hat{B}_i)_i;$$

para quaisquer que sejam $\hat{A}, \hat{B} \in \bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$.

Definição 2.1.7. Sendo $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dois elementos quaisquer de $\bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$, define–se o **produto** e a operação de tomar o **adjunto**, por:

$$\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}_1^{\dagger} \otimes \ldots \otimes \hat{A}_n^{\dagger};$$

$$\hat{A}\,\hat{B} = \hat{A}_1\,\hat{B}_1 \otimes \ldots \otimes \hat{A}_n\,\hat{B}_n;$$

para quaisquer $\hat{A}$ e $\hat{B} \in \bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$.

Proposição 2.1.8. O espaço de Hilbert $\bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$ quando munido das operações produto e tomar o adjunto, dadas acima, adquire uma estrutura de álgebra de Hilbert–Shcmidt de operadores atuando em $\bigotimes_i H_i$, chamada de produto tensorial das álgebras de Hilbert–Schmidt $\mathscr{L}_2(H_1)$, $\mathscr{L}_2(H_2)\ldots$ $\mathscr{L}_2(H_n)$.

Demonstração: Como no caso da Proposição 2.1.6, é suficiente que demonstremos as propriedades especiais que o produto interno em $\bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$ deve satisfazer, quais sejam, (i) e (ii) da Definição 2.1.4.. Tomando então o produto interno de $\hat{A}\,\hat{B}$ por $\hat{C}$, ou seja,

$$(\hat{A}\hat{B}|\hat{C}) = \prod_{i=1}^{n}{}' (\hat{A}_i\,\hat{B}_i|\hat{C}_i);$$

e considerando que os $\mathscr{L}_2(H_i)$ são álgebras de Hilbert–Schmidt i.é,

$$(\hat{A}_i\,\hat{B}_i|\hat{C}_i) = (\hat{B}_i|\hat{A}_i^{\dagger}\,\hat{C}_i);$$

podemos reescrever $(\hat{A}\hat{B}|\hat{C})$, como:

$$(\hat{A}\hat{B}|\hat{C}) = \prod_{i=1}^{n}{}' (\hat{B}_i|\hat{A}_i^{\dagger}\,\hat{C}_i).$$

Logo, usando a definição do produto interno no produto tensorial, $\bigotimes_i \mathscr{L}_2(H_i)$, temos:

$$(\hat{A}\hat{B}|\hat{C}) = (\hat{B}|\hat{A}^{\dagger}\hat{C});$$

e portanto, a propriedade (ii) da Definição 2.1.4. está demonstrada. Por sua vez, a propriedade (i), segue diretamente via um procedimento similar. C. Q. D.

Passemos agora a considerar as álgebras de von Neumann $M_1 \subset \mathscr{L}(H_1),\ldots,M_n \subset \mathscr{L}(H_n)$. De forma similar ao caso das álgebras de Hilbert–Schmidt, pode–se definir a soma direta $\bigoplus_i M_i$ e o produto tensorial $\bigotimes_i M_i$, que naturalmente são também espaços vetoriais. Além disso, pode–se transformar estes espaços vetoriais de operadores limitados em álgebra com involução, tomando–se as operações produto e involução como dados na Definição 2.1.5., para a soma direta e na Definição 2.1.7. para o produto tensorial.

Deve–se notar que as álgebras com involução, soma direta $\bigoplus_i M_i$ e o produto tensorial $\bigotimes_i M_i$, são respectivamente sub–álgebras de $\mathscr{L}(\bigoplus_i H_i)$ e $\mathscr{L}(\bigotimes_i H_i)$.

Proposição 2.1.9. O fecho na topologia fraca de $\mathscr{L}(\bigoplus_i H_i)$ da *–álgebra de operadores $\bigoplus_i M_i$, é uma álgebra de von Neumann de operadores limitados atuando sobre $\bigoplus_i H_i$, chamada a soma direta das álgebras de von Neumann $M_1,\ldots, M_n$.

Proposição 2.1.10. O fecho na topologia fraca de $\mathscr{L}(\bigotimes_i H_i)$ da *–álgebra de operadores $\bigotimes_i M_i$, é uma álgebra de von Neumann de operadores limitados atuando sobre $\bigotimes_i H_i$, chamada de produto tensorial das álgebras de von Neumann $M_1,\ldots, M_n$.

Demonstração: A demonstração destas duas últimas proposições é imediata, em virtude da Proposição 2.3.9. C.Q.D.

Sendo os $M_i \subset \mathscr{L}(H_i)$ C^*–álgebras de operadores limitados, se seguirmos os mesmos passos utilizados no caso de álgebra de von Neumann, podemos construir as *–álgebras de operadores limitados $\bigoplus_i M_i$ e $\bigotimes_i M_i$, que atuam respectivamente sobre $\bigoplus_i H_i$ e $\bigotimes_{i=1}^{n} H_i$.

Proposição 2.1.11. O fecho na topologia uniforme de $\mathscr{L}(\bigoplus_i H_i)$ da *–álgebra de operadores $\bigoplus_i M_i$ é uma C^*–álgebra de operadores limitados atuando sobre $\bigoplus_i H_i$, chamada a soma direta das C *–álgebras $M_1, \ldots, M_n$.

Prposição 2.1.12. O fecho na topologia uniforme de $\mathscr{L}(\bigotimes_i H_i)$ da *–álgebra de operadores $\bigotimes_i M_i$ é uma C *–álgebra de operadores limitados, atuando sobre $\bigotimes_i H_i$, chamada de produto tensorial das C *–álgebras $M_1, \ldots, M_n$.

Demonstração: Como as demonstrações das proposições 2.1.6 e 2.1.7 estas também são imediatas. C.Q.D.

Definição 2.1.13. Seja $\mathscr{E}$ uma C^*–álgebra. Um elemento $A \in \mathscr{E}$ é dito ser **inversível** quando existe $B \in \mathscr{E}$, notado por A^{-1}, tal que $A \square A^{-1} = A^{-1} \square A = 1$.

Segue de forma imediata que, se A e B $\in \mathscr{E}$ forem inversíveis, então :

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}\ (A^{-1})^{-1} = A; \\
&\text{ii)}\ (A \square B)^{-1} = B^{-1} \square A^{-1}; \\
&\text{iii)}\ (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.
\end{aligned}
$$

Definição 2.1.14. O **conjunto resolvente** $\sigma(A)$ de um elemento A pertencente a C^*–álgebra $\mathscr{E}$, é definido como sendo o conjunto dos $Z \in C$, tal que $(A - Z\,1)$ é inversível. Por sua vez o conjunto complementar $sp(A) \equiv C - \sigma(A)$ é usualmente referido como o espectro de A.

Proposição 2.1.15 Tomando–se $\mathscr{E}$ como sendo uma C^*–álgebra, tem–se que:

i) $sp(Z\,1 - A) = Z - sp(A)$;

ii) $sp(A^*) = sp(A)^*$;

iii) $sp(A^{-1}) = sp(A)^{-1}$;

iv) $sp(A \square B) \cup \{0\} = sp(B \square A) \cup \{0\}$;

para quaisquer A, B, $\in \mathscr{E}$ e $Z \in C$ sendo Z^{*} o complexo conjugado de Z.

Com a Proposição 2.1.7., pode–se caracterizar, de uma forma geral, o espectro de certas classes especiais de elementos de uma C^{*}–álgebra. Assim, um elemento $A \in \mathscr{E}$ **auto–adjunto**, i. é., $A = A^{*}$ possui espectro contido no corpo dos reais, enquanto um $A \in \mathscr{E}$ **unitário** i. é., $A^{*} \square A = A \square A^{*} = 1$ tem como espectro $sp(A) \subseteq \{Z; Z \in C, |Z| = 1\}$.

Proposição 2.1.16. $\mathscr{R}(\mathscr{E})$, o conjunto constituído de todos os elementos auto–adjuntos de uma C^{*}–álgebra $\mathscr{E}$, possui uma estrutura de espaço de Banach sobre os reais com respeito a norma de $\mathscr{E}$.

Exemplo 2.1.f. Segundo a Proposição 1.3.6., o conjunto dos operadores auto–adjuntos sobre H, $\mathscr{R}(H) \subset \mathscr{L}(H)$ é claramente um exemplo de $\mathscr{R}(\mathscr{E})$, sendo $\mathscr{E} = \mathscr{L}(H)$.

Observe que $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ não é fechado com respeito ao produto $\square$; contudo, podemos introduzir dois novos produtos neste espaço de Banach, a saber: o **produto simetrizado** dado por $A \circ B \equiv \frac{1}{2}(A \square B + B \square A)$, e o **produto anti–simetrizado** dado por $A \triangle B \equiv \frac{1}{i}(A \square B - B \square A)$ (sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária), com relação aos quais $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ é fechado.

Proposição 2.1.17. $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ possui uma estrutura de álgebra de Jordan ou de Lie sobre os reais quando munido do produto simetrizado ou anti–simetrizado, respectivamente.

Exemplo 2.1.g : É imediato do exemplo anterior que $\mathscr{R}(H) \subset \mathscr{L}(H)$ munido de produto simetrizado ou anti–simetrizado exemplifica álgebras de Jordan e de Lie sobre os reais, respectivamente.

Gostaríamos de ressaltar que Poincaré–Birkkoff–Witt demonstraram [18] que qualquer álgebra de Lie sobre os reais pode ser realizada através da forma exposta na Proposição 2.1.9. Infelizmente, não existe resultado similar para as álgebras de Jordan sobre os reais. Em função disto, as álgebras de Jordan sobre os reais que podem ser realizadas como na citada proposição, são denominadas especiais; as restantes são ditas excepcionais.

Definição 2.1.18. Um elemento A pertencente a uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é dito ser **positivo**, quando o mesmo é auto–adjunto e seu espectro é um subconjunto dos reais positivos. O conjunto de todos os elementos positivos de $\mathscr{E}$ é notado por $\mathscr{R}_+(\mathscr{E})$.

Proposição 2.1.19. $\mathscr{R}_+(\mathscr{E})$ é um cone conexo fechado com respeito à topologia uniforme, com a propriedade : $\mathscr{R}_+(\mathscr{E}) \cap (-\mathscr{R}_+(\mathscr{E})) = \{0\}$.

De acordo com o comentário realizado a respeito da Definição 1.2.8., o cone $\mathscr{R}_+(\mathscr{E})$ introduz naturalmente uma relação de ordem no conjunto dos elementos auto–adjuntos $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ dada por $A_1 \geq A_2 \Leftrightarrow A_1 - A_2 \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$, para A_1 e $A_2 \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$. Outrossim, devido a possibilidade de caracterizar–se os elementos positivos de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, como:

a) $A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \exists\, B \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$ tal que $A = B \circ B$; ou
b) $A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \exists\, D \in \mathscr{E}$ tal que $A = D^* \circ D$,

pode–se introduzir a raiz quadrada de qualquer $A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$ como $\sqrt{A} = B$ e o módulo de qualquer $A \in \mathscr{E}$ como $|A| = \sqrt{(A^* \circ A)}$.

Encerrando esta seção lembremos que, de forma similar aos espaços normados, as álgebras introduzidas aqui pertencem à classe das álgebras métricas ou seja, as suas operações algébricas são contínuas com respeito à correspondente norma.

2.2 – *–MORFISMOS E IDEAIS

Definição 2.2.1. Sejam $(\mathscr{E}_1, +, \square)$ e $(\mathscr{E}_2, +, .)$ duas B^*–álgebras. Diz–se que uma aplicação $\pi : \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E}_2$ é um ***–morfismo** (*–antimorfismo) quando possuir as seguintes propriedades:

i) $\pi(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 \pi(A_1) + \alpha_2 \pi(A_2)$; $(\alpha_1^* \pi(A_1) + \alpha_2^* \pi(A_2))$;

ii) $\pi(A_1 \square A_2) = \pi(A_1)\, \pi(A_2)$;

iii) $\pi(A_1^*) = \pi(A_1)^*$;

quaisquer que sejam $A_1\ A_2 \in \mathscr{E}_1$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Em outros termos, um *–morfismo (*–antimorfismo) preserva as estruturas algébrica e de involução; por isso os conjuntos são ditos ***–homomorfos** (*–anti–homomorfos).

O conjunto constituído por todos os elementos $\pi(A) \in \mathscr{E}_2$ para todo $A \in \mathscr{E}_1$, como usual, é denominado a **imagem** do *–morfismo e indicado por Im π. Por outro lado, o conjunto constituído por todos os $A \in \mathscr{E}_1$ tais que $\pi(A) = \phi$, é chamado o **núcleo** (ou kernel) do *–morfismo e indicado ker π.

Definição 2.2.2. Um *–morfismo (*–antimorfismo) $\pi : \mathscr{E}_1 \longrightarrow \mathscr{E}_2$ entre duas B^*–álgebras que seja simultaneamente **injetivo** (ker $\pi = \{0\}$) e **sobrejetivo** (Im $\pi = \mathscr{E}_2$), recebe o nome de um ***–isomorfismo** (*–anti–isomorfismo). Neste caso as B^*–álgebras $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$ são ditas ***–isomorfas** (*–anti–isomorfas). Quando $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1$, π é denominado *–automorfismo (*–anti–automorfismo).

Observe que um *–isomorfismo (*–anti–isomorfismo) significa que todos os elementos dos conjuntos $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$ são relacionados um a um.

Exemplo 2.2.a. : Os elementos da álgebra de Hilbert–Schmidt (vide Exemplo 2.1.e. da Definição 2.1.4) podem ser vistos como operadores integrais quando $H = \mathscr{L}^2(\Omega)$. Explicitamente, tem–se que a atuação de $\hat{T} \in \mathscr{L}_2(H)$ sobre $\Psi(\xi) \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ é dada por:

$$\text{i) } (\hat{T}_h \Psi)(\xi) \equiv \int h(\xi, \xi') \Psi(\xi') \, d\xi';$$

sendo $h(\xi, \xi')$, o núcleo de integração, elemento de $\mathscr{L}^2(\Omega \times \Omega)$.

Agora, se introduzirmos no espaço de Hilbert $\mathscr{L}^2(\Omega \times \Omega)$ as operações involução e produto, dadas respectivamente por:

$$\text{ii) } (h^{\#})(\xi, \xi') \equiv h^{*}(\xi, \xi');$$

$$\text{iii) } (g \blacksquare h)(\xi, \xi') = \int g(\xi, \xi'') h(\xi'', \xi') \, d\xi'';$$

observa–se que $\mathscr{L}^2(\Omega \times \Omega)$ é uma álgebra de Hilbert–Schmidt. Tem–se então, que a relação (i) estabelece um *–isomorfismo dado pela aplicação $h \to \hat{T}_h$ entre as álgebras de Hilbert–Schmidt $\mathscr{L}_2(H)$ e $\mathscr{L}_2(\Omega \times \Omega)$. Este *–isomorfismo corresponde então a:

$$\text{iv) } \hat{T}_h^{\dagger} \longrightarrow \hat{T}_{h^{\#}};$$

$$\text{v) } \hat{T}_h \hat{T}_g \longrightarrow \hat{T}_{h \blacksquare g}.$$

Vale a pena frisar que de uma forma geral, tem–se que $\mathscr{L}_2(H) \cong H \otimes H^{*}$, sendo $\cong$ o símbolo de *–isomorfo e H^{*} o dual do espaço de Hilbert H, desde que, qualquer $\hat{T} \in \mathscr{L}_2(H)$ pode ser dado como:

$$\hat{T} = \sum_{i,j} t_{ij} |b_i\rangle \otimes \langle b_j| = \sum_{i,j} t_{ij} |b_i\rangle \langle b_j| = \sum_{i,j} t_{ij} |b_i \tilde{b}_j\rangle,$$

com $\sum_{i,j} |t_{ij}|^2 < \infty$ e $\{|b_i\rangle, i = 1,...\}$ uma base ortogonal de H.

Neste sentido, o *–isomorfismo $\mathscr{L}^2(\Omega \times \Omega) \cong \mathscr{L}_2(H)$ corresponde ao uso de uma base ortogonal generalizada, no sentido de Dirac, i. é., $\{|\xi\rangle$ com $\xi \in \Omega\}$.

Proposição 2.2.3. Considerando que duas C^*–álgebras são *–homomorfas, segue que o *–morfismo π entre elas preserva a estrutura de ordem e é contínuo, i. é.:

i) $A \geq 0 \Rightarrow \pi(A) \geq 0$;

ii) $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$;

No caso de um *–isomorfismo, prevalece a igualdade nas relações acima.

Segue desta proposição que, um *–isomorfismo entre duas C^*–álgebras $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ é automaticamente um homeomorfismo, e portanto, a estrutura topológica dos conjuntos é equivalente. Além disto, a imagem de qualquer *–morfismo de $\mathscr{E}_1$ em $\mathscr{E}_2$ é sempre uma C^*–subálgebra de $\mathscr{E}_2$.

Definição 2.2.4. Um subespaço vetorial de uma B^*–álgebra $\mathscr{E}_1$ é chamado um **ideal à esquerda** se, para $A \in \mathscr{E}_1$ e B pertencente ao ideal, tem–se que $A \square B$ também pertence ao ideal. De forma similar define–se um **ideal à direita**. Por sua vez, quando um subespaço vetorial de $\mathscr{E}_1$ for simultaneamente ideal à esquerda e à direita, diz–se que ele é um **ideal bilateral**. Note–se que um ideal satisfaz o axiomas de uma álgebra.

Exemplo 2.2.b: Como vimos na seção 1.8, os subespaços vetoriais $\mathscr{CL}(H)$, $\mathscr{L}_2(H)$ e $\mathscr{A}(H)$ são ideais bilaterais da W^*–álgebra $\mathscr{L}(H)$. Vale a pena observar que $\mathscr{L}_1(H)$, $\mathscr{L}_2(H)$, são também ideais da C^*–álgebera $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)$.

Como vimos na Definição 1.2.10, o espaço quociente $\mathscr{E}/\mathscr{I} = \{\overline{A}, \overline{B}, ...\}$ onde $\mathscr{E}$ é uma C^*–álgebra e $\mathscr{I}$ um ideal bilateral completo com respeito a norma de $\mathscr{E}$, é um espaço vetorial de classes de equivalência. Além disto, se introduzirmos em $\mathscr{E}/\mathscr{I}$, o produto e norma dados por:

$$\text{i) } \overline{A} \square \overline{B} \equiv \left\{(A \square B) + I,\ I \in \mathscr{I}\right\};$$
$$\text{ii) } \|\overline{A}\| \equiv \inf\left\{\|A + I\|\ ;\ I \in \mathscr{I}\right\};$$

para quaisquer $\overline{A}$, $\overline{B} \in \mathscr{E}/\mathscr{I}$, o espaço quociente torna–se uma C^*–álgebra, usualmente referida como C^*–álgebra quociente de $\mathscr{E}$ por $\mathscr{I}$.

Observe que a aplicação $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{I}$, dada por $\pi(A) = \overline{A}$ para todo $A \in \mathscr{E}$, é um *–morfismo com $\ker\ \pi = \mathscr{I}$ o que aliás, já tinha sido notado quando da Definição 1.2.10. Portanto, podemos concluir que todo ideal bilateral completo de uma C^*–álgebra, pode ser visto como o núcleo de algum *–morfismo.

Considerando então $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}_1$ como um *–morfismo entre duas C^*–álgebras, segue que $\ker\ \pi$ é um ideal bilateral completo de $\mathscr{E}$. Isto pode ser visto desde que:

Se $A \in \mathscr{E}$ e $I \in \ker\ \pi$, então $\pi(A \square I) = \pi(A)\ \pi(I)$. Contudo $\pi(I) = 0$, logo $\pi(A \square I) = 0$, o que implica que $(A \square I) \in \ker\ \pi$ e trocando a ordem do produto, tem–se diretamente que $(I \square A) \in \ker\ \pi$. Todas as outras propriedades que caracterizam um ideal bilateral completo seguem também de forma imediata.

Estes dois últimos resultados constituem, de fato, a demonstração da seguinte Proposição:

Proposição 2.2.5. $\mathscr{I}$ é um ideal bilateral completo de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ se e somente se, ele for núcleo de algum *–morfismo da mesma.

Segue da Proposição 2.2.5. que, se $\mathscr{E}$ e $\mathscr{E}_1$ são *–homomórficas, então $\mathscr{E}/\ker \pi$, sendo π o correspondente *–morfismo, é *–isomórfica a $\mathscr{E}_1$. Com respeito ao *–isomorfismo tem–se, $\pi_1(\overline{A}) = \pi(A)$ para todo $\overline{A} \in \mathscr{E}/\ker \pi$, sendo π_1, o correspondente *–morfismo.

2.3. – REALIZAÇÕES LINEARES

Definição 2.3.1. Um par (H, π), onde H é um espaço de Hilbert e π é um *–morfismo entre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ e um subconjunto M de operadores limitados sobre H, é chamado uma **realização linear** da C^*–álgebra $\mathscr{E}$. A realização é dita ser **fiel**, se π for um *–isomorfismo.

O conceito de realização dá margem a uma série de terminologias. Assim, o espaço de Hilbert H é usualmente referido como o espaço de realização; os operadores $\pi(A) \in M \subseteq \mathscr{L}(H)$, são denominados os representantes da C^*–álgebra $\mathscr{E}$ em H, enquanto $\pi(\mathscr{E})$ é usado para notar a própria realização, i. é., $\pi : \mathscr{E} \longrightarrow M$.

Definição 2.3.2. Uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é denominada **simples** quando $\mathscr{E}$ e $\{0\}$ são seus únicos ideais bilaterais completos.

Decorre imediatamente da Proposição 2.2.5. que todas as realizações de uma C^*–álgebra simples são fiéis. Além disto, a toda realização de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ qualquer, podemos associar de forma canônica, uma realização fiel de $\mathscr{E}/\ker \pi$.

Definição 2.3.3. Um subconjunto $F \subseteq H$ do espaço de realização de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é chamado **invariante** com respeito a $\pi(\mathscr{E})$, se e somente se, $\pi(\mathscr{E})\,\mathbf{x} \in F$, para todo $\mathbf{x} \in F$.

Definição 2.3.4. Uma realização (H, π) de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, é dita **irredutível** se e somente se, os únicos subespaços invariantes de H com relação a $\pi(\mathscr{E})$ são $\{0\}$, e o próprio H. **Caso contrário, a realização é denominada redutível.**

Devido a importância, como veremos, das realizações irredutíveis no estudo de C^*–álgebras, torna–se necessário estabelecer critérios que permitam discernir se uma dada realização $\pi : \mathscr{E} \longrightarrow M$ é irredutível ou não.

Proposição 2.3.5. Seja (H, π) uma realização de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$. As seguintes condições são equivalentes:

i) $\pi(\mathscr{E})$ é irredutível;

ii) para qualquer que seja $x \neq \phi \in H$, o conjunto $\pi(\mathscr{E})\, x$ é denso em H;

iii) o **comutante** $\pi'(\mathscr{E})$ de $\pi(\mathscr{E})$, i. é., o conjunto de todos os operadores de $\mathscr{L}(H)$ que comutam com qualquer elemento de $\pi(\mathscr{E})$, consiste de múltiplos de identidade.

Definição 2.3.6. Uma realização (H, π) de uma C^*–álgebra é dita ser :

a) **Não–degenerada**, quando $\{x \in H$, tal que $\pi(\mathscr{E})\, x = 0\}$ é igual ao vetor nulo ϕ de H;

b) **Cíclica**, quando existe pelo menos um $x \in H$, tal que $\pi(\mathscr{E})\, x$ é denso em H.

O vetor x é usualmente denominado de **vetor cíclico da realização**. Observe que toda realização cíclica é não–degenerada. Outrossim, notaremos, de agora em diante, uma realização cíclica por (H, π, x).

Definição 2.3.7. Seja (H, π) uma realização de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$. Um vetor $x \in H$ é dito **separador** para $\pi(\mathscr{E})$ se, para qualquer $\pi(A)$ pertencente a $\pi(\mathscr{E})$, $\pi(A)\, x = 0 \Rightarrow \pi(A)$ é igual ao operador nulo.

Proposição 2.3.8. Seja $M \subseteq \mathscr{L}(H)$ uma realização de uma C^*–álgebra $\mathscr{C}$. Tem–se então que M', o comutante de M, é também uma *–álgebra de operadores, fechada simultaneamente com respeito à topologia uniforme (uma C^*–álgebra de operadores) e à topologia fraca (uma W^*–álgebra de operadores). Além disto tem–se que:

i) $M \subseteq M'' = M'''' = ...$;

ii) $M' = M''' = M''''' = ...$; onde M'' é o comutante de M' e assim por diante.

Proposição 2.3.9. Seja $M \subseteq \mathscr{L}(H)$ uma C^*–álgebra de operadores. Então M é uma álgebra de von Neumann de operadores se e somente se, $M = M''$.

Segue, portanto, que M' e M'' são sempre álgebras de von Neumann sobre H. Este resultado, juntamente com o ítem (i) da Proposição 1.9.2., permite induzir que o fecho na topologia fraca de uma *–álgebra de operadores é uma álgebra de von Neumann. De fato, mostra–se que $\overline{M}^{\mathscr{N}_2} = M''$.

Proposição 2.3.10. Seja $M \subseteq \mathscr{L}(H)$ uma álgebra de von Neumann. Então as seguintes condições são equivalentes:

i) $\mathbf{x} \in H$ é cíclico para M;

ii) $\mathbf{x} \in H$ é separador para M'.

Definição 2.3.11. O centro $Z(M)$ de uma álgebra de von Neumann de operadores $M \subseteq \mathscr{L}(H)$ é definido como $Z(M) = M \cap M'$. A álgebra é dita ser um **fator** quando

$Z(M) = \lambda 1$, com $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.3.a.: Como vimos no Exemplo 2.1.d. da Definição 2.1.3., $\mathscr{L}(H)$ é uma álgebra de von Neumann; como $\mathscr{L}(H)' = \lambda 1$, tem-se que ela é um fator. Por outro lado, $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)$ não é uma álgebra de von Neumann, uma vez que $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)' = \lambda 1$ e portanto, $\mathscr{C}\mathscr{L}(H)'' = \mathscr{L}(H)$.

Segue da Proposição 1.6.1. e da Proposição (2.1.11) que se $\{(H_\alpha, \pi_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de realizações cíclicas irredutíveis de uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$, então (H, π) com $H = \bigoplus_\alpha H_\alpha$ e $\pi = \bigoplus_\alpha \pi_\alpha$, é uma realização da C^*-álgebra $\mathscr{E}$ sobre H, com as seguintes propriedades:

i) (H, π) é uma realização cíclica (portanto, não degenerada) desde que $x = \bigoplus_\alpha x_\alpha$ é vetor cíclico;

ii) (H, π, x) é uma realização redutível, já que $\overline{H}_\alpha \equiv \phi \oplus ... \oplus H_\alpha \oplus \phi \oplus ...$ (isomorfos a H_α) são subespaços invariantes com relação a $\pi(\mathscr{E})$.

De fato pode-se mostrar, que qualquer realização redutível não-degenerada de uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$, pode sempre ser decomposta na soma direta de realizações cíclicas irredutíveis. **Neste sentido, a Teoria das realizações lineares de C^*-álgebras reduz-se a determinação das realizações cíclicas irredutíveis.**

Encerramos esta seção com duas noções sobre a equivalência entre duas dadas realizações de uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$, ou seja,

a) As realizações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) são ditas **unitariamente equivalentes** quando existe um operador unitário $\hat{T} : H_1 \longrightarrow H_2$ tal que $\pi_1(\mathscr{E}) = \hat{T}\, \pi_2(\mathscr{E})\, \hat{T}^\dagger$.

b) As realizações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) são ditas **fracamente equivalentes**, se e somente se, elas possuem o mesmo núcleo.

Observe que essas noções coincidem quando as realizações são irredutíveis.

2.4. – ESTADOS

Como toda C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é um espaço de Banach tem–se,segundo a seção 1.5., que $\mathscr{E}^*$, o dual de $\mathscr{E}$, é também um espaço de Banach com respeito à topologia *–uniforme, cuja base de vizinhança de um $\omega \in \mathscr{E}^*$ é dada por:

$$Viz^*(\omega\ \epsilon) \equiv \{\omega';\ \omega' \in \mathscr{E}^*,\ \|\omega' - \omega\| < \epsilon \quad \text{com } \epsilon > 0\}.$$

O espaço dual de uma C^*–álgebra pode, por outro lado, ser equipado com outras topologias, dentre as quais destaca–se a **topologia *–fraca** cuja base de vizinhança de um elemento $\omega \in \mathscr{E}^*$ é dada por:

$$Viz^F(\omega;\ A_1, \ldots, A_n\ ;\ \epsilon) \hat{=} \{\omega';\ \omega' \in \mathscr{E}^*,\ |\omega'(A_i) - \omega(A_i)| < \epsilon\ ,\ i = 1,2,\ldots,n\}$$

onde $A_1,\ldots,A_n$ é um conjunto finito de elementos de $\mathscr{E}$ com $\epsilon > 0$.

Comparando–se as bases de vizinhanças dessas duas topologias sobre $\mathscr{E}^*$, tem–se que a topologia *–uniforme, é mais fina que a topologia *–fraca. Em outras palavras, se ω' é vizinho de ω com respeito à topologia *–fraca, ele o será também com respeito à topologia *–uniforme, podendo, contudo, o inverso não ser verdadeiro.

Definição 2.4.1. Um elemento ω pertencente ao dual de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é dito ser **normal**, se e somente se, ele for contínuo com respeito à topologia *–fraca.

Proposição 2.4.2. Tomando–se $(A_n)_{n \in N}$ como sendo uma sequência **crescente e limitada** na norma de elementos auto–adjuntos de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, ou seja, se para todo $n, m \in N$ existe $k \in N$ tal que, $A_k \geq A_n$, $A_k \geq A_m$ e $\|A_n\| \leq \alpha$, $\alpha \in R$, então segue que, $\omega \in \mathscr{E}^*$ é normal, se e somente se $\omega(\sup\ (A_n)_{n \in N}) = \sup(\omega(A_n))_{n \in N}$.

Definição 2.4.3. O conjunto constituído por todos os ω normais sobre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, é chamado o **pré–dual** de $\mathscr{E}$ e usualmente notado por $\mathscr{E}_*$.

Segue diretamente da Definição 2.4.3 que, além de $\mathscr{E}_* \subset \mathscr{E}^*$, tem-se que $\mathscr{E}_*$ é também um espaço de Banach com respeito á topologia *-uniforme.

Esse último resultado e a Proposição 2.4.2 nos permitem tornar mais clara a Definição 2.1.3. de uma álgebra de von Neumann $\mathscr{E}$, através da Proposição que vem em seguida.

Proposição 2.4.4. Um C^*-álgebra $\mathscr{E}$ é uma álgebra de von Neumann quando:

i) qualquer sequência crescente e limitada na norma de elementos auto-adjuntos possuir supremo nela própria; e quando para qualquer $A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$ positivo, diferente de zero, existir um funcional normal $\omega : \mathscr{E} \to C$, tal que $\omega(A) \neq 0$;

ii) o dual do pré-dual de $\mathscr{E}$, i.é., $(\mathscr{E}_*)^*$, for igual ao próprio $\mathscr{E}$.

Exemplo 2.4.a : Segundo o Exemplo 2.1.d da Definição 2.1.3., temos que $(\mathscr{L}_1(H))^* = \mathscr{L}(H)$. Logo, os operadores de classe traço sobre H, podem ser vistos como formas normais sobre $\mathscr{L}(H)$. Em outras palavras $\mathscr{L}_1(H)$ é o pré-dual de $\mathscr{L}(H)$.

Definição 2.4.5. Uma forma ω pertencente ao dual de uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$ é dita ser **positiva**, quando $\omega(A^* \square A) \geq 0$ para todo $A \in \mathscr{E}$. Se $\|\omega\| = 1 \Leftrightarrow \omega(1) = 1$, ω é denominado um **estado** sobre a C^*-álgebra. O valor $\omega(A)$, para todo $A \in \mathscr{E}$, é usualmente referido como o **valor esperado** de A no estado ω. Um estado normal ω sobre uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$ é denominado **fidedigno**, se e somente se, $\omega(A) > 0$, para todo $A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$.

Proposição 2.4.6. Seja ω um estado sobre uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$. Tem-se então que :

i) $\omega(A^*) = \omega(A)^*$,

ii) $\omega(A^* \square B) = \omega(B^* \square A)^*$,

iii) $|\omega(A^* \square B \square A)| \leq \omega(A^* \square A) \|B\|$,

iv) $|\omega(A^* \square B)|^2 \leq \omega(A^* \square A)\, \omega(B^* \square B)$,

v) $|\omega(A)|^2 \leq \omega(A^* \square A)$,

para todo A, B $\in \mathscr{E}$, com $\omega(A)^*$ o complexo conjugado de $\omega(A)$

Proposição 2.4.7. O conjunto $\mathbb{E}$ de todos os estados sobre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, constitui um subconjunto conexo do dual de $\mathscr{E}$. Além disso, a propriedade de positividade (vide Definição 1.2.8.) introduz uma relação de ordem em $\mathbb{E}$. Portanto, os estados podem ser classificados em puros e misturados.

Exemplo 2.4.6.: Considerando o Exemplo 2.4.a. da Proposição 2.4.4. , tem–se que os estados normais sobre a álgebra de von Neumann $\mathscr{L}$(H), são os operadores positivos de Classe Traço normalizados sobre H, sendo o valor esperado de qualquer $\hat{T} \in \mathscr{L}(H)$ dado por $\omega(\hat{T})$ = traço $\hat{T}$f, com f $\in \mathscr{L}_{1,+}(H)$.

Observe que o resultado do exemplo acima é bastante geral. Ele expressa o fato que para qualquer álgebra de von Neumann M $\subset \mathscr{L}$(H), se ω é um estado normal sobre a álgebra, então existe um operador positivo de Classe Traço f normalizado sobre H, tal que, $\omega(A)$ = traço f$\hat{A}$, para todo A $\in$ M. Estes resultados sobre álgebras de von Neumann de operadores limitados atuando sobre espaços de Hilbert, em virtude de sua importância, serão aqui condensados na proposição a seguir:

Proposição 2.4.8. Seja ω um estado sobre uma álgebra de von Neumann M $\subset \mathscr{L}$(H). Então as seguintes condições são equivalentes:

i) ω é normal;

ii) ω é fracamente contínuo;

iii) existe um operador positivo Classe Traço f sobre H , com traço f = 1 , tal que $\omega(\hat{A}) = \text{traço } f\hat{A}$, para todo $\hat{A} \in M$.

Tem–se também o resultado que ω é fidedigno, se somente se, f for inversível, de onde segue que os estados puros não são fidedignos.

Tendo em vista a importância que a noção de traço desempenha no estudo das *–álgebras de operadores, introduz–se esse conceito de forma abstrata sobre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, via a definição seguinte:

Definição 2.4.9. Um traço sobre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é um funcional $\phi : \mathscr{R}_+(\mathscr{E}) \to [0, \infty]$ que possui as seguintes propriedades:

i) $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$;

ii) $\phi(\alpha A) = \alpha\phi(A)$;

iii) $\phi(A^* \square A) = \phi(A \square A^*)$;

para quaisquer que sejam $A, B \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$ e $\alpha \in R_+$.

Definição 2.4.10. O traço ϕ sobre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é dito ser:

a) fidedigno, se e somente se $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

b) finito, se e somente se $\phi(A) < \infty$, $\forall A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$;

c) semi–finito, se e somente se,qualquer que seja $A \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$, existe $B \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$ diferente de zero, com $B < A$, tal que $\phi(B) < \infty$;

d) normal, se e somente se ele for contínuo com respeito à topologia *–fraca.

Segue destas definições que, caso $\mathscr{E} = \mathscr{L}(H)$, pode–se mostrar que $\phi(A) = \text{traço}(A)$ é um traço fidedigno, normal e semi–finito ou finito, a depender da dimensão de H ser finita ou infinita.

Definição 2.4.11. Uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ é denominada:

a) finita, se e somente se existe um traço fidedigno, normal e finito;

b) semi–finita, se e somente se existe um traço fidedigno, normal e semi–finito;

c) infinita, caso não seja nem finita, nem semi–infinita.

A noção de estado de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ permite introduzir uma nova noção de equivalência entre realizações, como veremos a seguir.

Definição 2.4.12. Sejam (H_1, π_1) e (H_2, π_2) duas realizações de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$. Tome–se $\mathscr{L}_{1,+}(H_1)$ e $\mathscr{L}_{1,+}(H_2)$ como os conjuntos de operadores positivos de classe traço sobre H_1 e sobre H_2 que correspondem, como vimos, aos estados normais $\mathscr{E}$. As duas realizações (H_1, π_1) e (H_2, π_2) são ditas **fisicamente equivalentes**, se e somente se, toda vizinhança na topologia fraca de qualquer elemento de $\mathscr{L}_{1,+}(H_1)$ contiver um elemento de $\mathscr{L}_{1,+}(H_2)$ e vice–versa.

Observe que as noções de quase–equivalência e equivalência física coincidem para álgebras de von Neumann. Além disto, de uma forma geral, as noções de equivalências introduzidas se relacionam de acordo com as seguintes implicações:

Equivalência Unitária $\Longrightarrow$ Quase–equivalência $\Longrightarrow$ Equivalência física.

2.5. – REALIZAÇÕES G. N. S. DE C^*–ÁLGEBRAS

Tendo em vista a importância das realizações lineares de C^*–álgebra para o nosso trabalho, de agora em diante esboçaremos os principais passos das demonstrações das proposicões que terão maior relevância.

Proposição 2.5.1. Considere-se (H, π) uma realização não-degenerada de uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$. Tomando-se $x \in H$ normalizado, segue que $(\mathbf{x} | \pi(A)\mathbf{x})$ para todo $A \in \mathscr{E}$, define um estado sobre a C^*-álgebra $\mathscr{E}$, notado por $\omega_{\mathbf{x}}(A) = (\mathbf{x} | \pi(A)\mathbf{x})$. Tais estados são usualmente denominados de **estados vetoriais**.

Demonstração: Como o produto interno é uma forma sesquilinear, vê-se de forma direta que $\omega_{\mathbf{x}}(A)$ é de fato uma forma linear sobre $\mathscr{E}$. Além disso, já que $\omega_{\mathbf{x}}(1) = 1$ e $\omega_{\mathbf{x}}(A^* \,\square\, A) = \|\pi(A)\ \mathbf{x}\|^2 \geq 0$, tem-se que esta forma é positiva e normalizada. Portanto, segundo a Definição 2.4.5., $\omega_{\mathbf{x}}$ é realmente um estado sobre a C^*-álgebra $\mathscr{E}$. C.Q.D.

Um resultado importante é a recíproca da Proposição 2.5.1. , ou seja : que qualquer estado sobre uma C^*álgebra $\mathscr{E}$ pode ser visto como um estado vetorial de uma conveniente realização não-degenerada da C^*-álgebra $\mathscr{E}$. Como veremos, com um dado estado ω, define-se um espaço de Hilbert H_ω que, além de servir como espaço de representação para a álgebra, possui um vetor $\mathbf{x}_\omega$, tal que o estado ω pode ser identificado como o estado vetorial $\omega_{\mathbf{x}_\omega}$. A realização assim constituída é usualmente denominada realização de Gelfand-Naimark-Segal, ou simplesmente G.N.S. [56].

Proposição 2.5.2. Seja ω um estado qualquer sobre uma C^*-álgebra $\mathscr{E}$. Com o estado ω pode-se introduzir uma forma g sesquilinear hermitiana, positiva, definida em $\mathscr{E}$, como

$$g(A, B) \equiv \omega(A^* \,\square\, B).$$

Demonstração: Tendo em vista as propriedades dos estados sobre uma C^*-álgebra, verifica-se de imediato que as condições da Definição 1.4.4., são de fato, satisfeitas. C.Q.D.

Segundo a Proposição 1.4.6., $\mathscr{E} / \mathscr{E}_0$ com $\mathscr{E}_0 = \{A \in \mathscr{E} ; g(A, A) = \omega(A^* \,\square\, A) = 0\}$, é um espaço Euclidiano, com produto interno dado por $(\overline{A}|\overline{B}) = g(A, B)$, para qualquer que seja $\overline{A}, \overline{B} \in \mathscr{E} / \mathscr{E}_o$. Segue então, que o espaço quociente $\mathscr{E} / \mathscr{E}_o$, induzido pelo estado ω, pode ser completado, tornando-se então um espaço de Hilbert notado por H_ω. Observe que $\mathscr{E}_o$ é um ideal à esquerda completo de $\mathscr{E}$. Quando o estado ω for fidedigno, tem-se que $\mathscr{E}_o = \{0\}$. Neste caso, $\mathscr{E}_o$ é um ideal bilateral e H_ω é o fecho de $\mathscr{E}$ com respeito ao produto escalar $(A|B) = \omega(A^* \square B)$.

Proposição 2.5.3. Seja H_ω o espaço de Hilbert induzido pelo estado $\omega \in \mathscr{E}^*$. Então

$$\pi_\omega(A)\,\overline{B} = \{(A \square B) + I;\, I \in \mathscr{E}_o\};$$

para todo $A \in \mathscr{E}$ e qualquer $\overline{B}$ pertence ao sub-conjunto denso $\mathscr{E} / \mathscr{E}_o$ de H_ω, define uma realização $\pi_\omega : \mathscr{E} \longrightarrow H_\omega$, usualmente referida como a realização multiplicativa à esquerda da C^*-Álgebra $\mathscr{E}$.

Demonstração : Segue da definição dos representantes $\pi_\omega(A)$ e da Definição 1.2.10 de espaço quociente que:

a) Os $\pi_\omega(A)$, para todo $A \in \mathscr{E}$, são operadores lineares limitados sobre H_ω, desde que:

a.1) $\pi_\omega(A)\,(\alpha_1\,\overline{B_1} + \alpha_2\,\overline{B_2}) = \{A \square(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) + I\,;\, I \in \mathscr{E}_o\}$

$$= \{\alpha_1\,(A \square B_1) + \alpha_2\,(A \square B_2) + I;\, I \in \mathscr{E}_o\}$$

$$= \alpha_1\,\pi_\omega(A)\,\overline{B}_1 + \alpha_2\,\pi_\omega(A)\,\overline{B}_2;$$

a.2) Tomando-se $\overline{D} \equiv \pi_\omega(A)\,\overline{B}$, tem-se que $\|\pi_\omega(A)\,\overline{B}\|^2 = (\overline{D}|\overline{D})$. Por outro lado, $(\overline{D}|\overline{D}) = g(D,D) = \omega(D^* \square D)$, o que nos permite escrever:

$$\|\pi_{\omega}(A)\overline{B}\|^{2} = \omega[(A \square B)^{*} \square (A \square B)] = \omega(B^{*} \square (A^{*} \square A) \square B).$$

Tendo em vista agora o ítem (iii) da Proposição 2.4.6. e o fato de que, para uma C^{*}–álgebra $\|A^{*} \square A\| = \|A\|^{2}$, tem–se que:

$$\omega(B^{*} \square (A^{*} \square A) \square B) \leq \omega(B^{*} \square B)\, \|A\|^{2};$$

e como $\omega(B^{*} \square B) = (\overline{B}\,|\,\overline{B})$, pode–se finalmente escrever:

$$\|\pi_{\omega}(A)\, \overline{B}\|^{2} \leq \|B\|^{2}\, \|A\|^{2}.$$

Logo, $\pi_{\omega}(A)$ é, de fato, um operador linear limitado, para todo $A \in \mathscr{E}$.

b) Quanto às propriedades algébricas tem–se que:

$$\begin{aligned} \text{b.1) } \pi_{\omega}(A_1)\, \pi_{\omega}(A_2)\, \overline{B} &= \{A_1 \square [(A_2 \square B) + I_1] + I_2 \,;\, I_1,\, I_2 \in \mathscr{E}_0\} \\ &= \{[(A_1 \square A_2) \square B] + I \,;\, I \in \mathscr{E}_0\} \;=\; \pi_{\omega}(A_1 \square A_2)\, \overline{B}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.2) } \pi_{\omega}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\, \overline{B} &= \{[(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \square B] + I \,;\, I \in \mathscr{E}_0\} \\ &= \{(\alpha_1 A_1 \square B) + (\alpha_2 A_2 \square B) + I \,;\, I \in \mathscr{E}_0\} \\ &= \alpha_1 \pi_{\omega}(A_1)\, \overline{B} + \alpha_2\, \pi_{\omega}(A_2)\, \overline{B}. \end{aligned}$$

b.3) $\pi_{\omega}(A)^{\dagger}\, \overline{B} = \{(A^{*} \square B) + I \,;\, I \in \mathscr{E}_0\} \;=\; \pi_{\omega}(A^{*})\, \overline{B}$. C. Q. D.

Note–se que usamos nestas demonstrações o fato de $\mathscr{E}_0$ ser um ideal à esquerda da C^{*}–álgebra $\mathscr{E}$.

Em resumo, os itens (a) e (b) demonstraram que $(H_{\omega},\, \pi_{\omega})$ é, de fato, uma realização linear da C^{*}–álgebra $\mathscr{E}$, conhecida como a realização G. N. S., induzida pelo estado $\omega \in \mathscr{E}^{*}$.

Observe–se também, que caso ω seja fidedígno, a realização G. N. S. induzida por ele é fiel.

Proposição 2.5.4. A realização G.N. S. (H_ω, π_ω) é cíclica com vetor cíclico dado por $\overline{1}_\omega$. Além disto, ω, nesta realização, é um estado vetorial tal que:

$$\omega(A) = (\overline{1}_\omega | \pi_\omega(\overline{A})\, \overline{1}_\omega).$$

Demonstração:

a) O caráter cíclico da realização (H_ω, π_ω) segue do fato de que o conjunto $\{\pi_\omega(A)\, \overline{1}_\omega = \overline{A}\ ;\ A \in \mathscr{E}\}$ é exatamente igual ao espaço quociente $\mathscr{E} / \mathscr{E}_0$, que por construção é denso em H_ω. Daí, tem–se que $\overline{1}_\omega$ é vetor cíclico desta realização.

b) Por outro lado, segue de:

$$(\overline{1}_\omega | \pi_\omega(A)\, \overline{1}_\omega) = (\overline{1}_\omega | \overline{A}) = \omega(1_\omega \,\square\, A) = \omega(A)$$

que ω tem em (H_ω, T_ω) um caráter vetorial. C. Q. D.

Proposição 2.5.5. A realização cíclica G. N. S. $(H_\omega, \pi_\omega, \overline{1}_\omega)$, com $\omega(A) = (\overline{1}_\omega | \pi_\omega(A)\, \overline{1}_\omega)$, para todo $A \in \mathscr{E}$, é única, a menos de uma equivalência unitária.

Demonstração: Consideremos inicialmente, que existe outra realização cíclica $(H'_\omega, \pi'_\omega, \Omega'_\omega)$, na qual o estado ω tem também uma realização vetorial, ou seja $\omega(A) = (\Omega'_\omega | \pi'_\omega(A)\, \Omega'_\omega)$. Definindo–se o operador linear:

$$\mathscr{U} : H_\omega \longrightarrow H'_\omega \text{ por } \mathscr{U}(\pi_\omega(A)\, \overline{1}_\omega) = \pi'_\omega(A)\, \Omega'_\omega,$$

observa–se de forma direta que $\mathscr{U}$ é um operador unitário e as realizações são, de fato, unitariamente equivalentes.

A partir dos resultados (2.5.3 – 5), podemos afirmar que as realizações G. N. S. de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, exaurem o conjunto das realizações cíclicas, a menos de equivalência unitária. Neste sentido, é fundametal estabelecer–se uma relação entre a redutibilidade da realização G. N. S. e a natureza do estado que a induziu, o que poderá ser visto na proposição a seguir.

Proposição 2.5.6. Seja a realização G. N. S. $(H_\omega, \pi_\omega, \mathrm{I}_\omega)$ induzida pelo estado $\omega \in \mathscr{E}^*$. As seguintes condições são equivalentes:

i) $(H_\omega, \pi_\omega, \mathbf{1}_\omega)$ é irredutível;
ii) o estado $\omega \in \mathscr{E}^*$ é puro.

Vale a pena frisar, que no caso de uma realização irredutível, o conjunto de classes de equivalência $\{\pi_\omega(A)\,\mathrm{I}_\omega;\ \forall\, A \in \mathscr{E}\}$ não é somente denso em H_ω, mas é igual a ele. Além disto, para qualquer $x \in H_\omega$ tem–se que x é vetor cíclico de H_ω e portanto para qualquer $x \in H_\omega$, tem–se que ω_x é estado puro de $\mathscr{E}$.

