

FORTUNATO SILVA DE MENEZES

GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO EM ANTIFERROMAGNETOS DE POTTS:
UM CRITÉRIO PARA A ESCOLHA DE CÉLULAS
E APLICAÇÕES A FRACTAIS DO TIPO SIERPINSKI-GASKET

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1991-

A meus pais,
Aos meus irmãos,
A singularidades que encontramos na vida que,
em diferentes aspectos, nos fazem GREYER.

AGRADECIMENTOS

A Aglaé Cristina Navarro de Magalhães cuja seriedade, orientação competente e dedicada tornou possível este trabalho. Seu enorme apoio e incentivo em todas as horas serão, para mim, inesquecíveis.

A Constantino Tsallis por seu espírito de liderança e profissionalismo.

Aos amigos Evaldo M.F. Curado, Edson P. da Silva, Anna Chame, Marcelo L. Martins, Hélio F.V. de Resende, Francisco Tamarit, Ladário da Silva, Daniel Stariolo, Welles Morgado, pelas proveitosas discussões.

Aqueles alunos, professores e funcionários deste Centro que nestes anos contribuíram para estabelecer um ambiente profissional.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pelas oportunidades oferecidas para realização deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho propomos um critério, dentro do contexto de Grupo de Renormalização no Espaço Real, para a escolha de células no estudo de antiferromagnetos de Potts com q estados em sistemas que sejam aproximados (ou representados) por redes hierárquicas. Este critério é baseado nas energias das configurações de mais baixa energia deste modelo nas células não-renormalizada (ϵ_F e ϵ_I) e renormalizada (ϵ'_F e ϵ'_I) com a restrição dos spins situados nas raízes da rede hierárquica estarem todos no mesmo estado (tipo F) ou não (tipo I). Usando uma transformação de Grupo de Renormalização (GR) em termos dos pesos de Boltzmann para spins das raízes em estados fixos (nas quais estas energias aparecem naturalmente), provamos sua equivalência (para qualquer q no caso de redes hierárquicas com 2 raízes e, para $q=2$, em redes com 3 raízes) com a preservação da função de correlação entre 2 spins quaisquer das raízes da rede hierárquica. Analisamos esta transformação (para o caso antiferromagnético deste modelo) à $T = 0$ e verificamos que, quando $\epsilon_F = \epsilon_I$, é possível a existência de uma fase não usual (onde as correlações decaem com uma lei de potência) cujo atrator encontra-se à temperatura finita. Estendemos esta transformação de GR para o caso do modelo de Potts com 2 parâmetros (interações entre 2 e 3 spins) em sistemas que envolvam redes hierárquicas com 3 raízes.

Propomos também o fractal Sierpinski-Gasket com m folhas com gerador $G(b,d=2,m)$ (de lado b) que apresenta ordem de ramificação infinita para $m > 1$. Estudamos o modelo de Potts com $q=2,3$ e 4 estados (ferro (F) e antiferromagnético (AF)) utilizando a transformação de GR acima. Obtemos, em função de m o comportamento crítico (fronteiras e o expoente crítico térmico (ν_T)) exatamente para o caso F e, possivelmente também, para o caso AF deste modelo em alguns fractais. Verificamos para o caso AF deste modelo no fractal Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$ que, nos casos $q=2$ e 4 , surge, para $m > m_c(q)$, uma fase AF não usual com atrator à $T \neq 0$. Calculamos exatamente, para o modelo de Ising, a função de correlação entre 2 spins situados nas raízes deste fractal e mostramos que a mesma decai com uma lei de potência das distância química entre as raízes ao longo de toda esta fase.

SUMMARY

In this work we proposed a criterion, within a Real Space Renormalisation Group framework, for the choice of cells in the study of the q -state antiferromagnetic Potts model in systems which are approximated (or represented) by hierarchical lattices. This criterion is based in the energies of the lowest energy configurations of this model in the non-renormalised (ε_F and ε_I) and renormalised (ε_F' and ε_I') cells with the restriction that the spins located in the roots of the hierarchical lattice are all in the same state (type F) or not (type I). Using proposed a Renormalisation Group (RG) transformation in terms of the Boltzmann weights where the spins of the roots are in fixed states (where those energies appear naturally), We proved its equivalence (for any q in the case of two-rooted hierarchical lattice and, for $q=2$, in three-rooted lattices) with the preservation of the correlation function between any two spins of the roots. We analyse this transformation (for the antiferromagnetic case of this model) at $T = 0$ and we verified that, when $\varepsilon_F = \varepsilon_I$, the occurrence of a non-usual fase (which has a power law decay of the correlations) whose attractor is at $T \neq 0$ is possible. We extended this RG transformation for the Potts model with 2 parameters (interactions between 2 and 3 spins) in systems

which involve three-rooted hierarchical lattices.

We also propose the m sheet Sierpinski-Gasket with generator $G(b,d=2,m)$ (with edge b) which presents an infinite order of ramification for $m > 1$. We study the $q=2,3$ and 4 states (ferro (F) and antiferromagnetic (AF)) Potts model using the above RG transformation. We obtained, as a function of m , the critical behavior (critical frontiers and thermal critical exponent (ν_T)) exactly for the F case and, possibly too, for the AF case of this model on some fractals. We verified for the AF case of this model on the Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$ that, for $q=2$ and 4, appears, for $m > m_c(q)$, a non-usual AF fase with an attractor at $T \neq 0$. We calculated exactly, for $q=2$, the 2-spin correlation function (for spins located at the roots of the fractal) and we showed that it has a power law decay with the chemical distance between the roots throughout this entire non-usual fase.

SUMÁRIO

	<u>PAG.</u>
Agradecimentos.....	iii
Resumo.....	iv
Abstract.....	vi
Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas.....	xiv
<u>Capítulo 1</u> - Introdução.....	1
<u>Capítulo 2</u> - Fractais.....	8
2.1 - Introdução.....	8
2.2 - Definição de alguns parâmetros geométricos importantes.....	12
2.3 - Redes Hierárquicas.....	22
2.4 - Definição de alguns parâmetros geométricos importantes.....	24
<u>Capítulo 3</u> - Fenômenos Críticos e Grupo de Renormalização	
3.1 - Fenômenos Críticos: Noções Gerais.....	26
3.2 - Grupo de Renormalização.....	33
3.3 - Criticalidade dos Modelos de Ising e Potts em Fractais.....	43
3.4 - O Problema da universalidade em Fractais....	47

Capítulo 4 - Grupo de Renormalização: Escolha da célula	
no estudo de antiferromagnetos de Potts.....	50
4.1 - Introdução.....	50
4.2 - Modelo de Ising na cadeia linear.....	52
4.3 - Modelo de Ising na rede hierárquica diamante	58
4.4 - Transformação de Grupo de Renormalização com 1 parâmetro.....	63
4.5 - Equivalência da transformação de Grupo de Renormalização com a preservação da função correlação a dois spins ($\Gamma_{12}(G)$).....	65
4.6 - Formalização da Transformação de Grupo de Renormalização em termos de ϵ_F e ϵ_1	74
4.7 - Análise da transformação de Grupo de Renormalização a $T = 0$ (caso antiferromagnético, $J_2 < 0$).....	77
4.8 - Transformação de Grupo de Renormalização com 2 parâmetros.....	92
 Capítulo 5 - Modelo de Potts no Fractal Sierpinski-Gasket	
com m folhas.....	98
5.1 - Introdução.....	98
5.2 - Família Sierpinski-Gasket com m folhas.....	99
5.3 - Modelo.....	103
5.4 - Modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2, d=2, m)$	110

5.4.1 - Transformação de Grupo de Renormalização $b=2$ em $b'=1$	110
5.4.2 - Transformação de Grupo de Renormalização $b=4$ em $b'=2$	119
5.5 - Modelo de Potts no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4,d=2,m)$	124
5.5.1 - Modelo de Ising ($q=2$).....	126
5.5.2 - Modelo de Potts ($q=3$).....	141
5.5.3 - Modelo de Potts ($q=4$).....	147
5.5.4 - Expoente Crítico térmico ν_T para $q=2,3$ e 4 ..	154
<u>Conclusões</u>	160
<u>Apêndice A</u>	167
<u>Apêndice B</u>	171
<u>Apêndice C</u>	175
<u>Apêndice D</u>	177
<u>Bibliografia</u>	179

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>PAG.</u>
2.1.1 - Exemplos de Fractais na Natureza.....	9
2.1.2 - Primeiros estágios de construção do conjunto de Cantor.....	10
2.1.3 - Exemplo do fractal Sierpinski-Gasket (mosaico da Igreja de Anagni).....	11
2.2.1 - Exemplo de um fractal determinístico e sua versão aleatória.....	15
2.2.2 - Primeiros estágios de construção do fractal Sierpinski-Gasket (b=2).....	17
2.2.2 - Primeiros estágios de construção do fractal Sierpinski Carpet (b=7,l=3).....	20
2.3.1 - Exemplos de algumas redes hierárquicas.....	23
3.1.1 - Projeções da equação de estado $f(P,V,T) = 0$	27
3.1.2 - Diagrama HxT para um magneto.....	28
3.1.3 - Diagrama HxM para um magneto.....	29
3.2.1 - Ilustração da redução de graus de liberdade segundo a idéia de Kadanoff.....	34
4.2.1 - Diagrama de fases exato do modelo de Ising d=1.	52
4.4.2 - Células de dimensão linear b.....	54
4.2.3 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases para as renormalizações b=2 e 3 em $b'=1$ de b=4 em $b'=2$ (cadeia linear).....	57
4.3.1 - Representação da rede hierárquica diamante.....	58
4.3.2 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases para as renormalizações b=2 em $b'=1$ e b=4 em $b'=2$ (rede diamante).....	60
4.7.1 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases esperado para os casos 3b.1 e 3b.2 (onde surge uma fase AF com atrator  T \neq 0)..	84
4.7.2 - Representação de uma parte de uma rede hipercúbica d-dimensional.....	85

4.7.3 - Fluxos da equação de renormalização e pontos fixos para sistemas com entropia residual.....	90
4.8.1 - Diagrama de fases do modelo de Potts no fractal Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$: renormalização $b=2$ em $b'=1$	97
5.2.1 - Estágios de construção do fractal Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$ com 2 folhas.....	101
5.2.2 - Primeiro estágio de construção do fractal Sierpinski-Gasket $G(3,d=2,m)$ e $G(4,d=2,m)$ com 2 folhas.....	102
5.3.1 - Transformação de renormalização $b=4$ em $b'=1$ para o Sierpinski-Gasket com gerador $G(4,d=2,m)$	104
5.4.1.1 - Transformação de GR $b=2$ em $b'=1$ para o modelo de Ising ($q=2$) no Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m=2)$	111
5.4.1.2 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases para $q=2$ no Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$: Transformação de GR $b=2$ em $b'=1$	113
5.4.1.3 - Gráfico da temperatura crítica $K_B T_C^F / J_2 \times (m-1)$ para $q=2$ no Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$: Transformação de GR $b=2$ em $b'=1$	114
5.4.1.4 - Gráfico do expoente ν_T^F para $q=2$ no Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$: Transformação de GR $b=2$ em $b'=1$	116
5.4.1.5 - Gráfico de $K_C^F \times \ln(m-1)$ para $q=2$ no Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$: Transformação de GR $b=2$ em $b'=1$	118
5.4.2.1 - Transformação de GR $b=4$ em $b'=2$ para o Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$	122
5.4.2.2 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases para o modelo de Ising ($q=2$) no Sierpink-Gasket $G(2,d=2,m)$: Transformação de GR $b=4$ em $b'=2$	123
5.5.1 - Transformação de GR $b=4$ em $b'=1$ para o Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m=2)$	125

5.5.1.1 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases para o modelo de Ising ($q=2$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$: Transformação de GR $b=4$ em $b'=1$	128
5.5.1.2 - Evolução do diagrama de fases para $q=2$ no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$: Transformação de GR $b=4$ em $b'=1$	130
5.5.1.3 - Gráfico do expoente crítico $\eta(m)$ para a fase antiferromagnética com atrator a $T \neq 0$	140
5.5.2.1 - Diagrama de fases para o modelo de Potts ($q=3$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	144
5.5.2.2 - Diagrama de fases e fluxos para o modelo de Potts ($q=3$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m=2)$..	146
5.5.3.1 - Diagrama de fases para o modelo de Potts ($q=4$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	151
5.5.3.2 - Diagrama de fases e fluxos para o modelo de Potts ($q=4$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	152
5.5.3.3 - Variação com m do ponto fixo semi-estável e atrator da fase AF do modelo de Potts ($q=4$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	153
5.5.4.1 - Gráficos dos expoentes críticos ν_T^F e ν_T^{AF} para o modelo de Potts ($q=2,3$ e 4) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	155

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>	<u>PAG.</u>
4.7.1 - Soluções para $T = 0$ da transformação de Grupo de renormalização (eq.(4.4.3)) para diferentes relações das energias ϵ_F e ϵ_I , ϵ_F' e ϵ_I'	79
4.7.2 - Pesos de Boltzmann W_F e W_I para os grafos: cadeia linear ($b=1,2,3$ e 4), rede diamante ($b=2$ e 4) e ponte de Wheatstone ($b=2$ e 4).....	80
5.5.2.1 - Valores dos pontos críticos semi-estáveis (t_c^{*F} e t_c^{*AF}) para as fases F e AF do modelo de Potts ($q=3$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	143
5.5.2.2 - Valores dos pontos críticos semi-estáveis (t_c^{*F}) para a fase F do modelo de Potts ($q=4$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$	150

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo de fenômenos críticos nos quais muitos graus de liberdade atuam cooperativamente tem despertado grande interesse nos últimos anos. Em particular, exemplos de tais fenômenos são as transições de fase em certos sistemas magnéticos.

Um dos modelos que tem sido utilizado em Mecânica Estatística como protótipo de sistemas magnéticos é o modelo de Ising, proposto por Lenz em 1920 e resolvido exatamente no caso da cadeia linear, por Ising em 1925 [1]. Neste modelo, associamos uma variável de aleatória (σ_i) a cada sítio i de uma rede, a qual pode assumir 2 valores possíveis $\sigma_i = \pm 1$. A energia de interação entre sítios vizinhos (i e j) é dada por $H = -J \sigma_i \sigma_j$ (onde J é a constante de acoplamento entre σ_i e σ_j)

Apesar de sua simplicidade teórica, este modelo tem se revelado como um modelo estatístico profundamente rico e fecundo descrevendo, além de substâncias magnéticas uniaxiais (tais como Rb_2CoF_4 ($d=2$), $\text{Dy}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ($d=3$), etc.), ligas binárias, redes de gás, sistemas adsorvidos em substratos (tal como He^4 adsorvido em Kr com grafite).

Outro modelo que tem despertado enorme interesse teórico e experimental é o modelo de Potts (vide referência [2])

para uma revisão detalhada). Este modelo é uma generalização do modelo de Ising no qual associamos uma variável aleatória σ_i que pode assumir q estados ($\sigma_i = 1, 2, 3, \dots, q$). A energia de interação entre sítios primeiros vizinhos é mínima, no caso de ferromagnetos, quando $\sigma_i = \sigma_j$ e assume um outro valor qualquer que seja $\sigma_i \neq \sigma_j$. O modelo de Potts está relacionado com vários problemas de Mecânica Estatística em redes tais como o modelo $Z(N)$, percolação (limite $q \rightarrow 1$), vidros de spins diluídos (limite $q \rightarrow 1/2$), rede de resistores ($q \rightarrow 0$), etc. [2]. Este modelo apresenta várias realizações experimentais [2] tais como: átomos de He^4 adsorvidos em grafite com cobertura $1/3$ ($q=3$), átomos de O_2 adsorvidos em Ni ($q=4$), a transição do ferromagneto cúbico DyAl_2 submetido a um campo magnético diagonal em relação aos seus eixos fáceis ($q=3, d=3$), a transição estrutural em SrTiO_3 submetido à pressão externa ($q=3, d=3$), etc.

Devido a dificuldades no cálculo da função de partição poucos são os problemas em Mecânica Estatística que admitem solução exata (vide livro do Baxter [3]). Sendo assim vários métodos aproximativos são usados. No estudo de transições de fase em sistemas magnéticos, um dos métodos que tem sido utilizado com sucesso no estudo do comportamento crítico de modelos de spins é o Grupo de Renormalização (GR) (vide seção 3.2). Esta técnica tem sido amplamente utilizada, por exemplo, no estudo da criticalidade dos modelos de spins, como os modelos de Ising e Potts, em diversos sistemas (vide referência [4,5,6] e referências internas).

A observação de que existem vários padrões na Natureza que não se assemelham às estruturas geométricas usuais como, por exemplo, redes regulares é um fato notório (vide referências [7],[8],[9]). Desde o início deste século já era conhecido dos matemáticos estruturas geométricas que possuem uma simetria peculiar (por exemplo, a curva de Koch, o Sierpinski-Gasket e Sierpinski Carpet). Estas estruturas são auto-similares, ou seja, se mudarmos a escala de comprimento por um fator característico observamos sempre o mesmo tipo de estrutura. FRACTAL foi o termo utilizado para designar as estruturas geométricas que possuem simetria de escala. Exemplos de estruturas que apresentam a propriedade de invariância por escala (mas que não são encontrados na Natureza) são as redes hierárquicas. Tais estruturas são construídas iterativamente substituindo-se o objeto a ser decorado, por exemplo, uma ligação por um "cluster" (denominado gerador) contendo várias ligações (vide seção 2.3). Estas estruturas são particularmente importantes no estudo da criticalidade de modelos de spins devido ao fato de que certas transformações de Grupo de Renormalização (GR) que são apenas aproximadas em redes de Bravais tornam-se exatas em redes hierárquicas apropriadas, como observado por Berker e Ostlund em 1979 [10]. Sendo assim, a criticalidade (ou seja, a obtenção dos expoentes críticos e diagramas de fases) de modelos spins em redes hierárquicas (que aproximam de forma conveniente as redes de Bravais) podem ser considerados como aproximações destes mesmos resultados nestas redes.

