

WELLES ANTÔNIO MARTINEZ MORGADO

MAGNETIZAÇÃO MULTIFRACTAL EM REDES HIERÁRQUICAS

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1991

a minha mãe,

a meu irmão e a meu pai,

que estarão sempre comigo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. e amigo Evaldo Mendonça Fleury Curado, com quem muito aprendi, pela orientação, pela atenção e pela paciência a mim dedicadas ao longo de meus estudos de Mestrado.

Ao Prof. e amigo Sérgio Coutinho pela colaboração, pela atenção e entusiasmo que foram muito importantes para o desenvolvimento desta tese.

Aos Profs. e amigos Constantino Tsallis e Aglaé C. N. de Magalhães pelo apoio e por todas as discussões, nas quais muito aprendi.

Aos colegas e amigos Anna M. N. Chamme, Daniel Stariolo, Fortunato de Menezes, Francisco Tamarit, Edson P. da Silva, Helio F. V. de Rezende, Ladário da Silva, Marcelo L. Martins e Sérgio A. Cannas pela amizade, pelo apoio e por todas as proveitosas discussões.

A Vanda W. de Carvalho, Almério V. de Castro, Myriam S. Coutinho, Vera L. T. Carvalho, Denise Coutinho, Júlio Sobral, Luis Reis e a todos os funcionários do CBPF pela atenção e gentileza a mim dedicadas.

A Emília, Sérgio, Bola, Liana, Joaquim, Quim, Mônica, Heloísa, Vinícius, Pardal, Cambraia, Tião e a todos os outros amigos da UFRJ e CBPF pela amizade e apoio.

Ao CBPF que me proporcionou a oportunidade de desenvolver estudos de pós-graduação e pesquisa.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro que me permitiu desenvolver este trabalho.

RESUMO

Usando leis de recorrência entre magnetizações locais de spin para o modelo de Ising na rede hierárquica diamante (RD), calculamos a magnetização em cada sítio da rede assim como a sua magnetização média global.

Escolhendo uma representação conveniente para as magnetizações em um conjunto de sítios da RD interessante por sua simetria, conjunto este chamado de perfil da rede, calculamos propriedades fractais e mostramos a multifractalidade, exibida pela função $f(\alpha)$, característica da magnetização local da RD.

Obtivemos exatamente o expoente crítico β da magnetização média a campo nulo para a RD e vários parâmetros geométricos da magnetização local da RD (dimensão fractal do perfil, α_{\max} e α_{\min} que são os limites do intervalo de existência para α), assim como as relações entre estes parâmetros.

ABSTRACT

Using recurrence laws between local spin magnetizations, we have calculated the magnetization in each lattice site, as well as the global average magnetization for the Ising model on the diamond hierarchical lattice (RD).

By choosing a convenient representation for the magnetization on a set of RD's sites which is interesting for its symmetries (called the lattice profile), we calculated fractal properties and we have shown the multifractality, determined by its $f(\alpha)$ function, characteristic of the RD's local magnetization.

We have obtained exactly the β critical exponent for the zero field average magnetization of the RD. We also have obtained some geometrical parameters of the RD's local magnetization (the fractal dimension of the lattice profile, α_{\max} , α_{\min}), as well as the relations among them.

SUMÁRIO

Dedicatória	ii
Agradecimento	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1: TRANSIÇÕES DE FASE: ASPECTOS GERAIS	6
1.1) Transições de Fase	6
1.2) Comportamento Próximo a T_c	11
1.3) Modelo de Ising	20
CAPÍTULO 2: FRACTAIS E MULTIFRACTAIS	23
2.1) Fractais	23
2.1.1) Definições	23
2.1.2) Dimensão Fractal e Invariância de Escala	27
2.1.3) Redes Fractais Hierárquicas	31

2.2) Multifractais	34
2.2.1) Introdução	34
2.2.2) Representação α	38
2.2.3) Generalização para o Caso Multinomial	40
2.2.4) Função $f(\alpha)$	42
2.2.5) Representação q	44
2.2.6) Algumas Propriedades	48
CAPÍTULO 3: MAGNETIZAÇÃO MULTIFRACTAL EM REDES	
HIERÁRQUICAS	51
3.1) Introdução	51
3.2) Modelo e Definições	53
3.3) Leis de Recorrência	57
3.4) Recorrência Global para a Magnetização	69
3.5) Análise em T_c	74
3.6) Aspectos Multifractais do Modelo	81
CONCLUSÕES:	88
Apêndice A	90
Apêndice B	91
Apêndice C	93
Apêndice D	95
Apêndice E	102
Referências	104

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>PG.</u>
1.1 - Projeções de superfícies termodinâmicas sobre alguns planos escolhidos	12
1.2 - Alguns exemplos de redes de Bravais e outras	22
2.1 - Fractais com invariância de escala exata e estatística	28
2.2 - Fractais mono e multi-escalares	30
2.3 - Exemplos de redes hierárquicas e sua formação	32
2.4 - Formação da medida binomial sua representação em 0, 1 e 2 gerações	36
2.5 - Função $\rho(\alpha)$ típica para um multifractal	39
2.6 - Função $\rho(\alpha)$ para a medida binomial com distribuição de medida $\{m_0, m_1\}$ tal que $m_0 + m_1 = 1$.	41
2.7 - Distribuição multinomial ($b=3$) mostrada para 1, 2, 3 e 6 gerações	43
2.8 - Típica figura $f(\alpha)$ para um multifractal apresentando algumas propriedades usuais	50
3.1 - Construção da rede hierárquica diamante destacando um dos caminhos mais curtos entre as raízes da rede, também chamado de perfil	55
3.2 - Célula básica da rede diamante sobre a qual são feitos os cálculos para a obtenção das relações de recorrência entre as magnetizações locais da rede	59

3.3	- Perfil da rede diamante com 10 gerações e a ampliação da parte destacada mostrando a autossimilaridade do modelo	68
3.4	- Exemplo da dizimação na rede diamante	72
3.5	- Construção do perfil fractal da rede hierárquica. Vê-se as gerações de número 0, 1 e 2	79
3.6	- Definição gráfica dos spins mais internos da rede diamante	82
3.7	- função $f(\alpha)$ para a magnetização local do perfil da rede diamante para $N=29$ gerações. Vê-se ainda, os valores de $f_{\max}(\alpha)$ como função de N^{-1}	85

LISTA DE TABELAS

TAB.

PG.

1.1 - Sumário de expoentes críticos para transição de fase de segunda ordem para um fluido	16
1.2 - Sumário de expoentes críticos para transição de fase de segunda ordem para um sistema magnético	17

INTRODUÇÃO

Em Física Estatística, não existem muitos modelos não-triviais resolvidos exatamente. Dentre estes poucos podemos destacar o modelo de Ising bi-dimensional a campo nulo [1] em algumas redes de Bravais, o modelo esférico [2], o modelo de Ising com campo externo em redes hierárquicas do tipo Migdal-Kadanoff [3] e mais alguns outros [4]. A importância do estudo de modelos exatamente solúveis foi muito grande para o desenvolvimento da mecânica estatística e fenômenos críticos. Soluções exatas podem ter profundos efeitos sobre idéias teóricas [5]. Elas podem servir tanto como modelos de referência para teorias não-exatas aplicadas aos mais diversos sistemas físicos, quanto podem ser uma boa descrição para modelos físicos reais. Uma prova disto é a importância da qual se revestiu a solução exata do modelo de Ising bi-dimensional a campo nulo, no desenvolvimento das idéias sobre transições de fase ao mostrar que este sistema apresenta expoentes não-clássicos.

Modelos de spin clássicos, tais como Ising ou Potts, em redes hierárquicas constituem uma grande e diversificada classe de modelos exatamente solúveis exibindo uma grande variedade de transições de fase, das quais poucas foram estudadas em detalhe. Além disto, estas soluções exatas se referem principalmente a grandezas termodinâmicas médias do sistema [3,5]. As redes hierárquicas, além de apresentarem tal riqueza de fenômenos estatísticos não-triviais quando sobre elas

impomos modelos como os acima descritos, apresentam estrutura fractal e invariância de escala. Este fato as envolve de ainda maior importância, pois nos últimos anos, o estudo sobre objetos fractais tem sido cada vez mais relevante.

O conceito de fractais tem sido extremamente útil para descrever numerosos problemas em física [6]. Podemos definir brevemente fractais como objetos cujas massas M se escalam como $M \propto L^D$, onde L é uma grandeza linear característica do objeto e D é sua dimensão fractal. Muitos sistemas físicos exibem características fractais. Podemos citar por exemplo, fenômenos de crescimento dendrítico em cristais, estudo de substâncias porosas, percolação, crescimento por agregação limitada por difusão (DLA), turbulência, fraturas de materiais rígidos, penetração de um meio viscoso por um líquido de baixa viscosidade (viscous fingering), medidas de capacidade de reservatórios de petróleo, análise de descargas elétricas (quebra do isolamento dielétrico de um meio material, DBM), eletrodeposição química a baixa concentração de íons dissolvidos, etc.

Além dos sistemas físicos citados, os fractais são objetos extremamente importantes no estudo de modelos teóricos. Características fractais estão presentes em fenômenos críticos [7], estudos sobre caminhada aleatória (random walk) e processos de difusão, modelos de criticalidade auto-organizada, atratores estranhos de sistemas dinâmicos, estudos em matemática aplicada para simular sistemas reais (curvas de Koch simulando relevos geográficos, conjuntos de Mandelbrot, etc. [8]), modelos que possuem algum tipo de

estocasticidade, etc. Todos estes modelos possuem uma geometria bastante complexa e rica.

Porém, mais recentemente, observou-se que ao estudar-se fenômenos que ocorrem em fractais, nem todos os elementos do fractal tem a mesma importância. Por exemplo, um objeto fractal, tal como uma proteína numa solução, exibe uma forte blindagem com respeito a uma partícula em difusão. Apenas uma fração dos sítios da superfície estão efetivamente expostos [9]. O mesmo ocorre em fenômenos como o DLA anteriormente citado, e turbulência em um fluido, no qual certas regiões do fluido possuem altas taxas de dissipação de energia, enquanto que em outras regiões a dissipação é extremamente baixa.

Caracterizamos esta multiplicidade de comportamentos que um objeto fractal possui através do conceito de multifractal. Este conceito está relacionado com a decomposição de um objeto fractal em muitos conjuntos distintos, cada um apresentando dimensões diferentes e cada um exibindo uma característica diferente do processo que se desenrola sobre o fractal. Por exemplo, regiões com a mesma taxa de dissipação de energia no fluido turbulento ou regiões exibindo a mesma probabilidade de agregação de uma nova partícula no caso do DLA. A multifractalidade de um sistema físico pode ser caracterizada pela função $f(\alpha)$ onde α é um expoente que seleciona um subconjunto do sistema no qual acontece um tipo de processo e $f(\alpha)$ é a dimensão deste conjunto (esta função representa todo um espectro contínuo de expoentes presentes no processo que ocorre no sistema fractal) [10].

Porém, até recentemente, não conhecíamos muitos modelos

para o qual pudéssemos calcular exatamente grandezas termodinâmicas, locais e globais, sendo que estes possuísem características multifractais.

Este modelo foi realizado em redes hierárquicas, em especial na rede hierárquica diamante (cuja definição será dada mais adiante), através de um método recorrente para o modelo de Ising [11].

Mostraremos no presente trabalho como obter relações de recorrência, na rede hierárquica do tipo ligação, entre grandezas termodinâmicas locais (magnetizações). Estas equações de recorrência relacionam magnetizações de sítios (primeiros vizinhos) obtidos em gerações diferentes, ao longo do processo de formação da rede hierárquica. Somado a estas relações, fixamos alguns spins da rede (nas raízes) de modo a quebrar a simetria de inversão do Hamiltoniano.

Calculamos então, a partir das relações de recorrência, a magnetização local exata, $\langle \sigma_i \rangle$, para cada sítio, σ_i , da rede a qualquer temperatura.

A partir da magnetização local, calculamos sua média global por spin e observamos uma transição de fase contínua em T_c , e calculamos exatamente o expoente crítico β da magnetização para o modelo.

Escolhendo um conjunto de sítios, da rede hierárquica, de modo que estes sítios formem um perfil da rede (caminho mais curto entre as duas raízes da rede, como veremos), definindo então uma medida adequada sobre estes sítios (a medida será definida como magnetização local dividida pela por magnetização total do perfil), observamos que o conjunto das magnetizações

locais do perfil possui comportamento multifractal. Calculamos numericamente a função $f(\alpha)$ para esta medida. Obtemos ainda, algumas relações entre expoentes críticos, dimensão fractal da medida sobre o perfil e valores de α de alguns subconjuntos do perfil.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, expomos brevemente transições de fase e fenômenos críticos; no capítulo 2, definimos objetos fractais e multifractais; no capítulo 3, estudamos as magnetizações local e global do modelo de Ising na rede hierárquica e sua multifractalidade.

CAPÍTULO 1

TRANSIÇÕES DE FASE: ASPECTOS GERAIS

Neste capítulo, procuramos fazer um resumo de alguns dos assuntos sobre os quais é baseada esta tese, buscando descrever de maneira sucinta alguns conceitos necessários para a compreensão da mesma. Começaremos por descrever transições de fase (1), após o que aprofundaremos o estudo de transições de fase de ordem superior (2). Definiremos em seguida de maneira compacta o modelo de Ising (3).

1.1) Transições de Fase:

Designamos por fase um estado estável (ou seja, um mínimo absoluto de um potencial termodinâmico adequado), ou, no limite do rigor, para um tempo de relaxação muito longo, o caso meta-estável (ou seja, um mínimo local de um potencial termodinâmico adequado), de um material ou qualquer outro sistema físico [12]. Cada fase de um sistema deve possuir propriedades coletivas que a diferenciam de outras, constituídas pelos mesmos componentes microscópicos. Por exemplo, a diferença de estrutura cristalina entre a fase cúbica de corpo centrado (bcc) e a fase hexagonal altamente compacta (hcp) para o sódio (existe uma transição entre estas duas fases em aproximadamente 23K, chamada transformação martensítica) [13]; um maior volume molar, menor entropia molar

e uma rigidez maior para água na fase sólida em relação à fase líquida a 0°C e 1 atm, etc.

Um sistema físico pode ser constituído por uma ou várias fases de um ou mais componentes distintos. As fases, nas quais um material se apresenta, são determinadas pelos parâmetros termodinâmicos do material, como a pressão (P), temperatura (T), etc [12].

Quando variamos estes parâmetros, numa faixa de valores adequada, podemos observar que algumas fases se tornam instáveis ou meta-estáveis e desaparecem dando lugar a outras que se tornam estáveis. Por exemplo, transição sólido-líquido e líquido-gás em sistemas de um ou mais componentes; transição ferro-paramagnética de um ferromagneto na temperatura de Curie do material; transição condutor-supercondutor, etc [2].

Como veremos a seguir, em alguns tipos de transição de fase (1^{a} ordem), a desestabilização de um conjunto de fases de um sistema termodinâmico é devida ao fato de que, para determinados valores das grandezas termodinâmicas, a entropia do sistema constituído pelas fases originalmente presentes já não é um máximo. Este máximo é alcançado quando o sistema se subdivide em fases distintas, mantidas as condições externas impostas ao sistema, ou ao contrário pode condensar-se em apenas uma, se o sistema era constituído por mais de uma fase [12]. Em outros tipos de transição de fases, a mudança de estado do sistema pode ocorrer sem que haja uma modificação brusca no aspecto qualitativo do sistema (como é o caso das transições de 2^{a} ordem ou superior) [12,14].

Para entendermos estas transições de fase devemos analisar

os comportamentos macroscópico e microscópico do sistema [15]. Um estado macroscópico do sistema (por ex.: uma dada distribuição de equilíbrio P, μ, T, h, \dots) é dado por uma média temporal sobre muitos estados microscópicos clássicos do sistema [14,16], cada um sendo caracterizado por uma energia total e por um conjunto definido de momentos, posições, magnetizações, momentos angulares, etc (ou por funções de onda definidas quando consideramos o caso quântico), para todos os componentes (moléculas, spins, etc.) do sistema. Se então, subdividirmos nosso sistema em diversas partes macroscópicas (subsistemas), mas suficientemente pequenas em relação ao sistema total, podemos imaginar que no limiar de uma transição de fase (por ex.: a transição água-gelo à 0°C e $P=1\text{atm}$), um sistema inicialmente constituído por uma única fase (por ex.: água logo acima de 0°C e à $P=1\text{atm}$) poderá se dividir em duas ou mais fases ao variarmos os parâmetros termodinâmicos de maneira adequada (por ex.: abaixando a temperatura da mistura água + gelo à 0°C e $P=1\text{atm}$, obtemos apenas uma fase, gelo) e esta separação pode começar a ocorrer em qualquer um dos subsistemas em que foi dividido o nosso sistema, quando ocorrerem flutuações [16] de densidade suficientemente grandes neste subsistema. O que servirá como "semente" para o crescimento da nova fase do subsistema, que virtualmente se propagará por todo o sistema. Flutuações de grandezas termodinâmicas aditivas para o subsistema são proporcionais à $N^{-1/2}$ [16], onde N é um indicador de tamanho do subsistema (como o número de partículas, volume do subsistema, etc). Estas flutuações permitem que consideremos regiões do sistema total constituídas

pela mesma fase (por ex.: ilhas de spins $+1/2$ ou $-1/2$ no modelo de Ising [2], regiões de água ou de gelo no sistema água+gelo à 0°C e $P=1\text{atm}$, etc.), das quais calculamos o comprimento característico associado ao tamanho linear destas ilhas formadas pela mesma fase, ou seja, o que chamamos de comprimento de correlação ξ . Existem diversas maneiras de calcular ξ . Por exemplo, no estudo da percolação, ξ corresponde ao tamanho dos aglomerados de sítios que estão "ativos"¹ e que são responsáveis pelo comportamento singular de certas grandezas do sistema [17]. Durante as transições, ξ pode tender a infinito (como acontece em geral nas transições de 2ª ordem, como veremos) ou manter-se finito (como em geral nas transições de 1ª ordem) [15]. Uma constatação experimental da variação de ξ durante uma transição de fase pode ser obtida por espalhamento de luz pelo sistema [2]. Quando o comprimento de correlação atinge uma medida da ordem do comprimento de onda da luz espalhada, o sistema torna-se opaco devido à grande difração da luz. Assim o sistema torna-se sucessivamente: transparente, opaco e transparente à medida que nos aproximamos e superamos a temperatura de transição de fase. Este fenômeno é conhecido como opalescência crítica.

Torna-se então necessário classificar os tipos possíveis de transição de fase que um sistema pode apresentar, pois cada

¹No modelo mais simples de percolação, espalhamos sobre uma rede qualquer, sítios ativos, com probabilidade p , e inativos, com probabilidade $1-p$, até preencher completamente a rede. Devemos, então, analisar os aglomerados conexos (dois sítios ativos estão conectados se são primeiros vizinhos) de sítios ativos. Quando a rede em questão é infinita e podemos percorre-la de um extremo infinito a outro sobre um aglomerado conexo, então dizemos que houve percolação.

uma delas apresenta características bastante específicas e a descoberta de uma maneira sistemática de classificação nos permitiria reconhecer a semelhança entre transições de fase de sistemas muito diferentes entre si. Portanto tentaremos descrever um modo sistemático para classificar estas transições. Este método é baseado no comportamento da energia livre de Gibbs do sistema considerado [12,18]. Uma análise sucinta nos leva a considerar principalmente:

Transições de fase de 1ª ordem:

Numa transição de fase de 1ª ordem, observamos uma descontinuidade na derivada da energia livre de Gibbs do sistema [12]. Neste tipo de transição, alguns parâmetros molares ligados à derivada primeira da energia livre de Gibbs, tais como a entropia ou volume, sofrem mudanças descontínuas. Por ex.: na transição água-gelo já citada, observamos uma variação de densidade (o gelo é menos denso que a água) e também existe emissão de calor (dito latente), pela água que se congela, devido à variação da entropia molar. Este calor emitido é dado por $l = T \Delta s$, onde Δs é a variação da entropia molar, T é a temperatura absoluta do sistema e l é a quantidade de energia emitida sob forma de calor pelo sistema durante a transição.

Transições de fase de ordem superior:

São transições de fase nas quais se observa descontinuidades nas derivadas de ordem superior da energia livre de Gibbs. Uma transição de fase de 2ª ordem se caracteriza pela descontinuidade na derivada 2ª da energia livre de Gibbs, etc. Nesta transição não ocorre descontinuidade

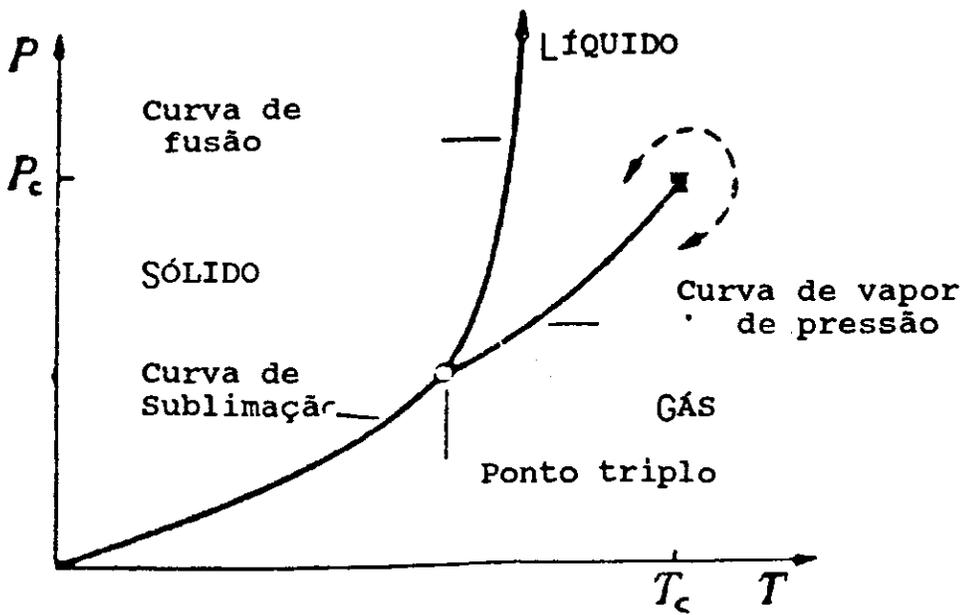
na entropia do sistema, portanto não existe troca de calor latente e o sistema passa continuamente de uma fase para outra.

Na figura 1.1.a, observamos que ao contornar o ponto P_c (linha tracejada) o sistema constituído originalmente por água na fase líquida transforma-se continuamente em (isto é, sem ferver) vapor. Se ao contrário, o sistema atravessa a linha de transição de 1ª ordem ele sofre uma transformação descontínua (isto é, ferve). Na figura 1.1.b, observamos o equivalente magnético da figura 1.1.a. Em 1.1.b, o ponto crítico $(T_c, 0)$ pode ser contornado, levando a uma mudança suave da magnetização total do sistema (linha tracejada). Atravessando a linha de transição de 1ª ordem, observamos uma mudança brusca da magnetização total, o que corresponde à solidificação ou fusão no caso do fluido.

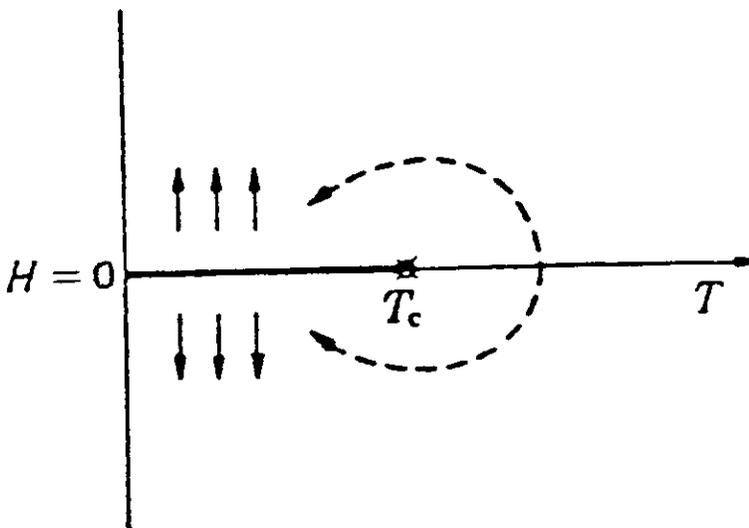
1.2) Comportamento Próximo a Temperatura Crítica:

Como veremos no capítulo 3, nosso trabalho discorre sobre fenômenos presentes em transições de fase contínuas. Portanto, nosso interesse se centrará principalmente sobre estas últimas.

Uma transição de fase contínua (2ª ordem ou ordem superior), como vimos anteriormente, é caracterizada pela descontinuidade nas derivadas superiores (segunda ordem ou maior) da energia livre de Gibbs, ou seja, nos calores específicos ou suas derivadas [12,19]. Abaixo caracterizamos a energia livre de Gibbs para fluidos simples e sistemas magnéticos simples.



(a) Fluido



(b) Magneto

Figura 1.1: (a) Projeção da superfície PVT no plano PT. (b) Projeção da superfície HMT no plano HT.

FluidoSistemaSimplesMagnético

$$G = U - TS + PV$$

$$G = U - TS + HM$$

$$dG = - SdT + VdP - \sum_i \mu_i dN_i$$

$$dG = - SdT + MdH - \sum_i \mu_i dN_i$$

onde: $G \equiv$ energia livre de Gibbs; $U \equiv$ energia interna; $T \equiv$ temperatura; $S \equiv$ entropia; $P \equiv$ pressão; $M \equiv$ momento magnético; $H \equiv$ campo magnético externo; $\mu_i \equiv$ potencial químico do componente "i"; $N_i \equiv n^\circ$ de constituintes "i".

Como:

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P, \text{ e } \frac{C_p}{T} = - \frac{\partial^2 G}{\partial T^2},$$

se a derivada segunda de G ($\partial^2 G / \partial T^2$) é descontínua, C_p também o será e o mesmo se passa com as derivadas de C_p , se ocorrerem descontinuidades nas derivadas de ordem superior a 2 de G .

Esta descontinuidade nos calores específicos pode ser finita ou infinita, porém, a grande maioria delas é infinita (como em várias transições ordem-desordem em ligas metálicas, o aparecimento de ferroeletricidade no sal de Rochelle, a transição ferro-paramagnética e outras) e poucos são os casos conhecidos de descontinuidade finita nos calores específicos (como o aparecimento de supercondutividade à campo nulo) [12].

A maneira moderna de analisar estas transições é estudar o comportamento das principais grandezas termodinâmicas no limiar de uma transição de fase contínua, como por exemplo a transição ferro-paramagnética.

Para acontecer uma transição de fase de ordem superior é

necessário que o sistema passe por uma variedade crítica² [12]. A variedade crítica é a região do espaço de parâmetros termodinâmicos (em geral de dimensão menor que aquela do espaço de parâmetros) que corresponde à separação das regiões de estabilidade e instabilidade definidas de uma dada fase. Num sistema de 1 componente, cujos parâmetros intensivos termodinâmicos são (P, T, μ) , esta variedade corresponde à um ponto, o ponto crítico PC de coordenadas (P_c, T_c, μ) .