Proposição 2.5.7. Seja ω um estado sobre uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$ e τ um *–automorfismo de $\mathscr{E}$ que deixa ω invariante, i.é., $\omega(\tau(A)) = \omega(A)$, para todo $A \in \mathscr{E}$. Então, existe um único operador unitário $\hat{\mathscr{U}}_\omega : H_\omega \longrightarrow H_\omega$, tal que:

i) $\hat{\mathscr{U}}_\omega\, \pi_\omega(A)\, \hat{\mathscr{U}}_\omega^{-1} = \pi_\omega(\tau(A)),\ \forall\, A \in \mathscr{E}$;

ii) $\hat{\mathscr{U}}_\omega\, \mathrm{I}_\omega = \mathrm{I}_\omega$.

Demonstração: Segue diretamente da unicidade da realização G. N. S. $(H_\omega, \pi_\omega, 1_\omega)$.

Proposição 2.5.8. Seja $\mathscr{E}$ uma W^*–álgebra e ω um estado normal sobre $\mathscr{E}$. Segue então, que a realização cíclica G. N. S. $(H_\omega, \pi_\omega, \tilde{1}_\omega)$ induzida por ω, é uma álgebra de von Neumann normal, ou seja:

$$\pi_\omega(\sup(A_\alpha)) = \sup_\alpha \pi_\omega(A_\alpha);$$

para qualquer sequência crescente limitada $\{A_\alpha\} \in \mathscr{R}_+(\mathscr{E})$.

Cabe ressaltar que, até agora temos mostrado que através dos estados de uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, podemos construir todas as realizações cíclicas redutíveis ou não de $\mathscr{E}$. No concernente às realizações fiéis, sabemos apenas que a realização G. N. S. induzida por um estado fidedigno, é fiel. Entretanto, este resultado não garante, por si só, que uma dada C^*–álgebra $\mathscr{E}$ possua realização fiel. A garantia da existência de realizações fiéis é dada pela Proposição 2.5.9. a seguir.

Proposição 2.5.9. Dada uma C^*–álgebra $\mathscr{E}$, existe uma realização não–degenerada fiel de $\mathscr{E}$, ou seja $\mathscr{E}$ é $*$–isomórfica a alguma $*$–álgebra de operadores limitados, atuando em algum espaço de Hilbert, fechada com respeito à topologia uniforme.

Observe–se que a substituição da C^*–álgebra $\mathscr{E}$ e topologia uniforme na Proposição acima, por W^*–álgebra $\mathscr{E}$ e topologia fraca, conduz a uma proposição similar similaribus.

2.6. – REALIZAÇÃO DE TOMITA–TAKESAKI DE W^*–ÁLGEBRAS

Definição 2.6.1. Uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ é dita ser σ–finita , quando todas as possíveis redes de projetores mutuamente ortogonais, i.é. , $\{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$ com $P_\alpha \square P_{\alpha}' = \delta_{\alpha\alpha'} P_\alpha$, possuem cardinalidade enumerável.

Considerando que qualquer W*–álgebra é completamente gerada pelos idempotentes ($P_\alpha^2 = P_\alpha$), tem–se então no caso de W^*–álgebras σ–finita, que o conjunto de seus geradores possui caráter enumerável. Além disto, mostra–se que se $\mathscr{E}$,for finita ou semi–infinita ela será σ–finita.

Proposição 2.6.2. Uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ é σ–finita se e somente se, existir pelo menos um estado normal fidedigno.

Proposição 2.6.3. O vetor cíclico $\mathrm{I}_\omega \in H_n$ da realização G. N. S. $(H_\omega, \pi_\omega, \mathrm{I}_\omega)$ da W^*–álgebra $\mathscr{E}$, induzida por um estado fidedígno, é cíclico e separador para $\pi_\omega(\mathscr{E})$. Além disto, $(H_\omega, \pi_\omega, \mathrm{I}_\omega)$ é fiel.

Demonstração: O fato de I_ω ser vetor cíclico da representação $(H_\omega, \pi_\omega, \mathrm{I}_\omega)$ segue por construção da realização. Por outro lado, o caráter separador de $\mathrm{I}_\omega \in H_\omega$, decorre do seguinte argumento: se $\pi_\omega(A)\, \mathrm{I}_\omega = 0$, para um dado $A \in \mathscr{E}$, tem–se então que, $\omega(A^* \square A) = \|\pi_\omega(A)\, 1\|^2 = 0$. Logo, $A^* \square A = 0 \Rightarrow A = 0$, e portanto, segundo a Definição 2.3.7., I_ω é separador. Além do mais, pela Proposição 2.2.3., vê–se que $\pi_\omega(\mathscr{E})$ é, de fato, fiel. C.Q.D.

De interesse é a classe de realizações redutíveis de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$. Segundo o ítem (**iii**) da Proposição 2.3.5., essas realizações possuirão comutantes distintos de múltiplos da identidade, e além disto, de acordo com a Proposição 2.5.6., elas, a menos de equivalência unitária, podem ser vistas como realizações G. N. S. geradas por estados misturados. Por esta razão, elas são também genericamente denominadas de **realizações térmicas**.

Definição 2.6.4. Um operador antilinear $\hat{j} : H \longrightarrow H$ definido sobre um espaço de Hilbert H , é dito ser **isométrico** quando,

$$(\hat{j}x_1 | \hat{j}x_2) = (x_2 | x_1);$$

para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in H$. Além disto, quando $\hat{j}^2 = 1$, diz–se que ele é uma **conjugação** em H.

Definição 2.6.5. Uma realização (H, π) de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ é dita ser de **Tomita–Takesaki** (standard), quando existe uma conjugação $\hat{j} : H \longrightarrow H$ que possua as seguintes propriedades:

i) $\hat{j}\ \pi(\mathscr{E})\ \hat{j} = \pi'(\mathscr{E})$;

ii) $\hat{j}\pi(A)\ \hat{j} = \pi(A)^\dagger$, para todo $A \in Z(\mathscr{E})$

Observe que, em virtude de (i) , o comutante $\pi'(\mathscr{E})$ de $\pi(\mathscr{E})$, é uma anti–realização da W^*–álgebra $\mathscr{E}$, isto é $\pi'(\alpha_1 A) = \alpha_1^* \pi(A)$ para quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathscr{E}$.

Definição 2.6.6. Considere uma realização (H , π) de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$, que possua um vetor $|\Psi> \in H$, que seja cíclico e separador para $\pi(\mathscr{E})$. Então denotam–se por $\hat{S}$ e $\hat{F}$ os operadores antilineares, tais que:

$$\hat{S} : H \longrightarrow H$$
$$\hat{S}\ \pi(A)|\Psi> \equiv \pi(A)^\dagger |\Psi> \ , \quad \text{para todo } \pi(A) \in \pi(\mathscr{E}),$$

e

$$\hat{F} : H \longrightarrow H$$
$$\hat{F}\ \pi'(A)|\Psi> \equiv \pi'(A)^\dagger |\Psi> \ , \quad \text{para todo } \pi'(A) \in \pi'(\mathscr{E}).$$

Observe, em primeiro lugar, que devido à Proposição 2.3.10., o vetor $|\Psi> \in H$ é também cíclico e separador para $\pi'(\mathscr{E})$; portanto, os operadores $\hat{S}$ e $\hat{F}$ possuem como domínio de definição os seguintes sub–conjuntos densos de H : $\pi(\mathscr{E})|\Psi>$ e $\pi'(\mathscr{E})|\Psi>$, respectivamente. Este resultado permite estender, de forma única, os domínios de definição de $\hat{S}$ e $\hat{F}$ para H. Outrossim, como os domínios de definição natural dependem do vetor cíclico e separador $|\Psi> \in H$, deveríamos notar os operadores definidos acima por $\hat{S}_{|\Psi>}$ e $\hat{F}_{|\Psi>}$, no sentido de explicitar as suas dependências com respeito ao $|\Psi> \in H$; contudo, para não sobrecarregar a notação continuaremos usando apenas $\hat{S}$ e $\hat{F}$.

Proposição 2.6.7. Os operadores antilineares $\hat{S}$ e $\hat{F}$ possuem os seguintes propriedades:

i) $\hat{S} = \hat{S}^{-1}$ e $\hat{F} = \hat{F}^{-1}$;

ii) $\hat{S}^{\dagger} = \hat{F}$ e $\hat{F}^{\dagger} = \hat{S}$

Demonstração : Os resultados (i) e (iii) seguem diretamente da Definição 2.6.6..

Definição 2.6.8. Considere $\hat{\Delta}$ como o único operador linear auto–adjunto positivo, e $\hat{j}$ como único operador anti–linear isométrico que ocorrem na decomposição polar de $\hat{S}$, ou seja : $\hat{S} = \hat{j}\ \hat{\Delta}^{1/2}$, com $\hat{\Delta} = S^{\dagger}S$. Neste caso, o operador $\hat{\Delta}$ é chamado o **operador modular** associado a $(H, \pi, |\Psi>)$, enquanto $\hat{j}$ é referido como a **conjugação modular**.

Note–se que, desde que $\hat{S}$ é inversível, os operadores modular e conjugação modular são inversíveis. Portanto $\hat{j}$ é unitário, i.é., $\hat{j}^{-1} = \hat{j}$.

Proposição 2.6.9. Os operadores modular e conjugação modular satisfazem as seguintes propriedades:

i) $\hat{\Delta} = \hat{F}\,\hat{S}$; $\hat{\Delta}^{-1} = \hat{S}\,\hat{F}$;
ii) $\hat{S} = \hat{j}\,\Delta^{1/2}$; $\hat{F} = \hat{j}\,\hat{\Delta}^{1/2}$;
iii) $\hat{j} = \hat{j}^{\dagger}$; $\hat{j}^{2} = 1$; $\hat{j} = \hat{j}^{-1}$;
iv) $\hat{\Delta}^{-1/2} = \hat{j}\,\hat{\Delta}^{1/2}\,\hat{j}$.

Demonstração: Como $\hat{S}^{\dagger} = \hat{F}$ temos $\hat{\Delta} = \hat{S}^{\dagger}\,\hat{S} = \hat{F}\,\hat{S}$, e portanto, como $\hat{S} = S^{-1}$ temos $\Delta^{-1} = \hat{S}\,\hat{F}$. Segue também que, $\hat{j}\,\hat{\Delta}^{1/2} = \hat{\Delta}^{-1/2}\,\hat{j}^{-1}$. Daí $\hat{j}\,\hat{\Delta}^{1/2}\,\hat{j} = \hat{\Delta}^{-1/2}$. Por outro lado $\hat{j}^{2}\,\hat{\Delta}^{1/2} = \hat{j}\,\hat{\Delta}^{-1/2}\,\hat{j}^{\dagger}$ e logo $\hat{j}^{2} = \hat{1}$. As outras relações seguem também de forma imediata. C. Q. D.

Proposição 2.6.10. A realização (H, π) de uma W^{*}–álgebra $\mathscr{E}$ que possua um vetor $|\Psi>\ \in$ H que seja cíclico e separador é standard com involução dada pela conjugação modular $\hat{j}$. Além disto, o operador modular $\hat{\Delta}$ define um grupo de *–automorfismo de $\pi(\mathscr{E})$ e de seu comutante $\pi'(\mathscr{E})$, através das seguintes relações:

$$\text{I)}\ \sigma_t\left[\pi(A)\right] \equiv \hat{\Delta}^{it}\,\pi(A)\,\hat{\Delta}^{-it} \quad ; \quad \forall\ \pi(A) \in \pi(\mathscr{E}).$$

$$\text{II)}\ \sigma_t\left[\pi'(B)\right] \equiv \hat{\Delta}^{-it}\,\pi'(B)\,\hat{\Delta}^{it} \quad ; \quad \forall\ \pi'(B) \in \pi'(\mathscr{E})$$

sendo i a unidade imaginária e t um parâmetro real.

Este grupo de *–automorfismo é usualmente denominado de **grupo modular** associado ao vetor cíclico e separador $|\Psi>$, pertencente ao espaço de realização da W^{*}–álgebra $\mathscr{E}$.

Proposição 2.6.11. O estado vetorial $\omega_{|\Psi>}$ da W^{*}–álgebra $\mathscr{E}$, é invariante com relação ao grupo modular σ_t associado ao estado $\omega_{|\Psi>}$, i. é., $\omega(\sigma_t(A)) = \omega(A)$, para todo A

$\in \mathscr{E}$. Em outras palavras, $\hat{\Delta}^{-it}\ |\Psi\rangle\ =\ |\Psi\rangle$, para todo $t \in R$.

Proposição 2.6.12. Dados $\pi(A)$ e $\pi(B) \in \pi(\mathscr{E})$, e sendo $|\Psi\rangle$ vetor cíclico e separador de $\pi(\mathscr{E})$, e σ_t o seu grupo modular associado tem–se que,

$$\langle\Psi|\pi(B)\ \pi(A)|\Psi\rangle\ =\ \langle\Psi|\hat{\Delta}^{1/2}\ \pi(A)\ \hat{\Delta}^{-1}\ \pi(B)\ \hat{\Delta}^{1/2}\ |\Psi\rangle;$$

(Esta condição é usualmente referida como **condição modular**.)

Demonstração: Empregando–se a definição do grupo modular, pode–se reescrever o lado direito da Proposição 2.6.12. acima, como:

$$\langle\Psi|\sigma_{t=-i/2}[\pi(A)]\ \sigma_{t=i/2}[\pi(B)]|\Psi\rangle = \langle\Psi|\ \hat{\Delta}^{1/2}\ \pi(A)\hat{\Delta}^{-1}\ \pi(B)\hat{\Delta}^{1/2}\ |\psi\rangle.$$

Usando–se a invariança de $|\Psi\rangle$ com relação ao grupo modular e a própria definição do operador $\hat{S}$ tem–se que,

$$\langle\Psi|\sigma_{t=-i/2}[\pi(A)]\ \sigma_{t=i/2}[\pi(B)]\ |\Psi\rangle\ =\ \langle\Psi|\ \pi(B)\ \pi(A)\ |\Psi\rangle;\ \text{C.Q.D.}$$

Proposição 2.6.13. O grupo modular é o único grupo de *–automorfismo da W^*–álgebra $\mathscr{E}$, que satisfaz a condição modular.

Note que estas duas últimas proposições, estabelecem uma correspondência biunívoca entre o grupo modular e a condição modular para cada vetor cíclico e separador do espaço de representação da W^*–álgebra $\mathscr{E}$.

Proposição 2.6.14. Todas as realizações standard de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ σ–finita, são:

i) unitariamente equivalentes, caso ela seja finita ou semi–finita;

ii) realizações G. N. S. induzidas por estados normais fidedígnos.

Proposição 2.6.15. Uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ é semi–finita se e somente se, o grupo de $*$–auto–morfismo modular σ_t associado ao estado fidedígno ω admitir uma realização unitária i. é., $\hat{\Delta}^{it} = \hat{\Gamma}(t)\,\hat{\Gamma}'(t)$, $-\infty < t < +\infty$, com $\hat{\Gamma}(t)$ e $\hat{\Gamma}'(t)$ operadores unitários em H_ω, e $\hat{\Gamma}'(-t) = \hat{j}\,\hat{\Gamma}(t)\,\hat{j}$.

Observe que pelo uso do Teorema de Stone [66], $\hat{\Gamma}(t)$ pode ser escrito como:

$$\hat{\Gamma}(t) = \operatorname{Exp}\,(-it\ \hat{\mathscr{H}}),$$

com $\hat{\mathscr{H}}$ um operador auto–adjunto sobre H_ω. Portanto o grupo modular $\hat{\Delta}^{it}$ associado ao estado ω torna–se:

$$\hat{\Delta}^{it} = \operatorname{Exp}\,(-it\,(\hat{\mathscr{H}} - \hat{j}\ \hat{\mathscr{H}}\ \hat{j})).$$

Estes resultados sobre representações standard de W^*–álgebras semi–finitas podem ser sintetizados na seguinte Proposição demonstrada por Segal [67]:

Proposição 2.6.16. Qualquer W^*–álgebra semi–finita é $*$–isomorfa a alguma $*$–álgebra de operadores limitados fechada com respeito à topologia fraca atuando sobre alguma álgebra de Hilbert.

Segue da Proposição 2.6.16. que o espaço de realização H_ω da realização G. N. S. $(H_\omega,\ \pi_\omega,\ \mathrm{I}_\omega)$ de uma W^*–álgebra semi–finita induzida por um estado ω normal e fidedígno, é de fato, uma álgebra de Hilbert.

Os resultados desta seção sobre realizações standard de W^*–álgebras foram desenvolvidos de forma independente, quase que simultaneamente, por Tomita–Takesaki [19, 65] e por Haag–Hugenholtz–Winnink [68]. Os primeiros estavam preocupados basicamente em esclarecer a relação algébrica existente entre uma álgebra de von Neumann e o seu comutante, enquanto os últimos buscavam exibir uma formulação rigorosa para a Mecânica Estatística Quântica no equilíbrio. Vale a pena frisar que Haag–Hugenholtz–Winnink conseguiram mostrar que a algebrização da condição de contorno de Kubo–Martin–Schwinger [69, 70], para as funcões de Green Termodinâmicas [71] conduz de forma imediata à condição modular associada ao estado de equilíbrio termodinâmico, o que, portanto, permitiu o desenvolvimento da formulação algébrica para o equilíbrio termodinâmico. Em outras palavras, o grupo de *–automorfismo associado à evolução temporal pode ser identificado com o grupo modular associado ao estado de equilíbrio termodinâmico.

2.7. –FORMAS STANDARD E CONE AUTO–DUAL

Tendo em vista o grande número de vetores do espaço de Hilbert associado a uma realização standard de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$, Araki, Connes e Haagerup [64, 72, 73], de forma independente, explicitaram as propriedades do sub–conjunto do espaço de Hilbert que corresponde aos possíveis estados da W^*–álgebra $\mathscr{E}$.

Definição 2.7.1. Considerando $(H_\omega, \pi_\omega, \bar{I}_\omega)$ como uma realização cíclica standard de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ define–se o seu **cone natural** como o subconjunto $\mathscr{P} \subseteq H_\omega$ dado pelo fecho do conjunto $\{\pi_\omega(A)\ \hat{j}_\omega\ \pi^\dagger_\omega(A)\ \hat{j}_\omega\ \bar{I}_\omega$, para todo $A \in \mathscr{E}\}$.

Proposição 2.7.2. O cone natural $\mathscr{P} \subseteq H_\omega$ pode também ser dado como o subconjunto de H_ω tal que:

i) $\mathscr{P} = \overline{\hat{\Delta}_\omega^{1/4} \mathscr{R}_+ [\pi(\mathscr{E})] \; \mathrm{I}_\omega} = \overline{\hat{\Delta}_\omega^{-1/4} \; \mathscr{R}_+ [\pi'(\mathscr{E})] \; \mathrm{I}_\omega}$;

ii) $\mathscr{P} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{H} \; ; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \; ; \text{ para todo } \mathbf{y} \in \mathscr{P}\}$;

onde a barra em (i) significa o fecho do conjunto na topologia uniforme.

A primeira relação indica, pela Proposição 2.1.11., que $\mathscr{P}$ é um cone conexo fechado com a propriedade $\mathscr{P} \cap (-\mathscr{P}) = \{0\}$; a segunda implica que o produto interno de dois vetores do cone é maior ou igual a zero, ou seja, que $\mathscr{P}$ é um cone auto–dual.

Proposição 2.7.3. O cone natural $\mathscr{P} \subseteq H_\omega$ possui as seguintes propriedades :

i) $\Delta^{it} \; \mathscr{P} = \mathscr{P}$, para todo $t \in \mathrm{R}$ (invariança pelo grupo modular);

ii) $\mathbf{x} \in \mathscr{P} \Rightarrow \hat{j} \; \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (vetores do cone são invariantes pela conjugação modular);

iii) $\pi_\omega(A) \in \pi_\omega(\mathscr{E}) \Rightarrow \pi_\omega(A) \; \hat{j} \; \pi_\omega^\dagger(A) \; \hat{j} \; \mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}$;

iv) $\mathbf{x} \in \mathscr{P}$ é cíclico para $\pi_\omega(\mathscr{E})$, se e somente se, $\mathbf{x}$ for separador para $\pi_\omega(\mathscr{E})$;

v) $\mathbf{x} \in \mathscr{P}$ é cíclico e separador para $\pi_\omega(\mathscr{E}) \Rightarrow \hat{j}_\mathbf{x}$ e $\mathscr{P}_\mathbf{x}$ são invariantes, i. é., $\hat{j}_\mathbf{x} = \hat{j}_\omega$ e $\mathscr{P}_\mathbf{x} = \mathscr{P}$.

Demonstração : Com a finalidade de facilitar a notação, vamos denotar por $J : \pi(\mathscr{E}) \mapsto \pi'(\mathscr{E})$, o *–anti–isomorfismo entre a realização $\pi(\mathscr{E})$ da W^*–álgebra $\mathscr{E}$ e seu comutante $\pi'(\mathscr{E})$ dado por $J(\pi(A)) = \hat{j} \; \pi(A)^\dagger \; \hat{j}$. Tomando–se $\mathscr{P}$ como dado em (i) da Proposição 2.7.2., tem–se então que:

$$\hat{\Delta}^{it}\,\mathscr{P} = \hat{\Delta}^{it}\,\hat{\Delta}^{1/4}\,\mathscr{R}_{+}\,[\pi(\mathscr{E})]\,\overline{1}_{\omega} = \hat{\Delta}^{1/4}\,\Delta^{it}\,\mathscr{R}_{+}\,[\pi(\mathscr{E})]\,\overline{1}_{\omega}$$

Agora, usando–se o fato de que $\overline{1}_{\omega}$ é invariante com relação ao grupo modular, tem–se que,

$$\hat{\Delta}^{it}\,\mathscr{P} = \hat{\Delta}^{1/4}\,\hat{\Delta}^{it}\,\mathscr{R}_{+}\,[\pi(\mathscr{E})]\,\hat{\Delta}^{it}\,\overline{1}_{\omega}.$$

E como $\hat{\Delta}^{it}\,\mathscr{R}_{+}\,[\pi(\mathscr{E})]\,\hat{\Delta}^{it} = \sigma_t\,[\mathscr{R}_{+}\,(\pi(\mathscr{E})] = \mathscr{R}_{+}\,[\pi(\mathscr{E})]$, tem–se então que,

$$\hat{\Delta}^{it}\,\mathscr{P} = \hat{\Delta}^{1/4}\,\mathscr{R}_{+}\,[\pi(\mathscr{E})]\,\overline{1}_{\omega} = \mathscr{P}$$

Para demonstrar (ii), note que, $\hat{j}\;\pi(A)^{\dagger}\;\hat{j}(\pi(A)^{\dagger})\;\overline{1}_{\omega} = \hat{j}\;\pi(A)^{\dagger}\;\hat{j}(\pi(A)^{\dagger})\;\hat{j}^2\;\overline{1}_{\omega}$, devido ao fato de $\hat{j}$ ser uma involução em H_{ω}. Por outro lado 1_{ω} é invariante com relação à involução; logo, tem–se que:

$$\hat{j}\;\pi(A)^{\dagger}\;\hat{j}(\pi(A)^{\dagger})\;\overline{1}_{\omega} = \hat{j}\;\pi(A)^{\dagger}\;J\,(\pi(A))\;\overline{1}_{\omega};$$

e como $J(\pi(A))$ e $\pi(A)$ comutam, temos finalmente que,

$$\hat{j}\;\pi(A)^{\dagger}\;J(\pi(A))\;\overline{1}_{\omega} = \pi(A)^{\dagger}\;J(\pi(A))\;\overline{1}_{\omega}\;,\ \text{para todo}\ \pi(A) \in \pi(\mathscr{E}).$$

Para (iii), observe–se que $\pi(A)\;J(\pi(A))\;\pi(B)\;J(\pi(B))\;\overline{1}_{\omega} = \pi(A)\;\pi(B)\;J(\pi(A))\;J(\pi(B))\;\overline{1}_{\omega}$, desde que, os elementos de $\pi(\mathscr{E})$ comutam com os de $\pi'(\mathscr{E})$. Considerando então que $\hat{j}^2 = 1$, tem–se: $\pi(A)\;J(\pi(A))\;\pi(B)\;J(\pi(B))\;\overline{1}_{\omega} = \pi(A \,\square\, B)\;J(\pi(A \,\square\, B))\;\overline{1}_{\omega}$ para todo $A, B \in \mathscr{E}$.

Para a propriedade (iv), considera–se que $\mathbf{x} \in \mathscr{P}$ é cíclico para $\pi(\mathscr{E})$; então segue que $\hat{j}_{\omega}\,\mathbf{x}$ é cíclico para $\pi'(\mathscr{E})$. E como segundo ítem (ii) desta proposição, $\hat{j}_{\omega}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$, tem–se que

$\mathbf{x}$ é também cíclico para $\pi'(\mathscr{E})$. Logo, de acordo com a Proposição 2.3.10, $\mathbf{x}$ será separador, tanto para $\pi(\mathscr{E})$ como para $\pi'(\mathscr{E})$.

A demonstração da propriedade (v) segue as mesmas linhas das anteriores; no entanto, nós a omitimos devido a sua extensão. Vale a pena frisar que os ítens (ii) da Proposição 2.7.2. e (iii) da Proposição 2.7.3. acarretam de forma direta que $(x, \pi_\omega(A)\,\hat{j}\,\pi_\omega(A)\,x) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathscr{P} \subseteq H_\omega$ e todo $A \in \mathscr{E}$.

Proposição 2.7.4. O cone natural $\mathscr{P} \subseteq H_\omega$, pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto de estados normais de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$, ou seja, dado $\omega \in \mathscr{E}_{*,+}$, existe um único $\mathbf{x} \in \mathscr{P}$, tal que, $\omega(A) = (\mathbf{x} \mid \pi(A)\,\mathbf{x})$ para todo $A \in \mathscr{E}$.

Proposição 2.7.5. Para cada *–automorfismo σ de uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$, existe uma única representação unitária $\hat{U}(\sigma)$ sobre $\pi(\mathscr{E})$ satisfazendo as seguintes propriedades :

i) $\hat{U}(\sigma)\,\pi(A)\,\hat{U}^\dagger(\sigma) = \pi[\sigma(A)]$, para todo $A \in \mathscr{E}$;

ii) $\hat{U}(\sigma)\,\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}$;

iii) $\hat{U}(\sigma)\,\hat{j} - \hat{j}\,\hat{U}(\sigma) \equiv [U(\sigma), \hat{j}] = 0.$

Para finalizar, gostaríamos de salientar que, esta última proposição apresenta o caminho de construção das realizações unitárias das operações de simetria associadas aos sistemas físicos em estudo. Em particular, observe que a realização unitária do grupo modular dada pela Proposição 2.6.15 , satisfaz claramente os requisitos da Proposição 2.7.5..

CAPÍTULO III

REALIZAÇÃO DE TOMITA–TAKESAKI PARA W^*–ÁLGEBRAS

E

UMA NOVA FORMULAÇÃO DA TEORIA QUÂNTICA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, inicialmente apresentamos as axiomatizações algébricas de von Neumann [74] e de Segal [75] da Teoria Quântica não relativística para sistemas com número finito de graus de liberdade. Em seguida, tomando por base as realizações de Tomita–Takesaki para as W^*–álgebras, introduzimos uma nova axiomatização para esta Teoria em termos de operadores lineares limitados atuando sôbre álgebras de Hilbert. Através desta reformulação, propomos uma generalização da referida Teoria, tendo como núcleo básico a ampliação do conjunto de observáveis que podem ser associadas ao sistema. Mostramos também que a estrutura de álgebra de Lie das observáveis, em nossa generalização, corresponde ao conceito de álgebra de Lie secundária, recentemente introduzido [76]. Por fim, estabelecemos as relações existentes entre a formulação desenvolvida neste Capítulo e aquela proposta por Takahashi, Umezawa e Matsumoto [54, 55].

3.1 – AXIOMATIZAÇÃO ALGÉBRICA DA TEORIA QUÂNTICA

A algebrização de qualquer teoria física consiste na identificação de estruturas matemáticas (entes e operações) que possam ser tomadas como noções primitivas. Desta forma, torna–se possível axiomatizar a teoria abstratamente, sem contudo perder de vista a fundamentação fenomenológica.

No caso da Teoria Quântica não relativística para sistemas com número finito de graus de liberdade, Jordan, von Neumann e Wigner [2], (de certa forma seguindo a postulação inicial de Heisenberg [3]), perceberam que as observáveis quantum–mecânicas e suas combinações lineares, produtos e limites em alguma topologia apropriada, deveriam ser consideradas como a estrutura algébrico–topológica básica para o desenvolvimento de uma axiomatização abstrata.

Com esta perspectiva, já em 1936, von Neumann [74] postula que as observáveis quantum–mecânicas são elementos de uma álgebra de Jordan de dimensão infinita fechada com respeito à "topologia fraca". De fato, a topologia empregada corresponde a uma abstração da topologia fraca definida sobre operadores lineares atuando em espaço de Hilbert.

Em 1947, Segal [75], procurando encontrar uma formulação empírica mais consistente para a axiomatização algébrica, argui que a convergência fraca empregada por von Neumann, embora tenha características matemáticas interessantes, não possui uma clara motivação fenomenológica e propõe a sua substituição pela convergência uniforme, que no seu entender, possui uma interpretação física mais direta.

É importante frisar que, sendo a fraca ou a uniforme a convergência empregada na definição da álgebra de Jordan, não se conseguiu exibir uma classificação completa de todas as possíveis realizações para a estrutura algébrica introduzida, embora, em qualquer caso, tenha–se estabelecido o elo com a formulação padrão da Teoria (formulação de Dirac) [77]. Este fato levou Segal a assumir que as observáveis de um sistema quantum–mecânico deveriam ter uma estrutura de álgebra de Jordan especial. Esta hipótese, devido ao desenvolvimento de estudos sobre a estrutura das álgebras de Jordan, atualmente pode–se considerar bem estabelecida [78].

Tendo em vista a nossa exposição sobre álgebras normadas no Capítulo II, podemos sintetizar a axiomatização algébrica de von Neumann e/ou de Segal para a mecânica quântica não relativística de sistemas com número finito de graus de liberdade, através dos seguintes axiomas :

Axioma 1 : Seja Σ um dado sistema quantum–mecânico e $\mathscr{U}$ o conjunto constituído por todas as observáveis limitadas que podem ser associados a Σ. Segue então que $\mathscr{U}$ pode ser identificado com o conjunto $\mathscr{R}(\mathscr{E})$, contido em uma W^*–álgebra $\mathscr{E}$ (ou C^*–álgebra com identidade).

Axioma 2 : Seja S o conjunto contituído por todos os possíveis estados que o sistema Σ pode assumir. Segue então que S pode ser identificado com o conjunto $E \subset \mathscr{E}_{*,+}$, i. é., com os elementos $\omega \in \mathscr{E}_{*,+}$ com $\|\omega\| = 1$; e $\omega(A)$, com $A \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, sendo interpretado como o valor esperado da observável A no estado ω.

Axioma 3 : A evolução temporal do sistema Σ é dada através de um grupo de * auto–morfismo a um parâmetro, $t \longrightarrow \sigma_t$, de $\mathscr{E}$ contínuo na topologia fraca, de tal forma que $\langle A \rangle_{obs}(t) = \omega(\sigma_t(A))$.

Atualmente, sabe–se que a convergência fraca, contrariamente ao ponto de vista de Segal, apresenta vantagens matemáticas e físicas frente à convergência uniforme e que portanto, deve–se empregar as W^*–álgebras na axiomatização algébrica da Mecânica Quântica [78]. Além disto, no caso de sistemas quantum–mecânicos com número finito de graus de liberdade, as W^*–álgebras relevantes são as semi–finitas (vide Definição 2.4.11). Vale a pena observar que esta axiomatização não influiu no rápido desenvolvimento experimentado pela Teoria Quântica até os anos 50 e que tem a quantização do campo eletromagnético, como o seu ponto máximo. A partir de então torna–se evidente que a eletrodinâmica quântica, a despeito do seu enorme sucesso, é marcada por diversas dificuldades conceituais, tais como as divergências infra–vermelho e ultra–violeta [79]. Embora tais dificuldades tivessem sido em parte superadas através do uso de procedimentos "ad hoc" permanecia, na época, a necessidade de uma formulação teórica mais consistente. Neste sentido, Segal [6], Haag e colaboradores [7, 8], Araki [9] e outros [10, 11], a partir de 1957, observando que estas dificuldades originavam–se do emprego "apriorístico" de um espaço de Hilbert (como é usual na formulação dita de Dirac), advogaram que uma solução satisfatória somente poderia ser encontrada partindo–se da axiomatização algébrica, já que nesta, o espaço de Hilbert é uma construção a posteriori, determinado pelo estado do sistema (vide 2.5). Realmente, este ponto de vista tem-se mostrado bastante frutífero quando aplicado à Teoria Quântica de Campos e à Mecânica Estatística Quântica na situação do equilíbrio termodinâmico [18].

Em resumo, podemos dizer que a axiomatização algébrica da Teoria Quântica, importa em considerar as W^*-álgebras semi-finitas como a estrutura abstrata básica que deve ser associada aos sistemas quantum-mecânicos não relativísticos com número finito de graus de liberdade.

Por outro lado, a Teoria das realizações lineares de W^*-álgebras desenvolvida no Capítulo II permite identificar esta estrutura como sendo, de fato, uma abstração de conjuntos de operadores lineares limitados, atuando em espaços de Hilbert. Em vista disto, pode-se introduzir uma axiomática para a Teoria diretamente em termos destes conjuntos de operadores. Assim, por exemplo, a realização G. N. S. da W^*-álgebra semi-finita $\mathscr{E}$, associada ao sistema quantum-mecânico Σ segundo o Axioma 1, induzida por estados puros, possui as seguintes características (vide Proposição 2.5.6 e Comentário) :

a) Irredutível, com espaço de representação $H_\omega = \{\pi_\omega(A)\, 1_\omega,\ \forall\, A \in \mathscr{E}\}$;

b) $\forall\, x \in H_\omega$ é vetor cíclico de $\pi_\omega(\mathscr{E})$ e representa os possíveis estados puros de $\mathscr{E}$.

Assim sendo, pode-se então formular a Teoria consistentemente em termos de espaços de Hilbert, como apresentada a seguir :

B1) A qualquer sistema quantum-mecânico Σ não-relativistivo com número finito de graus de liberdade, associa-se um espaço de Hilbert H, de tal forma que os estados puros estão em correspondência biunívoca com as direções em H;

B2) As observáveis do sistema são representadas por operadores lineares auto-adjuntos atuando em H, e o valor esperado da observável $A \in \mathscr{L}(H)$, quando o sistema encontra-se no estado $|x\rangle \in H$, é dado por $\langle x|A|x\rangle$, com $\| |x\rangle \| = 1$;

B3) A evolução dinâmica é determinada pelo seguinte grupo unitário a um parâmetro de *-auto-morfismo de $\mathscr{L}(H)$: $A \longrightarrow A_t = \mathrm{Exp}\,(-\frac{it}{\hbar}\,H)\ \ A\ \mathrm{Exp}\,(-\frac{it}{\hbar}\,H)$, sendo H o operador que representa a energia do sistema e $\hbar$ a constante de Planck.

Observe que o ítem B3 segue diretamente do Axioma 3, via o Teorema de Stone [66] sobre representação unitária de grupos de *-auto-morfismo a um parâmetro em espaços de Hilbert. A extensão desta formulação, no sentido de dar conta da existência de estados misturados, segue diretamente da Proposição 2.4.8. e importa na substituição do ítem B1 por :

B4) Os possíveis estados de Σ são representados por operadores positivos de classe traço sobre H e o valor esperado da observável A, quando o sistema encontra-se no estado f $\in \mathscr{L}_{1,+}(H)$ é dado por traço fA, com traço f = 1.

Como vemos, esta realização da axiomatização algébrica corresponde à formulação usual da Mecânica Quântica desenvolvida por Dirac e von Neumann, o que por si só já justificaria o desenvolvimento da formulação algébrica da Teoria via Axiomas 1, 2 e 3. Mostraremos, entretanto, nas próximas seções, que a axiomatização algébrica permite também uma reformulação da Teoria que além de possibilitar uma representação vetorial para todos os estados acessíveis ao sistema, conduz de forma natural a uma generalização da teoria pela incorporação de novas observáveis associadas ao sistema.

3.2 – ÁLGEBRAS DE HILBERT E TEORIA QUÂNTICA

A toda (vide seções 2.6 e 2.7) W^*-álgebra semi-finita $\mathscr{E}$, podemos associar uma classe de realizações redutíveis (as realizações Tomita–Takesaki), as quais são, a menos de equivalência unitária, realizações G. N. S. induzidas por estados misturados fidedignos (vide Proposição 2.6.14). Tendo em vista as características apresentadas nas Proposições 2.6.16, 2.7.4 e 2.7.5, para as referidas realizações, introduzimos a seguinte reformulação, à axiomatização padrão :

C1) A qualquer sistema quantum–mecânico Σ não relativístico com número finito de graus de liberdade, associa–se uma álgebra de Hilbert H, de tal forma que os possíveis estados do sistema estão em correspondência biunívoca com as direções de um subconjunto $\mathscr{P} \subset$ H, que possui a estrutura de um cone conexo auto–dual;

C2) As observáveis do sistema são representadas pelos elementos auto–adjuntos de uma álgebra de von Neumann de operadores $M \subset \mathscr{L}(H)$, que deixam $\mathscr{P}$ invariante, e o valor esperado da observável $\hat{A} \in M$ quando o sistema encontra–se em um estado descrito por $|x> \in \mathscr{P}$, com $\| |x> \| = 1$, é dado por $<x|\hat{A}|x>$;

C3) A evolução dinâmica é determinada pelo seguinte grupo unitário a um parâmetro de *–auto–morfismo de $M \subset \mathscr{L}(H)$: $\hat{A} \longrightarrow \hat{A}_t = \mathrm{Exp}\,(-\frac{it}{\hbar}\,\hat{L})\;\hat{A}\;\mathrm{Exp}\,(-\frac{it}{\hbar}\,\hat{L})$, sendo $\hat{L}$ o operador de Liouville associado ao sistema.

Tem–se então, que as formulações baseadas nos Axiomas B1, B2, B3 e C1, C2, C3 diferem basicamente nos seguintes aspectos :

a) Enquanto na formulação usual, o espaço de realização possui uma estrutura de espaço Hilbert, na reformulação que introduzimos ele é uma álgebra de Hilbert. Este fato, na verdade, é o responsável pela correspondência entre os estados do sistema com apenas as direções do subconjunto $\mathscr{P}$ da álgebra de Hilbert;

b) Na formulação de Dirac — von Neumann existe uma "degenerescência" entre a observável energia e o operador infinitesimal do grupo de *—auto—morfismo associado a evolução temporal; já na reformulação proposta, esta "degenerescência" é quebrada. Na realidade, haverá mudanças de todos os geradores infinitesimais dos grupos de simetria, como veremos mais adiante.

A ocorrência de diferenças entre os dois enfoques origina—se do fato da nossa formulação corresponder a uma realização redutível da axiomática algébrica de von Neumann, ao passo que a formulação usual corresponde a uma realização irredutível.

As principais características da reformulação proposta podem ser explicitadas, usando—se apenas a propriedade de seu espaço de realização poder sempre ser considerado um ideal bilateral completo de alguma W^*—álgebra [67]. No entanto, objetivando estabelecer as relações desta reformulação com a formulação de Dirac — von Neumann, bem como motivar a introdução de uma generalização, passaremos a considerar como espaço de realização a álgebra de Hilbert constituída pelos operadores de Hilbert—Schmidt $\mathscr{L}_2(\mathscr{H})$ sobre o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, ou seja, estaremos usando uma realização concreta para o espaço de realização.

Levando—se em conta a Definição 1.8.9 e a Proposição 1.8.10., as operações algébricas em $\mathrm{H} = \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$ podem ser dadas por :

$$\begin{cases} \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle \equiv |\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\rangle & (3.1) \\ |\psi_1\rangle \cdot |\psi_2\rangle \equiv |\psi_1\psi_2\rangle & (3.2) \\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle \equiv \text{traço } \psi_1^\dagger\psi_2 & (3.3) \end{cases}$$

para quaisquer que sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{C}$ e $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$. É importante ressaltar que consideraremos, de forma indistinta, $|\psi\rangle$ como elemento de uma álgebra de Hilbert H, ou como um operador de Hilbert — Schmidt sobre o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$.

Segundo o exemplo da Definição 2.2.4., $\mathscr{L}_2(\mathscr{H})$ é um ideal bilateral de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ e portanto, pode–se definir sobre $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}) = \mathrm{H}$, os seguintes operadores:

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{A}} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} \\ \hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle = |\mathrm{A}\psi\rangle , \\ \tilde{\mathrm{A}} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} , \\ \tilde{\mathrm{A}}|\psi\rangle = |\psi\mathrm{A}\rangle , \text{ com } \mathrm{A} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \end{cases} \tag{3.4}$$

Define–se também a involução natural em H, como :

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{j}} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} \\ \hat{\mathrm{j}}\, |\psi\rangle = |\psi^{\dagger}\rangle , \end{cases} \tag{3.5}$$

sendo $\psi^{\dagger}$ o adjunto do operador linear $\psi \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$.

Proposição 3.2.1. Os operadores $\hat{\mathrm{A}}$ e $\tilde{\mathrm{A}}$ são lineares e limitados, enquanto $\hat{\mathrm{j}}$, é uma conjugação em H.

Demonstração:

A linearidade dos operadores $\hat{\mathrm{A}}$ e $\tilde{\mathrm{A}}$ juntamente com a anti–linearidade de $\hat{\mathrm{j}}$ e mais o fato de $\hat{\mathrm{j}}^2 = 1$, segue, diretamente de suas definições. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\hat{\mathrm{j}}^{\dagger}\hat{\mathrm{j}}|\psi\rangle &= \langle\phi^{\dagger}|\psi^{\dagger}\rangle \\ &= \text{traço } \phi\, \psi^{\dagger} = \text{traço } \psi^{\dagger}\, \phi \\ &= \langle\psi|\phi\rangle , \end{aligned}$$

e portanto, $\hat{\mathrm{j}}$ é uma conjugação em H. Por outro lado, definindo–se as normas de $\hat{\mathrm{A}}$ e $\tilde{\mathrm{A}}$, respectivamente por :

$$\begin{cases} \|\hat{A}\| = \sup \left\{ \dfrac{\|\hat{A}\,|\psi>\|}{\|\,|\psi>\|},\ \text{para todo } |\psi> \in H \right\} \\ \|\tilde{A}\| = \sup \left\{ \dfrac{\|\tilde{A}\,|\psi>\|}{\|\,|\psi>\|},\ \text{para todo } |\psi> \in H \right\}, \end{cases}$$

tem–se que $\|\hat{A}\| = \|\tilde{A}\| = \|A\|$, pois,

$$\sup \left\{ \frac{\|\hat{A}\,|\psi>\|^2}{\|\,|\psi>\|^2},\ \text{para todo } |\psi> \in H \right\} = \sup \left\{ \frac{\text{traço } A^{\dagger} A \psi \psi^{\dagger}}{\text{traço } \psi^{\dagger} \psi} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|\tilde{A}\,|\psi>\|^2}{\|\,|\psi>\|^2},\ \text{para todo } |\psi> \in H \right\}$$

$$= \text{traço } A^{\dagger} A = \|A\|^2;$$

onde usamos o fato de que traço AB $\leq$ (traço A)(traço B). C.Q.D.

Consideramos agora o fecho na topologia fraca de H dos seguintes conjuntos de operadores, $M \equiv \left\{ \hat{A} \in \mathscr{L}\,[\mathscr{L}_2\,(\mathscr{H})] \right\}$ e $\overline{M} \equiv \left\{ \tilde{A} \in \mathscr{L}\,[\mathscr{L}_2\,(\mathscr{H})\,] \right\}$. Segue que M e $\overline{M}$ são duas W^*–sub–álgebras da W^*–álgebra $\mathscr{L}(H)$ constituída por todos os operadores lineares limitados atuando em H, isto é, $\mathscr{L}\,(H) = \mathscr{L}\,[\mathscr{L}_2\,(\mathscr{H})]$.

Proposição 3.2.2. As W^*–álgebras M e $\overline{M}$ possuem as seguintes propriedades :

i) M e $\overline{M}$ são respectivamente *–isomorfa e *–anti–isomorfa a W^*–álgebra $\mathscr{L}(\mathscr{H})$

ii) $\overline{M}$ é o comutante de M, i. é., $\overline{M} = M'$

iii) $M \cap \overline{M} = \alpha\, 1$, com $\alpha \in C$

iv) $J : M \longrightarrow \overline{M}$, dado por $J(\hat{A}) = \hat{j}\ \hat{A}^{\dagger}\ \hat{j}$, com $\hat{j}$ a involução natural em H, é uma aplicação *–anti–isomorfa.

Demonstração:

i) Segue diretamente de suas definições que os operadores lineares limitados $\hat{A} \in M$ e $\tilde{A} \in \overline{M}$, possuem as seguintes propriedades :

a) $\hat{A}_1 \hat{A}_2 = (A_1 \ A_2)$ e $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 = A_1 A_2$

b) $\hat{A}^{\dagger} = (A^{\dagger})$ e $\tilde{A}^{\dagger} = (A^{\dagger})$

c) $\lambda_1 \hat{A}_1 + \lambda_2 \hat{A}_2 = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$ com $\lambda_1, \lambda_2 \in C$

d) $\lambda_1 \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{A}_2 = (\overset{*}{\lambda}_1 A_1 + \overset{*}{\lambda}_2 A_2)$, com $\lambda_1 \lambda_2 \in C$.

Como de acordo com a Proposição 3.2.2., $\|\hat{A}_1\| = \|\tilde{A}_1\| = \|A_1\|$, tem−se a propriedade (i) demonstrada (vide Proposição 2.2.3.).

ii) Quaisquer que sejam $\hat{A} \in M$ e $\tilde{B} \in \overline{M}$, segue que :

$$\hat{A}\,\tilde{B}\,|\psi\rangle = |A\,\psi\,B\rangle = \tilde{B}\,\hat{A}\,|\psi\rangle,\ \forall\,|\psi\rangle \in H;$$

portanto $[\hat{A}, \tilde{B}] = \hat{A}\,\tilde{B} - \tilde{B}\,\hat{A} = 0$. Logo, os elementos de $\overline{M}$ comutam com todos os elementos de M, i. é., $\overline{M} \subseteq M'$.

Considerando agora que qualquer $|\psi\rangle \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$ pode ser escrito como $|A\ \phi\rangle$ e/ou $|\phi\ B\rangle$ com $A, B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ e $|\phi\rangle \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$, tem−se que,

$\theta\,|\psi\rangle = \theta\,\hat{A}\,|\phi\rangle$, e supondo−se que $\theta \in \overline{M}$, tem−se que :

$$\theta\,|\psi\rangle = \hat{A}\,\theta\,|\phi\rangle = \hat{A}\,|\phi\, B\rangle$$
$$= \hat{A}\,\tilde{B}\,|\phi\rangle = \tilde{B}\,\hat{A}\,|\phi\rangle$$
$$= \tilde{B}\,|\psi\rangle,$$

portanto, $M \subseteq \overline{M}'$. Estas duas relações de inclusão, implicam que $\overline{M} = M'$.

iii) A demonstração do item (iii) é imediata.

iv) Quaisquer que sejam $|\psi\rangle \in H$ e $\hat{A} \in M$, tem-se que :

$$J(\hat{A})\,|\psi\rangle = \hat{j}\,\hat{A}^{\dagger}\,\hat{j}\,|\psi\rangle$$
$$= |\psi\, A\rangle$$
$$= \tilde{A}\,|\psi\rangle.$$

Portanto, J estabelece uma correspondência biunívoca entre M e $\overline{M}$ que é anti-linear. Logo, J é um *-anti-isomorfismo. C.Q.D.

No que tange aos estados associados ao sistema nesta reformulação, observamos que em virtude da Definição 1.8.9., temos que $f^{1/2}$, com f sendo um operador positivo de classe traço sobre $\mathscr{H}$, é um vetor pertencente a $H = \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$. Por outro lado, desde que,

$$\langle f^{1/2}\,|\hat{A}|\,f^{1/2}\rangle = \text{traço}\,(f^{1/2})^{\dagger}\,A\,f^{1/2}$$
$$= \text{traço}\, f\, A$$
$$= \omega(A),$$

segue que o conjunto de elementos $\left\{|f^{1/2}\rangle \in H, \text{ com } f \in \mathscr{L}_{1,+}(\mathscr{H})\right\}$ corresponde ao subconjunto $\mathscr{P} \subset H$.

Vale a pena frisar que, sendo os valores fisicamente mensuráveis dados por $\langle f^{1/2}|\hat{A}|\,f^{1/2}\rangle$, podemos considerar que qualquer vetor $|\psi\rangle \in H$ satisfazendo a igualdade $|\psi\rangle.\,\hat{j}\,|\psi\rangle = |f\rangle$ representa o mesmo estado dinâmico que o vetor $|f^{1/2}\rangle \in \mathscr{P} \subset H$, como demonstramos na Proposição a seguir.