Em 1980, Gefen, Mandelbrot e Aharony [11] iniciaram um estudo sistemático sobre o comportamento crítico de modelos de spins clássicos (em particular, o modelo de Ising) em redes fractais. Uma classe destas estruturas (os fractais determinísticos) são construídos iterativamente. Gefen e colaboradores mostraram que diferentemente das redes de Bravais onde o comportamento crítico (assumindo interações de curto alcance) é determinado essencialmente pela dimensão da rede e pela dimensão do parâmetro de ordem, em redes fractais os expoentes críticos dependem de vários parâmetros (na verdade, existem suspeitas de que existe um número infinito de parâmetros que determinariam o comportamento crítico de modelos de spins em redes hierárquicas e fractais (vide seção 3.4)).

Para a classe de redes fractais estudada até o momento na qual o modelo de Ising ferromagnético apresenta transição de fase contínua à temperatura crítica (T_c) não nula (em particular, o Sierpinski Carpet), a aplicação do GR nestas redes foi feita de forma aproximada [12,13 (nesta referência foi estudado não só o modelo de Ising como também o modelo de Potts)]. Posteriormente, foi estudado o modelo de Potts com q estados (ferro e antiferromagnético) nos fractais Sierpinski Carpet e Sierpinski Pastry Shell [14,15]. O caso antiferromagnético deste modelo [15] apresenta um comportamento peculiar. Devido à alta complexidade e degenerescência do estado fundamental (provocando uma entropia por spin não-nula a $T = 0$ e uma violação da terceira lei da termodinâmica como discutido por Chow e Wu [16]) o modelo pode apresentar (ou não)

uma fase antiferromagnética. Quando esta existe o seu atrator encontra-se à temperatura finita, ou seja, a configuração mais estável não ocorre a $T = 0$ (diferentemente do caso com entropia por spin residual nula, tal como ocorre no modelo de Ising na rede quadrada onde o atrator encontra-se à $T = 0$ para ambas as fases, ferro e antiferromagnética). Este comportamento já havia sido observado por Berker e Kadanoff [17] para o antiferromagneto de Potts (quando $q > 2$) em redes hipercúbicas e também por Itzykson e Luck [18] para este modelo (no caso $q < 1$) na rede hierárquica diamante. Em particular, foi sugerido por Berker e Kadanoff [17] e depois verificado por Itzykson e Luck [18] que a função de correlação possui um decaimento com uma lei de potência ao longo de toda esta fase antiferromagnética não trivial.

Muitas transformações de Grupo de Renormalização (GR) em modelos de spins clássicos tem sido comumente consideradas exatas em redes hierárquicas. Isto pode ser verdade ao tratar-se de ferromagnetos onde as propriedades de simetria do estado fundamental destes modelos são trivialmente preservadas no processo de renormalização. No entanto, em antiferromagnetos pode ocorrer que não haja preservação de simetria do estado fundamental antiferromagnético ao considerar-se a transformação de GR do gerador (estágio de construção $k=1$) no objeto (estágio $k=0$). Neste caso é necessário recorrer a células maiores (transformação de uma célula do estágio $k > 1$ na célula do estágio $(k-1)$) para obtermos resultados corretos.

Neste trabalho propomos um critério, dentro do contexto de GRER, para a escolha de células no estudo de antiferromagnetos de Potts em sistemas que sejam aproximados (ou representados) por redes hierárquicas, baseando-nos nas energias das configurações de mais baixa energia deste modelo nas células não-renormalizada (ϵ_F e ϵ_I) e renormalizada (ϵ'_F e ϵ'_I) (F e I são estados onde os spins das raízes A e B da rede hierárquica são definidos, respectivamente, iguais ($\sigma_A = \sigma_B$) e diferentes ($\sigma_A \neq \sigma_B$)). Usando uma transformação de Grupo de Renormalização em termos dos pesos de Boltzmann (nos quais as energias ϵ_F e ϵ_I aparecem naturalmente), provamos sua equivalência ($\forall q$ no caso de redes hierárquicas com 2 raízes e, para $q=2$, em redes hierárquicas com 3 raízes) com a preservação da função de correlação entre pares de spins das raízes de uma rede hierárquica. Analisamos esta transformação (para o caso antiferromagnético deste modelo) à $T = 0$ e verificamos que, quando $\epsilon_F = \epsilon_I$, é possível a existência de uma fase não-usual (onde as correlações decaem com uma lei de potência) cujo atrator encontra-se à temperatura finita. Estendemos esta transformação de GR para o caso do modelo de Potts com 2 parâmetros em sistemas que envolvam redes hierárquicas com 3 raízes.

Como passo seguinte propomos o fractal Sierpinski-Gasket com m folhas com gerador $G(b, d=2, m)$ (b é o fator de escala) que é uma generalização da família de fractais Sierpinski-Gasket [7] (um exemplo de rede hierárquica com 3 raízes (vide referência [20])) que apresenta ordem de

ramificação (R) infinita para $m > 1$. Estudamos o modelo de Potts com $q = 2, 3$ e 4 estados (ferro e antiferromagnético) utilizando a transformação de GR proposta acima. Dado o fato de que $R = \infty$, este modelo apresenta transição de fase a $T_c \neq 0$. Obtemos o comportamento crítico (fronteiras e o expoente crítico térmico (ν_T)) exatamente para o caso ferromagnético e, possivelmente também, para o caso antiferromagnético deste modelo em alguns tipos de células. Queremos ressaltar que, em nosso conhecimento, é a primeira vez que é feito um cálculo exato em fractais com T_c não nulo (que não são redes hierárquicas com 2 raízes). Verificamos para o caso antiferromagnético deste modelo no Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m)$ que, nos casos $q=2$ (totalmente frustrado) e $q=4$ (altamente degenerado) surge, para $m > m_c(q)$, uma fase antiferromagnética não-usual cujo atrator encontra-se à temperatura finita. Calculamos exatamente a função de correlação entre dois spins situados nas raízes deste fractal para o antiferromagneto de Ising e mostramos que a mesma decai com uma lei de potência ao longo de toda esta fase.

No Capítulo 2 discutimos os conceitos principais relacionados com fractais e, em particular, redes hierárquicas.

No Capítulo 3 apresentamos noções gerais sobre fenômenos críticos e uma descrição sucinta do grupo de renormalização no espaço real, bem como os resultados existentes na literatura referentes à criticalidade dos modelos de Ising e Potts em redes hierárquicas e fractais e a discussão

sobre o problema da universalidade nestas estruturas.

No Capítulo 4 propomos o critério para a escolha de células no estudo de antiferromagnetos de Potts em sistemas aproximados por redes hierárquicas mencionado acima; propomos uma transformação de grupo de renormalização em termos dos pesos de Boltzmann e provamos sua equivalência com a preservação da função de correlação entre dois spins (no caso do modelo de Potts para redes hierárquicas com 2 raízes e para o modelo de Ising em redes com 3 raízes).

No Capítulo 5 propomos o fractal Sierpinski-Gasket com m folhas com gerador $G(b,d=2,m)$ e aplicamos o GR e o critério acima no estudo da criticalidade do modelo de Potts (ferro e antiferromagnético) nestes fractais.

Finalmente, apresentamos as conclusões e possíveis extensões a serem feitas.

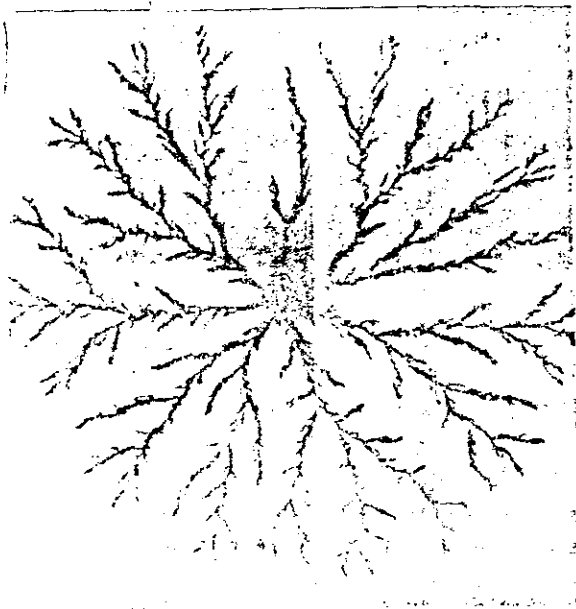
CAPÍTULO 2

FRACTAIS

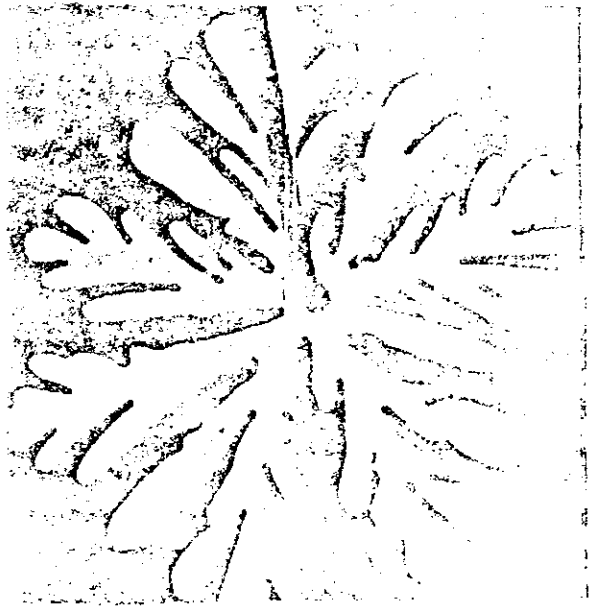
2.1 - Introdução

Algumas estruturas encontradas na Natureza não são perfeitamente compactas, mas apresentam defeitos (rugosidades, poros, etc.) ao longo de toda a estrutura, e não possuem tamanho definido. Tais defeitos estão distribuídos de forma aleatória e possuem diversos tamanhos, porém, a distribuição dos mesmos se apresenta da mesma forma em diversas escalas de comprimento. Estruturas que possuem esta propriedade de auto-similaridade, ou seja, uma invariância da forma por uma transformação de escala, são denominadas FRACTAIS e se dividem em duas classes principais: os fractais aleatórios (também denominados irregulares ou estatísticos) e determinísticos (também chamados de regulares ou não aleatórios). Os fractais encontrados na Natureza, bem como alguns fractais geométricos gerados por regras não determinísticas, são aleatórios. Os fractais aleatórios são auto-similares estatisticamente (ou seja, a ampliação de uma parte só se parece ao fractal se tomarmos a média sobre várias cópias do mesmo). Os fractais encontrados na Natureza conservam esta propriedade somente numa faixa de

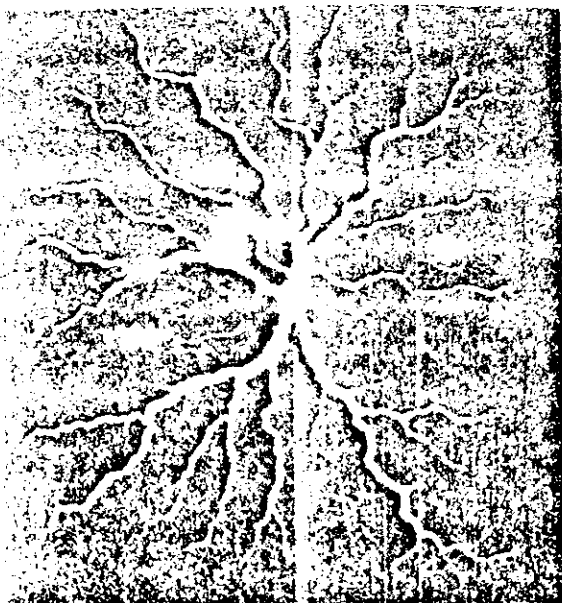
escala de comprimento (com um fator típico de 10 ou 100).
 Dentre os vários exemplos existentes podemos citar os cristais de neve, crescimento neuronal, sistema vascular da retina, fraturas geológicas, polímeros, fluidos turbulentos, deslocamentos de um fluido em outro, fenômenos de ruptura dielétrica, crescimento de cristais, aerogels de sílica (vide referências [7],[8],[21],[22],[23]). Na fig. 2.1.1 ilustramos alguns exemplos de fractais encontrados na Natureza.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.1.1 - Fractais na Natureza: (a) Depósito de Zn formado em uma célula eletrolítica. (b) Formação de padrão em forma de dedos ("viscous fingers") de uma bolha de ar em glicerina. (c) Padrão formado em uma descarga elétrica chamado figura de Linchtemberg. Extraído da referência [22].

O campo de aplicação de fractais em física é bastante amplo abrangendo desde percolação e formação de padrões através de processos de crescimento [21] até caos e turbulência (vide referência [24] e referências internas). Os fractais determinísticos são estruturas exatamente auto-similares em qualquer escala de comprimento gerados por processos determinísticos como, por exemplo, o conjunto de Cantor (fig. 2.1.2), a curva de Koch [8,24], o Sierpinski Carpet [8] e o Sierpinski-Gasket¹ * [8] (fig. 2.1.3). Apesar de não serem encontrados na Natureza, os fractais determinísticos desempenham um importante papel no estudo dos fractais pois permite um cálculo mais simples, e muitas vezes exato, várias propriedades de modelos físicos diversos nestas estruturas.

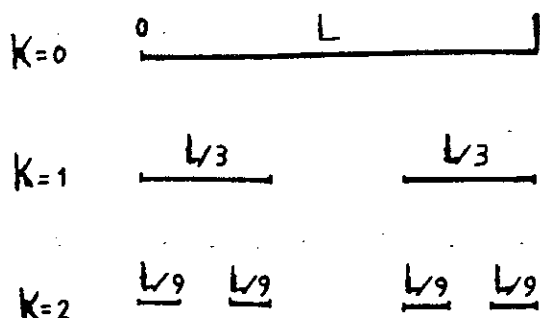
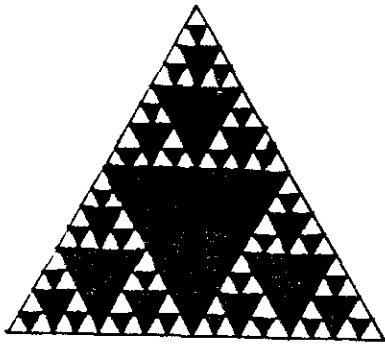
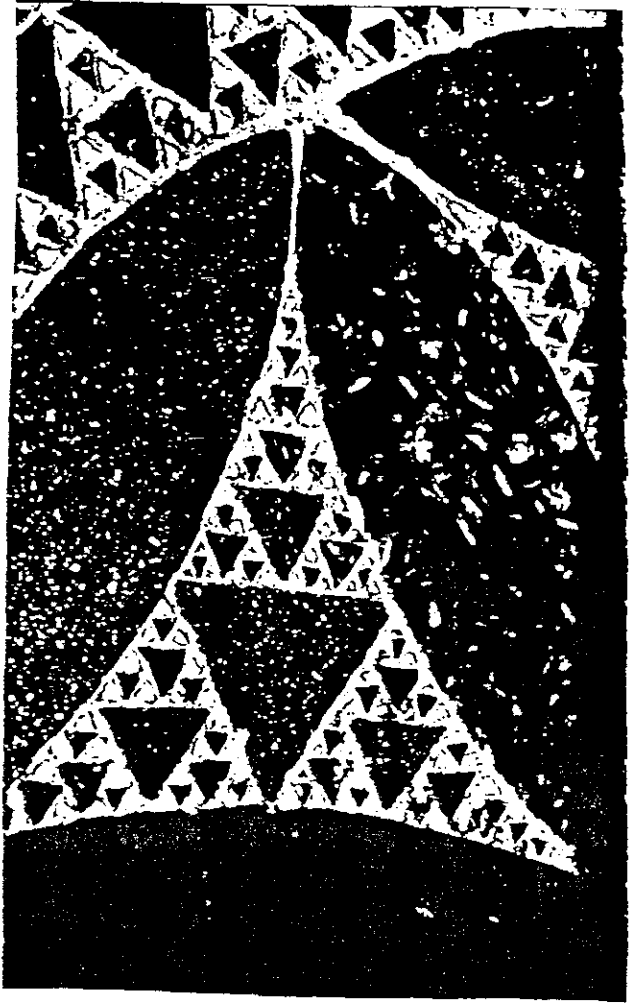


Figura 2.1.2 - Primeiros estágios ($k=0,1,2$) de construção do conjunto de Cantor Triádico ($b=3$) cuja dimensão fractal é $D_f \cong 0.63$. Extraído da referência [24].