Se consideramos a energia interna molar u do sistema, no ponto crítico, a forma diferencial [12]

$$d^2u = \sum_{i,j} u_{ij} dx_i dx_j \quad (1.1)$$

onde: u é a energia interna molar; x_i são as grandezas termodinâmicas extensivas molares (s, v, \dots) ; $u_{ij} \equiv (\partial^2 u / \partial x_j \partial x_i)$. A forma diferencial (1.1) deve ser positivo-semidefinida de forma que a energia interna do sistema não seja um máximo em nenhuma direção. Ou seja, em PC, $du = 0$ e $d^2u \geq 0$. Neste caso, o sistema se encontra no limiar da instabilidade [12].

Devido à descontinuidade das derivadas em PC, ou, no caso mais geral, numa variedade crítica arbitrária, o potencial termodinâmico molar escolhido (u, g ou s entre outros, onde $g \equiv$ energia livre de Gibbs molar e $s \equiv$ entropia molar) não pode ser uma função analítica. Podemos, por exemplo, escrevê-la como:

$$g = g_{\text{anali}} + g_{\text{sing}},$$

onde $g_{\text{anali}} \equiv$ parte analítica de g e $g_{\text{sing}} \equiv$ parte singular de g .

²A variedade crítica é definida como uma hiper-superfície no espaço de parâmetros termodinâmicos P, T, V, μ , etc.

Se caracterizarmos a variedade crítica por uma função de grandezas termodinâmicas e observarmos o comportamento de g ao longo de uma curva definida no espaço de parâmetros termodinâmicos do sistema [18], por exemplo, ao longo do eixo T na vizinhança do ponto (P_c, T_c) , a função g se comporta como:

$$g \cong g_{\text{anal}} + \lambda \cdot (T - T_c)^\theta + O(\text{ordem superior}) \quad (1.2)$$

onde $\lambda \cong \text{Cte}$ e θ é um expoente que caracteriza o comportamento da parte singular de g que contribui mais significativamente para a própria função g .

As diversas grandezas termodinâmicas correspondentes às diferentes derivadas e combinações de derivadas de g serão caracterizadas por um comportamento perto de P_c dominado por um expoente crítico diferente [2]:

$$\text{Por ex. : } m = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right) \Rightarrow m \propto (T_c - T)^\beta$$

$$\chi = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial m}{\partial h} \right) \Rightarrow \chi \propto (T_c - T)^{-\gamma}$$

onde m é a magnetização ($\cong m(T, P, \dots, h)$) e χ é a suscetibilidade magnética.

Nas tabelas 1.1 e 1.2 estão colocados os principais expoentes críticos para transição de fase de segunda ordem ferro-paramagnética e transição líquido-vapor.

Portanto, fenômenos críticos são aqueles que se realizam na vizinhança de uma variedade crítica (vizinhança esta denominada região crítica), ou seja, numa região de incipiente instabilidade de um sistema físico em relação às suas fases

Tabela 1.1

Exponentes críticos para um sistema fluido.

$$\varepsilon = T/T_c - 1$$

Expoente Crítico	Definição	Condições $\varepsilon, P-P_c, \rho-\rho_c$	Grandeza Física
α'	$C_v \propto (-\varepsilon)^{\alpha'}$	<0 0 0	Calor específico a volume constante $V = V_c$
α	$C_v \propto (\varepsilon)^{\alpha}$	>0 0 0	
β	$\rho_L - \rho_G \propto (-\varepsilon)^{\beta}$	<0 0 $\neq 0$	Diferença de densidade líquido-gás
γ'	$K_T \propto (-\varepsilon)^{-\gamma'}$	<0 0 $\neq 0$	Compressibilidade isotérmica
γ	$K_T \propto (\varepsilon)^{-\gamma}$	>0 0 0	
δ	$P - P_c \propto \rho_L - \rho_c ^{\delta}$	0 $\neq 0$ $\neq 0$	Isoterma crítica
ν'	$\xi \propto (-\varepsilon)^{-\nu'}$	<0 0 $\neq 0$	Comprimento de correlação
ν	$\xi \propto (\varepsilon)^{-\nu}$	>0 0 0	
η	$G(r) \propto r ^{-(d-2+\eta)}$	0 0 0	Função de correlação de pares (d = dimensão)

Tabela 1.2

Expoentes críticos para um sistema magnético.

$$\varepsilon = T/T_c - 1$$

Expoente Crítico	Definição	Condições ε, H, M			Grandeza Física
α'	$C_H \propto (-\varepsilon)^{\alpha'}$	<0	0	0	Calor específico a campo magnético constante
α	$C_H \propto (\varepsilon)^{\alpha}$	>0	0	0	
β	$M \propto (-\varepsilon)^{\beta}$	<0	0	$\neq 0$	Magnetização a campo nulo
γ'	$\chi_T \propto (-\varepsilon)^{-\gamma'}$	<0	0	$\neq 0$	
γ	$\chi_T \propto (\varepsilon)^{-\gamma}$	>0	0	0	Susceptibilidade isotérmica a campo nulo
δ	$H \propto M ^{\delta}$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	Isoterma crítica
ν'	$\xi \propto (-\varepsilon)^{-\nu'}$	<0	0	$\neq 0$	Comprimento de correlação
ν	$\xi \propto (\varepsilon)^{-\nu}$	>0	0	0	
η	$\Gamma(\mathbf{r}) \propto r ^{-(d-2+\eta)}$	0	0	0	Função de correlação de pares (d = dimensão)

constituíntes. Uma de suas características marcantes é a presença de expoentes que determinam o comportamento de várias grandezas termodinâmicas do sistema.

Um dos aspectos mais interessantes que observamos no estudo das transições de fase contínuas, em sistemas não fractais, é que nem todos os parâmetros geométricos e/ou microscópicos que caracterizam um sistema físico são relevantes para a descrição destas transições de fase. Nós podemos constatar que existe uma classe de parâmetros realmente relevantes, tais como a dimensão do sistema, o alcance das forças de interação internas do sistema e o número de graus de liberdade, n , do parâmetro de ordem (por exemplo, $n = 1$ para o modelo de Ising, $n = 3$ para o modelo de Heisenberg entre outros) [2]. Pode-se observar que as grandezas termodinâmicas de sistemas físicos diferentes apresentam o mesmo comportamento crítico se estes sistemas possuem os mesmos d e n e suas interações são de curto alcance [2,20]. Estes sistemas possuem características comuns que podem ser expoentes críticos idênticos ou então algo mais refinado como o fato de diversos sistemas diferentes poderem ter seu comportamento crítico mapeado, através de uma transformação conveniente, num único tipo de comportamento perto de T_c [2]. Esta independência que os sistemas mostram em relação a diversos de seus parâmetros físicos microscópicos é chamada de universalidade. As classes de equivalência em que se organizam os sistemas, de acordo com o tipo de observação realizada na região crítica, são comumente chamadas de classes de universalidade.

Diferentes sistemas físicos dotados de interações de curto

alcance e mesmos d e n pertencem a mesma classe de universalidade. Por exemplo, um grande número de materiais magnéticos possui o mesmo expoente crítico como por exemplo $\beta \cong 0.33$, etc [2].

Outra característica muito importante encontrada no estudo de fenômenos críticos é que aparentemente os potenciais termodinâmicos, como a função energia livre de Gibbs, são funções homogêneas das suas variáveis na vizinhança da variedade crítica. Esta hipótese é conhecida como a hipótese de homogeneidade. Sendo $\varepsilon = (T-T_c)/T_c$, então [2,15]:

$$G(\lambda^a \varepsilon, \lambda^b H) = \lambda \cdot G(\varepsilon, H), \quad (1.3)$$

ou ainda

$$F(\lambda^c \varepsilon, \lambda^d M) = \lambda \cdot F(\varepsilon, M), \quad (1.4)$$

onde G e F são respectivamente as energias livres de Gibbs e Helmholtz e λ é um parâmetro arbitrário.

Das relações (1.3) e (1.4) podemos obter o comportamento de diversas grandezas termodinâmicas na região crítica, como por exemplo, a magnetização a campo nulo [2]. Da equação (1.3) e sabendo que a magnetização de um sistema a campo nulo é obtida derivando-se a energia livre de Gibbs em relação à H , obtemos, no limite $H \rightarrow 0$,

$$\lambda^{b-1} \cdot M(\lambda^a \varepsilon, 0) = M(\varepsilon, 0). \quad (1.5)$$

Como λ é arbitrário, escolhemos seu valor de modo que $\lambda^a \cdot \varepsilon = 1$. Isto implica que

$$M(\varepsilon, 0) \propto \varepsilon^{(1-b)/a}$$

mas $M(\varepsilon, 0) \propto \varepsilon^\beta$, logo $\beta = (1 - b)/a$, e o comportamento crítico da magnetização pode ser obtido através do comportamento homogêneo de G na região crítica.

Além disto, utilizando ainda a hipótese de homogeneidade acima descrita, podemos encontrar relações entre diversos expoentes críticos, como por exemplo [2]:

$$\alpha + 2.\beta + \gamma = 2,$$

onde α e γ são os expoentes críticos do calor específico e da susceptibilidade, respectivamente.

1.3) Modelo de Ising:

O modelo de Ising pode ser utilizado para representar diversos sistemas físicos, tais como sistemas magnéticos, ligas binárias, gás de rede, etc.

Usualmente representamos o modelo de Ising como um modelo de spins, σ_i ($|\sigma_{iz}|=j$ e $\sigma_{iz} = -j, -j+1, \dots, j$), onde um par de spins (σ_i, σ_j) interage segundo o Hamiltoniano $H_{int\ ij} = -J.\sigma_{iz}\sigma_{jz}$. No caso ferromagnético $J > 0$. Se $j = 1/2$, fazemos (após multiplicar σ por um fator conveniente) $\sigma_{iz} = \pm 1$.

Podemos construir um modelo de Ising na rede (de Bravais ou outra qualquer) colocando-se em cada sítio um spin que interage com os outros de modo que cada ligação (ou plaqueta) represente um acoplamento de Ising a dois (três, quatro, etc) spins. Para uma definição mais precisa, ver referências [2,13]. Utilizando este modelo, podemos simular alguns materiais ferromagnéticos (antiferromagnéticos), com forte anisotropia uniaxial e nos quais os elétrons responsáveis pelo aparecimento de magnetismo estão ligados fortemente aos íons da rede, encontrados na natureza como por exemplo $\text{CoCl}_2.2\text{NC}_5\text{H}_5$ (ferro em $d=1$) e CoCs_3Br_5 ou CoCs_3Cl_5 (antiferro em $d=2$ e $d=3$) [21].

Na figura 1.2 exemplificamos algumas redes de Bravais em duas e três dimensões [13]. Podemos representar o Hamiltoniano para este modelo como:

$$H = - \sum_{\langle i j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_i h_i \sigma_i \quad (1.6)$$

onde $\sigma_i = \pm 1$, $J_{ij} = J_{ji}$ e onde h_i são os campos locais, $\sum_{\langle i j \rangle}$ representa uma soma sobre primeiros vizinhos da rede escolhida. No caso particular, onde todos os acoplamentos e campos são iguais:

$$H = - J \sum_{\langle i j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (1.7)$$

Então, podemos calcular a magnetização média por spin do modelo à campo nulo:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{\partial G}{\partial h} \quad (1.8)$$

Onde $N \equiv n^\circ$ de spins, $G = -kT \ln Z$ e $Z = Z(T, h)$ é a função de partição do modelo, ou seja:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\{-\beta H\}; \text{ onde } \beta = 1/kT \quad (1.9)$$

Portanto:

$$\frac{\partial G}{\partial h} = - \frac{kT}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h} = \sum_i \langle \sigma_i \rangle_h;$$

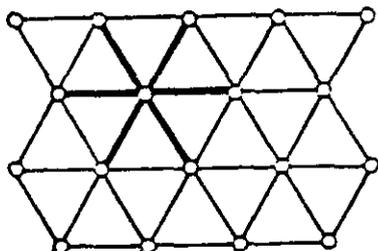
onde $\langle \sigma_i \rangle_h$ é a média do spin σ_i , dado o campo externo h . Logo:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_h = \langle \langle \sigma_i \rangle \rangle \quad (1.10)$$

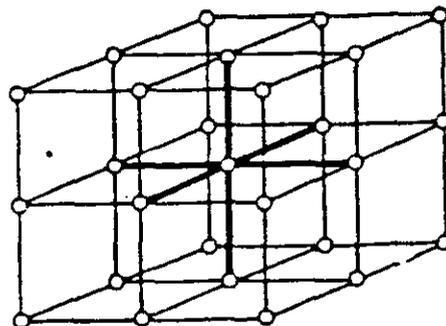
onde $\langle \langle \rangle \rangle$ significa média de ensemble para cada spin e espacial sobre todos os spins.

Portanto podemos ver que a magnetização média do modelo corresponde à média das magnetizações locais, $\langle \sigma_i \rangle$.

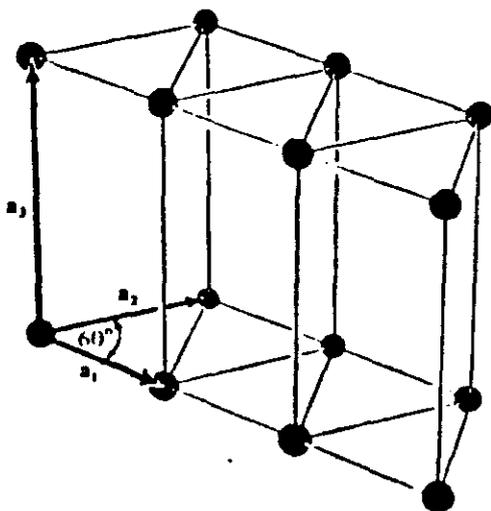
EXEMPLOS DE REDES



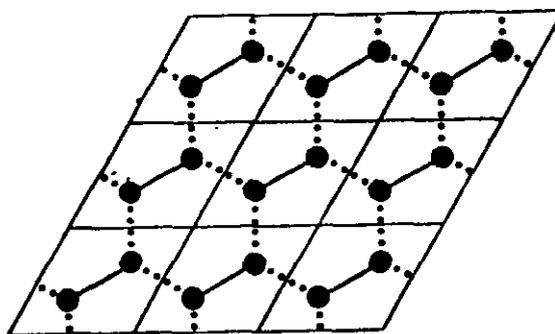
(a) Triangular Simples



(b) Cúbica Simples



(c) Hexagonal



(d) Favo de Mel (honeycomb)

Figura 1.2: As figuras (a), (b) e (c) são redes de Bravais com dimensões iguais a 2, 3, e 3 respectivamente. A rede (d) não é rede de Bravais.

CAPÍTULO 2

FRACATAIS E MULTIFRACTAIS

O objetivo deste capítulo é fornecer uma breve introdução aos conceitos de objetos fractais e multifractais. São apresentadas neste capítulo as leis de escala que definem um fractal, seus aspectos geométricos mais simples e a generalização destas leis para um espectro contínuo de expoentes, no caso multifractal.

2.1) Fractais:

2.1.1) Definições:

Determinados fenômenos naturais, como turbulência intermitente, crescimentos dendríticos, formação de ilhas de spin em modelos magnéticos na temperatura crítica [20], etc, se caracterizam por uma similaridade bastante acentuada entre o sistema como um todo e suas partes. Esta propriedade geométrica e/ou estatística destes modelos físicos, que pode ser gerada, em várias escalas, por flutuações do sistema, deve ser estudada com atenção, pois dela derivam muitas leis que relacionam dimensões geométricas a grandezas físicas do sistema.

Se torna então necessário criar instrumentos matemáticos

que nos permitam analisar qualitativa e quantitativamente os objetos que possuem esta invariância de escala. Um conceito bastante útil para nossa análise será o conceito de dimensão de um objeto.

Por dimensão entenda-se um expoente que relaciona a variação de uma grandeza característica do objeto à variação de uma quantidade métrica ligada ao mesmo objeto. Por exemplo, a superfície de uma esfera varia como o quadrado de seu raio, o volume varia como o cubo de seu raio enquanto que seu diâmetro é proporcional ao raio.

Podemos então recorrer a algumas definições mais rigorosas de dimensão de um sistema, que tenham caráter suficientemente geral.

Descreveremos aqui duas definições bastante úteis de dimensão, a dimensão de capacidade, d_c , e a dimensão de Hausdorff, d_h [22].

- dimensão de capacidade (d_c):

seja um conjunto S (podemos interpreta-lo assim, mesmo que seja um objeto real, como no caso de um aglomerado de partículas ou como algo mais abstrato como o conjunto de vértices gerados por uma rede hierárquica) qualquer imerso em um espaço Euclidiano p dimensional. Cobrimos este conjunto S com abertos de raio ε , cuja dimensão é aquela do espaço euclidiano no qual o conjunto está imerso, de maneira que o número de abertos seja o mínimo necessário. No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a dimensão do conjunto é dada pelo limite $d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log(N)/\log(\varepsilon^{-1})$, se este limite existe, onde N é

o número mínimo de abertos necessários para se cobrir o conjunto quando o raio destes é igual a ε [22];

- dimensão de Hausdorff (d_h):

seja um conjunto S no espaço Euclidiano p -dimensional. Considere, como no caso anterior, uma cobertura deste conjunto com N caixas de tamanho $\{\varepsilon_i\}$ de maneira que $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ onde $i = 1, 2, \dots, N$. Seja então a grandeza

$$I_d(\varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^d \right\}, \quad (2.1)$$

onde o infimo significa que I_d deve ter o menor valor possível do somatório acima dentre todas as maneiras possíveis de cobrir-se o conjunto S (naturalmente N pode variar de acordo com o tipo de cobertura especificada) [22].

Seja então o limite:

$$I_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_d(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Pode-se mostrar que existe um valor crítico de d , d_{crit} , tal que [23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} d > d_{\text{crit}} \Rightarrow I_d = 0; \\ d < d_{\text{crit}} \Rightarrow I_d = \infty. \end{array} \right.$$

O valor crítico, d_{crit} , chama-se de dimensão de Hausdorff do sistema, d_h ($\leq p$) [22].

Comumente, $d_h = d_c$ e chama-se a este valor comum de dimensão fractal, ou d_f , tal que $d_f = d_h = d_c$ [22]. Em alguns casos porém, $d_h \neq d_c$. Por exemplo, para a sequência $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$, $d_c = 1/2$ enquanto que $d_h = 0$ [22]. Pode-se ver que $d_h \leq d_c$, pois seja $J_d(\varepsilon) = \sum_i \varepsilon_i^d$ de tal maneira que $\varepsilon_i = \varepsilon$ qualquer que seja i . Por definição $J_d(\varepsilon) = \sum_i \varepsilon_i^d = N(\varepsilon) \varepsilon^d \geq I_d(\varepsilon)$, onde $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-d_c}$. Então obtém-se $\varepsilon^{d-d_c} \geq I_d(\varepsilon)$. Como I_d tende a infinito quando $d < d_h$, se $d_h > d_c$ então para d tal que $d_h > d > d_c \Rightarrow \varepsilon^{d-d_c} \rightarrow 0$ e $I_d(\varepsilon) \rightarrow \infty$, o que seria absurdo, logo, $d_h \leq d_c$ [22].

Podemos então definir um objeto como fractal quando este possui invariância de escala (geométrica ou estatística), num determinado intervalo de ordens de grandeza, e sua massa (ou qualquer outra grandeza, por exemplo sua superfície) se escala como R^d , onde R é uma grandeza métrica (ou em alguns casos topológica) característica do objeto ou sistema físico e d_f é a sua dimensão fractal. Em geral d_f é não-inteira.

Na natureza observamos diversas grandezas fractais. Por exemplo, podemos dizer que, dentro de uma boa aproximação, a costa de um continente pode ser simulada por uma linha de dimensão não inteira ao longo de diversas escalas de grandeza [8]. Alguns outros exemplos de fractais são os aglomerados formados por agregação limitada por difusão ou então por eletrodeposição química [24], a ilha percolante infinita no limiar de percolação de um sistema ($p=p_c$) [17], fraturas devido a forças de tensão num meio [25], quebra do isolamento

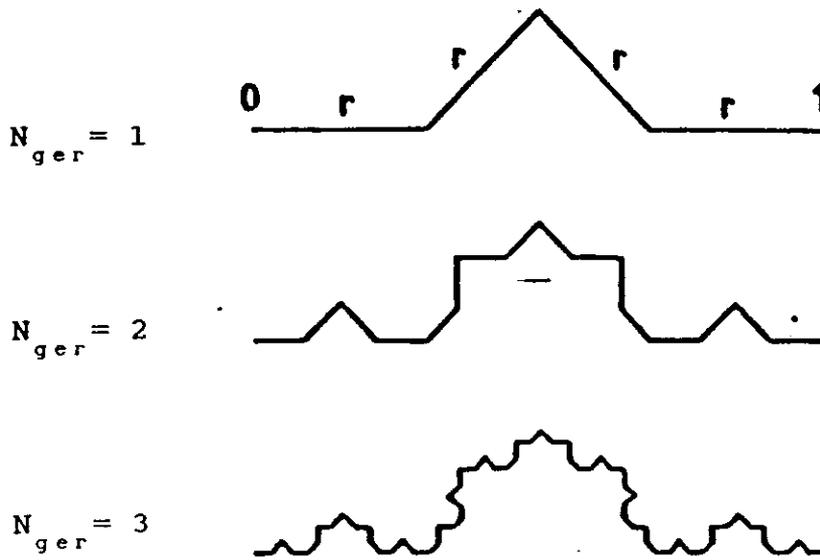
dielétrico de um meio, por campos elétricos extremamente fortes, levando à aparição de uma região altamente condutora e fractal neste meio dielétrico (DBM) [26], entre outros.

Existem diversas grandezas associadas a um mesmo sistema fractal que nos fornecem informações valiosas sobre ele. Como exemplo, temos entre outras: a dimensão fractal geométrica do sistema, que pode ser obtida por um método de recobrimento por conjuntos abertos como anteriormente citado; a dimensão topológica do sistema, que podemos a grosso modo definir como sendo a dimensão do constituinte topológico mais básico que forma o fractal; a "superfície" do fractal; as escalas máxima e mínima entre as quais vale a descrição fractal do sistema (estas escalas são determinadas pelas propriedades físicas do sistema); as correlações internas do sistema, que muitas vezes nos dão meios experimentais de obter informações sobre o sistema, como na obtenção da dimensão de um objeto por espalhamento de luz incidente sobre o mesmo [27].

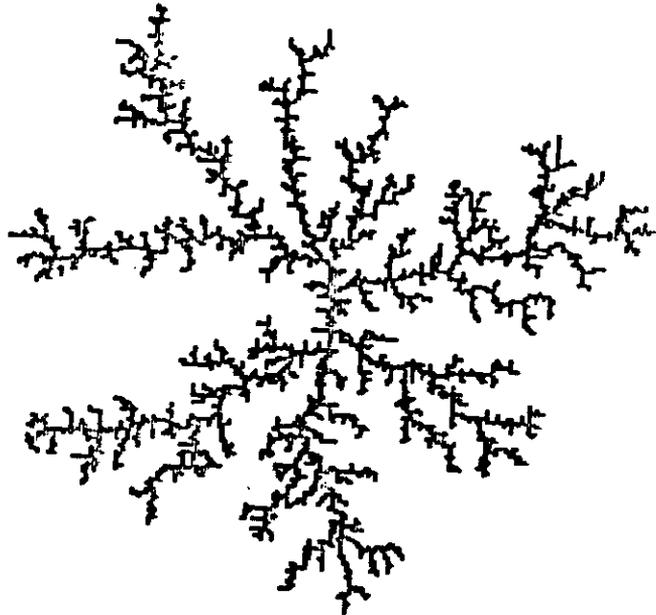
Na figura a seguir vemos alguns exemplos de fractais para os quais a invariância de escala é exata (fig. 2.1a) ou estatística (fig. 2.1b). O fractal da figura 2.1a não possui escala mínima sendo que o fractal da figura 2.1b possui como escala mínima o tamanho médio das partículas que estão se agregando.

2.1.2) Dimensão Fractal e Invariância de Escala:

Como mencionado anteriormente, uma das propriedades mais



(a) Etapas ($N_{ger} = 1, 2$ e 3) para a obtenção de uma curva de Koch.



(b) Agregado aleatório de 3600 partículas na rede quadrada.

Figura 2.1: Exemplos de fractais com invariância de escala exata (a) e estatística (b).

marcantes de um fractal é a sua invariância por transformação de escala (no caso de sistemas físicos fractais, esta invariância se restringe ao intervalo de escalas no qual o sistema se comporta como fractal). Quando o objeto apresenta invariância de escala geométrica, podemos calcular sua dimensão fractal baseando-nos apenas nesta propriedade [8,10]. Para tanto, subdividimos o sistema total em N (N finito) partes de modo que esta partição obedea as seguintes propriedades¹: cada parte seja similar ao todo por uma transformação de escala; cada parte tenha apenas o conjunto vazio como intersecção com qualquer outra parte; a união de todas as partes seja igual ao sistema todo. Os números r_i são as razões entre as escalas de cada parte i , L_i , com a escala do sistema todo, L_{tot} , $r_i \equiv L_i/L_{tot}$. Assim, a dimensão fractal do objeto, D , é dada por [10]

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1, \quad (2.3)$$

para fractais dotados de p ($1 \leq p \leq N$) diferentes escalas, também chamados de multiescalares se não houver nenhuma forma de particionar o fractal em partes idênticas.

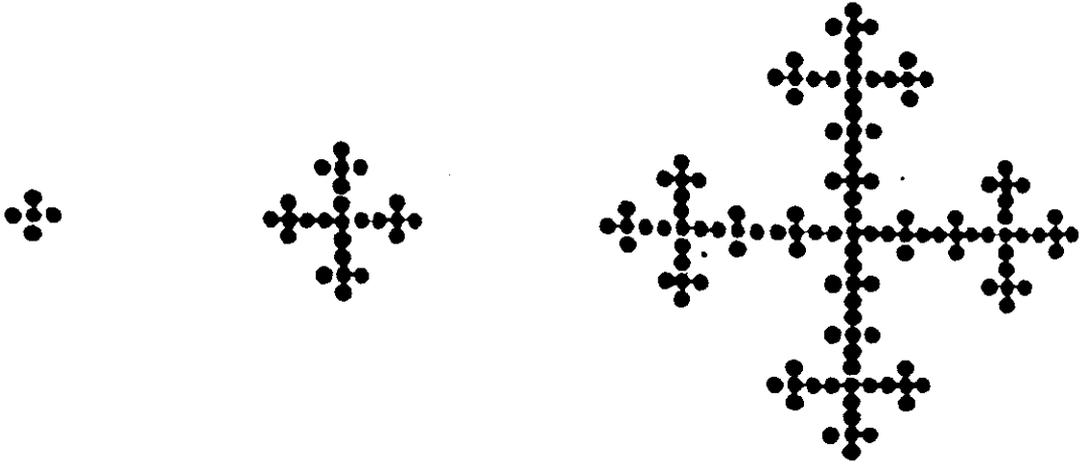
Para fractais monoescalares ($p = 1$) obtemos [10]:

$$D = \log(N)/\log(1/r), \quad (2.4)$$

pois $r_i = r$ qualquer que seja i .