Proposição 3.2.3. Seja $|f^{1/2}> \in \mathscr{P} \subset H$ e $|\psi> \in H$, tem–se então que $<\psi|\hat{A}|\psi> = <f^{1/2}|\hat{A}|f^{1/2}>$ se e somente se $|\psi>.\hat{j}\,|\psi> = |f>$.

Demonstração:

Em vista de (3.3) tem–se que :

$$
\begin{aligned}
<\psi|\hat{A}|\psi> &= \text{traço } \psi^{\dagger} A \psi \\
&= \text{traço } A \psi \psi^{\dagger};
\end{aligned}
$$

tendo–se portanto que :

$$\omega(A) = <\psi|\hat{A}|\psi> \Leftrightarrow \psi \psi^{\dagger} = f.$$

Se considerarmos as definições (3.2) e (3.6), podemos escrever o resultado anterior como :

$$\omega(A) = <\psi|\hat{A}|\psi> \Leftrightarrow |\psi>.\hat{j}\,|\psi> = |f>. \text{ C.Q.D.}$$

Proposição 3.2.4. Se f é inversível, segue então que $|f^{1/2}>$ é vetor cíclico e separador para M.

Demonstração:

Sendo f inversível, tem–se que $f^{1/2}$ possui inverso e portanto podemos reescrever qualquer que seja $|\psi> \in H$, como :

$$|\psi> = |\phi f^{1/2}>, \text{ com } \phi = \psi f^{-1/2};$$

por outro lado,

$$|\phi f^{1/2}> = \hat{\phi}\,|f^{1/2}>,$$

então, tem–se que

$$|\psi> = \hat{\phi}\,|f^{1/2}>.$$

Logo, $|f^{1/2}>$ é vetor cíclico para M. De forma semelhante, demonstra–se que $|f^{1/2}>$ é vetor cíclico para $\tilde{M}$ e portanto, de acordo com a Proposição 2.3.10 $|f^{1/2}>$ é cíclico e separador para M. C.Q.D.

Proposição 3.2.5. O operador modular associado ao vetor $|f^{1/2}>$ cíclico e separador é $\Delta_{f^{1/2}} = \hat{f}\,\tilde{f}^{-1}$.

Demonstração:

De acordo com a Definição 2.6.8., devemos demonstrar que $J\left[\hat{f}^{1/2}\,\tilde{f}^{-1/2}\right]$ coincide com o operador $\hat{S}$ definido em 2.6.6.. De fato,

$$\begin{aligned} J\left[\hat{f}^{1/2}\,\tilde{f}^{-1/2}\right]\hat{A}\,|f^{1/2}> &= J\left[\hat{f}^{1/2}\,\tilde{f}^{-1/2}\right]|A\,f^{1/2}> \\ &= \hat{j}\,|f^{1/2}\,A\,f^{1/2}\,f^{-1/2}> \\ &= |A^{\dagger}\,f^{1/2}>,\ \text{pois}\ f^{1/2\dagger} = f^{1/2} \\ &= \hat{A}^{\dagger}\,|f^{1/2}>.\ \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

Da Proposição (3.2.5) segue que o grupo modular associado ao vetor cíclico e separador $|f^{1/2}> \in \mathscr{P}$, é, $\hat{\Delta}^{i\alpha}_{f^{1/2}} = (\hat{f})^{i\alpha}\,(\tilde{f})^{-i\alpha}$, com α real. Então naturalmente o estado $|f^{1/2}>$ é invariante frente a este grupo (vide Proposição 2.6.11). De fato tem–se :

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^{i\alpha}_{f^{1/2}}|f^{1/2}> &= (\hat{f})^{i\alpha}\,(\tilde{f})^{-i\alpha}\,|f^{1/2}> \\ &= |f^{1/2}>;\ \text{qualquer que seja}\ \alpha \in R. \end{aligned}$$

Um fato notável desta realização da axiomática algébrica é que a partir de qualquer operador $\hat{A} \in M$, pode–se construir operadores pertencentes a $\mathscr{L}$ (H) que aniquilam qualquer $|f^{1/2}> \in \mathscr{P}$ que seja cíclico e separador.

Proposição 3.2.6. Qualquer que seja $\hat{A} \in M \subset \mathscr{L}(H)$, tem-se que o operador $\hat{A}_{f^{1/2}} \equiv \left\{\hat{\Delta}^{1/2}_{f^{1/2}}\ \hat{A} - \tilde{A}\right\} \in \mathscr{L}(H)$ aniquila o vetor $|f^{1/2}>$ cíclico e separador, i. é., $\hat{A}_{f^{1/2}}\,|f^{1/2}> = 0$.

Demonstração:

Seja $\hat{\Delta}^{1/2}_{f^{1/2}} = \hat{f}^{1/2}\,(\tilde{f}^{-1/2})$ a raiz quadrada do operador modular associada à $|f^{1/2}>$. Segue então que,

$$\begin{aligned}\hat{j}^2\,\hat{\Delta}^{1/2}_{f^{1/2}}\,\hat{A}\,|f^{1/2}> &= \hat{j}\,(\hat{j}\,\hat{\Delta}^{1/2}_{f^{1/2}})\,\hat{A}\,|f^{1/2}>\\ &= \hat{j}\,\hat{S}\,\hat{A}\,|f^{1/2}>\\ &= \hat{j}\,\hat{A}^{\dagger}\,|f^{1/2}>.\end{aligned}$$

Levando em conta que: $\hat{j}^2 = 1$ e $\hat{j}|f^{1/2}> \;=\; |f^{1/2}>$, a igualdade acima pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{1/2}_{f^{1/2}}\,\hat{A}\,|f^{1/2}> &= \hat{j}\,\hat{A}^{\dagger}\,\hat{j}|f^{1/2}>\\ &= \tilde{A}\,|f^{1/2}>.\end{aligned}$$

Logo;

$$(\hat{\Delta}^{1/2}_{f^{1/2}}\,\hat{A} - \tilde{A})\,|f^{1/2}> = 0 \qquad \text{C.Q.D.} \tag{3.6}$$

Multiplicando a relação (3.6) por $\hat{\Delta}^{-1/2}_{f^{1/2}}$ obtemos que o operador $\hat{A} - \hat{\Delta}^{-1/2}_{f^{1/2}}\,\tilde{A}$ também aniquila o mesmo estado. C.Q.D.

No que diz respeito às representações unitárias dos grupos a um parâmetro de

*–automorfismo de M, segundo o Teorema de Stone [66], elas são dadas por $\mathcal{U}(\alpha) = e^{i\alpha F}$, sendo F um operador auto–adjunto sobre H. Entretanto, a propriedade (iii) da Proposição 2.7.5. obriga $\mathcal{U}(\alpha)$ a comutar com a conjugação $\hat{j}$, e portanto, $J(F) = -F$. Disto segue que os geradores infinitesimais destes grupos, ou seja, F, não pertencem à W^*–álgebra M. Em particular este é o caso do gerador das translações infinitesimais no tempo, i., é., o Liouvilliano do sistema.

Além disto, desde que os *–automorfismos de M são dados por $\hat{A}_\alpha = \mathcal{U}(\alpha)\, \hat{A}\, \mathcal{U}(\alpha)^{-1}$ temos que $\mathcal{U}(\alpha)$ pode ser escrito como $\mathcal{U}(\alpha) = \hat{\mathcal{U}}(\alpha)\, \tilde{V}(\alpha)$, sendo $\tilde{V}(\alpha)$ uma família qualquer de operadores de $\overline{M}$, pois,

$$\hat{\mathcal{U}}(\alpha)\, \tilde{V}(\alpha)\, \hat{A}\, \hat{\mathcal{U}}(\alpha)^{-1}\, \tilde{V}(\alpha)^{-1} = \hat{\mathcal{U}}(\alpha)\, \hat{A}\, \hat{\mathcal{U}}(\alpha)^{-1}$$

$$= \mathcal{U}(\alpha)\, A\, \mathcal{U}(\alpha)^{-1} = \hat{A}_{\alpha'}$$

onde apenas usamos o fato de M ser *–isomorfa a $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Um raciocínio análogo aplicado aos * auto–morfismo de $\overline{M}$, conduz à determinação da família $\tilde{V}(\alpha)$ como sendo $\tilde{\mathcal{U}}(\alpha)$, e portanto os *–auto–morfismos de M são implementados por $\mathcal{U}(\alpha) = \hat{\mathcal{U}}(\alpha)\, \tilde{\mathcal{U}}(\alpha)$.

Tomando–se a representação exponencial para estes grupos, tem–se que,

$$\mathcal{U}(\alpha) = \mathrm{Exp}(i\alpha\hat{F})\, \mathrm{Exp}(-i\alpha\tilde{F})$$

$$= \mathrm{Exp}(i\alpha[\hat{F} - \tilde{F}]) = \mathrm{Exp}[i\alpha(\hat{F} - J(\hat{F}))] \quad \text{pois} \quad \hat{F}^\dagger = \hat{F}.$$

Nestes termos, o Liouvilliano associado ao sistema, corresponde ao operador $\mathscr{L} = \hat{H} - J(\hat{H})$, sendo $\hat{H} \in M$, o operador associado a energia mecânica de Σ.

Por fim, vale destacar que, sendo o estado de equilíbrio termodinâmico à temperatura T, invariante por translações temporais e representado nesta formulação por um vetor cíclico e separador $|\mathrm{Exp}\,(-\frac{\beta}{2}\,(\mathrm{H}-\mathscr{F})\rangle$ sendo $\beta = (\mathrm{kT})^{-1}$, H a Hamiltoniana associada ao sistema e $\mathscr{F}$ a energia livre de Helmholtz [80], segue então que o grupo de *–auto–morfismo associado à evolução temporal pode ser identificado com o grupo modular relativo a este vetor. Este resultado, em verdade, representa o ponto de partida para o emprego de axiomática algébrica na solução de algumas questões relativas ao equilíbrio termodinâmico; em particular é o ponto de partida do formalismo de Haag–Hugenoltz–Winnink [69, 81].

3.3 – UMA GENERALIZAÇÃO DA AXIOMÁTICA QUÂNTICA

É natural que, sendo a reformulação introduzida na seção (3.2) uma realização redutível da axiomática algébrica associada ao sistema quantum–mecânico Σ, o espaço dos estados seja também espaço de realização de uma outra W^*–álgebra, i. é., $\overline{M} = J(M)$, *–anti–isomorfa a M. Por outro lado, considerando–se que a operação de inversão temporal sobre Σ é descrita através de uma conjugação definida em H, pode–se pensar que $\overline{M}$ é a W^*–álgebra associada a um sistema quantum–mecânico Σ', idêntico a Σ, porém, com evolução temporal invertida com respeito a Σ [58].

Em vista disto, a reformulação introduzida permite de forma imediata a proposição de uma generalização à teoria, pela incorporação dos elementos de $\overline{M}$ à W^*–álgebra associada a Σ, que então passaria a ser $M \cup \overline{M} = \mathscr{L}(\mathrm{H})$.

Estes novos graus de liberdade, adicionados ao sistema quantum–mecânico Σ, podem ser interpretados como graus de liberdade "fantasmas" pois não são ainda diretamente observados. Contudo, como podemos notar, eles já desempenham papel relevante, desde que todos os geradores dos grupos de *–auto–morfismo dependem explicitamente desses graus de liberdade, em particular, a própria evolução temporal.

A relação entre os elementos de matriz dos graus de liberdade "fantasmas" e os usualmente observados é explicitado na Proposição a seguir.

Proposição 3.3.1. Os elementos de matriz dos operadores $\hat{A} \in M$ e $J(\hat{A}) \in \overline{M}$, satisfazem a seguinte relação :

$$< \psi \,|\hat{A}|\, \phi >^{*} = < \phi^{\dagger} |\tilde{A}|\, \psi^{\dagger} >$$

Demonstração: Usando–se as propriedades $(\hat{j})^2 = 1$ e $(\hat{j})^{\dagger} = \hat{j}$, temos que :

$$\begin{aligned} <\phi|\, \hat{A}^{\dagger} |\psi> &= <\phi|\, \hat{j}^2\, \hat{A}^{\dagger}\, \hat{j}^2 |\, \psi> \\ &= <\phi|\, \hat{j}^{\dagger}\, \hat{j}\, \hat{A}^{\dagger}\, \hat{j}\, \hat{j}\, |\psi> = <\phi^{\dagger}|\, \tilde{A}\, |\psi^{\dagger}>; \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $|\phi>$, $|\psi> \in H = \mathscr{L}_2(\mathscr{H})$.

Por outro lado, da definição de adjunto, temos que,

$$<\phi|\, \hat{A}^{\dagger}\, |\psi> = <\psi|\, \hat{A}\, |\phi>^{*}.$$

Logo, segue que, $<\psi|\, \hat{A}\, |\phi>^{*} = <\phi^{+}|\, \tilde{A}\, |\psi^{\dagger}>$. C. Q. D.

Assim, no que tange aos valores esperados dos observáveis do sistema Σ e do seu "dual" Σ', temos que, $<\psi|\, \hat{A}\, |\psi> = <\psi^{\dagger}|\, \tilde{A}\, |\psi^{\dagger}>$ desde que $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$. Portanto, apenas no caso em que tomemos estados invariantes pela conjugação, i. é., $|\psi^{\dagger}> = |\psi>$, os valores esperados serão iguais. Observe que este é o caso de todos os vetores $|f^{1/2}> \in \mathscr{R}$

Naturalmente, todos os resultados que venham a ser deduzidos da generalização proposta serão também válidos para a reformulação da Teoria Quântica resumida em C1, C2, C3, a menos daqueles que decorram da interpretação de que os elementos auto–adjuntos de $\overline{M}$

sejam observáveis. Cabe ainda ressaltar que a generalização introduzida, do ponto de vista algébrico, corresponde à classe das realizações irredutíveis de uma W^*–álgebra ampliada.

Em síntese, dado um sistema físico Σ não relativístico com número finito de graus de liberdade, postulamos que a sua descrição **quantum–mecânica generalizada** obedece aos seguintes axiomas :

D1) Os possíveis estados do sistema Σ estão em correspondência biunívoca com o conjunto de direções em uma álgebra de Hilbert H

D2) Os observáveis do sistema são representados pelos operadores auto–adjuntos atuando em H; e seus valores esperados são dados por $<\psi| \hat{A} |\psi>$, com $\|\psi\| = 1$;

D3) A evolução dinâmica do sistema é dada pelo seguinte grupo unitário a um parâmetro de *–auto–morfismo : $\hat{A} \longrightarrow \hat{A}_t = \text{Exp}\,(\frac{it}{\hbar}\,\hat{L})\;\; \hat{A}\;\; \text{Exp}\,(\frac{-it}{\hbar}\,\hat{L})$, com $\hat{L} = \hat{H} - J(\hat{H})$, sendo $\hat{H}$ a energia do sistema e $\hat{J}$ a conjugação natural em H.

Comparando–se estes axiomas com aqueles empregados na axiomatização de Dirac – von Neumann (vide B1, B2, B3), pode–se estabelecer uma correspondência entre um sistema σ com n graus de liberdade nesta generalização e um sistema hipotético $\bar{\sigma}$ com 2n graus de liberdade na formulação de Dirac, sendo então n destes graus *–isomorfos aos graus de liberdade de σ, e os n restantes *–anti–isomorfos. Vale a pena frisar que estes pares de graus de liberdade são completamente independentes; em particular, eles evoluem no tempo sem nenhum tipo de interação entre si. Consideraremos de agora em diante esta correspondência quando do desenvolvimento da generalização e/ou da reformulação (vide C1, C2, C3) introduzida para a Teoria Quântica.

Neste sentido, a estrutura de álgebra de Lie associada às observáveis de Σ, na generalização proposta, pode ser deduzida de forma direta. Assim, por exemplo, supondo–se que $\mathbf{1}$, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2,\dots,$ $\hat{A}_{2n}$, sejam os geradores da álgebra de Lie das observáveis associada à W^*–álgebra M, cujas constantes de estrutura são os números reais α^k_{ij}, com i, j, k = 1,..., 2n, então, de acordo com as Proposições 2.1.8., 2.1.9. e 3.2.3., temos que $\tilde{1} = \hat{1}$, $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2,\dots,$ $\tilde{A}_{2n}$, serão os geradores da álgebra de Lie das observáveis associada à W^*–álgebras $\overline{M}$, cujas constantes de estrutura são os números reais $\alpha^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} = -\,\alpha^k_{ij}$ com i, j, k = 1,..., 2n, uma vez que

$$\hat{A}_i \Delta\ \hat{A}_j\ \equiv\ \frac{1}{i}\,(\hat{A}_i\ \hat{A}_j - \hat{A}_j\ \hat{A}_i)\ =\ \sum_k \alpha^k_{ij}\ \hat{A}_k;$$

e portanto,

$$\tilde{A}_i\ \Delta\ \tilde{A}_j\ \equiv\ -\frac{1}{i}\,(\tilde{A}_i\ \tilde{A}_j - \tilde{A}_j\ \tilde{A}_i)\ =\ -\sum_k \alpha^k_{ij}\ \tilde{A}_k;$$

onde usamos o fato de que $\tilde{A} = \hat{j}\ \hat{A}^\dagger\ \hat{j}$, sendo $\hat{j}$ anti–unitário. Desta forma, podemos dizer que a estrutrura de álgebra de Lie das observáveis na generalização proposta, possui 4n + 1 geradores, com constantes de estrutura d^k_{ij} com i, j, k = 1, 2,..., 4 n+1, dadas por :

:

$$d^k_{ij}\ =\ \begin{cases} \alpha^k_{ij} & \text{, quando i, j, k = 1, 2, ..., 2n+1} \\ -\alpha^k_{ij} & \text{, quando i, j, k = 2n+1, ..., 4n+1} \\ 0 & \text{, em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Esta estrutura de álgebra de Lie das observáveis, coincide com o conceito de álgebra de Lie secundária associada à álgebra de Lie (primária) contida em M, recentemente introduzida, ao formularmos um princípio dinâmico abstrato que permitisse deduzir, de uma forma unificada, as diversas generalizações às mecânicas quântica e clássica encontradas na literatura [76].

De fato, diversos autores têm demonstrado a necessidade da ampliação do conjunto de observáveis associadas a um dado sistema quantum–mecânico. Assim, por exemplo, Prigog e colaboradores [20, 21], baseados em um resultado de Misra e Courbage [22, 23] t mostrado que a busca de uma solução satisfatória para o tratamento da irreversibilid temporal observada nos fenômenos ao nível macroscópico, necessariamente acarreta ampliação do conjunto de observáveis. Por outro lado, Takahashi, Umezawa, Matsum e outros [26, 27] têm mostrado que a duplicação do número de graus de liberdade introdução de graus de liberdade "fantasma", é fundamental para um tratamento consist da Teoria Quântica à temperatura e densidade finitas. Cabe ainda citar Bohm e colaborad [28] que também foram levados a propor a ampliação do conjunto das observáveis, tentativa de interpretar a Teoria Quântica no contexto de ordem implícita [29].

As relações existentes entre a generalização desenvolvida neste trabalho formalismo proposto por Takahashi, Umezawa e Matsumoto referido acima, serão objet análise na próxima seção.

3.4 – RELAÇÕES ENTRE A AXIOMATIZAÇÃO INTRODUZIDA E A "THERMO FIELD DYNAMICS"

De acordo com o segundo exemplo da Definição 2.2.4, podemos considerar a á de Hilbert $\mathbf{H}$ associado ao sistema Σ, como sendo $\mathbf{H} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$.

Nestes termos, qualquer que seja, $\hat{A} \in M$, temos que, $\hat{A} = A \otimes 1$ com $A \in$ (vide Definição 1.8.13 e Apêndice 1). Portanto, temos que $\tilde{\hat{A}} = J(\hat{A}) = 1 \otimes A$, pois :

$$J(\hat{A})\ |n,m\rangle = \hat{j}\ \hat{A}^{\dagger}\ \hat{j}\ |n,m\rangle;$$

desde que $|n,m\rangle = |n\rangle\langle m|$ (vide seção 1.7), sendo $\{|n\rangle\}$ uma base ortogonal de fato,

$$\begin{aligned} J(\hat{A})\,|n,m\rangle &= \hat{j}\,\hat{A}^{\dagger}\,|m\rangle\,\langle n| \\ &= |n\rangle\,\langle m|\,A \\ &= 1 \otimes A\,|n,m\rangle . \end{aligned}$$

Desta forma, todos os resultados encontrados nas duas últimas seções podem ser transcritos imediatamente usando–se as noções de produto tensorial de espaços de Hilbert e de operadores. Em particular, os estados $|f^{1/2}\rangle \in \mathscr{P} \subset H$, são dados por :

$$|f^{1/2}\rangle = \sum_{n,m} \alpha_n\,\alpha_m^{*}\,|n,m\rangle, \text{ com } \sum_{n} |\alpha_n|^2 = \sum_{m} |\alpha_m|^2 = 1, \tag{3.7a}$$

$$|f^{1/2}\rangle = \sum_{n} p_n^{1/2}|n,n\rangle, \text{ com } \sum_{n} p_n = 1, \tag{3.7b}$$

quando se tratar de um estado puro ou misturado do sistema, respectivamente.

Se tomarmos a base ortonormal $\{|n\rangle\}$ como sendo a auto–base de $\hat{H} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, i. é.,

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle,$$

o vetor cíclico e separador representativo do estado de equilíbrio $|f^{-\frac{\beta}{2}(H-\Omega)}\rangle = |0(\beta)\rangle$, torna–se (vide seção 3.2),

$$|0(\beta)\rangle = Z(\beta)^{-1/2} \sum_{n} \operatorname{Exp}\left(-\frac{\beta}{2}\,E_n\right)|n,n\rangle \tag{3.8}$$

com $Z(\beta) = \sum_{n} \mathrm{Exp}(-\beta E_n)$ sendo a função partição.

Esta representação vetorial de nossa formulação para o estado de equilíbrio, foi originalmente introduzida em outro contexto por Takahashi e Umezawa em 1975 e desde então, tem sido aplicada em cálculos perturbativos via técnicas de funções de Green (propagadores causais) em uma ampla variedade de áreas da Física [27, 82, 83, 84].

A equivalência entre a formulação de Takahaski–Umezawa, usualmente denominada "Thermo Field Dynamics", e a abordagem axiomático de Haag–Hugenholtz–Winnink para o equilíbrio termodinâmico foi inicialmente estudada por Ojima [82] em 1981. A formulação por nós introduzida neste trabalho, além de permitir estabelecer a citada relação, possibilita de forma natural uma extensão da "Termo Field Dynamics" a situações outras que não a do equilíbrio.

Em particular, supondo que no instante $t = 0$ o estado do sistema seja descrito pelo vetor $|G\rangle = |f^{1/2}\rangle$ cíclico e separador, de acordo com as Proposições 3.2.4., 3.2.5., 3.2.6., temos que :

$$\begin{cases} \hat{A}\,|G\rangle = \mathbf{f}^{\,-1/2}\,\tilde{A}\,|G\rangle \;, \quad \text{com } \mathbf{f} = \hat{f}\,\tilde{f}^{-1} \\ \hat{j}\,|G\rangle = |G\rangle \;, \text{ pois } |G\rangle \in \mathscr{P} \end{cases} \tag{3.9}$$

No caso de $f = \mathrm{Exp}\,[-(2\,K)]$ com K um elemento de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, as condições (3.9) foram introduzidas de uma forma "ad–hoc" por Matsumoto em 1986, como as condições suficientes para permitir que o formalismo de Takahashi–Umezawa fôsse estendido aos estados de não equilíbrio [30]. Logo, em vista de nossos resultados, podemos dizer que a extensão de Matsumoto usualmente referida como "Non–equilibrium Thermo Field Dynamics" é matematicamente justificável e está contida na formulação que ora apresentamos. Além disso, podemos também afirmar que todos os resultados deduzidos por Matsumoto quando $f = \mathrm{Exp}\,[-$

CAPÍTULO IV

ALGUMAS REPRESENTAÇÕES PARA A NOVA FORMULAÇÃO DA TEORIA QUÂNTICA

INTRODUÇÃO

Neste Capítulo apresentamos diferentes representações para a formulação axiomática introduzida. Em particular, mostramos que a partir de uma certa classe de representação podemos desenvolver formalismos consistentes sobre espaço de fase, i. é., livres do "dilema da não–positividade de Wigner" [41, 42]. Mostramos ainda as relações entre estas formulações e aquelas propostas por Bohm [28] e Klauder [43], que também não apresentam o referido dilema. Finalizando, desenvolvemos algumas aplicações simples das formulações sobre espaço de fase introduzidas. Gostaríamos de chamar a atenção para a notação que usaremos empregando "bras e kets", pois ela em nosso desenvolvimento, embora de fácil manejo, poderá exigir uma leitura cuidadosa para evitar interpretações enganosas.

4.1 – REPRESENTAÇÕES TENSORIAIS SIMPLES

Considerando que o espaço de Hilbert associado aos estados na axiomatização baseada na realização de Tomita–Takesaki para W^*–álgebras pode ser visto como o produto tensorial de dois outros espaços de Hilbert, i. é., $\mathrm{H} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$, podemos classificar as suas representações em :

Tensoriais Simples – representações induzidas via produtos tensoriais de uma mesma base para $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}^*$;

Tensoriais Mistas – representações induzidas via produtos tensoriais de bases distintas para $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}^*$;

Não Tensoriais – representações que não podem ser induzidas via produtos tensoriais de bases de $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}^*$.

Com a finalidade de explicitar as principais características de cada uma das referidas classes de representações, passemos a considerar que o sistema Σ é descrito na formulação usual (Dirac – von Neumann) via uma W^*–álgebra semi–finita $\mathscr{F}$ atuando em $\mathscr{H}$, cuja álgebra de Lie associada aos seus elementos auto–adjuntos possui $(2n + 1)$ geradores denotados por $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ e a identidade 1, com produtos de Lie dados por :

$$[q_i, q_j]_- = [p_i, p_j]_- = 0 \quad \text{e} \quad [q_i, p_j]_- = i\hbar\, \delta_{ij};$$

sendo $[A, B]_- = AB - BA$ e $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Neste caso, adotar a axiomática com base na formulação de Tomita–Takesaki para descrever o sistema Σ, significa considerar que a W^*–álgebra atuando em $H = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$, relevante na descrição de Σ, é aquela cuja álgebra de Lie associada a seus elementos auto–adjuntos possui $(4n + 1)$ geradores, denotados por $\hat{q}_1, \ldots \hat{q}_n, \hat{q}_{n+1}, \ldots, \hat{q}_{2n}$; $\hat{p}_1, \ldots \hat{p}_n, \hat{p}_{n+1}, \ldots \hat{p}_{2n}$ e a identidade 1, com produtos de Lie dados por :

$$\begin{cases} [\hat{q}_i, \hat{q}_j]_- = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0\ ; \\ [\hat{q}_i, \hat{p}_j]_- = i\hbar\, \delta_{ij}\ , \quad \text{com } i, j = 1, \ldots, n\ ; \\ [\hat{q}_i, \hat{p}_j]_- = -\, i\hbar\, \delta_{ij}\ , \quad \text{com } i, j = n+1, \ldots, 2n; \end{cases} \tag{4.1}$$

sendo todas as outras relações de comutação nulas; observe que notamos $\hat{q}_i \equiv \tilde{q}_i$ e $\hat{p}_i \equiv \tilde{p}_i$, para $i = n+1, \ldots, 2n$.

Nestes termos, podemos definir a **representação coordenada** associada a Σ como sendo a representação tensorial simples induzida pela representação coordenada da formulação usual associada ao sistema. Portanto, esta representação corresponde a tomar–se como base ortonormal de H, o conjunto constituído pelos vetores,

$$|q_1, q_2, \dots, q_{2n}\rangle \equiv |q_1, \dots, q_n\rangle \ \langle q_{n+1}, \dots, q_{2n}|, \quad \text{com} \quad q_i \in R \text{ e sendo } i = 1, 2, \dots, 2n.$$

i. é., o produto tensorial da base coordenada associado à $\mathscr{H}$ pela base coordenada associada ao seu dual $\mathscr{H}^*$ (vide seção 1.7).

Vale a pena ressaltar que do ponto de vista de Dirac [77], esta base corresponde a auto–base associada ao conjunto completo de observáveis compatíveis $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{2n}\}$, i. é :

$$\hat{q}_i|q_1, q_2, \dots, q_{2n}\rangle = q_i|q_1, q_2, \dots, q_{2n}\rangle; \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, 2n.$$

Deste ponto em diante, com a finalidade de simplificar a notação, passaremos a considerar que o sistema Σ possui apenas um grau de liberdade, ou seja, $i = 1, 2$.

Usando então o desenvolvimento padrão da Teoria de Representações de Dirac [77], temos que os geradores da álgebra de Lie associada ao sistema na representação coordenada são descritos através dos seguintes operadores, atuando sobre as funções complexas de variáveis reais, $\Psi(q_1, q_2) = \langle q_1, q_2|\Psi\rangle$, com $|\Psi\rangle \in H$:

$$\begin{cases} (\hat{q}_i \Psi)(q_1, q_2) = q_i \ \Psi(q_1, q_2) \ , \quad \text{com } i = 1, 2 \ ; \\ (\hat{p}_1 \Psi)(q_1, q_2) = -i\hbar \ \dfrac{\partial}{\partial q_1} \ \Psi(q_1, q_2) \ ; \\ (\hat{p}_2 \Psi)(q_1, q_2) = i\hbar \ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \Psi(q_1, q_2) \ . \end{cases} \tag{4.2}$$

No intuito de tornar mais clara a notação empregada, observe que em vista de (3.3) e do fato que $|q_1, q_2\rangle \equiv |q_1\rangle \ \langle q_2|$, a função de onda $\Psi(q_1, q_2) \equiv \langle q_1, q_2|\Psi\rangle$ com $\Psi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, é dada por:

$$\Psi(q_1, q_2) = \text{traço}\,(|q_2\rangle \ \langle q_1|)\,\Psi = \langle q_1| \ \Psi \ |q_2\rangle,$$

isto é, a função $\Psi(q_1, q_2)$ é na realidade o elemento de matriz do operador $\Psi \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ na representação coordenada de $\mathscr{H}$. Note ainda que sendo $|\Psi\rangle = \int \Psi(q_1, q_2)\, |q_1, q_2\rangle\, dq_1\, dq_2$ normalizado, temos que as "funções de onda" $\Psi(q_1, q_2)$ associadas ao sistema são de quadrado integrável, isto é,

$$\int |\Psi(q_1, q_2)|^2\, dq_1\, dq_2 = 1$$

Quanto a evolução temporal, desde que os únicos valores mensuráveis são os valores esperados dos operadores auto–adjuntos em H, podemos descrevê–la da mesma forma que na Teoria Quântica usual via uma transformação contínua dos vetores de H (descrição de Schröndinger) ao invés de empregar transformações contínuas dos operadores (descrição de Heisenberg) como colocado nos axiomas (vide C3 e D3).

Nestes termos, tem–se que, $|\Psi\rangle_t = \mathrm{Exp}\left[\frac{-it}{\hbar}\hat{L}\right] |\Psi\rangle_{t=0}$ e portanto os vetores de H evoluem no tempo segundo a equação,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{L}\, |\Psi\rangle\,, \qquad \text{com } \hat{L} \equiv H \otimes 1 - 1 \otimes H, \tag{4.3}$$

sendo H a Hamiltoniana associada ao sistema na formulação usual.

Em termos da representação coordenada, a equação (4.3) passa a ter a seguinte forma :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q_1, q_2; t) = \left[H(q_1, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}) - H(q_2, i\hbar \frac{\partial}{\partial q_2})\right] \Psi(q_1, q_2; t). \tag{4.4}$$

Por outro lado, os valores esperados das observáveis, ficam sendo :

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int \Psi^*(q_1, q_2; t)\, A\left[q_1, q_2, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}, i\hbar \frac{\partial}{\partial q_2}\right] \Psi(q_1, q_2; t)\, dq_1\, dq_2. \tag{4.5}$$

É importante notar que as observáveis usualmente associadas ao sistema são funções apenas de q_1 e $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}$. Em particular, considerando a observável $\hat{\delta}(q_1 - q)$, temos,

$$< \hat{\delta} (q_1 - q\ )>(t) = \int \Psi^* \ (q_1,q_2;t)\ \delta(q_1 - q)\ \Psi(q_1,q_2;t)\ dq_1\, dq_2 = \int |\Psi(q,q_2;t)|^2\ dq_2;$$

portanto, $\int\ |\Psi(q,q_2;t)|^2\ dq_2$ representa a densidade de probabilidade de no instante t encontrar–se a partícula que constitui o sistema, no ponto q, qualquer que seja a posição da "partícula fantasma".Em síntese, $\Psi(q_1,\ q_2)$ pode ser interpretada como a amplitude de probabilidade de encontrar–se a partícula em q_1 e a sua correspondente "fantasma" em q_2.

No que diz respeito ao produto e à involução natural dadas pelas equações (3.2) e (3.5), nesta representação, temos que :

a) Se $|\Psi> \leftrightarrow \Psi(q_1,q_2)$ então $\hat{j}\ |\Psi> = |\Psi^\dagger> \leftrightarrow \Psi^*(q_2,q_1)$ pois, sendo

$$\begin{aligned} |\Psi> &= \int dq_1\, dq_2\ \Psi(q_1,q_2)\ |q_1,\ q_2> \\ &= \Big|\int dq_1\, dq_2\ \Psi(q_1,q_2)\ |q_1><q_2|\Big\rangle ; \end{aligned}$$

onde usamos a equação (3.1) e o fato de $|q_1,\ q_2> \ = \ |q_1> \ <q_2|$ poder ser visto como um elemento de $\mathscr{L}_2(\mathscr{H})$. Então, temos que,

$$\begin{aligned} |\Psi^\dagger> &= \Big|\int dq_1\, dq_2\ \Psi^*(q_1,\ q_2)\ |q_2><q_1|\Big\rangle \\ &= \int dq_1\, dq_2\ \Psi^*(q_1,q_2)\ |q_2,\ q_1> \\ &= \int dq_1\, dq_2\ \Psi^*(q_2,\ q_1)\ |q_1,\ q_2> \end{aligned}$$

b) Usando o mesmo procedimento, temos que, se $|\Psi_1\rangle \leftrightarrow \Psi_1(q_1, q_2)$ e $|\Psi_2\rangle \leftrightarrow \Psi_2(q_1, q_2)$ então

$$|\Psi_1\rangle . |\Psi_2\rangle \leftrightarrow \Psi_3(q_1, q_2) = \int \Psi_1(q_1, q') \; \Psi_2(q', q_2)\, dq'.$$

Portanto, podemos dizer que $|\Psi\rangle$ representa um possível estado dinâmico, no sentido da nossa reformulação, se e somente se,

$$\langle q_1|f|q_2\rangle = \int \Psi^*(q_2, q') \; \Psi(q_1, q')\, dq';$$

sendo $f = \Psi \; \Psi^\dagger \in \mathscr{L}_{1+}(\mathscr{H})$, a matriz densidade associada ao sistema.

Em resumo, a álgebra de Hilbert $H = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$, neste caso corresponde à álgebra matricial sobre o $R \times R \equiv R^2$, ou melhor, $H \cong \mathscr{L}^2(R \times R)$ (vide exemplo 2.2.a).

Finalizando esta seção, cabe assinalar que qualquer outra representação tensorial simples apresentará as mesmas características gerais que a representação coordenada. Contudo, pode–se esperar que as tensoriais mistas e em especial as não tensoriais, descortinem novas formas de descrição dos sistemas quantum–mecânicos. Em particular, mostraremos nas próximas seções como essas novas representações permitem formulações consistentes sobre espaço de fase.

4.2 – REPRESENTAÇÕES TENSORIAIS MISTAS

Tendo em vista as relações de comutação básicas dadas em (4.1), podemos notar que $\left\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\right\}$ e $\left\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\right\}$ constituem dois outros conjuntos completos de observáveis compatíveis. Assim sendo, os seus "auto–kets" servem também, respectivamente, como bases para o espaço e Hilbert H, ou seja, os conjuntos constituídos pelos vetores,

$$\begin{cases} |q_1, p_2\rangle \equiv |q_1\rangle \langle p_2| \quad , \text{com } q_1, p_2 \in R \, ; \\ \\ |p_1, q_2\rangle \equiv |p_1\rangle \langle q_2| \quad , \text{com } p_1, q_2 \in R \, ; \end{cases} \tag{4.6}$$

são duas possíveis bases ortonormais de H.

Seguindo ainda a Teoria de Transformações de Dirac, tem–se que a descrição do sistema, nessas novas bases, é completamente determinada pelas funções de transformação

$$\langle q_1', q_2'|q_1, p_2\rangle \equiv \text{traço}\,(|q_1'\rangle\langle q_2'|)^{\dagger}\ |q_1\rangle\langle p_2| = \langle q_1'|\, q_1\rangle\ \langle p_2|q_2'\rangle$$

e $\langle q_1', q_2'|p_1, q_2\rangle = \langle q_1'|p_1\rangle\langle q_2|q_2'\rangle$, respectivamente. De fato, usando–se a relação de completeza associada ao conjunto $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\}$, i. é.,

$$\int |q_1, q_2\rangle\ \langle q_1, q_2|dq_1\, dq_2 = 1 \quad \text{temos que,}$$

$$\begin{cases} \Psi(q_1,p_2) \equiv \langle q_1, p_2|\Psi\rangle = \int \langle q_1\,,\, p_2|q_1', q_2'\rangle\ \ \Psi(q_1', q_2')dq_1'\, dq_2' & (4.7) \\ \\ \langle q_1 p_2|\hat{A}|q_1' p_2'\rangle = \int \langle q_1 p_2|q_1'' q_2''\rangle \langle q_1'' q_2''|\hat{A}|q_1''' q_2'''\rangle \langle q_1''' q_2'''|q_1' p_2'\rangle dq_1'' dq_2'' dq_1''' dq_2''' \end{cases}$$

onde $\hat{A}$ atua sobre $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$.

Relações similares existirão entre quaisquer duas outras dadas bases. Com respeito às bases introduzidas temos as seguintes funções de transformação:

$$\begin{cases} \langle q_1', q_2'|q_1, p_2\rangle = \langle q_1'|q_1\rangle\ \langle p_2|q_2'\rangle = \delta(q_1'-q_1)\ \ \text{Exp}[\frac{-i}{\hbar}\, p_2 q_2'] \\ \\ \langle q_1', q_2'|p_1, q_2\rangle = \langle q_1'|p_1\rangle \quad \langle q_2|\ q_2'\rangle = \text{Exp}[\frac{i}{\hbar}\, p_1 q_1']\quad \delta(q_2' - q_2) \\ \\ \langle q_1, p_2|p_1, q_2\rangle = \langle q_1|p_1\rangle\ \langle q_2|p_2\rangle = \text{Exp}[\frac{i}{\hbar}\,(p_1 q_1 + p_2 q_2)] \end{cases} \tag{4.8}$$

Destes resultados, obtemos diretamente que os quatro operadores fundamentais, $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$, possuem as realizações a seguir.

a) No caso do conjunto $\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\}$, temos :

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \longrightarrow q_1 \quad ; \quad \hat{p}_1 \longrightarrow -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \hat{q}_2 \longrightarrow -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_2} \quad ; \quad \hat{p}_2 \longrightarrow p_2 \end{cases} \tag{4.9}$$

b) No caso do conjunto $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$, temos:

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \longrightarrow i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_1} \quad ; \quad \hat{p}_1 \longrightarrow p_1 \; ; \\ \hat{q}_2 \longrightarrow q_2 \quad ; \quad \hat{p}_2 \longrightarrow i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_2} \end{cases} \tag{4.10}$$

Como todos os resultados são invariantes por transformação de fase, vamos redefinir as bases anteriores por razões que se tornarão claras ao final deste Capítulo, da forma a seguir:

$$\begin{cases} |q_1, p_2\rangle \longrightarrow |q_1, p_2\rangle^{(t)} = \mathrm{Exp}[\frac{+i}{\hbar} p_2 q_1]\; |q_1, p_2\rangle \; ; \\ \\ |p_1, q_2\rangle \longrightarrow |p_1, q_2\rangle^{(t)} = \mathrm{Exp}[\frac{-i}{\hbar} p_1 q_2]\; |p_1, q_2\rangle \; . \end{cases} \tag{4.11}$$

Estas transformações acarretam novas realizações unitariamente equivalentes para os quatro operadores básicos. De fato, os novos operadores serão dados de uma forma geral, por:

$$\hat{q}_i^{(t)} = \hat{q}_i - \mathrm{Exp}\left[\frac{-i}{\hbar} f(q,p)\right] \hat{q}_i \; \mathrm{Exp}\left[\frac{i}{\hbar} f(q,p)\right];$$

$$\hat{p}_i^{(t)} = \hat{p}_i - \text{Exp}\,[\, \frac{-i}{\hbar} f(q,p)\,]\ \hat{p}_i\ \text{Exp}\,[\, \frac{i}{\hbar} f(q,p)\,];\ \text{com } i = 1,\ 2,$$

quando a transformação é dada por $|q,\ p\rangle \longrightarrow |q\ \ p\rangle^{(t)} = \text{Exp}\ [\frac{-i}{\hbar}\ f(q,p)]\ |q,\ p\rangle$. Portanto,em nosso caso, teremos as seguintes novas realizações :

a) No caso do conjunto $\left\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\right\}^{(t)}$, temos :

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \longrightarrow\ q_1 & ;\quad \hat{p}_1 \longrightarrow -\, i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_1} + p_2\ ; \\ \hat{q}_2 \longrightarrow -\ i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_2} + q_1 & ;\quad \hat{p}_2 \longrightarrow p_2\ . \end{cases} \tag{4.12}$$

b) No caso do conjunto $\left\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\right\}^{(t)}$, temos :

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \longrightarrow i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_1} + q_2 & ;\quad \hat{p}_1 \longrightarrow p_1\ ; \\ \hat{q}_2 \longrightarrow q_2 & ;\quad \hat{p}_2 \longrightarrow i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_2} + p_1\ . \end{cases} \tag{4.13}$$

Assim sendo, a equação de evolução temporal nestas representações passam a ser dadas por :

a) Para o conjunto $\left\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\right\}^{(t)}$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q_1, p_2, t) = \left\{ H(q_1, p_2 - i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}) - H(q_1 - i\hbar\frac{\partial}{\partial p_2}, p_2) \right\} \Psi(q_1, p_2, t), \tag{4.14}$$

sendo, é claro,

$$\Psi(q_1, p_2) \equiv {}^{(t)}\langle q_1, p_2|\Psi\rangle = \operatorname{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar} p_2 q_1\right] \langle q_1\, p_2|\Psi\rangle$$

$$= \operatorname{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar} p_2 q_1\right] \langle q_1|\Psi|p_2\rangle \qquad (\text{vide } 3.3) \qquad (4.15)$$

b) Para o conjunto $\{p_1, q_2\}^{(t)}$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(p_1, q_2, t) = \left\{H(q_2 + i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1}, p_1) - H(q_2, p_1 + i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2})\right\} \Psi(p_1, q_2, t) \qquad (4.16)$$

com,

$$\Psi(p_1, q_2) \equiv {}^{(t)}\langle p_1, q_2|\Psi\rangle = \operatorname{Exp}\left[\frac{i}{\hbar} p_1 q_2\right] \langle p_1\, q_2|\Psi\rangle$$

$$= \operatorname{Exp}\left[\frac{i}{\hbar} p_1 q_2\right] \langle p_1|\Psi|q_2\rangle. \qquad (4.1\text{?})$$

Enquanto que os valores esperados das observáveis são dados respectivamente por :

$$\begin{cases} \langle\hat{A}\rangle(t) = \int \psi^*(q_1, p_2, t)\; A\,(q_1, p_2 - i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}\; ; q_1 - i\hbar\frac{\partial}{\partial p_2}, p_2)\, \Psi(q_1, p_1, t)\, dq_1 \\ \langle\hat{A}\rangle(t) = \int \Psi^*(p_1, q_2, t) A(q_2 + i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1}, p_1; q_2, p_1 + i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2})\; \Psi(p_1, q_2, t)\, dp_1\, dq_2 \end{cases}$$

(4.18)

Segue de forma imediata que a "função de onda" $\Psi(q_1, p_2)$ pode ser interpret como sendo a amplitude de probabilidade de encontrar-se a partícula no ponto q_1 e a correspondente "fantasma" com momentum p_2. Além disso, no caso de vetores | pertencentes ao cone $\mathscr{P} \subset$ H, i. é., $\Psi^\dagger = \Psi$, temos que,

$$\int \Psi(q_1,p_2)\, \Psi^*(q_1,p_2)dp_2 = \int \langle q_1|\Psi|p_2\rangle\, \langle q_1|\Psi|p_2\rangle^*\, dp_2$$

$$= \int \langle q_1|\Psi|p_2\rangle \langle p_2|\Psi^\dagger|q_1\rangle \, dp_2 = \langle q_1|\Psi \, \Psi^\dagger|q_1\rangle$$

$$= \langle q_1|f|q_1\rangle, \text{ sendo } \mathbf{f} = \Psi \, \Psi^\dagger \in \mathscr{L}_1^+(H).$$

De forma similar obtemos que $\int \Psi(q_1, p_2) \, \Psi^*(q_1, p_2) \, dq_1 = \langle p_2|f|p_2\rangle$. Neste sentido, pode–se interpretar $\Psi^*(q_1, p_2) \, \Psi(q_1, p_2)$ como a densidade de probablidade de encontrar–se a partícula no ponto q_1 com momentum p_2. Observe–se que, estritamente falando, esta intepretação somente faz sentido quando a referida densidade é integrada em alguma das suas variáveis. Resultados absolutamente similares podem ser derivados para o conjunto $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$, seguindo–se os mesmos procedimentos, ou seja, $\Psi^*(p_1, q_2) \, \Psi(p_1, q_2)$ além de representar a densidade de probabilidade de encontrar–se a partícula com momentum p_1 e a sua correspondente "fantasma" no ponto q_2, possui as seguintes propriedades :

$$\begin{cases} \int \Psi^*(p_1, q_2) \, \Psi(p_1, q_2) \, dq_2 = \langle p_1|f|p_1\rangle \\ \int \Psi^*(p_1, q_2) \, \Psi(p_1, q_2) \, dp_1 = \langle q_2|f|q_2\rangle \, . \end{cases}$$

e portanto, com as restrições assinaladas acima, podemos dizer que tanto $\Psi(q_1, p_2)$ quanto $\Psi(p_1,q_2)$, descrevem amplitudes de probabilidade sobre os espaços de fase Ω, dados por $\{(q_1, p_2) \in R \times R = R^2\}$ e $\{(p_1, q_2) \in R \times R = R^2\}$, respectivamente.

Quanto ao produto e à involução natural, no conjunto $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$, temos a seguinte Proposição:

Proposição 4.2.1. Se $|\Psi_1\rangle \longleftrightarrow \Psi_1(p_1, q_2)$ e $|\Psi_2\rangle \longleftrightarrow \Psi_2(p_1, q_2)$ então tem–se que $|\Psi_1\rangle . |\Psi_2\rangle = |\Psi_1.\Psi_2\rangle = |\Psi_3\rangle \longleftrightarrow \Psi_3(p_1, q_2)$ dada por :

$$\Psi_3(p_1,q_2) = \int dq_2' \, dp_1' \, \Psi_1(p_1, q_2') \, \Psi_2(p_1', q_2) \, \mathrm{Exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\left[(p_1-p_1')(q_2-q_2')\right]\right\}$$

e com $\quad |\Psi_1^{\dagger}\rangle \longleftrightarrow \Psi_1^{*}(q_2, p_1).$

Demonstração: Considerando que $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ são dados por,

$$|\Psi_1\rangle = \int \Psi_1(p_1', q_2')\, |p_1' q_2'\rangle^{(t)}\, dp_1'\, dp_2'$$

$$= \int \Psi_1(p_1', q_2')\, \mathrm{Exp}[-\tfrac{i}{\hbar} p_1' q_2']\, |p_1' q_2'\rangle\, dp_1'\, dp_2';$$

e

$$|\Psi_2\rangle = \int \Psi_2(p_1'', q_2'')\, \mathrm{Exp}[-\tfrac{i}{\hbar} p_1'' q_2'']\, |p_1'' q_2''\rangle\, dp_1''\, dq_2'';$$

teremos então que,

$$|\Psi_1\rangle . |\Psi_2\rangle = \int dp_1' dq_2' dp_1'' dq_2'' \Psi_1(p_1',q_2')\Psi_2(p_1'',q_2'')\mathrm{Exp}[-\tfrac{i}{\hbar}(p_1'q_2'+p_1''q_2'')]\, |p_1'q_2'\rangle . |p_1''q_2''\rangle$$

$$= \int dp_1' dq_2' dp_1'' dq_2'' \Psi_1(p_1',q_2')\Psi_2(p_1'',q_2'')\mathrm{Exp}[-\tfrac{i}{\hbar}(p_1'q_2'+p_1''q_2'')]\, \Big|\, |p_1'\rangle \langle q_2'|p_1''\rangle \langle q_2''| \Big\rangle$$

$$= \int dp_1' dq_2' dp_1'' dq_2'' \Psi_1(p_1',q_2')\Psi_2(p_1'',q_2'')\mathrm{Exp}[-\tfrac{i}{\hbar}(p_1'q_2'+q_1''q_2'')]\, \mathrm{Exp}[\tfrac{i}{\hbar}p_1''q_2']\, |p_1'q_2''\rangle .$$

Por outro lado, tendo em vista que,

$$\Psi_3(p_1, q_2) \equiv {}^{(t)}\langle p_1 q_2|\Psi_3\rangle = {}^{(t)}\langle p_1 q_2|\Psi_1 . \Psi_2\rangle;$$

segue que,

$$\Psi_3(p_1,q_2)=\int dp_1' dq_2' dp_1'' dq_2'' \Psi_1(p_1',q_2')\Psi_2(p_1'',q_2'')\mathrm{Exp}\tfrac{i}{\hbar}[-(p_1'q_2'+p_1''q_2'')+p_1''q_2']^{(t)}\langle p_1 q_2|p_1'q_2''\rangle$$

$$=\int dq_2' dp_1''\, \Psi_1(p_1,q_2')\, \Psi_2(p_1'',q_2)\, \mathrm{Exp}\, \tfrac{i}{\hbar}\Big[(p_1-q_1'')(q_2-q_2')\Big];$$

onde usamos o fato de que $^{(t)}\langle p_1q_2|p_1'q_2''\rangle = \mathrm{Exp}[\frac{i}{\hbar}\, p_1q_2]\ \delta(p_1' - p_1)\ \delta(q_2'' - q_2)$.