¹ Muito antes deste fractal ter sido estudado pelo Matemático polonês Sierpinski neste século, esta estrutura já era familiar há oito séculos passados para os frequentadores da Igreja de Anagni construída na Itália em 1104 que possui um chão de mosaicos com Sierpinski-Gaskets (vide fig. 2.1.3)



(a)



(b)

Figura 2.1.3 - (a) Exemplo do fractal Sierpinski-Gasket no 4º estágio de construção. (b) Mosaico da Igreja de Anagni construída na Itália em 1104 (Extraído do livro "from Newton to Mandelbrot [9]).

2.2 - Definição de alguns parâmetros geométricos importantes

a) Dimensão fractal

A fim de caracterizar a não compacidade de tais estruturas e, principalmente dar uma medida de como as mesmas escalam, introduz-se o conceito de dimensão fractal. Vamos, a seguir, exemplificar este conceito para o conjunto de Cantor triádico. O processo de construção deste fractal determinístico está ilustrado na fig. 2.1.2. Dividimos um segmento de reta de comprimento (L) em três partes ($b=3$) de comprimento $l=L/b$ e retiramos a parte central (vide estágio $k=1$ nesta figura). Repetimos sucessivamente o mesmo processo para cada um dos segmentos restantes. Neste caso com $N(l)=2^k$ ($k=1,2,\dots$ representa os sucessivos passos de construção do conjunto) segmentos de comprimento $l=L/b^k$ cobrimos o conjunto. Assim como o número $N(l=L/b)$ de hipercubos de aresta $l=L/b$ necessários para cobrir um hipercubo D-dimensional de lado L é dado por $N(l=L/b)=b^D$ para este objeto compacto, a dimensão fractal D_f é definida para objetos não compactos de uma forma similar através de:

$$N(l=L/b) \equiv b^{D_f} \quad (2.2.1)$$

onde $b=L/l$ é o número adimensional de divisões do comprimento L.

Observe que se l for proporcional ao tamanho de uma

partícula do fractal então $N(l=L/b)$ se torna proporcional à massa M do fractal com comprimento linear L . Segue-se então que:

$$M(L) = L^{D_f} \quad (2.2.2)$$

relação esta amplamente utilizada em processos de crescimento [21].

Da relação (2.2.1) temos (para um número positivo arbitrário λ) que:

$$N(\lambda l = \lambda L/b) = \lambda^{-D_f} N(l=L/b) \quad (2.2.3)$$

que é a representação matemática da propriedade de simetria (ou invariância) de escala dos fractais.

Em consequência da eq. (2.2.2) temos que a massa do fractal satisfaz à seguinte equação funcional

$$M(\lambda L) = \lambda^{D_f} M(L) \quad (2.2.4)$$

mostrando então que a massa M é uma função homogênea (de grau D_f) de L .

No caso do conjunto de Cantor triádico temos,

$$N(1) = 2^k = b^{D_f} = (3^k)^{D_f}$$

ou seja,

$$D_f = \ln 2 / \ln 3 \cong 0.63$$

o que caracteriza a não compacidade desta estrutura em relação ao segmento de reta.

Para a classe de fractais determinísticos, pelo próprio processo de construção, a eq. (2.2.2) é exata; o mesmo não ocorre para os fractais aleatórios como o cluster de percolação [21] cuja dimensão fractal é determinada numericamente contando-se o número médio de ligações pertencentes ao cluster percolante contidos no interior de caixas de diversos comprimentos (L) onde $L \ll \xi$ (comprimento do cluster percolante). Neste sentido as grandezas desta equação devem ser substituídas pelos seus valores médios. Em alguns casos é possível calcular exatamente a dimensão fractal D_f para alguns fractais aleatórios como ilustrado na fig. 2.2.1. Neste caso com $N(l) = 3^k$ quadrados de aresta $l=L/2^k$ ($b=2^k$) cobrimos ambos os conjuntos determinístico (fig. 2.2.1a) e aleatório (fig. 2.2.1b) no estágio k de construção. Temos então que a dimensão fractal para estas estruturas é dada por

$$N(l) = 3^k = b^{D_f} = (2^k)^{D_f}$$

ou seja,

$$D_f = \ln 3 / \ln 2 \cong 1.585$$

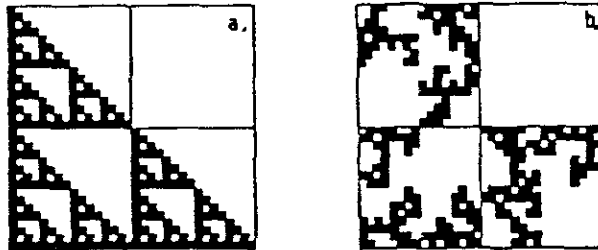


Figura 2.2.1 - Exemplo de um fractal determinístico e sua versão aleatória. (a) Em cada estágio de construção o quadrado superior direito é retirado. O mesmo procedimento é repetido em todos os quadrados restantes. (b) Em cada estágio de construção um dos quatro cantos do quadrado é retirado aleatoriamente. Extraído da referência [24] fig.12.

b) Ordem de ramificação (R)

Ordem de ramificação é uma noção topológica que foi desenvolvida independentemente por K. Menger e pelo matemático russo P. Urysohn na década de 1920. Mandelbrot [8] ressaltou a importância deste conceito, que envolve a vizinhança de cada ponto P de um conjunto S e também o menor número de pontos que devem ser retirados para desconectar um subconjunto de S , no estudo dos fractais. Na exemplificação do cálculo da ordem de ramificação de algumas estruturas geométricas (tais como o círculo, os fractais Sierpinski-Gasket, Sierpinski Carpet e

redes de Bravais), Mandelbrot [8] exhibe uma fronteira β que delimita uma vizinhança de P (por exemplo, um disco circular centrado em P) "não muito grande" que intercepta S em R pontos e tal que a fronteira de toda a vizinhança "suficientemente pequena" de P contida em β intercepta S em pelo menos R pontos. Este número mínimo R de pontos de interseção é a ordem de ramificação de um conjunto S num ponto P .

O fractal ilustrado na fig. 2.2.2 denominado Sierpinski-Gasket [8] é construído, a partir de um triângulo equilátero de lado unitário, dividindo-se sua aresta em 2 partes iguais (gerando portanto 4 triângulos de aresta $1/2$) e retirando-se o triângulo central (estágio $k=1$ ilustrado na fig. b). Repetindo-se o mesmo processo em cada um dos triângulos remanescentes e assim sucessivamente obtem-se, no limite de um número infinito ($k \rightarrow \infty$) de iterações, o fractal propriamente dito.

Considere agora uma aproximação finita do Sierpinski-Gasket, digamos no 3º estágio ($k=3$), e um ponto P oriundo da interseção de 2 triângulos do estágio $k=1$ (isto é, com lado 2^{-1}) (vide fig. (d)). O círculo β centrado em P com raio 2^{-2} intercepta a estrutura S mencionada acima em 4 pontos e qualquer círculo centrado em P de raio menor que 2^{-2} intercepta S em pelo menos 4 pontos. É bom ressaltar que em cada estágio a vizinhança β do ponto P não deve ser muito grande para evitar que haja interseção com a estrutura (no exemplo acima β deve ter um raio inferior à distância \overline{BP}) e as vizinhanças contidas em β devem ser suficientemente pequenas de

tal forma que não inclua os vértices iniciadores (A, B e C). Temos então que o ponto P definido como acima (em qualquer estágio k do fractal) possui ordem de ramificação $R=4$. Pode-se mostrar que $R=4$ para qualquer ponto P pertencente a um estágio qualquer finito do Sierpinski-Gasket. Se considerarmos um ponto P que é o limite de uma sequência infinita de triângulos, cada um contido no seu predecessor e tendo vértices distintos dos vértices de seu predecessor, então os círculos que circunscrevem estes triângulos interceptam S em 3 pontos e contém vizinhanças suficientemente pequenas que interceptam a estrutura em pelo menos 3 pontos. Assim sendo, esta estrutura possui $R_{\min.} = 3$.

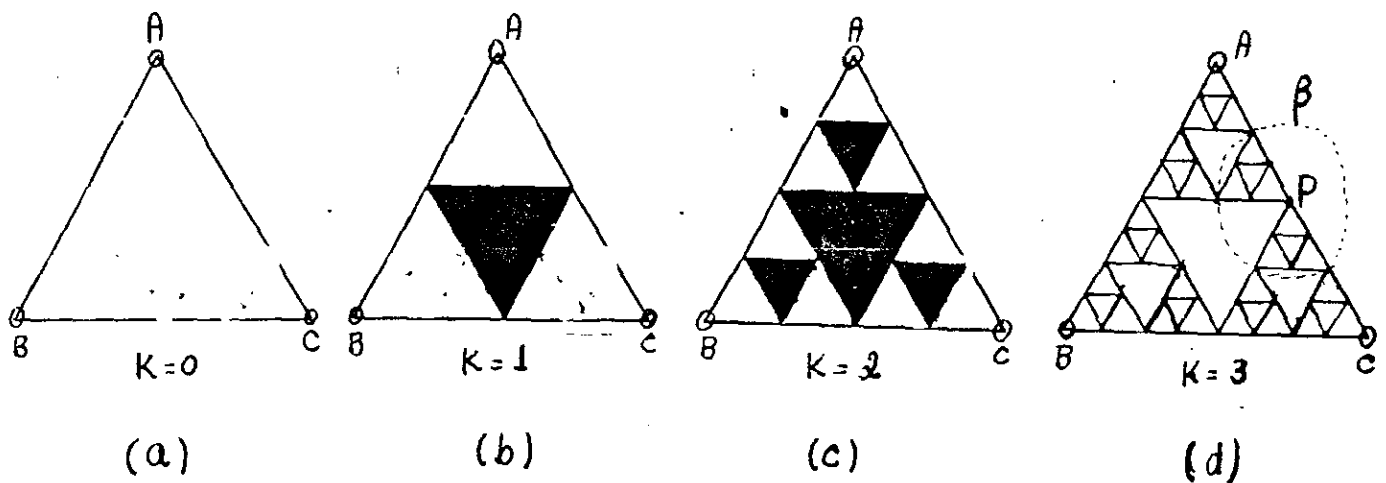


Figura 2.2.2 - Primeiros estagios ($k=1,2,\dots$) de construção do fractal Sierpinski-Gasket $b=2$.

Consideremos uma rede de Bravais; por exemplo, uma rede quadrada. Há duas maneiras de construirmos estas estruturas. i) consideramos o parâmetro a de rede constante. Neste caso temos uma célula básica; aumentando a porção da rede (isto é, compondo a célula básica) geramos a rede de Bravais. Neste caso o fator de escala b aumenta. ii) começamos com uma porção finita da rede; isto é, o fator de escala $b = \text{cte.}$ e um parâmetro de rede, $a_{\text{inicial}} = A$. Vamos diminuindo b (ou seja, subdividindo a porção finita da rede). Neste caso a diminui. No limite $a \rightarrow 0$ temos a rede de Bravais propriamente dita. Vemos que no caso ii) transformamos uma rede num domínio plano e portanto, sua ordem de ramificação (R) torna-se infinita.

É bom ressaltar que, para a família de fractais do tipo Sierpinski-Gasket bidimensional (com $b \geq 3$) proposta por Hilfer e Blumen ^{2*}[19], a ordem de ramificação máxima R_{max} passa a ser 6, enquanto que a mínima R_{min} continua sendo 3.

No estudo de transições de fase de modelos de spin clássicos com interações de curto alcance em fractais tem-se verificado [12,25,26,14,15,27,13] que a existência de transição de fase contínua à temperatura não nula ocorre quando a ordem de ramificação nestas estruturas é infinita.

2

Nesta generalização a aresta unitária é partida em b partes (gerando, portanto b^2 triângulos de aresta $1/b$); retira-se $b(b-1)/2$ triângulos de forma tal que dois triângulos retirados (ou remanescentes) não tenham aresta em comum (vide fig. 5.2.2 para $b=3$ e 4)

c) Lacunaridade (L)

Outro parâmetro geométrico que tem sido utilizado no estudo do comportamento crítico em redes fractais é a lacunaridade (L). Este conceito foi introduzido por Mandelbrot [8] com o intuito de fornecer uma medida da não-homogeneidade destas estruturas.

Considere os fractais Sierpinski Carpet ilustrados nas figs. 2.2.3a e b. Tais estruturas são geradas a partir de um quadrado unitário, dividindo-se sua aresta em b partes e retirando-se l^2 quadrados (centrais ou não, onde $l < b$ e $l=1,2,3..$); repete-se o mesmo processo para cada um dos quadrados restantes e assim sucessivamente. No limite de um número infinito de iterações ($k \rightarrow \infty$), onde gera-se uma estrutura autosimilar em diferentes escalas de comprimento, obtém-se o fractal propriamente dito.

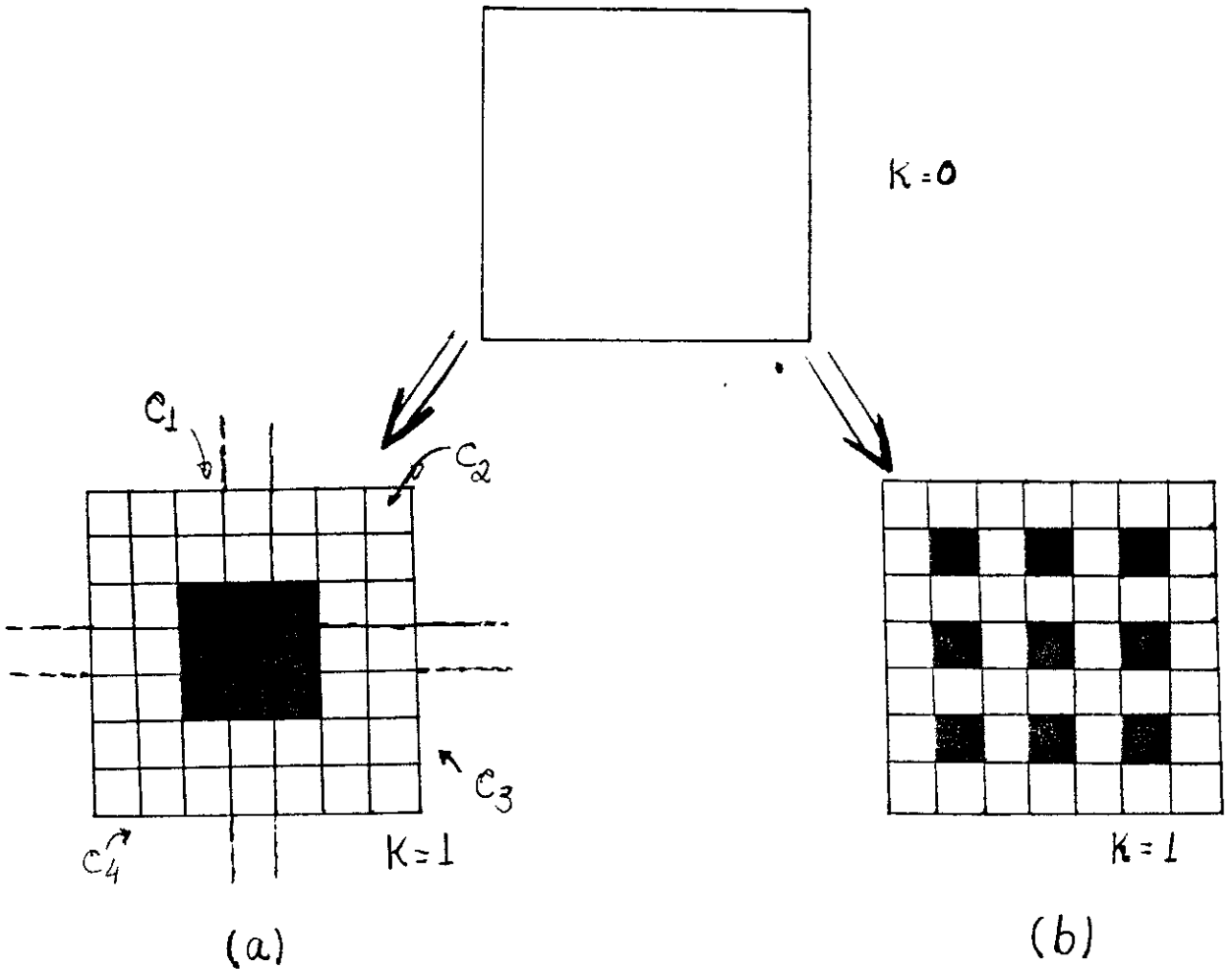


Figura 2.2.3 - Primeiro estágio de construção do fractal Sierpinski Carpet com $b=7, l=3$ (a) lacunaridade $\lfloor \cong 3.924$. (b) lacunaridade $\lfloor \cong 0.998$. $k=0,1,\dots$ são os estágios de construção, C ($i=1,2,3,4$) são coberturas com 8 subquadrados não eliminados.