Podemos ver na figura 2.2 exemplos de fractais mono e

¹ Observar que não se trata de cobrir o conjunto com objetos de qualquer tamanho que seja, apenas dividi-lo numa partição com as propriedades já mencionadas

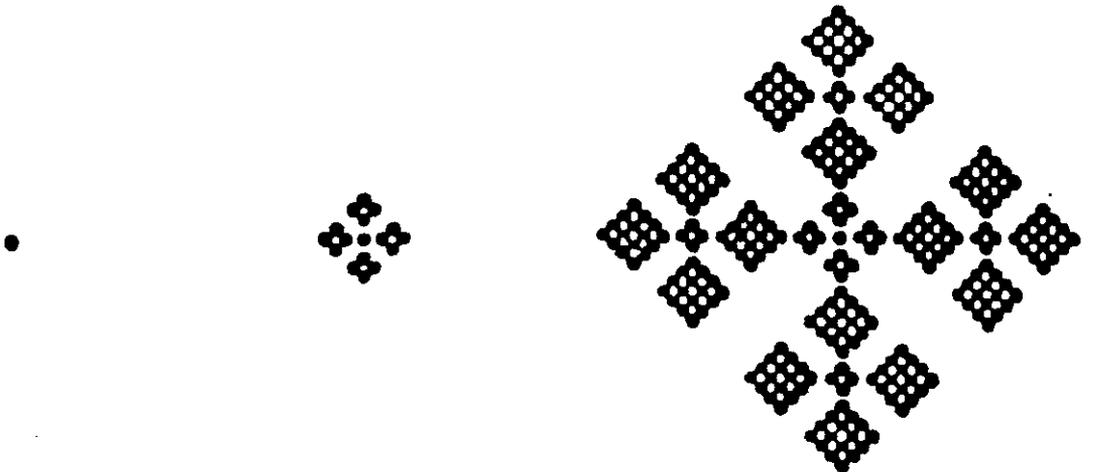


$$N_{\text{ger}} = 1$$

$$N_{\text{ger}} = 2$$

$$N_{\text{ger}} = 3$$

(a) Fractal monoescalar que pode ser dividido em 5 partes idênticas ($D = \ln 5 / \ln 3 \approx 1.465$).



$$N_{\text{ger}} = 1$$

$$N_{\text{ger}} = 2$$

$$N_{\text{ger}} = 3$$

(b) Fractal multiescalar podendo ser dividido apenas em 4 partes idênticas e uma quinta parte em escala reduzida ($D \approx 1.601$).

Figura 2.2: Exemplos de fractais dotados de uma (a) ou mais (b) escalas intrínsecas.

multiescalares [10].

2.1.3) Redes Fractais Hierárquicas:

Redes Hierárquicas são objetos gerados através de um processo recorrente, no qual uma parte de uma figura, por exemplo uma ligação, é substituída por outra mais complexa (ver fig. 2.3 a seguir) [5,28]. A rede hierárquica (RH doravante) é obtida no limite de infinitas recorrências.

A RH não possui simetria translacional, como a rede de Bravais, mas possui invariância de escala (ou simetria de contração). Ela é auto-similar [8], ou seja, cada parte é uma imagem reduzida do todo (fractal mono-escalar).

Podemos construir um ferromagneto de Ising nestas redes supondo que em cada vértice se encontra um spin e cada ligação representa um acoplamento entre estes spins. Assim podemos verificar que nas RH's do tipo Migdal-Kadanoff, a solução de Migdal-Kadanoff é exata [29]. Portanto, estes objetos podem ser bons para estudo que utilizem o Grupo de Renormalização [15].

As RH's são objetos fractais cuja "massa" (número de sítios) cresce como uma potência da dimensão linear do objeto, $M \propto R^D$, onde M é a massa, R um comprimento linear característico do objeto e D a dimensão fractal do mesmo. Podemos calcular então a dimensão fractal para a rede da figura 3.1. O número de sítios (massa) cresce como $M = (2/3)(2+4^n) \propto 4^n = (2^n)^2$, onde n é o número de hierarquias (ou recorrências), e o comprimento linear cresce como o número mínimo de ligações, R , que une os dois vértices extremos

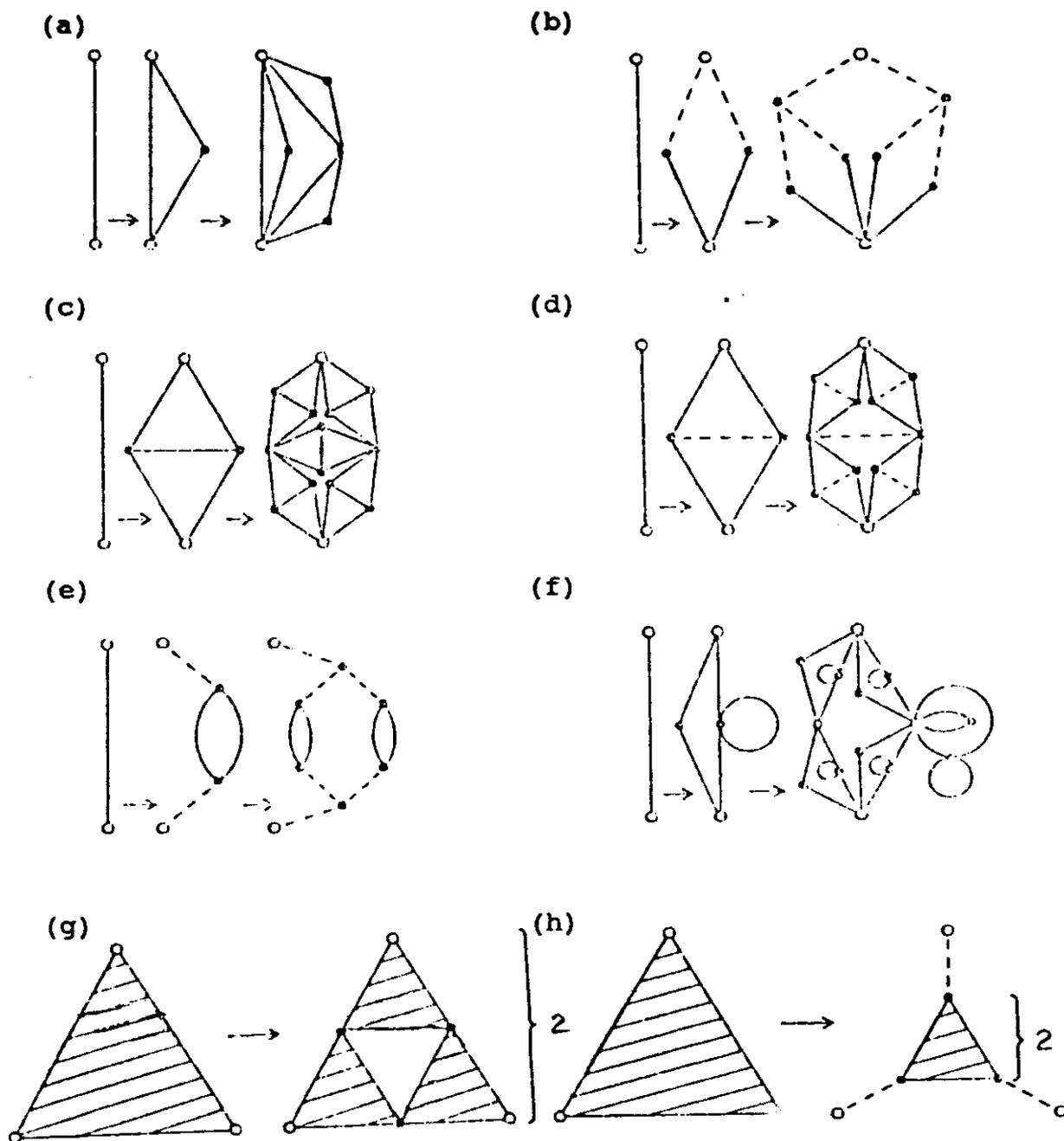


Figura 2.3: Exemplos de redes hierárquicas. As redes (a), (b), (c), (d), (e) e (f) são obtidas substituindo-se cada ligação cheia pela célula básica. Nas redes planas (g) e (h), devemos substituir as figuras planas (triângulos) pelas respectivas células básicas. Notar que, nestas últimas, as redes com número de gerações igual a 1 possuem sempre dois triângulos superpostos ligados pelos três vértices. Podemos observar que as linhas tracejadas não são substituídas por nenhuma outra, permanecendo invariantes.

rede, ou seja, $R = 2^n$. Portanto $M \propto (2^n)^2 \propto R^2$, logo $D = 2$. Como $D = 2$, a rede da figura 3.1 (também chamada rede diamante) tem dimensão fractal igual a 2.

Estas redes apresentam uma grande inomogeneidade, e por causa disto sítios vizinhos podem apresentar coordenações (n° de ligações ou primeiros vizinhos, associado a cada sítio) de diferentes ordens de grandeza.

Uma grande vantagem de trabalharmos com modelos de spin em RH é que nestas redes podemos obter resultados exatos, com muito mais facilidade que em redes usuais de Bravais, que são as redes que modelam a grande maioria dos sistemas naturais. Estes resultados podem usualmente servir como boa aproximação para modelos correspondentes nas redes de Bravais [30]. Pode-se desta maneira calcular diversas quantidades físicas interessantes, tais como: expoentes críticos, magnetizações (parâmetros de ordem em geral), grandezas associadas a modelos de crescimento [31] tais como a probabilidade de crescimento local e outras. Por outro lado, a principal desvantagem da RH é que ela não pode representar completamente nenhum sistema físico conhecido pois o n° de coordenação de muitos de seus pontos tende a infinito (apesar do n° de coordenação médio por spin tender à uma constante, por ex., na rede diamante este número é igual a três) no limite $N \rightarrow \infty$.

Tendo em conta suas vantagens e desvantagens, as redes hierárquicas são ferramentas poderosas para a resolução de problemas, através dos métodos da mecânica estatística, para modelos que em outras redes ou mesmo no continuum seriam dificilmente tratáveis. Das RH's podemos obter, com maior

facilidade, resultados qualitativos bastante razoáveis para grandezas físicas que dificilmente poderíamos calcular a partir de modelos baseados em modelos mais próximos dos sistemas encontrados na natureza, como por exemplo, as magnetizações e outros parâmetros termodinâmicos. Portanto, pode ser uma alternativa interessante estudar com atenção as propriedades geométricas e físicas de modelos complexos em redes hierárquicas.

2.2) Multifractais:

2.2.1) Introdução:

Em muitos fenômenos, a informação que uma determinada medida² nos fornece pode ser demasiado complicada para ser totalmente aproveitada. Em geral nestas medidas, estão presentes muitos processos diferentes, cada um com uma importância relativa. Por exemplo, ao medirmos a dissipação local de energia, por unidade de volume, num fluido, devido à turbulência [32], estaremos medindo, dentro de nossa precisão, regiões altamente dissipativas (turbulentas) e regiões pouco dissipativas (onde ocorre escoamento laminar). Podemos observar que estas regiões estão distribuídas de maneira extremamente irregular pelo volume do fluido.

² Uma medida μ sera aqui, simplificada, definida como uma propriedade de um conjunto S e seus respectivos subconjuntos de tal forma que se $A, B \subseteq S$, então, sendo a medida μ real, ela obedece as seguintes propriedades:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$, onde \emptyset é o conjunto vazio e $\emptyset \subset S$;
- ii) $\mu(A), \mu(B), \mu(S) \geq 0$;
- iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Dada uma medida cuja distribuição é extremamente irregular, se quisermos analisar esta medida por argumentos geométricos, vemos que muitas vezes é necessário usar o conceito de fractais (isto se deve à característica, estatística ou não, de auto-similaridade de muitas destas medidas) que nos levará ao conceito de medida fractal ou multifractal .

Como exemplo, estudaremos a medida binomial [10,33]. A medida binomial consiste em construir uma medida no intervalo $[0,1]$ por etapas, satisfazendo as seguintes condições: a distribuição inicial é uniforme; em cada etapa, partindo do "subintervalo" inicial $[0,1]$, subdividimos cada subintervalo $[a,b) \subset [0,1]$ ³ em duas partes, $[a,(a+b)/2)$ e $[(a+b)/2,b)$ onde espalhamos a medida contida em $[a,b)$, respectivamente ponderada pelos pesos m_0 e m_1 tais que $0 \leq m_0, m_1 \leq 1$ e $m_0 + m_1 = 1$.

Procedemos assim até o limite do número de etapas infinito. Suporemos que $m_0 \geq 1/2$. Na figura 2.4 fizemos $m_0 = 0.6$ e $m_1 = 0.4$.

Como podemos ver, no limite de muitas gerações, esta distribuição é extremamente irregular.

Seja um ponto no intervalo $[0,1]$ de representação binária: $(t)_2 = (0.\eta_1\eta_2\dots\eta_k)_2$ (onde $\eta_i = 0$ ou 1), ou seja, nós dividimos $[0,1]$ em 2^k intervalos de comprimento 2^{-k} e então os $(t)_2$'s dados pela expressão acima são os pontos iniciais de cada intervalo.

Esta notação fica mais transparente se observarmos que

³ $[a,b]$ deve ser tal que tenha sido obtido na etapa anterior pela subdivisão de intervalos mais antigos ou então $[a,b] \equiv [0,1]$.

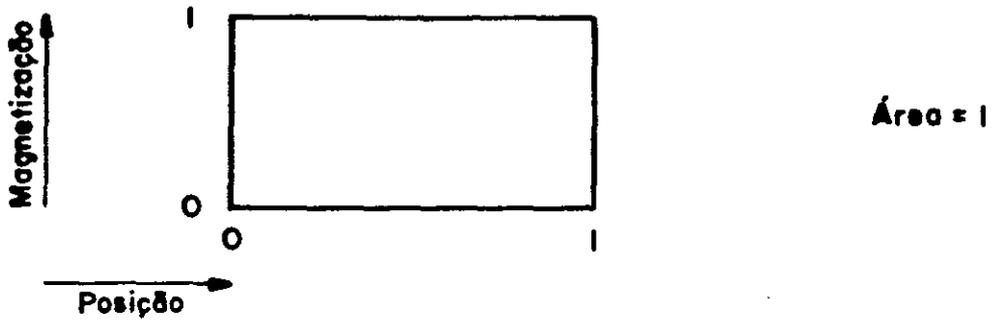
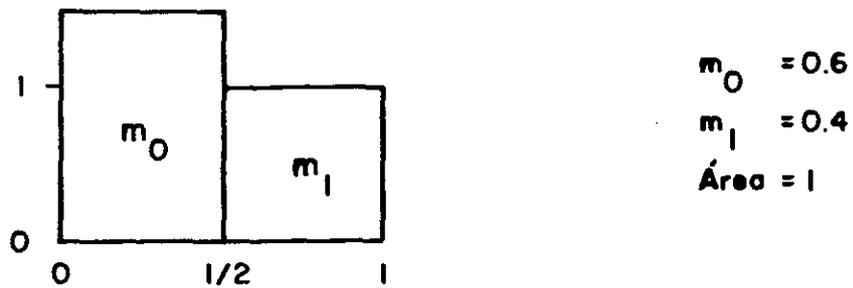
(a) $N_{ger} = 0$ (b) $N_{ger} = 1$ (c) $N_{ger} = 2$

Figura 2.4: Construção da medida binomial tal que o número de gerações (N_{ger}) vale 0 (a), 1 (b) e 2 (c). A medida é obtida no limite $N_{ger} \rightarrow \infty$.

qualquer fração pode ser representada em notação binária através do método exemplificado abaixo.

Como sabemos, $1/2 \rightarrow (0.1)_2$, $1/4 \rightarrow (0.01)_2$, $1/8 \rightarrow (0.001)_2$, etc. Então, se por exemplo, a fração p vale $37/128$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} p &= 32/128 + 4/128 + 1/128, \\ \Rightarrow p &= 1/4 + 1/32 + 1/128, \\ \Rightarrow p &= (0.01 + 0.00001 + 0.0000001)_2, \\ \Rightarrow p &= (0.0100101)_2. \end{aligned}$$

Se a fração p não possui uma potência de dois com denominador, basta utilizarmos métodos de tratamento semelhantes àqueles com que tratamos dízimas periódicas no caso decimal, para conseguirmos reduzir a fração a um somatório, possivelmente infinito, de frações cujos denominadores são potências de dois.

Calculemos a medida no intervalo $[t, t+dt]$ onde $dt = 2^{-k}$, $\mu(dt) = m_0^{k\phi_0} m_1^{k\phi_1}$ onde ϕ_0 e ϕ_1 são as proporções de zeros e uns no desenvolvimento de t e $\phi_0 + \phi_1 = 1$.

O número de intervalos dt , de medida $\mu(dt)$ igual à anterior será portanto $N = \binom{k}{k\phi_0}$ e o número total de intervalos será 2^k . Logo, a probabilidade que um dado intervalo tenha medida $\mu(dt)$ é $p(\mu(dt)) \equiv \#(\text{int. } \mu) / \#(\text{tot. de int}) \equiv \binom{k}{k\phi_0} 2^{-k}$.

Podemos observar que a medida binomial, quando repetimos o processo de duplicação um número muito grande de vezes, é extremamente irregular ao longo do intervalo $[0,1]$. Não é uma medida discreta e nem possui densidade contínua [10].

2.2.2) Representação α :

Tentaremos abordar o problema acima de uma maneira direta [33], ou seja, dividimos o intervalo em segmentos de largura $\varepsilon=2^{-k}$. Repetimos o processo para diversos valores de k de maneira que $k \rightarrow \infty$.

Para cada valor de ε , mostraremos num gráfico o logaritmo da distribuição de probabilidade da medida contra o logaritmo da própria medida. Definiremos como multifractal uma medida que tenha a seguinte propriedade : quando ambas as coordenadas acima são reduzidas pelo fator $\log \varepsilon$, a distribuição reduzida converge (geralmente de maneira lenta) para uma curva limite não trivial, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ [33].

Na figura 2.5, a variável reduzida do eixo horizontal é denominada α (também chamado expoente de Hölder) e aquela do eixo vertical corresponde ao limite denotado por $-\rho(\alpha)$. Esta figura mostra um caso típico de uma função $\rho(\alpha)$ côncava e cujo valor máximo vale 0.

Analisemos o caso da medida binomial:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{\log \mu(dt)}{\log (dt)} & \text{onde } dt &= \varepsilon = 2^{-k} & (2.5) \\ - \tilde{\rho} &= \frac{\log p(\mu(dt))}{\log (dt)} \end{aligned}$$

Portanto:

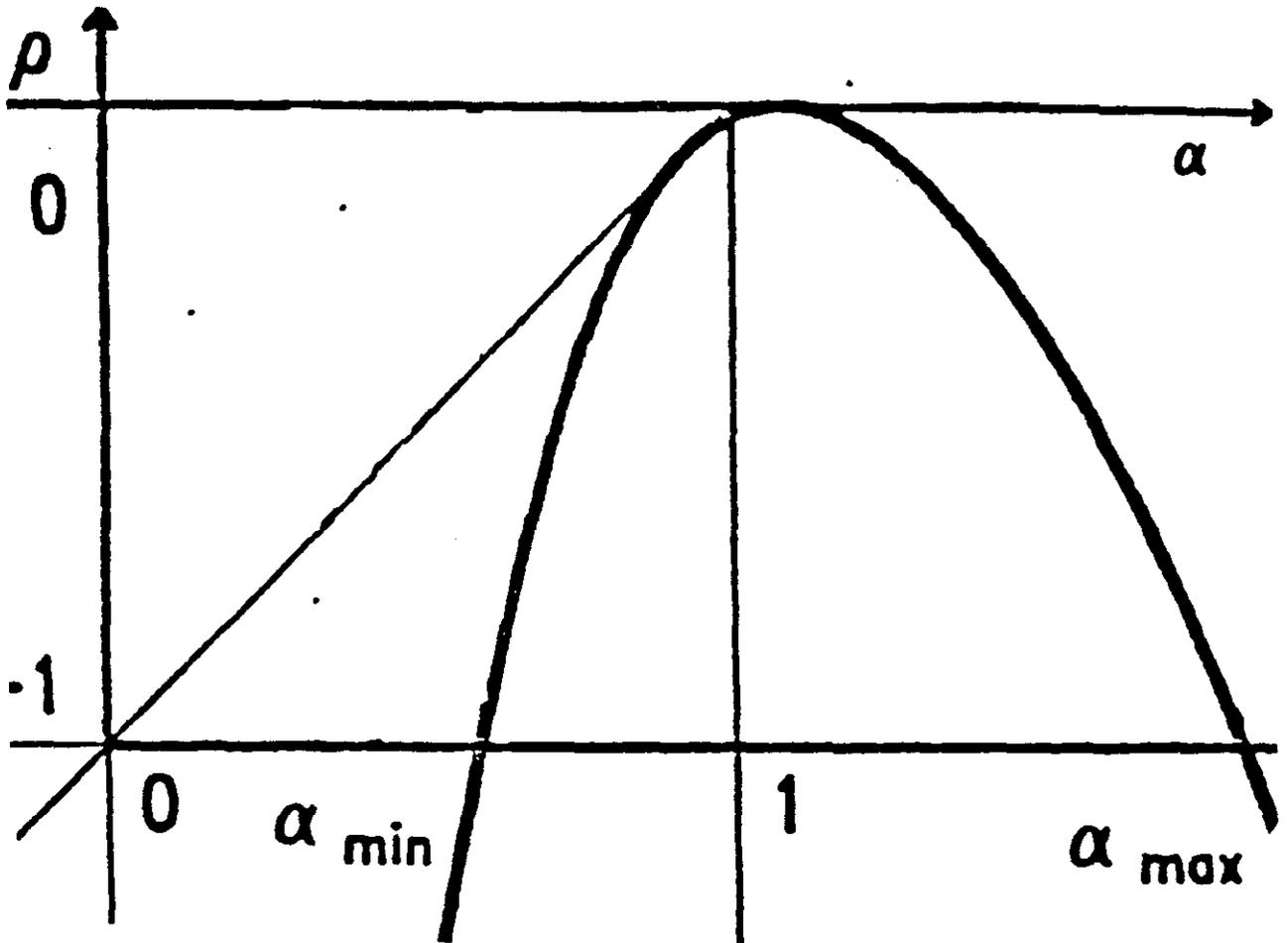


Figura 2.5: Função $\rho(\alpha)$ típica para um multifractal, apresentando concavidade, tangenciando a reta $\rho = \alpha - d_{\text{sup}}$, onde d_{sup} é a dimensão do suporte. observar que α_{\max} e α_{\min} são dados pela intersecção das curvas $\rho(\alpha)$ e $\rho = -d_{\text{sup}}$.

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\alpha} \quad \text{e} \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\rho}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\phi_0 \log_2 m_0 - \phi_1 \log_2 m_1$$

Usando a formula de Stirling $n! \cong (2\pi)^{1/2} n^n e^{-n}$,
obtemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log p(\mu(dt))}{\log(dt)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \log \binom{k}{k\phi_0} - k \log 2 \right\} \div \left\{ -k \log 2 \right\}$$

$$\cong 1 - \log \left[\frac{k^k}{(k\phi_0)^{k\phi_0} (k\phi_1)^{k\phi_1}} \right] \div [k \log 2]$$

$$- \rho \cong 1 + [\phi_0 \log_2 \phi_0 + \phi_1 \log_2 \phi_1], \text{ onde } \phi_0 + \phi_1 = 1$$

Na figura 2.6 vemos representada a função $\rho(\alpha(\phi_0)) \times \alpha(\phi_0)$ para o caso acima.

Portanto a medida binomial, em coordenadas logaritmicas, converge para um limite não trivial. Logo se trata de uma medida multifractal.

2.2.3) Generalização para o caso multinomial:

Escolhemos, neste caso, b pesos m_β ($0 \leq \beta \leq b-1$) onde

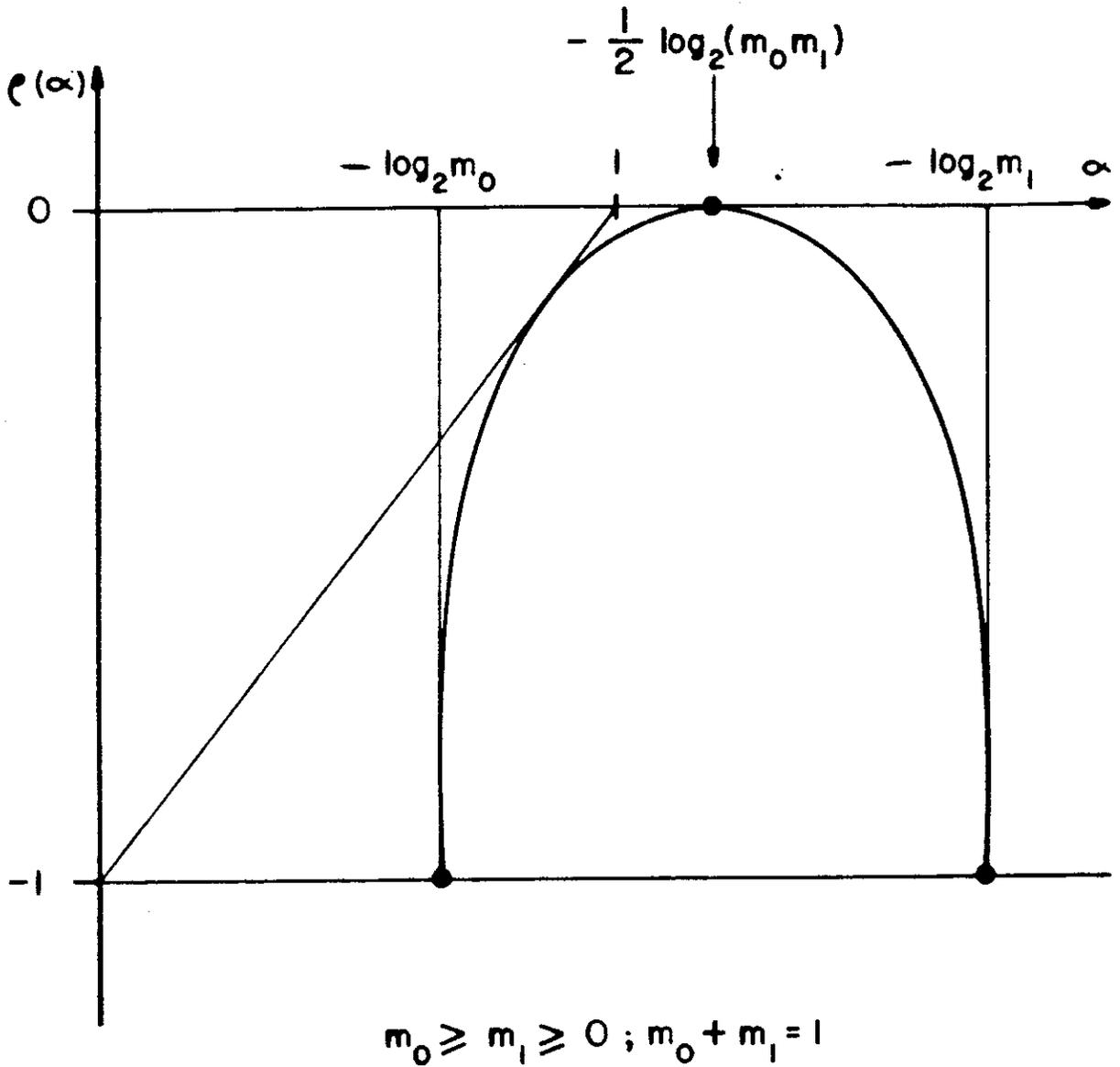


Figura 2.6: Gráfico da função $\rho(\alpha)$ para a medida binomial. Aqui $d_{\text{sup}} = 1$.