No que tange à involução, como,

$\Psi_1(p_1,q_2) = \mathrm{Exp}\ [\frac{i}{\hbar}\, p_1q_2]\ \langle p_1\, q_2|\Psi_1\rangle = \mathrm{Exp}\ [\frac{i}{\hbar}\ \ p_1q_2]\ \langle p_1|\Psi_1|q_2\rangle$

tem–se que,

$\Psi_1^*(p_1,q_2) = \mathrm{Exp}\ [-\frac{i}{\hbar}\, p_1q_2]\ \langle p_1|\Psi_1|q_2\rangle^{(*)}$

$= \mathrm{Exp}[-\frac{i}{\hbar}\, p_1q_2]\ \langle q_2|\Psi_1^\dagger|p_1\rangle = {}^{(t)}\langle q_2p_1|\Psi_1^\dagger\rangle$.

Logo, podemos dizer que, $\Psi_1^*(p_1,q_2) = \Psi_1^\dagger(q_2,p_1) \Longleftrightarrow \Psi_1^\dagger(p_1,q_2) = \Psi_1^*(q_2,p_1)$. C.Q.D.

Em se tratando do conjunto $\left\{\hat{q}_1,\ \hat{p}_2\right\}$, adotando os mesmos procedimentos, chegamos aos seguintes resultados :

a) Se $|\Psi_1\rangle \longleftrightarrow \Psi_1(q_1,\ p_2)$ e $|\Psi_2\rangle \longleftrightarrow \Psi_2(q_1,\ p_2)$ então tem–se que,

$|\Psi_1\rangle\,.\,|\Psi_2\rangle = |\Psi_1\,\Psi_2\rangle \longleftrightarrow \Psi_3(q_1,\ p_2)$, dado por:

$$\Psi_3(q_1,p_2) = \int \Psi_1(q_1,\ p_2')\ \Psi_2(q_1',\ p_2)\ \mathrm{Exp}\ \{-\frac{i}{\hbar}\,[(p_2-p_2')\ (q_1-q_1')]\}\ dq_1'\ dp_2';$$

b) Se $|\Psi\rangle \longleftrightarrow \Psi(q_1,\ p_2)$, então $|\Psi^\dagger\rangle \longleftrightarrow \Psi^*(p_2,\ q_1)$.

De forma direta, podemos ainda mostrar que os conjuntos constituídos respectivamente pelas funções $\Psi(p_1,\ q_2)$ e $\Psi(q_1,\ p_2)$, ambas de quadrado integrável, quando munidos das involuções e produtos não comutativos dados anteriormente, representam, de fato, dois exemplos de H^*–álgebras [5]. Portanto, podemos dizer que estes últimos resultados servem para exibir o $*$–isomorfismo existente entre a H^*–álgebra de operadores lineares de

Hilbert–Schmidt e as H^*–álgebras de funções de quadrado integrável definidas sobre os espaços de fase, já referidas. Neste sentido, os produtos anteriores podem ser escritos como:

$$\begin{cases} (\Psi_1 \blacksquare \Psi_2)(p_1,q_2) \equiv \int dq_2' dp_1' \, \Psi_1(p_1, q_2') \;\; \Psi_2(p_1', q_2) \, \mathrm{Exp}\{ \frac{i}{\hbar} [(p_1 - p_1')\,(q_2 - q_2')]\} \\ \\ (\Psi_1 \blacksquare \Psi_2)(q_1,p_2) \equiv \int dq_1' dp_2' \Psi_1(q_1, p_2') \;\; \Psi_2(q_1', p_2) \mathrm{Exp}\{ - \frac{i}{\hbar} [(p_2 - p_2')\,(q_1 - q_1')]\} \end{cases} \tag{4.19}$$

Observemos ainda que estes produtos entre funções sobre o espaço de fase $\Omega = R \times R$, são não–locais, diferindo portanto do produto usual $(\Psi_1 \Psi_2)(q, p) \equiv \Psi_1(q, p)\, \Psi_2(q,p)$.

4.3 – REPRESENTAÇÕES NÃO TENSORIAIS

Considerando agora os operadores $\hat{Q}$, $\hat{\eta}$, $\hat{P}$ e $\hat{\Pi}$ definidos em termos de $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$, da forma a seguir,

$$\begin{cases} \hat{Q} \equiv \frac{1}{2}(\hat{q}_1 + \hat{q}_2) \quad , \quad \hat{\eta} \equiv \hat{q}_1 - \hat{q}_2 \; ; \\ \\ \hat{P} \equiv \frac{1}{2}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \quad , \quad \hat{\Pi} \equiv \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \; . \end{cases}$$

e as relações de comutação dadas em (4.1), temos que,

$$\begin{cases} [\hat{Q} \, , \hat{P}]_- = [\hat{Q} \, , \hat{\eta}]_- = 0 \\ [\hat{P} \, , \hat{\Pi}]_- = [\hat{\eta} \, , \hat{\Pi}]_- = 0 \\ [\hat{\eta} \, , \hat{P}]_- = [\hat{Q} \, , \hat{\Pi}]_- = i\hbar \; . \end{cases} \tag{4.20}$$

Neste sentido, podemos destacar os conjuntos $\{\hat{Q}, \hat{\eta}\}$, $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$, $\{\hat{P}, \hat{\Pi}\}$ e $\{\hat{\eta}, \hat{\Pi}\}$ como novos conjuntos completos de "observáveis" comutantes e portanto, desenvolver para cada um deles uma nova representação para a reformulação. Por razões de síntese, apresentaremos apenas os principais resultados para as representações associadas aos conjuntos $\{\hat{Q}, \hat{\eta}\}$ e $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$.

Proposição 4.3.1. O conjunto constituído pelos vetores $|Q,\eta> \equiv |Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|$ com Q e $\eta \in$ R, é a auto–base associada ao conjunto completo $\{\hat{Q}, \hat{\eta}\}$.

Demonstração: Sendo $\hat{Q} \equiv \frac{1}{2}(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)$ e $\hat{\eta} \equiv \hat{q}_1 - \hat{q}_2$, temos que,

$$\text{I) } \hat{Q}|Q, \eta> \equiv \frac{1}{2}(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)\,|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[q\,|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|\right] + \left[|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|\,q\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[(Q + \frac{1}{2}\eta)|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta\right] + \left[|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|\,(Q - \frac{1}{2}\eta)\right]\right\}$$

$$= Q\,|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta| = Q|Q, \eta>$$

onde usamos $\hat{q}_1 = q \otimes 1$ e $\hat{q}_2 = 1 \otimes q$. De forma similar, temos :

$$\text{II) } \hat{\eta}\,|Q, \eta> \equiv (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)\,|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|$$

$$= \eta\,|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta| = \eta\,|Q, \eta>. \quad \text{C.Q.D.}$$

Sendo então $\{|Q, \eta>\}$ a base para a representação $\{\hat{Q}, \hat{\eta}\}$, cuja função de transformação com respeito ao conjunto $\left\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\right\}$ é dada por :

$$<q_1, q_2|Q, \eta> = <q_1|Q + \frac{1}{2}\eta> <Q - \frac{1}{2}\eta|q_2>$$

$$= \delta\left[q_1 - (Q + \frac{1}{2}\eta)\right] \delta\left[q_2 - (Q - \frac{1}{2}\eta)\right];$$

e portanto,

$$\Psi(Q,\eta) \equiv <Q,\eta|\Psi> = \int <Q, \eta|q_1, q_2> \Psi(q_1, q_2)\, dq_1 dq_2$$

$$= \int \delta\left[q_1 - (Q + \frac{1}{2}\eta)\right] \delta\left[q_2 - (Q - \frac{1}{2}\eta)\right] \Psi(q_1, q_2)\, dq_1\, dq_2$$

$$= \Psi\left[Q + \frac{1}{2}\eta, Q - \frac{1}{2}\eta\right].$$

Similarmente, pelo uso da teoria de transformação, teremos que :

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \longrightarrow Q + \frac{1}{2}\eta & ; \quad \hat{p}_1 \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial Q} \\ \hat{q}_2 \longrightarrow Q - \frac{1}{2}\eta & ; \quad \hat{p}_2 \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial Q}, \end{cases} \tag{4.21}$$

Estes resultados nos permitem dizer que esta representação significa uma transformação das variáveis (q_1,q_2) para (Q,η). Outrossim, de posse da realização dos operadores básicos, todos os outros resultados seguem de forma imediata. Em particular, podemos interpretar $|\Psi(Q, \eta)|^2$ como sendo a densidade de probabilidade de encontrarmos a partícula no ponto $Q + \frac{1}{2}\eta$ e a sua correspondente "fantasma" em $Q - \frac{1}{2}\eta$.

Adotando procedimento similar, podemos mostrar que os vetores $|P, \Pi> \equiv |P + \frac{1}{2}\Pi> <P - \frac{1}{2}\Pi|$ com P e $\Pi \in R$, são os "auto-kets" simultâneos de $\hat{P}$ e $\hat{\Pi}$ com auto-valores P e Π, respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} \hat{P}\left[|P+\frac{1}{2}\Pi\rangle\ \langle P-\frac{1}{2}\Pi|\right] = P\left[|P+\frac{1}{2}\Pi\rangle\ \langle P-\frac{1}{2}\Pi|\right] \\ \hat{\Pi}\left[|P+\frac{1}{2}\Pi\rangle\ \langle P-\frac{1}{2}\Pi|\right] = \Pi\left[|P+\frac{1}{2}\Pi\rangle\ \langle P-\frac{1}{2}\Pi|\right]. \end{cases} \tag{4.22}$$

Logo, as bases associadas aos conjuntos completos $\left\{\hat{P},\ \hat{\Pi}\right\}$ e $\left\{\hat{p}_1,\ \hat{p}_2\right\}$ relacionam–se através da seguinte substituição de variáveis :

$$p_1 = P + \frac{1}{2}\Pi \qquad e \qquad p_2 = P - \frac{1}{2}\Pi.$$

Proposição 4.3.2. Sejam $|Q,\ \eta\rangle$ e $|P,\ \Pi\rangle$ os "auto–kets" dos conjuntos completos de operadores $\left\{\hat{Q},\ \hat{\eta}\right\}$ e $\left\{\hat{P},\ \hat{\Pi}\right\}$, respectivamente. Segue então que :

$$\int d\eta\ |Q+\frac{1}{2}\eta\rangle\langle Q-\frac{1}{2}\eta|\ e^{\frac{i}{\hbar}\eta P} = \int d\Pi\ |P+\frac{1}{2}\Pi\rangle\langle P-\frac{1}{2}\Pi|\ e^{-\frac{i}{\hbar}\Pi Q}.$$

Demonstração: Considerando que as funções de transformação $\langle q_1,\ q_2|Q\ \eta\rangle$ e $\langle q_1,\ q_2|P\ \Pi\rangle$ são dadas por,

$$\begin{aligned} \langle q_1,\ q_2|Q\ \eta\rangle &= \langle q_1\ |Q+\frac{1}{2}\eta\rangle\ \langle Q-\frac{1}{2}\eta|q_2\rangle \\ &= \delta\left[q_1-(Q+\frac{1}{2}\eta)\right]\ \delta\left[q_2-(Q-\frac{1}{2}\eta)\right]; \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} \langle q_1,\ q_2|P\ \Pi\rangle &= \langle q_1\ |P+\frac{1}{2}\Pi\rangle\ \langle P-\frac{1}{2}\Pi|q_2\rangle \\ &= \mathrm{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}q_1(P+\frac{1}{2}\Pi)]\ \ \mathrm{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}q_2\,(P-\frac{1}{2}\Pi)\,]; \end{aligned}$$

temos que as projeções dos vetores $\int d\eta|Q,\eta\rangle\ \mathrm{Exp}[-\frac{i}{\hbar}\eta P]$ e $\int d\Pi|P,\Pi\rangle\ \mathrm{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\Pi Q]$ com respeito a base $\{|q_1,\ q_2\rangle\}$, são respectivamente :

$$\int d\eta \; <q_1,q_2|Q\eta> \; \text{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}\,\eta P] = \int d\eta \; \delta\Big[q_1-(Q+\tfrac{1}{2}\,\eta)\Big] \; \delta\Big[q_2-(Q-\tfrac{1}{2}\,\eta)\Big] \; \text{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}\,\eta P]$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}\,\eta P] \; \delta\Big[(q_1+q_2)-2Q\Big]; \qquad (4.24)$$

$$\int d\Pi \, <q_1q_2|P\Pi> \; \text{Exp}[-\tfrac{i}{\hbar}\,\Pi Q] = \int d\Pi \; \text{Exp}\,\tfrac{i}{\hbar}\,[q_1(P+\tfrac{1}{2}\Pi) - q_2(P-\tfrac{1}{2}\Pi) - \Pi Q]$$

$$= \frac{1}{2} \; \text{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}\,\eta P] \; \delta\Big[(q_1+q_2)-2Q\Big];$$

onde usamos a representação integral da função "delta de Dirac" [77]. Como os citados vetores possuem as mesmas projeções na base $\{|q_1, q_2>\}$, eles são iguais, o que portanto demonstra a Proposição. C.Q.D.

Proposição 4.3.3. O conjunto constituído pelos vetores $|Q,P>$ com $Q.P \in R$ dados por: $|Q,P> \equiv \int d\eta \; \text{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\;\; \eta P]\; |Q,\eta>$, é a auto–base associada ao conjunto completo $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$.

Demonstração :

Temos:

I) $\hat{Q}\;|Q, P> = \int d\eta \; \text{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta P]\;\hat{Q}\;|Q, \eta>$

$$= Q \int d\eta \; \text{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}\,\eta P] \; |Q, \eta>$$
$$= \; Q\;|Q, P>;$$

II) Tendo em vista a Proposição 4.3.2, podemos dizer que :

$$\hat{P}\;|Q, P> = \hat{P} \int d\Pi \; \text{Exp}\,[-\tfrac{i}{\hbar}\,\Pi Q]\;|P, \Pi>$$

e portanto,

$$\hat{P}\;|Q, P> = \int d\Pi \; \text{Exp}\,[-\tfrac{i}{\hbar}\,\Pi Q]\;\hat{P}\;|P, \Pi>$$

$$= \mathrm{P} \int d\Pi \; \mathrm{Exp}\,[-\tfrac{i}{\hbar}\,\Pi Q]\; |P, \Pi> \;=\; \mathrm{P}\; |Q, P> . \quad \text{C.Q.D.}$$

Em vista das expressões dos vetores da base $\{|Q, P>\}$ encontradas na Proposição (4.33), temos que as funções de transformação entre a base $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$ e as bases $\{\hat{Q}, \hat{\eta}\}$, $\{\hat{\Pi}, \hat{\eta}\}$ e $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\}$ têm as seguintes formas :

i) $<Q', \eta'|Q, P> = \int d\eta \; \mathrm{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta P]\; <Q', \eta'|Q, \eta>$

$$= \int d\eta \; \mathrm{Exp}\,\frac{i}{\hbar}\,\eta P]\; \delta(Q - Q')\, \delta(\eta - \eta') = \mathrm{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta' P]\; \delta(Q - Q'); \qquad (4.25)$$

ii) $<\Pi', P'|Q, P> = \int d\Pi \; \mathrm{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\Pi Q]\; <\Pi' P'|\Pi P>$

$$= \int d\Pi \; \mathrm{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\Pi Q]\; \delta(P - P')\; \delta(\Pi - \Pi')$$

$$= \delta(P - P')\; \mathrm{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\Pi' Q]; \qquad (4.26)$$

iii) $<q_1, q_2|Q, P> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta P]\; \delta(q_1 + q_2 - 2Q)$, de acordo com (4.24).

Portanto, a "função de onda" $\Psi(Q, P) \equiv <Q, P|\Psi>$ pode ser escrita das seguintes formas alternativas :

$$\Psi(Q, P) = \int d\eta \; \mathrm{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta P]\; \Psi(Q, \eta)$$

$$\Psi(Q, P) = \int d\Pi \; \mathrm{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\Pi Q]\; \Psi(\Pi, P) \qquad (4.27)$$

$$\Psi(Q, P) = \frac{1}{2} \int dq_1\, dq_2 \; \mathrm{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta P]\; \delta[(q_1 + q_2) - 2Q]\; \Psi(q_1, q_2)$$

Assim sendo, a base $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$ é ligada às bases $\{\hat{Q}, \hat{\eta}\}$ e $\{\hat{\Pi}, \hat{P}\}$ através de convenientes transformadores de Fourier [60] e à base $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\}$ através da transformação dada em (4.27). Por isso os operadores $\hat{q}_1$, $\hat{p}_1$, $\hat{q}_2$, $\hat{p}_2$ possuem a seguinte representação :

$$\begin{cases} \hat{q}_1 \longrightarrow Q + \dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial}{\partial P} \quad ; \quad \hat{p}_1 \longrightarrow P - \dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial}{\partial Q} \,; \\ \hat{q}_2 \longrightarrow Q - \dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial}{\partial P} \quad ; \quad \hat{p}_2 \longrightarrow P + \dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial}{\partial Q} \,. \end{cases} \tag{4.28}$$

Neste sentido, a equação de evolução temporal, na representação $\{|Q, P>\}$ é dada por:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(Q,P,t) = \left[H\left[Q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial P}, P - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial P}\right] - H\left[Q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial P}, P + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial Q}\right]\right] \Psi(Q,P,t); \tag{4.29}$$

sendo H o Hamiltoniano associada ao sistema, e os valores esperados são dados por,

$$<\hat{A}>(t)=\int\Psi^{*}(Q,P,t)A\left[Q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial P}\ \ P - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial Q}; Q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial P}, P + \frac{i\hbar\partial}{2\ \partial Q}\right]\Psi(Q,P,t)dQdP \tag{4.30}$$

Neste caso, a "função de onda" $\Psi(Q, P)$ pode ser interpretada como sendo a amplitude de probabilidade de encontrar–se as coordenadas de posição e momentum do centro de massa associado ao sistema composto da partícula real e sua correspondente fictícia em Q e P, respectivamente. Obtemos ainda diretamente de (4.27) que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int dQ\ \Psi^{*}(Q\ ,\ P)\ \Psi(Q\ ,\ P) = \int d\Pi\quad \Psi^{*}(\Pi\ ,\ P)\ \ \Psi(\Pi\ ,\ P) \\ \displaystyle\int dP\ \Psi^{*}(Q\ ,\ P)\ \Psi(Q\ ,\ P) = \int d\eta\ \Psi^{*}(Q\ \ ,\eta)\ \ \Psi(Q\ \ ,\eta) \end{cases} \tag{4.31}$$

No que tange à base associada ao conjunto completo $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$, denominado neste trabalho de **representação canônica**, a involução e produto são dados por:

$$\hat{j}\,(\Psi(Q,P)) = \Psi^{*}(Q,P)$$

$$\Psi_3(Q,P) = \int dQ'dQ''dP'dP''\ \mathrm{Exp}\left\{-\frac{2i}{\hbar}\begin{vmatrix} P' & Q' & 1 \\ P'' & Q'' & 1 \\ P & Q & 1 \end{vmatrix}\right\}\Psi_1(Q'P')\,\Psi_2(Q'',P''); \qquad (4.32)$$

com $\begin{vmatrix} P' & Q' & 1 \\ P'' & Q'' & 1 \\ P & Q & 1 \end{vmatrix}$ igual ao determinante da matriz $\begin{pmatrix} P' & Q' & 1 \\ P'' & Q'' & 1 \\ P & Q & 1 \end{pmatrix}$.

Outrossim, também pode–se mostrar que o conjunto de funções de quadrado integrável $\Psi(Q,P)$, quando munido do produto e da involução dados acima, constitui–se num outro exemplo de H^{*}–álgebras [85].

Com os resultados dessa seção, podemos dizer que a formulação por nós introduzida neste trabalho permite a dedução de várias formulações consistentes sobre espaços de fase para a Teoria Quântica [41, 42]. Esta consistência, i. é., o não aparecimento de densidade de probabilidade com valores negativos, é obtida devido a introdução de amplitudes de probabilidade. Dos trabalhos existentes na literatura sobre este tema, devemos notar que a formulação de Bohm e Hiley é, como a nossa, consistente. Na realidade a formulação desses autores apresenta similaridade com a nossa representação $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$ mas, além de ter sido deduzida com premissas e métodos diferentes, na Teoria de Bohm e Hiley a regra de associação entre observáveis e operadores é distinta da que apresentamos. Assim Bohm e Hiley têm de introduzir uma nova definição para os valores esperados quantum–mecânicos, o que não ocorre em nossa apresentação [28].

Finalizando, gostaríamos de observar que os vários espaços de fase sobre os quais a Teoria Quântica (e sua generalização) tem sido formulada neste Capítulo, possuem distintos significados físicos e, portanto, podem ter propriedades topológicas e/ou métricas distintas.

4.4 – REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS SOBRE ESPAÇOS DE FASE

É importante notar que as formulações da Teoria Quântica definidas em termos de conjuntos de funções de quadrado integrável sobre espaços de fase, i. é., $\mathscr{L}^2\,(R \times R \equiv \Omega)$, introduzidas neste Capítulo, são realizações redutíveis da W^*–álgebra semi–finita das observáveis usuais associadas ao sistema. Neste sentido, podemos buscar os sub–espaços invariantes de $\mathscr{L}^2\,(\Omega)$ que servem como espaços de realização irredutível para a referida álgebra.

Denotando–se por $\hat{P}_k$, o projetor ortogonal que projeta $\mathscr{L}^2(\Omega)$ sobre o sub–espaço invariante $\mathscr{L}^2_k(\Omega) \subset \mathscr{L}^2\,(\Omega)$, ou seja,

$$\hat{P}_k : \mathscr{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathscr{L}^2_k\,(\Omega);$$

e supondo–se que ele admita uma representação integral [58], tem–se que $\Psi_k(Q,\,P) \in \mathscr{L}^2_k\,(\Omega)$ pode ser dada como:

$$\Psi_k(Q,\,P) \equiv (\hat{P}_k\,\Psi)(Q,\,P) = \int K(Q,P\,|\,Q',P')\,\Psi(Q'P')\,dQ'\,dP'. \qquad (4.33)$$

Observe que a função projetada $\Psi_k(Q,\,P)$ é definida também sobre todo o espaço de fase Ω. Além disso, como $\hat{P}_k$ é um operador de projeção ortogonal ou seja, $\hat{P}_k = \hat{P}_k^{\dagger} = \hat{P}_k^2$, tem–se que :

$$\begin{cases} K(Q\,,\,P\,|\,\;Q'\,,\;P') \;=\; K^*\;(Q',\;P'\,|\,Q,\,P)\,; \\ \\ K(Q\,,\,P,|\,Q'\,,\,P') = \displaystyle\int K(Q,P\,|\,Q'',P'')\,K(Q'',P''\,|\,Q',P')\,dQ''\,dP''. \end{cases} \qquad (4.34)$$

Usando a definição de resolução contínua da identidade, ou seja:

Definição 4.4.4. Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert. Define–se uma **resolução contínua da identidade** em $\mathscr{H}$ como sendo uma família de vetores $|\xi_x> \in \mathscr{H}$, com $x \in X$, contínua na topologia uniforme e satisfazendo a condição,

$$\int_X |\xi_x> <\xi_x| dx = 1,$$

e considerando o conjunto X como sendo um dos espaços de fase Ω, tem–se que é possível introduzir uma representação de $\mathscr{H}$ sobre este espaço de fase pois, qualquer que seja $|\phi> \in \mathscr{H}$, pode–se associar $\phi_\xi(Q, P)$ dada por :

$$\phi_\xi(Q, P) = <\xi_{Q,P}|\phi>.$$

Representações contínuas dessa natureza foram introduzidas originalmente por Klauder em 1963, sendo usualmente referidas como representações via estados coerentes, e desde então têm sido bastante empregadas na Física, principalmente em questões da ótica quântica [43].

Note–se que a representação contínua de Klauder sobre espaços de fase, na verdade, é uma representação irredutível da W^*–álgebra semi–finita das observáveis quantum–mecânicas usuais, já que todas as funções $\phi_\xi(Q, P)$ representam estados puros do sistema. Neste sentido, esperamos que o operador de projeção $\hat{P}_k$ possa ser determinado a partir dos vetores $|\xi_{Q,P}>$, usados por Klauder. De fato, Davies [86] demonstra, em seu estudo sobre operadores de Posição e Momentum aproximados, a existência de um operador de projeção $\hat{P}_k$, o qual admite a seguinte representação :

$$K_\xi(Q, P|Q', P') = <\xi_{Q'P'}|\xi_{QP}>.$$

Gostaríamos por fim de realçar que todas as realizações irredutíveis sobre espaços de fase derivadas da nossa realização redutível pelo uso dos operadores de projeção $\hat{P}_k$, são unitariamente equivalentes. Esta conclusão baseia–se num resultado de von Neumann [58] que demonstra que todas as realizações irredutíveis de uma W^*–álgebra semi–finita, são unitariamente equivalentes.

4.5. APLICAÇÕES SIMPLES E BASES DE OPERADORES

Com o objetivo de elucidar a formulação desenvolvida, vamos apresentar nessa seção a forma do Hamiltoniano e do Liouvilliano associados à partícula livre e ao oscilador harmônico, nas quatro representações analisadas nesse Capítulo. Sendo o Hamiltoniano associada a esses sistemas na formulação usual dado por

$H = \frac{p^2}{2m}$ e $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$, respectivamente, e considerando a realização dos operadores básicos analisados, temos, por uma simples substituição, os seguintes resultados :

a) Representação $\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\}$

i) Partícula livre

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \quad ; \quad \hat{L} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right]$$

ii) Oscilador harmônico

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{m\omega^2}{2} q_1^2 \quad ; \quad \hat{L} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right] + \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 - q_2^2)$$

b) Representação $\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\}$

i) Partícula livre

$$\hat{H} = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{i\hbar}{m} p_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} \quad ; \quad \hat{L} = -\frac{i\hbar}{m} p_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2}$$

ii) Oscilador harmônico

$$\hat{H} = \left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_1^2\right) - \frac{i\hbar}{m} p_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_1^2}$$

$$\hat{L} = -\frac{i\hbar}{m}\left(p_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - m^2 \omega^2 q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - m^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}\right)$$

c) Representação $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$

i) Partícula livre

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} p_1^2 \quad ; \quad \hat{L} = -\frac{i\hbar}{m} p_1 \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_2}$$

ii) Oscilador harmônico

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{m\omega^2}{2} q_2^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(2i\hbar\, q_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - \hbar^2 \frac{\partial}{\partial p_1^2}\right) \quad ;$$

$$\hat{L} = -\frac{i\hbar}{m}\left(p_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - m^2 \omega^2 q_2 \frac{\partial}{\partial p_1}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - m^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\right)$$

d) Representação $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$

i) Partícula livre

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} P \frac{\partial}{\partial Q} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \quad ; \quad \hat{L} = -i\hbar P \frac{\partial}{\partial Q};$$

ii) Oscilador harmônico

$$\hat{H} = \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q\right) - \frac{i\hbar}{2m} \left(P \frac{\partial}{\partial Q} - m^2 \omega^2 Q \frac{\partial}{\partial P}\right) - \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{\partial^2}{\partial Q^2} + m^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial P^2}\right) \quad ;$$

$$\hat{L} = -i\hbar \left(\frac{P}{m} \frac{\partial}{\partial Q} - m\,\omega^2 Q \frac{\partial}{\partial P}\right).$$

Também de interesse, como elucidação, é a dedução da equação diferencial satisfeita pelo estado de equilíbrio termodinâmico a temperatura T de um sistema descrito pelo Hamiltoniano, na formulação usual, $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$.

Considerando que no presente formalismo o estado de equilíbrio é descrito pelo vetor não—normalizado

$|\psi\rangle = |\mathrm{Exp} - \frac{\beta H}{2}\rangle$, sendo $\beta = \frac{1}{KT}$, temos que :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} |\mathrm{Exp} - \frac{\beta H}{2}\rangle \equiv |\frac{\partial}{\partial \beta} \mathrm{Exp} - \frac{\beta H}{2}\rangle = |-\frac{1}{2} H \,\mathrm{Exp} - \frac{\beta H}{2}\rangle,$$

e levando—se em conta a equação (3.4), a equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} |\mathrm{Exp} - \frac{\beta H}{2}\rangle = -\frac{1}{2} \hat{H} \,|\mathrm{Exp} - \frac{\beta H}{2}\rangle, \text{ sendo } \hat{H} = H \otimes 1. \tag{4.45}$$

Em termos da base $\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\}$, esta equação transforma—se na seguinte equação diferencial :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\Psi_\beta(q_1, p_2) = -\frac{1}{2}\left[\frac{p_2^2}{2m} + V(q_1) - \frac{i\hbar}{m}p_2\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}\right]\Psi_\beta(q_1, p_2), \qquad (4.46)$$

com $\Psi_\beta(q_1, p_2) \equiv \langle q_1\, p_2|\ \text{Exp}-\frac{\beta H}{2}\rangle$.

É claro que a escolha de uma outra base determina o surgimento de uma nova equação diferencial associada a (4.45). Portanto a nossa formulação, ao permitir a introdução de várias bases, abre a possibilidade de descobrir–se a base que gera a equação diferencial mais simples, para cada tipo de interação V (q).

Observe–se ainda que tendo em vista o *–isomorfismo $\mathscr{L}^2(\mathscr{H}) \cong \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$, podemos estabelecer uma relação biunívoca entre as representações desenvolvidas sobre $H = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^*$ e as bases de operadores para $\mathscr{L}^2(\mathscr{H})$. Neste sentido, as funções de onda na representação coordenada $\Psi(q_1, q_2) \equiv \langle q_1, q_2|\Psi\rangle$, considerando (3.3), são dadas por,

$$\Psi(q_1, q_2) = \text{traço}\ \Delta^\dagger(q_1, q_2)\,\Psi;$$

podendo, portanto, $\Delta(q_1, q_2)$ ser identificado como o operador $|q_1\rangle\ \langle q_2|$ atuando em $\mathscr{H}$. Em outras palavras, existe uma correspondência biunívoca entre os "kets" $|q_1, q_2\rangle$ e a família de operadores $\Delta(q_1, q_2) \equiv |q_1\rangle\ \langle q_2|$, ou seja, com nossa notação $|q_1\,, q_2\rangle \equiv \Big|\,|q_1\rangle\ \langle q_2|\Big\rangle$.

Nas Proposições a seguir estabelecemos a citada correspondência para as outras bases introduzidas neste Capítulo.

Proposição 4.5.1. A auto–base $\{|q_1', p_2'\rangle^{(t)}\}$ associada às observáveis $\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\}^{(t)}$ pode ser posta em correspondência biunívoca com a família de operadores $\overline{\Delta}(q_1', p_2') \equiv \delta(q_1 - q_1')\ \delta(p_2 - p_2')$ sendo $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{p}_2$ operadores de posição e momentum em $\mathscr{H}$, isto é, $[\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2]_- = i\hbar$.

Demonstração:

Como $\text{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\, p_2 q_1] = \langle q_1|p_2\rangle$, os vetores "kets" $|q_1', p_2'\rangle^{(t)}$ relativos à base $\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\}^{(t)}$ podem ser dados por :

$$|q_1', p_2'\rangle^{(t)} = \langle q_1'|p_2'\rangle\; |q_1'\, p_2'\rangle \quad \text{(vide eq. 4.11)}$$

Por outro lado, como, $|q_1', p_2'\rangle \equiv \Big|\, |q_1'\rangle\; \langle p_2'| \Big\rangle$ tem–se então que,

$$|q_1', p_2'\rangle^{(t)} = \Big|\, |q_1'\rangle\; \langle q_1'|p_2'\rangle\; \langle p_2'| \Big\rangle.$$

Outrossim, como o operador de projeção associado a todo $f \in \mathscr{L}\,(\mathscr{H})$ com espectro contínuo pode ser escrito como : $|f'\rangle\; \langle f'| = \delta(\mathbf{f} - f')$, com $f' \in R$; desde que,

$$|f'\rangle\; \langle f'|f''\rangle = \delta(f'' - f')\; |f''\rangle = \delta(\mathbf{f} - f')\; |f''\rangle;$$

obtém–se que,

$$|q_1', p_2'\rangle^{(t)} = \Big|\, \delta(\mathbf{q}_1 - q_1')\; \delta(\mathbf{p}_2 - p_2') \Big\rangle. \quad \text{C.Q.D.}$$

Seguindo um desenvolvimento similar ao da Proposição 4.5.1, podemos mostrar que a auto–base $\{|p_1', q_2'\rangle^{(t)}\}$ associada aos observáveis $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}^{(t)}$ pode ser posta em correspondência biunívoca com a família de operadores $\overline{\Delta}(p_1', q_2') \equiv \delta(\mathbf{p}_1 - p_1')\; \delta(\mathbf{q}_2 - q_2')$, sendo $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_2$ operadores de posição e momentum em $\mathscr{H}$, i. é., $[\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2]_{-} = i\hbar$.

Proposição 4.5.2. A auto–base $\{|Q', P'\rangle\}$ associada às observáveis $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$ pode ser posta em correspondência biunívoca com a família de operadores:

$$\Delta_{\omega}(Q', P') \equiv \int d\eta\; d\Pi\; \text{Exp}\,\{\tfrac{i}{\hbar}\,[\eta(\mathbf{p} - p) + \Pi(\mathbf{q} - q)]\}.$$

Demonstração :

Sendo $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ os operadores posição e momentum atuando em $\mathscr{H}$, temos que, $\text{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\eta]\;|Q\rangle = |Q+\eta\rangle$; o que permite reescrever $|Q, P\rangle$ como,

$$|Q, P\rangle = \int d\eta\; \text{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\eta(\mathbf{p}-P)]\;|Q-\frac{1}{2}\,\eta\rangle\;\langle Q-\frac{1}{2}\,\eta|.$$

Considerando agora que o Projetor $|Q-\frac{1}{2}\,\eta\rangle\;\langle Q-\frac{1}{2}\,\eta|$ pode ser escrito da forma a seguir,

$$|Q-\frac{1}{2}\,\eta\rangle\;\langle Q-\frac{1}{2}\,\eta| = \delta\Big[\mathbf{q}-(Q-\frac{1}{2}\,\eta)\Big] = \int d\Pi\; \text{Exp}\,\{\frac{i}{2}\,\Pi[\mathbf{q}-(Q-\frac{1}{2}\,\eta)]\}.$$

temos que,

$$|Q,P\rangle = \int d\eta\; d\Pi\; \text{Exp}\,[-\frac{i}{\hbar}\,\Pi\eta]\;\text{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\eta\,(\mathbf{p}-P)]\;\text{Exp}\,[\frac{i}{\hbar}\,\Pi\,(\mathbf{q}-Q)]$$

Mas, como $\text{Exp}\,(A+B) = (\text{Exp}\,A)\,(\text{Exp}\,B)\;\text{Exp}\Big[-\frac{1}{2}\,(AB-BA)\Big]$, para quaisquer $A, B \in \mathscr{L}\,(\mathscr{H})$, cujo comutador seja uma constante [58], temos finalmente que,

$$|Q,P\rangle = \int d\eta\; d\Pi\; \text{Exp}\,\{\frac{i}{\hbar}\,[\eta(\mathbf{p}-P) + \Pi\,(\mathbf{q}-Q)]\}. \quad \text{C.Q.D.}$$

A noção de base de operadores foi introduzida por Fano [87] em seus estudos sobre matriz densidade e posteriormente empregada por Cahill–Glauber [88] e Agarwal–Wolf [89], na tentativa de reformular a Teoria Quântica, expressando os valores esperados quantum–mecânicos de forma similar àquela utilizada na Teoria Clássica; descrevendo portanto, os estados e os observáveis quantum–mecânicos via funções sobre espaços de fase [90]. Essas reformulações são usualmente referidas como formulações da Teoria–Quântica sobre espaços de fase [91].

Cabe ressaltar, que a formulação introduzida neste Capítulo é de natureza essencialmente distinta das reformulações supracitadas tendo em vista que em nosso caso :

a) Os estados são representados por amplitudes de probabilidade sobre espaços de f e os observáveis por operadores atuando sobre as mesmas, uma vez que estamos empregand estrutura de espaço de Hilbert;

b) Os espaços de fase surgem aqui como o espectro associado a conjuntos operadores auto–adjuntos do espaço de Hilbert, portanto, de uma forma intrinsecame *quantum*–mecânica;

c) Pode–se generalizar o conceito de observáveis introduzindo novas grandezas físi associadas ao sistema, como por exemplo, os geradores infinitesimais dos grupos de simet relacionados com os espaços de fase.

Com relação a este último aspecto gostaríamos ainda de chamar atenção para o f de que, *não sendo nessa formulação o Hamiltoniano o gerador das translações infinitesimais* tempo, isto possibilita a introdução de um operador canônicamente conjugado ao refer gerador, satisfazendo a relação de comutação $[\hat{L},\hat{T}] \equiv i\,1$ já que o Liouvilliano, contrariame ao Hamiltoniano, pode ser ilimitado inferiormente [24]. Prigogine e colaboradores [24], t mostrado a necessidade da introdução de um operador dessa natureza para a solução denominado *parodoxo da irreversibilidade temporal*. *Neste sentido a formulação introduz* ao permitir a ampliação do conjunto de observáveis, pode contribuir para a discussão d questão.

Por fim, ressaltamos que a equivalência entre as representações sobre $H = \mathscr{H} \otimes$ desenvolvidas neste capítulo e as bases de operadores (vide proposições 4.5.1. e 4.5.2), além significar uma nova demonstração da "completeza" destas bases, permite a elucidação significado do espaço de fase empregado como espaço de parâmetro para as referidas base operadores, tema este, motivo de pesquisas recentes [92, 93, 94].

CAPÍTULO V

REALIZAÇÃO DE TOMITA–TAKESAKI PARA W^*–ÁLGEBRAS ABELIANAS

E

UMA NOVA FORMULAÇÃO PARA A TEORIA CLÁSSICA

INTRODUÇÃO

Ao iniciarmos este Capítulo, apresentamos uma axiomatização algébrica da Teoria Clássica não relativística para sistemas com um número finito de graus de liberdade em termos de W^*–álgebras abelianas. Feito isto, apresentaremos os elementos básicos do desenvolvimento de Gelfand [56] para as W^*–álgebras abelianas o que nos possibilita proceder à derivação da formulação de Liouville da Teoria Clássica a partir da axiomática algébrica introduzida. Em seguida, baseados na realização de Tomita –Takesaki para as W^*–álgebras abelianas, propomos uma formulação para a Teoria Clássica em termos de operadores lineares atuando sobre espaços de Hilbert, permitindo–nos assim generalizar a referida Teoria nos mesmos moldes do que foi feito no Capítulo III para a Teoria Quântica. Apresentamos também algumas representações específicas para a formulação da Teoria Clássica sobre espaços de Hilbert (e sua generalização) e mostramos as relações entre a nossa formulação e as formulações da escola de Bruxelas [20, 24] e a de Schönberg [32, 33]. Finalmente, de forma sintética e com o objetivo de elucidar a formulação apresentamos algumas aplicações da generalização proposta.

5.1 – AXIOMATIZAÇÃO ALGÉBRICA NA TEORIA CLÁSSICA

Considerando como ponto básico que a Teoria Clássica não relativística para sistemas com número finito de graus de liberdade admita os conceitos de observáveis e estados como elementos constitutivos básicos, podemos axiomatizar a referida teoria de um ponto de vista algébrico. Contudo, devemos observar que diferentemente da Teoria Quântica, na Teoria Clássica todas as observáveis devem ser simultaneamente mensuráveis, i. é., compatíveis. Outrossim, tendo em vista que na axiomatização da Teoria Quântica, a não compatibilidade de observáveis é uma decorrência direta do caráter não abeliano da estrutura algébrica empregada, somos naturalmente conduzidos a empregar as W^*–álgebras abelianas (ou C^*–álgebras abelianas com identidade) na axiomatização algébrica da Teoria Clássica. Neste sentido, podemos considerar os seguintes axiomas:

Axioma 1: Seja Σ um dado sistema clássico não–relativístico com número finito de graus de liberdade e $\mathscr{U}$ o conjunto constituído por todas as observáveis limitadas que podem ser associadas a Σ. Segue então que $\mathscr{U}$ pode ser identificado como conjunto $\mathscr{R}(\mathscr{E})$, contido em uma W^*–álgebra abeliana semi–finita $\mathscr{E}$ (ou C^*–álgebra abeliana semi–finita com identidade).

Axioma 2: Seja S o conjunto constituído por todos os possíveis estados que o sistema Σ pode assumir. Segue então que S pode ser identificado como o conjunto $E \subset \mathscr{E}_{*,+}$, i. é., com os elementos $\omega \in \mathscr{E}_{*,+}$, com $\|\omega\| = 1$, sendo $\omega(A)$ com $A \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, interpretado como o valor esperado da observável A no estado ω.

Axioma 3: A evolução temporal do sistema Σ é dada através de um grupo de *–automorfismos a um parâmetro, $t \longrightarrow \sigma_t$, de $\mathscr{E}$ contínuo na topologia fraca, de tal forma que $\langle A \rangle_{obs}(t) = \omega(\sigma_t(A))$.

Observe que o conjunto $\mathscr{R}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{E}$ constituído pelas observáveis, neste caso, possui uma estrutura de álgebra de Jordan associativa e álgebra de Lie comutativa, quando munido respectivamente dos produtos simetrizados e anti–simetrizados introduzidos na Proposição 2.1.8. De fato, para quaisquer que sejam A, $B \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$ tem–se que:

a) $A \circ B \equiv \frac{1}{2}(A \square B + B \square A)$ e considerando que a álgebra $\mathscr{E}$ é abeliana, i. é., A

$\square$ B = B $\square$ A, o produto simetrizado em R ($\mathscr{E}$) coincide com o produto usual em $\mathscr{E}$, ou seja: A $\circ$ B = A $\square$ B. Como o produto usual em $\mathscr{E}$ é associativo, temos então que $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ é uma álgebra de Jordan associativa (vide Proposição 2.1.9);

b) A Δ B $\equiv \frac{1}{i}$ (A $\square$ B − B $\square$ A), sendo portanto A Δ B = 0 e por conseguinte $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ é também uma álgebra de Lie comutativa (vide Proposição 2.1.9).

Cabe esclarecer que deste ponto em diante, tendo como base a argumentação desenvolvida para o caso quantum–mecânico, passaremos também a utilizar as W^*–álgebras abelianas semi–finitas como a estrutura abstrata básica na axiomatização algébrica da Teoria Clássica.

Proposição 5.1.1. As realizações lineares irredutíveis de qualquer W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$ são unidimensionais.

Demonstração: Segundo a Proposição 2.3.5., a realização $\pi(\mathscr{E})$ é irredutível, se e somente se $\pi'(\mathscr{E}) = \{\lambda\ 1$, com $\lambda \in C\}$. Por outro lado sendo $\mathscr{E}$ abeliana, então $\pi(\mathscr{E}) \subseteq \pi'(\mathscr{E})$, logo $\pi(\mathscr{E}) \subseteq \{\lambda\ 1$, com $\lambda \in C\}$. Em outras palavras, podemos dizer que uma realização irredutível π associa a cada elemento de uma W^*–álgebra abeliana um número complexo. C.Q.D.

Cabe ressaltar que se a realização é maximal, i. é., $\pi(\mathscr{E}) = \pi'(\mathscr{E})$, tem–se que $\mathscr{E}$ é posto em correspondência biunívoca com o corpo dos complexos. Segue naturalmente que a álgebra de Jordan associativa $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ corresponde, neste caso, ao corpo dos reais.

Com base na Proposição 5.1.1., podemos concluir que o desenvolvimento de uma axiomatização para a Teoria Clássica, diretamente em termos de operadores lineares limitados atuando sobre espaços de Hilbert, importa na necessidade do uso de realizações redutíveis de W^*–álgebras, devido ao caráter trivial das irredutíveis. Neste Capítulo,desenvolveremos particularmente as suas realizações de Tomita–Takesaki, tendo em vista principalmente os seguintes aspectos (vide seção 2.6):

i) Nesta realização todos os estados do sistema são representados por vetores do espaço de realização;

ii) A existência dessas realizações para qualquer W^*–álgebra, permitindo portanto, o desenvolvimento de uma axiomatização em bases similares àquela realizada para o caso quantum–mecânico.

Neste ponto é interessante fazer um parentesis neste desenvolvimento para observar que as W^*–álgebras abelianas podem também ser consideradas como uma abstração de conjuntos de funções complexas definidas sobre convenientes espaços topológicos, ou seja; admitem realizações de natureza distinta das Lineares. De fato temos que:

Proposição 5.1.2. Seja $\mathbf{X}$ um espaço localmente compacto e $C_o(\mathbf{X})$ o conjunto constituido por todas as funções contínuas sobre $\mathbf{X}$ que se anulam no infinito, i. é., $\forall\, f \in C_o(\mathbf{X})$, existe um subconjunto $K \subset \mathbf{X}$ compacto, tal que $|f(x)| < \epsilon$, com $\epsilon > 0$, para todo x pertencente ao complemento de K em $\mathbf{X}$. Por outro lado, $C_o(\mathbf{X})$, quando munido das operações:

$$\begin{cases} \text{i)}\ (f+g)(x) \equiv f(x) + g(x) \\ \text{ii)}\ (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x)\ , \ \text{com}\ \alpha \in C \\ \text{iii)}\ (f\,g)(x) \equiv f(x)\, g(x) \\ \text{iv)}\ (f)^+(x) \equiv f(x)^* \end{cases} \tag{5.1.}$$

para quaisquer que sejam $f(x)$, $g(x) \in C_o(\mathbf{X})$, e tomando como norma:

$$v)\ \|f\| \equiv \sup \left\{ |f(x)|\,;\ \forall\, x \in X \right\} \tag{5.2}$$

adquire uma estrutura de C^*–álgebra abeliana.

Demonstração: Segue de forma direta que $C_o(X)$ é uma B^*–álgebra e além disto, como:

$$\|ff^*\| = \sup \left\{ |f(x)|^2\,;\ x \in X \right\} = \|f\|^2,$$

tem–se que, de fato, $C_o(X)$ é uma C^*–álgebra. C.Q.D.

Pode–se mostrar que no caso de $C_o(X)$, o supremo de todas as sequências crescentes e limitadas na norma de seus elementos positivos não necessariamente pertence a $C_o(X)$, o que significa que este conjunto não é uma W^*–álgebra abeliana (vide Proposição 2.4.4.) . Por outro lado, no caso do subconjunto $L^{\infty}(X)$ de $C_o(X)$ definido por:

$$L^{\infty}(X) \equiv \{f(x) \in C_o(X);\ \|f(x)\| < \infty\},$$

o supremo das referidas sequências é um elemento de $L^{\infty}(X)$ e portanto $L^{\infty}(X)$ é uma W^*–álgebra abeliana.

5.2. – O DESENVOLVIMENTO DE GELFAND PARA W^*–ÁLGEBRAS ABELIANAS

Nesta seção apresentamos sinteticamente os principais elementos da construção de Gelfand [56] para as W^*–álgebras abelianas e a utilizaremos na obtenção da formulação de Liouville da Teoria Clássica [80, 90], a partir da axiomatização algébrica introduzida.

Proposição 5..2.1. Seja ω: $\mathscr{E} \longrightarrow C$ um estado sobre uma W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$.