Observando tais estruturas notamos que para b (fator de escala) e l (l^2 é o número de subquadrados eliminados em cada passo de construção) fixos, podemos formar dois ou mais fractais com a mesma dimensão fractal D_f :

$$D_f = \frac{\text{Ln } (b^2 - l^2)}{\text{Ln } b} \quad (2.2.5)$$

tendo em vista que o número de unidades não retiradas ($b^2 - l^2$) geradas em cada estágio de construção é a mesma. Para ambos fractais a ordem de ramificação R é infinita. Consequentemente a dimensão fractal e a ordem de ramificação não são suficientes para diferenciá-los. Neste sentido, Gefen e colaboradores [12] propuseram a seguinte expressão para a lacunaridade (L) do tapete de Sierpinski no 1º estágio de construção:

$$L = \frac{1}{n} \sum_i (n_i - \langle n \rangle)^2 \quad (2.2.6)$$

onde a soma é feita sobre as n possíveis maneiras de cobrir uma célula quadrada $b \times b$ com o padrão formado pelos l^2 subquadrados (cada um com aresta l/b); n_i representa o número de subquadrados que uma dada cobertura possui em comum com a região eliminada do fractal considerado, e $\langle n \rangle$ é o número médio de tais subquadrados dado por:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{n} \sum_i n_i$$

Por exemplo, no caso do Sierpinski Carpet com $b=7$ e $l=3$ no 1º estágio de construção (ilustrado na fig. 2.2.3a) existem 4 "coberturas" C_i ($i=1,2,3,4$) com 8 subquadrados

não-eliminados ($n_1=8$) (vide fig. 2.2.3a), 8 "coberturas" com $n_1=7$, 4 "coberturas" com $n_1=6, n_1=5$ e $n_1=3$, respectivamente resultando em $\langle n \rangle = 5.76$.

No caso dos fractais ilustrados nas figs. 2.2.3 os mesmos autores obtiveram $L \cong 3.924$ e $L \cong 0.998$, respectivamente. Vale notar que aplicando a eq. (2.2.6) à rede quadrada (que é uma estrutura completamente homogênea) obtemos $L = 0$ tendo em vista que $n_1 = \langle n \rangle = 1^2 \quad \forall i$. Observe que o fractal da fig. 2.2.3a tem uma lacunaridade maior que o da fig. (b), refletindo o fato de ser menos homogêneo em relação à rede quadrada. Entretanto, como observado por Lin e Yang [28] a eq.(2.2.6) não descreve de forma conveniente a lacunaridade (e, portanto, o desvio do fractal de ser invariante por translação) em estruturas geométricas pois vários Sierpinski Carpets, com diferentes graus de homogeneidade, podem ser construídos tal que $L = 0$, o que não os distingue da rede quadrada. Sendo assim os mesmos autores propuseram uma nova expressão para a lacunaridade que se anula se e somente se o sistema possui invariância translacional.

2.3 - Redes Hierárquicas

As redes hierárquicas como os fractais determinísticos são estruturas auto-similares. Tais estruturas são conastruídas iterativamente "decorando" um objeto (em geral, uma ligação) com uma célula básica, chamada gerador.

Ilustramos na fig. 2.3.1 alguns exemplos de redes hierárquicas, ou seja, do tipo ligação. Chamaremos os pontos iniciadores A e B de raízes. Um exemplo de rede hierárquica com 3 raízes (onde o objeto a ser decorado é uma plaqueta triangular) é o Sierpinski-Gasket (vide fig. 2.2.2).

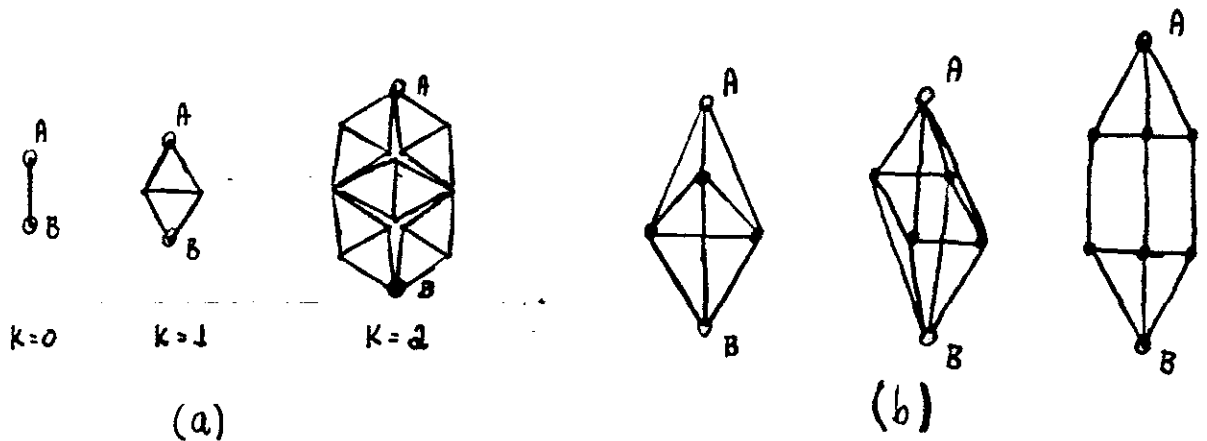


Figura 2.3.1- Exemplos de algumas redes hierárquicas do tipo ligação. (a) rede hierárquica ponte de Wheatstone. $k=0,1,2,\dots$ representa os estágios de construção; a estrutura no estágio $k=1$ representa o gerador da rede com raízes A e B. (b) exemplos de alguns geradores de redes hierárquicas (extraído da referência [29]).

Uma grande variedade de redes hierárquicas são possíveis de serem construídas (vide referências [20],[29],[30])

O interesse em relação a estas estruturas se deve ao fato que transformações de grupo de renormalização que são

apenas aproximadas em redes de Bravais tornam-se exatas em redes hierárquicas como observado por Berker e Ostlund [10]. Além disso, nestas estruturas, modelos de spins clássicos podem apresentar expoentes críticos que variam continuamente com os parâmetros e , devido a sua alta inomogeneidade (fazendo com que apresentem muito menos simetrias do que as redes de Bravais) permitem investigações em problemas de baixa simetria tais como magnetos randômicos, superfícies, etc. Trabalhos enfocando o cálculo da suscetibilidade [43], Calor específico [31], magnetização [40,54] tem sido realizado nestas estruturas.

2.3.1 - Definição de alguns parâmetros geométricos relevantes

a) Dimensão intrínseca

De forma análoga à dimensão fractal D_f , a dimensão intrínseca é definida como

$$D_i = \ln g / \ln b$$

onde g é o número de agregação, ou seja, o número de subunidades (no caso de redes com duas raízes A e B como na fig. 2.3.1, o número de ligações) aglomeradas em cada estágio de construção da rede hierárquica para formar uma nova unidade. b é o fator de escala ou a distância química, definido por Melrose [29] como o menor caminho que conecta as raízes, ou seja, o menor número de

ligações que conectam as raízes do gerador da rede hierárquica.

Para as redes hierárquicas da figura acima temos que os números de agregação (g) e a distância química (b) são, respectivamente g=5,b=2; g=9,b=2; g=12,b=2 e g=13,b=3.

b) Conectividade

Definida como

$$Q = \ln C / \ln b$$

onde C é o corte mínimo, definido por Melrose [29] como o menor número de ligações que devem ser cortadas a fim de isolarmos as raízes do gerador da rede hierárquica e b a distância química. Para os exemplos da fig. 2.3.1 temos que C=2,3,4 e 3 respectivamente.

CAPÍTULO 3

FENÔMENOS CRÍTICOS E GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

3.1 - FENÔMENOS CRÍTICOS: Noções gerais

Uma grande variedade de sistemas na Natureza se apresentam em diversas fases. Ao variarmos um de seus parâmetros termodinâmicos intensivos, como a temperatura, podemos passar de uma fase para outra.

Considere um fluido (água, por exemplo) cuja equação de estado é dada por $f(P,V,T)=0$, onde as variáveis são, respectivamente, pressão, volume e temperatura. Esta equação define uma superfície no espaço (P,V,T) . Existem regiões onde 2 fases podem coexistir simultaneamente em equilíbrio (sólido e líquido, sólido e vapor, líquido e vapor), e ao longo de uma linha (chamada linha tripla) as 3 fases podem coexistir. A projeção desta superfície no plano PT (vide fig. 3.1.1a), por exemplo, define então curvas de coexistência entre as fases. As curvas de coexistência se encontram no ponto triplo (projeção da linha tripla no plano considerado). A curva de coexistência entre vapor e líquido não continua indefinidamente, acabando no ponto crítico (P_c, ρ_c, T_c) . Acima desta temperatura crítica T_c , nenhuma separação entre 2 fases de densidades diferentes ocorre

numa compressão isotérmica.

À baixas temperaturas (e ao longo da linha de transição líquido-vapor) existe uma grande diferença entre as densidades do líquido e do gás ρ_L e ρ_G , diferença esta que se anula no ponto crítico. $(\rho_L - \rho_G)$ faz o papel de parâmetro de ordem deste sistema, pois é uma grandeza que é diferente de zero abaixo de T_c e nula acima de T_c .

A projeção da superfície dada pela equação de estado no plano PV define isotermas (vide fig. 3.1.1b). Estas isotermas apresentam uma parte plana para $T \rightarrow T_c$, ou seja, $\partial P / \partial V = 0$. Como a compressibilidade de um fluido é definida por $-(1/V)(\partial V / \partial P)_T$, vemos que ela diverge ao nos aproximarmos do ponto crítico. Esta divergência significa que a distribuição de densidades (que é proporcional ao inverso do volume) é muito sensível à flutuações de pequenas pressões.

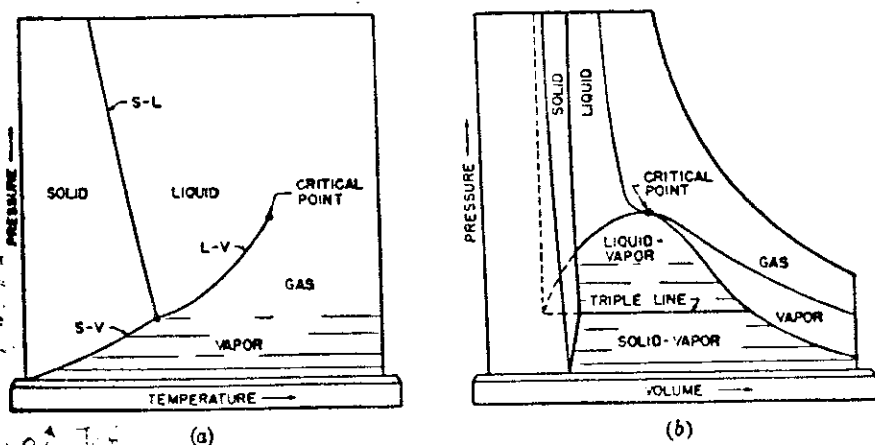


Figura 3.1.1 - Projeção da equação de estado $f(P, V, T) = 0$ da água.

Um comportamento similar a este ocorre em sistemas magnéticos cuja equação de estado é dada por $g(H, M, T) = 0$, onde as variáveis são, respectivamente, campo magnético, magnetização e

temperatura. Estes parâmetros, nesta ordem, guardam uma analogia estreita com os parâmetros $P, -V$ e T do fluido. A projeção da superfície dada pela equação de estado no plano HT (vide fig 3.1.2) define uma linha de coexistência para $H=0$. Para $T < T_c$ coexistem duas fases ordenadas caracterizadas por magnetizações iguais em módulo mas com sentidos opostos, que se anulam acima de T_c (fase paramagnética). O parâmetro de ordem neste caso é a magnetização.

Figura 3.1.2 - Diagrama HT para um magneto.

De forma análoga ao fluido, a projeção da superfície correspondente à equação de estado no plano HM define isotermas (vide fig. 3.1.3). Neste caso a grandeza análoga à compressibilidade isotérmica do fluido é a suscetibilidade isotérmica $\chi_T = (\partial M / \partial H)_{H=0, T}$, que diverge em T_c (devido à parte plana da isoterma em $T=T_c$). Esta divergência está associada a grandes variações da magnetização para pequenas variações do campo.

Este comportamento singular das funções termodinâmicas é uma característica das transições de fase. Quando durante a transição existe descontinuidade do parâmetro de ordem (como na transição líquido-gás e magnética abaixo de T_c) a transição é dita de 1ª ordem, quando não existe (isto é, no ponto crítico

T_c) a transição é dita de 2ª ordem. Neste caso as funções termodinâmicas se comportam, próximo de T_c , como leis de potência com certos expoentes, em geral, não inteiros (chamados expoentes críticos).

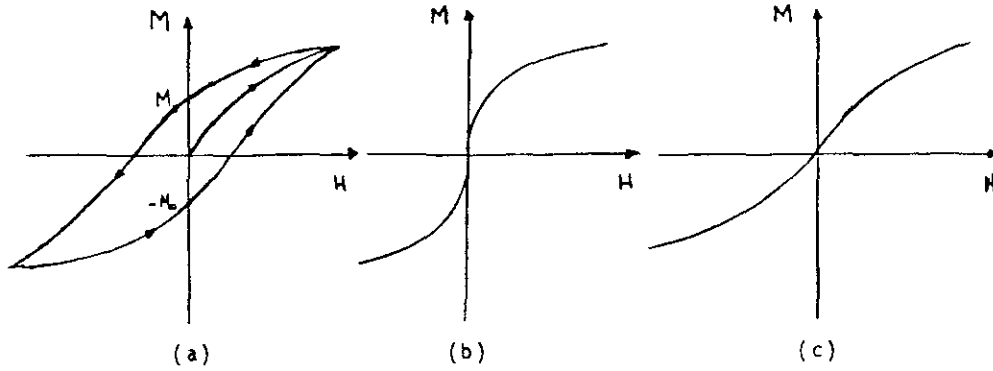


Figura 3.1.3 - Diagrama HM de um magneto. (a) $T < T_c$, (b) $T = T_c$, (c) $T > T_c$.

Apresentamos a seguir o comportamento de algumas destas funções, para um sistema magnético, em torno de T_c . ($t \equiv (T - T_c) / T_c$).

(a) O parâmetro de ordem

$$M \sim (-t)^\beta ; t < 0, \quad H = 0 \quad (3.1.1)$$

$$M \sim H^{1/\delta} ; t = 0, \quad H > 0 \quad (3.1.2)$$

(b) A suscetibilidade a campo nulo

$$\chi_T \sim (-t)^{-\gamma'} ; t < 0, \quad H = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\chi_T \sim t^{-\gamma} ; t > 0, \quad H = 0 \quad (3.1.4)$$

(c) A função de correlação a dois spins, definida como $\Gamma(\vec{r}) = \langle \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_r \rangle$ (onde \vec{S}_0 e \vec{S}_r são vetores de spins)

$$\Gamma(\vec{r}) \sim |\vec{r}|^{-(d-2+\eta)} ; t=H=0, |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (3.1.5)$$

d = dimensionalidade do sistema.

(d) O comprimento de correlação, que mede o alcance da função de correlação, $\Gamma(r) \sim e^{-\xi/r}$ $T \neq T_c$

$$\xi \sim (-t)^{-\nu'} ; t < 0, H = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\xi \sim t^{\nu} ; t > 0, H = 0 \quad (3.1.7)$$

(e) O calor específico

$$C \sim (-t)^{-\alpha'} ; t < 0, H = 0 \quad (3.1.8)$$

$$C \sim t^{-\alpha} ; t > 0, H = 0 \quad (3.1.9)$$

Os expoentes críticos $\beta, \delta, \gamma, \gamma', \eta, \nu, \nu', \alpha$ e α' definidos acima estão relacionados entre si. Pode-se mostrar por argumentos termodinâmicos (vide referência [33]) que valem as seguintes desigualdades

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2 \quad (\text{Rushbrooke}) \quad (3.1.10a)$$

$$\alpha' + \beta(1+\delta) \geq 2 \quad (\text{Griffiths}) \quad (3.1.10b)$$

$$(2-\eta)\nu \geq \gamma \quad (\text{Fisher}) \quad (3.1.10c)$$

$$d\nu \geq 2 - \alpha \quad (\text{Josephson}) \quad (3.1.10d)$$

Como tem sido verificado em vários sistemas, tanto experimentalmente quanto teoricamente, que $\alpha=\alpha'$, $\gamma=\gamma'$ e $\nu=\nu'$ passaremos a utilizá-los indistintamente para $T > T_c$ ou $T < T_c$. As equações acima se tornam igualdades (denominadas leis de escala) se supormos que a parte singular da energia livre (a ser definida mais adiante) e da função de correlação são funções homogêneas de seus argumentos (uma função $f(x,y)$ é homogênea de grau p se satisfaz à propriedade $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$). Assim sendo, existem somente 2 expoentes críticos independentes dentre os 6 expoentes $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta$ e ν , os outros quatro podendo ser então obtidos através das leis de escala mencionadas acima.

É observado (vide, por exemplo Stanley [33]) que sistemas inteiramente diferentes (como, por exemplo, sistemas magnéticos e fluidos) com diferentes temperaturas críticas exibem o mesmo comportamento crítico em torno de T_c (ou seja, possuem os mesmos expoentes críticos). Este fato introduz o conceito de universalidade pelo qual os expoentes críticos de sistemas com interações de curto alcance dependem, em princípio, apenas de alguns parâmetros como, (i) a dimensionalidade do sistema, (ii) a dimensionalidade do parâmetro de ordem (por exemplo, na transição líquido-gás a diferença de densidades é um escalar, enquanto que na transição ferromagnética a magnetização é um vetor de n componentes onde, por exemplo, $n=1,2,3$ para os respectivos modelos de Ising, XY e Heisenberg).