$0 \leq m_\beta \leq 1$ e $\sum_{\beta=0}^{b-1} m_\beta = 1$, que serão espalhados no intervalo $[0,1]$ segundo regra semelhante ao caso binomial (onde tínhamos $b=2$) generalizada para b intervalos diferentes. Assumiremos que a largura dos intervalos é idêntica.

Na figura 2.7, vemos uma das possíveis distribuições de medida geradas pela regra multinomial descrita acima.

2.2.4) Função $f(\alpha)$:

A função mais natural para descrever uma medida multifractal não é $\rho(\alpha)$ como poderíamos supor, mas na realidade, uma função que notaremos $f(\alpha)$ que poderá ser interpretada de maneira tal que, em cada ponto, defina a dimensão de um subconjunto do suporte da medida [34].

Esta função é definida como :

$$f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ - \frac{\log N(\mu(dt))}{\log(dt)} \right\}, \quad (2.6)$$

onde $dt = \epsilon \equiv$ (medida linear dos abertos) e $N(\mu(dt))$ é o número de subintervalos na geração k que possuem medida $\mu(dt)$.

Como

$$p(\mu(dt)) = \frac{N(\mu(dt))}{N_T(\mu(dt))} \propto \frac{\epsilon^{-f}}{\epsilon^{-d}} \propto \epsilon^{-\rho} \quad \Rightarrow \quad \epsilon^{-(f-d)} = \epsilon^{-\rho},$$

onde $N_T(\mu(dt))$ é o número total de subintervalos na geração k , então, portanto temos que

$$f(\alpha) = \rho(\alpha) + d, \quad (2.7)$$

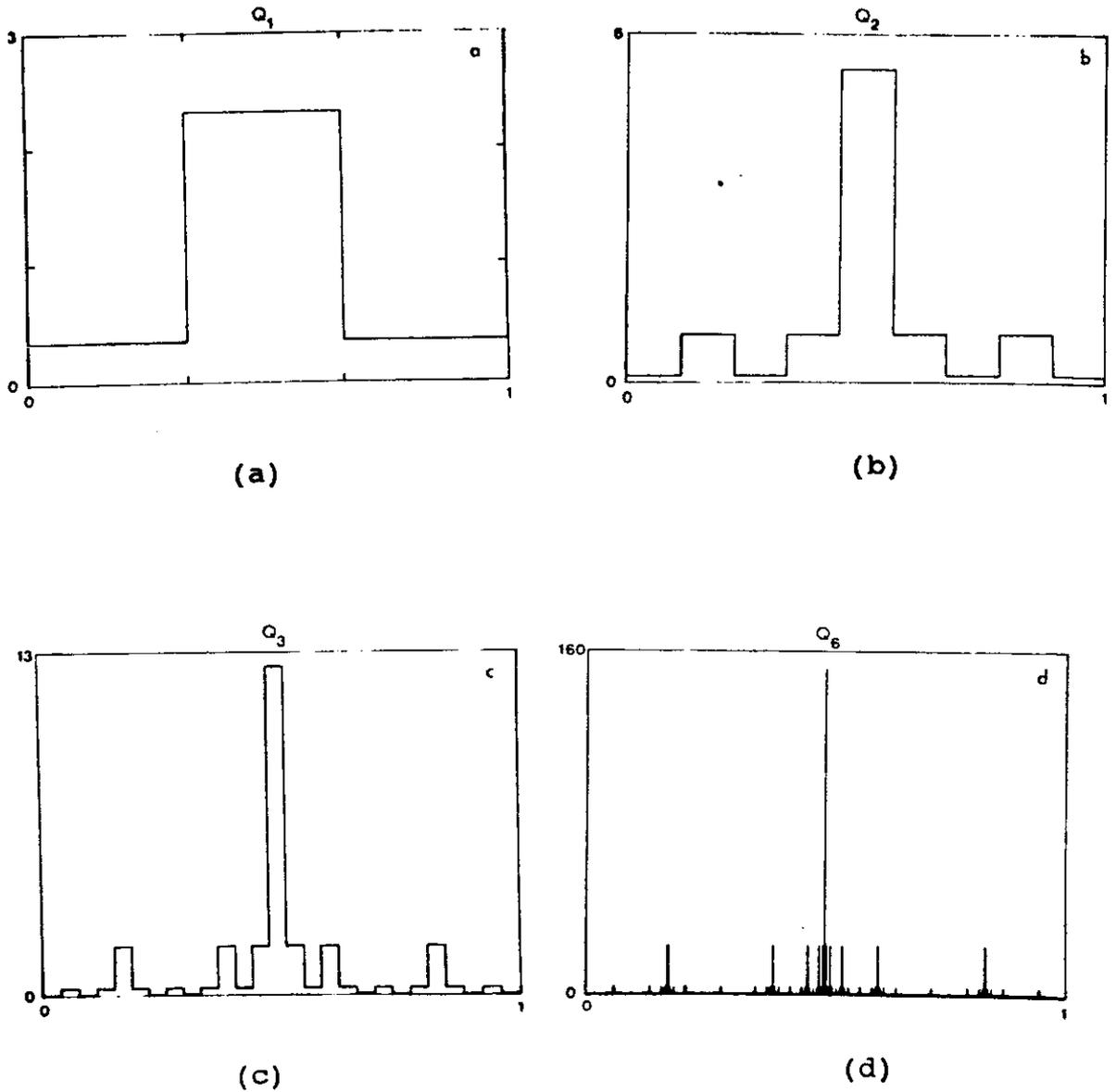


Figura 2.7: Obtenção da medida multinomial (no caso $b = 3$), onde (a), (b), (c) e (d) representam respectivamente 1, 2, 3 e 6 gerações. As abcissas representam o intervalo $[0, 1]$ e as ordenadas estão representadas em escalas convenientes.

onde d é a dimensão do suporte. Podemos escrever então, para o caso binomial:

$$\alpha = -\sum_{i=0}^1 \phi_i \cdot \log_2 m_i;$$

$$f(\alpha) = -\sum_{i=0}^1 \phi_i \cdot \log_2 \phi_i.$$

2.2.5) Representação q :

Toda a caracterização anterior foi baseada na representação α , porem, até este ponto, o significado de α , $\rho(\alpha)$ e $f(\alpha)$ ainda é um pouco obscuro.

Vejamos agora uma maneira equivalente de atacarmos o problema, na qual ficarão transparentes os significados anteriormente citados.

Seja uma medida distribuída sobre um suporte de dimensão D , embutido num espaço Euclidiano de dimensão E .

Por exemplo, no caso binomial previamente citado, $E = D = 1$.

Distribuíamos abertos E -dimensionais de lado ε sobre o suporte. Construamos a "função de partição" $\chi(q, \varepsilon)$ definida como [10, 35]:

$$\chi(q, \varepsilon) = \sum_i \mu_i^q(\varepsilon), \quad (2.8)$$

onde $q \in \mathbb{R}$, $\mu_i(\varepsilon)$ é a medida da i -ésima caixa e Σ varre todas as caixas.

Para um q fixo façamos $\varepsilon \rightarrow 0$ e observemos o comportamento de $\chi(q, \varepsilon)$. Esperamos que $\chi(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)}$, pois χ tem um comportamento singular quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Podemos reescrever χ como $\chi(q, \varepsilon) \cong \sum_1^q N(\mu_1) \cdot \mu_1^q$ onde $N(\mu_1)$ nos dá o n° de caixas com medida entre μ_1 e $\mu_1 + d\mu$, tal que $d\mu = \varepsilon^\alpha \cdot \ln(\varepsilon) \cdot d\alpha$, para $d\alpha$ fixo.

Podemos ver que no caso da distribuição binomial, o número, $N(<)$, de caixas de menor medida será pequeno pois só existirá uma caixa de medida $\mu(<) = m_1^k$ se $\varepsilon = 2^{-k}$. Logo, se $q = 1$ sua contribuição será desprezível para χ , pois, como sabemos, $\chi(1, \varepsilon) = \sum_1 \mu_1 = 1$ e $N(<) \mu(<) = m_1^k \rightarrow 0$. O de maior medida também não contribui para χ quando $q = 1$, pois: $\mu(>) = m_0^k$ e $N(>) = (\text{número de caixas de maior medida}) = 1 \rightarrow N(>) \cdot \mu(>) = m_0^k \rightarrow 0$. Portanto, deve haver um conjunto intermediário caracterizado por um $\alpha_{q=1}$ (ou seja, uma distribuição ϕ_0, ϕ_1 que gera $\alpha_{q=1}$) tal que este conjunto dê uma contribuição mais importante para $\chi(1, \varepsilon)$ do que qualquer outro conjunto caracterizado por um outro expoente α . Ou seja, generalizando, dado um q , estamos selecionando um subconjunto do suporte tal que este dê a maior contribuição para $\chi(q, \varepsilon)$.

Vejamos isto mais precisamente no caso multinomial [33]. Aqui, cada ponto do intervalo $[0, 1]$ é representado na base b-nária, ou seja :

$$(t)_b = (0.\eta_1\eta_2\dots\eta_k)_b \quad \text{onde } 0 \leq \eta_i \leq b-1 \text{ com } \eta_i \in \mathbb{N}$$

Logo cada intervalo dt terá medida :

$$\mu(dt) = m_0^{k\phi_0} m_1^{k\phi_1} \dots m_{b-1}^{k\phi_{b-1}} \quad (dt = \varepsilon = b^{-k})$$

onde os ϕ_j são as frequências relativas de j 's no desenvolvimento b-nário de t^4 .

⁴Se $b = 3$, os números (0.001122) e (0.000111) na base 3, tem por frequências $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ os valores $\{1/3, 1/3, 1/3\}$ e $\{1/2, 1/2, 0\}$ respectivamente, onde $\phi_i \equiv \#(\text{algarismos } i \text{ no desenvolvimento da fracção})/\#(\text{total de algarismos no$

Seja então, um conjunto de frequências $\{\phi_i\}$. Logo temos (como no caso $b = 2$)

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu}{\log (dt)} = - \sum_{i=0}^{b-1} \phi_i \log_b m_i;$$

e da mesma forma:

$$f(\alpha) = \max \left\{ - \sum_{i=0}^{b-1} \phi_i \log_b \phi_i \right\}.$$

Podemos ver que ao selecionarmos um certo q , estamos escolhendo um subconjunto $U(q)$ do suporte que nos dará a contribuição principal para $\chi(q, \varepsilon)$. Este conjunto é determinado [ver apêndice E] pelas frequências

$$\phi_i = m_i^q / \left\{ \sum_j m_j^q \right\} \quad (2.9)$$

e possui uma distribuição com um pico muito acentuado neste conjunto de frequências.

Observando que o número de caixas de frequências $\{\phi_i\}$, N , cresce exponencialmente com k , pois $N \propto \varepsilon^{-f(\alpha)}$ onde $f(\alpha) = - \sum_i [\phi_i \cdot \log_b(\phi_i)]$ e $\varepsilon \propto b^{-k} \Rightarrow N \propto A^k$ onde $A = b^{f(\alpha)}$. Portanto, $N \propto \varepsilon^{-\gamma}$ onde γ é uma constante. Mas pela definição de dimensão fractal (de capacidade) de um conjunto [22,35],

$$d_F = d_c = \log N / \log (1/\varepsilon) = -\gamma$$

Portanto, no caso onde selecionamos o conjunto responsável pela maior contribuição em $\chi(q, \varepsilon)$, $N \propto \varepsilon^{-f_q}$ onde f_q é a dimensão do conjunto de caixas com frequências $\{\phi_i\}$ para ε pequeno [34].

Da mesma forma, a medida $\mu(dt)$ (para uma dada distribuição $\{\phi_i\}$) varia exponencialmente:

$$\mu_{\{\phi_i\}}(dt) = \prod_i m_i^k \phi_i = \left[\prod_i m_i^{\phi_i} \right]^k$$

desenvolvimento da fracção).

$$\mu_{(\phi)}(dt) = \varepsilon^{\alpha q} \quad \text{onde } \alpha_q = -\log_b \left(\prod_i m_i^{\phi_i} \right)$$

Portanto podemos supor (o que será provado mais adiante) :

$$\chi(q, \varepsilon) \cong \varepsilon^{-\frac{f}{q}} (\varepsilon^{\alpha_q})^q = \varepsilon^{\frac{(\alpha_q q - f)}{q}}$$

As propriedades $N \propto \varepsilon^{-\frac{f}{q}}$ e $\mu \propto \varepsilon^{\alpha_q}$ para o subconjunto do suporte que dá a contribuição mais importante para $\chi(q, \varepsilon)$, (obtidas como no exemplo da medida multinomial) são aquelas que definem uma medida multifractal sobre um suporte.

A partir daí, podemos comparar o resultado acima (representação q) com os resultados da representação α e mostrar a sua conexão [10]. Por definição:

$$\chi(q, \varepsilon) = \sum_i \mu_i^q = \sum_j N_j \mu(\alpha)^q \quad (2.10)$$

$$\text{onde } \begin{cases} j \equiv \text{conj. de todas as medidas entre } \alpha \text{ e } \alpha + d\alpha; \\ N_j \equiv n^\circ \text{ de caixas contidas no conjunto } j; \\ \mu(\alpha) \equiv \text{medida das caixas pertencentes à } j. \end{cases}$$

$$N_j \propto d\alpha \quad \Rightarrow \quad N_j = N(\alpha) d\alpha.$$

onde $N(\alpha)$ é a densidade de caixas no intervalo $d\alpha$, logo

$$\begin{aligned} N(\alpha) &\propto \varepsilon^{-f(\alpha)}, \\ \Rightarrow \quad \chi(q, \varepsilon) &\cong \sum_j N(\alpha) \mu^q(\alpha) d\alpha \cong \int N(\alpha) \mu^q(\alpha) d\alpha; \\ \chi(q, \varepsilon) &\cong \int \varepsilon^{-f} \varepsilon^{q\alpha} d\alpha \cong \int \varepsilon^{-f+q\alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como $\varepsilon \Rightarrow 0$, a integral será dominada pelo termo que minimiza $g(\alpha, q) = q\alpha - f(\alpha)$ para q fixo [36]:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{dg}{d\alpha} &= 0 \quad \Rightarrow \quad q - \frac{df}{d\alpha} = 0, \\ &\Rightarrow \quad \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha_q} = q. \end{aligned}$$

Logo $\chi(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{-f+q\alpha}$ onde $f = f(\alpha_q)$ e α_q é tal que minimiza, na integral de ponto de sela, a quantidade:

$$\tau(q) = q\alpha - f(\alpha). \quad (2.12)$$

Seja f' (ou τ') a derivada de $f(\alpha)$ (de $\tau(q)$), então:

$$\chi(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{+\tau(q)} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \tau(q) = q\alpha - f(\alpha) \\ f'(\alpha) = q \end{cases}$$

Isto nos define uma transformada de Legendre [37] pois:

$$\tau'(q) = \frac{d}{dq} (q\alpha - f) = \alpha + \frac{d\alpha}{dq} \cdot \left(q - f'(\alpha) \right) = \alpha.$$

Portanto, temos:

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \quad \text{e} \quad \begin{cases} f'(\alpha) = q, \\ \tau'(q) = \alpha. \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2.6) Algumas Propriedades:

Descreveremos a seguir algumas propriedades importantes de uma função multifractal $f(\alpha)$.

-Prop.1: A tangente em cada ponto de $f(\alpha)$ corresponde ao valor de q para o qual o subconjunto dominante do suporte para a função de partição $\chi(q, \varepsilon)$ possui medida que se escala como ε^α e cuja dimensão é $f(\alpha)$ [10]. Cada ponto de $f(\alpha)$, portanto, define um subconjunto do suporte de dimensão $f(\alpha)$.

-Prop.2: O valor máximo de $f(\alpha)$ é determinado pela dimensão do suporte, pois se calcularmos a dimensão fractal do conjunto, cobrindo-o com caixas de raio ε , estaremos cobrindo diversos subconjuntos, cada um com uma dimensão característica :

$$N_{\text{caixas}} \propto \lambda_1 \varepsilon^{-f(\alpha_1)} + \lambda_2 \varepsilon^{-f(\alpha_2)} \dots$$

$$\text{onde } f(\alpha_1) = f_{\max} \quad \text{e} \quad f(\alpha_i) < f_{\max} \quad \text{se } i=2, 3, \dots$$

Como $N_{\text{caixas}} \propto \varepsilon^{-D}$ onde D é a dimensão do suporte:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-D} &\propto \lambda_1 \varepsilon^{-f(\alpha_1)} + \lambda_2 \varepsilon^{-f(\alpha_2)} \dots \\ \varepsilon^{-D+f_{\max}} &\propto \lambda_1 + \lambda_2 \varepsilon^{f_{\max}-f(\alpha_2)} + \dots\end{aligned}$$

$$\text{Como } f_{\max} - f(\alpha_1) > 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{f_{\max}-f(\alpha_1)} = 0.$$

$$\text{Logo, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-D+f_{\max}} \propto \lambda_1 \text{ onde } \lambda_1 \text{ é uma constante} \Rightarrow$$

$$-D + f_{\max} = 0 \Rightarrow f_{\max} = D.$$

Este resultado pode ser visto de outra forma, pois no ponto de máximo $f'(\alpha) = 0$, então $\chi(0, \varepsilon) = \sum_i \mu_i^0 \equiv n^\circ$ de caixas com tamanho ε necessárias para cobrir o suporte. Assim, $\chi(0, \varepsilon) \propto \varepsilon^{-D} \Rightarrow -D = \alpha \cdot 0 - f_{\max}(\alpha) \Rightarrow f_{\max} = D$, onde D é a dimensão do suporte.

-Prop.3: Podemos ver que no caso $q=1$, $\chi(1, \varepsilon) = 1 \Rightarrow \tau(1) = 0$. Então temos que:

$$-\alpha + f(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha.$$

Portanto, a reta $y = \alpha$ tangencia $f(\alpha)$.

-Prop.4: Podemos ainda observar que para multifractais estocásticos (sistemas físicos gerados por processos estocásticos, como por exemplo, a agregação limitada por difusão), é possível que existam regiões no eixo α tais que $f(\alpha) < 0$ [ver apêndice D]. Para multifractais deterministas, em geral obtemos $f'(\alpha_{\max, \min}) = \pm \infty$. Isto nos leva a concluir que para $\alpha < \alpha_{\min}$ ($\alpha > \alpha_{\max}$), $f(\alpha)$ não existe.

Na figura 2.8, observamos diversas propriedades de $f(\alpha)$ descritas acima.

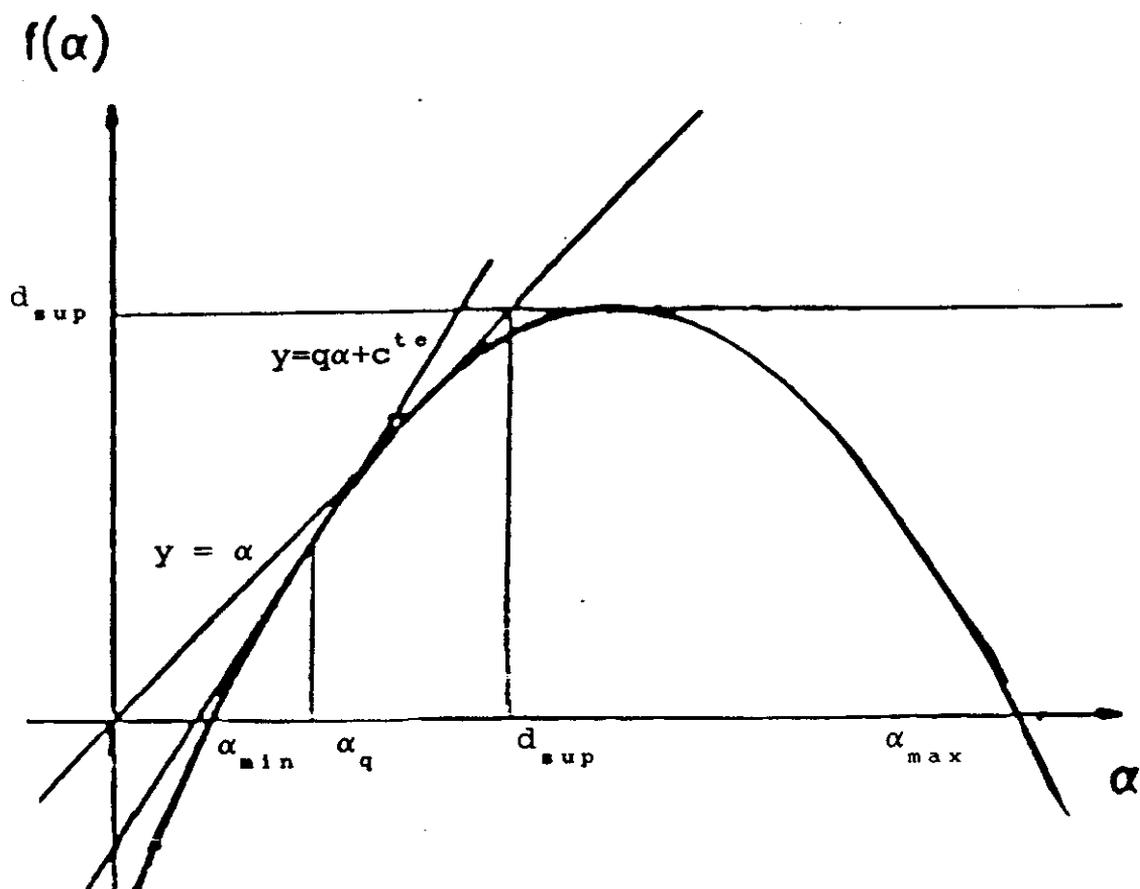


Figura 2.8: Função $f(\alpha)$ típica para um multifractal na qual vê-se: $\max(f(\alpha)) = d_{sup}$; a reta $y = \alpha$ tangencia $f(\alpha)$; os limites α_{max} e α_{min} , que são dados pela interseção de $y = 0$ e $f(\alpha)$; um ponto do eixo α , denominado α_q , para o qual $f'(\alpha_q) = q$ onde q seleciona um conjunto de elementos, do objeto multifractal, com dimensão $f(\alpha_q)$ [ver seção 2.2.5].

CAPÍTULO 3

MAGNETIZAÇÃO MULTIFRACTAL EM REDES HIERÁRQUICAS

Este capítulo trata do problema de como se comporta, local e geometricamente, um modelo magnético de spin, no caso o modelo de Ising, sobre uma estrutura altamente não uniforme e fractal, uma rede hierárquica, mais especificamente a rede diamante. Obtemos exatamente diversas grandezas físicas do modelo, como a magnetização e alguns expoentes críticos.

3.1) Introdução:

O estudo de modelos de spin em redes hierárquicas tornou-se relevante como um método de grupo de renormalização (GR doravante) no espaço real depois que foi estabelecido que as equações do GR de Migdal-Kadanoff [29] são exatas em várias redes hierárquicas do tipo Migdal-Kadanoff (em especial na rede diamante) que apresentam transição de fase não trivial e nos permitem calcular diversas grandezas termodinâmicas exatamente [38,39]. Foi provado que o limite termodinâmico da energia livre de Gibbs do modelo de Ising nesta rede específica é bem definido [3,5] e foi obtido o resultado exato para a magnetização espontânea [3] e foi demonstrado que, para a rede hierárquica diamante, a susceptibilidade magnética a campo nulo

diverge para temperaturas maiores que a temperatura crítica, T_c , e é finita para temperaturas menores que T_c [3,40,41].

O objetivo deste capítulo é mostrar e estudar as características termodinâmicas e geométricas, locais e globais que correspondem à magnetização do modelo de Ising nas redes hierárquicas, em especial, na rede diamante (doravante RD). Nós veremos que a magnetização local da RD possui um comportamento multifractal. Este estudo será baseado num novo método de cálculo da magnetização em redes hierárquicas, dado por uma lei de recorrência que relaciona a magnetização, de um sítio, com magnetizações de sítios (média do spin do sítio) de hierarquias (também chamadas de gerações) anteriores. Este método nos fornece resultados exatos para as magnetizações local e total por spin e para vários expoentes críticos [11].

Tanto quanto sabemos, modelos de spin com comportamento multifractal intrínseco não existiam na literatura até recente publicação [11]. Era conhecido que apresentavam comportamento multifractal, para a magnetização local, algumas cadeias lineares, discretas ou contínuas, de spin, num campo externo binário ($\pm H$) e aleatório. Nós esperamos que características fractais e multifractais apareçam em grandezas termodinâmicas e propriedades críticas em sistemas de spin em redes hierárquicas. Por exemplo, os zeros da função de partição para o modelo de Ising na RD possuem estrutura fractal [42].

3.2) Modelo e Definições:

Nosso modelo será definido de forma que sobre cada sítio de uma RH (em especial a RD) existam spins, que interagem com seus vizinhos mais próximos (aos quais estão diretamente conectados) através de um acoplamento ferromagnético de Ising, ou seja, o Hamiltoniano total H_N , da rede com N hierarquias, é dado por

$$H_N = -J_N \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j,$$

onde J_N é o acoplamento de troca entre spins vizinhos, $\langle ij \rangle$ significa soma entre primeiros vizinhos nesta hierarquia e $\sigma_i = \pm 1$ onde i percorre todos os spins da rede. Portanto obtemos

$$-\beta H_N = K_N \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad (3.1)$$

onde $K_N = -\beta J_N$. A exponencial de $-\beta H_N$ nos fornece o valor do peso de Boltzmann (probabilidade não normalizada) para uma dada configuração de spins da rede com N hierarquias.

Como vimos anteriormente (ver capítulo 2), a construção da rede hierárquica com N hierarquias é obtida por um processo recorrente através da substituição de cada ligação da rede com N-1 hierarquias pela célula básica (ou sub-unidade [5]) da rede.

Tomando-se como ponto de partida a hierarquia zero, constituída pela ligação primordial, através do processo acima descrito podemos obter a rede com quantas hierarquias forem

necessárias. A rede hierárquica é obtida no limite infinito de substituições.

Na figura 3.1, exemplificamos o processo de construção da RD (figs. 3.1a e 3.1b) até 3 hierarquias. Na rede com $N = 3$ (fig. 3.1b), mostramos um caminho mais curto entre os terminais (sítios da hierarquia zero) A e B, caminho este visto em detalhe na figura 3.1c. Como veremos, a multifractalidade na rede hierárquica é uma propriedade intrínseca relacionada tanto à topologia da rede, quanto ao modelo de Ising em si. Podemos encontrar diversas medidas multifractais associadas a uma rede hierárquica se definimos estas medidas convenientemente.