Segue então que ω é puro se e somente se $\omega\,(A \,\square\, B) = \omega(A)\,\omega(B)$, para todo A, B $\in \mathscr{E}$.

Demonstração: Tomando $(H,\ \pi,\ 1_\omega)$ como a representação G. N. S. de $\mathscr{E}$ induzida por um estado puro ω de $\mathscr{E}$, temos que:

$$\omega(A) = \langle 1_\omega | \pi(A) | 1_\omega \rangle .$$

Por outro lado, como ω é puro, a representação G. N. S. é irredutível (vide Proposição 2.5.6.) e segundo a Proposição 5.1.1., ela é unidimensional, ou seja $\pi(A)$ é um número complexo. Portanto, $\omega(A) = \pi(A)\,\langle 1_\omega | 1_\omega \rangle = \pi(A)$. Desta forma, segue que:

$$\begin{aligned} \omega(A \,\square\, B) &= \langle 1_\omega | \pi(A)\,\pi(B) |\, 1_\omega \rangle \\ &= \pi(A)\,\pi(B)\,\langle 1_\omega | 1_\omega \rangle \\ &= \pi(A)\,\pi(B) \\ &= \omega(A)\,\omega(B) \qquad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

Definição 5.2.2. O conjunto $\sigma(\mathscr{E})$ constituído por todos os estados puros de uma W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$ é usualmente referido como o espectro de $\mathscr{E}$.

Vale a pena frisar que o espectro de $\mathscr{E}$, sendo um subconjunto do dual de $\mathscr{E}$, i. é., $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{E}^*$, pode ser naturalmente munido com a topologia *–fraca de $\mathscr{E}^*$ (vide seção 2.4). De fato, $\sigma(\mathscr{E})$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto [62].

Definição 5.2.3. Denotando–se por A os elementos de uma W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$, define–se a transformada de Gelfand $\check{A}$ de $A \in \mathscr{E}$ como sendo a função contínua sobre $\sigma(\mathscr{E})$, tomando valores no corpo dos complexos, dada por:

$$\begin{cases} \check{A} : \sigma(\mathscr{E}) \longrightarrow C \\ \check{A}(\omega) \equiv \omega(A) \end{cases} \tag{5.3}$$

Proposição 5.2.4. O conjunto constituído por todas as transformadas de Gelfand $\check{A}$ de $A \in \mathscr{E}$, é *–isomórfico a $\mathscr{E}$.

Demonstração:

a) Segue diretamente da definição da transformada de Gelfand, que:

i) $(A + B)(\omega) \equiv \omega(A + B) = \omega(A) + \omega(B) = \check{A}(\omega) + \check{B}(\omega)$

ii) $AB(\omega) \equiv \omega(A \,\square\, B) = \omega(A)\,\omega(B) = \check{A}(\omega)\,\check{B}(\omega)$

iii) $(\check{A}(\omega))^* \equiv (\omega(A))^* = \omega(A^\dagger) = (A^\dagger)(\omega)$

e portanto, segundo a Definição 2.2.1., a transformada de Gelfand é realmente um *–morfismo entre $\mathscr{E}$ e o conjunto das funções $\check{A}: \sigma(\mathscr{E}) \longrightarrow C$ com $\check{A}(\omega) \equiv \omega(A)$.

b) Como $\|\check{A}\| \equiv \sup\{|\check{A}(\omega)|;\ \forall\omega \in \sigma(\mathscr{E})\}$, temos que:

$$\|\check{A}\|^2 = \sup\{|(A^\dagger A)(\omega)|;\ \forall\omega \in \sigma(\mathscr{E})\}$$

$$= \sup\{|\omega\,(A^\dagger \square\, A)|;\ \forall\omega \in \sigma(\mathscr{E})\} = \|A\|^2$$

e então, de acordo com a Proposição 2.2.3., a transformada de Gelfand é, de fato, um *–isomorfismo. C.Q.D.

Considerando que $\|A\| \equiv \sup\{|\check{A}(\omega)|;\ \forall\ \omega \in \sigma(\mathscr{E})\} = \sup\{|\omega(A)|;\ \forall\ \omega \in \sigma(\mathscr{E})\}$ e que as observáveis são limitadas, temos que $|\omega(A)| < \infty$, portanto, as transformadas de Gelfand são limitadas na norma, ou seja, $\|A\| < \infty$. Além disso, o Teorema de Stone–Weierstrass [56] permite demonstrar que o conjunto constituído por todos os $\check{A} : \sigma(\mathscr{E}) \longrightarrow C$, pode ser identificado com $L^{\infty}(\sigma(\mathscr{E}))$.

Em resumo, podemos dizer que qualquer W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$ é *–isomórfica a $L^{\infty}(X)$, sendo X o conjunto constituído por todos os estados puros de $\mathscr{E}$. Deste ponto em diante nos referiremos a $L^{\infty}(\sigma(\mathscr{E}))$ como **a construção de Gelfand** da W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$

Por outro lado, Riesz–Markoff [18] demonstraram que qualquer funcional linear contínuo sobre $L^{\infty}(X)$ pode ser escrito como:

$$\mathscr{G}[A(\mathscr{E})] = \int_{\sigma(\mathscr{E})} f(\xi)\, A(\xi)\, d\xi$$

sendo $d\xi$ o elemento de volume do conjunto $\sigma(\mathscr{E})$. Sendo assim, os valores esperados na construção de Gelfand da W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$, são dados por,

$$\omega(A) = \int_{\sigma(\mathscr{E})} f(\xi)\, A(\xi)\, d\xi$$

e portanto os estados são representados por funções contínuas sobre $\sigma(\mathscr{E})$, que possuem as seguintes propriedades (vide Definição 2.4.5.): $\begin{cases} \int_{\sigma(\mathscr{E})} f(\xi)\, d\xi = 1 \\ f(\xi) \geq 0 \end{cases}$ isto é, funções reais contínuas não–negativas e normalizadas.

No caso em que o estado é puro, i. é., $\omega_0(A) = \check{A}\,(\omega_0)$ com $\omega_0 \in \sigma(\mathscr{E})$, temos que a função que o representa na construção de Gelfand é dada por $f(\xi) = \delta(\xi - \omega_0)$, ou seja, uma delta de Dirac [77] localizada no ponto ω_0.

Por fim, os *–automorfismos a um parâmetro da W^*–álgebra abeliana $\mathscr{E}$, são realizados na construção de Gelfand de $\mathscr{E}$ através de grupos de Lie de transformação a um parâmetro, definidos sobre $L^{\infty}(\sigma(\mathscr{E}))$. Usando a representação exponencial dos referidos grupos de Lie [90], temos:

$$\check{A}(\omega) \longrightarrow \check{A}_t(\omega) = \mathrm{Exp}\,[-\tilde{H}\,t]\,A(\omega) \tag{5.4}$$

com $t \in R$ e $\tilde{H}$ o gerador do grupo.

Tendo em vista a universalidade da construção de Gelfand de W^*–álgebras abelianas, podemos axiomatizar a Teoria Clássica diretamente em termos do conjunto $L^{\infty}(\sigma(\mathscr{E}))$. Observemos ainda, que neste caso, o conjunto $\sigma(\mathscr{E})$ denotado por Ω, usualmente denominado "espaço de fase" é dado por:

$$\Omega \equiv \{(Q_1,...Q_n; P_1,...P_n);\ \text{com } Q_i,\ P_i \in R\},$$

sendo n o número de graus de liberdade associado ao sistema e os Q_i e P_i interpretados respectivamente como as posições e os momenta relativos às partículas que constituem o sistema. Assim sendo, temos os seguintes axiomas:

A1) A qualquer sistema clássico Σ não relativístico com um número finito de graus de liberdade, associa-se um espaço de fase Ω, de tal forma que os estados de Σ são representados por funções reais definidas sobre Ω, tais que:

$$\begin{cases} f(\xi) \geq 0\ , & \text{com } \xi \in \Omega \\ \int_{\Omega} f(\xi)\ d(\xi) = 1\ , & \text{sendo } d\xi \text{ o elemento de volume de } \Omega\ ; \end{cases}$$

A2) As observáveis do sistema são representadas por funções reais definidas sobre Ω, e *o valor esperado da observável* $A(\xi) \in L^{\infty}(\Omega)$, quando o sistema encontra–se no estado $f(\xi)$, é dado por:

$$\int_{\Omega} A(\xi)\, f(\xi)\, d\xi;$$

A3) A evolução dinâmica é dada pelo grupo de Lie a um parâmetro:

$$A(\omega) \longrightarrow A_t(\omega) = \mathrm{Exp}\,[-\tilde{\tilde{H}}\, t]\, A(\omega); \qquad \text{com } t \in R,$$

e $\tilde{\tilde{H}} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial Q_i} \frac{\partial}{\partial P_i} - \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial}{\partial Q_i}\right)$, sendo H a Hamiltoniana associada ao sistema.

Na realidade, a cada observável $A(\omega)$ associada ao sistema, corresponde um grupo de Lie de transformação atuando em $L^{\infty}(\Omega)$ dado por $\mathrm{Exp}\,[-\alpha\tilde{\tilde{A}}(\omega)]$, com $\alpha \in R$ e $\tilde{\tilde{A}}(\omega)$ o gerador do grupo, sendo:

$$\tilde{\tilde{A}}(\omega) \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial Q_i} \frac{\partial}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i} \frac{\partial}{\partial Q_i}\right).$$

Em particular, os geradores dos grupos de translação nas variáveis P_i e Q_i são dados respectivamente por:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_i = \dfrac{\partial}{\partial P_i} \\ \tilde{P}_i = \dfrac{-\partial}{\partial Q_i} \end{cases} \tag{5.5}$$

Se considerarmos que a atuação de $\mathrm{Exp}\,[-\alpha\tilde{\tilde{A}}(\omega)]$ sobre $L^{\infty}(\Omega)$ pode ser posta como,

$$\mathrm{Exp}\,[-\alpha\tilde{\tilde{A}}(\omega)]\, B(\omega) = B(\omega) - \alpha\, \tilde{\tilde{A}}(\omega)\, B(\omega) + \frac{\alpha^2}{2}\, \tilde{\tilde{A}}(\omega)\, \tilde{\tilde{A}}(\omega)\, B(\omega) + \ldots$$

$$= B(\omega) - \alpha \left\{A(\omega),\, B(\omega)\right\} + \frac{\alpha^2}{2}\left\{A(\omega), \left\{A(\omega),\, B(\omega)\right\}\right\} + \ldots;$$

onde $\left\{A(\omega),\ B(\omega)\right\} \equiv \sum_i \frac{\partial A(\omega)}{\partial Q_i} \frac{\partial B(\omega)}{\partial P_i} - \frac{\partial A(\omega)}{\partial P_i} \frac{\partial A(\omega)}{\partial Q_i}$, é o parêntesis de Poisson [90] entre as observáveis $A(\omega)$ e $B(\omega)$, temos a proposição seguinte:

Proposição 5.2.5. O conjunto $\mathscr{R}$ $[L^{\infty}(\Omega)]$ das observáveis na construção de Gelfand, quando munido da operação perêntesis de Poisson, adquire uma estrutura de álgebra de Lie.

Demonstração:

a) Segundo a Proposição 2.1.8, $\mathscr{R}$ $[L^{\infty}(\Omega)]$ é um espaço de Banach sobre os reais, com respeito às mesmas operações de L^{∞} (Ω);

b) Segue diretamente da definição dos parêntesis de Poisson que ele é um produto de Lie (vide Definição 1.2.11). Daí, a proposição fica demonstrada. C.Q.D.

Observe que, embora $\mathscr{R}[L^{\infty}(\Omega)]$ quando munido do produto anti–simetrizado tenha uma estrutura de álgebra de Lie comutativa, o mesmo não acontece quando o produto de Lie é o parêntesis de Poisson. Além disso, vale a pena frisar que é possível introduzir em $\mathscr{R}$ $[L^{\infty}(\Omega)]$ uma nova operação, parêntesis de Poisson simétrico [95], dotando o conjunto das observáveis, sob certas restrições [96], de uma estrutura de álgebra de Jordan não–associativa.

5.3 – A REALIZAÇÃO DE TOMITA TAKESAKI PARA AS W^*–ÁLGEBRAS ABELIANAS E A TEORIA CLÁSSICA

Como a classe das realizações de Tomita–Takesaki (realizações redutíveis) pode ser associada a qualquer W^*–álgebra (vide seção 2.6. e 2.7), é possível desenvolver uma axiomatização para a Teoria Clássica diretamente em termos de operadores lineares limitados atuando sobre espaços de Hilbert. Levando em conta as propriedades da realização de Tomita–Takesaki (vide principalmente as Proposições 2.6.16., 2.7.4. e 2.7.5.) temos que:

B1) A qualquer sistema clássico Σ não relativístico com um número finito de graus de liberdade, associa–se uma álgebra de Hilbert H de tal forma que: os possíveis estados do sistema estão em correspondência biunívoca com as direções de um subconjunto $\mathscr{P} \subset$ H, que possui a estrutura de um cone conexo auto–dual;

B2) As observáveis do sistema são representadas pelos elementos auto–adjuntos de uma álgebra de von Neumann abeliana de operadores $M \subset \mathscr{L}(H)$ que deixam $\mathscr{P} \subset H$ invariante. E o valor esperado da observável $\hat{A} \in M$ quando o sistema encontra–se em um estado descrito por $|\Psi> \in \mathscr{P}$, com $\||\Psi>\| = 1$, é dada por $<\Psi|\hat{A}|\Psi>$;

B3) A evolução dinâmica é determinada pelo seguinte grupo unitário a um parâmetro de *–automorfismo de $M \subset \mathscr{L}(H)$: $\hat{A} \longrightarrow \hat{A}_t = \mathrm{Exp}\,(it\,\hat{L})\,\hat{A}\,\mathrm{Exp}\,(-it\,\hat{L})$, sendo $\hat{L}$ o operador de Liouville associado ao sistema.

A realização unitária para a evolução temporal dada acima foi introduzida num outro contexto por Koopmam [97]. Convém ressaltar que também no caso da Teoria Clássica, o operador de Liouville não é uma observável, já que, se assim o fôsse, $\hat{A}_t$ seria igual a $\hat{A}$, para qualquer $t \in R$. O mesmo argumento, é claro, pode ser aplicado a todos os geradores infinitesimais dos grupos de simetria no "espaço de fase". Por conseguinte, a representação de Tomita–Takesaki para W^*–álgebras conduz a uma formulação da Teoria Clássica onde as observáveis e os geradores dos grupos de simetria são representados por diferentes operadores. Fazendo–se uma analogia com o caso quantum–mecânico, poderíamos dizer que esses geradores representam "graus de liberdade fantasmas".

Proposição 5.3.1. Seja $(H, \pi, 1_\omega)$ uma representação de Tomita–Takesaki induzida pelo estado fidedigno ω da W^*–álgebra abeliana semi–finita $\mathscr{E}$ associada ao sistema clássico Σ. Se $\pi(\mathscr{E})$ é maximal, então o grupo modular associado ao estado ω corresponde à identidade e, portanto, o cone auto–dual $\mathscr{P} \in H$ é dado por $\mathscr{P} = \overline{\mathscr{R}_+[\pi(\mathscr{E})]1\omega}$.

Demonstração: Como $\pi(\mathscr{E})$ é maximal, $\pi'(\mathscr{E}) = \pi(\mathscr{E})$, e então, o núcleo da realização $Z \equiv \pi(\mathscr{E}) \cap \pi'(\mathscr{E})$ coincide com o próprio $\pi(\mathscr{E})$. Nestes termos e tendo em vista a proposição

2.6.5., a conjugação modular $\hat{J}$: H ⟶ H é tal que:

$$\hat{J}\ \pi(A)\ \hat{J} = \pi(A)^{\dagger},\ \text{para todo}\ \pi(A) \in Z = \pi(\mathscr{E}).$$

Logo, temos que $\hat{J} = \hat{S}$ (vide Definição 2.6.6) e portanto, considerando a Definição 2.6.8., $\hat{\Delta} = \hat{1}$, qualquer que seja o estado ω. Em função disto, decorre diretamente da Proposição 2.6.10. que o grupo modular corresponde à identidade, o que evidencia a impossibilidade, no caso Clássico, de derivar–se os geradores infinitesimais dos grupos de simetria, por exemplo, o Liouvilliano, via grupos modulares. Além disso, de acordo com a proposição 2.7.2., tem–se que o cone $\mathscr{P}$ é dado por $\mathscr{R}_{+}\ \overline{[\pi(\mathscr{E})]\ 1\omega}$. C.Q.D.

Observe que, sendo $\pi(\mathscr{E})$ maximal, o conjunto constituído pelas observáveis $\mathscr{R}[\pi(\mathscr{E})]$ é completo. Além disso, como posição e momentum são as observáveis básicas da Teoria Clássica, os elementos de $\mathscr{R}[\pi(\mathscr{E})]$ podem ser vistos como funções dos operadores que representam as referidas observáveis, ou seja, qualquer que seja $\hat{A} \in \mathscr{R}[\pi(\mathscr{E})]$ temos que:

$$\hat{A} = A(\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_n, \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n), \tag{5.6}$$

com $(\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_n, \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n)$, os elementos de $\mathscr{R}[\pi(\mathscr{E})]$ correspondentes às observáveis posição e momentum, respectivamente, sendo n o número de graus de liberdade de Σ.

Por conseguinte, podemos dizer que a álgebra de Lie associada a um sistema clássico de n–graus de liberdade, nesta formulação, possui $(2n + 1)$ geradores $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_n, \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_n$, 1 satisfazendo naturalmente as relações:

$$\begin{cases} [\hat{Q}_i\, , \hat{Q}_j]_- = [\hat{P}_i\, , \hat{P}_j]_- = 0 \\ [\hat{Q}_i\, , \hat{P}_j]_- = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

sendo $[\hat{A}, \hat{B}]_- \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, com i, j = 1, 2,..., n.

Como já vimos, os geradores infinitesimais dos grupos de simetria não pertencem a álgebra dos observáveis clássicos. Em particular, os geradores dos grupos de translação nas variáveis Q_i e P_i correspondem, na estrutura de espaços de Hilbert [77], aos elementos canonicamente conjugados às observáveis $\hat{Q}_i$, $\hat{P}_i$, respectivamente, i. é., a operadores $\hat{\Gamma}_{P_j}$ e $\hat{\Gamma}_{Q_j}$, que satisfazem às seguintes relações algébricas:

$$\begin{cases} [Q_j \, , \hat{\Gamma}_{P_k}]_- = -[\hat{P}_j \, , \hat{\Gamma}_{Q_k}]_- = i \\ [\hat{\Gamma}_{P_j} \, , \hat{\Gamma}_{Q_k}]_- = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

sendo i a unidade imaginária e j, k = 1, 2,..., n.

Neste sentido, o espaço de realização H associado a um sistema Clássico Σ de n–graus de liberdade, serve também como espaço de representação para uma álgebra de Lie não–comutativa com (4 n+1) geradores $\hat{Q}_1,...,\hat{Q}_n$, $\hat{P}_1,...,\hat{P}_n$, $\hat{\Gamma}_{P_1},...,\hat{\Gamma}_{P_n}$, $\hat{\Gamma}_{Q_1},...,\hat{\Gamma}_{Q_n}$, 1, satisfazendo as relações de comutação (5.7 e 5.8).

De forma similar à generalização introduzida para a Teoria Quântica no Terceiro Capítulo, podemos generalizar a Teoria Clássica pela incorporação dos geradores dos grupos de simetria ao conjunto das observáveis associadas ao sistema, e assim, a álgebra de Lie das observáveis de um sistema clássico Σ com n–graus de liberdade, na generalização proposta, passa a ter como geradores $\hat{Q}_1,...,\hat{Q}_n$, $\hat{P}_1,...,\hat{P}_n$, $\hat{\Gamma}_{P_1},...,\hat{\Gamma}_{P_n}$, $\hat{\Gamma}_{Q_1},...,\hat{\Gamma}_{Q_n}$, 1, satisfazendo as relações de comutação:

$$\begin{cases} [\hat{Q}_j \, , \hat{\Gamma}_{P_k}]_- = i \\ [\hat{P}_j \, , \hat{\Gamma}_{Q_k}]_- = -\, i \\ [\hat{Q}_j \, , \hat{P}_k]_- = [\hat{\Gamma}_{P_j} \, , \hat{\Gamma}_{Q_k}]_- = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

sendo i a unidade imaginária, j, k = 1, 2,..., n e todas as outras relações de comutação nulas.

Gostaríamos de frisar agora os seguintes aspectos da generalização proposta para a Teoria Clássica:

a) Embora direta, esta generalização está longe da trivialidade, dado que ela incorpora à Teoria Clássica a noção de incompatibilidade de observáveis. É claro, que esta incompatibilidade é de natureza distinta daquela encontrada no caso quântico, já que não é mediada por nenhuma constante física;

b) De um ponto de vista algébrico, a generalização implica numa ampliação da W^{*}–álgebra abeliana associada ao sistema Clássico, tornando–a não abeliana;

c) Naturalmente todos os resultados derivados desta generalização e que não decorram da hipótese de que os geradores dos grupos de simetria são observáveis, são igualmente válidos para formulação usual;

d) De forma similar ao caso quantum–mecânico, podemos introduzir um operador $\hat{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(H)$, canônicamente conjugado ao Liouvilliano, i. é., $[\hat{L}, \hat{\mathcal{T}}]_{-} = i$. Desta forma, esta generalização pode também contribuir para a discussão do problema de irreversibilidade temporal ao nível clássico [24].

Em suma, dado um sistema Clássico Σ não–relativístico com número finito de graus de liberdade, podemos postular que a descrição Clássica de Σ obedece os axiomas a seguir:

C1) Os possíveis estados do sistema Σ estão em correspondência biunívoca com o conjunto de direções em uma álgebra de Hilbert H;

C2) As observáveis do sistema são representadas pelos operadores auto–adjuntos atuando em H e seus valores esperados são dados $<\Psi|\hat{A}|\Psi>$, com $\|\Psi\| = 1$ e $\hat{A} \in \mathscr{R}[\mathscr{L}(H)]$;

C3) A evolução dinâmica é dada pelo grupo unitário:

$$\hat{A} \longrightarrow \hat{A}_t = \mathrm{Exp}\,[\tfrac{it}{\hbar}\hat{L}]\;\;\hat{A}\;\mathrm{Exp}\,[-\tfrac{it}{\hbar}\hat{L}]$$

sendo $\hat{L}$ o Liouvilliano do sistema.

Observemos ainda que, do ponto de vista da generalização introduzida, os axiomas acima correspondem a uma realização irredutível de sua W^*–álgebra não–abeliana semi–finita.

Por fim, ressaltamos que mesmo na Teoria Clássica, usando essa formulação algébrica, podemos estender o Axioma B1, permitindo que todas as direções em H possam ser postas em correspondência com os possíveis estados do sistema. Neste sentido, qualquer $|\Psi> \in$ H normalizado, tal que:

$$<\Psi|\hat{A}|\Psi> = <\mathbf{x}|\hat{A}|\mathbf{x}>, \text{ para todo } \hat{A} \in \mathscr{M} \subset \mathscr{L}(H) \quad e \quad |\mathbf{x}> \in \mathscr{P} \subset H$$

pode também ser tomado como um representante para o estado usualmente descrito pelo vetor $|\mathbf{x}> \in \mathscr{P} \subset H$.

5.4 – DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA A TEORIA CLÁSSICA

A partir deste ponto, na tentativa de simplificar a notação, passaremos a considerar que o sistema clássico possui apenas um grau de liberdade. Por outro lado, considerando–se a Teoria de Representações de Dirac [77] em espaços de Hilbert, podemos dizer, em vista das integrável, i. é.,

$$\int |\Psi\ (Q,P)|^2\, dQ\, dP = 1;$$

pois os "kets" $|\Psi> = \int \Psi(Q,P)\ |Q\ P>\ dQ\ dP$ de H são normalizados.

Em termos da representação canônica, os valores esperados $<\Psi|\hat{A}|\Psi>$, com $\hat{A} \in \mathscr{L}(H)$, são então dados por:

$$<\hat{A}>(t) = \int \Psi^*(Q,P)\, A(Q,\ P,\ -\frac{i\,\partial}{\partial Q},\ \frac{i\,\partial}{\partial P},\ t)\ \Psi\ (Q,\ P)\ dQ\ dP$$

Em particular, como as observáveis clássicas usuais são representadas por operadores multiplicativos A(Q, P) atuando sobre as "funções de onda" Ψ(Q, P), os seus valores esperados podem ser reescritos como:

$$\int A\ (Q,P,t)\ |\Psi\ (Q,\ P)\ |^2\ dQ\ dP;$$

Neste caso, o valor esperado da observável A(Q, P, t), deve coincidir com o calculado pela formulação usual de Liouville da Teoria Clássica, i. é.,

$$\int A\ (Q,P,t)\ |\Psi(Q,P)|^2\ dQ\ dP = \int A\ (Q,P,t)\ f(Q,P)\ dQ\ dP$$

sendo f(Q,P) a função representativa dos estados dinâmicos na formulação de Liouville. Assim, temos que:

a) Todos os vetores $\Psi(Q,P)$, com $|\Psi(Q,P)|^2 = f(Q, P)$, representam o mesmo estado dinâmico. Além disto, $\Psi(Q,P) = \sqrt{f(Q\ ,\ P)}$, é o vetor do cone auto–dual $\mathscr{P} \subset H$ representativo dos estados dinâmicos, já que os únicos vetores de H que satisfazem a condição de auto–dualidade (vide proposição 2.7.2.) são as raizes quadradas das funções f(Q, P). Desta forma, a "função de onda" clássica $\Psi(Q,P)$ representa a amplitude de probabilidade de encontrar–se a partícula que constitui o sistema na posição Q com momentum P, quando o sistema encontra–se no estado $\Psi(Q,P)$;

b) No que tange à evolução temporal das observáveis, segue também da formulação de Liouville que $i\,\frac{\partial}{\partial t}\,A(Q,\,P,\,t) = -\,i\,\tilde{H}\,A(Q,\,P,\,t)$ com $\tilde{H} = (\frac{\partial H}{\partial Q}\,\frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial P}\,\frac{\partial}{\partial Q})$. Então, $i\,\tilde{H}$ é um operador linear puramente imaginário que atua sobre as funções de (Q, P) como uma derivação, i. é.,

$$\begin{cases} (i\ \tilde{H}\ \Psi(Q,\ P))^{*} = -\,i\ \tilde{H}\ \Psi(Q\ ,\ P)^{*} \\ i\ \tilde{H}\ (\Psi(Q,P)\ \phi(Q\ ,P)) = \Psi(Q\ ,P)(i\ \tilde{H}\ \phi(Q,P)) + (i\ \tilde{H}\ \Psi(Q,P))\phi(Q,P) \end{cases} \tag{5.13}$$

Logo, $-\,i\,\tilde{H}\,A(Q,P,t) = [A\,(Q,P,t),\,i\,\tilde{H}]_{-}$ e, portanto, a equação de evolução pode ser posta na forma:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,A(Q,P,t) = [A\,(Q,P,t),\,\hat{L}]_{-},\ \text{com}\ \hat{L} = i\,\tilde{H}. \tag{5.14}$$

Assim sendo, o operador de Liouville na representação canônica é dado por:

$$\hat{L} = i\,(\frac{\partial H}{\partial Q}\,\frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial P}\,\frac{\partial}{\partial Q}).$$

Esta relação, observada entre o gerador da evolução temporal na representação canônica e o correspondente gerador na formulação de Liouville, é igualmente válida para todos os geradores dos grupos de simetria associados ao sistema, já que eles sempre atuarão como uma derivação. Em outras palavras, se $\hat{F} \equiv \{F\ (Q,P),\ \} = (\frac{\partial F}{\partial Q}\ \frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial F}{\partial P}\ \frac{\partial}{\partial Q})$, for um gerador na formulação de Liouville, temos que $i\ \hat{F}$ é o operador auto–adjunto correspondente na representação canônica da formulação algébrica.

De forma similar ao caso quântico, podemos descrever a evolução temporal na Teoria Clássica mediante uma transformação contínua dos vetores de **H** (descrição de Schroedinger Clássica), ao invés de transformações contínuas dos operadores (descrição de Heisenberg) como temos empregado até agora [48]. Neste caso, os estados dinâmicos evoluem segundo a equação,

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi>_t = \hat{L}\ |\Psi>_t$$

e na representação canônica fica sendo dada por:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(Q,P,t) = \hat{L}\ \Psi(Q,P,t), \qquad (5.15)$$

com $\hat{L} = i\,(\frac{\partial H}{\partial Q}\ \frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial P}\ \frac{\partial}{\partial Q})$ sendo $H = H(Q,\ P)$ a hamiltoniana associada ao sistema.

Na tentativa de tornar mais explícita a construção desenvolvida, cabe observar que a Hamiltoniana e o Liouvilliano associados à partícula livre e ao oscilador harmônico na representação canônica, têm a seguinte expressão;

$$\begin{cases} \text{i) Partícula livre :} \quad \hat{H} = \dfrac{P^2}{2m}\ ; \quad \hat{L} = -\dfrac{i\,P}{m}\dfrac{\partial}{\partial Q} \\ \text{ii) Oscilador harmônico :} \quad \hat{H} = \dfrac{P^2}{2m} + m\ \omega^2 Q^2\ ; \quad \hat{L} = -i\,(\dfrac{P}{m}\dfrac{\partial}{\partial Q} - m\,\omega^2\,Q\,\dfrac{\partial}{\partial P}); \end{cases} \qquad (5.16)$$

Ao concluirmos esta sub–seção, gostaríamos de frisar que o emprego do conceito de amplitude de probabilidade no espaço de fase para descrever os estados dinâmicos de um sistema clássico, foi introduzido pela primeira vez por Schönberg em 1952 [32], partindo diretamente da formulação de Liouville. Desta forma, podemos dizer com o nosso presente desenvolvimento que a reformulação proposta por Schönberg, corresponde na realidade, à representação canônica da formulação axiomática da Teoria Clássica, baseado na realização de Tomita–Takesaki de W^*–álgebras abelianas.

5.4.2 – REPRESENTAÇÃO VETOR DE ONDA–MOMENTUM

Definimos a representação vetor de onda–momentum de Σ como aquela gerada pelos "auto–kets" do conjunto completo $\{\hat{\Gamma}_P, \hat{P}\}$, i. é., pelos kets $|k, P\rangle$ com k e P sendo quaisquer números reais, tais que:

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_P \ |k,P\rangle \ = \ k \ |k,P\rangle \\ \hat{P} \ \ |k,P\rangle \ = \ P \ |k,P\rangle \end{cases} \tag{5.17}$$

De acordo com a Teoria de Transformações de Dirac [77], temos que a descrição do sistema nessa nova base é determinada de forma unívoca pela função de transformação $\langle Q',P'|k,P\rangle$ dada por:

$$\begin{aligned} \langle Q',P'|k, P\rangle &\equiv \langle Q'|k\rangle \langle P'|P\rangle \\ &= \mathrm{Exp}\,[ikQ']\ \delta(P - P'). \end{aligned}$$

Portanto, a representação $\Big\{|k, \ P\rangle\Big\}$ pode ser vista como a transformada de Fourier na variável Q da representação canônica. Nestes termos, os quatro operadores básicos

$\hat{Q}$, $\hat{P}$, $\hat{\Gamma}_P$, $\hat{\Gamma}_Q$ se realizam como:

$$(\hat{Q}\ \Psi)(k,P) \equiv i \frac{\partial}{\partial k} \Psi(k,P);$$

$$(\hat{P}\ \Psi)(k,P) \equiv P\Psi(k,P);$$

$$(\hat{\Gamma}_P\ \Psi)(k,P) \equiv k\ \Psi(k,P);$$

$$(\hat{\Gamma}_Q\ \Psi)(k,P) \equiv i \frac{\partial}{\partial P} \Psi(k,P),$$

sendo $\Psi(k,P) \equiv \langle k,P|\Psi\rangle$ a "função de onda" associada ao sistema nessa representação. Segue então que nessa representação, a Hamiltoniana e o Liouvilliano relativos a partícula livre e ao oscilador harmônico por exemplo, são expressos como:

$$\begin{cases} \text{i) Partícula livre:} \quad \hat{H} = \dfrac{P^2}{2m}\ ;\ \hat{L} = \dfrac{P}{m} k \\ \text{ii) Oscilador harmônico:}\ \hat{H} = \dfrac{P^2}{2m} - m\ \omega^2 \dfrac{\partial^2}{\partial k^2}\ ;\ \hat{L} = (\dfrac{P}{m} k + m\,\omega^2 \dfrac{\partial^2}{\partial k \partial P})\ ; \end{cases} \tag{5.18}$$

Observemos que, diferentemente do caso quântico, as representações canônicas e vetor de onda-momentum possuem uma natureza tensorial.

No caso de nos restringirmos às observáveis clássicas usuais, a representação vetor de onda-momentum dá origem a uma nova versão para a formulação de Liouville, com as funções representativas dos estados dinâmicos sendo $f(k,P) = |\Psi(k,P)|^2$ e os valores esperados dados por:

$$\int A\ (k,P)\, f(k,\ P)\, dk\, dP;$$

com A(k,P) a transformada de Fourier da variável dinâmica A(Q,P).

Esta versão da formulação de Liouville tem sido extensamente empregada na literatura no estudo dos processos irreversíveis ao nível da Física Clássica. De fato, tomando a equação de Liouville na representação vetor de onda – momentum para um sistema com n–graus de liberdade, i. é.,

$$i \frac{\partial}{\partial t} f(k_1,P_1,\ldots,k_n,P_n,t) = \hat{L}\, f(k_1,P_1,\ldots,k_n,P_n,t),$$

é possível derivar equações cinéticas, ou seja, equações fechadas para a função distribuição a um corpo,

$$f(k_1,P_1,t) \equiv \int f(k_1,P_1,\ldots,k_n,P_n,t)\, dk_2\, dP_2,\ldots,dk_n\, dP_n$$

no limite termodinâmico, através do emprego de técnicas da teoria da perturbação [57]. Neste contexto deduzimos recentemente [49] usando a Dinâmica de Correlações [57], uma equação cinética (Equação Generalizada de Vlasov) adequada para o estudo de plasmas bi–dimensionais quando a razão entre o valor esperado da energia potencial e da energia cinética é da ordem da unidade.

5.4.3 – REPRESENTAÇÃO COORDENADA

Considerando agora os operadores $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, definidos em termos dos $\hat{Q}$, $\hat{P}$, $\hat{\Gamma}_Q$, e $\hat{\Gamma}_P$, como:

$$\begin{cases} \hat{q}_1 = \hat{Q} + \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_Q \;\; ; \;\; \hat{p}_1 = \hat{P} + \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_P \\ \hat{q}_2 = Q - \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_Q \;\; ; \;\; \hat{p}_2 = \hat{P} - \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_P \end{cases} \qquad (5.19)$$

e levando-se em conta as relações de comutação (5.8), obtemos que estes operadores satisfazem as seguintes relações :

$$\begin{cases} [\hat{q}_1\,,\,\hat{q}_2]_- = [\hat{p}_1\,,\,\hat{p}_2]_- = 0 \\ [\hat{q}_1\,,\,\hat{p}_1]_- = i \\ [\hat{q}_2\,,\,\hat{p}_2]_- = -i\,, \end{cases} \tag{5.20}$$

sendo i a unidade imaginária e todas as outras relações de comutação nulas. Desta forma, os conjuntos $\{\hat{q}_1,\hat{q}_2\}$, $\{\hat{p}_1,\hat{p}_2\}$, $\{\hat{q}_1,\hat{p}_2\}$ e $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$, podem ser tomados como novos conjuntos completos para o espaço de Hilbert associados ao sistema clássico Σ.

Definimos a **representação coordenada** de Σ como aquela caracterizada pelos "auto-kets" do conjunto completo $\{\hat{q}_1,\hat{q}_2\}$, ou seja, pelos "kets" $|q_1,q_2\rangle$, sendo q_1, q_2 quaisquer números reais, tais que:

$$\begin{cases} \hat{q}_1\,|q_1\,,\,q_2\rangle = q_1\,|q_1\,,\,q_2\rangle \\ \\ \hat{q}_2\,|q_1\,,\,q_2\rangle = q_2\,|q_1\,,\,q_2\rangle \end{cases} \tag{5.21}$$

Naturalmente, na representação coordenada os estados do sistema são representados pelas "funções de onda" de quadrado integrável $\Psi(q_1,q_2) \equiv \langle q_1,q_2\,|\Psi\rangle$ enquanto os operadores $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ são realizados como:

$$\begin{cases} (\hat{q}_j\Psi)(q_1,q_2) \equiv \quad q_j\Psi(q_1\,,\,q_2)\,,\ \text{com } j = 1,2 \\ (\hat{p}_1\Psi)(q_1,q_2) \equiv -\,i\,\dfrac{\partial}{\partial q_1}\,\Psi(q_1,q_2) \\ (\hat{p}_2\Psi)(q_1,q_2) \equiv \quad i\,\dfrac{\partial}{\partial q_2}\,\Psi(q_1,q_2)\ . \end{cases} \tag{5.22}$$

Assim, as observáveis são representadas por operadores da forma:

$$\hat{A} = A(q_1, q_2, -i\,\frac{\partial}{\partial q_1}, i\,\frac{\partial}{\partial q_2}),$$

e portanto, a equação de evolução temporal dos estados torna-se:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(q_1,q_2,t) = \hat{L}\,(q_1,q_2, -i\,\frac{\partial}{\partial q_1}, i\,\frac{\partial}{\partial q_2})\,\Psi(q_1,q_2,t) \qquad (5.23)$$

sendo $\hat{L}$ o Liouvilliano na representação coordenada.

Observemos que na representação canônica, esses novos operadores são dados por:

$$\begin{cases} \hat{q}_1 = Q + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial P} \quad ; \quad \hat{p}_1 = P - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Q} \\ \hat{q}_2 = Q - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial P} \quad ; \quad \hat{p}_2 = P + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \partial} \end{cases} \qquad (5.24)$$

Portanto, o Liouvilliano e a Hamiltoniana de Σ, isto é, $\hat{L} = -\,i\,\frac{P}{m}\,\frac{\partial}{\partial Q} + i\,\frac{\partial V}{\partial Q}\,\frac{\partial}{\partial P}$ e $\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$ podem ser escritos como:

$$\begin{cases} \hat{L} = \frac{1}{2m}\,(\hat{p}_1^{\,2} - \hat{p}_2^{\,2}) + G\,(\frac{\hat{q}_1+\hat{q}_2}{2})(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)\,, \text{ com } G = \frac{\partial V}{\partial Q} \\ \hat{H} = \frac{(\hat{p}_1+\hat{p}_2)^2}{2m} + V(\frac{\hat{q}_1+\hat{q}_2}{2})\ ; \end{cases}$$

tendo em vista que,

$$\begin{cases} \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = - i \dfrac{\partial}{\partial Q} & ; \quad \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 2P \; ; \\ \hat{q}_1 - \hat{q}_2 = i \dfrac{\partial}{\partial P} & ; \quad \hat{q}_1 + \hat{q}_2 = 2Q \; . \end{cases}$$

Desta forma, a equação de evolução temporal de $\Psi(q_1,q_2,t)$ na representação coordenada, pode ser reescrita como:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q_1,q_2,t) = \left[- \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1} - \frac{\partial^2}{\partial q_2} \right) + G \left(\frac{q_1+q_2}{2} \right) (q_1-q_2) \right] \Psi(q_1,q_2,t) \tag{5.25}$$

Em particular, como elucidação, temos nos casos da partícula livre e do oscilador harmônico, que:

i) Partícula livre

$$\hat{H} = - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \quad ; \quad \hat{L} = - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right);$$

ii) Oscilador harmônico

$$\hat{H} = \frac{-1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \right) + \frac{m\omega^2}{4} (q_1+q_2)^2 \quad ; \quad \hat{L} = \frac{-1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + m\omega^2 (q_1^2 - q_2^2).$$

Vale a pena ressaltar que diferentemente do caso quântico, na representação coordenada da Teoria Clássica de uma forma geral, as observáveis não são fatoráveis (vide seção 4.1), o que decorre do caráter não tensorial desta representação. Contudo, em vista dos resultados obtidos nas seções 4.1 e 4.3 (em particular das relações 4.28), concluímos que as representações canônica e coordenada da Teoria Clássica, guardam entre si as mesmas relações que as suas correspondentes quantum–mecânicas. De fato, colocando $\hbar = 1$ no caso quântico, obtemos os equivalentes resultados clássicos. Desta forma, a função transformação entre as referidas representações, ao nível clássico (vide 4.24) é dada por:

$$<q_1,q_2|Q,P> = \frac{1}{2}\,\mathrm{Exp}\,[i(q_1-q_2)P]\;\delta(q_1+q_2-2Q).$$

Finalizando a seção, destacamos que a classe das realizações de Tomita–Takesaki de W^*–álgebras nos permitiu desenvolver formulações (generalizações) para as Teorias Quântica e Clássica, em termos de diferentes álgebras de operadores lineares atuando num mesmo espaço de Hilbert, como por exemplo, as representações coordenada e canônica.

No sexto capítulo, empregaremos este resultado para discutir a questão do limite clássico da Teoria Quântica não relativística.

5.5 – APLICAÇÕES

A reformulação da Teoria Clássica em termos de espaços de Hilbert H e sua generalização, são naturalmente invariantes por transformações unitárias, o que permite introduzir uma descrição de interação ao nível Clássico, em bases similares àquelas utilizadas para a Teoria Quântica [71].

Desta forma, supondo que o Liouvilliano associado ao sistema pode ser decomposto em $\hat{L} = \hat{L}_o + \hat{L}_1$, temos que, na representação de interação, os estados dinâmicos e as observáveis são explicitamente dependentes do tempo e satisfazem respectivamente as seguintes equações:

$$\begin{cases} i\,\dfrac{\partial}{\partial t}\,|\,\Psi_I(t)> = \hat{L}_I(t)\,|\,\psi_I(t)> \quad , \quad \text{com } \hat{L}_I(t) = \mathrm{Exp}\,[it\hat{L}_0]\;L_1\;\mathrm{Exp}\,[-it\hat{L}] \\ i\,\dfrac{\partial}{\partial t}\,\hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t)\;,\;\hat{L}_0]_- \;. \end{cases} \tag{5.26}$$

A invariância da teoria por transformações unitárias acarreta que os valores esparados das observáveis nesta descrição para a evolução temporal, passam a ser dados por:

$$<\Psi_I(t)|\hat{A}_I(t)|\Psi_I(t)>.$$

Usando–se o operador de ordenamento temporal de Dyson [71], temos mostrado [48] que a solução formal para a equação de evolução dos estados dinâmicos pode ser posta na forma:

$$|\Psi_I(t)> = \hat{T}\left\{\mathrm{Exp}\left[-i\int_{t_0}^{t}\hat{L}_I(t')dt'\right]\right\}|\Psi_I(t)>,$$

e, portanto, as "funções de onda" na representação canônica associadas a um sistema com três graus de liberdade em dois instantes de tempo, se vinculam segundo a relação:

$$\Psi_I(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = <\mathbf{q},\mathbf{p},|\hat{T}\left\{\mathrm{Exp}\left[-i\int_{t_0}^{t}\hat{L}_I(t')dt'\right]\right\}|\Psi_I(t_o)>,$$

onde usamos a notação, $\mathbf{q} = (q_1,q_2,q_3)$ e $\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$.

Considerando os limites assintóticos $t_0 \longrightarrow -\infty$ e $t_0 \longrightarrow +\infty$, mostramos [50] que à expansão perturbativa para a função de onda $\Psi_I(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ dada acima, associa–se uma representação diagramática e que um sistema inicialmente caracterizado pelo estado:

$$\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathrm{in}) = A\ \mathrm{Exp}\left[-\beta\frac{p^2}{4m}\right],$$

sendo $\beta = \frac{1}{kT}$ e $A = (\frac{\pi kT}{2})^{1/4}$, quando espalhado por um potencial $V(\mathbf{q})$ de alcance finito, é transformado no estado assintótico:

$$\Psi(q,p,out) = A \ Exp\left[-\beta/2\left(\frac{p^2}{2m} + \lambda \ V(q)\right)\right].$$

Desta forma, a função distribuição de Boltzmann, pode ser gerada como o limite assintótico da distribuição de Maxwell através de um processo de espalhamento [57].

Por outro lado, empregando ainda a estrutura de espaços de Hilbert associada à Teoria Clássica, introduzimos [51] funções de Green avançadas e retardadas a (n + 1) tempos, em termos de relações de comutação, da forma a seguir:

$$i) G^{r}_{n+1}(A(t),B(t_1),...B(t_n)) \equiv (-i)^n \theta(t-t_1)...\theta(t_{n-1}-t_n) < \Psi \, | [...[\hat{A}(t),\hat{B}(t_1)]_{-}...\hat{B}(t_n)]_{-} | \Psi > ;$$

$$ii) G^{a}_{n+1}(A(t),B(t_1),...B(t_n)) \equiv (-i)^n \theta(t_1-t)...\theta(t_n-t_{n-1}) < \Psi \, | [...[\hat{A}(t),\hat{B}(t_1)]_{-}...\hat{B}(t_n)]_{-} | \Psi > ;$$

sendo $\theta(t - t')$ a função de Heaviside: $\theta(t - t') = \begin{cases} 1 \ , \ se \ t > t' \\ 0 \ , \ se \ t < t' \end{cases}$ $\hat{A}(t)$ e $\hat{B}(t)$, operadores representativos de observáveis na descrição de Heisenberg Clássica e $|\Psi>$ um conveniente estado estacionário do sistema, ou seja:

$$\hat{L} \, | \Psi > = \lambda \, | \Psi > ;$$

com $\lambda \in R$, e $\hat{L}$ o Liouvilliano associado ao sistema.

Empregando a descrição de interação e as funções de Green retardadas a (n + 1) tempos, pudemos desenvolver [51] uma Teoria Geral da Resposta de sistemas clássicos a perturbações mecânicas. Em verdade, mostramos que a variação do valor esperado de uma dada observável $\hat{A}$, é dada por:

$$\Delta \ A(t) = \sum_n \Delta_n \ A(t)$$

sendo,

$$\Delta_n A(t)=(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \; \text{Exp}\left[-\epsilon(|t_1|+\ldots+|t_n|)\right] \; {}_{n+1}G^r(\hat{A}(t)\hat{L}_I^{Ext}(t_1)\ldots\hat{L}_I^{Ext}(t_n))$$

quando o sistema é submetido a um campo externo descrito por $\hat{L}^{Ext}$, ligado e desligado forma adiabática.

Por fim, cabe ressaltar que as funções de Green por nós introduzidas, possibilitaram mostrar [49] que a transformada de Fourier das funções correlações a d tempos, $<\Psi|\hat{A}(t)\,\hat{B}(t')|\Psi>$, é completamente determinada por:

$$<<\hat{A}|\hat{\Gamma}_B>>_\omega \;\equiv\; \begin{cases} <<\hat{A}|\hat{\Gamma}_B>>^r_\omega \quad , \quad \text{para } I_m(\omega) > 0 \\ <<\hat{A}|\hat{\Gamma}_B>>^a_\omega \quad , \quad \text{para } I_m(\omega) < 0 \end{cases} ;$$

sendo $<<\hat{A}|\hat{\Gamma}_B>>^{r,a}_\omega$ as transformadas de Fourier das funções de Green retardada avançadas a dois tempos. Esses resultados indicam a possível importância das no observáveis introduzidas pela generalização proposta à Teoria Clássica.

CAPÍTULO VI

O LIMITE CLÁSSICO NA FORMULAÇÃO ALGÉBRICA SOBRE ESPAÇOS DE FASE DA TEORIA QUÂNTICA

INTRODUÇÃO

Em primeiro lugar buscamos sistematizar resumidamente a controvérsia existente literatura acerca do limite clássico da Teoria Quântica não–relativística para um sistema c número finito de graus de liberdade, bem como explicitar nosso ponto de vista que a refer controvérsia tem origem no emprego de distintas realizações para as axiomáticas quântic clássica. Em seguida, mostramos que a realização de Tomita–Takesaki de W^*–álgeb estabelece a linguagem comum sobre a qual o citado limite pode ser evidenciado, de u forma sistemática, tanto nos seus aspectos formais quanto nos empíricos. De fa demonstramos explicitamente que no tocante às observáveis e aos grupos de simetria, o lin clássico é completo, tanto para as representações usuais como para a generalização desenvolvemos para estas teorias; no que tange aos estados, entretanto, esse processo redução inter–teórico torna–se completamente satisfatório apenas no âmbito generalizações propostas para as descrições clássica e quântica. Esses desenvolvimentos realizados nas três representações novas, quais sejam, canônica e tensoriais mistas ($\{\hat{q}_1, \hat{p}$ $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$) da Teoria Quântica. Por uma questão de simplificação da notação empregada, toc desenvolvimento será realizado considerando–se um sistema $\boldsymbol{\Sigma}$ de apenas um grau liberdade.