Em particular, devido a dificuldades no cálculo da função de partição poucos são os problemas que admitem solução

exata em Mecânica Estatística (vide, por exemplo Baxter [3]). Sendo assim, vários métodos aproximativos são usados como, por exemplo, (a) simulações de Monte Carlo, (b) Métodos perturbativos, (c) Campo Médio e (d) Grupo de renormalização nos espaços recíproco e real que tem sido muito usado na determinação das propriedades críticas dos sistemas físicos (embora possa ser applicado também numa região não crítica).

A principal dificuldade para tratar teoricamente os fenômenos críticos se deve ao fato de que é necessário considerar um número grande de graus de liberdade que se comportam de modo correlacionado. Longe da região crítica o comprimento de correlação (ξ) é pequeno (indicando que a flutuação de um spin afeta apenas spins próximos) e, portanto, os métodos tradicionais como expansões perturbativas, aproximações de Hartree - Fock e teorias de campo médio são adequados, mas para T próximo de T_c as previsões destes métodos discordam dos resultados experimentais e teóricos exatos pois não consideram adequadamente o efeito cooperativo acentuado em torno de T_c .

Para temperaturas próximas à temperatura crítica onde ξ é grande, as correlações envolvem um número enorme de graus de liberdade e, portanto, as técnicas tradicionais do tipo campo médio tornam-se inaplicáveis.



3.2 - GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

O grupo de renormalização (GR) é uma técnica poderosa no tratamento de sistemas com um número elevado de graus de liberdade. O objetivo central desta técnica consiste na diminuição de graus de liberdade (os que não são importantes na região crítica) sem comprometer a física básica do problema. O segundo objetivo é explicar, qualitativamente, as diferentes classes de universalidade que o comportamento crítico apresenta.

Basicamente há dois tipos de GR: o grupo de renormalização no espaço recíproco onde o Hamiltoniano é um funcional do campo e do parâmetro de ordem e o grupo de renormalização no espaço real (GRER) que trata diretamente com os Hamiltonianos microscópicos. Para este último caso várias técnicas foram desenvolvidas como, por exemplo, o método de movimento de ligações de Migdal-Kadanoff, o grupo de renormalização diferencial, o grupo de renormalização fenomenológico e o grupo de renormalização de Monte Carlo (vide seções 1,2 e 3 da referência [34]).

A redução de graus de liberdade (GL) do sistema pode se visualizado, por exemplo, na construção de Kadanoff (fig. 3.2.1).

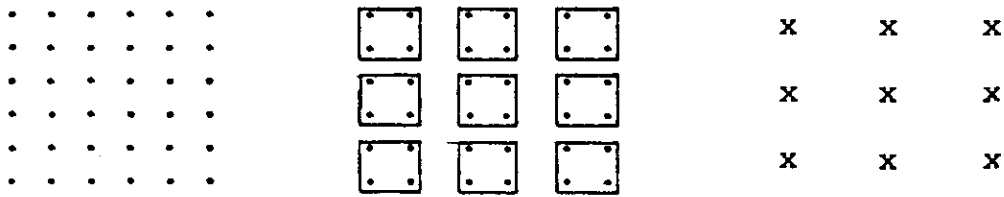


Figura 3.2.1 - Ilustração da redução de graus de liberdade segundo a idéia de Kadanoff.

Suponhamos que o sistema constituído de uma rede d -dimensional de spins com constantes de acoplamento $\{ K \}$ esteja à uma temperatura T próxima de T_c tal que o comprimento de correlação ξ seja muito maior que o parâmetro a de rede (espaçamento entre spins vizinhos). Construindo células de Kadanoff de tamanho b ($a \ll b \ll \xi$) contendo b^d spins verificamos que após substituir os b^d spins de uma célula por um único spin (redução de GL) os comprimentos de correlação se relacionam como

$$\xi(a') = \xi(a) / b \quad (a' = ab) \quad (3.2.1)$$

Para este novo sistema de parâmetro de rede a' as constantes de acoplamento são dadas por $\{ K' \}$ obtidas efetuando-se uma média sobre as células com b^d spins. Prescrições de como calcular as constantes de acoplamento $\{ K' \}$ surgiram posteriormente à esta idéia de Kadanoff. Uma das primeiras formulações de Grupo de Renormalização no espaço real que concretizou esta idéia foi feita GRER por Niemeijer e van Leeuwen [35]. Apresentamos a seguir as idéias básicas desta formulação.

Considere, por exemplo, um sistema original do tipo

Ising sobre uma rede de dimensão d com N spins $1/2$ (ou seja, N graus de liberdade) S_i descrito pelo Hamiltoniano adimensional (dividido por $-K_B T$)

$$-\beta H(S) = h \sum_i S_i + K \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j + \dots \quad (3.2.2)$$

onde $\beta = 1/K_B T$, $S_i = \pm 1$, $h = \beta H$ é a energia adimensional do spin S_i devido a um campo magnético externo, $K = J_2/K_B T$ representa a energia adimensional de interação entre dois spins vizinhos, $\langle i, j \rangle$ simboliza a soma sobre pares de sítios primeiros vizinhos, e $+\dots$ refere-se a interações entre 2 spins que não sejam primeiros vizinhos, ou interações entre três ou mais spins (S_i).

O sistema renormalizado ($H'(S')$), obtido substituindo-se cada conjunto de b^d spins da rede original (spins correspondentes a um bloco de Kadanoff) por um spin celular $S' = \pm 1$ da rede renormalizada, possui $N' = N / b^d$ spins celulares e qualquer comprimento linear é reduzido de X (referente a $H(S)$) para $X' = X / b$ (eliminando, portanto, as correlações de curto alcance). A conexão de ambos os sistemas é realizada por uma transformação de renormalização que liga os parâmetros do Hamiltoniano (H) do sistema original com os do Hamiltoniano (H') do sistema renormalizado definida por

$$\text{Exp} [-\beta G - \beta H'(S')] = \sum_{(S)} P(S', S) \text{Exp} [-\beta H(S)] \quad (3.2.3)$$

onde $\sum_{(S)}$ representa a soma sobre todas as configurações dos spins

iniciais e G é uma constante de renormalização (introduzida para levar em conta a possível diferença de energia dos estados fundamentais de $H(S)$ e $H'(S')$). $P(S',S)$ é uma função peso heurística (que depende das redes original e renormalizada) que satisfaz as seguintes condições:

$$P(S',S) \geq 0 \quad \forall S',S \quad (3.2.4a)$$

e

$$\sum_{\{S'\}} P(S',S) = 1 \quad (3.2.4b)$$

Somando ambos os lados da eq.(3.2.3) sobre as configurações $\{S'\}$ dos spins celulares e usando a eq.(3.2.4) obtemos:

$$\text{Exp}(-\beta G) \sum_{\{S'\}} \text{Exp}[-\beta H'(S')] = \sum_{\{S\}} \text{Exp}[-\beta H(S)] \quad (3.2.5)$$

e, conseqüentemente:

$$G + F' = F \quad (3.2.6)$$

onde $F = -K_B T \ln Z$ e $F' = -K_B T \ln Z'$ são as energias livres de Helmholtz de ambos os sistemas e, Z e Z' suas respectivas funções de partição.

Denominemos o conjunto de parâmetros de interação do Hamiltoniano original e renormalizado por $\{K\} = (h, K, \dots)$ e $\{K'\} = (h', K', \dots)$, respectivamente. No limite termodinâmico F e F' assumem as seguintes formas

$$F' = N' f(\{K'\}) \quad (3.2.7)$$

e

$$F = N f(\{K\}) \quad (3.2.8)$$

onde f é a mesma função em ambos os casos e G também se torna uma função extensiva no limite termodinâmico:

$$G = N g(\{K\}) \quad (3.2.9)$$

Tendo-se em conta que $N/N' = b^d$ (b é o tamanho da célula em unidades do parâmetro de rede a) e substituindo as relações acima na eq.(3.2.6) obtemos

$$f(\{K\}) = g(\{K\}) + b^{-d} f(\{K'\}) \quad (3.2.10)$$

que indica como preservar, sob renormalização, a parte singular da energia livre f por spin e com isso as demais funções termodinâmicas.

Vemos da eq.(3.2.5) que $\{K'\}$ são funções de $\{K\}$, ou seja:

$$\{K'\} = T_b \{K\} \quad (3.2.11)$$

onde T_b é a transformação de renormalização. A escolha de $P(S', S)$ deve ser tal que represente o máximo possível as simetrias do sistema e que faça com que $T_b \{K\}$ e $g(\{K\})$ sejam funções regulares na região de interesse. Cabe aqui ressaltar

que a tática fundamental do GR é explicar as singularidades de $f(\{K\})$ em termos destas funções regulares (vide eqs. (3.2.11)). A função escolhida para ser analítica em T_c no GR não envolve uma média global sobre o sistema (tal como acontece em teorias clássicas, como por exemplo, campo molecular e Ornstein-Zernicke) mas sim uma média local (envolvendo um número finito, b^d , de graus de liberdade).

A explicação das diferentes classes de universalidade que o comportamento cooperativo apresenta surge como consequência do caráter iterativo do GR. No espaço definido pelo conjunto $\{K\}$ de parâmetros, a operação de redução de graus de liberdade leva um Hamiltoniano inicial $H_0(\{K_0\})$ num Hamiltoniano $H_1(\{K_1\}) = \tau(H_0)$ (como, por exemplo, $H(S)$ é levado em $H'(S')$ na eq. (3.2.5)). A aplicação sucessiva de τ pode fazer com que a sequência de Hamiltonianos $H_i(\{K_i\})$ caracterizados por $\{K_i\}$ tenda a um ponto fixo H^* (isto é, que não se altera sob aplicação da transformação), ou seja, $\tau(H^*) = H^*$. Cada ponto deste espaço de parâmetros de H_1 pode ser visto como um estado específico do sistema em uma dada temperatura. Os parâmetros $\{K^*\}$ de H^* são pontos fixos da eq. (3.2.11), ou seja,

$$\{K^*\} = T_b \{K^*\} \quad (3.2.11)$$

O comportamento crítico do sistema é determinado através dos pontos fixos de T_b . Da eq. (3.2.1) e, usando o fato de que ξ depende de $\{K\}$, temos que para um ponto fixo, $\xi=0$ ou ∞ . Os pontos com $\xi=0$ (que correspondem a $T=0$ ou $T=\infty$) são chamados

pontos fixos triviais (que caracterizam as diferentes fases), enquanto aqueles com $\xi = \infty$ são os pontos críticos (que caracterizam a transição entre as diferentes fases do sistema). O ponto fixo H^* da transformação τ é uma propriedade dela somente, independente do ponto inicial que, após sucessivas iterações, convergem para o ponto fixo. Sendo assim, diferentes pontos do espaço $\{K\}$ (ou equivalentemente, diferentes sistemas) que convergem para um mesmo ponto fixo $\{K^*\}$ apresentam o mesmo comportamento crítico, ou seja, os mesmos expoentes. Deste ponto surge o conceito de universalidade em fenômenos críticos.

No espaço $\{K\}$ de parâmetros ao variarmos a temperatura, cada ponto descreve uma trajetória chamada linha física. Esta linha atravessa superfícies iso- ξ (pois ξ depende da temperatura) até cruzar uma superfície de comprimento de correlação infinito S_∞ . Este é o ponto crítico do sistema. Em geral, este não é um ponto fixo de τ . Aplicando τ a este ponto crítico a trajetória evoluirá sobre a superfície S_∞ até chegar a um ponto fixo de S_∞ que controlará o comportamento crítico do sistema.

Na vizinhança de cada ponto fixo da transformação $T_b(\{K\})$ podemos fazer uma análise linear e estudar a estabilidade do mesmo. Temos então que :

$$K_i' = T_b^{-1}(K^*) + K \sum_{j=1}^n M_{ij}(K^*) (K_j - K_j^*) \quad (3.2.12)$$

$(i=1, 2, \dots, n)$

onde $M_{ij}(K^*) = (\partial T_b^{-1} / \partial K_j)_{K=K^*}$ é o Jacobiano da transformação $T_b(\{K\})$ calculado no ponto fixo $\{K^*\}$ e n é o número de

parâmetros do Hamiltoniano.

Diagonalizando-se a matriz M_{ij} podemos encontrar os autovalores $(\lambda^{(s)})$ e autovetores $(\varphi_i^{(s)})$ que satisfazem:

$$\sum_{j=1}^n M_{ji}(K^*) \varphi_j^{(s)} = \lambda^{(s)} \varphi_i^{(s)} \quad (s=1,2,\dots,n) \quad (3.2.13)$$

Definindo-se as coordenadas normais u_s dadas por

$$u_s = \sum_{j=1}^n (K_j - K_j^*) \varphi_j^{(s)} \quad (3.2.14)$$

obtemos as seguintes transformações:

$$u_s' = \lambda^{(s)} u_s \quad (3.2.15)$$

Da relação acima vemos que as variáveis u_s , denominadas campos de escala, sob renormalização sofrem uma simples mudança de escala e se anulam no ponto fixo. No caso de um ferromagneto estas variáveis são

$$u_1 \cong \left| \frac{T_c - T}{T_c} \right| \equiv \varepsilon \quad (T \rightarrow T_c) \quad (3.2.16)$$

$$u_2 \cong H \quad (\text{campo magnético}) \quad (3.2.17)$$

Os autovalores $\lambda^{(s)}$ podem assumir valores $\lambda^s > 1$ ($\lambda^s < 1$) o que caracteriza um campo de escala relevante (ou irrelevante). O caso particular $\lambda^{(s)}=1$ é dito

marginal pois $u_s' = u_s$, sendo necessária uma análise não linear em torno do ponto fixo a fim de caracterizar a estabilidade do mesmo.

O conhecimento dos autovalores ($\lambda^{(s)}$) do Jacobiano (M_{ij}) da transformação (T_b) calculado num ponto fixo permite a determinação dos expoentes críticos e com isso o comportamento das funções termodinâmicas na vizinhança deste ponto crítico. Considere, por exemplo, um ferromagneto cujos campos de escala são $u_1 \equiv u_T$ e $u_2 \equiv u_H = H$. Sejam $\lambda^{(T)}$ e $\lambda^{(H)}$ os autovalores associados respectivamente a u_T e u_H no ponto crítico $\epsilon=H=0$. Fazendo-se $H=0$, a renormalização em torno de $\epsilon=0$ é dada por:

$$\epsilon' = \lambda^{(T)} \epsilon \quad (3.2.18)$$

como $\xi' = \xi/b$, $\xi \sim \epsilon^{-\nu_T}$ e $\xi' \sim \epsilon'^{-\nu_T'}$ em torno de T_c (ν_T é o expoente associado à divergência de ξ na variável T), segue-se que:

$$\nu_T = \text{Ln } b / \text{Ln } \lambda^{(T)} \quad (3.2.19a)$$

ou, equivalentemente,

$$\lambda^{(T)} = b^{Y_T} \quad \text{onde } Y_T = 1/\nu_T \quad (3.2.19b)$$

Mais genericamente, as mudanças de escala dos campos u_s podem ser escritos como (vide, por exemplo, Toulouse e Pfeuty [36])

$$\lambda^{(s)} = b^{Y_s} \quad (3.2.20)$$

onde y_s são chamados de dimensões anômalas de u_s .

Das eqs.(3.2.10),(3.2.15) e (3.2.20), segue-se que, na vizinhança de $\{K^*\}$, a parte singular da energia livre se transforma, para os campos de escala ε e H , como

$$f_{\text{sing}}(\varepsilon, H) = b^{-d} f_{\text{sing}}(b^{Y_T} \varepsilon, b^{Y_H} H) \quad (3.2.21)$$

o que caracteriza a parte singular da energia livre como uma função homogênea generalizada dos seus campos de escala.

As predições dos cálculos de grupo de renormalização do tipo Niemeijer e van Leeuwen dependem da função peso $P(S', S)$ como também da célula escolhida (sobre a qual o modelo de spin é definido); além das condições (3.2.4) outras tem sido propostas também (para uma discussão detalhada vide seção 1.5.1 da referência [34]).

É bom ressaltar que a fim de obtermos uma relação consistente entre os parâmetros de ambos os Hamiltonianos ($H(S)$ e $H'(S')$), no processo de renormalização não devem aparecer novos tipos de interações. Geralmente é o que acontece, sendo necessário ou a inclusão, no Hamiltoniano original, de tantos tipos de interações quantas forem necessárias a fim de que o espaço de parâmetros seja fechado por renormalização, ou a introdução de alguma aproximação.

A escolha da transformação de renormalização não é

única. Depois da proposta de Niemeijer e van Leeuwen [35] tem sido proposto outros GRER (vide referência [34]).

O procedimento básico que usaremos neste trabalho no estudo da criticalidade do modelo de Potts em fractais do tipo Sierpinski-Gasketo consiste em escolher um tipo particular de função peso $P(S',S)$ que gera uma transformação de renormalização que preserva a razão entre as probabilidades dos spins σ_A, σ_B e σ_C (vide fig. 5.2.2) estarem nos estados $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$ e nos estados $\sigma_A = \sigma_B = 1, \sigma_C = 2$ no caso $q=2$ (para $q > 2$, é preservada também a razão entre as probabilidades dos spins estarem nos estados $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$ e nos estados $\sigma_A = 1, \sigma_B = 2, \sigma_C = 3$). A preservação destas razões implica na preservação da função de partição do sistema (e, conseqüentemente, da energia livre F).

3.3 - CRITICALIDADE DOS MODELOS DE ISING E POTTS EM FRACTAIS

O estudo do comportamento crítico dos modelos de Ising e Potts tem sido realizado em várias redes hierárquicas assim como em outros fractais.