Em qualquer tipo de rede (hierárquica, Bravais ou outra qualquer) todas as grandezas termodinâmicas devem ser coerentes com o limite $N \rightarrow \infty$, ou seja, a energia livre por spin deve ter um limite bem definido, assim como a entropia, a energia interna e a magnetização por spin. Contudo, no caso da magnetização, podemos verificar facilmente que, para todo spin da rede, a magnetização local é nula se utilizamos o Hamiltoniano acima sem impormos um campo externo. A razão é dada pela simetria de inversão do Hamiltoniano quando fazemos a transformação $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ [43]. Portanto, se a média de cada spin vale

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum \sigma_i \exp\{-\beta H_N\}}{\sum \exp\{-\beta H_N\}}, \quad (3.2)$$

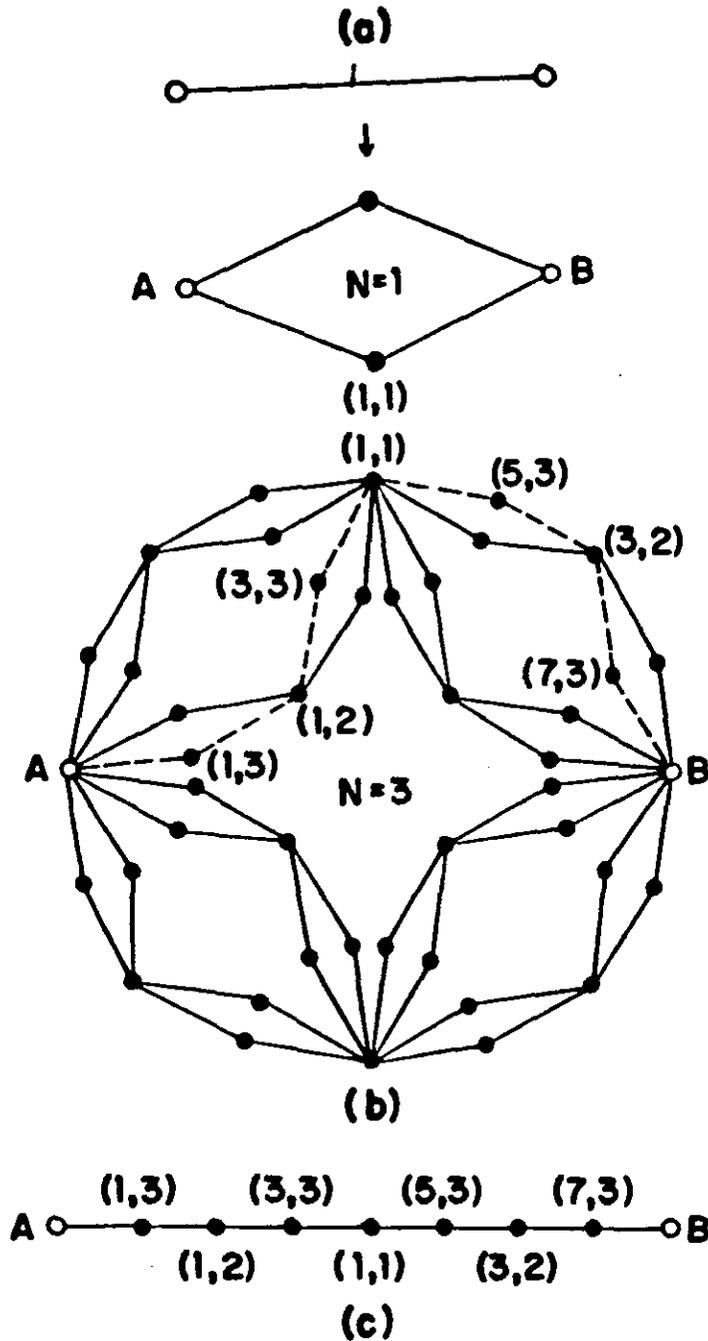


Figura 3.1: Rede hierárquica diamante (RD): em (a) uma ligação é substituída pela célula básica; em (b) vemos a Rd com 3 gerações; os círculos abertos A e B são as raízes; em (b) a linha tracejada representa um dos caminhos mais curtos (também chamado de perfil) ligando as raízes; em (c) vemos com detalhe a sequência de sítios (s,l) que formam um perfil da RD com 3 hierarquias.

onde os somatórios significam soma sobre todas as configurações de spin da rede. Fazendo a transformação de inversão de spin, obtemos que $\langle \sigma_i \rangle = 0$ pois H_N depende apenas da configuração relativa de todos os spins e assim, para cada configuração de spin $\sigma_i = +1$, existe uma configuração simétrica por inversão de mesmo peso estatístico tal que $\sigma_i = -1$. Portanto, a contribuição para a magnetização de σ_i dada por uma configuração é anulada por sua simétrica. Logo $\langle \sigma_i \rangle = 0$. Devemos então quebrar esta simetria por algum meio. Podemos fixar um campo magnético externo ou então fixar spins da rede. Este último método foi utilizado em nossos calculos [11], fixando os spins mais externos da rede (por definição, são aqueles gerados na hierarquia zero) de maneira que estes mantivessem a orientação positiva (+1) qualquer que fosse o estado de seus vizinhos. Este artifício nos permite quebrar a simetria do sistema e obter a magnetização correta para o sistema em qualquer temperatura.

Quando analisamos a estrutura local da magnetização do modelo de Ising ou outros modelos, como por exemplo o modelo de Potts, na rede hierárquica, devemos levar em conta as simetrias intrínsecas da rede em questão. No caso da RD, podemos observar que todos os diferentes tipos de sítio estão representados por seus simétricos que se encontram num dos caminhos mais curtos (ou menor distância química), na rede com N hierarquias, que ligam os sítios mais externos, chamados raízes ou terminais (que são aqueles sítios que pertencem a hierarquia zero) [11, 40, 44]. Então podemos dividir os sítios da rede hierárquica em classes de equivalência de acordo com sua

simetria [5]. Lógicamente, todos os caminhos mais curtos entre os terminais são equivalentes entre si. Podemos criar então uma nomenclatura para descrever a posição de uma classe de equivalência de sítios, relativa a um caminho mais curto entre os terminais. Nós identificaremos os sítios destas classes por um par de índices (s,l) onde l é o nível (ou hierarquia) tal que $l=1,2,\dots,N$, e s é a posição, $s=1,3,5,\dots,2^l-1$, do sítio dentro do l -ésimo nível com respeito à um dos terminais tomado como referência. Se $l=N$, então s é a distância química do sítio considerado (s,N) até o terminal de referência que designaremos como raiz A. Logo, a magnetização de cada sítio de uma classe de equivalência será designada pelo valor comum $m_{s,l}$. Se $l < N$, então s é a distância química do sítio considerado em relação ao terminal de referência A, na rede com l hierarquias (ver figura 3.1c) [11]. Se $l=0$, estamos representando as raízes A e B. Logo, para A temos $(s=0,l=0)$ e para B $(s=1,l=1)$.

3.3) Leis de Recorrência:

Nosso método se baseia na possibilidade de obter a magnetização de um sítio (s,l) em função da magnetização dos sítios $(s',l-1)$ e (s'',j) onde: $j=0,1,2,\dots,l-2$, $s'=(s+1)/2$ e $s''=(s-1)/2^{l-j}$. Esta relação é analítica e da forma [11]

$$m_{s,l} = A_N (m_{s',l-1} + m_{s'',j}) \quad (3.3)$$

onde A_N é função do número de hierarquias N .

Para obter a relação (3.3), devemos tomar a RD e fixar, como vimos, um ou mais spins para quebrarmos a simetria de inversão de spin do Hamiltoniano e por conseguinte obter uma

magnetização não nula para a rede. Em nosso trabalho, fixaremos os spins dos dois terminais em $\sigma=+1$. Esta condição de contorno é suficiente mas não é necessária. Poderíamos fixar apenas um dos terminais e neste caso o resultado relativo à magnetização média por spin seria o mesmo. Porém, para obtermos uma magnetização local que possua as simetrias da rede, devemos impor as mesmas condições para os dois terminais. Como veremos, a alta não-homogeneidade da magnetização local da rede independe das condições de contorno impostas ao sistema, sendo devida apenas às características de não-homogeneidade da rede hierárquica.

Tendo sido escolhidas as condições de contorno para o problema (no nosso caso as condições simétricas para os terminais, $\sigma_A = \sigma_B = 1$), devemos achar a relação de recorrência (3.3) entre as magnetizações de diferentes níveis. Para tanto, devemos isolar dentro da rede hierárquica com N níveis, no caso a RD, uma célula básica de tal maneira que dois dos spins (chama-los-emos spins μ) isolam os dois spins restantes (estes outros spins serão ditos spins σ , ver figura 3.2) do resto da rede. Separaremos no Hamiltoniano do sistema as partes dependentes dos spins σ , μ e os restantes (que chamaremos spins γ) obtendo

$$-\beta H = K(\sigma_1 + \sigma_2)(\mu_1 + \mu_2) + K \sum_{\langle i, j \rangle} \mu_i \gamma_j + K \sum_{\langle i, j \rangle} \gamma_i \gamma_j. \quad (3.4)$$

Através da relação:

$$\exp\{A\sigma\} = \cosh(A) \left[1 + \sigma \cdot \operatorname{tgh}(A) \right],$$

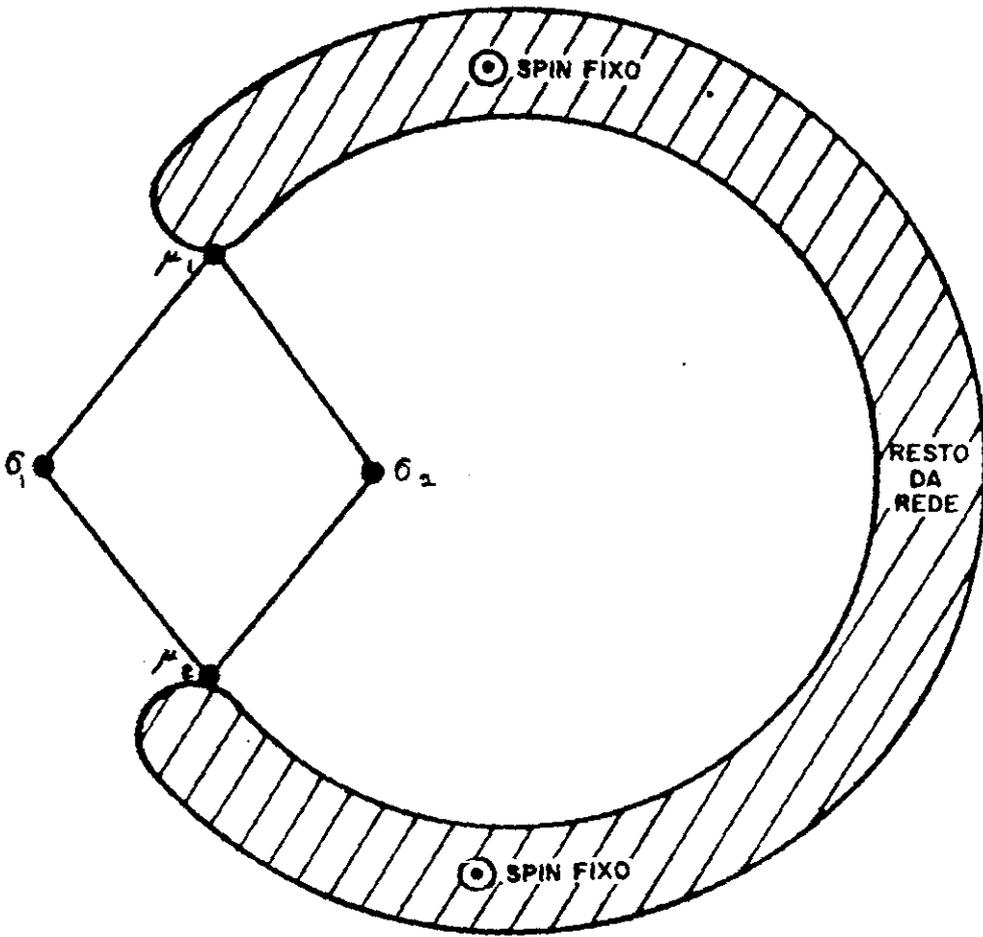


Figura 3.2: Representamos acima a célula básica escolhida a a a qual deduzimos a relação de recorrência (3.10). Podemos observar que os spins σ_1 e σ_2 estão conectados com o resto da rede através de sua interação com os spins μ_1 e μ_2 .

onde $\sigma = \pm 1$, podemos transformar a exponencial de $-\beta H$, obtendo o peso de Boltzmann para uma configuração de spin como um polinômio multilinear em σ_i , μ_i e γ_i cujo grau dependerá do número de spins da rede com N hierarquias em questão. Os coeficientes deste polinômio são polinômios em $\cosh(A)$ e $\tanh(A)$. Para calcularmos as leis de recorrência que procuramos, devemos tomar o traço parcial sobre todos os spins γ_i da rede (ver figura 3.2) lembrando que dois destes spins estão fixos em $+1$ [11]. Logo, qualquer que seja a localização da célula básica na rede, o peso de Boltzmann reduzido relativo à configuração de spins σ e μ deverá ter a forma abaixo

$$\text{Tr}_{\{\gamma\}} \exp\{-\beta H\} = \exp\left\{K(\sigma_1 + \sigma_2)(\mu_1 + \mu_2)\right\} \cdot \left[A + B \cdot \mu_1 + C \cdot \mu_2 + D \cdot \mu_1 \mu_2\right] \quad (3.5)$$

onde A , B , C e D são polinômios em $\cosh(K)$ e $\tanh(K)$.

Podemos substituir o polinômio $(A + B \cdot \mu_1 + C \cdot \mu_2 + D \cdot \mu_1 \mu_2)$ no traço acima por uma forma equivalente. Para obtermos esta forma, basta observarmos que o resto da rede funciona tanto como uma fonte de "campo externo" sobre os spins μ quanto como um meio de propagação de uma "interação" efetiva entre estes spins. Daí obtermos três constantes, dois campos h_1 e h_2 e um acoplamento equivalente K' . Para A , B , C e D fixos, necessitamos de apenas mais uma constante para que junto das três citadas obtenhamos um Hamiltoniano equivalente que nos dê o mesmo resultado que $\text{Tr}_{\{\gamma\}} \exp(-\beta H)$. Esta quarta constante é obtida da normalização, à unidade, do traço total. Isto não é em geral necessário, somente o fizemos por simplificação.

Podemos então escrever que se

$$p(\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2) = \text{Tr}_{\{\gamma\}} \exp\{-\beta H\},$$

onde $p(\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2)$ é a distribuição de probabilidades para a configuração $\{\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2\}$, então, da mesma forma

$$\bar{p}(\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2) = \exp\left\{K(\sigma_1 + \sigma_2)(\mu_1 + \mu_2) + \tilde{A} + h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2 + K' \mu_1 \mu_2\right\}. \quad (3.6)$$

As constantes \tilde{A} , h_1 , h_2 e K' são tais que $p(\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2) = \bar{p}(\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2)$. Portanto, o Hamiltoniano equivalente

$$-\beta H' = K(\sigma_1 + \sigma_2)(\mu_1 + \mu_2) + \tilde{A} + h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2 + K' \mu_1 \mu_2,$$

representa para a célula básica escolhida, o efeito do resto da rede, que está contido nas constantes não conhecidas \tilde{A} , h_1 , h_2 e K' .

A partir deste resultado, podemos calcular as médias dos spins σ e μ , $\langle \sigma_i \rangle$ e $\langle \mu_i \rangle$, como função de K (que é um dado externo do problema) e de K' , h_1 e h_2 (que são desconhecidos). A constante \tilde{A} pode ser eliminada devido à normalização. Utilizando a transformação idêntica já citada obtemos ($\alpha \equiv e^{\tilde{A}}$):

$$\exp\{-\beta H'\} = \alpha \cdot \exp\left\{K(\sigma_1 + \sigma_2)(\mu_1 + \mu_2)\right\} \cdot \cosh(K') \cdot \cosh(h_1) \cdot \cosh(h_2) \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \text{tgh}(h_1)\mu_1\right] \cdot \left[1 + \text{tgh}(h_2)\mu_2\right] \cdot \left[1 + \text{tgh}(K')\mu_1\mu_2\right]$$

Ao desenvolvermos a parte do Hamiltoniano relativo a

célula básica escolhida obtemos

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta H'\} &= \alpha \cdot \cosh^4(K) \cdot \cosh(K') \cdot \cosh(h_1) \cdot \\ &\quad \cdot \cosh(h_2) \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(K) \sigma_1 \mu_1\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(K) \sigma_1 \mu_2\right] \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(K) \sigma_2 \mu_1\right] \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(K) \sigma_2 \mu_2\right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(h_1) \mu_1\right] \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(h_2) \mu_2\right] \cdot \left[1 + \operatorname{tgh}(K') \mu_1 \mu_2\right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora podemos obter as médias dos spins em função das constantes K , K' , h_1 e h_2 .

$$\langle \sigma_i \rangle = \operatorname{Tr}_{\sigma\mu} \left\{ \sigma_i \cdot \exp\{-\beta H'\} \right\} \quad (3.8a)$$

$$\langle \mu_i \rangle = \operatorname{Tr}_{\sigma\mu} \left\{ \mu_i \cdot \exp\{-\beta H'\} \right\} \quad (3.8b)$$

onde $i = 1, 2$. Observamos que por simetria $\langle \sigma_1 \rangle = \langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma \rangle$. Se substituirmos a forma (3.7) em (3.8a) e (3.8b) e tomamos o traço, obteremos as funções desejadas.

Fazendo as substituições

$$\mathcal{E} = \alpha \cdot \cosh^4(K) \cdot \cosh(K') \cdot \cosh(h_1) \cdot \cosh(h_2)$$

$$t = \operatorname{tgh}(K); \quad \tau = \operatorname{tgh}(K'); \quad H_1 = \operatorname{tgh}(h_1); \quad H_2 = \operatorname{tgh}(h_2),$$

podemos escrever (3.7) como

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta H'\} &= \mathcal{E} \cdot \left[1 + t \cdot \sigma_1 \mu_1\right] \cdot \left[1 + t \cdot \sigma_1 \mu_2\right] \cdot \left[1 + t \cdot \sigma_2 \mu_1\right] \cdot \\ &\quad \left[1 + t \cdot \sigma_2 \mu_2\right] \cdot \left[1 + H_1 \cdot \mu_1\right] \cdot \left[1 + H_2 \cdot \mu_2\right] \cdot \left[1 + \tau \cdot \mu_1 \mu_2\right] \end{aligned}$$

Como o spin σ_1 só percebe o spin σ_2 através dos spins μ , podemos simplificar mais ainda o resultado acima incluindo o

spin σ_2 entre os spins $\{\gamma\}$ e tomando o traço sobre ele de maneira a obter um novo Hamiltoniano equivalente. Utilizando as mesmas notações para o novo Hamiltoniano, H'' , que só depende de σ_1 , μ_1 e μ_2 , obtemos

$$\exp\{-\beta H''\} = \mathcal{C} \cdot \left[1 + t \cdot \sigma_1 \mu_1\right] \cdot \left[1 + t \cdot \sigma_1 \mu_2\right] \\ \cdot \left[1 + H_1 \cdot \mu_1\right] \cdot \left[1 + H_2 \cdot \mu_2\right] \cdot \left[1 + \tau \cdot \mu_1 \mu_2\right]$$

onde agora os novos τ , H_1 e H_2 (guardando a notação anterior) são ligeiramente diferentes devido ao fato de termos incluído σ_2 no traço parcial que forma o Hamiltoniano equivalente (embora t seja o mesmo do caso anterior).

É mais adequado expressarmos as médias (3.8a) e (3.8b) em função de t , τ , H_1 e H_2 . Assim sendo obtemos após um cálculo direto, sabendo que $Z = \text{Tr}_{\sigma\mu} \exp\{-\beta H'\}$,

$$Z/16\mathcal{C} = \left\{ \left[(1+t^4) + 2t^2 H_1 H_2 \right] + \tau \left[(1+t^4) H_1 H_2 + 2t^2 \right] \right\} \quad (3.9a)$$

$$Z \cdot \langle \sigma \rangle / 16\mathcal{C} = t(1+t^2) (H_1 + H_2) (1+\tau) \quad (3.9b)$$

$$Z \cdot \langle \mu_1 \rangle / 16\mathcal{C} = \left\{ \left[(1+t^4) H_1 + 2t^2 H_2 \right] + \tau \left[(1+t^4) H_2 + 2t^2 H_1 \right] \right\} \quad (3.9c)$$

$$Z \cdot \langle \mu_2 \rangle / 16\mathcal{C} = \left\{ \left[(1+t^4) H_2 + 2t^2 H_1 \right] + \tau \left[(1+t^4) H_1 + 2t^2 H_2 \right] \right\} \quad (3.9d)$$

Podemos também calcular a correlação entre os dois spins μ , μ_1 e μ_2 . Esta última vale

$$Z \cdot \langle \mu_1 \mu_2 \rangle / 16\mathcal{E} = \left\{ \left[(1+t^4)H_1H_2 + 2t^2 \right] + \tau \left[(1+t^4) + 2t^2H_1H_2 \right] \right\} \quad (3.9e)$$

Combinando os resultados (3.9a), (3.9b), (3.9c) e (3.9d) podemos calcular o quociente

$$\langle \sigma \rangle / (\langle \mu_1 \rangle + \langle \mu_2 \rangle) = t(1+t^2)(H_1+H_2)(1+\tau) / \left\{ \left[(1+t^4) + 2t^2 \right] + \tau \left[(1+t^4) + 2t^2 \right] \right\} (H_1+H_2).$$

Simplificando completamente obtemos [11]

$$\langle \sigma \rangle = t / (1+t^2) \left(\langle \mu_1 \rangle + \langle \mu_2 \rangle \right). \quad (3.10)$$

Esta equação relaciona a magnetização dos spins da nova geração (spins σ) com as magnetizações dos spins das antigas gerações (spins μ).

A equação (3.10) é idêntica à equação (3.3) onde $A_N = t_N / (1+t_N^2)$ e o índice N se refere ao número de hierarquias da rede. Também observamos que $\langle \sigma \rangle = m_{s,1}$ e $\langle \mu_1 \rangle$ tanto se refere a $m_{s',1-1}$ quanto a $m_{s'',j}$ onde $s, s', s'', 1$ e j tem os mesmos valores que na equação (3.3) [11]. Apesar de, na rede com um número qualquer de hierarquias, todos os acoplamentos serem iguais, devemos utilizar diferentes índices para cada acoplamento porque quando calculamos a magnetização de todos os spins, da rede hierárquica de N níveis através da equação (3.10), somos levados a considerar todos os valores de l entre zero e N .

O método para calcularmos o valor da magnetização de todos os spins da RD se baseia na equação (3.10). Utilizando esta equação junto com o método de dizimação [45] na rede

hierárquica, podemos por recorrência, à partir da rede com zero níveis e magnetização fixa em +1, calcular todas as magnetizações dos spins de uma rede com 1 níveis em função das magnetizações da rede com 1-1 níveis e assim calcularmos a magnetização da rede com N hierarquias. Para tanto precisamos provar uma série de resultados que serão estabelecidos a seguir. Quando tomamos o traço parcial sobre alguns spins em uma rede, convém observar que podemos representar o peso de Boltzmann reduzido para os spins restantes como a exponencial de um Hamiltoniano equivalente onde os termos de interação direta entre os spins restantes são mantidos e os termos de interação com os spins sobre os quais se tomou o traço são substituídos por termos de interação equivalente entre os spins restantes [11]. Por exemplo, no caso da dedução da equação (3.10), estes termos se traduziam por um acoplamento equivalente e dois campos magnéticos efetivos. Definimos estes Hamiltonianos efetivos (H') a partir do Hamiltoniano da rede da seguinte forma [30]

$$\exp\{-\beta H'\} = \text{Tr}_{\{\gamma\}}\left\{\exp\{-\beta H\}\right\} \quad (3.11)$$

onde $\{\gamma\}$ é o conjunto de spins sobre os quais se toma o traço parcial e $\{\sigma\}$ é o conjunto de spins restante. Se não tomamos o traço parcial sobre o spin μ , então a média deste pode ser calculada utilizando o Hamiltoniano equivalente, pois

$$\langle \mu \rangle = \text{Tr}_{\{\sigma\mu\gamma\}}\left\{\mu \cdot \exp\{-\beta H\}\right\} = \text{Tr}_{\{\sigma\mu\}}\left[\mu \cdot \text{Tr}_{\{\gamma\}}\left\{\exp\{-\beta H\}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \langle \mu \rangle = \text{Tr}_{\{\sigma\mu\}}\left\{\mu \cdot \exp\{-\beta H'\}\right\}.$$

Portanto, ao fazermos a dizimação de uma rede hierárquica de modo que a rede original com N níveis se torne uma rede com $N-1$ níveis, podemos mostrar que a nova rede tem por Hamiltoniano equivalente o próprio Hamiltoniano da rede com $N-1$ níveis cujo acoplamento de troca está relacionado com o acoplamento da rede original através de [46]

$$t_{N-1} = 2t_N^2 / (1 + t_N^4), \quad (3.12)$$

onde $t_i = \text{tgh}(K_i)$.

Então, para calcularmos as magnetizações de todos os spins da rede devemos, a partir do acoplamento da rede com N níveis, calcular a série $t_N, t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_2, t_1$ e t_0 pela equação (3.12). Isto feito, voltaremos à ligação original (hierarquia zero) e calcularemos as magnetizações dos spins da hierarquia um em função de t_1 e em seguida calculamos as magnetizações dos spins da hierarquia dois em função dos spins das hierarquias zero e um e também de t_2 , e assim por diante até obtermos todas as magnetizações da rede com N hierarquias. Como exemplo, da equação $m_{1,1} = A_1 \cdot (m_A + m_B)$ onde $m_A (\equiv \langle \sigma_A \rangle) = m_B (\equiv \langle \sigma_B \rangle) = 1$, obtemos $m_{1,1} = 2A_1$. Este resultado vale para os dois spins pertencentes a classe de equivalência (1,1).

Ao calcularmos a magnetização local do perfil da RD (chamaremos de perfil cada um dos caminhos mais curtos entre as duas raízes A e B), uma maneira adequada de desenhar um gráfico que leve em conta as características topológicas da magnetização de cada sítio será desenharmos a magnetização como uma barra vertical de modo que sua origem no segmento $[0,1]$ represente a posição relativa do sítio no perfil, em relação à raiz de referência (esta representação é a que foi desenvolvida

nas figuras 3.3a e 3.3b, nas quais apresentamos respectivamente, o perfil da RD com 10 hierarquias e a ampliação de um trecho do perfil de maneira a também mostrar 10 hierarquias, observando a similaridade entre as duas figuras). A forma da magnetização do perfil da RD vista na figura 3.3 é bastante semelhante à curva de Weierstrass [10,47]. Podemos calcular a magnetização do perfil para qualquer temperatura, porém, a temperatura mais interessante para fazer os cálculos será a temperatura crítica de transição de fase de segunda ordem, T_c , na qual sabemos que $(\langle \sigma_1 \rangle)/N \rightarrow 0$, pois nesta temperatura o comprimento de correlação ξ para a RD tende a infinito e o sistema deixa de possuir uma escala característica sendo então candidato a apresentar características fractais ou multifractais.