6.1 – A QUESTÃO DO LIMITE CLÁSSICO DA TEORIA QUÂNTICA

A correspondência entre as teorias quântica e clássica tem sido objeto de investig. de diversos autores desde os primórdios da teoria quântica não–relativística. Dentre e trabalhos, poderíamos destacar:

i) as regras de quantização semi–clássicas de Bohr–Sommerfeld–Einstein [98];

ii) as aproximações semi–clássicas W.K.B. e W.K.B. Maslov [99];

iii) as aproximações de ensemble no espaço de fase de Wigner [100], Kirkwodd [101] e Bopp [102], entre outros.

Em síntese, podemos perceber que a interconexão entre essas duas teorias tem sido estudada sob um duplo ponto de vista:

A) Como procedimento capaz de tratar quânticamente, mesmo de forma aproximada, sistemas que apresentam regimes irregulares ou caóticos e/ou sistemas cujos processos básicos possam ser convenientemente descritos na aproximação semi–clássica [103, 104, 105, 106, 107];

B) Como meio de estabelecer, com precisão, o processo de redução inter–teórico entre as duas teorias [108, 109, 110].

Neste sentido, acredita–se que a Mecânica Clássica pode ser derivada como caso limite da Teoria qQântica, valendo dizer, portanto, que uma Teoria Quântica satisfatória deverá possibilitar a dedução da Mecânica e do Eletromagnetismo Clássico, utilizando–se um limite apropriado. Os argumentos usualmente empregados na literatura para sustentar este ponto de vista podem ser classificados em dois grandes grupos:

A) Analogias formais [111], originadas na relação proposta por Dirac [77] entre o parêntesis de Poisson de duas variáveis dinâmicas $A = A(Q, P)$ e $B = B(Q, P)$ da Mecânica Clássica e o correspondente comutador Quantum–Mecânico, ou seja $\{A(Q, P), B(Q, P)\} \longleftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]_-$;

B) Processos de limites, seja o limite de números quânticos altos, seja o limite $\hbar \longrightarrow 0$.

Cabe observar que apesar da utilidade das analogias formais, elas, por si só, não são suficientes para demonstrar que a Mecânica Clássica é o limite da Teoria Quântica. Neste sentido um contra–exemplo trivial é que se pode estabelecer formalmente analogias entre circuitos elétricos e o movimento de osciladores harmônicos, sem que isto implique numa relação de redução entre eles.

Quanto aos processos de limites, apesar do relativo consenso em torno de sua validade desde a origem da Teoria Quântica, a falta de uma dedução de validade universal tem reinteradamente ocasionado o surgimento de novos estudos:

Em se tratando do limite via números quânticos altos, Liboft [112], Holland e Kypianids[35] demonstraram que, contrariamente à sugestão de Bohr–Einstein [98], nem sempre ele conduz aos resultados esperados pela Mecânica Clássica, não podendo portanto, ser considerado como o critério universal de redução interteórica.

No caso do limite $\hbar \longrightarrow 0$, existe na literatura um grande número de trabalhos baseados principalmente nas representações da Teoria Quântica sobre espaços de fase, que afirmam a sua universalidade [108, 109, 110]. Contudo, Rosen [36], argumentando que o princípio da superposição dos estados quantum–mecânicos deve ser mantido em qualquer processo limite, afirma por sua vez que a Mecânica Clássica não pode ser considerada caso limite da Teoria Quântica quando $\hbar \longrightarrow 0$, desde que, na primeira, tal princípio não se verifica. Este autor, seguindo a interpretação causal da Teoria Quântica apresentada por Bohm [34], tem inclusive formulado a Mecânica Clássica em termos de funções de onda $\psi(q, t)$ que evoluem segundo a equação de onda não linear:

$$i\hbar \, \frac{\partial}{\partial t} \psi\,(q,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial q^2}\,|\psi(q,t)|}{|\psi(q,t)|} + V(q)\right]\,\psi(q,t),$$

sugerindo que a relação entre as duas citadas formulações deva ser buscada em função da massa do sistema.

Também Bohm e colaboradores [34], tomando por base a sua interpretação causal da Teoria Quântica recentemente reinterpretada no contexto de ordem implícita [29], afirmam que não existe um corte tão nítido entre as descrições clássica e quântica para o movimento. Segundo sua visão, a Mecânica Clássica é adequada sempre que o potencial quântico

$$V_Q = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} |\psi(q,t)|^2}{|\psi(q,t)|^2},$$

com $\psi(q, t)$ a função de onda de Schrödinger associada ao sistema e m a massa da partícula, for pequeno se comparado com as contribuições à energia total, existentes ao nível clássico.

Esses resultados indicam a sutileza da relação entre as teorias clássica e quântica e deixam claro que ainda há que se buscar compreendê–la melhor. No nosso entender, a origem desta controvérsia reside no emprego de linguagens distintas nas descrições usuais das referidas teorias. Neste sentido, acreditamos que a formulação algébrica desenvolvida neste trabalho possa oferecer uma solução satisfatória para tal questão, desde quando permite que formulemos as referidas teorias sob uma mesma linguagem.

Na próxima seção mostraremos que, de fato, podemos obter a Mecânica Clássica (e sua generalização) da Teoria Quântica (e de sua generalização), baseados na hipótese contrafactual $\hbar \longrightarrow 0$.

6.2 – O LIMITE CLÁSSICO NA FORMULAÇÃO ALGÉBRICA DA TEORIA QUÂNTICA

A satisfatoriedade de um processo que possibilite a obtenção da Teoria Clássica (e sua generalização) como caso limite ($\hbar \longrightarrow 0$) da Teoria Quântica (e de sua generalização), passa necessariamente por pelo menos dois aspectos: o formal e o empírico.

A) Aspecto formal: a dedução deve ser capaz de demonstrar que as estruturas matemáticas relevantes na descrição da Teoria Clássica (e sua generalização) surgem naturalmente, quando o limite $\hbar \longrightarrow 0$ é tomado das correspondentes estruturas ao nível quântico (e da sua generalização);

B) Aspecto empírico (ou não formal): a dedução deve também exibir, de forma clara, como e aonde a Teoria Clássica (e sua generalização) tem ou não sucesso, e portanto, explicar porque a Teoria Clássica foi durante muito tempo considerada a teoria universal para o movimento.

6.2.1.- ASPECTOS FORMAIS

Proposição 6.2.1.1. Os produtos não locais entre as "funções de onda" dados em 4.25, 4.26 e 4.39, admitem as seguintes representações diferenciais:

$$(\psi_1 \blacksquare \psi_2)(p_1,q_2) \equiv \psi_1(p_1,q_2) \circledast_{as} \psi_2(p_1,q_2)$$
$$= \psi_1(p_1,q_2)\ \mathrm{Exp}\left[i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_1}\right] \psi_2(p_1,q_2); \tag{6.1}$$

$$(\psi_1 \blacksquare \psi_2)(q_1,p_2) \equiv \psi_1(q_1,p_2) \circledast_s \psi_2(q_1,p_2)$$
$$= \psi_1(q_1,p_2)\ \mathrm{Exp}\left[-i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_1}\right] \psi_2(q_1,p_2); \tag{6.2}$$

$$(\psi_1 \star \psi_2)(Q,P) \equiv \psi_1(Q,P) \otimes_W \psi_2(Q,P)$$
$$= \psi_1(Q,P)\, \mathrm{Exp}\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial P} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial P}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Q}\right)\right] \psi_2(Q,P); \qquad (6.3)$$

onde a seta sobre o símbolo da derivada define o sentido de sua atuação e os símbolos $\otimes_{as}$, $\otimes_s$, e $\otimes_W$ correspondem ao produto anti–simétrico e simétrico de Mehta [113] e ao produto de Groenewold [114], respectivamente.

Demonstração: Tomando–se a representação integral dada em (4.25), e fazendo–se a seguinte mudança de variáveis, $p' = p_1 - x$ e $q' = q_2 - y$, o referido produto fica sendo dado por:

$$\psi_1(p_1,q_2)\otimes_{as}\psi_2(p_1,q_2) = \int dxdy\, \mathrm{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}xy]\; \psi_1(p_1,q_2-y)\psi_2(p_1-x,q_2). \qquad (6.4)$$

Considerando–se as expressões das funções $\psi_1(p_1,q_2-y)$ e $\psi_2(p_1-x,q_2)$ em torno do pont (p_1,q_2), i. é.:

$$\psi_1(p_1,q_2-y) = \sum_m \frac{1}{m!}\, y^m\, \frac{\partial^m \psi_1(p_1,q_2)}{\partial q_2^m}; \qquad (6.5)$$

$$\psi_2(p_1-x,q_2) = \sum_n \frac{1}{n!}\, x^n\, \frac{\partial^n \psi_2(p_1,q_2)}{\partial p_1^n}, \qquad (6.6)$$

a expressão (6.4) torna–se então:

$$\psi_1(p_1,q_2)\otimes_{as}\psi_2(p_1,q_2) = \sum_n \sum_m \frac{1}{n!\; m!}\frac{\partial^m\psi_1}{\partial q_2^m}\frac{\partial^n\psi_2}{\partial p_1^n}\int dxdy\, \mathrm{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}xy]\; x^n y^m \qquad (6.7)$$

Agora, tendo em vista que a derivada n–ésima da "função delta" de Dirac pode ser dada por,

$$\int dx\, x^n\, \mathrm{Exp}\,[\tfrac{i}{\hbar}\, xy] = (i\hbar)^n \frac{d^n}{dy^n}\, \delta(y);$$

e que: $\displaystyle \frac{d^n}{dy^n}\, y^m \bigg|_{y=0} = n!\, \delta_{nm}$, tem–se que:

$$\psi_1(p_1,q_2) \circledast_{as} \psi_2(p_1,q_2) = \sum_n \frac{(i\hbar)^n}{n!} \frac{\partial^n \psi_1(q_1,p_2)}{\partial q_2^n} \frac{\partial \psi_2^n(p_1,q_2)}{\partial p_1^n}. \tag{6.8}$$

Levando–se ainda em conta que a expansão em potências da função Exp (ax) é dada por

$$\mathrm{Exp}\,(ax) = 1 + ax + \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^3}{3!} x^3 + \ldots, \tag{6.9}$$

pode–se representar simbolicamente (6.8) como:

$$\psi_1(p_1,q_2) \circledast_{as} \psi_2(p_1,q_2) = \psi_1(p_1,q_2)\, \mathrm{Exp}\left[i\hbar\, \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_2} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_1} \right] \psi_2(p_1,q_2),$$

o que então demonstra (6.1).

O processo de obtenção das relações (6.2) e (6.3) segue procedimentos extremamente similares aos realizados para a relação (6.1); por isso os omitiremos. C.Q.D.

Gostaríamos de frisar que os produtos não locais (6.1) e (6.2) foram expressos nessa forma diferencial, pela primeira vez, por Mehta [113] e o (6.3) por Groenewold [114], quando de seus estudos sobre as representações da Teoria Quântica sobre espaços de fase. Por isso é que nos referimos aos produtos não locais (6.1), (6.2) e (6.3), como os produtos anti–simétricos (as) e simétricos (s) de Mehta e produto de Groenewold (w), respectivamente.

Proposição 6.2.1.2. O produto não–local $\psi_1(p_1,q_2) \otimes_{as} \psi_2(p_1,q_2)$ pode ser escrito, em termos dos operadores básicos da representação $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$ (vide 4.2), da forma seguir:

$$\text{i)}\ \psi_1(p_1,q_2) \otimes_{as} \psi_2(p_1,q_2) = \psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_1)\ \psi_2(p_1,q_2); \tag{6.10}$$

$$\text{ii)}\ \psi_1(p_1,q_2) \otimes_{as} \psi_2(p_1,q_2) = \psi_2(\hat{q}_2,\hat{p}_2)\ \psi_1(p_1,q_2); \tag{6.11}$$

Demonstração: A expansão em série de potências de $f(x+a)$, i. é.;

$$f(x+a) = f(x) + a\,\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \ldots = \left(1 + a\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right) f(x),$$

juntamente com (6.9), permite escrever simbolicamente que

$$f(x+a) = \mathrm{Exp}\left[a\,\frac{\vec{\partial}}{\partial x}\right] f(x);$$

portanto, em vista de (6.1), temos que,

$$\psi_1(p_1,q_2) \otimes_{as} \psi_2(p_1,q_2) = \psi_1\!\left(p_1, q_2 + i\hbar\,\frac{\vec{\partial}}{\partial p_1}\right) \psi_2(p_1,q_2). \tag{6.12}$$

Considerando que os operadores $\hat{q}_1$ e $\hat{p}_1$ na representação $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$ realizam–se como $\hat{q}_1 = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p_1} + q_2$ e $\hat{p}_1 = p_1$ (vide 4.2), temos que (6.12), de fato, corresponde a (6,10).

Observe que o produto anti–simétrico de Mehta, ainda em vista de (6.1), pode também ser reescrito como:

$$\psi_1(p_1,q_2) \otimes_{as} \psi_2(p_1,q_2) = \psi_1(p_1,q_2)\, \psi_2(p_1 + i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_2}, q_2)$$

$$= \psi_2(p_1 + i\hbar \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_2}, q_2)\, \psi_1(p_1,q_2) \qquad (6.13)$$

se agora, considerarmos que os operadores básicos associados aos "graus de liberdade fantasmas", $\hat{q}_2$, $\hat{p}_2$, na representação $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$, são dados por $\hat{q}_2 = q_2$ e $\hat{p}_2 = p_1 + i\hbar \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_2}$ (vide 4.2), temos então a expressão (6.11). C.Q.D.

Esta Proposição (6.2.1.2) significa, portanto, que o produto entre duas "funções de onda" da representação $\{\hat{p}_1, \hat{q}_2\}$ pode sempre ser visto como a aplicação de algum operador linear desta representação atuando sobre uma das "funções de onda". Naturalmente o resultado recíproco também é válido, ou seja, a atuação de qualquer operador linear sobre "funções de onda", nesta representação, pode sempre ser dada via o produto não–local $\otimes_{as}$. Assim, por exemplo, temos que:

$$\hat{q}_1\psi(p_1,q_2) = q_2 \otimes_{as} \psi(p_1,q_2) \quad ; \quad \hat{p}_1\psi(p_1,q_2) = p_1 \otimes_{as} \psi(p_1,q_2); \qquad (6.14)$$

$$\hat{q}_2\psi(p_1,q_2) = \psi(p_1,q_2) \otimes_{as} q_2 \quad ; \quad \hat{p}_2\psi(p_1,q_2) = \psi(p_1,q_2) \otimes_{as} p_1, \qquad (6.15)$$

qualquer que seja $\psi(p_1,q_2) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Proposição 6.2.1.3. O produto não–local $\psi_1(q_1,p_2) \otimes_s \psi_2(q_1,p_2)$, pode ser posto, em termos dos operadores básicos da representação $\{\hat{q}_1, \hat{p}_2\}$ (vide 4.2), da forma a seguir:

$$\text{i)}\ \psi_1(q_1,p_2) \otimes_s \psi_2(q_1,p_2) = \psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_1)\, \psi_2(q_1,p_2); \qquad (6.16)$$

$$\text{ii)}\ \psi_1(q_1,p_2) \otimes_s \psi_2(q_1,p_2) = \psi_2(\hat{q}_2,\hat{p}_2)\ \psi_1(q_1,p_2); \tag{6.17}$$

Demonstração: Segue exatamente os mesmos passos da efetuada na Proposição 6.2.1.2., carecendo, portanto, da necessidade de uma nova apresentação. C.Q.D.

Evidentemente, o comentário que se segue à Proposição 6.2.1.2. é igualmente válido para este caso desde que, onde lemos "representação $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$" e "produto $\otimes_{as}$", passemos a ler "representação $\{\hat{q}_1,\hat{p}_2\}$" e "produto $\otimes_s$". Sendo assim, temos também que,

$$\hat{q}_1\ \psi(q_1,p_2) = q_1 \otimes_s \psi(q_1,p_2)\ ;\quad \hat{p}_1\ \psi(q_1,p_2) = p_2 \otimes_s \psi(q_1,p_2); \tag{6.18}$$

$$\hat{q}_2\ \psi(q_1,p_2) = \psi(q_1,p_2) \otimes_s q_1\ ;\ \hat{p}_2\ \psi(q_1,p_2) = \psi(q_1,p_2) \otimes_s p_2. \tag{6.19}$$

qualquer que seja $\psi(q_1,p_2) \in \mathscr{L}^2(\mathrm{R} \times \mathrm{R})$.

Proposição 6.2.1.4. O produto não–local $\psi_1(Q,P) \otimes_W \psi_2(Q,P)$, em termos dos operadores básicos da representação canônica, pode ser escrito como:

$$\text{i)}\ \psi_1(Q,P) \otimes_W \psi_2(Q,P) = \psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_1)\ \psi_2(Q,P); \tag{6.20}$$

$$\text{ii)}\ \psi_1(Q,P) \otimes_W \psi_2(Q,P) = \psi_2(\hat{q}_2,\hat{p}_2)\ \psi_1(Q,P); \tag{6.21}$$

Demonstração: Segue também os mesmos procedimentos realizados para a Proposição 6.2.1.2., não sendo necessário reproduzi–los. C.Q.D.

Da mesma forma que no caso anterior (Proposição 6.2.1.3.), para adotarmos aqui o comentário feito para a Proposição 6.2.1.2., basta que substituamos "representação $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$"

e "produto $\otimes_{as}$", por "representação $\{\hat{Q},\hat{P}\}$" e "produto $\otimes_W$", tendo–se consequentemente:

$$\hat{q}_1 \psi(Q,P) = Q \otimes_W \psi(Q,P); \qquad \hat{p}_1 \psi(Q,P) = P \otimes_W \psi(Q,P); \tag{6.22}$$

$$\hat{q}_2 \psi(Q,P) = \psi(Q,P) \otimes_W Q; \qquad \hat{p}_2 \psi(Q,P) = \psi(Q,P) \otimes_W P; \tag{6.23}$$

Vale frisar, que no caso do produto de Groenewold, resultados similares foram também derivados por Bopp [102] dentro de um desenvolvimento diferente do que aqui apresentamos.

Proposição 6.2.1.5. O produto de Groenewold e os produtos anti–simétrico e simétrico de Mehta, possuem as seguintes propriedades:

i) Associatividade;

ii) Distributividade com respeito à adição;

iii) Existência do elemento neutro.

Demonstração:

A) Produto de Groenewold

Sejam $\psi_1(Q,P)$ e $\psi_0(Q,P) = \alpha \in C$, duas funções a valores complexos sobre o espaço de fase $(Q,P) \in R{\times}R$; segue então, pela proposição 6.2.1.1., que:

$$\psi_1(Q,P) \otimes_W \psi_0(Q,P) = \alpha\, \psi_1(Q,P) = \psi_0(Q,P) \otimes_W \psi_1(Q,P);$$

portanto, a função constante $\psi_I(Q,P) = 1$, é o elemento neutro do produto de Groenewold. Este resultado, em vista da Proposição 2.6.1.4., nos permite escrever a "função de onda" na representação canônica da realização de Tomita–Takesaki para W^*–algébra associada ao sistema quantum–mecânico $\boldsymbol{\Sigma}$, como:

$$\psi(Q,P) = \psi\left[Q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial P}, P - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial Q}\right] \psi_I \,(Q,P). \tag{6.24}$$

Tomando agora, $\psi_1(Q,P)$, $\psi_2(Q,P)$ e $\psi_3(Q,P)$, pertencentes ao $\mathscr{L}^2(R\times R)$, de acordo com a proposição 6.2.1.4., temos então que:

$$\psi_1(Q,P)\otimes_W\left[\psi_2(Q,P)+\psi_3(Q,P)\right]=\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\left[\psi_2(Q,P)+\psi_3(Q,P)\right] \tag{6.25}$$

Considerando que $\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)$ é um operador linear atuando sobre $\mathscr{L}^2(R\times R)$, temos que:

$$\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\left[\psi_2(Q,P)+\psi_3(Q,P)\right]=\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_2(Q,P)+\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_3(Q,P)$$

e portanto, (6.25) torna–se,

$$\psi_1(Q,P)\otimes_W\left[\psi_2(Q,P)+\psi_3(Q,P)\right]=\psi_1(Q,P)\otimes_W\psi_2(Q,P)+\psi_1(Q,P)\otimes_W\psi_3(Q,P)$$

Ainda, com base na Proposição 6.2.1.4., temos,

$$\psi_1(Q,P)\otimes_W\left[\psi_2(Q,P)\otimes_W\,\psi_3(Q,P)\right]=\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\left[\psi_2(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_3(Q,P)\right] \tag{6.26}$$

o que pode ser reescrito, tendo em vista (6.24), como:

$$\psi_1(Q,P)\otimes_W\left[\psi_2(Q,P)\otimes_W\psi_3(Q,P)\right]=\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\left[\psi_2(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_3(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_I\,(Q,P)\right] \tag{6.27}$$

Considerando que o produto de operadores lineares definidos sobre $\mathscr{L}^2(R\times R)$ é associativo e que $1 = \psi_I(Q,P)$ é tal que: $\mathbf{1}\,\hat{A} = \hat{A}\,\mathbf{1}$, para todo $\hat{A} \in \mathscr{L}[\mathscr{L}^2(R\times R)]$, temos que:

$$\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\Big[\psi_2(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_3(\hat{q}_1,\hat{p}_2)1\Big] = \Big[\psi_1(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\psi_2(\hat{q}_1,\hat{p}_2)1\Big]\psi_3(\hat{q}_1,\hat{p}_2)\,1 \qquad (6.28)$$

e portanto, (6.26), torna-se:

$$\psi_1(Q,P)\circledast_W\Big[\psi_2(Q,P)\circledast_W\psi_3(Q,P)\Big] = \Big[\psi_1(Q,P)\circledast_W\psi_2(Q,P)\Big]\circledast_W\psi(Q,P)$$
(6.29)

B) Produtos anti-simétrico e simétrico de Mehta.

A demonstração dessas propriedades para o caso dos produtos anti-simétrico e simétrico de Mehta, segue os mesmos passos utilizados para o produto de Groenewold. Assim sendo, temos que:

$$\psi(p_1,q_2) = \psi(p_1,q_2)\circledast_{as} 1 = \psi(p_1,q_2 + i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1})\,1; \qquad (6.30)$$

$$\psi(q_1,p_2) = \psi(q_1,p_2)\circledast_s 1 = \psi(q_1,p_2 - i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1})\,1; \qquad (6.31)$$

sendo $1 = \psi_I(Q,P)$ a função constante igual a unidade sobre $\Omega = R \times R$. C.Q.D.

Proposição 6.2.1.6. O produto de Groenewold e os produtos anti-simétrico e simétrico de Mehta entre funções do $\mathscr{L}^2(R\times R)$ não dependentes de $\hbar$, tendem ao produto usual (comutativo e local), quando $\hbar \longrightarrow 0$.

Demonstração: Sejam ψ_1 e ψ_2 duas funções de $\mathscr{L}^2(R\times R)$ não dependentes de $\hbar$; segue da proposição 6.2.1.1., que:

$$\text{i)}\,\psi_1(Q,P)\circledast_w\psi_2(Q,P)=\psi_1(Q,P)\psi_2(Q,P)+\sum_n\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n\left[\frac{\partial^n}{\partial Q^n}\psi_1\frac{\partial^n}{\partial P^n}\psi_2-\frac{\partial^n}{\partial P^n}\psi_1\frac{\partial^n}{\partial Q^n}\psi_2\right];$$

$$\text{ii)}\;\psi_1(p_1,q_2)\circledast_{as}\psi_2(p_1,q_2)=\psi_1(p_1,q_2)\psi_2(p_1,q_2)+\sum_n\left(\frac{i\hbar}{n!}\right)^n\left[\frac{\partial^n}{\partial q_2^n}\psi_1\frac{\partial^n}{\partial p_1^n}\psi_2\right];$$

$$\text{iii)}\;\psi_1(q_1,p_2)\circledast_s\psi_2(q_1,p_2)=\psi_1(q_1,p_2)\psi_2(q_1,p_2)+\sum_n\left(\frac{-i\hbar}{n!}\right)^n\left[\frac{\partial^n}{\partial p_2^n}\psi_1\frac{\partial^n}{\partial q_1^n}\psi_2\right].$$

Logo, tomando o limite $\hbar \longrightarrow 0$ das expressões acima, temos que,

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\psi_1(Q,P)\circledast_w\psi_2(Q,P)\right]=\psi_1(Q,P)\psi_2(Q,P); \tag{6.32}$$

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\psi_1(p_1,q_2)\circledast_{as}\psi_2(p_1,q_2)\right]=\psi_1(p_1,q_2)\psi_2(p_1,q_2); \tag{6.33}$$

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\psi_1(q_1,p_2)\circledast_s\psi_2(q_1,p_2)\right]=\psi_1(q_1,p_2)\psi_2(q_1,p_2).\ \text{C.Q.D.} \tag{6.34}$$

Proposição 6.2.1.7. Quaisquer que sejam as observáveis usuais: $\hat{A} = A\ (\hat{q}_1,\hat{p}_1)$ e generalizadas: $\hat{B} = (B(\hat{q}_1,\hat{p}_1) - B\ (\hat{q}_2,\hat{p}_2))$, associadas ao sistema quantum–mecânico $\mathbf{\Sigma}$.

i) $\lim_{\hbar\to 0}\ \hat{A}\ (\hat{q}_1,\hat{p}_1) = A\ (q, p);$

ii) $\lim_{\hbar\to 0}\ \frac{\hat{B}}{\hbar} = \hat{\Gamma}_B\ (q, p, i\frac{\partial}{\partial q}, i\frac{\partial}{\partial p});$

ou seja: neste limite, as observáveis (usuais e generalizadas) quantum–mecânicos, tendem às suas correspondentes observáveis clássicas.

Demonstração:

i) Usando a representação canônica da realização de Tomita–Takesaki associada ao sistema quantum–mecânico Σ, temos que

$$A(\hat{q}_1,\hat{p}_1)\,\psi(Q,P) = A(Q,P)\circledast_W \psi(Q,P), \tag{6.35}$$

em vista da Proposição 6.2.1.4.. Considerando agora a Proposição 6.2.1.6. e supondo que a função $\psi(Q,P)$ não depende de $\hbar$, temos então que,

$$\lim_{\hbar\to 0} A(Q,P)\circledast_W \psi(Q,P) = A(Q,P)\,\psi(Q,P);$$

logo, o limite $\hbar \longrightarrow 0$ de (6.35) conduz a,

$$\lim_{\hbar\to 0} A(\hat{q}_1,\hat{p}_1)\,\psi(Q,P) = A(Q,P)\,\psi(Q,P). \tag{6.36}$$

Como, por hipótese, $\psi(Q,P)$ não depende de $\hbar$, podemos afirmar que,

$$\lim_{\hbar\to 0} A(\hat{q}_1,\hat{p}_1) = A(Q,P). \tag{6.37}$$

ii) Levando em conta as mesmas considerações do item anterior, temos que:

$$B(\hat{q}_1,\hat{p}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_2)\psi(Q,P) = B(Q,P)\circledast_W\psi(Q,P) - \psi(Q,P)\circledast_W B(Q,P); \tag{6.38}$$

e considerando ainda a Proposição6.2.1.6., segue que,

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{\hbar} \left[B(Q,P) \circledast_w \psi(Q,P) - \psi(Q,P) \circledast_w B(Q,P) \right] = i \left(\frac{\partial B}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial B}{\partial P} \frac{\partial}{\partial Q} \right) \psi(Q,P).$$

Portanto, em vista da sub—seção 5.4.1., temos que,

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{\hbar} B(\hat{q}_1,\hat{p}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_2)\, \psi(Q,P) = \hat{\Gamma}_B\, \psi(Q,P),$$

o que então nos permite escrever que,

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{\hbar} B(\hat{q}_1,\hat{p}_1,\hat{q}_2,\hat{p}_2) = \hat{\Gamma}_B \left(Q,P,\, i\frac{\partial}{\partial Q},\, i\frac{\partial}{\partial P}\right). \text{ C.Q.D.} \tag{6.39}$$

Naturalmente, caso tivessemos empregado as representações tensoriais mistas $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$ e $\{\hat{q}_1,\hat{p}_2\}$ a derivação desses resultados ocorreria de forma similar. C.Q.D.

Como os grupos a um parâmetro de *—automorfismos nesta realização são dados por (vide seção 3.2):

$$\hat{U}(\alpha) = \mathrm{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}\, \alpha\, \left(B(\hat{q}_1,\hat{p}_1) - B(\hat{q}_2,\hat{p}_2)\right)\right]; \tag{6.40}$$

a proposição anterior implica em que,

$$\lim_{\hbar\to 0} \hat{U}(\alpha) = \mathrm{Exp}\left[i\alpha\hat{\Gamma}_B\right] \tag{6.41}$$

Portanto, o limite clássico das transformações de simetria quantum—mecânicos nesta realização equivale às correspondentes transformações na realização associada ao sistema clássico. Em particular, a evolução temporal da Teoria Clássica pode então ser derivada como o limite clássico ($\hbar \longrightarrow 0$) da correspondente evolução quantum—mecânica.

Como exemplo desses resultados, observe que as expressões associadas ao Hamiltoniano e ao Liouvilliano quantum–mecânicos para a partícula livre e o oscilador harmônico obtidas na seção 4.5, seja na representação canônica, seja nas representações $\{\hat{q}_1,\hat{p}_2\}$ e $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$, tendem aos correspondentes Hamiltoniano e Liouvilliano clássicos, dados em (5.16).

Em resumo, podemos dizer, no que tange às observáveis (usuais ou generalizadas) e aos grupos de simetria, e portanto, à própria estrutura algébrica, que: Usando a realização de Tomita–Takesaki para W^*–álgebras como base para as formulações clássicas e quânticas, o limite clássico ($\hbar \to 0$) da realização associada ao sistema quantum–mecânico Σ, conduz à correspondente realização associada ao sistema clássico.

Cabe agora, a fim de podermos completar as condições formais da redução interteórica que envolve as descrições quântica e clássica para o movimento, estabelecer as relações entre os possíveis estados quânticos e clássicos associados a um dado sistema Σ.

Vale a pena frisar que esta questão tem se constituído em uma questão autônoma dentro do referido processo de redução interteórico. Assim, Groot e Suttorp [115] colocam que, embora o limite clássico das observáveis quantum–mecânicas conduzam sempre ás observáveis clássicas, o mesmo não ocorre com os estados quânticos, já que existem estados acessíveis na Teoria Quântica que não possuem contrapartida ao nível clássico. Observações dessa natureza têm provocado, por exemplo, a busca do limite clássico ($\hbar \longrightarrow 0$) das auto–funções da Hamiltoniana associadas ao oscilador harmônico [116], átomo de hidrogênio [117], e partícula livre [118].

No nosso entender, esta questão tem que ser observada partindo–se de um duplo ponto de vista:

I) Dada uma situação física que admita uma descrição ao nível clássico, deve–se buscar a sua correspondente descrição ao nível quântico. Se a Teoria Clássica fôr o limite $\hbar \longrightarrow 0$ da Teoria Quântica, ter–se–á então que o limite $\hbar \to 0$ da descrição quantum–mecânica deverá conduzir à correspondente descrição clássica;

II) Considerando, por outro lado, uma situação tipicamente quantum–mecânica, pergunta–se: qual o seu limite clássico e como incorporá–lo à descrição clássica para o movimento ?

A proposição apresentada a seguir vem demonstrar que podemos escolher qualquer uma das três representações, $\{\hat{Q},\hat{P}\}$, $\{\hat{q}_1,\hat{p}_2\}$ e $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$ da formulação algébrica associada ao sistema Quântum–Mecânico $\mathbf{\Sigma}$ para estudarmos os dois aspectos que envolvem tal questão.

Observe que, de agora em diante, com o objetivo de simplificar a notação, usaremos os sub–índices "1" e "2" nas variáveis q e p, apenas quando for estritamente necessário.

Proposição 6.2.1.8. Sejam $\psi^{(\omega)}(q,p) \equiv \langle q,p;(\omega)|\psi\rangle$; $\psi^{(+)}(p,q) \equiv \langle p,q;(+)|\psi\rangle$ e $\psi^{(-)}(q,p) \equiv \langle q,p;(-)|\psi\rangle$, as "funções de onda" representativas do estado dinâmico $|\psi\rangle$ do sistema Quantum–Mecânico $\mathbf{\Sigma}$ nas representações canônica e tensoriais mistas $\{\hat{p}_1,\hat{q}_2\}$ e $\{\hat{q}_1,\hat{p}_2\}$ respectivamente. Segue então que:

$$\text{i) } \psi^{(-)}(q,p) = \operatorname{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{\partial}}{\partial p}\frac{\vec{\partial}}{\partial q}\right]\psi^{(+)}(p,q); \tag{6.42}$$

$$\text{ii) } \psi^{(\omega)}(q,p) = \operatorname{Exp}\left[-\frac{i\hbar}{2}\frac{\vec{\partial}}{\partial p}\frac{\vec{\partial}}{\partial q}\right]\psi^{(+)}(p,q); \tag{6.43}$$

Demonstração: De acordo com (6.15), "funções de onda" em diferentes representações relacionam–se via convenientes funções de transformação, ou seja:

$$\psi^{(-)}(q,p) = \int dq'dp' \ \langle q,p;(-)|p',q';(+)\rangle\, \psi^{(+)}(p'q'); \tag{6.44}$$

$$\psi^{(\omega)}(q,p) = \int dq'dp' \ \langle q,p;(\omega)|p',q';(+)\rangle\, \psi^{(+)}(p'q'); \tag{6.45}$$

Considerando os "kets" básicos $|q,p;(-)\rangle$, $|q,p;(+)\rangle$, $|q,p;(\omega)\rangle$, como dados nas equações (4.20) e (4.21), e na Proposição 4.3.3., respectivamente, obtemos as seguintes funções de transformação:

$$\langle q,p;(-)|p',q';(+)\rangle = \mathrm{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}[(p-p')(q-q')]\right];$$

$$\langle q,p;(\omega)|p',q';(+)\rangle = 2\ \mathrm{Exp}\left[-\frac{2i}{\hbar}[(p-p')(q-q')]\right],$$

o que vem permitir expressar (6.44) e (6.45). Como,

$$\psi^{(-)}(q,p) = \int dq'dp'\ \mathrm{Exp}\left[-\frac{i}{\hbar}[(p-p')(q-q')]\right]\ \psi^{(+)}(p'q'); \qquad (6.46)$$

$$\psi^{(\omega)}(q,p) = 2\int dq'dp'\mathrm{Exp}\left[-\frac{2i}{\hbar}[(p-p')(q-q')]\right]\ \psi^{(+)}(p'q'). \qquad (6.47);$$

As expressões integrais (6.46) e (6.47) dadas acima, são similares àquelas encontradas na Proposição 6.2.1.1.; portanto, realizando procedimentos equivalentes, encontraremos a sua forma diferencial como em (6.42) e (6.43). C.Q.D.

Vamos supor agora que a situação física do sistema Σ seja tal que comporte sua descrição pela Teoria Clássica. Logo, do ponto de vista clássico, a referida situação corresponde a um par de valores precisos, por exemplo (q_o,p_o), para a posição e momentum da partícula que constitui o sistema. Desta forma, o estado dinâmico na representação canônica da formulação algébrica, fica sendo

$$\psi_{q_o,p_o}(q,p) = \delta(q-q_o)\ \delta(p-p_o). \qquad (6.48)$$

No caso Quântum–Mecânico, esta mesma situação física corresponde a um pacote de onda, centrado no ponto (q_0,p_0), com a menor dispersão possivel (de acordo com as relações de Incerteza de Heisenberg [2]), o que equivale, na representação coordenada da formulação algébrica a:

$$\psi_{q_0,p_0}(q_1,q_2)= \frac{1}{\sqrt{\hbar}\ b}\left[\frac{2}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}\, p_0(q_1-q_2) - [(q_1-q_0)/b\sqrt{2}]^2 - [(q_2-q_0)/b\sqrt{2}]^2\right] \tag{6.49}$$

sendo b a constante de normalização

Este resultado segue diretamente do fato de que, em se tratando de estados puros, a matriz densidade é um operador de projeção, i. é., $\hat{f}^2 = \hat{f}$ porta/to, os estados puros, são dados por $|\hat{f}^{1/2}\rangle = |f\rangle \in \mathscr{P} \subset H$. Logo temos que

$$\begin{aligned}\psi_{q_0,p_0}(q_1,q_2) &= \langle q_1,\ q_2 | f_{q_0,p_0}\rangle \\ &= \langle q_1 | f_{q_0,p_0} | q_2\rangle \quad \text{(vide 4.1).}\end{aligned}$$

Usando agora a função de transformação $\langle q_1,q_2|q\ p;(\omega)\rangle$, como dada em (4.32), a expressão (6.49) passa a ser,

$$\psi^{(\omega)}_{q_0,p_0}(q,p) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\hbar}\,\mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[\frac{2(q-q_0)^2}{b^2} + \frac{b^2(p-p_0)^2}{2}\right]\right\} \tag{6.50}$$

e a sua expansão em termos de $\hbar$ fica sendo dada por

$$\psi^{(\omega)}_{(q,p)} = \sum_n \left[\frac{1}{4^n n!}\left(a\frac{\partial}{\partial p} + a^{-1}\frac{\partial}{\partial q}\right)^n \delta(q-q_0)\,\delta(p-p_0)\right]\hbar^n, \tag{6.51}$$

com $a = \frac{2}{b^2}$. Logo, temos que:

$$\lim_{\hbar \to 0} \psi^{(\omega)}(q,p) = \delta(q-q_0)\,\delta(p-p_0). \tag{6.52}$$

De acordo com a subseção 5.4.1., qualquer estado clássico pode sempre ser visto como uma combinação convexa de (6.48), isto é,

$$\psi(q,p) = \int f^{1/2}\,(q_0,p_0)\,\delta(q-q_0)\,\delta(p-p_0)\,dq_0\,dp_0. \tag{6.53}$$

Neste sentido, a combinação,

$$\psi^{(\omega)}(q,p) = \int f^{1/2}\,(q_0,p_0)\,\psi^{(\omega)}_{q_0 p_0}\,(q,p)dq_0dp_0 \tag{6.54}$$

com $\psi^{(\omega)}_{q_0,p_0}(q,p)$ dado por (6.50), possui como limite clássico ($\hbar \to 0$), o estado clássico arbitrário (6.53).

Podemos, portanto, afirmar (em relação ao primeiro aspecto) que, de fato, a Mecânica Clássica é o limite clássico da Mecânica Quântica quando $\hbar \longrightarrow 0$.

Para análise do segundo aspecto necessitaremos de outros resultados que mostramos em seguida.

Proposição 6.2.1.9. Sejam, $\hat{A} = A(q,\ p)$ e $\hat{B} = B(q,\ p)$, duas observáveis usuais quaisquer na representação canônica da descrição Clássica de $\mathbf{\Sigma}$ e $\hat{\Gamma}_A \equiv i\{A(q,p),\ \ \}$ e $\hat{\Gamma}_B \equiv i\{B(q,p),\ \ \}$ as suas correspondentes generalizadas. Tem-se então, as seguintes relações de comutação:

$$\text{i) } [\hat{\Gamma}_A, \hat{B}]_- = i\{A(q, p), B(q, p)\}; \tag{6.55}$$

$$\text{ii) } [\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}_B]_- = i\,\hat{\Gamma}_{\{A(q,p),\, B(q,p)\}}, \tag{6.56}$$

sendo $\{A(q, p), B(q, p)\}$ o parêntesis de Poisson entre as variáveis dinâmicas $A(q, p)$, $B(q, p)$.

Demonstração: Tomando $\psi(q, p)$ como um elemento qualquer da $\mathscr{L}^2$ $(R \times R)$, temos de forma imediata que,

$$\text{i) } [\hat{\Gamma}_A, \hat{B}]_- \psi(q,p) = i^2\Big[\{A(q,p), B(q,p)\psi(q,p)\} - B(q,p)\,\{A(q, p), \psi(q,p)\}\Big]$$

$$= i\{A(q, p), B(q, p)\}\,\psi(q,p),$$

onde usamos a propriedade de derivação do parêntesis de Poisson, qual seja, $\{A(q,p), B(q,p)C(q,p)\} = \{A(q,p), B(q,p)\}\, C(q,p) + B(q,p)\,\{A(q,p), C(q,p)\}$.

$$\text{ii) } [\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}_B]_- \psi(q,p) = i^2\Big[\Big\{A(q,p)\{B(q,p), \psi(q,p)\}\Big\} - \Big\{B(q,p)\{A(q, p), \psi(q,p)\}\Big\}\Big] \tag{6.57}$$

Considerando agora, que o parêntesis de Poisson satisfaz a identidade de Jacobi, $\{A(q,p), \{B(q,p), C(q,p)\}\} + \{B(q,p), \{C(q,p), A(q,p)\}\} + \{C(q,p), \{A(q,p), B(q,p)\}\} = 0$ tem–se que (6.57) pode ser pôsto na forma:

$$[\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}_B]\,\psi(q,p) = i^2\Big\{\{A(q,p), B(q,p)\},\ \psi(q,p)\Big\}$$

$$= i\,\hat{\Gamma}_{\{A(q,p),\, B(q,p)\}}\,\psi(q,p), \quad \text{C.Q.D.}$$

Proposição 6.2.1.10. Seja $\hat{A}$ uma observável usual da descrição Clássica de Σ. Se $\hat{A}$ fôr uma constante de movimento, então:

i) As observáveis $\hat{A}$ e $\hat{\Gamma}_A$ são compatíveis;

ii) A observável $\hat{\Gamma}_A$ é também uma constante de movimento.

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 6.2.1.9., na representação canônica, que:

i) $[\hat{\Gamma}_A, \hat{A}] = i\{A(q,p), A(q,p)\} = 0,$

pois o parêntesis de Poisson é anti–simétrico.

ii) Sendo o Liouvilliano $\hat{L} \equiv i\{H(q,p), \quad \}$ a observável generalizada associada à Hamiltoniana, temos então que,

$$[\hat{\Gamma}_A, \hat{L}]_- = [\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}_H]_- = i\,\hat{\Gamma}_{\{A(q,p),\, H(q,p)\}}.$$

Como, por hipótese, $\hat{A} = A(q,p)$ é uma constante de movimento, ou seja, $\{A(q,p), H(q,p)\} = 0$, segue que $\hat{\Gamma}_{\{A(q,p),\, B(q,p)\}} = 0$, e portanto, $\hat{\Gamma}_A$ é também constante do movimento C.Q.D.

Dado que o sistema Σ possui apenas um grau de liberdade, temos que o conjunto constituído pelas observáveis $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}_A$ é completo. Assim sendo, o conjunto constituído pelos "auto--kets" simultâneos dessas observáveis, i. é.,

$$\hat{A}\,|\alpha, k\rangle = \alpha\,|\alpha, k\rangle; \tag{6.58}$$

$$\hat{\Gamma}_{A} \, |\alpha, k\rangle = k \, |\alpha, k\rangle, \tag{6.59}$$

serve de base para o espaço de Hilbert H associado à descrição Clássica de Σ.

Proposição 6.2.1.11. O espectro das observáveis $\hat{A}$ e $\hat{\Gamma}_{A}$ coincide com o conjunto dos números reais e os seus "auto–kets" simultâneos, na representação canônica, são dados por:

$$\psi_{\alpha,k}(q,p) = \langle q,p|\alpha,k\rangle = \frac{1}{2\pi}\,\delta(\alpha - A(q,p))\,\mathrm{Exp}\,[ik\theta(q,p)]; \tag{6.60}$$

sendo $\theta(q,p)$ a variável canônicamente conjugada a $A(q,p)$, ou seja,

$$\{\theta(q,p),\, A(q,p)\} = 1 \tag{6.61}$$

Demonstração: Na representação canônica, as equações de auto–valor (6.58) e (6.59) para as observáveis $\hat{A}$ e $\hat{\Gamma}_{A}$ assumem as seguintes formas:

$$A(q,p)\,\psi_{\alpha,k}(q,p) = \alpha\,\psi_{\alpha,k}(q,p); \tag{6.62}$$

$$i\,\{A(q,p),\,\psi_{\alpha,k}(q,p)\} = k\,\psi_{\alpha,k}(q,p). \tag{6.63}$$

Como o operador $\hat{A}$ na representação canônica é simplesmente um operador multiplicativo, a equação (6.62), qualquer que seja $\alpha \in R$, possui solução dada pela seguinte função:

$$\psi_{\alpha,k}(q,p) = \delta(\alpha - A(q,p))\,\phi(q,p); \tag{6.64}$$

sendo $\phi(q,\, p)$ um elemento qualquer de $\mathscr{L}^2(R \times R)$. Por outro lado, colocando (6.64) na equação (6.63), obtemos que,

$$i\{A(q,p), \phi(q,p)\} = k\ \phi(q,p); \tag{6.65}$$

onde utilizamos o fato de que $\{A(q,p), f(A(q,p))\} = 0$, qualquer que seja a função $f(A(q,p))$.

Desta forma, segue de forma direta que Exp $[ik\ \theta(q,p)]$ é, de fato, a solução de (6.65), sendo k um número real qualquer e $\theta(q, p)$ canonicamente conjugada a $A(q, p)$. C.Q.D.

Vimos na seção 3.4 que, no caso da Teoria Quântica, o conjunto constituído pelos "kets" $|n, m\rangle \equiv |n\rangle\ \langle m|$, sendo $|n\rangle$ o "auto-ket" da Hamiltoniana associada ao sistema na formulação padrão (Dirac–von Neumann), serve como base para o espaço de Hilbert associado à descrição quantum–mecânica de Σ. Para esses "kets" $|n,m\rangle$ temos que,

$$\hat{H}\ |n, m\rangle = E_n\ |n, m\rangle; \tag{6.66}$$

$$\hat{L}\ |n, m\rangle = (E_n - E_m)\ |n, m\rangle. \tag{6.67}$$

onde $\hat{H}$ e $\hat{L}$ são o Hamiltoniano e o Liouvilliano, respectivamente.

Como já tivemos oportunidade de frisar, a formulação algébrica associada às descrições clássica e quântica para o movimento realizam-se via distintos conjuntos de operadores lineares atuando num mesmo espaço de Hilbert. Em vista de (6.66) e (6.67), temos que os estados acessíveis $|\psi_q\rangle$, do ponto de vista quantum-mecânico (e mesmo para a sua generalização), podem ser dados por:

$$|\psi_q\rangle = \sum_{n,m} d_{nm}\ |n, m\rangle, \tag{6.68}$$

com $\sum_{n,m} |d_{nm}|^2 = 1$. Outrossim, de acordo com a Proposição 6.2.1.11., os estados acessíveis $|\psi_c>$ do ponto de vista clássico (e mesmo segundo sua generalização) podem ser dados via a seguinte combinação linear:

$$|\psi_c> = \int\int d\alpha\, dk\, C(\alpha,k)\, |\alpha, k> ; \qquad (6.69)$$

com $\int\int d\alpha\, dk\, |C(\alpha,k)|^2 = 1$

As equações (6.68) e (6.69), indicam claramente que a resposta ao segundo aspecto da questão do limite clássico dos estados quantum–mecânicos importa na determinação do $\lim_{\hbar\to 0} |n,m>$. Num outro contexto, Voros [119, 120], Berry [121] e Joffe–Brummer [122,123], usando a técnica de aproximação semi–clássica W.K.B.–Maslov ou empregando variáveis ângulo ação, mostraram que:

$$\lim_{\hbar\to 0} |n,m> = |\alpha_{nm}, k_{nm}> ; \qquad (6.70)$$

sendo $\alpha = \frac{1}{2}(n + m + \frac{\gamma}{2})$, $k = n - m$, e γ, um parâmetro topológico característico da aproximação W.K.B.–Maslov [99].

Utilizando o resultado de Voros, Berry e Jaffe–Brummer, temos então que o limite clássico de um estado quântico arbitrário $|\psi_q>$ acessível a Σ, é:

$$\lim_{\hbar\to 0} |\psi_q> = \sum_{n,m} d_{nm}\, |\alpha_{nm}, k_{nm}> ; \qquad (6.71)$$

correspondendo, portanto, a uma expansão de auto–funções clássicas com "coeficientes quantum–mecânicos".