Como discutido na seção 2.3, as redes hierárquicas são usadas, em geral, como aproximações convenientes de redes de Bravais nas quais as transformações de grupo de renormalização são exatas. Griffiths e Kaufmann [37,20,38,39] iniciaram um estudo sistemático de modelos de spins clássicos nestas estruturas. Posteriormente, diversas propriedades geométricas e físicas foram estudadas: Melrose [29,30] definiu alguns

parâmetros geométricos (por exemplo, a dimensão intrínseca (D_1) e a conectividade (Q) vide seção 2.3) que são importantes no estudo do comportamento crítico dos modelos de spins nestas estruturas.

Em particular, o estudo de propriedades termodinâmicas e de fenômenos críticos de modelos de spins nestas estruturas tem objetivado a obtenção de resultados aproximados para redes de Bravais cuja solução exata não é conhecida como, por exemplo, a equação de estado para o ferromagneto de Potts na rede quadrada anisotrópica ($K_x \neq K_y$) (vide Chame, Tsallis e Costa [40]). Nesta referência os autores obtiveram, utilizando a técnica de GRER juntamente com um método proposto por Caride e Tsallis [41], a equação de estado (Magnetização versus temperatura) para o ferromagneto de Potts com $K_x \neq K_y$ numa rede hierárquica auto-dual que aproxima de forma conveniente a rede quadrada. Os resultados obtidos, para $q=2$, estão em boa concordância com o resultado exato conhecido para a rede quadrada. Dentro deste contexto, da Silva e Tsallis [42] estudaram a criticalidade do ferromagneto de Potts em redes hierárquicas do tipo Migdal-Kadanoff com diversos fatores de escala b , e verificaram que quando $D_1 \rightarrow 1$ os resultados obtidos para a temperatura crítica e para o expoente crítico térmico ν_T correspondem aos conhecidos para este modelo em redes hipercúbicas d -dimensionais no limite $d \rightarrow 1$. Mas para $D_1 \rightarrow \infty$, há uma discrepância entre os resultados para estas redes hierárquicas e para as redes hipercúbicas no limite $d \rightarrow \infty$. Outro aspecto interessante é o estudo de certas propriedades físicas em redes hierárquicas com

intuito de verificar se resultados conhecidos em redes de Bravais são válidos para redes hierárquicas. Em particular um ponto interessante a ser investigado refere-se à validade das leis de escala em redes hierárquicas. Isto exigiria o cálculo exato de, pelo menos, 3 expoentes críticos. Em nosso conhecimento tal questão ainda permanece em aberto.

Várias são as redes fractais onde os modelos de Ising e/ou Potts foram estudados, por exemplo: a curva de Koch [25] que apresenta ordem de ramificação finita, o Sierpinski-Gasket com gerador $b=2$ e suas generalizações para d dimensões [26,44,45] (mais recentemente Grillon e Brady Moreira [46] estudaram o modelo de Ising nos fractais Sierpinski-Gasket com gerador $b > 2$ e $d=2$ proposto por Hilfer e Blumen [19]), o Sierpinski Carpet [12,14,15,13], o Sierpinski Carpet generalizado [47], o Sierpinski Pastry Shell [14,15], o fractal X [48], o fractal Checkerboard [48]. Em consequência do valor finito da ordem de ramificação R para os fractais curva de Koch, Sierpinski-Gasket, o fractal X e Checkerboard, estes modelos, que são solúveis exatamente neste fractais através de grupo de renormalização, não apresentam transição de fase à temperatura finita (exceto quando o alcance ou a intensidade de alguma interação é infinita [44]). Para os fractais Sierpinski Carpet e Sierpinski Pastry Shell (cujo $R=\infty$), estes modelos apresentam $T_c \neq 0$.

Em particular, para o Sierpinski Carpet é observado que, no modelo de Ising e em sua generalização para q estados (modelo de Potts), o diagrama de fases, assim como ν_T , é

fortemente dependente de D_f e da lacunaridade L ; quando L (para D_f fixo) ou D_f (para L fixo) decrescem ν_T cresce e a fase ordenada ferromagnética diminui. O modelo de Potts (com $q > 2$) antiferromagnético [15] apresenta uma fase ordenada não trivial para $q \leq q_c$ cujo atrator encontra-se à temperatura finita. Nesta situação, conforme sugerido por Berker e Kadanoff [17] e verificado por Itzykson e Luck [18] ocorre um decaimento algébrico da função de correlação ao longo de toda a fase e não apenas no ponto crítico como usual. Para um valor fixo de b (fator de escala) q_c aumenta quando D_f aumenta e, para D_f fixo, q_c aumenta quando L diminui [15] dado o fato de que o número de coordenação médio da rede aumenta, o que favorece, portanto, um aumento da fase ordenada.

Para o fractal Sierpinski Pastry Shell [14] o modelo de Potts ferromagnético apresenta duas fases ordenadas: a fase de volume (caracterizado pelo fractal em si) e a fase de superfície (definida como a união das superfícies dos blocos eliminados em cada estágio de construção do fractal e cuja dimensão fractal é D_f^s , $1 < D_f^s < D_f$ (onde D_f é a dimensão fractal do volume)). Em particular, quando $J_s > \alpha_c J$ (onde J_s e J são as constantes de acoplamento de superfície e volume, respectivamente) o modelo pode exibir a fase ordenada de superfície sem apresentar necessariamente um ordenamento no volume. O comportamento de ν_T (para cada transição) com as respectivas dimensões fractais de superfície (D_f^s) e volume (D_f), assim como com a lacunaridade (L), é similar ao do caso ferromagnético deste modelo obtido no Sierpinski Carpet: O caso

antiferromagnético deste modelo (para $q > 2$) [15] apresenta as fases ordenadas de superfície e volume (cujos atratores encontram-se à temperatura finita) apenas para $q \leq q_c^s$ e $q \leq q_c$ ($q_c^s < q_c$), respectivamente. Para um valor fixo de b , q_c aumenta e q_c^s diminui quando D_f aumenta (em vista do fato de que um aumento em D_f implica num decréscimo do número de "buracos" e, portanto, também em D_f^s , o que desfavorece a existência de uma fase ordenada de superfície). Para $q_c^s < q \leq q_c$ o modelo exhibe apenas fase ordenada para o volume, que desaparece para $q > q_c$. O comportamento de ν_T com D_f^s e D_f , como também com L , é similar ao caso ferromagnético.

3.4 - O PROBLEMA DA UNIVERSALIDADE EM FRACTAIS

Como discutido na seção 3.1 em sistemas físicos não fractais com interações de curto alcance dois parâmetros determinam, em geral, a classe de universalidade dos sistemas físicos, quais sejam, a dimensão da sistema e a dimensão do parâmetro de ordem. Em redes hierárquicas vários resultados evidenciam (Melrose [29], Bambi Hu [49], Halser e Saxena [50]) que o comportamento crítico de modelos de spins discretos, em particular o modelo de Potts, é influenciado por diversos parâmetros geométricos além da dimensão intrínseca (D_1) e da conectividade (Q) de tais redes, indicando a não existência de um critério de universalidade para estas estruturas. Gefen e colaboradores [11,12] ao estudarem o comportamento crítico do

modelo de Ising em fractais (em particular, no Sierpinski Carpet) verificaram que os expoentes críticos dependem da dimensão fractal (D_f) e da lacunaridade (L). Posteriormente, Wu e Hu [27] e Hao e Yang [51] estudaram o modelo de Ising e Potts, respectivamente, em Sierpinski Carpet mais complexos e mostraram que tais parâmetros (D_f e L) são insuficientes para caracterizar a universalidade nestas estruturas. Em particular, como observado por Wu e Hu [27], o comportamento crítico depende (fixo D_f) do número de subquadrados eliminados em cada linha ou coluna (em cada estágio de construção do fractal), como também se os mesmos estão dispostos de forma intercalada ou consecutiva. Como concluído por Wu e Hu [27] "devido a ampla - virtualmente ilimitada - liberdade na construção de fractais, a esperança de que um conjunto completo ou finito para o critério de universalidade exista parece remota". Halsey e colaboradores [52] propuseram que uma caracterização mais completa das características de escala universais fosse dada por um espectro (ao invés de alguns expoentes) de expoentes e suas densidades. Talvez o mesmo seja verdade no estudo de transições de fase em fractais.

A existência de uma hierarquia infinita de expoentes que caracterizem o comportamento crítico de sistemas físicos (conhecida como MULTIFRACTALIDADE [24]) é encontrada, por exemplo, em momentos de distribuição de voltagem nos problemas de circuitos de resistores randômicos, circuitos de supercondutores randômicos, percolação, modelos de crescimento DLA, turbulência (vide referências [24],[52],[53] e referências

CAPÍTULO 4

GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO : ESCOLHA DA CÉLULA NO ESTUDO DE ANTIFERROMAGNETOS DE POTTS

4.1 - Introdução

A confiabilidade dos resultados de Grupo de Renormalização no Espaço Real (GRER) depende de alguns pontos: i) A escolha das quantidades físicas a serem preservadas (por exemplo, a função de partição, a função de correlação entre dois spins, etc.). Queremos ressaltar que o número destas quantidades deve ser igual ao número de parâmetros relevantes usados na descrição do sistema físico de interesse. ii) A escolha de células, que devem reproduzir o máximo possível as propriedades geométricas da rede e das configurações do estado fundamental das fases ordenadas. Esta condição é particularmente importante ao considerarmos redes de Bravais que são aproximadas por redes hierárquicas convenientes.

Existem vários métodos aproximados de GRER em sistemas de spins clássicos em redes de Bravais que tornam-se exatos em redes hierárquicas apropriadas. Um desses métodos, consideravelmente utilizado no cálculo da criticalidade de

ferromagnetos de Potts com q estados em sistemas que são aproximados por redes hierárquicas com 2 raízes (ou em sistemas definidos diretamente sobre estas redes) é baseado na preservação da função de correlação entre os spins localizados nas raízes da respectiva rede [55]. Ao tratarmos o caso antiferromagnético deste modelo nestes sistemas, a escolha das células convenientes nas quais este modelo apresente resultados consistentes torna-se mais crítica ainda; por exemplo, o fluxo obtido através de sucessivas iterações da transformação de Grupo de Renormalização (GR) não deve apresentar "grandes saltos" de tal forma a não gerar descontinuidade nas bacias atratoras das diversas fases.

Neste capítulo propomos, inspirados na análise do modelo de Ising na cadeia linear e na rede hierárquica diamante, um critério para uma escolha conveniente de células no estudo do ANTIFERROMAGNETO de Potts com q estados nos sistemas acima mencionados que envolvem redes hierárquicas (com 2 raízes e também, no caso $q=2$, com 3 raízes). Para isto, consideramos as energias das configurações de mais baixa energia deste modelo para os grafos não-renormalizado (ϵ_F e ϵ_I) e renormalizado (ϵ'_F e ϵ'_I) quando os spins σ_A, σ_B (e também, σ_C no caso de 3 raízes) das raízes A,B (e C) da rede hierárquica estão no estado tipo F (todos os σ_i são iguais $i=A,B$ e C) e tipo I (onde existe um σ_i distinto dos outros; $i=A,B$ e C) respectivamente. Mostramos, usando uma transformação de GR na variável transmissividade térmica [4] baseada na preservação da função de correlação entre quaisquer pares de spins situados nas raízes da rede hierárquica [55],

que uma condição necessária para que tal GR apresente resultados confiáveis (isto é, produza fluxos que não apresentem "grandes saltos" e gere bacias atratoras contínuas) é que o estado fundamental deste modelo seja gerado pela mesma configuração de spin (tipo F ou I) das raízes A,B (e C) em ambas as redes.

Na seção 4.4 usamos uma transformação de Grupo de Renormalização no caso de 1 parâmetro em termos dos pesos de Boltzmann (nas quais as energias ϵ_F e ϵ_I aparecerão naturalmente) e provamos, na seção 4.5, sua equivalência ($\forall q$ no caso de redes hierárquicas com 2 raízes e, para $q=2$, em redes hierárquicas com 3 raízes) com a preservação da função de correlação entre dois spins localizados nas raízes da rede hierárquica. Na seção 4.6 formalizamos a transformação de GR em termos de ϵ_F e ϵ_I .

Na seção 4.7, analisamos esta transformação no caso antiferromagnético à temperatura nula. Constatamos que, no caso de sistemas antiferromagnéticos onde $\epsilon_F = \epsilon_I$, é possível a ocorrência de uma fase ordenada não usual (onde as correlações decaem com uma lei de potência) cujo atrator encontra-se à temperatura finita.

Na seção 4.8 estendemos esta transformação de GR para o caso do modelo de Potts com 2 parâmetros (acoplamentos entre 2 e 3 spins) em sistemas que envolvam redes hierárquicas com 3 raízes.

4.2 - Modelo de Ising na cadeia linear

Consideremos, por exemplo, o modelo de Ising com interações J entre primeiros vizinhos na cadeia linear descrito pelo Hamiltoniano adimensional (caso particular da eq. (5.3.1) para $K_3 = 0$ e $q = 2$)

$$\beta H = -K \sum_{\langle i, j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad (\beta = 1/K_B T) \quad (4.2.1)$$

$$(K = \beta J), (\sigma_i, \sigma_j = 1, 2)$$

cuja solução exata [1] mostra que este modelo só se ordena (ferro ($J > 0$) e antiferromagneticamente ($J < 0$)) à temperatura nula (isto é, para $K \rightarrow \infty$ e $K \rightarrow -\infty$, respectivamente). O diagrama de fases com a indicação de fluxos para este problema num enfoque de GRER está ilustrado na figura abaixo:

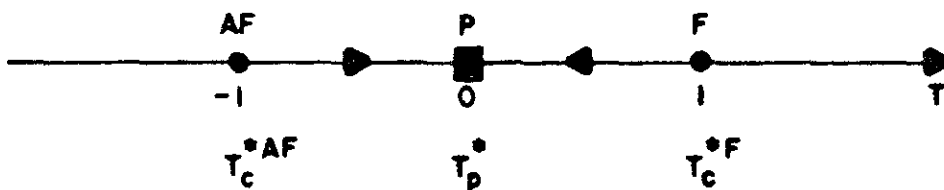


Figura 4.2.1 - Diagrama de fases exato para o modelo de Ising (sem campo externo) na cadeia linear. ■ e • representam os pontos fixos atrator e instáveis, respectivamente. As setas indicam o sentido do fluxo esperado em cálculos de grupo de renormalização.

onde $t \equiv \tanh K$ é uma variável muito utilizada em cálculos de expansão em série [56] e GRER chamada transmissividade térmica

[4]. Como ilustrado na figura, $t_p^* = 0$ (i.e., $K_p^* = 0$, $T = \infty$) representa o atrator da fase paramagnética (P) ($-1 < t < 1$), ou seja, qualquer valor finito de K deve fluir, após sucessivas iterações do GR, para $K_p^* = 0$. Os respectivos pontos fixos instáveis das fases ferro (F) e antiferromagnética (AF) correspondem a $t_c^{*F} = 1$ ($J > 0$, $T = 0$) e $t_c^{*AF} = -1$ ($J < 0$, $T = 0$), indicando que o sistema só se ordena a $T = 0$.

Faremos a seguir uma comparação entre os resultados obtidos por GRER para este modelo utilizando diferentes células que geram a cadeia linear.

Considere a renormalização da célula de dimensão linear b na célula de dimensão linear menor b' (vide fig. 4.2.2). Efetuando-se o traço sobre os spins intermediários (σ_i e σ_i') não localizados nas raízes A e B ou, equivalentemente, usando-se o algoritmo de ligações em série na variável transmissividade t [4] (algoritmo este que preserva a função de correlação entre os spins das raízes A e B [55] obtem-se a seguinte equação de renormalização:

$$(t')^{b'} = t^b \quad (4.2.2)$$

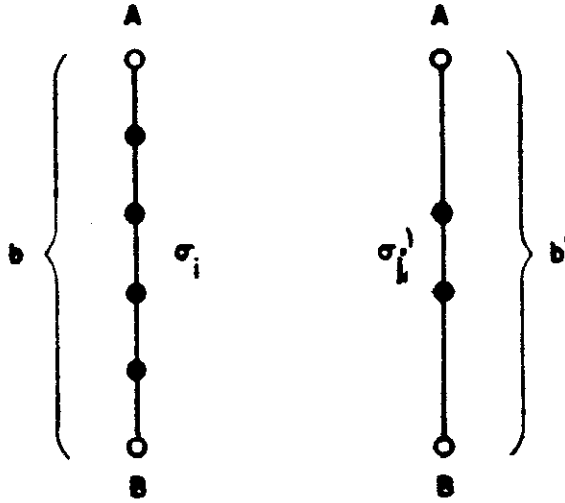


Figura 4.2.2- Células de dimensão linear b e b' , respectivamente (nesta figura particular $b=5$ e $b'=3$).

Consideremos agora o caso antiferromagnético ($J < 0$) deste modelo. Denotaremos, ao longo deste capítulo, por ε_F e ε_I as energias para a configuração (ou configurações) de mais baixa energia deste modelo para o grafo não renormalizado (de dimensão linear b) a $T=0$ (isto é, $K \rightarrow -\infty$) onde os spins nas raízes A e B estão em estados iguais ($\sigma_A = \sigma_B$) e diferentes ($\sigma_A \neq \sigma_B$), respectivamente. Similarmente, usaremos a notação ε_F' e ε_I' para o grafo renormalizado (de dimensão linear b'). Estas configurações contêm o menor número possível de ligações em cujos extremos estão localizados spins no mesmo estado. Estas ligações são ditas frustradas uma vez que spins vizinhos preferem estar em estados diferentes para $K \rightarrow -\infty$, minimizando assim a energia livre do sistema.