Antes disso devemos analisar a equação (3.10). Se $N \rightarrow \infty$, então $t_0 \rightarrow 0$ ou $t_0 \rightarrow 1$ dependendo se t_N está no intervalo $[0, t_c)$ ou se está no intervalo $(t_c, 1]$ respectivamente, onde t_c é tal que $t_{1-1} = t_1 = t_c$ dado pela equação (3.12). Portanto dois casos emergem: no primeiro as funções A_1 tendem a zero e assim a magnetização dos sítios tende a zero pois está multiplicada por fatores cada vez menores. Logo, como no intervalo $[0, t_c)$ a magnetização média por spin tende a zero, esta é a fase paramagnética como veremos. No segundo caso as funções A_1 tendem a 1/2, o que permite a existência de uma magnetização média por spin não nula no intervalo $(t_c, 1]$ e então esta é a fase ferromagnética. Em $t_N = t_0 = t_c$, $A_1 = A_c < 1/2$ qualquer que

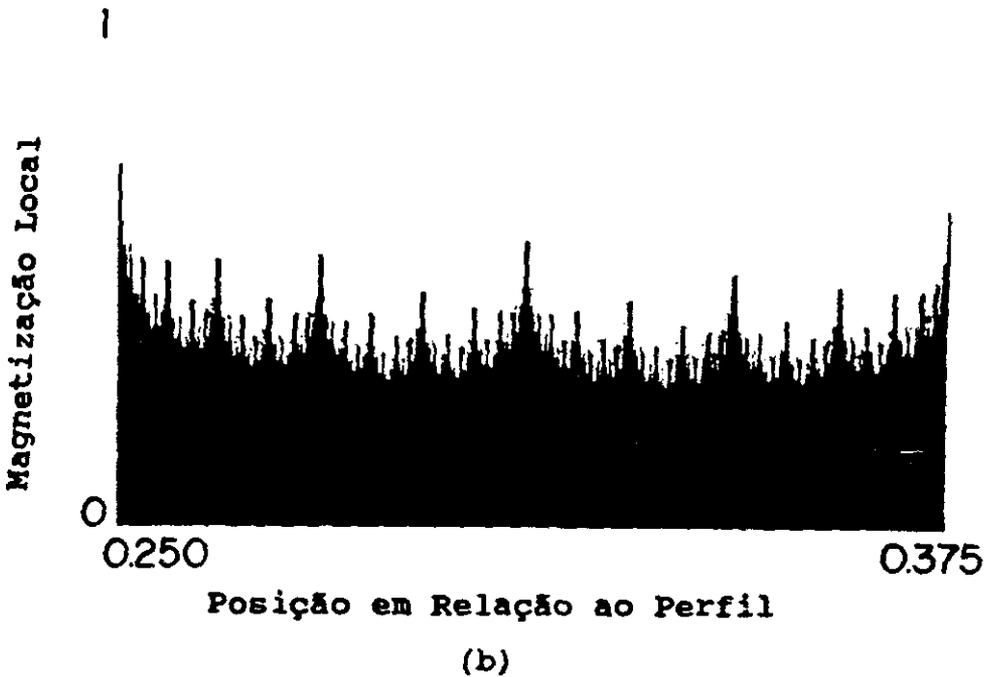
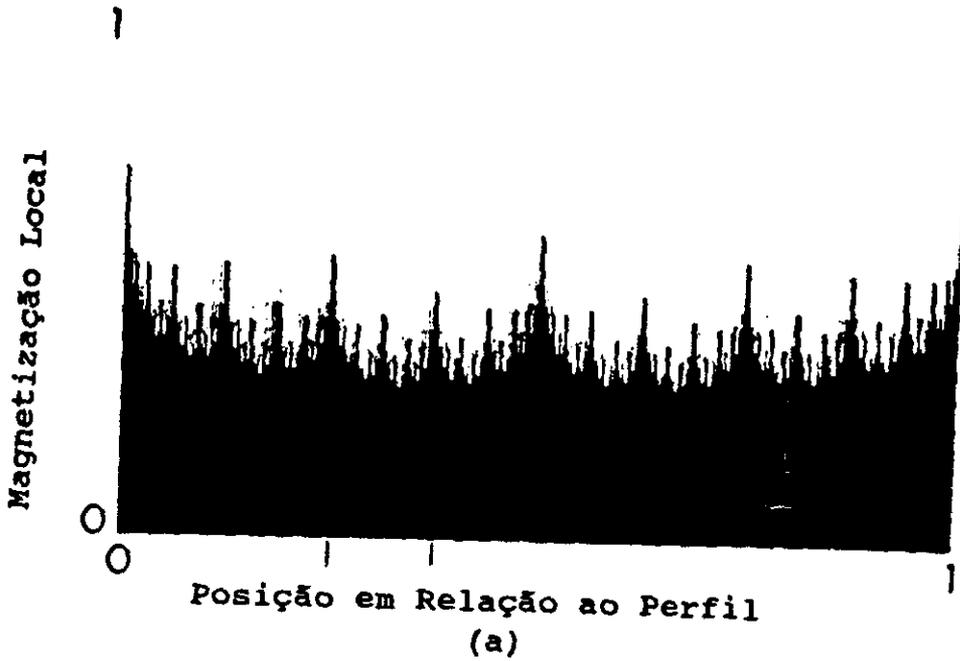


Figura 3.3: Em (a) vemos a representação da magnetização local do perfil da RD em $T = T_c$ com 10 hierarquias. Em (b) vemos a ampliação da região do perfil assinalada em (a). Podemos observar a auto-similaridade existente no sistema.

seja i tal que $0 \leq i \leq N$. Então, em t_c , a magnetização média por spin é nula.

3.4) Recorrência para a Magnetização Global:

Sabemos que a magnetização total a campo nulo por sítio de um sistema ferromagnético é definida por [12,19]

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{1}{N_s} \frac{\partial G}{\partial h} ,$$

onde G é a energia livre de Gibbs, N_s é o número total de spins do sistema e h é o campo magnético externo. Contudo podemos, utilizando a equação (3.10), prescindir da equação acima pois o campo já está incluído implicitamente na equação (3.10).

A magnetização global média a campo nulo por sítio da RD nos é dada pelo somatório

$$m_N(T_N) = \left(\sum_i \langle \sigma_i \rangle \right) / N_{sN} , \quad (3.13)$$

onde somamos sobre todos os sítios da RD com N hierarquias, $N_{sN} = (4 + 2 \cdot 4^N) / 3$ é o número total de sítios da RD com N hierarquias e calculamos a magnetização para uma temperatura fixa em T_N .

Através de (3.10), podemos obter uma relação de recorrência entre as magnetizações da rede com N , $N-1$ e $N-2$ hierarquias. Como sabemos que $m_0(T_0) = 1$ e que podemos calcular diretamente $m_1(T_1)$, logo por recorrência, podemos obter $m_N(T_N)$ em função das magnetizações e T_N 's das hierarquias anteriores.

Como vimos, podemos expressar a magnetização de um spin da última hierarquia, com as mesmas notações anteriores, $m_{s,N}$, em

função da magnetização de seus primeiros vizinhos, $m_{s',N-1}$ e $m_{s'',j}$, (que pertencem a gerações anteriores). Reescrevemos então a equação (3.3) para estes spins como ($A_N(T_N) \equiv A_N$)

$$m_{s,N} = A_N(T_N) \left(m_{s',N-1} + m_{s'',j} \right).$$

Desta equação, após fixarmos T_N , podemos fazer um somatório para as magnetizações dos sítios que são gerados na última hierarquia (adotaremos a notação m_N para $m_N(T_N)$), pois $m_{s,N} = \langle \sigma_i \rangle$ onde (s,l) representa a classe de equivalência à qual pertence σ_i , e temos que

$$\sum_{i \in \{l=N\}} \langle \sigma_i \rangle = N_{sN} \cdot m_N - N_{sN-1} \cdot m_{N-1}, \quad (3.14)$$

onde o somatório é feito apenas sobre os sítios do N-ésimo nível. O resultado é a magnetização total dos sítios do N-ésimo nível.

Ao fazermos o somatório (3.14) devemos levar em conta que cada sítio da N-ésima geração, $\langle \sigma_i \rangle$, contribui com um termo, produto da magnetização de cada próximo vizinho (spin μ) por A_N , quando no somatório (3.14) substituimos cada spin $\langle \sigma_i \rangle$ por seu valor dado pela equação (3.10). Quando fazemos a operação de dizimação para, da RD com N níveis e acoplamento K_N , obtermos a RD com N-1 níveis e acoplamento efetivo K_{N-1} , devemos observar que apenas desaparecem os sítios que pertenciam à última geração, portanto, todos os primeiros vizinhos destes permanecem na RD com N-1 níveis. Logo o somatório (3.14) será igual à soma da magnetização de cada sítio i restante multiplicada pelo número de coordenação do sítio i quando este pertence à RD com N níveis, $Z_i^{(N)}$.

A figura 3.4 nos mostra como a magnetização do spin de cada sítio da N-ésima hierarquia, $\langle \sigma_i \rangle$ (com $l = N$), da RD pode ser escrito como A_N multiplicado pela soma das médias dos spins μ ($1 \leq N-1$) primeiros vizinhos do sítio σ_i , então no somatório (3.15), cada sítio μ representado ($1 \leq N-1$) contribuirá proporcionalmente a seu número de coordenação ou número de primeiros vizinhos. Observando que se o sítio i pertence a um nível da RD anterior ou igual a $N-1$, podemos verificar que para a RD, $z_i^{(N)} = 2 \cdot z_i^{(N-1)}$. Então temos

$$\sum_{i \in \{l=N\}} \langle \sigma_i \rangle = A_N \sum_{i \in \{l=0, 1, \dots, N-1\}} z_i^{(N)} \langle \sigma_i \rangle. \quad (3.15)$$

Definindo

$$\theta(N) \equiv \sum_{i \in \{l=0, 1, \dots, N\}} z_i^{(N)} \langle \sigma_i \rangle. \quad (3.16)$$

Portanto, temos que (3.15) torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \{l=N\}} \langle \sigma_i \rangle &= 2 \cdot A_N \sum_{i \in \{l=0, 1, \dots, N-1\}} z_i^{(N-1)} \langle \sigma_i \rangle, \\ \Rightarrow \sum_{i \in \{l=N\}} \langle \sigma_i \rangle &= 2 \cdot A_N \theta(N-1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podemos obter uma relação de recorrência que relacione $\theta(N)$ com $\theta(N-1)$. Para isto separamos os termos na definição de $\theta(N)$, lembrando que para os spins da geração N na RD com N hierarquias, $z_i^{(N)} = 2$, temos

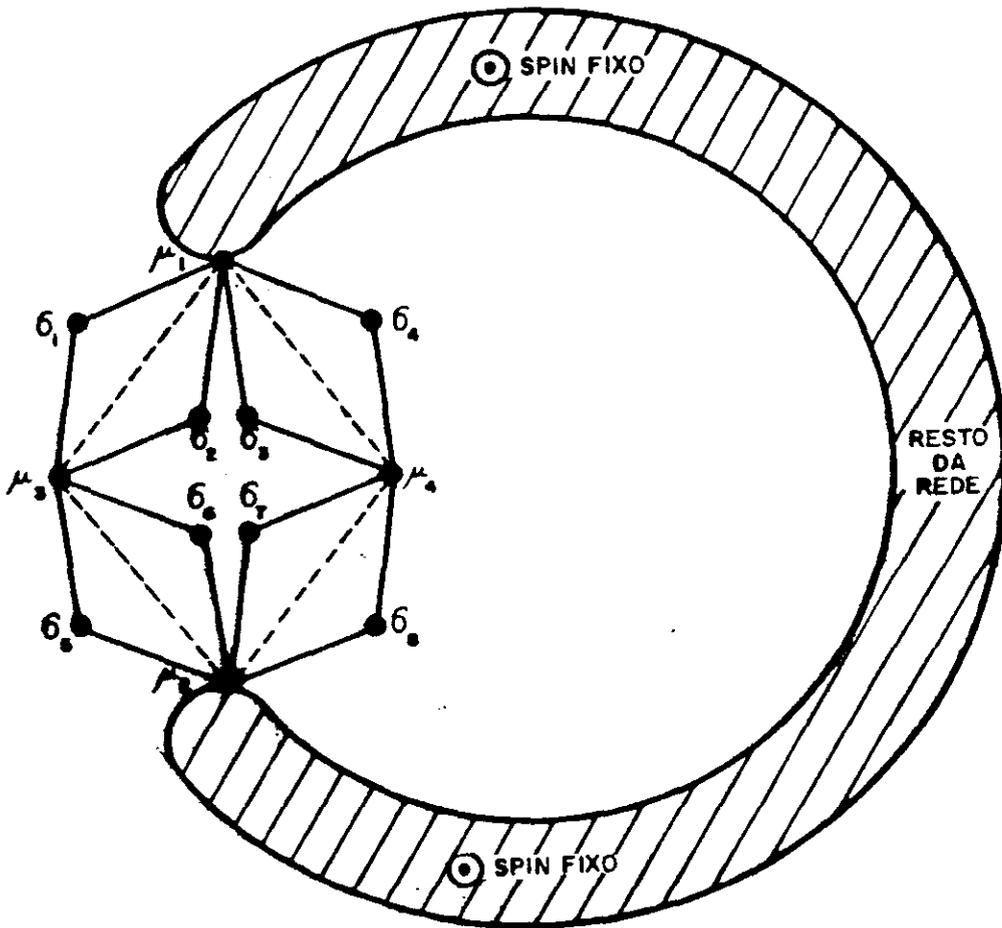
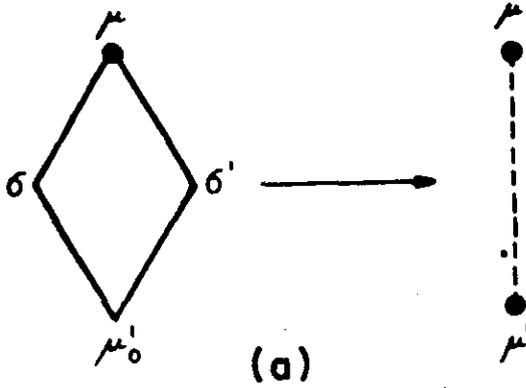


Figura 3.4: Dizimação na RD. Em (a) vê-se a operação de dizimação (substituição da célula básica por uma ligação). Em (b) vê-se como após uma dizimação, o conjunto constituído por quatro células básicas, na RD com N hierarquias, torna-se apenas uma célula básica, na RD com N-1 hierarquias.

$$\theta(N) = \sum_{i \in \{1=0, 1, \dots, N\}} z_i^{(N)} \cdot \langle \sigma_i \rangle = 2 \cdot \sum_{i \in \{1=N\}} \langle \sigma_i \rangle + \sum_{i \in \{1=0, 1, \dots, N-1\}} z_i^{(N)} \cdot \langle \sigma_i \rangle .$$

Utilizando (3.14) e $z_i^{(N)} = 2 \cdot z_i^{(N-1)}$, obtemos

$$\theta(N) - 2 \cdot \theta(N-1) = 2 \cdot \left(N_{sN} \cdot m_N - N_{sN-1} \cdot m_{N-1} \right). \quad (3.18)$$

A equação (3.18) nos dá a relação de recorrência para a função teta na RD. Como queremos calcular o somatório da equação (3.17), basta que substituamos a equação (3.17) em (3.18) que será modificada para

$$\theta(N-1) - 2 \cdot \theta(N-2) = 2 \cdot \left(N_{sN-1} \cdot m_{N-1} - N_{sN-2} \cdot m_{N-2} \right).$$

Portanto obtemos, utilizando (3.14) e (3.17) na equação acima

$$\begin{aligned} & (1/2A_N) \left(N_{sN} \cdot m_N - N_{sN-1} \cdot m_{N-1} \right) - (1/A_{N-1}) \left(N_{sN-1} \cdot m_{N-1} - N_{sN-2} \cdot m_{N-2} \right) \\ & = \\ & = 2 \cdot \left(N_{sN-1} \cdot m_{N-1} - N_{sN-2} \cdot m_{N-2} \right). \end{aligned}$$

Explicitando a recorrência para as magnetizações obtemos

$$\begin{aligned} m_N &= \left(1 + 2A_N/A_{N-1} + 4A_N \right) \cdot \left(N_{sN-1}/N_{sN} \right) \cdot m_{N-1} - \\ & - \left(2A_N/A_{N-1} + 4A_N \right) \cdot \left(N_{sN-2}/N_{sN} \right) \cdot m_{N-2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A equação (3.19) nos dá a relação entre a magnetização média por spin da RD com N hierarquias em função da magnetização das RD com N-1 e N-2 hierarquias obtidas da RD original com N níveis por dizimação.

Como sabemos, $m_0 = 1$ e $m_1 = (1 + 2A_1)/2$. Logo podemos obter A_N em função de $t_N = \text{tgh}(K_N)$ pois sabemos os valores de t_N ,

t_{N-1}, \dots, t_1 e utilizando

$$A_N = t_N / (1 + t_N^2),$$

podemos obter diretamente a sequência A_N, A_{N-1}, \dots, A_0 . Assim feito, construímos os valores $m_0, m_1, \dots, m_{N-1}, m_N$ para a magnetização média por spin para a RD. O limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$ (ou equivalentemente $t_0 \rightarrow 1$) nos fornece o valor $m(T)$. Ou seja,

$$m(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_N, \quad (3.20)$$

mantendo sempre $T_N = T$.

Podemos mostrar ainda que a equação exata para a magnetização da RD é dada pela relação [11]

$$m(T) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2A_i) / 2, \quad (3.21)$$

a qual recupera resultado anterior [3]. Esta equação nos permite obter o valor da magnetização da RD em qualquer temperatura, pois o produtório é rapidamente convergente.

3.5) Análise em T_c :

Podemos determinar facilmente a temperatura crítica de transição de segunda ordem para redes hierárquicas e para a RD em particular. Para tanto basta achar o ponto fixo da equação (3.12) [46], ou seja, o ponto para o qual $t_{1-1} = t_1 = t_c$, pois como veremos, se $t_N > t_c \Rightarrow A_0 \rightarrow 1/2$ e estamos na fase ferromagnética enquanto que se $t_N < t_c \Rightarrow A_0 \rightarrow 0$ e estamos na fase paramagnética. Devemos encontrar a solução tal que $0 < t_c < 1$ para a equação abaixo

$$t = 2t^2/(1 + t^4).$$

A equação acima possui como raízes [ver apêndice A] entre outras: 0, 1, e t_c onde $t_c = (w - 2/w - 1)/3 \cong 0.543689\dots$, com $w = (3\sqrt{33 + 17})^{1/3}$. Obtemos assim que $A_c = t_c/(1 + t_c^2) \cong 0.419643$. Para calcularmos as magnetizações dos sítios da rede em t_c devemos utilizar o método anteriormente citado apenas substituindo A_1 por A_c para todo l . Apesar dos sítios de hierarquia finita terem magnetização não nula, a magnetização média por spin tende a zero em T_c .

Podemos verificar facilmente que para $t \geq 0$ temos, $0 \leq A(t) \leq 1/2$ atingindo seu valor máximo, $1/2$, quando $t=1$. Também observamos que $A(0)=0$. Logo, se t_0 tende para 0 no processo de obtenção do limite termodinâmico, A_0 tende igualmente para 0 e portanto $m(T)$ dado pela equação (3.21) tende a zero. Isto ocorre quando $t_N \leq t_c = 0.543689$. Os valores de K_N para os quais t_N é tal que $0 \leq t_N \leq t_c$ ($K_N \leq K_c$) correspondem, portanto, à fase paramagnética, $m(T) = 0$. Se por outro lado, $t_c < t_N \leq 1$ ($0 < K_c \leq K_N$), então agora t_0 tende a 1 e portanto obtemos um valor não nulo para a magnetização $m(T)$, ou seja, esta é a fase ferromagnética. Em $T = 0$, $K_N = \infty$, pois $K_N = J/kT_N$, qualquer que seja N , portanto $t_N = 1$ e $t_i = 1$ qualquer que seja $i \leq N$. Logo $A_i = 1/2$ e

$$m(0) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2(1/2))/2 = \prod_{i=1}^{\infty} 1 = 1.$$

Vemos que à temperatura nula, a magnetização é máxima. Faremos então, a análise das magnetizações local e global quando nos encontrarmos no ponto crítico de transição de fase, K_c , quando passamos de uma magnetização não nula para uma

magnetização nula ou vice-versa.

Nesta temperatura, quando fazemos uma dizimação sobre a RD com N hierarquias, os acoplamentos efetivos obtidos são iguais aos acoplamentos originais, refletindo o fato de estarmos num ponto fixo para a equação de recorrência (3.12). Portanto, a magnetização média por spin será

$$m(T_c) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2A_c)/2,$$

qualquer que seja i , pois A_c também é ponto fixo para a sequência correspondente para os A_i , onde A_c é dado por $A_c = t_c / (1 + t_c^2) = 0.419643 < 1/2$. Portanto, $(1 + 2A_c)/2 < 1$, o que implica $m(T_c) = 0$. Portanto em T_c , a magnetização por spin é nula, um resultado em acordo com nossa expectativa de observar uma transição de fase contínua. Embora m_N seja diferente de zero para N finito, quando tomamos o limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, observamos que $m_N \rightarrow 0$. Este tipo de comportamento é observado em experimentos computacionais [7] nos quais por um processo de simulação Monte-Carlo na temperatura crítica, são geradas configurações instantâneas de spin (+1/2 ou -1/2) sobre uma rede quadrada ou cúbica finita de lado L e número total de spins $N = L^d$ onde d é a dimensão da rede. Observando as redes com maioria de spins +1/2, foi sugerido [7] que a diferença esperada $\Delta = \#(\text{spins } +1/2) - \#(\text{spins } -1/2)$, pode ser aproximada pela lei exponencial L^D , onde D é uma constante característica do sistema analisado tal que $D < d$. Se definimos a magnetização por spin como $m(T_c, L) = \Delta/N$, obtemos $m(T_c, L) = L^{D-d}$. É fácil verificar que $\lim_{L \rightarrow \infty} m(T_c, L) = 0$, apesar da magnetização total não

ser nula, assim como na RD.

Ao analisar o comportamento da magnetização em cada sítio da RD e especialmente ao analisar as magnetizações dos sítios de um perfil da RD (ou seja, de um caminho mais curto entre dois terminais) podemos observar diversas características fractais do sistema. Para tanto desenhemos o perfil sobre o segmento $[0,1]$, em cujas extremidades estão as duas raízes A e B respectivamente, sobre o qual localizaremos os spins com o auxílio das coordenadas (s,l) anteriormente citadas (ver §3.2 e [11]). Após havermos escolhido um dos terminais, neste caso A, como origem, cada sítio da classe de equivalência (s,l) terá por ordenada $x = s/2^l$, onde $s = 1, 3, 5, \dots, 2^l - 1$ para $l = 1, 2, 3, \dots, N$ exceto quando $l = 0$, pois aí estaremos representando as raízes A e B e, para estas, $s = 0$ e 1 respectivamente (ver §3.2). A etapa seguinte consiste em escolher uma representação geométrica adequada para representarmos a magnetização de cada spin da rede hierárquica. Nossa escolha será um diagrama sob a forma de um histograma, representando a magnetização do spin $(s,l \neq 0)$ na RD com N hierarquias por uma barra vertical de largura 2^{-N} e altura proporcional a magnetização do sítio (ver figuras 3.3a, 3.3b e 3.5), centrada sobre $x = s/2^l$. Para as raízes, o intervalo valerá 2^{-N-1} e será iniciado (terminado) em A (em B). Podemos mostrar que a área gerada pelas barras é igual a magnetização média do perfil da rede. Seja S_r a área total das barras, podemos ver que

$$S_r = \sum_i (\text{largura da barra } i) \times (\text{altura da barra } i),$$

Como ainda (exceto para as raízes): $\begin{cases} \text{largura da barra } i = 2^{-N} \\ \text{altura da barra } i = \langle \sigma_i \rangle \end{cases};$

logo $S_r = 2^{-N} \left[\sum_i \langle \sigma_i \rangle - 1 \right]$ onde $\sum_i \langle \sigma_i \rangle \equiv$ (magnetização total do

perfil). Então vemos, para N grande, $S_r \equiv$ (magnetização total do perfil)/(número total de sítios do perfil) \equiv (magnetização média por spin do perfil).

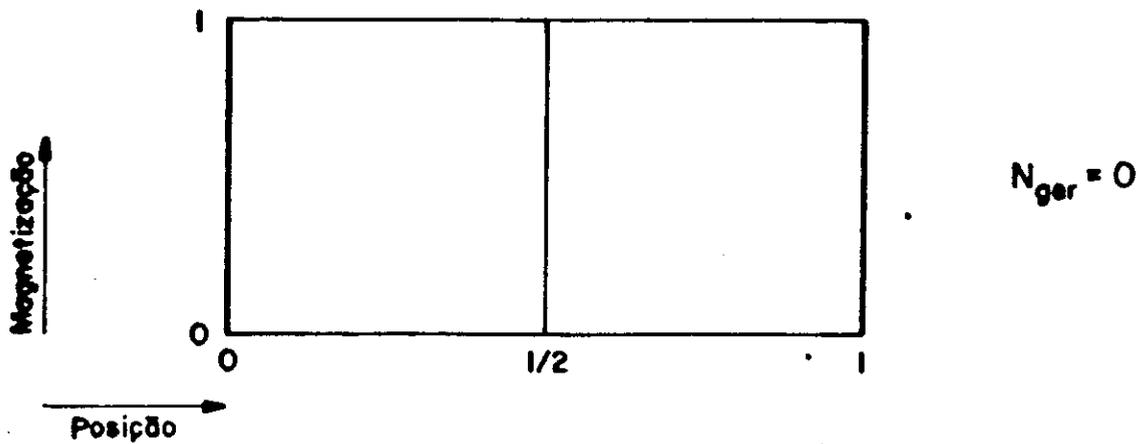
Na figura 3.5, representamos os perfis da RD com 0, 1 e 2 hierarquias de maneira a mostrar como a área gerada pelas barras descritas acima se altera com o aumento de hierarquias.