Levando–se em conta que os estados acessíveis usuais, do ponto de vista quântico, são vetores pertencentes ao cone auto–dual $\mathscr{P}_q \subset H$ e dados por,

i) No caso de estados misturados:

$$|\psi_q> = \sum_n p_n^{1/2}\ |n,n>,\ \ \text{com}\ \sum_n p_n = 1,$$

ii) No caso de estados puros:

$$|\psi_q> = \sum_{nm}{}' C_n\, C_m^*\ |n,m>,\ \ \text{com}\ \sum_n |C_n|^2 = 1;$$

temos então que seus limites clássicos serão dados, respectivamente, por,

$$\operatorname*{Lim}_{\hbar\to 0} \sum_n p_n^{1/2}\ |n,n> = \sum_n p_n^{1/2}\ |\alpha_{n\,n},0>; \qquad (6.72)$$

$$\operatorname*{Lim}_{\hbar\to 0} \sum_{nm}{}' C_n\, C_m^*\ |n,m> = \sum_{nm}{}' C_n\, C_m^*\ \ |\alpha_{n\,m},k_{n\,m}>. \qquad (6.73)$$

Segundo a Proposição 6.2.1.11., os estados dados por (6.72) e (6.73) são descritos, na representação canônica, pelas seguintes funções de onda:

$$\psi(q,p) = \sum_n p_n^{1/2}\ \delta(\alpha_{nn} - A(q,p)); \qquad (6.74)$$

e

$$\psi(q,p) = \sum_{nm}{}' C_n\, C_m^*\ \delta(\alpha_{nm} - A(q,p))\ \operatorname{Exp}\,[ik_{nm}\theta(q,p)]; \qquad (6.75)$$

Observe que embora nos dois casos as funções $\psi(q,\ p)$ sejam reais, apenas no primeiro (estado quântico de mistura) ela é não–negativa. Portanto, considerando o que foi visto na seção 5.4.1., o limite clássico do cone auto–dual $\mathscr{P}_q \subset$ H, em geral, não conduz ao cone auto–dual clássico $\mathscr{P}_q \subset$ H. Entretanto, considerando as generalizações propostas para as Teorias Clássica e Quântica, obtemos que no limite $\hbar \longrightarrow 0$ os estados acessíveis quantum–mecânicos são levados a estados acessíveis clássicos.

Por conseguinte, este resultado mostra que uma solução satisfatória para a questão do limite clássico ($\hbar \longrightarrow 0$) da Teoria Quântica somente pode ser encontrada no âmbito das generalizações aqui introduzidas.

6.2.2. – ASPECTOS EMPÍRICOS

Com o objetivo de analisar o aspecto empírico do limite clássico da Teoria Quântica, enunciaremos e demonstraremos algumas proposições:

Proposição 6.2.2.1. Sejam (q,p) e $(q + \Delta q,\ p + \Delta p)$, pontos próximos no espaço de fase $\Omega = R \times R$; então, sempre que $\dfrac{\psi(q + \Delta q,\ p + \Delta p) - \psi(q,p)}{\hbar^{-1}} << 1$, tem–se,

$$\text{i)}\ A(q,p) \circledast \psi(q,p) \simeq A(q,p)\, \psi(q,p); \tag{6.76}$$

$$\text{ii)}\ \frac{1}{\hbar}\left(A(q,p) \circledast \psi(q,\ p) - \psi(q,p) \circledast A(q,\ p)\right) \simeq i\{A(q,\ p),\ \ \}\, \psi(q,\ p), \tag{6.77}$$

tanto na representação canônica como nas tensoriais mistas $\{\hat{q}_1,\ \hat{p}_2\}$, $\{\hat{p}_1,\ \hat{q}_2\}$, e nos seus produtos $\circledast$ não–locais correspondentes para quaisquer que sejam $A(q,\ p) \in \mathscr{L}^{\infty}(\Omega)$ e $\Psi(q,p) \in \mathscr{L}^2(\Omega)$.

Demonstração: O acréscimo $\Delta\psi \equiv \psi(q + \Delta q,\ p + \Delta p) - \psi(q,p)$, quando expandido em série de potências, torna–se,

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial\psi}{\partial p}\Delta p + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\Delta q^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial q\partial p}\Delta q\,\Delta p + \frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}\Delta p^2\right) + \ldots;$$

Uma condição para termos $\frac{\Delta\psi}{\hbar^{-1}} << 1$ é que qualquer que seja n, $(n = m + k)$, tenhamos $\frac{1}{\hbar^{-1}}\frac{\partial^n\psi}{\partial q^m\ \partial p^k} << 1$.

Nestas condições, usando–se a Proposição 6.2.1.6., segue naturalmente que,

$$A(q,p) \circledast \psi(q,p) \simeq A(q,p)\ \psi(q,p);$$

$$\frac{1}{\hbar}\left(A(q,p) \circledast \psi(q,p) - \psi(q,p) \circledast A(q,p)\right) \simeq i\left[\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right] = i\{A(q,p),\ \}\ \psi(q,p)$$

Desta forma, se a variação relativa a $\hbar^{-1}$ das "funções de onda" for pequena, o produto não–local correspondente pode ser aproximado pelo produto local usual. C.Q.D.

Proposição 6.2.2.2. A Teoria Quântica não Relativística pode ser aproximada pela Teoria Clássica, sempre que a variação relativa a $\hbar^{-1}$ das "funções de onda" fôr pequena.

Demonstração: A equação da evolução temporal quantum–mecânica (vide 5.38) em termos dos produtos não locais, pode ser escrita como:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,p;t) = \frac{1}{\hbar}\left\{H(q,p) \circledast \psi(q,p) - \psi(q,p;t) \circledast H(q,p)\right\}; \tag{6.78}$$

sendo H(q, p) a Hamiltoniana associada ao sistema.Logo, segundo a Proposição 6.2.2.1., temos que (6.78), torna–se

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(q,p;t) \simeq i \{H(q,p), \ \} \psi(q,p;t), \tag{6.79}$$

que é a equação de evolução temporal da nossa formulação clássica.

Os valores esperados quantum–mecânicos, sejam das observáveis usuais ou das generalizadas, podem também ser escritos em termos dos produtos não–locais (vide as proposições de 6.2.1.2 a 6.2.1.4), respectivamente, por:

$$\int \psi^{*}(q,p)\, A(q,p) \circledast \psi(q,p)\, dq\, dp; \tag{6.80}$$

$$\int \psi^{*}(q,p) \frac{1}{\hbar} \left(A(q,p) \circledast \psi(q,p) - \psi(q,p) \circledast A(q,p) \right) dq\, dp. \tag{6.81}$$

Portanto, utilizando o resultado da Proposição 6.2.2.1, esses valores podem ser aproximados respectivamente, por:

$$\int \psi^{*}(q,p)\, A(q,p)\, \psi(q,p)\, dq\, dp; \tag{6.82}$$

$$\int \psi^{*}(q,p)\, i\{A(q,p), \ \}\, \psi(q,p)\, dq\, dp. \tag{6.83}$$

que são as expressões correspondentes em nosso desenvolvimento clássico. C. Q. D.

Observemos agora os seguintes aspectos:

A) Considerando–se que $\hbar$ é um número muito pequeno ou ao contrário, que $\hbar^{-1}$ é u número muito grande, deverá existir uma ampla gama de estados acessíveis ao sistema para quais a Teoria Clássica constitui uma aproximação razoável.

B) No caso dos estados de mistura, em particular os estados representativos (

"ensembles de Gibbs" da Teoria Estatística, a temperatura deve favorecer a que a "função de onda" tenha um comportamento mais suave e portanto, deve–se esperar que em altas temperaturas, a descrição clássica para o movimento seja, em geral, uma boa aproximação para a descrição do movimento do sistema Σ.

Essa visão empírica da relação entre as teorias quântica e clássica, pode ser interpretada no contexto da Teoria da Medida. Neste sentido, considerando–se que $\hbar^{-1}$ é um número bastante grande, seria preciso um aparelho de medida muito preciso para podermos perceber que o produto correto entre "funções de onda" sôbre o espaço de fase deve ter uma natureza não–local. Em sendo assim, podemos dizer que os aspectos quânticos do ponto de vista empirico somente tornam–se detetáveis com o desenvolvimento de aparelhos de medida suficientemente sensíveis, que permitam a percepção da natureza intrínseca dos produtos não–locais sobre o espaço de fase. Neste sentido, são completamente compreensíveis as razões da crença do caráter universal da Teoria Clássica, durante tantos anos.

CAPÍTULO VII

AS EQUAÇÕES DE VLASOV E ENSKOG–VLASOV NA TEORIA CLÁSSICA COM MÉTODOS DA SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo consideramos o fato que a técnica de segunda quantização, tão usual na Teoria Quântica, é uma técnica matemática aplicável a uma ampla classe de equações diferenciais lineares no tempo [52, 124, 125, 126, 127, 128,]. Usamos este fato para reformular a axiomatização introduzida no Capítulo V (e sua generalização), em termos de um campo de operadores $\phi = \phi(q, p)$ definidos sobre o espaço de fase $\Omega = \{(\xi), \xi \equiv (q, p), \text{com } q, p \in R^3\}$. Em seguida, empregando os operadores densidade, $\hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n,t) = \hat{\phi}^\dagger(\xi_1,t)...\hat{\phi}^\dagger(\xi_n,t)...\hat{\phi}(\xi_n,t)...\hat{\phi}(\xi_1,t)$, deduzimos a forma "segundo quantizada" do sistema B.B.G.K.Y. [74] que, a depender da natureza do potencial empregado, pode ser desacoplado de forma exata conduzindo às equações microscópicas na sua forma "segundo quantizada" de Vlasov e Vlasov–Enskog [44] para o operador densidade $\hat{f}_1(\xi_1,t)$. Mostramos ainda que, levantando–se hipóteses sobre o estado dinâmico inicial do sistema pode–se deduzir dessas equações uma série de equações cinéticas conhecidas. Ressaltamos, por fim, que nossa formulação permite uma nova interpretação física para o procedimento de "coarse graining" utilizado por Kirkwood [47] na dedução de equações cinéticas de primeiros princípios.

7.1 – O MÉTODO DA SEGUNDA QUANTIZAÇÃO COMO UM MÉTODO GERAL DA FÍSICA

As observáveis associadas a um sistema dinâmico com um número não contável de graus de liberdade, de uma maneira geral, não são limitadas [129]. Em função disto, a axiomatização algébrica de tais sistemas implica no estabelecimento de algumas modificações no desenvolvimento apresentado nos capítulos iniciais deste trabalho; em particular, trata–se de introduzir o conceito de redes de W^*–álgebras locais [130]. Este, no entanto, não é nosso objetivo e sim demonstrar a equivalência entre os estados acessíveis de uma conveniente teoria de campo de operadores sobre o espaço topológico de Hausdorff Ω e as soluções de quadr integrável $\psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t)$, simétricas ou anti-simétricas nos argumentos $\xi_i \in \Omega$, do siste não-acoplado de equações diferenciais lineares,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t) = \hat{K}_n(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t), \qquad (7.$$

Em (7.1), $n = 0,1,2,\ldots$ e $\hat{K}_n$ é um operador linear hermitiano e simétrico nos $\xi_i \in \Omega$, def sobre o espaço de Hilbert $\mathscr{L}^2(\Omega^n)$. Desta forma apresentaremos apenas os elementos da T de sistemas dinâmicos contínuos (campos) que sejam imprescindíveis para que alcanc nosso propósito. Neste sentido, nessa e na seção 7.2, sintetizaremos alguns resul encontrados na literatura [52, 124, 125], e nas seções 7.3 e 7.4 apresentaremos deduções baseados na Teoria que designaremos de Teoria Geral de Operadores de Campo.

Definição 7.1.1. Os possíveis estados de um campo são caracterizados pelos assumidos pelas n–uplas $\phi \equiv (\phi_1(\xi),\ldots,\phi_n(\xi))$ e $\dot{\phi} \equiv (\dot{\phi}_1(\xi),\ldots,\dot{\phi}_n(\xi))$, usualmente re como n–uplas das amplitudes e das velocidades do campo, respectivamente. As compo das referidas n–uplas são funções contínuas a valores complexos.

Observe que a evolução temporal do campo é dada descrevendo-se c amplitudes do campo variam com o tempo e requerendo-se que as suas velocidades sat a condição $\dot{\phi}_i(\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\phi_i(\xi,t)$.

Definição 7.1.2. Um campo ϕ é dito ser fisicamente admissível quando a sua temporal é dada pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i}\right] = 0,$$

para i = 1,2,...,n, onde a Lagrangeana $L = L(\phi, \dot{\phi})$ é um funcional escalar real das amplitudes e velocidades do campo, sendo $\frac{\delta L}{\delta \phi_i}$ e $\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i}$, as suas derivadas funcionais [90].

No caso em que a Lagrangeana $L = L(\phi, \dot{\phi})$ pode ser expressa em termos da função escalar real $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi_i, \dot{\phi}_i, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \phi_i)$ sob a forma,

$$L = \int \mathscr{L}(\phi_i, \dot{\phi}_i, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \phi_i)\, d\xi_1, \ldots, d\xi_k, \tag{7.3}$$

o sistema de equações (7.2) transforma–se em,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{(\frac{\partial}{\partial \xi_j})\phi_i)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{(\frac{\partial}{\partial t} \ \phi_i)} \right] = 0, \tag{7.4}$$

para i = 1,2,...,n. Vale ressaltar que nessas condições o campo é dito ser local.

Tomando o caso de um campo escalar local $\phi = \phi(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, cuja dinâmica é governada pela seguinte densidade de Lagrangeana:

$$\mathscr{L} = \phi^*(\xi,t) \left[i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{K}^{(1)}(\xi) \right] \phi(\xi,t) - \sum_{\alpha=2}^{\varepsilon} \frac{1}{(\alpha-1)!} \int \phi^*(\xi,t)\, \phi^*(\xi_1,t) \ldots \phi^*(\xi_{\alpha-1},t).$$

$$. K^{(\alpha)}(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_{\alpha-1})\, \phi(\xi_{\alpha-1},t) \ldots \phi(\xi,t) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{\alpha-1}, \tag{7.5}$$

onde * representa o complexo conjugado, $d\xi_i = d\xi_i^{(1)} \ldots d\xi_i^{(k)}$ e sendo $K^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\alpha)$ operadores lineares hermitianos sobre $\mathscr{L}^2(\Omega^n)$. Segue, de forma direta (via 7.4) que o campo $\phi(\xi)$ satisfaz a equação:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(\xi,t) = \hat{K}^{(1)}(\xi)\,\phi(\xi,t) + \sum_{\alpha=2}^{s} \frac{1}{(\alpha-1)!}\int \phi^{*}(\xi_1,t)\ldots\phi^{*}(\xi_{\alpha-1},t).$$

$$.\,K^{(\alpha)}(\xi,\xi_1,\ldots,\xi_{\alpha-1})\phi(\xi_{\alpha-1},t)\ldots\phi(\xi_1,t)\phi(\xi,t)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{\alpha-1}. \tag{7.6}$$

Definição 7.1.3. Os momenta canonicamente conjugados às amplitudes do campo ϕ são definidas via:

$$\Pi_i(\xi) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i} \qquad \text{com } i = 1,2,\ldots,n. \tag{7.7}$$

Da forma usual, através dos momentos canônicos, pode–se definir a Hamiltoniana associada ao campo utilizando–se uma transformação de Legendre [90], como:

$$K = K[\phi,\Pi] \equiv \int \sum_{i} \dot{\phi}_i(\xi,t)\,\Pi_i(\xi,t)\,d\xi - L, \tag{7.8}$$

permitindo assim transformar cada equação do sistema (7.2) num par de equações de primeira ordem no tempo:

$$\dot{\phi}_i(\xi,t) = \frac{\delta K}{\delta \Pi_i},\;\; \dot{\Pi}_i(\xi,t) = -\frac{\delta K}{\delta \phi_i},\;\; \text{com } i = 1,2,\ldots,N, \tag{7.9}$$

usualmente referidas como as equações canônicas do campo.

Retomando o caso em estudo, o Hamiltoniano é então dado por:

$$K = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{1}{\alpha!}\int \phi^{*}(\xi_1,t)\ldots\phi^{*}(\xi_{\alpha},t)\hat{K}^{(\alpha)}(\xi_1,\ldots,\xi_{\alpha})\phi(\xi_{\alpha},t)\ldots\phi(\xi_1,t)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_{\alpha}, \tag{7.10}$$

e as equações canônicas associadas conduzem à equação (7.6) e a sua complexa conjugada, desde que $\Pi_i(\xi,t) = i\,\overset{*}{\phi}_i(\xi,t)$.

Definição 7.1.4. Na formulação canônica as observáveis associadas ao campo ϕ são representadas por funcionais $\mathcal{F} = \mathcal{F}\,[\phi.\Pi]$, escalares e reais, das amplitudes e dos momenta canônicos.

Como usual, a variação temporal da observável $\mathcal{F} = \mathcal{F}\,[\phi,\Pi;t]$ é dada pela equação,

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{F}\,[\phi,\Pi;t] = \frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{F}\,[\phi,\Pi;t] + \{\mathcal{F}, H\}, \tag{7.11}$$

onde $\{\mathcal{F}, H\}$ é o parêntesis de Poisson entre a observável $\mathcal{F}$ e o Hamiltoniano, ou seja,

$$\{\mathcal{F}, H\} = \int d\xi \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi_i}\,\frac{\delta H}{\delta\Pi_i} - \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Pi_i}\,\frac{\delta H}{\delta\phi_i}\right]. \tag{7.12}$$

Inspirados na quantização canônica do campo eletromagnético, podemos associar a uma dada Teoria Clássica de Campo uma Teoria Geral de Operadores de Campo, o que, de fato, corresponde a uma generalização do problema de Pauli–Heisenberg [61], ou seja, busca–se encontrar operadores lineares $\hat{\phi}_m(\xi,t)$ e $\hat{\Pi}_m(\xi,t)$, com $m = 1,2,\ldots,n$ e $\xi \in \Omega$, *operando num espaço* de Hilbert H e satisfazendo as relações:

$$\begin{cases} [\hat{\phi}_m(\xi,t),\hat{\phi}_n(\xi',t)]_{\mp} = [\hat{\Pi}_m(\xi,t),\hat{\Pi}_n(\xi',t)]_{\mp} = 0 \\ [\hat{\phi}_m(\xi,t),\hat{\Pi}_n(\xi',t)]_{\mp} = i\,\delta_{nm}\,\delta(\xi-\xi')\ , \end{cases} \tag{7.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\,\hat{\phi}_i(\xi,t) = [\hat{K},\, \hat{\phi}_i(\xi,t)]_- \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\,\hat{\Pi}_i(\xi,t) = [\hat{K},\, \hat{\Pi}_i(\xi,t)]_- \,, \end{cases} \tag{7.14}$$

sendo $\delta(\xi-\xi') = \delta(\xi^{(1)} - \xi^{(1)'})\ldots\ \delta(\xi^{(k)} - \xi^{(k)'})$; $\hat{K} = K\,[\hat{\phi},\, \hat{\Pi}]$ o operador linear auto–adjunto associado à Hamiltoniana do sistema e $[\hat{A},\, \hat{B}]_{\mp} \equiv \hat{A}\hat{B} \mp \hat{B}\hat{A}$.

Neste ponto é interessante notar que tanto a percepção da possibilidade de generalizar o problema de Pauli–Heisenberg quanto a sua primeira aplicação, são devido a Schönberg [124]. Em verdade esta possibilidade fundamenta–se no fato de que as relações (7.13, 14) não envolvem a constante de Planck $\hbar$. Quanto a sua solução, é usual dividí–la em duas etapas:

I) Etapa cinemática — consiste na determinação dos operadores lineares $\hat{\phi}_i(\xi,t_o)$ e $\hat{\Pi}_i(\xi,t_o)$, sobre um espaço de Hilbert H, tal que:

$$\begin{cases} [\hat{\phi}_m(\xi,t_o),\hat{\phi}_n(\xi',t_o)]_{\mp} = [\hat{\Pi}_m(\xi,t_o),\hat{\Pi}_1(\xi',t_o)]_{\mp} = 0 \\ [\hat{\phi}_m(\xi,t_o),\hat{\Pi}_n(\xi',t_o)]_{\mp} = \ i\,\delta_{mn}\ \delta(\xi-\xi')\ , \end{cases} \tag{7.15}$$

II) Etapa dinâmica — consiste na utilização do operador $\hat{K} = K[\hat{\phi}^{(0)},\, \Pi^{(0)}]$ para determinar o operador unitário $\hat{\mathscr{U}}(t,t_0)$, através da equação:

$$i\,\frac{d}{dt}\,\hat{\mathscr{U}}(t,t_0) = \hat{K}[\phi^{(0)},\Pi^{(0)}]\,\hat{\mathscr{U}}(t,t_0),\ \text{com}\ \hat{\mathscr{U}}(t_0,t_0) = 1, \tag{7.16}$$

obtendo daí, as soluções do problema, via as seguintes transformações unitárias.

$$\begin{cases} \hat{\Pi}_n(\xi,t) = \hat{\mathscr{U}}(t,t_0)^{-1}\ \hat{\Pi}_n(\xi,t_o)\ \hat{\mathscr{U}}(t,t_o) \\ \hat{\phi}_n(\xi,t) = \hat{\mathscr{U}}(t,t_o)^{-1}\ \hat{\phi}_n(\xi,t_o)\ \hat{\mathscr{U}}(t,t_o)\,. \end{cases} \tag{7.17}$$

Aplicando–se este procedimento ao campo escalar local $\phi = \phi(\xi)$, cuja hamiltoniana é dada em (7.10), tem–se:

I) Etapa cinemática

$$\begin{cases} [\hat{\phi}(\xi,t_0),\ \hat{\phi}(\xi',t_0)]_{\mp} = [\hat{\phi}^{\dagger}(\xi,t_0),\hat{\phi}^{\dagger}(\xi,t_0)]_{\mp} = 0 \\ [\hat{\phi}(\xi,t_0),\hat{\phi}^{\dagger}(\xi',t_0)]_{\mp} = \ \delta(\xi-\xi') \end{cases} \tag{7.18}$$

já que, $\Pi(\xi) = i\,\phi^{*}(\xi)$.

II) Etapa dinâmica – segundo (7.10), o gerador da evolução temporal é dado por:

$$\hat{K} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\int \hat{\phi}^{\dagger}(\xi_1,t_0)\ldots\hat{\phi}^{\dagger}(\xi_{\alpha},t_0)\hat{K}^{(\alpha)}(\xi_1,\ldots,\xi_{\alpha})\hat{\phi}(\xi_{\alpha},t_0)\ldots\hat{\phi}(\xi_1,t_0)d\xi_1\ldots d\xi_{\alpha}, \tag{7.19}$$

Chamaremos "de Heisenberg", a descrição em que a evolução temporal é baseada nas relações (7.16, 17). Naturalmente, poderíamos considerar os operadores fixos e os vetores do espaço de Hilbert H evoluindo no tempo segundo a equação:

$$|\psi(t)\rangle \ = \ \hat{\mathcal{U}}(t,t_0)\ |\psi(t_0)\rangle,$$

o que equivale a resolver a equação,

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle \ = \ \hat{K}\ |\psi(t)\rangle, \tag{7.20}$$

sendo esta descrição, identificada como a descrição de Schrödinger.

Generalizando os argumentos de Wightmann e Garding [84], podemos dizer que a etapa cinemática (7.18) possui uma infinidade de soluções distintas, ou seja, unitariamente não–equivalentes; entre estas encontraremos uma que é caracterizada pela existência de um estado de vácuo no espaço de Hilbert H. Empregando–se os procedimentos usuais da Teoria Quântica de Campos [61] teremos neste caso, que:

A) O espaço de Hilbert H associado a Teoria de Operadores de Campo $\phi = \phi(\xi)$, fica sendo constituído pelos vetores,

$$|\psi\rangle = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n) \hat{\phi}^\dagger(\xi_1)\dots\hat{\phi}^\dagger(\xi_n)|0\rangle \, d\xi_1 \dots d\xi_n, \tag{7.21}$$

sendo $|0\rangle$ o estado de vácuo de H, caracterizado por $\hat{\phi}(\xi)\ |0\rangle = 0$.

Cabe observar que as componentes $\psi_n(\xi_1,\dots\xi_n)$ do "ket" $|\psi\rangle$ com respeito a base $|\xi_1,\dots\xi_n\rangle \equiv \hat{\phi}^\dagger(\xi_1)\dots\hat{\phi}^\dagger(\xi_n)\ |0\rangle$, são elementos do espaço de Hilbert $\mathscr{L}^2(\Omega^n)$, simétricos ou anti–simétricos, a depender da Teoria de Operador de Campo $\phi = \phi(\xi)$ ser caracterizada por relações de comutação ou anti–comutação, respectivamente.

B) A evolução temporal dos vetores de H, ou seja, $|\psi(t)\rangle = \hat{\mathscr{U}}(t,t_0)\ |\psi(t_0)\rangle$, em vista de (7.21), determina a variação no tempo das projeções $\psi_n(\xi_1,\dots\xi_n;t)$, desde que:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t)|\xi_1,\dots\xi_n\rangle \, d\xi_1 \dots d\xi_n. \tag{7.22}$$

Esta variação, considerando o Hamiltoniano dado em (7.19), é determinada pelo seguinte sistema de equações:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\xi_1,\dots\xi_n;t) = \hat{K}_{(n)}(\xi_1,\dots,\xi_n)\ \psi_n(\xi_1,\dots\xi_n,t) \tag{7.23}$$

com $n = 0,1,2,\ldots$, sendo

$$\hat{K}_{(n)}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{1}{\alpha!} \sum_{m_1,\ldots,m_\alpha}{}' \hat{K}^{(\alpha)}(\xi_{m_1},\xi_{m_2},\ldots\xi_{m_\alpha})$$

com, $s \leq n$ e $\sum'$ representando que a soma se refere a distintos valores de $m_1, m_2,\ldots,m_\alpha$.

Observe que os vetores (e suas respectivas evoluções temporais) do espaço de Hilbert H associado aos operadores de campo $\phi = \phi(\xi)$ determinam, de fato, as soluções de quadrado integrável simétricas ou anti–simétricas do sistema não–acoplado de equações diferenciais lineares dado em (7.1), com $\hat{K}_{(n)}$ dado por (7.23). O recíproco deste Teorema foi originalmente demonstrado por Schönberg [124] através do emprego de expansões em conjuntos base de $\mathscr{L}^2(\Omega)$. Utilizando um procedimento alternativo e formas mais explícitas dos operadores $\hat{K}_{(n)}$ chegamos aos resultados obtidos por Schönberg empregando a estrutura de álgebra multilinear, em particular, a álgebra simétrica e a álgebra de Grasmann nos casos das relações de comutação e de anti–comutação, respectivamente [52]. Enfim, podemos dizer que a Teoria Geral de Operadores de Campo $\phi = \phi(\xi)$, caracterizada por relações de comutação (anti–comutação), é equivalente ao sistema de soluções simétricas (anti–simétricas) do sistema (7.1), com $\hat{K}_{(n)}$ dado por (7.23).

Por fim, cabe frisar que se nos restringirmos aos estados do campo,

$$|\psi(t)\rangle = \int \psi_n(\xi_1,\ldots\xi_n;t)\, |\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle\, d\xi_1\, d\xi_2,\ldots d\xi_n, \tag{7.24}$$

que são auto–estados de $\hat{N}_{op} = \int \hat{\phi}^\dagger(\xi)\, \phi(\xi)\, d\xi$ com auto–valor n, a referida equivalência dar–se–á com as soluções simétricas ou anti–simétricas da equação,

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t) = \hat{K}_{(n)}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n,t). \qquad (7.25)$$

7.2 – O MÉTODO DA SEGUNDA QUANTIZAÇÃO E A TEORIA CLÁSSICA

Considere–se um sistema físico Σ, constituído de N partículas idênticas de massa m movendo–se no R^3. De acordo com a axiomatização introduzida no Capítulo V, os possíveis estados dinâmicos associados à descrição clássica deste sistema (e à sua generalização), são vetores pertencentes ao espaço de Hilbert $H^{\otimes n}$ (vide secão 1.7), sendo $H = \{|\psi_i>\}$ o espaço de Hilbert associado aos estados do sistema constituído por apenas uma partícula.

Definição 7.2.1.. Seja G_n o grupo das permutações dos N primeiros inteiros. À cada permutação $\sigma \in G_n$, pode–se fazer corresponder um operador $[\sigma]$ que atua em $H^{\otimes n}$ e é definido como:

$$[\sigma] \bigotimes_i |\psi_i> \;=\; \bigotimes_i |\psi_{\sigma(i)}> \qquad (7.26)$$

Desta definição segue de forma direta que o conjunto dos operadores lineares $[\sigma]$, constitui uma representação do grupo G_n em $H^{\otimes n}$, usualmente referida como representação canônica do grupo G_n.

Definição 7.2.2. As partículas idênticas que constituem o sistema físico Σ são ditas indistinguíveis quando os estados acessíveis ao sistema Σ são parceiros de representações irredutíveis associadas à representação canônica de G_n.

Observe–se que a identidade entre as partículas é apenas uma condição necessária mas não suficiente para a sua indistinguibilidade, não existindo, portanto, nenhum princípio de indistinguibilidade de partículas idênticas. Desta forma, o conceito de indistinguibilidade entre partículas clássicas não tem relação direta com o problema da indexação das mesmas [131, 132].

Definição 7.2.3. As N partículas clássicas indistinguíveis que constituem o sistema Σ são chamadas de bósons (ou férmions) clássicos, quando os estados acessíveis ao sistema Σ constituem o espaço de representação para a representação irredutível unidimensional simétrica (ou anti–simétrica) da representação canônica de G_n em $H^{\otimes n}$.

Denotando–se os sub–espaços ortogonais do $H^{\otimes n}$ que constituem os espaços de representação irredutível simétrico (ou anti–simétrico) do grupo G_n por $SH^{\otimes n}$ (ou $AH^{\otimes n}$), pode–se introduzir os projetores ortogonais de $H^{\otimes n}$ sobre $SH^{\otimes n}$(ou $AH^{\otimes n}$), respectivamente, como:

$$\begin{cases} \hat{S} = \frac{1}{N!} \sum\limits_{\sigma \in G_N} [\hat{\sigma}] \ ; \\ \hat{A} = \frac{1}{N!} \sum\limits_{\sigma \in G_N} sig(\sigma) [\hat{\sigma}] \ , \end{cases} \tag{7.27}$$

onde sig (σ) é o sinal associado a paridade da permutação σ, de tal forma que os vetores do $SH^{\otimes n}$ (ou $AH^{\otimes n}$) podem ser dados, respectivamente, por: $|\psi_N^{(s)}\rangle = \hat{S}\ |\psi_n\rangle$ e $|\psi_N^{(a)}\rangle = \hat{A}\ |\psi_n\rangle$ com $|\psi_n\rangle \in H^{\otimes n}$.

Como as observáveis associadas a um sistema de partículas idênticas são simétricas pela permutação das partículas, segue, portanto, de forma similar ao caso Quantum–Mecânico [77], que a indistinguibilidade das partículas clássicas e mesmo a sua natureza bosônica ou fermiônica é mantida no curso da evolução temporal.

Vale observar que a noção de indistinguibilidade na Teoria Clássica permite também a introdução do conceito de para–estatística [133], supondo–se que os estados acessíveis ao sistema Σ sejam parceiros de outras representações irredutíveis do grupo G_n. Resta, entretanto, estabelecer se tal possibilidade é compatível com os axiomas básicos da Teoria Clássica (e de sua generalização).

A fim de tornar mais concretos esses conceitos, considere a representação canônica de Σ (vide sub–seção 5.4.1), na qual os estados dinâmicos são representados por "funções de onda" $\psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;\, t) \equiv \langle \xi_1,\ldots,\xi_n \mid \psi(t)\rangle$ pertencentes a $\mathscr{L}^2(\Omega^n)$, com $\xi_i = (q_i,\, p_i) \in \Omega$,que evoluem de acordo com a equação:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\xi_1,\ldots\xi_n;t) = \left[\sum_{m} \hat{L}_1(\xi_m) + \frac{1}{2} \sum_{m,m'} {}' \; L_2(\xi_m\, \xi_{m'}) \right] \psi_n(\xi_1,\ldots\xi_n;t), \qquad (7.28)$$

sendo que,

$$\begin{cases} \hat{L}_1(\xi_m) = \dfrac{-i}{m}\, p_i \;\cdot\; \dfrac{\partial}{\partial q_m} \\[2ex] \hat{L}_2(\xi_m, \xi_{m'}) = i\, \dfrac{\partial V}{\partial q_m} \;\cdot\; \left(\dfrac{\partial}{\partial p_m} - \dfrac{\partial}{\partial p_{m'}}\right), \end{cases} \qquad (7.29)$$

com i sendo a unidade imaginária e $V = V(|q_m - q_{m'}|)$ o potencial de interação que supomos central, entre as partículas m e m'. Nesta representação os valores esperados das observáveis são dados por

$$\langle A \rangle_{obs}(t) = \int d\xi_1,\ldots,d\xi_n\, \psi_n^*(\xi_1,\ldots\xi_n;t)\, \hat{A}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\, \psi_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;\, t), \qquad (7.30)$$

sendo $\hat{A}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ o operador linear hermitiano representativo da observável física A.

Neste caso, os estados acessíveis a um sistema Σ composto de bósons (ou férmions) clássicos são, respectivamente, dados por funções de onda simétricas (ou anti–simétricas) com relação aos elementos $[\sigma]$ de G_n, isto é:

$$\begin{cases} [\sigma]\, \psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n) \equiv \psi_n(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(n)}) \\ \\ [\sigma]\, \psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n) \equiv \mathrm{sig}(\sigma)\, \psi_n(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(n)}). \end{cases}$$

Deve–se a Schönberg [32] a introdução de "funções de onda" $\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)$, simétricas (ou anti–simétricas) na Teoria Clássica; portanto, deve–se também àquele autor a possibilidade da introdução da indistinguibilidade de partículas idênticas em sistemas clássicos. Schönberg, entretanto, introduziu tal conceito de uma forma "ad hoc". A sistematização aqui exposta pode contribuir para uma melhor compreensão acerca da natureza do conceito de indistinguibilidade de partículas na física, a qual, segundo Jammer, não foi ainda completamente explorado nem do ponto de vista lógico nem do epistemológico [134].

Vale a pena frisar que a introdução do conceito de férmions clássicos, importa, naturalmente, numa extensão dos estados usualmente acessíveis ao sistema clássico Σ, já que os elementos do cone auto–dual clássico $\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)$ são dados por,

$$\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n) = \sqrt{f(\xi_1,\dots,\xi_n)},$$

e que, no caso de partículas idênticas, a função distribuição $f(\xi_1,\dots,\xi_n)$ sendo simétrica, tem–se que $\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)$ é também simétrica (vide 5.4.1.). Além disso, do ponto de vista das observáveis clássicas usuais, a distinção entre férmions e bósons clássicos não é notada, já que nos dois casos devemos ter:

$$|\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)|^2 = f(\xi_1,\dots,\xi_n),$$

e portanto, para as observáveis usuais $\hat{A} = A(\xi_1,\dots,\xi_n)$, teremos que,

$$\langle A \rangle_{obs}(t) = \int \psi_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)\, A(\xi_1,\dots,\xi_n)\, \psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n$$

$$= \int A(\xi_1,...,\xi_n)\, f(\xi_1,...,\xi_n)\, d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_n,$$

Desta forma, do ponto de vista empírico, somente quando consideramos as observáveis clássicas generalizadas, podemos perceber a distinção entre um sistema composto de N–bósons clássicos, de um outro composto equivalente, de N–férmions clássicos.

A introdução do conceito de partículas clássicas indistinguíveis, além de representar uma nova generalização à descrição clássica do movimento, permite que a dinâmica destas partículas seja descrita através de um operadores de campo definidos sobre o espaço de fase $\Omega = R^6$, o que vem possibilitar a utilização de toda a estrutura da Teoria Quântica de Campos no âmbito da dinâmica clássica. De fato, segue diretamente da equivalência demonstrada na seção 7.1., que os bósons (ou férmions) clássicos podem ser vistos como os "quanta" de um campo $\phi = \phi(q, p)$, que satisfaz, respectivamente, as relações de comutação (ou anti–comutação):

$$\begin{cases} [\phi(q,p), \phi(q',p')]_{\mp} = [\phi^{\dagger}(q,p), \phi^{\dagger}(q',p')]_{\mp} = 0 \\ [\phi(q,p), \phi^{\dagger}(q',p')]_{\mp} = \delta(q-q')\,\delta(p-p') \ , \end{cases} \tag{7.31}$$

cuja dinâmica é gerada pelo operador,

$$\hat{K} = \int \phi^{\dagger}(\xi)\hat{L}_1(\xi)\phi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\int \phi^{\dagger}(\xi)\phi^{\dagger}(\xi')\hat{L}_2(\xi,\xi')\phi(\xi')\phi(\xi)d\xi\, d\xi, \tag{7.32}$$

com $\hat{L}_1(\xi)$ e $\hat{L}_2(\xi)$ dados por (7.29).

Considerando ainda a referida equivalência demonstrada na seção (7.1), temos que os possíveis estados do campo são dados por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \frac{1}{n!}\int \psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t)\,\hat{\phi}^\dagger(\xi_1)\dots\hat{\phi}^\dagger(\xi_n)|0\rangle. \tag{7.33}$$

Levando em conta as regras usuais da Teoria Quântica de Campos obtemos, por exemplo, que as observáveis associadas ao campo $\phi = \phi(q,p)$, podem ser expressas na forma

$$\hat{F} = \frac{1}{n!}\int \hat{\phi}^\dagger(\xi_1)\dots\hat{\phi}^\dagger(\xi_n)\,\hat{F}(\xi_1,\dots,\xi_n)\,\hat{\phi}(\xi_n)\dots\hat{\phi}(\xi_1)\,d\xi_1\dots d\xi_n, \tag{7.34}$$

e portanto os seus valores esperados são dados por.

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}\rangle_{obs}(t) &= \langle\psi(t)|\hat{F}|\psi(t)\rangle = \\ &= \sum_n\int \psi_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)\hat{F}(\xi_1,\dots,\xi_n)\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)d\xi_1,\dots,d\xi_n.\end{aligned} \tag{7.35}$$

Então, no caso do número de partículas ser determinado, suponhamos N, teremos que:

$$\langle F\rangle_{obs}(t)=\int \psi_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)\hat{F}(\xi_1,\dots,\xi_n)\psi_n(\xi_1,\dots,\xi_n)d\xi_1\dots d\xi_n, \tag{7.36}$$

o que coincide com o valor esperado da observável $\hat{F} = \hat{F}(\xi_1,\dots\xi_n)$ na representação canônica (vide 7.30).

Neste sentido, os métodos da segunda quantização com o desenvolvimento de uma conveniente teoria de campo, possibilitam uma descrição de sistemas clássicos, na qual as partículas são os "quanta" do campo introduzido.

7.3 – O SISTEMA B.B.G.K.Y. E A EQUAÇÃO DE VLASOV NA TEORIA CLÁSSICA COM MÉTODOS DA SEGUNDA QUANTIZAÇÃO.

Considerando que os elementos de matriz de uma observável clássica a $n-$partículas $\hat{F}(\xi_1,...,\xi_n)$, na representação canônica, são dados por:

$$F(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n') = \hat{F}(\xi_1,...,\xi_n)\left\{\delta(\xi_1-\xi_1')...\delta(\xi_n-\xi_n')\right\}, \qquad (7.37)$$

temos então que a forma "segundo quantizada" desta observável (vide eq.(7.34)), na descrição de Heisenberg para a dinâmica, torna–se,

$$\hat{F} = \frac{1}{n!}\int F(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n')\hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n';t)\prod_m d\xi_m\, d\xi_m', \qquad (7.38)$$

sendo $\hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n';t)$ o operador densidade generalizado, dado por

$$\hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n';t) \equiv \hat{\phi}^\dagger(\xi_1;t)...\hat{\phi}^\dagger(\xi_n;t)\,\hat{\phi}(\xi_n';t)...\hat{\phi}(\xi_1';t) \qquad (7.39)$$

.

Definição 7.3.1. Os operadores de projeção generalizados dependentes do tempo, $\hat{P}(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n';t)$, com respeito à base $|\xi_1,...,\xi_n\rangle = \hat{\phi}^\dagger(\xi_1)...\,\hat{\phi}^\dagger(\xi_n)|0\rangle$ são definidos como:

$$\hat{P}(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1',...,\xi_n';t) \equiv \frac{1}{n!}\,|\xi_1,...,\xi_n;t\rangle\langle\xi_1',...,\xi_n';t| \qquad (7.40)$$

sendo $|\xi_1,...,\xi_n;t\rangle = \mathrm{Exp}[-i\hat{K}t]\,|\xi_1,...,\xi_n\rangle$ e $\hat{K}$ dado por (7.32).

Em vista do carater hermitiano de $\hat{K}$ temos que:

$$|\xi_1,...,\xi_n;t\rangle = \hat{\phi}^\dagger(\xi_1;t)...\hat{\phi}^\dagger(\xi_n;t)\,|0\rangle,$$

e, portanto, os operadores de projeção generalizados dependentes do tempo podem ser reescritos como:

$$\hat{P}(\xi_1,...,\xi_n|\xi'_1,...,\xi'_n;t) \equiv \frac{1}{n!}\hat{\phi}^{\dagger}(\xi_1,t)...\hat{\phi}^{\dagger}(\xi_n,t)\ |0\rangle\ \langle 0|\ \hat{\phi}(\xi'_n,t)...\hat{\phi}(\xi'_1,t),$$

o que vem permitir então reescrever também o operador densidade generalizado na forma a seguir:

$$\hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n|\xi'_1,...,\xi'_n;t) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\int \hat{P}(|\xi_1,...,\xi_k|\xi'_1,...,\xi'_k).$$

$$\delta(\xi_{k+1}-\xi'_{k+1})...\,\delta(\xi_n-\xi'_n)\prod_{m=k+1}^{n} d\xi_m\, d\xi'_m \tag{7.41}$$

Neste sentido, podemos dizer que toda a informação dinâmica acerca de um sistema clássico de partículas idênticas está contida, ou nos operadores densidade generalizados ou então nos operadores de projeção generalizados dependentes do tempo. Assim, com respeito as observáveis usuais já que elas são diagonais na representação canônica, toda a informação dinâmica relevante estará contida nos operadores densidade

$$\hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n;t) = \hat{f}_n(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1,...,\xi_n;t)$$

isto é,

$$\hat{f}(\xi_1,...,\xi_n;t) = \hat{\phi}^{\dagger}(\xi_1,t)...\hat{\phi}^{\dagger}(\xi_n,t)\,\hat{\phi}(\xi_n,t)...\hat{\phi}(\xi_1,t), \tag{7.42}$$

ou de forma equivalente, nos operadores de projeção dependentes do tempo $\hat{P}(\xi_1,...,\xi_n;t) = \hat{P}(\xi_1,...,\xi_n|\xi_1,...,\xi_n;t)$, ou seja,

$$\hat{P}(\xi_1,...,\xi_n;t) = \frac{1}{n!}\ |\xi_1,...,\xi_n;t\rangle\ \langle\xi_1,...,\xi_n;t|. \tag{7.43}$$

Em vista das relações algébricas básicas satisfeitas pelo campo $\phi(\xi)$, bem como do seu gerador de evolução temporal (vide 7.31 e 7.32), temos que:

$$\text{i)}\ \left[\hat{\phi}(\xi_1,t)\ldots\hat{\phi}(\xi_2,t),\ \hat{K}_1\right]_- = \left(\sum_{i=1}^{n}\hat{L}_1(\xi_1)\right)\hat{\phi}(\xi_1,t)\ldots\hat{\phi}(\xi_n,t) \tag{7.44}$$

$$\text{ii)}\ \left[\hat{\phi}(\xi_1,t)\ldots\hat{\phi}(\xi_2,t),\ \hat{K}_2\right]_- = \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}{}'\,\hat{L}_2(\xi_i,\xi_j)\right)\hat{\phi}(\xi_1,t)\ldots\hat{\phi}(\xi_n,t)+$$
$$+\int\hat{\phi}^{\dagger}(\xi,t)\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{L}_2(\xi,\xi_i)\right)\hat{\phi}(\xi_1,t)\ldots\hat{\phi}(\xi_n,t)\phi(\xi,t)d\xi \tag{7.45}$$

Considerando agora que na descrição de Heisenberg as observáveis evoluem no tempo segundo a equação

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t) = [\hat{A}(t),\ \hat{K}]_-, \tag{7.46}$$

qualquer que seja a observável $\hat{A}(t)$, temos que o operador densidade satisfaz a equação

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{f}_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t) = \left[\hat{f}_n(\xi_1,\xi_n;t),\ \hat{K}_1\right]_- + \left[\hat{f}_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t),\ \hat{K}_2\right]_-.$$

Por outro lado, levando–se em conta o fato de que o comutador é um exemplo de produtos de Lie com derivação e as relações (7.44) e (7.45), temos que:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{f}_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t) = \hat{L}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\hat{f}_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t)+$$

$$+\int d\xi \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{L}_2(\xi_i,\xi) \right) \hat{f}_{n+1}(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi;t), \tag{7.47}$$

para $n = 0,1,2,\dots$ e sendo $\hat{L}(\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \hat{L}_1(\xi_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n}{}' \hat{L}_2(\xi_i,\xi_j)$.

Devemos notar que temos considerado apenas as condições dinâmicas sobre o campo $\phi = \phi(\xi)$. A introdução das condições cinemáticas, ou seja, os estados acessíveis ao sistema, importa no cálculo dos valores esperados das observáveis clássicas, em particular, o valor esperado do operador densidade, isto é,

$$<\psi| \hat{f}_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t) |\psi> = <\psi(t)| \hat{f}_n(\xi_1,\dots,\xi_n) |\psi(t)>, \tag{7.48}$$

onde $|\psi>$ é um possível estado do campo $\phi = \phi(\xi)$. Usando as definições (7.33) e (7.41), este valor esperado, notado aqui por $f_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t)$ fica sendo dado por,

$$f_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t) = \sum_{k=1} \frac{k!}{(k-n)!} \int |\psi_k(\xi_1,\dots,\xi_k;t)|^2 d\xi_{n+1} \dots d\xi_1. \tag{7.49}$$

A relação (7.49) mostra portanto que $f_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t)$, o valor esperado do operador densidade, representa a densidade de probablidade de encontrar–se no instante t, N partículas localizadas nos pontos $\xi_1,\dots,\xi_n$ do espaço de fase Ω, quando o campo é descrito pelo "ket" $|\psi(t)>$.

Neste sentido podemos dizer que os operadores $\hat{f}_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t)$ estão relacionados às densidades microscópicas, enquanto o seu valor esperado representa densidades macroscópicas (ou observadas). Estas densidades macroscópicas são usualmente referidas na Mecânica Estatística como funções distribuição reduzidas [44, 80].

Desta forma, tomando o valor esperado do sistema de equações (7.47), obtemos o sistema de equações satisfeito pelas funções distribuição reduzidas, qual seja,

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_n(\xi_1,...,\xi_n;t) = \hat{L}(\xi_1,...,\xi_n)\, f_n(\xi_1,...,\xi_n;t) +$$

$$+ \int d\xi \left[\sum_{i=1}^{n} \hat{L}_2(\xi_i,\xi)\right] f_{n+1}(\xi_1,...,\xi_n,\xi;t), \tag{7.50}$$

referido usualmente como a hierarquia de Bogoliubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon (ou simplesmente hierarquia B.B.G.K.Y.), a qual tem sido muito utilizada para proceder–se a dedução de equações cinéticas clássicas [44, 80]. Assim, temos que o sistema (7.47) pode ser interpretado como a forma "segundo quantizada" da hierarquia B.B.G.K.Y. microscópica.

Considerando que, em vista das relações algébricas básicas (7.31), o operador $\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2;t)$, pode ser fatorado como:

$$\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2;t) = \hat{f}_1(\xi_1,t)\left[\hat{f}_1(\xi_2,t) - \delta(\xi_1-\xi_2)\right].$$

Podemos então, desacoplar a hierarquia B.B.G.K.Y. microscópica, de forma exata, o que conduz a seguinte equação para $\hat{f}_1(\xi,t)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}_1(\xi,t) = \hat{L}_1(\xi)\, \hat{f}_1(\xi,t) + \int d\xi'\, \hat{L}_2(\xi,\xi')\, \hat{f}_1(\xi,t)\left[\hat{f}_1(\xi',t) - \delta(\xi-\xi')\right]. \tag{7.51}$$

Observando que $\lim\limits_{\substack{p \to \pm\infty \\ q \to \pm\infty}} \hat{f}_1(\xi,\ t)$ é igual ao operador nulo e que o potencial $V(|q-q'|)$ satisfaz a propriedade $(\partial V/\partial q)_{q=q'} = 0$, é possível reescrever a equação (7.51), como:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}_1(\xi,t) = \hat{L}_1(\xi) \hat{f}_1(\xi,t) + \int d\xi' \frac{\partial V}{\partial q'} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \hat{f}_1(\xi,t) \hat{f}_1(\xi',t). \qquad (7.5)$$

Vale a pena frisar que se $\hat{f}_1(\xi,t)$ é uma solução da equação (7.52), então $\hat{f}_1(q,-p,-t)$ é também solução da mesma equação, ou seja, a equação de evolução temporal do operador densidade microscópica satisfaz a condição de micro–reversibilidade [24].