Para as células de tamanhos $b = 1$ e $b = 2$ temos, por exemplo:



célula com $b = 1$



célula com $b = 2$

$$\varepsilon_I (\sigma_A=1, \sigma_B=2) = 0$$

($b=1$)

$$\varepsilon_I (\sigma_A=1, \sigma_B=2, \sigma_i=1 \text{ ou } 2) = -K > 0$$

($b=2$)

$$\varepsilon_F (\sigma_A=\sigma_B=1) = -K > 0$$

($b=1$)

$$\varepsilon_F (\sigma_A=1, \sigma_B=1, \sigma_i=2) = 0$$

($b=2$)

Em geral, para estas células, ε_I e ε_F valem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= 0 \\ \varepsilon_F &= -K > 0 \end{aligned} \quad \forall \text{ } b \text{ ímpar} \quad (4.2.3a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= -K > 0 \\ \varepsilon_F &= 0 \end{aligned} \quad \forall \text{ } b \text{ par} \quad (4.2.3b)$$

Comparemos agora os resultados obtidos com a renormalização das seguintes células:

- i) $b = 2$ em $b' = 1$
- ii) $b = 3$ em $b' = 1$
- iii) $b = 4$ em $b' = 2$

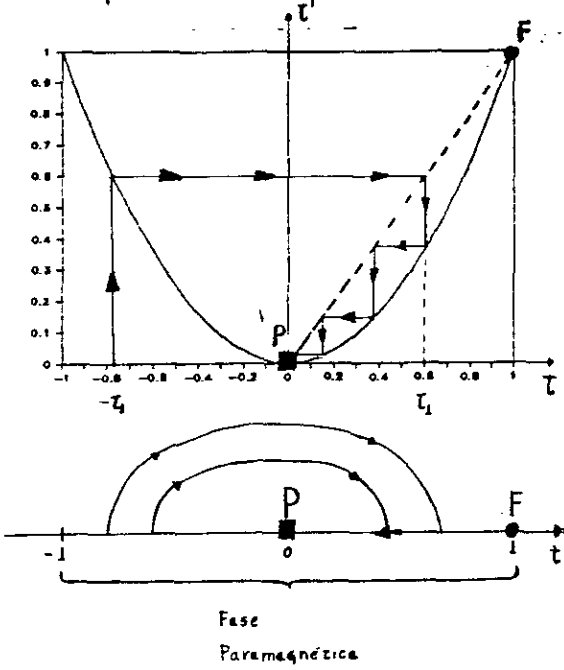
cuja equação de renormalização com suas representações gráficas e seus respectivos diagramas de fases (nos casos $J \geq 0$ ($0 \leq t \leq 1$) e $J \leq 0$ ($-1 \leq t \leq 0$)), estão ilustrados na figura 4.2.3. Podemos notar que a renormalização $b=2$ em $b'=1$ (caso i)) não descreve de forma correta o diagrama de fases do modelo de Ising na cadeia linear, pois não contém o ordenamento antiferromagnético ($J < 0$) a $T = 0$ do sistema (que deveria corresponder ao ponto fixo instável $t_c^{*AF} = -1$ (vide fig. 4.2.1)) e, além disso, o fluxo da região $-1 \leq t < 0$ ($J < 0$) converge ao atrator paramagnético (P) por valores positivos (ao invés de negativos) de J . Por outro lado, a renormalização das células $b=3$ em $b'=1$ (caso ii)) e $b=4$ em $b'=2$ (caso iii)) reproduzem de forma correta (se consideramos no caso (iii) as soluções $t'=t^2$ para $0 \leq t \leq 1$ e $t'=-t^2$ para $-1 \leq t \leq 0$) o diagrama de fases deste modelo para $J \geq 0$ e $J \leq 0$.

Portanto, conforme as eqs. (4.2.3), observamos que os casos que levam a bons resultados (b e b' ímpares (caso ii)) e b e b' pares (caso iii)) correspondem a escolha de células não renormalizada e renormalizada onde a desigualdade $\varepsilon_I < \varepsilon_F$ (ou $\varepsilon_F < \varepsilon_I$) é preservada no processo de renormalização; ou seja, para ambas as células, a configuração das raízes A e B (σ_A e σ_B) que gera o estado fundamental do modelo (para $J < 0$) é a mesma.

caso i)

$$b=2 \rightarrow b'=1$$

$$\text{eq. renormalização: } \tau' = \tau^2$$



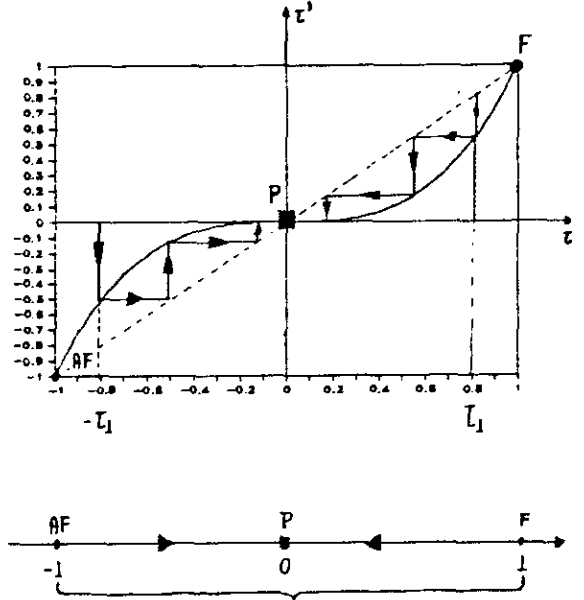
Fase
Paramagnética

a)

caso ii)

$$b=3 \rightarrow b'=1$$

$$\text{eq. renormalização: } \tau' = \tau^3$$



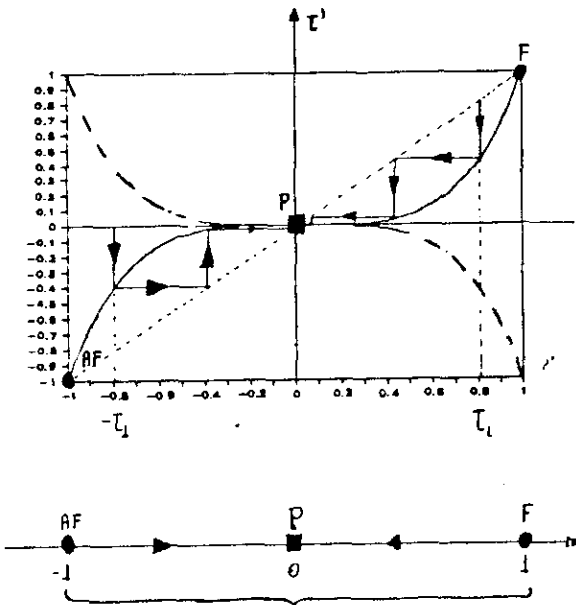
Fase
Paramagnética

b)

caso iii)

$$b=4 \rightarrow b'=2$$

$$\text{eq. renormalização: } \tau' = \tau^2$$



Fase
Paramagnética

c)

Figura 4.2.3 - Curvas de renormalização $t'(t)$ e diagrama de fases para as renormalizações: a) $b=2$ em $b'=1$, b) $b=3$ em $b'=1$, c) $b=4$ em $b'=2$. \blacksquare representa o atrator da fase paramagnética e o são os pontos fixos instáveis. As linhas pontilhadas representam os ramos não fisicamente aceitáveis no caso c). As interseções das escadas com os gráficos $t'(t)$ fornecem as imagens sucessivas dos pontos arbitrários $t_1 > 0$ e $-t_1$ obtidas iterando-se a transformação de GR várias vezes até atingir o atrator.

4.3 - Modelo de Ising na rede hierárquica diamante

Consideremos agora outro exemplo que ilustra a importância da escolha de células no processo de renormalização. Considere o modelo de Ising com interações entre primeiros vizinhos na rede hierárquica diamante (vide fig. 4.3.1), na qual vários cálculos exatos tem sido feitos para o modelo de Ising e Potts [57, 42, 54].

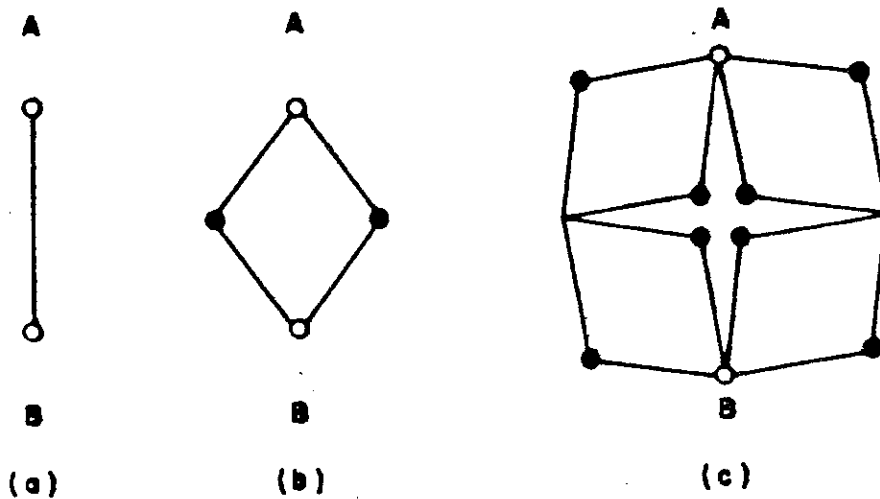


Figura 4.3.1 - Estágios de construção da rede hierárquica diamante. a) $k=0$, $b=1$ b) $k=1$, $b=2$ c) $k=2$, $b=4$. k e b são os estágios de construção e distância química, respectivamente.

Consideremos as seguintes renormalizações para as células DIAMANTE:

iv) $b = 2$ em $b' = 1$

v) $b = 4$ em $b' = 2$

Usando os algoritmos de ligações em série e paralelo [4] e, conseqüentemente, preservando a função de correlação entre os spins das raízes A e B, obtemos que a equação de renormalização na variável transmissividade t , para o caso (iv) é dada por

$$t' = \frac{2t^2}{1+t^4} \quad (b=2 \text{ em } b'=1) \quad (4.3.1)$$

Para o caso (v) (renormalização $b=4$ em $b'=2$) obtem-se, analogamente, que:

$$\frac{2t'^2}{1+t'^4} = \frac{2 \left(\frac{2t^2}{1+t^4} \right)^2}{1 + \left(\frac{2t^2}{1+t^4} \right)^4} \quad (b=4 \text{ em } b'=2) \quad (4.3.2)$$

equação esta que apresenta duas soluções $t'(t)$ reais para $-1 \leq t \leq 1$: uma positiva ($t' \geq 0$) (que coincide com a solução obtida no caso iv)) e outra negativa ($t' \leq 0$).

Os gráficos de t' em função de t e diagramas de fases para as renormalizações acima estão ilustrados nas figs. (4.3.2).

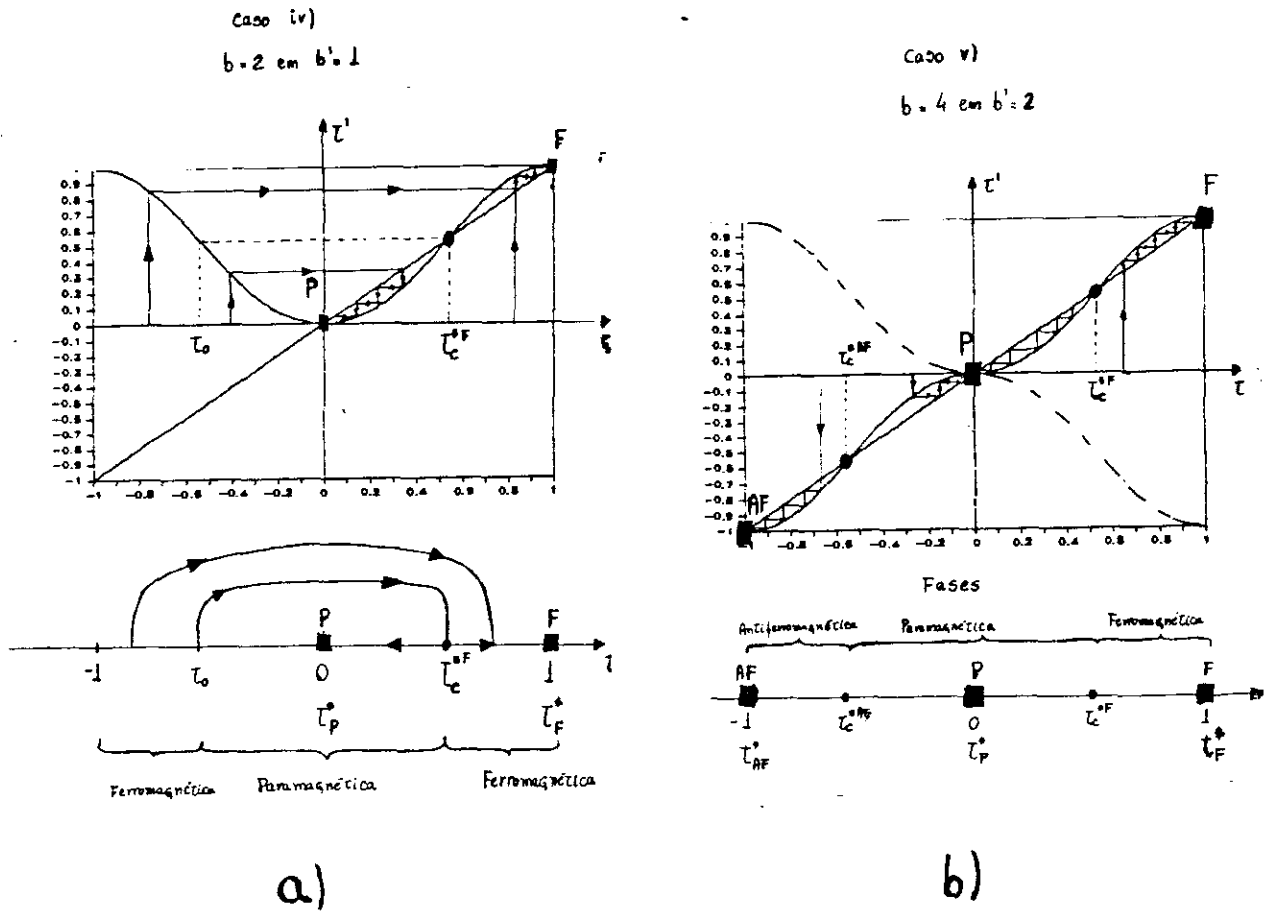


Figura 4.3.2 - Gráfico da transmissividade térmica renormalizada $t'=t'(t)$ para o modelo de Ising na rede hierárquica diamante e diagrama de fases correspondente. a) renormalização $b=2$ em $b'=1$. b) renormalização $b=4$ em $b'=2$. Os ramos tracejados correspondem a soluções não físicas. As escadas indicam os fluxos para alguns pontos arbitrários.

Notamos da fig. (4.3.2a) que os pontos com transmissividade t onde $t_0 < t < 0$ (t_0 é tal que $t'(t_0) = t_c^{*F}$) fluem para o atrator paramagnético (P) ($t_p^* = 0$) por valores positivos de J , enquanto que pontos com $|K|$ grande, ou seja,

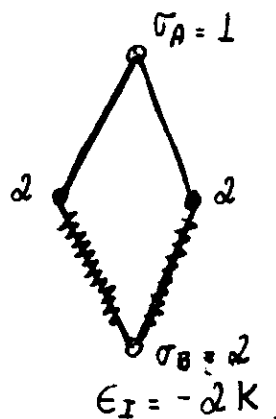
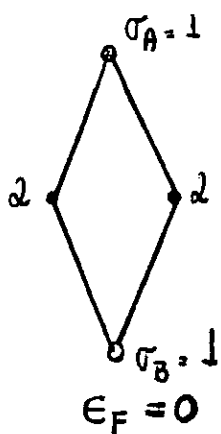
cujas transmissividades t são tais que $-1 \leq t \leq t_0$, convergem para o atrator ferromagnético (F) ($t_F^* = 1$), gerando portanto uma bacia atratora ferromagnética descontínua. Por outro lado, na renormalização $b=4$ em $b'=2$ se escolhermos as soluções fisicamente aceitáveis, quais sejam: $t' \geq 0$ para $0 \leq t \leq 1$ e $t' \leq 0$ para $-1 \leq t \leq 0$, obteremos um diagrama de fases (vide fig. 4.3.2b) onde o sistema apresenta uma fase ordenada ferro (F) para $t_c^F < t \leq 1$ ($t_c^F \approx 0.571$ que concorda com o resultado exato [33]), uma fase antiferro (AF) para $-1 \leq t < t_c^{AF}$ ($t_c^{AF} = -t_c^F \approx -0.571$) e uma fase paramagnética para $t_c^{AF} < t < t_c^F$. Queremos ressaltar que o diagrama de fases obtido através da escolha de células (iv)) (vide fig. 4.3.2a) deve ser incorreto visto que não apresenta a fase AF esperada fisicamente. Isto se deve ao fato que, no estágio K de construção desta rede hierárquica, o número de ligações frustradas é 2^k , enquanto que o número total de ligações é 4^k . Sendo assim, no limite termodinâmico ($K \rightarrow \infty$) temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{n}^\circ \text{ ligações frustradas}}{\text{n}^\circ \text{ ligações total}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4} \right)^k \rightarrow 0$$

ou seja, o número de ligações frustradas torna-se desprezível em relação ao número total de ligações e, portanto, espera-se fisicamente que o sistema seja antiferromagnético pelo menos à $T = 0$. Devido a este fato e à não existência de descontinuidades em bacias atradoras, esperamos que o diagrama de fases correspondente ao caso (v) (fig. 4.3.2b) seja o correto, contrariamente ao resultado de Itzykson e Luck [18]

que prevêem apenas ordem ferromagnética para o modelo de Ising ($q=2$) na rede hierárquica diamante.