Detendo-nos sobre o aspecto da magnetização média por spin, podemos calcular o valor do expoente crítico β que mede a taxa de variação da magnetização em função da diferença de temperatura em relação a T_c . Em outras palavras, sendo $\varepsilon = (t - t_c)/t_c$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\log(m(\varepsilon))/\log(\varepsilon) \rightarrow \beta$. Podemos então supor com boa precisão que

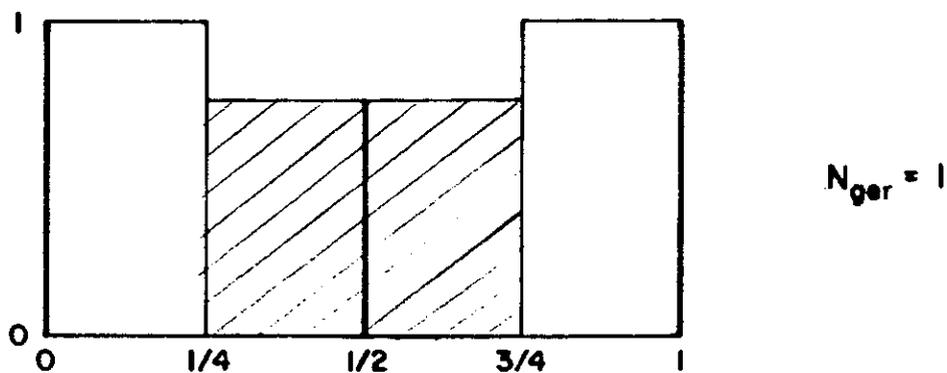
$$m(\varepsilon) \cong \lambda \cdot (\varepsilon)^\beta, \quad (3.22)$$

onde λ é uma constante.

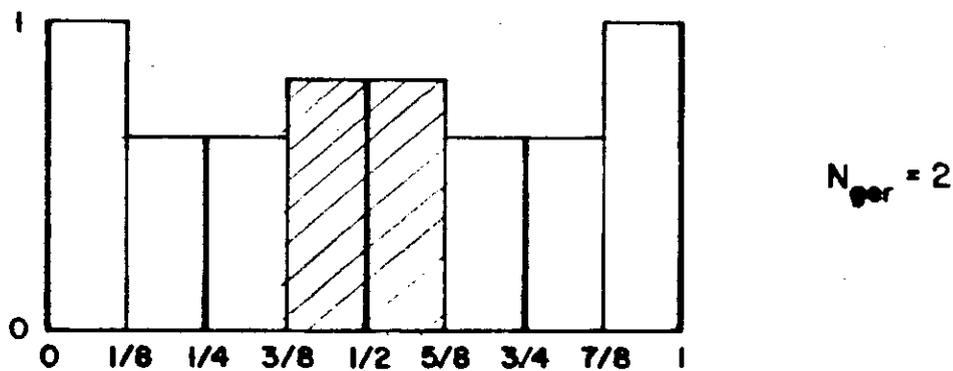
Notaremos de agora em diante $m(\varepsilon_N) = m(T_N) = m_N$. Quando estamos exatamente em T_c ou muito próximos de T_c , os fatores numéricos na equação (3.19) podem ser substituídos por seus valores em T_c se desejamos obter apenas o comportamento principal da magnetização perto de T_c desprezando as correções de ordem superior. Substituindo (3.22) em (3.19) e fazendo a troca de A_N e A_{N-1} por $A_c = 0.419643$ (notando que para o limite termodinâmico, $N \rightarrow \infty$, $(N_{s1}/N_{sj}) = 4^{1-j}$) obtemos



(a)



(b)



(c)

Figura 3.5: Construção da magnetização fractal do perfil da RD a partir de uma figura formada por barras grossas (a área gerada por uma barra é proporcional à medida que definimos sobre o perfil) com número de hierarquias (N_{ger}) igual a 0 (a), 1 (b) e 2 (c). Vemos em destaque a área gerada pelo spin (1,1).

$$\lambda \cdot (\varepsilon_N)^\beta = \lambda \cdot (\varepsilon_{N-1})^\beta [3 + 4A_c]/4 - \lambda \cdot (\varepsilon_{N-2})^\beta [2 + 4A_c]/16.$$

Como λ é um fator comum, após simplificação e a divisão de ambos os membros por $(\varepsilon_N)^\beta$, obtemos

$$(\varepsilon_{N-2}/\varepsilon_N)^\beta [2 + 4A_c]/16 - (\varepsilon_{N-1}/\varepsilon_N)^\beta [3 + 4A_c]/4 + 1 = 0$$

Podemos calcular diretamente a razão $(\varepsilon_i/\varepsilon_j)$, pois $(\varepsilon_{i-1}/\varepsilon_i) \cong (dt_{i-1}/dt_i)|_{t_c} = r_c \cong 1.678574$. Isto nos leva a $(\varepsilon_i/\varepsilon_j) = r_c^{j-1}$. Substituindo este resultado na equação acima, obtemos

$$(r_c^\beta)^2 [2 + 4A_c]/16 - (r_c)^\beta [3 + 4A_c]/4 + 1 = 0. \quad (3.23)$$

Fazendo a substituição $y = r_c^\beta$ obtemos então

$$y^2 \cdot \left([2 + 4A_c]/16 \right) - y \cdot \left([3 + 4A_c]/4 \right) + 1 = 0. \quad (3.24)$$

Resolvendo a equação acima para y , obtemos [ver apêndice B] a raiz $y_c = 1.087378$ que dá o comportamento crítico para a magnetização. Desta raiz derivamos $\beta = \log(y_c)/\log(r_c)$ pois r_c é a derivada em t_c da variável $t_{N-1} = \text{tgh}(K_{N-1})$ pela variável $t_N = \text{tgh}(K_N)$ cuja relação é dada pela equação (3.12). Feito isto, obtemos que β para a magnetização média por spin da RD é $\beta \cong 0.161734$ [ver apêndice B]. Este resultado também é obtido exatamente em referência anterior [3]. Utilizando o método acima para a rede hierárquica ponte de Wheatstone, podemos calcular β exatamente, $\beta \cong 0.180$ [28,48].

Por argumentos similares podemos calcular o comportamento dos spins mais internos da RD e obter β' que caracteriza a variação da magnetização para estes sítios na vizinhança de T_c contida na fase ferromagnética. Mas o que são estes spins mais

internos? Nós os definiremos como os spins de menor magnetização da rede. Podemos ver que eles são gerados pela sequência $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ onde $a_i = A_i(a_{i-1} + a_{i-2})$ onde $a_0 = a_1 = 1$ correspondem às magnetizações das raízes A e B respectivamente (esta sequência está desenhada na figura 3.6, logo abaixo). Podemos então calcular um expoente crítico β' associado a esta sequência de valores [ver apêndice C]. Obtemos que $\beta' \cong 0.22335$ valor este bastante diferente daquele correspondente a toda a RD. Este resultado não é completamente surpreendente, pois havíamos definido os sítios mais internos como aqueles de mais baixa magnetização e portanto, na vizinhança de T_c seu expoente β deve ser maior do que aquele de toda a rede pois a magnetização desta decresce mais lentamente que a magnetização daqueles sítios.

3.6) Aspectos Multifractais do Modelo:

O aparecimento de propriedades fractais no modelo estudado, relacionadas à transição de fase ferro-paramagnética em T_c e associada à alta não-uniformidade do número de coordenação dos sítios do perfil da rede hierárquica, nos sugere que, possivelmente, podemos observar fenômenos mais complexos do que simplesmente o aparecimento de apenas um conjunto de expoentes discreto. Uma possibilidade é o aparecimento de características multifractais.

Para estudarmos as características multifractais de um sistema, devemos definir uma medida sobre o sistema físico que analisamos. Nos deteremos neste ponto,

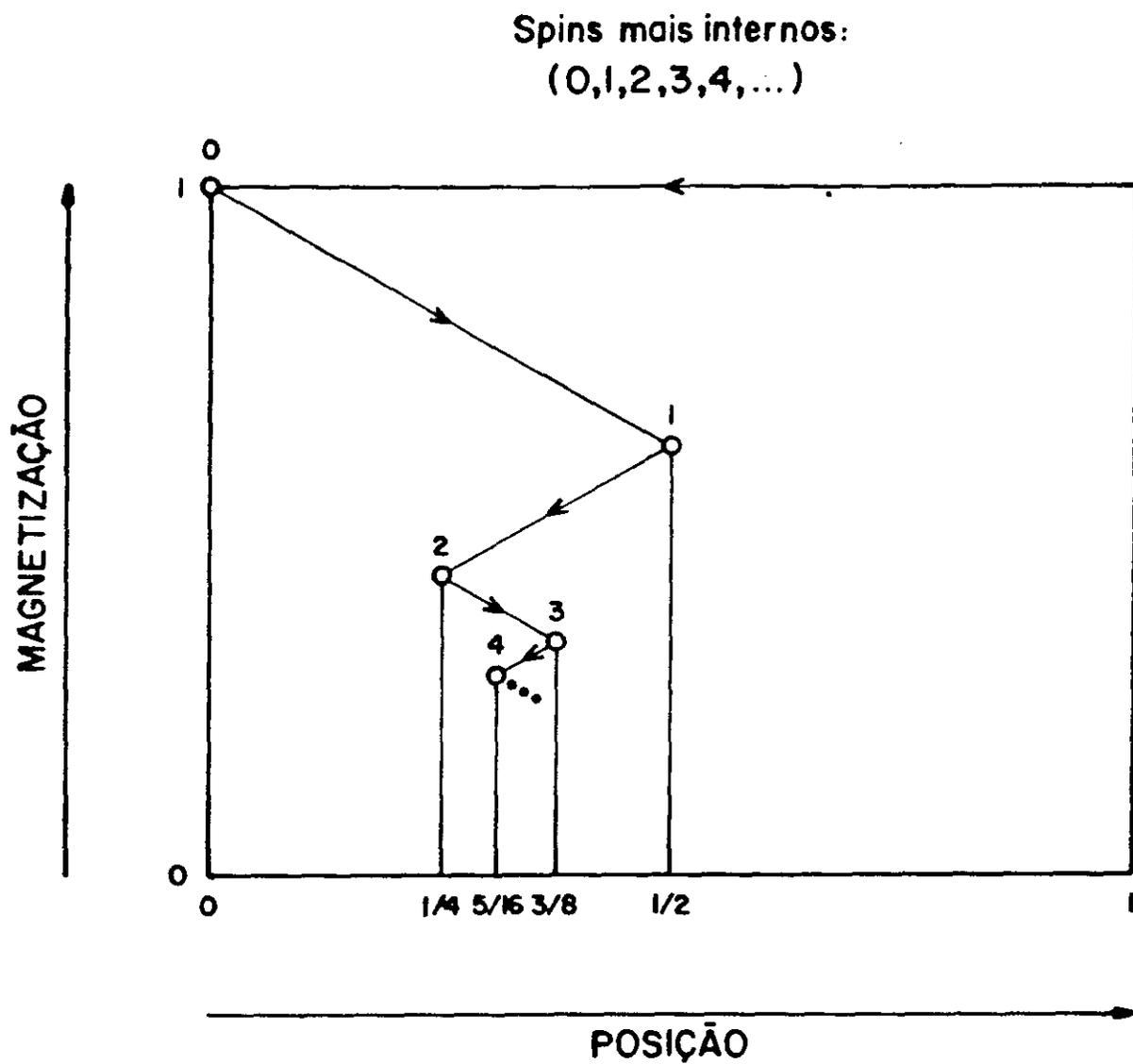


Figura 3.6: Representamos acima a sequência de sítios cujos spins são os mais internos da rede (aqueles que numa RD possuem o valor mais baixo para a magnetização). A posição é dada sobre o perfil e relativa a raiz de referência A (cuja abcissa é 0).

mais especificamente sobre o comportamento da magnetização local do perfil da rede hierárquica, em especial a RD (ver figs. 3.3a e 3.3b).

Definiremos a medida sobre o perfil de maneira que esta obedeça as seguintes condições: o perfil da RD será representado sobre o intervalo $[0,1]$ de maneira que o sítio localizado na raiz de referência para a RD esteja colocado no ponto 0; sendo a rede formada por N hierarquias, a medida será distribuída uniformemente sobre cada subintervalo de $[0,1]$ de extensão $\varepsilon = 2^{-N}$ cujo ponto médio corresponde a posição de cada sítio do perfil, considerando que todos os primeiros vizinhos são eqüidistantes; o valor da medida para cada subintervalo de extensão $\varepsilon = 2^{-N}$ citado anteriormente será igual ao quociente da magnetização do spin do sítio que é ponto médio deste intervalo pelo valor da magnetização total do perfil. Assim definida, esta medida já está automaticamente normalizada à unidade. Como vimos no capítulo 2, a função $f(\alpha)$, que descreve quão densamente estão distribuídas as singularidades de uma medida [35], pode ser obtida através de um processo de limite, no qual calculamos a medida μ_i de cada intervalo i e tomamos o seu logaritmo. Isto feito, dividimos este logaritmo pelo logaritmo da extensão dos subintervalos, $\varepsilon = 2^{-N}$. A este quociente chamamos $\tilde{\alpha}$ (ou expoente de Hölder) assim como no capítulo 2. Então, dividimos a abcissa (eixo α) em intervalos fixos com extensão $d\alpha$, cada um, e contamos, para cada intervalo j do eixo α , o número de spins do perfil para os quais a medida gerada por eles seja tal que o valor de α correspondente esteja entre α_j e $\alpha_j + d\alpha$. A este número chamaremos N_j . A função $f(\alpha)$ é

obtida como o limite, quando o número de hierarquias $N \rightarrow \infty$, do quociente entre o logaritmo do número de spins tipo j , $\log N_j$, que geram α_j , sobre o logaritmo da extensão do intervalo, $\varepsilon = 2^{-N}$, ou seja [33],

$$f(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} -\log(N_j)/\log(\varepsilon) \text{ onde } \varepsilon = 2^{-N}. \quad (3.25)$$

Na figura 3.7 observamos as principais características de uma função $f(\alpha)$ apesar do número de hierarquias ($N = 29$) ainda ser pequeno. Esta figura é concava com um único máximo cujo valor será aquele da dimensão fractal do suporte do perfil ($d=1$) no limite $N \rightarrow \infty$.

Podemos calcular diretamente os valores máximo e mínimo de α , ou seja, aqueles valores de α para os quais o valor da tangente à curva $f(\alpha)$ se torna infinito.

O valor α_{\min} corresponde ao valor de α gerado pelos intervalos com a maior medida $\mu_{\max, N}$, pois quanto menor seja α maior será a medida e vice-versa. Da mesma forma, α_{\max} corresponde aos intervalos de menor medida $\mu_{\min, N}$, ou seja, aqueles cuja magnetização decresce mais rapidamente, ou seja, os sítios mais internos da rede que nos fornecem $\beta_{\max} \cong 0.22335$.

Podemos então calcular α_{\max} e α_{\min} analiticamente, pois sabemos que a magnetização total do perfil da rede pode ser obtida por

$$M_N \propto 2^N \cdot (\delta t_N)^\beta, \quad (3.26)$$

onde M_N é a magnetização total da rede com N hierarquias e

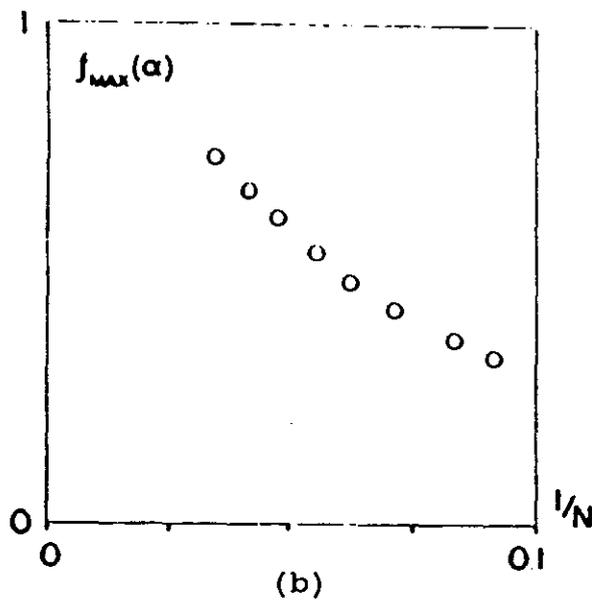
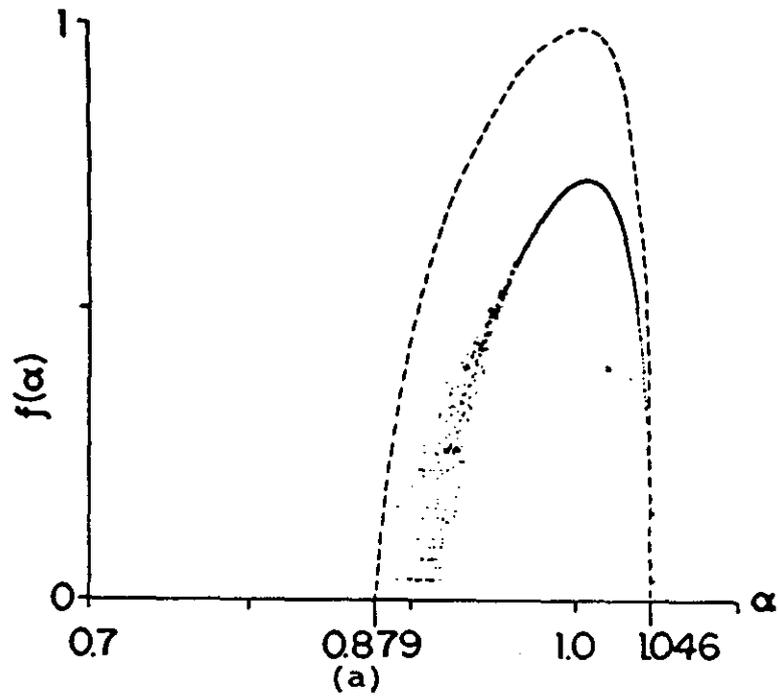


Figura 3.7: Em (a) vemos a função $f(\alpha)$ para o perfil da magnetização da RD com $N = 29$ hierarquias (a curva tracejada representa o limite esperado quando $N \rightarrow \infty$). Em (b) vemos o valor máximo de $f(\alpha)$, como função de N^{-1} , mostrando a lenta convergência para 1 quando $N \rightarrow \infty$.

$$\delta t_N = (t_N - t_c) / t_c \equiv \varepsilon_N.$$

Como sabemos, α_{\min} nos é dado pelos spins de grandes magnetizações, ou seja, aqueles cujas magnetizações podemos considerar constantes no processo de tomar o limite $N \rightarrow \infty$. Então $\mu_{\max, N} = C^{te} / M_N$. Logo,

$$\alpha_{\min} = \lim_{N \rightarrow \infty} \log(C^{te} / M_N) / \log(\varepsilon) \text{ onde } \varepsilon = 2^{-N}.$$

Para calcularmos a expressão acima devemos melhorar a forma da expressão (3.26).

Como temos $(\delta t_{N-1} / \delta t_N)^\beta = r_c^\beta = 2^{(\beta/\nu)}$ onde $r_c = 2^{1/\nu}$ com $\nu \cong 1.338267$, podemos ver que de (3.26) obtemos

$$M_{N+1} = 2 \cdot 2^{-(\beta/\nu)} \cdot M_N.$$

No limite de N muito grande temos:

$$M_N \propto \left(2^{1-(\beta/\nu)} \right)^N. \quad (3.27)$$

Deste modo obtemos que

$$\alpha_{\min} = \lim_{N \rightarrow \infty} - \left(\log(C^{te}) - N \cdot \log(2^{1-(\beta/\nu)}) \right) / \left(N \cdot \log(2) \right),$$

o que nos fornece

$$\alpha_{\min} = 1 - \beta/\nu \cong 0.8791\dots$$

Da mesma forma, podemos calcular α_{\max} . Neste caso, a medida dos intervalos correspondentes aos sítios que nos fornecem α_{\max} será dada por $\mu_{\min, N} \propto (\delta t_N)^{\beta'} / M_N$ onde $\beta' \cong 0.22335$.

Utilizando (3.27), obtemos

$$\mu_{\min, N+1} = \mu_{\min, N} \cdot 2^{-1+(\beta/\nu)} \cdot 2^{-(\beta'/\nu)}$$

Equivalentemente,

$$\mu_{\min, N} \propto \left(2^{1-(\beta/\nu) + (\beta'/\nu)} \right)^{-N} \quad (3.28)$$

Assim,

$$\alpha_{\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \log(\mu_{\min, N}) / \log(\varepsilon) \text{ onde } \varepsilon = 2^{-N}.$$

Logo,

$$\alpha_{\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} - \left(\log(C^{te}) - N \cdot \log(2^{1-(\beta/\nu) + (\beta'/\nu)}) \right) / \left(N \cdot \log(2) \right),$$

que nos dá

$$\alpha_{\max} = 1 - (\beta - \beta')/\nu \cong 1.046\dots$$

Como vimos, α_{\max} e α_{\min} são os pontos de $f(\alpha)$ (para o caso da RD) tais que $|f'(\alpha)| = \infty$.

Então podemos caracterizar com segurança o comportamento da magnetização local do perfil da RD (e desta forma para a magnetização local da RD como um todo) como sendo multifractal.

Para finalizar, mostraremos uma relação entre a dimensão fractal da magnetização do perfil da RD em T_c e os expoentes β e ν .

Como vimos, a área gerada pelo perfil da RD corresponde à magnetização média por spin da RD [ver seção 3.5]. Logo, temos que $S_p \propto m(\delta t_N) \propto \delta t_N^\beta$, onde S_p é a área do perfil para T próximo de T_c e $\delta t_N = (t_c - t)/t_c$. Mas sabemos que a área procurada, quando cobrimos a magnetização do perfil com abertos de raio ε , corresponde a área de cada aberto, ε^2 , multiplicada pelo número total de abertos, ε^{-D} , onde D é a dimensão fractal da magnetização do perfil. Logo, $S_p \propto \varepsilon^{2-D}$ e assim:

$$\varepsilon^{2-D} \propto \delta t_N^\beta.$$

Ao fazermos uma transformação de escala no sistema, como $(\delta t_N/\delta t_{N+1}) \cong r_c = 2^{1/\nu}$, obtemos que: $2^{2-D} = (2^{1/\nu})^\beta$.

Dai, temos que

$$\beta = \nu \cdot (2 - D). \quad (3.29)$$

A equação (3.29) expressa a dimensão fractal do perfil da RD em função dos expoentes críticos β e ν .

CONCLUSÕES

Obtivemos, através de leis de recorrência para a magnetização local calculadas após a quebra de simetria de inversão do Hamiltoniano de Ising obtida pela fixação dos spins nas raízes da rede hierárquica diamante (RD) em +1 (condições de contorno), as magnetizações locais de cada sítio da RD.

Somando as magnetizações de todos os spins da RD, encontramos leis de recorrência para a magnetização média por spin para a RD com qualquer número de hierarquias. Desta relação de recorrência global, pudemos calcular exatamente o expoente crítico β para a magnetização a campo nulo, assim como uma expressão analítica para a magnetização média por spin.

Estudamos também o comportamento fractal e multifractal da magnetização local da RD. Para isto, construímos, para uma RD com N hierarquias, um perfil, ou seja, um dos caminhos mais curtos entre as raízes da RD. Sobre o intervalo $[0,1]$ do eixo x real, situamos convenientemente os $2^N + 1$ sítios que constituem um perfil da RD de maneira que à magnetização de cada sítio corresponda uma barra vertical proporcional ao valor da mesma. Esta representação é muito conveniente, pois em T_c podemos calcular exatamente a dimensão fractal da figura assim obtida.

Usando esta representação (e a medida que esta induz sobre o intervalo $[0,1]$) e as definições do capítulo 2, calculamos a função multifractal $f(\alpha)$ para as magnetizações locais do perfil da RD.

Encontramos algumas relações entre parâmetros da

magnetização do modelo de Ising a campo nulo na RD (dimensão fractal da magnetização do perfil, α_{\max} , α_{\min}) e grandezas críticas na RD (β , β_{\max} , ν).

Seria interessante em estudos futuros analisar certas generalizações para os estudos por nós realizados. Isto pode ser feito, utilizando o modelo de Potts a q estados (o modelo de Ising é igual ao modelo de Potts, quando $q = 2$), colocando campos locais em cada sítio da rede e generalizando os calculos para algumas famílias de redes fractais.

O calculo exato de $f(\alpha)$ para o perfil de uma rede fractal hierárquica (se for possível) poderia nos fornecer subsídios para a discussão das idéias de universalidade em fractais.

Também seria interessante estudar a contribuição dos diferentes subconjuntos da RD, caracterizados por α_1 e $f(\alpha_1)$, para fenômenos críticos em redes hierárquicas. Isto poderia nos levar a entender um pouco melhor os fenômenos críticos em fractais.

APÊNDICE A

Seja a equação

$$t = 2t^2/(1 + t^4) \quad (\text{A.1})$$

As raízes da equação acima são:

$$t_c = \left((9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{2/3} - 3^{1/6} \cdot (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{1/3} - 2.3^{1/3} \right) / \left(3^{7/6} \cdot (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{1/3} \right); \quad (\text{A.2a})$$

$$t_\alpha = \left(i \cdot \left[(9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{2/3} \cdot 3^{1/2} + 2.3^{1/3} \cdot 3^{1/2} \right] + 2.3^{1/3} - (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{2/3} - 2.3^{1/6} \cdot (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{1/3} \right) / \left(2.3^{7/6} \cdot (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{1/3} \right); \quad (\text{A.2b})$$

$$t_\beta = \left(-i \cdot \left[(9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{2/3} \cdot 3^{1/2} - 2.3^{1/3} \cdot 3^{1/2} \right] + 2.3^{1/3} - (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{2/3} - 2.3^{1/6} \cdot (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{1/3} \right) / \left(2.3^{7/6} \cdot (9.11^{1/2} + 17.3^{1/2})^{1/3} \right), \quad (\text{A.2c})$$

além das raízes 0 e 1.

Podemos observar que $t_\alpha, t_\beta \in \mathbb{C}$ e $t_\alpha = t_\beta^*$ com $\text{Im}(t_\alpha) \neq 0$.

Vemos que $t_c \in \mathbb{R}$ é a solução procurada, com o valor

$$t_c \cong 0.543689.$$

APÊNDICE B

Neste apêndice calcularemos o valor do expoente crítico β para a RD através da relação de recorrência (4.23),

$$y^2 \cdot \left(2 + 4A_c\right)/16 - y \cdot \left(3 + 4A_c\right)/4 + 1 = 0. \quad (\text{B.1})$$

As soluções de (B.1) são dadas por

$$y_1 = \left\{ \left(\left(3 + 4A_c\right)/4 \right) + \left[\left(\left(3 + 4A_c\right)/4 \right)^2 - 4 \cdot \left(\left(2 + 4A_c\right)/16 \right) \right]^{1/2} \right\} / \left\{ \left(2 + 4A_c\right)/8 \right\} \quad (\text{B.2a})$$

e também

$$y_2 = \left\{ \left(\left(3 + 4A_c\right)/4 \right) - \left[\left(\left(3 + 4A_c\right)/4 \right)^2 - 4 \cdot \left(\left(2 + 4A_c\right)/16 \right) \right]^{1/2} \right\} / \left\{ \left(2 + 4A_c\right)/8 \right\}. \quad (\text{B.2b})$$

As raízes y_1 e y_2 , com $A_c = t_c/(1 + t_c^2)$ onde $t_c \cong 0.543689 \Rightarrow A_c \cong 0.419643$, valem portanto $y_1 \cong 4$ e $y_2 \cong 1.087378$. Como sabemos, $y \cong (r_c)^\beta$, logo $\beta_{1,2} = \log(y_{1,2})/\log(r_c)$, e $r_c \cong 1.67857$. Assim obtemos $\beta_2 \cong 2.6765$ e $\beta_1 \cong 0.161734$.