Supondo agora que o estado do sistema $|\psi\rangle$ em $t = 0$ possui a propriedade:

$$\langle\psi| \hat{f}_1(\xi,t) \hat{f}_1(\xi',t) |\psi\rangle = f_1(\xi,t) f_1(\xi',t), \qquad (7.53)$$

para qualquer que seja $t \in R^+$, temos que a função distribuição reduzida $f_1(\xi,t)$ satisfaz a equação cinética reversível:

$$i \frac{\partial}{\partial t} f_1(\xi,t) = \hat{L}_1(\xi) f_1(\xi,t) + \int d\xi' \frac{\partial V}{\partial q'} \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_1(\xi,t) f_1(\xi',t), \qquad (7.54)$$

usualmente referida como equação de Vlasov [44, 80]. Pode–se dizer então, que a equação (7.52) é a forma "segundo quantizada" da equação de Vlasov para a densidade microscópica. Observe que, neste caso, ela é uma equação exata, enquanto que a equação macroscópica (7.54) é uma aproximação.

Finalizando esta seção gostaríamos de destacar os seguintes aspectos:

A) A forma "primeiro quantizada" da equação microscópica exata (7.52) tem sido empregada por Klimontovich como ponto de partida para o desenvolvimento de uma Teoria Cinética aplicável a Gases e a Plasmas Não–Ideais [44];

B) De acordo com (7.53), a hipótese de caos molecular de Boltzmann corresponde, na realidade, a uma aproximação do tipo Hartree dependente do tempo [32, 33]. Naturalmente, outras hipóteses sobre os estados dinâmicos acessíveis conduziriam a outras equações cinéticas. Em particular, se colocarmos que,

$$<\psi|\ \hat{f}_1(\xi,t)\ \hat{f}_1(\xi',t)\ |\psi> \ = f_1(\xi,t)\ f_1(\xi',t)\ g(|q-q'|), \tag{7.55}$$

sendo $g(|q-q'|)$ a função correlação de pares [80] independente do tempo, temos a seguinte equação:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,f_1(\xi,t) = \hat{L}_1(\xi)\ f_1(\xi,t) + \int d\xi'\,\frac{\partial V}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\,f_1(\xi,t)\ f_1(\xi',t)\ g(|q-q'|) \tag{7.56}$$

usualmente denominada equação de Vlasov generalizada [49].

7.4 – A EQUAÇÃO DE VLASOV–ENSKOG NA TEORIA CLÁSSICA COM MÉTODOS DA SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

Deve–se a Boltzmann [24] a primeira tentativa de conciliação entre a reversibilidade temporal exibida pela descrição clássica do movimento de um sistema de muitos corpos e a irreversibilidade dos processos naturais explicitada pela Termodinâmica. Empregando a hipótese de que os processos de interação entre os constituintes de um sistema de muitos corpos devem ser "bem localizáveis", tanto no espaço como no tempo, o autor consegue deduzir, de uma forma completamente fenomenológica, a equação cinética.

$$\frac{\partial}{\partial t}\,f(q,v,t) = -\frac{v\,\partial}{\partial q}\,f(q,v;t) + \int dv_1 d\omega\ g\ \sigma_d \left\{ f(q,v't)\ f(q,v_1';t) - f(q,v,t)\ f(q,v_1,t) \right\} \tag{7.57}$$

Sendo: $\begin{cases} d\omega \text{ o elemento infinitesimal de ângulo sólido} \\ \sigma_d \text{ a seção de choque do espalhamento entre os dois corpos} \\ g \text{ o vetor velocidade relativa inicial} \end{cases}$

Observe que, diferentemente da equação cinética de Vlasov vista na seção anterior, aqui as transformações $t \longrightarrow -t$ e $p \longrightarrow -p$ não são equivalentes o que justifica afirmar que a evolução temporal é irreversível. De fato, se $f_1(\xi, t)$ é solução da equação de Boltzmann (7.57), tem–se então que [24],

$$\lim_{t \to \infty} f_1(\xi,t) = A \operatorname{Exp}\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m}\right)\right].$$

A formulação de Boltzmann mostrou–se demais importante para a descrição de uma série de fenômenos físicos relacionados com as propriedades de transporte em gases, acarretando, inclusive, a busca de novas equações cinéticas fenomenológicas, as quais permitiram a necessária ampliação do domínio de aplicabilidade da equação original [44 74].

Entretanto, devido ao caráter estritamente fenomenológico da equação de Boltzmann e de suas generalizações, não foi possível explicitar–se com precisão a natureza do elemento extra–mecânico introduzido e a maneira como se dá a sua introdução, sendo esta a principal razão das críticas sofridas, desde Boltzmann, pelas equações cinéticas.

Esta lacuna, a partir da década de quarenta, dá origem ao desenvolvimento de uma série de trabalhos no sentido de obter–se a dedução de equações cinéticas irreversíveis via primeiros princípios. Resumidamente, podemos dizer que pelo menos três grandes escolas de pensamento se destacaram neste tema:

a) a "escola soviética", com a orientação de Bogoliubov [135] que, partindo da hierarquia B.B.G.K.Y. supõe a existência de um processo de sincronização e enfraquecimento das correlações iniciais existentes no sistema para desacoplar as equações da hierarquia;

b) a "escola americana" tendo à frente Kirkwood [47], também baseada na hierarquia B.B.G.K.Y. e fundada na hipótese de que deve–se fazer médias temporais sobre as funções distribuições reduzidas;

c) a "escola de Bruxelas", originada a partir de Van Hove e Prigogine [57], cuja concepção baseia–se em procedimentos perturbativos especiais aplicáveis a equação de Liouville juntamente com a limitação do conjunto de suas possíveis condições iniciais.

Cabe observar que, em todas as escolas as equações reversíveis da Teoria Clássica tornam–se irreversíveis somente depois de efetuado algum processo de "croarse graining". Apesar desse procedimento permitir a dedução de equações corretas do ponto de vista empírico, o seu emprego não é plenamente justificável teoricamente [24].

Mais recentemente, na tentativa de encontrar os fundamentos físicos dos dispositivos de "croarse graining", Prigogine, influenciado pelos trabalhos de Sinai e Kolmogorov acerca da chamada teoria de sistemas dinâmicos, postula que a irreversibilidade exibida pelas equações cinéticas já deve existir desde o nível microscópico. Neste sentido, parte para a busca de convenientes transformações não–unitárias que possibilitem a transformação da equação de Liouville numa equação irreversível o que, naturalmente, só é possível para os sistemas físicos que apresentem "fortes instabilidades" na sua dinâmica [136, 137].

Motivado por essas postulações, mostraremos que a Teoria Geral de Operadores de Campo $\phi = \phi(q, p)$, no caso de um potencial de esferas rígidas, pode ser vista como exemplo de uma descrição dinâmica irreversível ao nível microscópico.

Assim sendo, consideremos que o potencial de interação entre as "quanta" do campo $\phi = \phi(q, p)$ pode ser decomposto como:

$$V(|q_1-q_2|) = V^{(0)}(|q_1-q_2|) + V^{(1)}(|q_1-q_2|),$$

onde $V^{(0)}(|q_1-q_2|)$ apresenta uma variação contínua, como vista na seção anterior, enquanto $V^{(1)}(|q_1-q_2|)$ apresenta uma variação descontínua do tipo esfera rígida, isto é,

$$V^{(1)}(|q_1-q_2|) \begin{cases} 0 \ , \text{ se } \ |q_1 - q_2| > \sigma \\ \\ \infty \ , \text{ se } \ |q_1 - q_2|) \leq \sigma \end{cases}$$

Nestes termos, a equação de evolução temporal para o operador densidade a uma partícula torna—se:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}_1(\xi_1,t) = \hat{L}_1(\xi_1)\, \hat{f}_1(\xi_1,t) + \int d\xi_2 \frac{\partial V^{(0)}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \hat{f}_1(\xi_1,t)\, \hat{f}_1(\xi_2,t) +$$

$$+ \int d\xi_2\, \hat{L}_2^{(1)}(\xi_1,\xi_2)\, \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t), \tag{7.58}$$

sendo $\hat{L}_2^{(1)}(\xi_1,\xi_2) = i \left\{ \frac{\partial V^{(1)}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \right\}$ o termo denominado de auto—interação do campo $\phi = \phi(q, p)$ associado ao potencial descontínuo.

Em vista do caráter altamente descontínuo do potencial $V^{(1)}(|q_1-q_2|)$, torna—se necessário o desenvolvimento de métodos especiais para o cálculo do operador $\hat{L}_2^{(1)}(\xi_1,\xi_2)$. Como existem na literatura uma infinidade de métodos desenvolvidos para este fim, (principalmente devido ao fato de tal potencial ser utilizado como uma primeira aproximação para o estudo de gases em altas densidades), apresentaremos a seguir apenas os passos principais de nossa dedução, objetivando principalmente encontrar as justificativas físicas da hipótese "croase—graining" de Kirkwood [126, 138, 139, 140]:

Considerando as condições de fronteira para os operadores densidade apresentadas na seção anterior, temos que:

$$\int d\xi_2\, \hat{L}(\xi_1,\xi_2)\, \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) = \int d\xi_2\, \hat{L}_2(\xi_1,\xi_2) \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) + \hat{L}_1(\xi_1)\, \{\hat{N}_{op}-1\}\, \hat{f}(\xi_1,t)$$

o que permite escrever a equação (7.58), como:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\xi_1,t) = \hat{L}_1(\xi_1)\, \{2-\hat{N}_{op}\}\, \hat{f}_1(\xi_1,t) + \int d\xi_2 \frac{\partial V^{(0)}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \hat{f}_1(\xi_1,t)\, \hat{f}_1(\xi_2,t) +$$

$$+ \int d\xi_2\, \hat{L}^{(1)}(\xi_1,\xi_2)\, \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) \tag{7.59}$$

sendo $\hat{L}^{(1)}(\xi_1,\xi_2) = \hat{L}_1(\xi_1) + \hat{L}_1(\xi_2) + \hat{L}_2^{(1)}(\xi_1,\xi_2)$.

Restringindo ao sub–espaço $SH^{\otimes 2}$, a equação (7.47) para $\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)$, torna–se:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) = \hat{L}(\xi_1,\xi_2;t)\,\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t).$$

Levando agora em consideração que $\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)$ é uma constante do movimento, i. é., $\frac{d}{dt}\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) = 0$, temos então que,

$$i\frac{d}{dt}\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) = i\frac{\partial}{\partial t}\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) - \hat{L}(\xi_1,\xi_2)\,\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) \tag{7.60}$$

Utilizando que o deslocamento vitual $(\xi_1,\xi_2) \longrightarrow (\xi_1',\xi_2')$ no espaço fase Ω é definido como aquele compatível com a dinâmica de um sistema de dois corpos que mantêm t fixo e um parâmetro $\tau \in R^+$ de tal forma que $(\xi_1(0),\ \xi_2(0)) = (\xi_1,\xi_2)$ podemos reescrever a equação (7.60) como:

$$i\frac{d}{d\tau}\hat{f}_2(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),t) = -\hat{L}(\xi_1,\xi_2)\,\hat{f}_2(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),t).$$

Desta forma, temos que $\hat{L}^{(1)}(\xi_1,\xi_2)\ \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)$ no integrando da equação (7.58) pode ser substituido por $\left.\frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}\hat{f}_2(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),t)\right|_{\tau=0}$, isto é,

$$\int d\xi_2\,\hat{L}^{(1)}(\xi_1,\xi_2)\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) = \int d\xi_2\,\frac{1}{i}\frac{d}{d\tau}\hat{f}_2(\xi_1(\tau),(\xi_2(\tau),t)\Big|_{\tau=0}. \tag{7.61}$$

Observemos que $\frac{d}{d\tau}\ \hat{f}_2(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),t)$ é simplesmente a derivada tomada durante o movimento do sistema descrito com elementos de $SH^{\otimes 2}$ (fenomenologicamente falando dois "quanta" interagindo entre si de acordo com o potencial descontínuo $V^{(1)}(|q_1-q_2|)$).

Claro está que, do ponto de vista da τ–evolução temporal, a colisão entre os dois "quanta" já se efetuou em $\tau = 0$, conduzindo–nos, portanto, a expressar:

$$\frac{d}{d\tau}\hat{f}_2(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{-\Delta\tau}\left[\hat{f}_2(\xi_1(-\Delta\tau),\xi_2(-\Delta\tau),t) - \hat{f}_2(\xi_1(0),\xi_2(0),t)\right]. \qquad (7.62)$$

O acréscimo $\Delta\hat{f}_2(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),t) \equiv \hat{f}_2(\xi_1(-\Delta\tau),\xi_2(-\Delta\tau),t) - \hat{f}_2(\xi_1(0),\xi_2(0),t)$, calculado até primeira ordem, na variável $\Delta\tau$, pode ser reescrito como $\Delta\hat{f}_2 = \Delta\hat{f}_2^{(L)} + \Delta\hat{f}_2^{(C)}$; onde,

$$\begin{cases}\Delta\hat{f}_2^{(L)} \equiv \hat{f}_2(\xi_1^{(1)}(-\Delta\tau),\xi_2^{(L)}(-\Delta\tau),t) - \hat{f}_2(\xi_1(0),\xi_2(0),t) \\ \Delta\hat{f}_2^{(C)} \equiv \hat{f}_2(\xi_1(-\Delta\tau),\xi_2(-\Delta\tau),t) - \hat{f}_2(\xi_1^{(L)}(-\Delta\tau),\xi_2^{(L)}(-\Delta\tau),t),\end{cases}$$

sendo $\xi_i^{(L)}(-\Delta\tau)$ os pontos no espaço de fase Ω em $-\Delta\tau$ determinados como se a dinâmica fosse livre ou seja, $\xi_i^{(L)}(-\Delta\tau) \equiv (q_i - \frac{p_i}{M}\Delta\tau,\ p_i)$, com $i = 1, 2,$.

Empregando–se então expansões em torno dos pontos q_1, q_2, temos imediatamente que,

$$\begin{cases}\Delta\hat{f}_2^{(L)} = -i\,\Delta\tau\left[\hat{L}_1(\xi_1) + \hat{L}_2(\xi_2)\right]\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) \\ \Delta\hat{f}_2^{(C)} = -\Delta\tau(\hat{f}_2(q_1,\overset{*}{p}_1,q_2,\overset{*}{p}_2,t) - \hat{f}_2(q_1,p_1,q_2,p_2,t)),\end{cases} \qquad (7.63)$$

sendo os $\overset{*}{p}_1$ e $\overset{*}{p}_2$ os momenta posteriores a colisão, isto é:

$$\begin{cases}\overset{*}{p}_1 = p_1 - \vec{\sigma}\,[\vec{\sigma}.(p_1-p_2)] \\ \overset{*}{p}_2 = p_2 - \vec{\sigma}\,[\vec{\sigma}.\,(p_1-p_2)],\end{cases} \qquad (7.64)$$

com $\vec{\sigma}$, o vetor unitário que caracteriza a geometria da colisão binária.

Nestes termos podemos reescrever a equação (7.61) como:

$$\int d\xi_2 \hat{L}^{(1)}(\xi_1,\xi_2)\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t) = -\int d\xi_2\left[\hat{L}_1(\xi_1)+\hat{L}_1(\xi_2)\right]\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)$$

$$+ i \int d\xi_2(\hat{f}_2(q_1,p_1^*,q_2,p_2^*,t) - \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)), \qquad (7.65)$$

Utilizando os desenvolvimentos usuais para colisões binárias de esferas rígidas, e a propriedade de fatoração do $\hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)$, temos então:

$$\int d\xi_2 \,(\hat{f}_2(q_1,p_1^*,q_2,p_2^*,t) - \hat{f}_2(\xi_1,\xi_2,t)) = \int d\xi_2 \,\hat{T}(1,2)\,\hat{f}_1(\xi_1,t)\,\hat{f}_1(\xi_2,t), \qquad (7.66)$$

sendo $\hat{T}(1,2)$ o pseudo–operador de colisão para esferas rígidas, dado por:

$$\hat{T}(1,2) = \sigma^2 \int \theta[(p_1-p_2).\vec{\sigma}])\,\frac{1}{m}\,(p_1-p_2).\vec{\sigma}\,\left\{\delta[(q_1-q_2)-\sigma\vec{\sigma}]b_{\vec{\sigma}}(1,2) - \delta((q_1-q_2)+\sigma\vec{\sigma})\right\}$$

com $\theta(x)$ a função de Heaviside e $\hat{b}_{\vec{\sigma}}$ (1,2) o operador que troca os momenta, ou seja $b_{\vec{\sigma}}(1,2)\,p_1 = p_2$. [44, 138, 139].

Então, segue com o uso da eq. (7.67) que a equação de evolução temporal para o operador densidade $\hat{f}_1(\xi,t)$ pode ser expressar como:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{f}_1(\xi_1,t)= \hat{L}_1(\xi_1)\,\hat{f}_1(\xi_1,t) + \int d\xi_2\left[\frac{\partial V^{(0)}}{\partial q_1}\,\frac{\partial}{\partial p_1} + \hat{T}(1,2)\right]\,\hat{f}_1(\xi,t)\hat{f}_1(\xi_2,t). \qquad (7.68)$$

Observe que, enquanto o primeiro termo do integrando (termo de Vlasov) apresenta a simetria da equivalência entre $p \longrightarrow -p$ e $t \longrightarrow -t$, o segundo termo, que surge devido à colisão instantânea não o faz, sendo por isso responsável pela irreversibilidade do campo $\phi = \phi(q,p)$.

Kirkwood, em razão do argumento de que o tempo necessário para proceder–se a uma observação é maior do que o tempo de duração das colisões moleculares, postula que as funções distribuição reduzidas e fisicamente mensuráveis, f_n^{obs} $(\xi_1,\ldots,\xi_n;t)$, devem ser consideradas como:

$$f^{obs}{}_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} f_n(\xi_1(\tau)\ldots\xi_n(\tau),t)\, d\tau,$$

sendo ϵ o tempo de duração de uma colisão binária supostamente menor que a duração da medida. Esta hipótese ("coarse–graining"), de fato, permite que Kirkwood derive equações cinéticas irreversíveis a partir da hierarquia B.B.G.K.Y., para sistemas cujo potencial de interação seja fortemente repulsivo e de muito curto alcance [47].

A nossa formulação possibilita que as médias "temporais" empregadas por Kirkwood possam ser introduzidas diretamente ao nível microscópio, o que permite uma análise em termos do potencial de interação. Para este fim, adotemos o seguinte processo de substituição:

$$\hat{f}_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n;t) \longrightarrow \hat{f}_n^{obs}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n;t) \equiv \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} \hat{f}_n(\xi_1(\tau)\ldots\xi_n(\tau),t)\, d\tau, \qquad (7.69)$$

para $N = 0,1,2,\ldots$.

Este procedimento implica em que o termo $\int d\xi_2 \frac{d}{d\tau} \hat{f}_2(\xi_1(\tau),\ \xi_2(\tau),t)\Big|_{\tau=0}$, presente na equação de evolução temporal para $\hat{f}_1(\xi_1,t)$ (vide eq. (7.58) e (7.61)) seja substituido por:

$$\int d\xi_2\ \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} \frac{d}{d\tau}\ \hat{f}_2(\xi_1(\tau),\ \xi_2(\tau),t)d\tau = \int d\xi_2\ \frac{1}{1\epsilon}\left[\hat{f}_2(\xi_1(\epsilon),\xi_2(\epsilon),t) - \hat{f}_2(\xi_1(0),\xi_2(0),t)\right],$$

Considerando que ϵ é um intervalo de tempo muito pequeno, podemos expandir o integrando da equação acima em potências de ϵ. Segue então que o primeiro termo (vide eq. 7.62) conduz a uma expressão equivalente àquela deduzida para o caso do potencial descontínuo do tipo esfera rígida (para o qual $\epsilon = 0$), o que nos possibilita obter uma equação irreversível microscópica.

Neste sentido, podemos dizer que o procedimento de Kirkwood equivale, na prática, a uma substituição da interação que se processa continuamenete durante a evolução temporal do sistema por uma outra que possa ser localizada no tempo. Dentro de nossa formulação, portanto, a hipótese de "coarse—graining" que temos introduzido, viabiliza a "necessária instabilidade" na dinâmica, para que a irreversibilidade apareça já ao nível microscópico.

Como vimos na seção 7.3, de cada escolha do estado inicial do campo $\phi = \phi(q,p)$ podemos obter uma equação para $f_1(q,p,t)$, partindo da correspondente equação para o operador densidade $\hat{f}_1(\xi_1,t)$. Naturalmente, qualquer que seja a natureza do estado inicial $|\psi\rangle$ do campo $\phi = \phi(q,p)$, temos que:

$$\langle\psi|\ \hat{f}_1(\xi_1,t)\ \hat{f}_1(\xi_2,t)\ |\psi\rangle = f_1(\xi_1,t)\ f_1(\xi_2,t)\ g_2(\xi_1,\xi_2,t),$$

o que então conduz à seguinte equação (vide 7.68).

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\, f_1(\xi_1,t) = \hat{L}_1(\xi_1)\, f_1(\xi_1,t) + \qquad (7.70)$$

$$+\int d\xi_2 \left[\frac{\partial V^{(0)}}{\partial q_1}\,\frac{\partial}{\partial p_1} + \hat{T}(1,2)\right] f_1(\xi_1,t)\, f_1(\xi_2,t)\, g_2(\xi_1,\xi_2,t)$$

Vale ressaltar que esta equação ainda não é uma equação cinética, uma vez que a função $g_2(\xi_1,\xi_2,t)$ é, também, uma incógnita. Para obter uma tal equação faz—se necessário o estabelecimento de hipóteses acerca da natureza do estado $|\psi\rangle$ que, por sua vez, equivale à hipótese sobre a função $g_2(\xi_1,\xi_2,t)$, conhecida na Teoria Estatística como função correlação. Assim, por exemplo:

A) Supondo-se que $g_2(\xi_1,\xi_2,t) = 0$, para $\forall\ t \in R^+$, a equação (7.70) transforma-se na chamada equação de Boltzmann – Enskog com termo de Vlasov [45];

B) Sendo $g_2\ (\xi_1,\xi_2,t) = X\ (q_1,q_2 \mid \eta(R,t))$ a função correlação de pares com $\eta(q,t)=\int f_1(q_1,p_1,t)\ dp_1$ a densidade do sistema e $R = \frac{1}{2}\ (q_1 + q_2)$, tem-se a equação de Enskog com termo de Vlasov [45];

C) No caso de $g_2(\xi_1,\xi_2,t) = g_2\ (q_1,q_2 \mid \eta(q,t))$, com $\eta(q,t)$ a densidade associada ao sistema na situação de equilíbrio termodinâmico, tem-se a equação de Enskog modificada com termo de Vlasov, introduzida por Beijerem e Ernst, a qual, além de satisfazer as relações de reciprocidade de Onsager e possibilitar a introdução de um funcional entropia, permite calcular os coeficientes de transporte em sintonia com os dados experimentais [142, 143, 144,].

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Tomando por base a teoria de W^*–álgebras semi–finitas e considerando as descrições clássica e quântica do movimento associadas a sistemas não–relativísticos com um número finito de graus de liberdade, apresentamos neste trabalho, uma axiomatização concreta para estas descrições, lançando mão de conjuntos distintos de operadores lineares auto adjuntos atuando numa mesma álgebra de Hilbert. Tal procedimento nos permitiu dar um tratamento unificado aos aspectos térmicos e dinâmicos associados a tais sistemas, possibilitando inclusive que propuséssemos uma generalização para ambas as descrições, pela incorporação de novas observáveis e novos estados acessíveis. Além disso, tornou possível o estabelecimento das principais relações existentes entre as duas descrições, de uma maneira que consideramos plenamente satisfatória, valendo citar, em particular:

i) o desenvolvimento de formulações sobre o espaço de fase para a Teoria Quântica (e sua generalização) sem a inconsistência relativa ao "dilema de positividade" de Wigner;

ii) o estabelecimento preciso do processo de redução entre as Teorias Clássica e Quântica (e suas respectivas generalizações), com base na hipótese contrafactual $\hbar \to 0$.

De fato, entendemos que nossos resultados representam uma contribuição no sentido de alcançar–se uma melhor melhor compreensão acerca da natureza dessas duas descrições.

Em vista da natureza unificada de nossa axiomatização torna–se transparente a transposição dos métodos da segunda quantização para o nível clássico, propiciando o desenvolvimento de uma teoria cinética via primeiros princípios, livre dos procedimentos de "coarse–graining" típicos dessa área da Física.

Estabelecemos ainda, as relações existentes entre a axiomatização proposta neste trabalho, e outras formulações (e/ou generalizações) existentes na literatura. Em particular, mostramos que estão inteiramente contidas em nossa axiomatização as seguintes formulações:

I) ao nível quantum–mecânico

– Takahashi–Umezawa e Matsumoto, usualmente referida como "Nonequilibrium Thermofield Dynamics";

– Algebrização da teoria de ordem implicita de Bohm e colaboradores;

– A teoria em termos de super–operadores de Prigogine e colaboradores;

II) ao nível clássico

– A formulação de Prigogine e colaboradores;

– A formulação proposta por Schönberg.

Na realidade, cada um dessas formulações pode ser vista como uma particular representação de nossa axiomatização (ou de sua generalização). Neste sentido, acreditamos que este trabalho tem, também, o mérito de unificar, sob uma axiomatização consistente, uma série de formulações e/ou generalizações, encontradas na literatura, acerca das descrições clássica e quântica do movimento.

O caráter axiomático da formulação por nós desenvolvida, lhe confere um grande potencial em termos de possibilidades de trabalho que se nos apresentam, tanto no que tange aos seus aspectos formais, quanto aos relativos ao desenvolvimento de métodos e técnicas. Em particular, citamos a seguir, os principais aspectos que para nós se colocam na atualidade como perspectiva de trabalho:

A) Aspectos Formais:

i) Considerando que as descrições clássica e quântica são axiomatizadas usando–se uma mesma linguagem (operadores lineares auto–adjuntos), pretendemos reexaminar criticamente conceitos até então aceitos como tipicamente quantum–mecânicos, tais como, separabilidade, não–localidade e outros. Observe que neste trabalho já mostramos que o conceito de indistinguibilidade não é exclusivo da Teoria Quântica, podendo ser introduzido também ao nível clássico.

ii) Buscaremos deduzir as formulações usuais da Teoria Quântica não relativística sobre espaços de fase em termos de densidade de probabilidade generalizada, a partir de convenientes representações da nossa axiomatização, o que, do ponto de vista matemático corrsponde a determina realizações via conjuntos de funções para W^*–álgebra não–abelianas;

iii) Procuraremos desenvolver um formalismo de campo de operadores definidos sobre R^6associado à descrição quântica não–relativística, de modo a deduzir a teoria de campos de operadores $\phi = \phi(q, p)$ associado a descrição clássica via o limite $\hbar \rightarrow 0$; o que demonstraria que a indistinguibilidade não interfere no processso de redução inter–teórico estabelecido neste trabalho;

iv) Trataremos de estabelecer as relações existentes entre a nossa formulação e a de Prugovecki [145] acerca da Teoria Quântica sobre espaços de fase estocásticos que parte da crítica ao conceito de partícula puntiforme;

v) Tentaremos estender a axiomática proposta, de modo a possibilitar a incorporação de efeitos relativísticos.

B) Desenvolvimento de Métodos e Técnicas:

i) Aplicaremos as técnicas perturbativas de Matsumoto, à classe mais geral de estados do não–equilíbrio que temos introduzido (vetores cíclicos e separadores), no sentido de deduzir, via primeiros princípios, equações cinéticas que envolvam correlações no estado inicial;

ii) Introduziremos, através do uso de operadores densidade generalizados, o conceito de propagadores no espaço de fase ao nível clássico, i. é:

$$g(\xi_1 t|\xi_2 t') = \langle\Psi|\hat{T}[\phi^{\dagger}(\xi_1,t)\,\phi(\xi_2,t')]\Psi\rangle,$$

onde $\hat{T}$ corresponde ao operador cronológico de Dyson e $|\Psi\rangle$ é um estado acessível ao campo $\phi(q,\ p) = \phi(\xi)$. Desta forma, procuraremos desenvolver, para a Teoria Clássica de muitas partículas técnicas típicas do tratamento de sistemas de muitos corpos quantum–mecânicos, tais como: (I) expansão perturbativa de Dyson e sua representação diagramática,(de Feymann); (II) métodos das equações de movimento com seus esquemas de truncamento. Assim, esperamos gerar novas técnicas perturbativas ao nível clássico para o tratamento de sistemas de muitos corpos, inclusive nos seus aspectos térmicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1) Weyl, H. "The Theory Of Groups and Quantum Mechanics". Dover (1932).

2) Jordan, P., von Neumann, J., and Wigner, E. On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism. Annals of Mathematics. 35, (1934) 29.

3) Heisenberg, W. "The Physical Principles of the Quantum Theory" (1949).

4) Murray, F. J. and von Neumann J. On ring of Operators. Annals of Mathematics, 37 (1936) 116.

5) Rickart, C. E. "General Theory of Banach Álgebras". Von Nostrand (1960).

6) Segal, I. E. Foundations of the Theory of Dynamical Systems of Infinitely Many Degrees of Freedom. I, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk, 31 n°. 2 (1959); II, Can. J. Math, 13 (1961) 1; III, Ill.J. Math, 6 (1962) 500.

7) Haag, R. "Discussion des "Axiomes" et des propriétes asymptotiques d'une theory des champs locale avec particules composées, in Les problemes mathématiques de la théorie quantique des champs", CNRS (1959).

8) Haag, R.and Kastler, D. An Algebraic Approach to Quantum Field Theory.Jounal of Mathematical Physics. 5 (1964) 848.

9) Araki, H. Hamiltonian Formalism and the Canonical Comutation Relations in Quantum Field Theory.J. Math. Phys. 1 (1960) 492.

:

:

10) Kadison, R. V. Remaks on the Type de von Neumann Algebras of Local Observables in Quantum Field Theory. J. Math. Phys., 4 (1963) 1511.

11) Borchers, H. J. On Structure of the Algebra of Field Operators. Il Nuovo Cimento, 24 (1962) 214.

12) Kastler, D. "A C^*–algebra Approach to Field Theory, in Analysis in Function Space", T. Martin and I. Segal, Eds. MIT Press (1964).

13) Ruelle, D. "Symmetry breakdown in statistical mechanics", in: Cargese Lectures in Physics, Vol.4 D. Kastler Ed. Gordon and Breach (1970).

14) Haag, R. The Mathematical Structure of the Bordeen – Cooper – Schrieffer Model. Il Nuovo Cimento, 25 (1962) 287.

15) Birkhoff, G. and von Neumann, J. The Logic of Quantum Mechanics. Annals of Mathematics, 37 (1936) 823

16) Jauch, J. M. "Foudations of Quantum Mechanics", Addison–Wesley (1968).

17) Piron, C. Recent Developments in Quantum Mechanics. Helvética Physica Acta, 62 (1989) 82.

18) Emch, G. G. "Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory". R. E. Marshak (1972).

19) Takesaki, M. "Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications.

"Lecture Notes in Mathematics. A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann (1970).

20) Prigogine, I.and Petrosky, T.Y.An Alternative to Quantum Theory. Physica, 147A (1988) 461.

21) George, C., Mayné, F. and Prigogine, I Scattering Theory in Superspace. Advances in Chemical Physics, 61 (1985) 223.

22) Misra, B. Nonequilibrium entropy, Lyapounov variables, and ergodic properties of classical systems. Proc. natl. Acad. Sci, 75 (1978)1627.

23) Courbage, M.On Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Time and Entropy Operators in Quantum Mechanics Letters in Math. Phy. 4 (1980) 425.

24) Prigogine, I. "From Being to Becoming". Freeman and Company (1980).

25) George, C. and Prigogine, I. Coherence and Randomness in Quantum Theory. Physica, 99A (1979) 369.

26) Takahashi, Y. and Umezawa, H. Thermo Field Dynamics. Collective Phenomena, 2 (1975) 55

27) Matsumoto, H. The Causal Function in Many Body Problems Fortschritte der Physik, 25 (1977) 1.

28) Bohm, D.and Hiley, B. J. On a Quantum Algebraic Approach to a Generalized Phase Space. Foundations of Physics, 11 (1981) 179.

29) Frescura, F. A. M. and Hiley, B. J. The Algebraization of Quantum Mechanics and the Implicate Order. Foundations of Physics, 10 (1980) 705

30) Matsumoto, H. Nonequilibrium Vacuum in Thermo Field Dynamics. Progress of Theoretical Physics 79 (1988) 373.

31) Matsumoto, H. Quasi–Particle Field in Nonoequilibrium Quantum Field Theory Physica A, 158 (1989) 291.

32) Schönberg, M. Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics Il Nuovo Cimento, 9 (1952) 1139.

33) Schönberg, M. Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics. Il Nuovo Cimento, 10 (1953) 419.

34) Bohm, D., Hiley, B. J. and Kaloyeron, P.N. An Ontological Basis for the Quantum Theory.Physics Reports, 144 (1987) 321.

35) Holland, P. A. and Kypriandis, A. Quantum potential, uncertainty and the classical limit. Ann. Inst. Henri Poincaré, 49 (1988) 325.

36) Rosen, N. Quantum Particles and Classical Particles. Fondations of Physics, 16 (1986) 687.

37) Daubechies, I. Continuity statements and counter intuitive examples in connection With Weyl Quantization, J. Math Phys., 24 (1983) 1453.

38) Guz, W. Foundations of Phase–Space Quantum Mechanics. International Journal of Theoretical Physics, 23 (1984) 157.

39) Simon, R., Sudarshan, E. C. G. and Mukunda, N. Gaussian Wigner Distributions: A Complete Characterization. Physics Letters A, 124 (1987) 223.

40) Jagannathan, R., Simon, R., Sudarshan, E. C. G. and Vasudevan, R. Dynamical Maps and Nonnegative Phase–Space Distribution Functions in Quantum Mechanics. Physics Letters A, 120 (1987) 161.

41) O'Connell, R. F. and Wigner, E.P. Quantum--Mechanical Distribution Functions: Conditions for Uniqueness Physics Letters, 83A (1981) 145.

42) Hillery, M., O'Connell, R. F., Scully, M.O. and Wigner, E.P.Distribution Functions in Physics: Fundamentals Physics Reports, 106 (1984) 121.

43) Klauder, J. R. and Skagerstam, B–S. "Coherent States". World Scientific (1985).

44) Klimontovich, Y. L. "Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas". D Ter Haar (1982).

45) Karkheck, J.and Stell G. Kinetic mean–field theories. J. Chem. Phys., 75 (1981) 1475.

46) Piasecki, J.and Cichocki, B.Generalized Enskog Theory for Homogeneous Systems. Journal of Statistical Physics, 14 (1976) 433.

47) Kirkwood, J. G. Journ. Chem.Phys., 14 (1946) 180; 15 (1947) 72.

48) Matos Neto, A.and Vianna J. D. M. On Second Quantization Methods Applied to Classical Statistical Mechanics. Rev. Brasileira de Física, 14 (1984) 177.

49) Santana,A. E., Matos Neto, A. and Vianna, J. D.M. A Generalized Vlasov Equation, Physica, 160A (1989) 471.

50) Santana, A. E., Matos Neto, A. and Vianna, J. D.M.A Propagator Theory Applied to Wawes Mechanics in Phase Space.Int J. Theory Phy. 28 (1989) 787.

51) Matos Neto, A. and Vianna, J. D.M. Field Theory in Classical Phase–Space Green's Functions and a General Response Theory. Il Nuovo Cimento 86B (1985) 117.

52) Matos Neto, A.and Vianna, J. D. M. Tensor Algebra over Hilbert Space: Field Theory in Classical Phase Space. Rev, Brasileira de Física, 14 (1984) 440.

53) Matsumoto, H.in: "Progress in Quantum Field Theory". Eds. H. Ezawa and S.Kamefuchi, Elsevier Science Publishers (1986).

54) Matsumoto, H. An Effective Hamiltonian in Nonequilibrium Thermo Field Dynamics with a Reservoir. Progress of Theoretical Physics, 79 (1988) 627.

55) Matsumoto, H. Self-Consistent Pertubation Method in Thermo Field Dynamics, Progress of Theoretical Physics, 80 (1988) 57.

56) Bratteli, O and Robinson, D. W. "Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics", I. Springer – Verlog (1979).

57) Prigogine I. "Non—Equilibrium Statistical Mechanics". Interscience Publishers (1962).

58) Prugovecki, E. "Quantum Mechanics in Hilbert Sapace" Academic Press (1971).

59) Lima, E.L.Espaços Métricos. 10º Colóquio de Matemática, Poços de Caldas. IMPA (1975).

60) Fano, G. "Mathematical Methods of Quantum Mechanics". Mc Graw—Hill Book Company (1971).

61) Kastler, D. "Introduction à L'électrodynamique Quantique". Dunod (1961).

62) Gilmore R. "Lie Groups,Lie Algebras and Some Their Applications". Wiley—Interscience Publication (1974).

63) Thirring W. Quantum Mechanics of Atoms and Molecules. A Course in Mathematical Physics. Vol. 3 (1979), Vol. 4 (1980) Springer—Verlag.

64) Araki, H, in: "C^*—Álgebras and their Applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory", Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi", 1973, Ed. D.Kastler (1976).

65) Takesaki, M, in: "Statiscal Mechanics and Mathematical Problems". Lectores notes in Physics, vol. 20 Spring--Verlag (1973).

66) Stone, M. H. On one—parameter Unitary Groups in Hilbert Space. Annals of Mathematics, 33 (1932) 643.

67) Segal, I. E. A. Non-commutative Extension of Abstract Integration. Ann. Math., 57 (1953) 401.

68) Haag, R., Hugenholtz, N.M. and Winnink, M. On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics. Commun.Math. Phys, 5 (1967) 215.

69) Winnink, M. Algebraic aspects of the Kubo – Martin–Schwinger condition. Cargese Lectures in Physics, 4 (1970) 235.

70) Araki, H. On the Kubo–Martin–Schwinger Boundary Condition. Supplement of the Progress of Theoretical Physics, 64 (1978) 12.

71) Fetter, A.L.and Walecka, J. D. "Quantum Theory of Many Particle Systems". Mc Graw – Hill Book Company (1971).

72) Connes, A. Caracterization des espaces vectoriels ordonnés sous–jacents aux algébres de von Neumann. Ann. Inst. Fourier, 24 (1974), 121.

73) Haagerup, U. The standard form of von Neumann algebras.Math. Scand. 37 (1975) 271

74) von Neumann, J. On an Algebraic Generalization of the Quantum Formalism, J. Mat. Sborn, 1 (1936) 415.

75) Segal I, Postulates for General Quantum Mechanics. Annals of Mathematics, 48 (1947) 930.

76)

77) Dirac, P. A.M. "Principios de Mecânica Cuantica", 4ª Ed. Ediciones Ariel (1968).

78) Amann, A. Observables in W^*–Algebraic Quantum Mechanics. Fortschr. Phys., 34 (1986) 167.

79) Roman, P. "Introduction to Quantum Field Theory". John Wiley and Sons, (1968).

80) Balescu, R. "Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics". Wiley–Interscience Publication (1975).

81) Kastler, D., Pool, J. C. T. and Poulsen, E. T. Quasi–Unitary Algebras Attached to Temperature States in Statiscal Mechanics A. Comment on the Work of Haag, Hugenholtz and Winnink. Commum. Math. Phys., 12 (1969) 175.

82) Ojima,I. Gauge Fields at Finite Temperaturee – "Thermo Field Dynamics" and KMS Condition and Their Extension to Gauge Theories Annals of Physics, 137 (1981) 1.

83) Matsumoto, H., Mancini, F.and Marinaro, M. Pertubation expansion and initial–state correlations in non–equilibrium thermo–field dynamics. J. Phys. A: Math. Gen., 20 (1987) 6543.

84) Umezawa, H., Matsumoto, H. and Tachiki, M., "Thermo Field Dynamics and Condensed States, North–Holland, (1982).

85) Pool, J. C. T. Mathematical Aspects of the Weyl Correspondence. Journal of

Mathematics Physics, 7 (1966) 66.

86) Daries, E. B. "Quantum Theory of Open Systems". Academic Press (1976).

87) Fano, U.Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques. Reviews of Modern Physics, 29 (1957) 74.

88) Cahill, K. E. and Glauber, R. J. Ordened Expansion in Boson Amplitude Operators Phys. Rev., 177 (1969), 1857; Density Operators and Quasi probability Distribuitions.Phys. Rev., 177 (1969), 1882.

89) Agarwal, G. S. and Wolf, E. Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase--Space Methods in Quantum Mechanics, I. Phy. Rev., 2 (1970) 2161; II, Phy. Rev., 2 (1970) 2187; III, Phy. Rev., 2 (1970) 2206.

90) Rosen, G. "Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory". Academic Press (1969).

91) Gug, W. On the Nonclassical Character of the Phase-Space Representations of Quantum Mechanics. Foundations of Physics, 15 (1985) 121.

92) Englert B. G., On the operator bases underlying Wigner's, Kirkwood's and Glauber's phase space functions. J. Phys. A: Math. Gen., 29 (1989) 625.

93) Balazs, N. L. Weyl's Association, Wigner's Function and Affine Geometry. Physica, 102A (1980) 236.

94) Aldrovandi, R.and Galletti, D.On the Structure of Quantum Phase Space. IFT/P–29/89.

95) Droz–Vicent, P. Transformations Infinitésimales et crochets de Poisson des deus types, Ann. Inst. Henri Poincaré, 5 (1966), 257.

96) Pedroza, A. C. and Vianna, J. D. M. On the Jordan Algebra and the Symmetric Formulation of Classical Mechanics, J. Phys. A: Math. Gen 13 (1980) 825.

97) Koopman, B.O. Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces. Proc. Natl. Acad. Sci. 17 (1931) 315.

98) Brillouin, L. "Scientific Uncertainty and Information", Academic Press. (1964).

99) Maslov, V.P.and Fedorivk, M. V. "Semi Classical Aproximation in Quantum Mechanics", Reidel (1981).

100) Wigner, E.On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. Physical Review, 40 (1932) 749.

101) Kirkwood J. G. Quantum Statitics of Almost Classical Assemblies. Physical Review, 44 (1933) 31.

102) Boop, F.La Mécanique Quantique est–elle une Mécanique Statistique Classique Particuliére. Annals de L'Institut Henri Poincaré, 15 (1956) 81.

103) Takahaski, K.and Nabuhiko, S. Chaos and Husimi Distribution Function in Quantum

Mechanics. Physical Review Letters, 55 (1985) 645.

104) Jaffé, C. Semiclassical Quantization of the Liouville Formulation of Classical Mechanics, J. Chem.Phys 88 (1988) 7603.

105) Jaffé, C. and Brumer, P. Classical Liouville Mechanics and Intramolecular Relaxation Dynamics. J.Phys. Chem., 88 (1984) 4829.

106) Heller, E.J. Wigner phase space method: Analysis for Semiclassical Applications. The Journal Chemical Physics, 65 (1976) 1289.

107) Shlomo,S. The Wigner Transform and Semi–Classical Approximations.Il Nuovo Cimento, 87A (1985) 211.

108) Prosser, R. T. On the Correspondence between Classical and Quantum Mechanics. J. Math, Phys., 24 (1983) 548.

109) Leaf B. Weyl Transformation and the Classical Limit of Quantum Mechanics. J. Math. Phys. 9 (1968) 65

110) Bmer, J. T. The Classical Limit of Quantum Theory, Synthese, 50 (1982) 167

111) Jordan, T. F. and Sudarshan, E. C. G., Lie Group Dynamical Formalism and the Relation between Quantum Mechanics and Classical Mechanics, Rev. Mod. Phys. 33 (1961) 515.

112) Liboff, R.L.On the Potential X^{2N} and the Correspondence Principle, International

Journal of Theoretical Physics, 18 (1979) 185.

113) Mehta, C. L. Phase–Space Formulation of the Dynamics of Canonical Variables. J. Math. Phys., 5 (1964) 677.

114) Groenewold, H. J.On the Principles of Elementary Quantum Mechanics. Physica, 12 (1946) 405.

115) De Groot, S. R. and Suttorp, L. G. "Foundations of Electrodynamics", North–Holland Publishing Company, (1972)

116) Qian, S. W. and Huang, X.Y.On the Classical Limit of the Stationary State Wavefunction, Physics Latters A, 117 (1986) 166.

117) Qian, S. W. and Huang, X.Y. On the Classical Limit of the Hydrogen Wavefunction, Physics letters A, 115 (1986) 319.

118) Qian, S. W.and Huang, X.Y. On the Classical Limit of the Quantum Mechanical Wave Packet, Physics Letters A, 121 (1987) 211.

119) Voros, A., Semi--Classical Approximations, Ann. Inst Henri Poincaré, 24 (1976) 31.

120) Voros, A. Asymptotic $\hbar$–expansions of stationary quantum states. Ann. Inst.Henri Poincaré, 26 (1977) 343.

121) Berry, M. V. Semi–Classical Mechanics in Phase Space: A Study of Wigner's Function.Philosophical Trans. Royal Society., 287A (1977) 237.

122) Jaffé, C.and Brumer, P.Classical–quantum correspondence in the distribution dynamics of integrable systems, J. Chem, Phys. 82 (1985) 2330.

123) Jaffé, C., Kanfer, S., and Brumer, P. Classical Analog of Pure–State Quantum Dynamics, Physical Review Letters, 54 (1985) 8.

124) Schönberg, M. A General Theory of the Second Quantization Methods.Il Nuovo Cimento, 10 (1953) 697.

125) Katz, A.Infinite Systems of Classical Particles, J.Math.Phys., 8 (1967) 2451.

126) Hopfield, J. J.and Bastin, A.I. F. New Approach to Transport Theory in Classical Gases, Physical Review, 163 (1968) 193.

127) Doi, M. Second Quantization representation for Classical Many–Particle System,J.Phys. A: Math. Gen., 9 (1976) 1465.

128) Doi,M. Stochastic Theory of Diffusion – Controlled reaction. J.Phys. A: Math. Gen., 9 (1976) 1479.

129) Sewell, G. L. Unbounded Local Obserbables in Quantum Statistical Mechanics, J. Math.Phys. 11 (1970) 1868

130) Dubin, D. A. and Sewell, G.L. Time Translations in the Algebraic Formulation of Statistical Mechanics. J. Math. Phy., 11,(1970) 2990.

131) Neri, D. "Indistinguishability of Particles and Complementarity in Statistical

Thermodynamics". Il Nuovo Cimento, 99B (1989) 155.

132) Bach, A. The Concept of Indistinguishable Particles in Classical and Quantum Physics. Fundations of Physics, 18 (1988) 639.

133) Ohnube Y.; Kamefechi S. "Quantum Field Theory and Parastatics". Spinger–Verlag (1982).

134) Jammer, M. "The Conceptual Development of Quantum Mechanics". Mc–Graw–Hill, (1966).

135) Bogolyubov, N., in: "Studies of Statistical Mechanics", J.de Boer and G. Uhlenbeck, eds., (1962).

136) Prigogine, I., Mayné, F., George, C., and De Haan, Microscipic Theory of Irreversible Processes.Prac. Natl. Acad. Sci., 74 (1977) 4152.

137) Goldstein, S., Mista, B.and Coubage, M. On Intrinsic Rondomness of Dynamical Systems. Journal of Statistical Physics, 25 (1981) 111.

138) Ernst, M.H., Dorfman, J. R., Hoegy, W. R. and Van Leeuwen, J.M. J., Hard–Sphere Dynamics and Binary–Collision Operators, Physica, 45 (1969) 127.

139) Domaradzki, J. A., The Liouville Operator for the Step–Type Interparticle Interaction.Physica, 86A (1977) 169.

140) Altenberger, A. R. On the Calculation of the Classical Liuville Operatoe for the

Step–Type Interparticle Interaction, Physica, 80A (1975) 46.

141) Van Beijeren, H. and Ernst, M. H. The Modified Enskog Equation, Physica, 68 (1973) 437.

142) Karkheck, J.and Stoll, G. Maximization of entropy, kinetic equations, and irreversible thermodynamics, Physical Review A, 25 (1982) 3302.

143) Mareschal, M., Local Entropy production and Gibbs relation from the Nonlinear revised Enskog equation,Physical Review A, 29 (1984) 926.

144) Piasecki, I and Szamel. G. Enskog's dynamics of many–particle density fluctuations, Physical Review A, 38 (1988) 2124.

145) Prugovecki, E.; "Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Spacetime", Reidel (1984)

"REALIZAÇÃO DE TOMITA-TAKESAKI DE W*-ALGÉBRAS SEMIFINITAS E GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA DAS TEORIAS CLÁSSICAS E QUÂNTICAS"

ARTHUR MATOS NETO

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:

JMangueira

José David Mangueira Vianna - Presidente

Gil da Costa Marques

Mario José de Oliveira

Mário José de Oliveira

Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson

Juan Alberto Mignaco

Takeshi Kodama - Suplente

Rio de Janeiro, 08 de janeiro de 1992