A solução geral para a equação de diferenças finitas

$$m_N = \left(3 + 4A_c\right) \cdot \left(1/4\right) \cdot m_{N-1} - \left(2 + 4A_c\right) \cdot \left(1/16\right) \cdot m_{N-2}, \quad (\text{B.3})$$

obtida a partir da equação (3.19) no limite N grande, é a combinação linear das soluções β_1 e β_2 . A solução geral se escreve então

$$m_N = c_1 \cdot (\delta t)^{\beta_1} + c_2 \cdot (\delta t)^{\beta_2}, \text{ onde } \delta t = (t - t_c)/t_c. \quad (\text{B.4})$$

Devido ao fato de que $\beta_2 > \beta_1$, o termo em β_2 na equação (B.4) representa apenas uma correção para o termo em β_1 , portanto obteremos que $\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_{RD} = \beta_1 \cong 0.161734$.

APÊNDICE C

No capítulo 4 seção 5 definimos os sítios mais internos da RD como sendo aqueles cuja magnetização é dada pela sequência $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ onde:

$$a_i = A_i (a_{i-1} + a_{i-2}); \quad a_0 = a_1 = 1 \quad \text{e} \quad A_i = t_N / (1 + t_N^2).$$

Representamos o limite assintótico do comportamento da magnetização local a_i por $\lambda.(\delta t)^\beta$ onde $\delta t \equiv (t-t_c)/t_c$. Isto é possível pois a equação acima é uma equação de diferenças finitas cuja solução geral é da forma enunciada. Obtemos então das relações (3.3) e (3.10)

$$\lambda.(\delta t_N)^\beta = A_c \left[\lambda.(\delta t_{N-1})^\beta + \lambda.(\delta t_{N-2})^\beta \right], \quad (\text{C.1})$$

onde $A_c \cong 0.419643$. Após simplificação obtemos

$$(\delta t_N / \delta t_{N-2})^\beta = A_c \left[(\delta t_{N-1} / \delta t_{N-2})^\beta + 1 \right].$$

Como sabemos [ver cap. 3 sec. 5] $(\varepsilon_1 / \varepsilon_j) = r_c^{j-1}$ onde $r_c = (dt'/dt)|_{T_c}$. Portanto, a equação acima reduz-se a

$$(r_c^\beta)^2 = A_c \left[(r_c^\beta) + 1 \right],$$

onde fazemos a substituição $y = r_c^\beta$ obtendo

$$y^2 = A_c \left[y + 1 \right]. \quad (\text{C.2})$$

As soluções de (C.2) se escrevem como:

$$y_1 = \left\{ A_c + \left(A_c^2 + 4.A_c \right)^{1/2} \right\} / \left(2.A_c \right) \cong 0.89075378 \quad (\text{C.3a})$$

$$y_2 = \left\{ A_c - \left(A_c^2 + 4.A_c \right)^{1/2} \right\} / \left(2.A_c \right) \cong -0.47111104 \quad (\text{C.3b})$$

Daí calculamos β através da equação

$$\beta_{1,2} = \log(y_{1,2}) / \log(r_c),$$

onde $r_c = (1 + t_c^2)^2 \cong 1.6785735$. Assim obtemos $\beta_1 \cong 0.22335841$ e β_2 não existe pois $y_2 < 0$. A solução geral para a magnetização dos sítios mais internos se escreve

$$m_N = c_1 \cdot (\delta t)^{\beta_1}, \text{ onde } \delta t = (t - t_c) / t_c.$$

APÊNDICE D

D.1) Dimensões Negativas:

É fato que um dado conjunto S não pode ter dimensão fractal negativa, pois se isto ocorresse teríamos: $N(\varepsilon_1) \propto \varepsilon_1^{-D}$ (onde $D < 0$) e se $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_2^{-D} > \varepsilon_1^{-D}$ e o n° de abertos necessários para cobrir o conjunto S , $N(\varepsilon)$, decresceria com $\varepsilon \Rightarrow 0$. Isto é absurdo pois se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, o n° mínimo de abertos ε_1 necessários será no máximo $N(\varepsilon_2)$ pois sempre existirá um aberto ε_1 concêntrico à ε_2 . Logo $D \geq 0$. Mas quando analisamos um grande número de conjuntos formados à partir da mesma regra ou modelo, podemos extrair propriedades médias interessantes que não podemos detetar em cada conjunto individualmente. Isto ocorre geralmente em sistemas contendo alguma forma de estocasticidade, pois a partir de um modelo determinista cujas condições iniciais são fixas obteremos sempre o mesmo resultado ao deixarmos evoluir o modelo. Assim não observamos flutuações no comportamento do sistema. No caso de um modelo com estocasticidade, a réplica final será uma variável aleatória com uma dada distribuição de probabilidades. Neste caso, podemos observar propriedades médias não triviais devido às flutuações que ocorrem neste sistema [49].

D.2) Regra da intersecção:

Dados dois subconjuntos S_1 e S_2 (de dimensões quaisquer) de um espaço Euclidiano de dimensão E , a codimensão de cada um deles é definida como [49]:

$$\text{cod}(S_i) = E - \text{dim}(S_i) \text{ onde } i=1,2 \quad (\text{D.1})$$

Seja $S = S_1 \cap S_2$. Este conjunto tem dimensão "genérica" (entendida como a "média" das dimensões de todas as intersecções possíveis de um conjunto de dimensão S_1 e outro de dimensão S_2 inclusos num espaço Euclidiano de dimensão E) satisfazendo à:

$$\text{cod}(S) = \text{cod}(S_1) + \text{cod}(S_2) \quad (\text{D.2})$$

Podemos verificar diretamente esta relação no caso de subespaços de dimensão inteira. Por exemplo, a intersecção entre uma reta e um plano no espaço de dimensão três. Calulemos o número de vetores linearmente independentes e ortogonais (VLIO) à intersecção acima descrita. A reta possui dois VLIO e o plano apenas um. A probabilidade que este último seja paralelo ao plano formado pelos dois VLIO à reta é claramente zero. Portanto o número de VLIO à intersecção da reta com o plano será três. Logo a dimensão desta intersecção será zero.

No caso mais geral sejam:

$$\text{dim}(S_1) = m \in \mathbb{N}, \text{dim}(S_2) = n \in \mathbb{N},$$

$$\text{dim}(S) = s \in \mathbb{N} \text{ e } \text{dim}(E) = e \in \mathbb{N}.$$

A probabilidade que um vetor combinação linear dos $(e-m)$ VLIO à S_1 seja paralelo à hipersuperfície formada pelos $(e-n)$ VLIO à S_2 é zero como no exemplo acima. Portanto o n° de VLIO à S será $(e-m) + (e-n) = (e-s) = \text{cod}(S)$, o que verifica a regra. São exemplos de intersecção entre figuras Euclidianas de baixa dimensionalidade: ponto \cap reta; reta \cap plano; plano \cap volume; reta \cap volume; reta \cap reta; etc.

Contudo se $2e-m-n > e$, ou seja $e > m+n$, a regra dá valor negativo para s . Neste caso a intersecção é geralmente vazia e temos tendência de assumir que $s=0$. Esta antiga interpretação

de (D.2) não leva em conta as diferenças entre intersecções como reta \cap reta em $E=3$ e ponto \cap reta em $E=2$. Utilizando a redefinição de dimensão exposta à seguir, poderemos levar em conta estas diferenças.

D.3) Redefinição de dimensão:

Como dissemos antes, se temos subconjuntos S_1 e S_2 de um espaço Euclidiano E , sua intersecção S terá com certeza dimensão $d_s \geq 0$. Por exemplo, a intersecção de duas retas num plano pode ser o conjunto vazio ($d = 0$), um ponto ($d_p = 0$) ou uma reta ($d_r = 1$). Em cada caso, a dimensão é bem determinada. Porém, se falamos em dimensões genéricas, estamos falando de uma média sobre um conjunto de possíveis configurações de uma variável aleatória. Assim, redefiniremos dimensão de maneira que [49]:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle \propto \varepsilon^{-D} \quad (D.3)$$

onde $N(\varepsilon)$ é o número mínimo de abertos ε necessários para cobrir uma determinada configuração e $\langle N \rangle$ é a média ponderada de N (onde os pesos são as probabilidades de cada configuração) sobre todas as configurações possíveis do modelo.

Esta redefinição de dimensão está de acordo com a regra da dimensão genérica de uma intersecção. Ela nos leva a reter apenas as características geométricas gerais de um conjunto muito grande de realizações de um modelo. Estas características estão "latentes" numa única realização e só podem ser observadas na média por um processo que leve em conta tanto as nossas limitações de observação quanto o fato de que só podemos

imaginar algumas propriedades geométricas de um conjunto através de processos de limite (só podemos imaginar pontos grossos, espaços limitados, retas grossas, etc). Daí termos necessidade de pensar em termos de processos de limite. Portanto utilizando estes conceitos e aplicando a definição (D.3) para alguns casos de intersecção genérica de conjuntos, obteremos como dimensão da intersecção o resultado fornecido pela equação (D.2).

Vejamos um exemplo concreto. A nossa representação de um plano está, por exemplo, ligada àquela de um quadrado de lado L o qual fazemos tender ao infinito. Da mesma forma, uma reta terá comprimento L e largura ε e um ponto será um quadrado de lado ε o qual faremos tender a zero. Estamos interessados em observar o comportamento da intersecção entre um ponto e uma reta embebidos num plano. O caso real deriva da representação acima quando tomamos os limites citados. Esta intersecção é seguramente diferente daquela entre duas retas num plano, porém, pela antiga definição de dimensão genérica de intersecção não podíamos diferenciar os dois casos. A diferença entre eles será evidenciada pela nova definição nos casos limites $\varepsilon \rightarrow 0$ e $L \rightarrow \infty$.

Calculemos três exemplos esclarecedores:

i) Intersecção genérica (S) de duas retas num plano:

$$2 - \dim(S) = 2 - 1 + 2 - 1 = 2 \Rightarrow D_s = \dim(S) = 0$$

Ocorrerá uma intersecção quando o centro de cada quadrado (de lado ε) que constitui uma reta (de comprimento L) estiver sobre a outra reta de largura ε e comprimento L . Para cada configuração geométrica, o n° de intersecções será uma variável

aleatória N , que pode assumir os valores 1 ou 0. Portanto a probabilidade para que haja intersecção é:

$$p(N=1) \cong (\# \text{ quadrados numa reta}) \times (\text{Área da outra}) / (\text{Área do plano})$$

$$p(N=1) \propto (L/\varepsilon) \cdot (\varepsilon L/L^2) = 1$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = 1 \cdot p(N=1) + 0 \cdot p(N=0) = 1$$

$$\text{Então: } D_s = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\log(\langle N \rangle)}{\log(\varepsilon)} = 0$$

Como esperávamos, pela regra da intersecção, $D_s = 0$.

ii) Intersecção genérica de um ponto e uma reta (conjunto S) num plano:

$$2 - \dim(S) = 2 - 1 + 2 - 0 = 3$$

$$\Rightarrow D_s = \dim(S) = -1$$

Como no caso anterior, o n° de intersecções será uma variável aleatória N , que pode assumir os valores 1 ou 0. Portanto a probabilidade para que haja intersecção é:

$$p(N=1) \cong (\text{Área da reta}) / (\text{Área do plano}) \propto \varepsilon L / L^2 = \varepsilon / L$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = 1 \cdot p(N=1) + 0 \cdot p(N=0) \propto \varepsilon / L$$

Então:

$$D_s = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\log(\langle N \rangle)}{\log(\varepsilon)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\log(\varepsilon) - \log(L)}{\log(\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow D_s = \lim_{L \rightarrow \infty} -1 = -1$$

Então como esperávamos, pela regra da intersecção, $D_s = -1$.

iii) Processo de nascimento e morte (ver [50]). Como no caso da medida binomial, dividimos cada sub-intervalo em 2 sub-intervalos. Na hierarquia k , temos 2^k sub-intervalos. Cada um deles, na hierarquia $k-1$, estará "vivo" ou "morto". Se estiver morto, os 2 sub-intervalos gerados, também estarão mortos. Porém, se estiver vivo, os dois novos sub-intervalos

gerados têm probabilidades (cada um independentemente) p de viver e $1-p$ de morrer.

O número médio de sub-intervalos vivos gerados por um sub-intervalo vivo será dado por:

$$p(N=0) = (1-p)^2; p(N=1) = 2p(1-p); p(N=2) = p^2 \Rightarrow \langle N \rangle = 2p.$$

Se $\langle N \rangle \geq 1$ ($p \geq 1/2$), poderão existir sub-intervalos vivos em qualquer hierarquia, mas se $\langle N \rangle < 1$ ($p < 1/2$), todo o intervalo morrerá, com probabilidade 1. Isto explica-se, pois sabemos que o número médio de sub-intervalos vivos numa dada hierarquia k é dado por [50]:

$$\langle N_k \rangle = \langle N_1 \rangle^k = (2p)^k$$

Calculemos a dimensão do conjunto de sub-intervalos vivos:

$$\text{Se } \varepsilon = 2^{-k} \Rightarrow D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \langle N_k \rangle}{\log (2^k)} = \log_2(2p)$$

Portanto, $D = \log_2(2p)$. Logo, se $p < 1/2$, $D < 0$.

D.4) Aplicações a Multifractais:

Quando analisamos a medida multinomial, supomos sempre a existência de um processo determinista de obtenção das "massas" em cada sub-intervalo.

Isto, de certa forma, limita a aplicação do modelo, pois os processos naturais conhecidos são extremamente irregulares para que possam ser descritos por processos deterministas. É conveniente portanto adicionar ao modelo características aleatórias.

No caso multinomial aleatório, as massas m_β serão dadas por uma variável aleatória M_β . Logo [33,49]:

$$m(dt) = M(\eta_1)M(\eta_1\eta_2)\dots M(\eta_1\eta_2\dots\eta_k), \quad (D.4)$$

onde impomos que $\langle M \rangle = 1/b$ (onde b é o número de divisões que sofre cada sub-intervalo) para conservar a normalização da massa total, na média. Ou seja, a soma de todos os $m(dt)$ vale em média 1.

Sabendo que, $\alpha = \lim_{dt \rightarrow 0} \log(\mu(dt))/\log(dt)$, temos (pois $dt=b^{-k}$)

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log[M(\eta_1)M(\eta_1\eta_2)\dots M(\eta_1\eta_2\dots\eta_k)]}{\log(dt)}$$

Logo:

$$\alpha = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_i \log_b [M(\eta_1\eta_2\dots\eta_i)] \quad (D.5)$$

E $\rho(\alpha)$ pode ser obtido como o limite reescalado por $\log(1/dt)$ do logaritmo da distribuição de probabilidades para $m(dt)$. Podemos então obter $f(\alpha) = \rho(\alpha) + E$, onde E é a dimensão do suporte da medida.

$$f(\alpha) = E + \rho(\alpha) = E + \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ - \frac{\log(\text{prob.}[m(dt)])}{\log(dt)} \right\}.$$

Este modelo pode ter propriedades bastante diversas daquele determinista. Possivelmente, uma das mais marcantes é a existência de α 's "latentes", ou seja, α 's tais que $f(\alpha) < 0$. Estes α 's, representam a escala da medida de certos abertos tais que, no limite $k \rightarrow \infty$, a probabilidade de sua presença na medida que observamos tende a zero. Ou seja, o número de abertos, entre todos os abertos em que dividimos a medida em questão, que genericamente observamos (e cuja medida se escala com α) é zero quando $k \rightarrow \infty$.

Portanto, em geral não conseguimos "detetar" o comportamento α da medida. Este comportamento está "latente". Apenas fazendo uma média sobre um número grande de medidas observaremos o comportamento α [49].

APÊNDICE E

Queremos calcular o conjunto de frequências $\{\phi_i\}$ tal que este nos dê o conjunto cuja contribuição para

$$\chi(q, \varepsilon) = \sum_i \mu_i^q, \quad (\text{E.1})$$

seja a mais relevante.

Como sabemos:

$$\alpha = - \sum_{i=0}^{b-1} \phi_i \log_b m_i; \quad (\text{E.2})$$

e também temos

$$f(\alpha) = - \sum_{i=0}^{b-1} \phi_i \log_b \phi_i. \quad (\text{E.3})$$

Como vimos anteriormente, podemos, no limite $\varepsilon \rightarrow \infty$, escrever:

$$\chi(q, \varepsilon) \cong \int \varepsilon^{-f} \varepsilon^{q\alpha} d\alpha \cong \int \varepsilon^{-f+q\alpha} d\alpha$$

Como $\varepsilon \rightarrow 0$, a contribuição mais relevante para $\chi(q, \varepsilon)$ será tal que minimiza

$$\tau(q) = q \cdot \alpha - f(\alpha). \quad (\text{E.4})$$

Substituindo (E.2) e (E.3) em (E.4), com o vínculo $\sum_i \phi_i = 1$, obtemos (λ é um multiplicador de Lagrange)

$$\frac{d}{d \phi_i} \left[\left(-q \cdot \sum_i \phi_i \cdot \log_b m_i + \sum_i \phi_i \cdot \log_b \phi_i \right) + \lambda \cdot \left(\sum_i \phi_i - 1 \right) \right] = 0.$$

Daí obtemos

$$(1 + \lambda) + \log_b m_i^q = \log_b \phi_i.$$

Portanto

$$\phi_i = c \cdot m_i^q, \text{ onde } c = e^{(1+\lambda)}.$$

$$\text{Como } \sum_i \phi_i = 1 \Rightarrow c = \left(\sum_i m_i^q \right)^{-1}.$$

Logo

$$\phi_i = m_i^q / \left\{ \sum_j m_j^q \right\}, \quad (\text{E.5})$$

como queríamos provar.

REFERÊNCIAS:

- [1] L. Onsager - "Crystal Statistics. I. A Two- and Three-Dimensional model with an Order-Disorder Transition", Phys. Rev. 65, No 3 e 4, (1944), 117-149.
- [2] H. E. Stanley - "Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena" - Clarendon Press, 1971.
- [3] P. M. Bleher and E. Zalyz - "Asymptotics of the Susceptibility for the Ising Model on the Hierarchical Lattices", Commun. Math. Phys. 120, (1989), 409-436.
- [4] R. J. Baxter - "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" - London Academic Press - (1982).
- [5] R. B. Griffiths and M. Kaufman - "Spin systems on hierarchical lattices. Introduction and thermodynamic limit", Phys. Rev. B 26, (1982), 5022-5032.
- [6] A. Coniglio - "Multifractal Structure of Clusters and Growing Aggregates", Lectures at STATPHYS 16, Boston - Ed. por H. E. Stanley - North Holland Amsterdam, Phys. A 140, (1986), 51-61.
- [7] N. Ito and M. Suzuki - "Fractal Configurations of the Two- and Three-Dimensional Ising Models at the Critical Point", Prog. Theor. Phys. 77, (1987), 1391-1401 e "Fractalness of the Ising Configuration", J. Physique, Tome 49, Colloque C8, (1988), 1565-1566.
- [8] B. B. Mandelbrot - "Fractals: Form, Chance and Dimensions" - S. Francisco: W. H. Freeman 1977.
- [9] A. Coniglio and H. E. Stanley - "Screening of the Deeply

- Invaginated Clusters and the Critical Behavior of the Random Superconducting Network", Phys. Rev. Lett. 52, (1984), 1068-1071.
- [10] T. Tél - "Fractals, Multifractals and Thermodynamics", Z. Naturforsch 43 a, (1988), 1154-1174.
- [11] W. A. M. Morgado, S. Coutinho and E. M. F. Curado - "Multifractal Magnetization on Hierarchical Lattices", J. Stat. Phys., 61, No 3/4, (1991), 913-921.
- [12] H. B. Callen - "Thermodynamics" - John Wiley & Sons (1985).
- [13] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin - "Solid State Physics" - Saunders College (1981).
- [14] R. Balian - "Du Microscopique au Macroscopique" - Ellipses, Ecole Polytechnique, Paris (1982).
- [15] P. Pfeuty and G. Toulouse- "Introduction au Groupe de Renormalisation et a ses Applications - Phénomènes Critiques des Transitions de Phase et d'Autres" - Presses Universitaires de Grenoble (1975).
- [16] L. Landau and Lifschitz - "Physique Statistique" - Editions Mir, Moscou (1967).
- [17] D. Stauffer - "Scaling Theory of Percolating Clusters", Phys. Rep. 54, No 1, (1979), 1-74.
- [18] R. B. Griffiths and J. C. Wheeler - "Critical Points in Multicomponent Systems", Phys. Rev. A 3, (1970), 1047-1064.
- [19] M. W. Zemansky - "Heat and Thermodynamics" 4^a edição McGraw-Hill Book Company, New York (1957).
- [20] K. G. Wilson - "Problems in Physics with Many Scales of

- Lenght", *Scient. Amer.* 241 no 2, agosto (1979), 158-179.
- [21] F. Y. Wu - "The Potts Model", *Rev. of Mod. Phys.* 54, No 1, janeiro (1982), 235-268.
- [22] J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke - "The Dimensions of Chaotic Attractors", *Physica D* 7, (1983), 153-180.
- [23] Hausdorff, *Math. Annalen* 79, 157 (1918).
- [24] P. Meakin - "Diffusion-limited surface deposition in the limit of large anisotropy", *Phys. Rev. A* 33, no. 3, (1986), 1984-1989 e "Diffusion-controlled deposition on surfaces: cluster-size distribution, interface exponents, and other properties", *Phys. Rev. B* 30, no. 8, (1984), 4207-4214.
- [25] H. Herrmann - "Fractures Patterns and Scaling Laws", Lectures at STATPHYS 17, Rio de Janeiro, *Phys. A* 163, (1989), 359-372.
- [26] L. Pietronero, A. Erzan and C. Evertsz - "Theory of Laplacian Fractals: Diffusion Limited Aggregation and Dielectric Breakdown Model", *Phys. A* 151, (1988), 207-245.
- [27] V. M. Shalaev and M. I. Shtokman - "Optical properties of fractal clusters (susceptibility, surface enhanced Raman scattering by impurities)", *Sov. Phys. JETP* 65 No 2, (1987), 287-294.
- [28] J. R. Melrose - "Hierarchical lattices: some examples with a comparison of intrinsic dimension and connectivity and Ising model exponents", *J. Phys. A* 16, (1983), 3077-3083.
- [29] A. A. Migdal - "Recursion equations in gauge field theories", *JETP* 42 No 3, (1976), 413-418 e "Phase transitions in gauge and spin-lattice systems", *JETP* 42 No

- 4, (1976), 743-746 e L. P. Kadanof - "Notes on Migdal's Recursion Formulas", Ann. Phys. 100, (1976), 359-394.
- [30] H. O. Martín and C. Tsallis - "Self-dual cluster renormalisation-group approach for the square lattice Ising model: specific heat and magnetisation", J. of Phys. C Solid State Phys. 14, (1981), 5645-5657.
- [31] T. Nagatani and H. E. Stanley - "Double-crossover phenomena in Laplacian growth: effects of sticking probability and finite viscosity ratio", Phys. Rev. A 41 No 6, (1990), 3263-3269.
- [32] B. B. Mandelbrot - "Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergences of high moments and dimension of the carrier", J. Fluid Mech. 62 part 2, (1974), 351-358.
- [33] B. B. Mandelbrot, Fluctuations and Pattern Growth (Cargèse) Ed. H. E. Stanley and N. Ostrowsky, Dordrecht Boston : Kluwer (1988).
- [34] M. Blunt - "Geometry of multifractal systems", Phys. Rev. A 39 No 5, (1989), 2780-2782.
- [35] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I Procaccia and B. I. Shraiman - "Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets", Phys. Rev. A 33, (1986), 1141-1151.
- [36] P. M. Morse and H. Feshbach - "Methods of Theoretical Physics" - McGraw-Hill Book Company (1966).
- [37] Para uma visão mais geométrica, ver V. I. Arnold - "Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica" - Edições Mir, Moscou (1987).

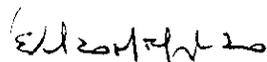
- [38] P. M. Bleher and E. Zalyš - "Existence of Long-Range Order in the Migdal Recursions Equations", Commun. Math. Phys. 67, (1979), 17-42.
- [39] A. N. Berker and S. Ostlund - "Renormalisation-group calculations of finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering", J. Phys. C 12, (1979), 4961-4975.
- [40] S. R. McKay and A. N. Berker - "Magnetic susceptibilities of cluster-hierarchical models", Phys. Rev. B 29, (1984), 1315-1320.
- [41] G. Györgyi and I. I. Satija - "Dimensional Reduction and Universal $f(\alpha)$ in Magnetic Chains", Phys. Rev. Lett. 62, (1989), 446-449.
- [42] B. Derrida, L. de Sèze and C. Itzykson - "Fractal Structure of Zeros in Hierarchical Models", J. of Stat. Phys. 33, (1983), 559-569. Ver também C. Itzykson and J. M. Luck - "Zeroes of the Partition Function for Statistical Models on Regular and Hierarchical Lattices", Progress in Physics, vol 11, Critical Phenomena (1983 Brasov School Conference), 1985 Birkhäuser Boston, Inc.
- [43] R. Savit - "Duality in field theory and statistical systems", Rev. of Mod. Phys. 52 No. 2, Part I, abril (1980), 453-487.
- [44] M. Kaufman and R. B. Griffiths - "Infinite susceptibility at high temperatures in the Migdal-Kadanoff scheme", J. Phys. A 15 No 1, (1982), L239-L274.
- [45] D. R. Nelson and M. E. Fisher - "Soluble Renormalisation Groups and Scaling Fields for Low-Dimensional Ising

- Systems", Ann. Phys. 91, (1975), 226-274.
- [46] C. Tsallis, Sólidos 82, Reunion Anual de Fisica del Solido, Bariloche, julho (1982), CNEA, Argentina.
- [47] K. Weierstrass - "Mathematische Werke" (Mayer and Müller, Berlim, (1895).
- [48] A. O. Caride and C. Tsallis - "Simple renormalisation group method for calculating thermal equations of states", J. Phys. A 20, (1987), L665-L671.
- [49] B. B. Mandelbrot - "Negative Fractal Dimensions and Multifractals", Lectures at STATPHYS 17, Physica A 163, (1990), 306-315.
- [50] W. Feller - "An Introduction to Probability Theory and Its Applications" - vol. I e II. John Wiley & Sons, Inc (1950).

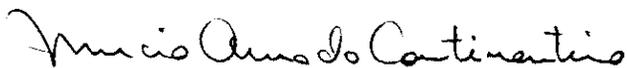
"MAGNETIZAÇÃO MULTIFRACTAL EM REDES HIERARQUICAS"

WELLES ANTONIO MARTINEZ MORGADO

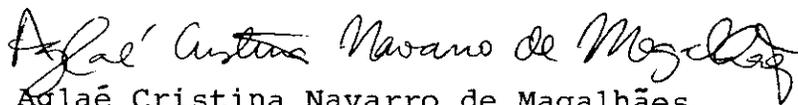
Tese de Mestrado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



Evaldo Mendonça Fleury Curado - Presidente



Mucio Amado Continentino



Aglaé Cristina Navarro de Magalhães