Façamos a análise das energias ϵ_F e ϵ_I para a célula de distância química $b=2$:



Em geral, para qualquer estágio de construção da rede diamante, temos:

$$\epsilon_F^{\text{DIAM}} = 0$$

$$\forall b > 1$$

$$\epsilon_I^{\text{DIAM}} = -bK > 0$$

e

$$\epsilon_F^{\text{DIAM}} = -K > 0$$

$$b = 1$$

$$\epsilon_I^{\text{DIAM}} = 0$$

Conseqüentemente, para os casos acima temos que:

iv) renormalização $b = 2$ em $b' = 1$

$$\epsilon_I > \epsilon_F \text{ e } \epsilon_I' < \epsilon_F'$$

v) renormalização $b = 4$ em $b' = 2$

$$\epsilon_I > \epsilon_F \text{ e } \epsilon_I' > \epsilon_F'$$

Portanto, verificamos também para esta rede que a escolha adequada para as células corresponde ao caso no qual o

sentido de desigualdade entre ε_F e ε_I é preservado sob renormalização.

4.4 - Transformação de Grupo de Renormalização com 1 parâmetro

Dos resultados anteriores para o modelo de Ising na cadeia linear (que é uma rede hierárquica cuja solução exata é conhecida) e para a rede hierárquica diamante (onde espera-se fisicamente que haja ordem AF pelo menos à $T = 0$) somos levados a formular o seguinte:

Seja T_b uma transformação de grupo de renormalização que preserve a função de correlação entre os spins das raízes A e B de uma rede hierárquica. Uma condição necessária mas não suficiente para que este grupo seja exato no tratamento do modelo de Ising antiferromagnético em tal rede é que o estado fundamental deste modelo nas células não-renormalizada G e renormalizada G' seja gerado pela mesma configuração de spin das raízes A e B em ambos os grafos G e G' . (A-1)

Iremos propor uma transformação de grupo de renormalização em termos dos pesos de Boltzmann. Nestes pesos as energias ε_F e ε_I aparecem naturalmente. Será demonstrado na seção 4.5 que esta transformação de grupo de renormalização é equivalente à preservação da função de correlação entre dois spins das raízes de um grafo com duas e três raízes.

Sejam (W_F, W_I) e (W'_F, W'_I) os pesos de Boltzmann dos grafos não-renormalizado (de distância química b) e renormalizado (de distância química b'), respectivamente

definidos para grafos com 2 (duas) raízes A e B (como, por exemplo, a cadeia linear e a rede hierárquica diamante) por

$$W_F \equiv W(1,1) = \text{Tr}_{\left\{ \begin{array}{c} \text{todos os} \\ \sigma \end{array} \right\}} \left\{ \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \exp[-\beta H] \right\} = \quad (4.4.1a)$$

$$= Z \langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \rangle$$

e

$$W_I \equiv W(1,2) = \text{Tr}_{\left\{ \begin{array}{c} \text{todos os} \\ \sigma \end{array} \right\}} \left\{ \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 2) \exp[-\beta H] \right\} = \quad (4.4.1b)$$

$$= Z \langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 2) \rangle$$

e definidos analogamente para grafos com 3 (três) raízes A, B e C (por exemplo, a família Sierpinski-Gasket com m folhas a ser discutido na seção 5.2) como:

$$W_F \equiv W(1,1,1) = \text{Tr}_{\left\{ \begin{array}{c} \text{todos os} \\ \sigma \end{array} \right\}} \left\{ \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \delta(\sigma_C, 1) \exp[-\beta H] \right\} = \quad (4.4.2a)$$

$$= Z \langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \delta(\sigma_C, 1) \rangle$$

e

$$W_I \equiv W(1,1,2) = \text{Tr}_{\left\{ \begin{array}{c} \text{todos os} \\ \sigma \end{array} \right\}} \left\{ \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \delta(\sigma_C, 2) \exp[-\beta H] \right\} = \quad (4.4.2b)$$

$$= Z \langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \delta(\sigma_C, 2) \rangle$$

Nas expressões acima Z denota a função de partição; $\langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, j) \rangle$ e $\langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \delta(\sigma_C, j) \rangle$ ($j=1,2$) representam a probabilidade dos spins σ_A e σ_B (e $\sigma_A = \sigma_B$ e σ_C) do grafo G estarem nos respectivos estados 1 e j ($j=1,2$). A transformação de grupo de renormalização em termos de W_F e W_I que é completamente equivalente à preservação da função de correlação entre dois spins $\Gamma_{12}(G)$ para o modelo de Potts com interação entre primeiros vizinhos em grafos G de 2 (duas) raízes e também em grafos com 3 (três) raízes no caso $q=2$ é dada por:

$$\boxed{\frac{W_F}{W_I} = \frac{W'_F}{W'_I}} \quad (4.4.3)$$

4.5 - Equivalência da transformação de Grupo de Renormalização com a preservação da função de correlação a dois spins ($\Gamma_{12}(G)$).

Podemos reescrever as equações acima (eqs. (4.4.1) e (4.4.2)) em termos da função de correlação entre σ_A e σ_B . Para isto vamos usar forma vetorial do modelo de Potts com q estados [58]

$$-\beta H = \sum_{\langle i, j \rangle} K_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (4.5.1)$$

$$(K_{ij} = \beta J_{ij})$$

onde \vec{S}_i são vetores de spins de módulo S associados a cada sítio (ou, equivalentemente, a cada vértice do grafo G) que podem assumir um dos q estados $\vec{e}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, q)$, que são os vetores posição dos vértices de um hipertetraedro $(q-1)$ -dimensional em relação ao seu centro; J_{ij} é a constante de acoplamento entre \vec{S}_i e \vec{S}_j . A conexão entre $\delta(\alpha, \beta)$ e \vec{S}_i é dada (vide referência [55]) por

$$\delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{q} \left[\frac{(q-1)}{S^2} \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta + 1 \right] \quad (4.5.2)$$

Considerando $S^2 = q-1$ e levando em conta que a projeção de \vec{S}_i sobre \vec{e}_α é dada por

$$S_{i\alpha} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha / S$$

temos que a equação acima reduz-se a

$$\delta(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(q-1)}}{q} S_{\alpha\beta} + \frac{1}{q} \quad (4.5.3)$$

Substituindo esta equação nas eqs. (4.4.1a e b) temos:

$$W_F \equiv W(1, 1) = Z \left(\frac{(q-1)}{q^2} \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} \rangle + \frac{\sqrt{(q-1)}}{q^2} (\langle S_{\sigma_A 1} \rangle + \langle S_{\sigma_B 1} \rangle) + \frac{1}{q^2} \right) \quad (4.5.4a)$$

e

$$W_I \equiv W(1,2) = Z \left(\frac{(q-1)}{q^2} \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 2} \rangle + \frac{\sqrt{(q-1)}}{q^2} (\langle S_{\sigma_A 1} \rangle + \langle S_{\sigma_B 2} \rangle) + \frac{1}{q^2} \right)$$

(4.5.4b)

A função de correlação entre as componentes S_{11} , S_{12}, \dots, S_{m1} dos m spins (\vec{S}_i) ao longo de \vec{e}_1 é definida (vide eq. (3.1a) da referência [58]) por

$$\Gamma_{12\dots m}(G) \equiv \langle S_{11} S_{21} \dots S_{m1} \rangle \equiv \frac{1}{Z(G)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tr} \\ \text{todos} \\ \text{os } S \end{array} \right\} \left[S_{11} S_{21} \dots S_{m1} \exp \left(\sum_{i,j} K_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \right) \right] \quad (4.5.5)$$

e a função de correlação particionada, ou seja, a função de correlação entre diferentes componentes de spins é definida (vide eq. (3.29) referência [58]) por

$$\Gamma_P(G) \equiv \langle \prod_{B \in P} \prod_{i \in B} S_{i\alpha_B} \rangle \quad (4.5.6)$$

onde B é um conjunto de "blocos" de uma partição P onde em cada bloco um conjunto de vetores de spins são projetados ao longo de uma direção particular. Por exemplo, para $P = \{\{1,2\}, \{3\}\}$:

$$\Gamma_{12,3}(G) = \langle S_{11} S_{21} S_{32} \rangle$$

onde a vírgula indica que a componente de \vec{S}_3 é diferente da componente de \vec{S}_1 (que é igual à de \vec{S}_2). Pode-se mostrar (vide

eqs. (3.21a) e (3.36) da referência [58]) que

$$\Gamma_{12}(G) = \langle S_{11} S_{21} \rangle = t_{12}^{eq} \quad (4.5.7)$$

e

$$\Gamma_{1,2}(G) = \langle S_{11} S_{22} \rangle = -\Gamma_{12}(G)/(q-1) = -t_{12}^{eq}/(q-1) \quad (4.5.8)$$

onde t_{12}^{eq} é a transmissividade equivalente entre as raízes 1 e 2 do grafo G [55] definida como

$$t_{12}^{eq} = t(K_{eq}) = \frac{1 - e^{-K_{eq}}}{1 + (q-1) e^{-K_{eq}}}$$

onde K_{eq} é computado fazendo o traço sobre todos os outros spins (diferentes de \vec{S}_1 e \vec{S}_2), ou seja;

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Tr} \\ \text{todos} \\ \vec{S}_i \neq \vec{S}_1, \vec{S}_2 \end{array} \right\} \exp(K_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) = D \exp(K_{eq} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)$$

Usando as relações acima nas eqs. (4.5.4a e b) e usando o fato de que

$$\Gamma_1(G) = \langle S_{11} \rangle = 0 \quad \forall q \quad (4.5.9)$$

obtemos as seguintes expressões para os pesos de Boltzmann

$$W(1,1) = \frac{Z}{q^2} \left[(q-1) \Gamma_{AB} + 1 \right] = \frac{Z}{q^2} \left[(q-1) t_{AB}^{eq} + 1 \right] \quad (4.5.10a)$$

e

$$W(1,2) = \frac{Z}{q^2} \left[(q-1) \Gamma_{A,B} + 1 \right] = \frac{Z}{q^2} \left[-t_{AB}^{eq} + 1 \right] \quad (4.5.10b)$$

A variável transmissividade equivalente t_{AB}^{eq} é uma razão entre duas funções multilineares na variável transmissividade térmica t_1 associada a cada lado l do grafo G ; um numerador $N_{AB}(t, G)$ e um denominador D (que é proporcional à função de partição Z do modelo) [4], ou seja,

$$t_{AB}^{eq} = N_{AB}/D$$

Portanto, das eqs. (4.5.10a e b) e da expressão de t_{AB}^{eq} temos que a transformação de grupo de renormalização (eq. (4.4.3)) pode ser reescrita como:

$$\frac{D + (q-1) N_{AB}}{D - N_{AB}} = \frac{D' + (q-1) N'_{AB}}{D' - N'_{AB}}$$

que leva a:

$$\frac{N_{AB}}{D} = \frac{N'_{AB}}{D'} \Rightarrow t_{AB}^{eq} = t'_{AB}{}^{eq} \quad (4.5.11)$$

Podemos fazer o caminho inverso (ou seja, impor $t_{AB}^{eq} = t'_{AB}{}^{eq}$) e mostrar que

$$t_{AB}^{eq} = t'_{AB}{}^{eq} \Rightarrow \frac{W_F}{W_I} = \frac{W'_F}{W'_I} \quad (4.5.12)$$

Dos resultados acima e da eq. (4.5.7) temos então que:

$$\boxed{\frac{W_F}{W_I} = \frac{W'_F}{W'_I} \Leftrightarrow \Gamma_{AB}(G) = \Gamma'_{AB}(G')} \quad (4.5.13)$$

o que mostra que conservar a razão entre as probabilidades dos spins das raízes, \vec{S}_A e \vec{S}_B , estarem no mesmo estado e em estados diferentes é equivalente a preservar, sob renormalização, a função de correlação entre as mesmas componentes dos spins \vec{S}_A e \vec{S}_B para o modelo de Potts em grafos com 2 (duas) raízes.

Para o caso de grafos com 3 (três) raízes (por exemplo, a família de fractais Sierpinski-Gasket a definida na seção 5.2) podemos mostrar tal equivalência para o modelo de Ising ($q=2$); senão vejamos:

Usando a relação entre $\delta(\alpha, \beta)$ e $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ (eq. (4.5.2)) temos que as eqs. (4.4.2) se reduzem a

$$W(1,1,1) \equiv \frac{Z}{q^3} \left\{ (q-1)^{3/2} \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} S_{\sigma_C 1} \rangle + (q-1) \left[\langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} \rangle + \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_C 1} \rangle + \langle S_{\sigma_B 1} S_{\sigma_C 1} \rangle \right] + (q-1)^{1/2} \left[\langle S_{\sigma_A 1} \rangle + \langle S_{\sigma_B 1} \rangle + \langle S_{\sigma_C 1} \rangle \right] + 1 \right\} \quad (4.5.14a)$$

e

$$W(1,1,2) \equiv \frac{Z}{q^3} \left\{ (q-1)^{3/2} \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} S_{\sigma_C 2} \rangle + (q-1) \left[\langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} \rangle + \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_C 2} \rangle + \langle S_{\sigma_B 1} S_{\sigma_C 2} \rangle \right] + (q-1)^{1/2} \left[\langle S_{\sigma_A 1} \rangle + \langle S_{\sigma_B 1} \rangle + \langle S_{\sigma_C 2} \rangle \right] + 1 \right\} \quad (4.5.14b)$$

Pode-se mostrar (vide eqs.(3.21b) e (3.37) da referência [58]) que

$$\Gamma_{ABC}(G) = \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} S_{\sigma_C 1} \rangle = (q-2)(q-1)^{-1/2} t_{ABC}^{eq} \quad (4.5.15)$$

e

$$\Gamma_{AB,C}(G) = \langle S_{\sigma_A 1} S_{\sigma_B 1} S_{\sigma_C 2} \rangle = -\Gamma_{ABC}(G)/(q-1) \quad (4.5.16)$$

Considerando o modelo de Ising ($q=2$) e substituindo as eqs.(4.5.7,8,9,15,16) nas eqs.(4.5.14a e b) temos que os pesos de Boltzmann são dados por

$$W(1,1,1) = \frac{Z}{8} \left[t_{AB}^{eq} + t_{AC}^{eq} + t_{BC}^{eq} + 1 \right] \quad (4.5.17a)$$

e

$$W(1,1,2) = \frac{Z}{8} \left[t_{AB}^{eq} - t_{AC}^{eq} - t_{BC}^{eq} + 1 \right] \quad (4.5.17b)$$

que no caso isotrópico ($t_{AB}^{eq} = t_{BC}^{eq} = t_{AC}^{eq}$) se reduzem a

$$W(1,1,1) = \frac{Z}{8} \left[1 + 3 t_{AB}^{eq} \right] \quad (4.5.17c)$$

e

$$W(1,1,2) = \frac{Z}{8} \left[1 - t_{AB}^{eq} \right] \quad (4.5.17d)$$

Temos então que a transformação de grupo de renormalização (eq.(4.4.3)) para o modelo de Ising (no caso isotrópico) em grafos com 3(três) raízes pode ser reescrita como

$$\frac{D + 3 N_{AB}}{D - N_{AB}} = \frac{D' + 3 N'_{AB}}{D' - N'_{AB}}$$

onde usamos o fato de que $t_{AB}^{eq} = N_{AB} / D$.

Multiplicando o numerador e denominador da equação acima e simplificando termos em comum, obtemos que:

$$\frac{N_{AB}}{D} = \frac{N'_{AB}}{D'} \Rightarrow t_{AB}^{eq} = t'_{AB}{}^{eq} \quad (4.5.18)$$

De forma análoga ao caso de 2(duas) raízes, podemos fazer o caminho inverso (ou seja, impor $t_{AB}^{eq} = t'_{AB}{}^{eq}$) e, usando a hipótese de isotropia ($t_{AB}^{eq} = t_{BC}^{eq} = t_{AC}^{eq}$), mostrar que

$$t_{AB}^{eq} = t'_{AB}{}^{eq} \Rightarrow \frac{W_F}{W_I} = \frac{W'_F}{W'_I} \quad (4.5.19)$$

Portanto, dos resultados acima e da eq. (4.5.7)

temos que:

$$\boxed{\frac{W_F}{W_I} = \frac{W'_F}{W'_I} \Leftrightarrow \Gamma_{AB}(G) = \Gamma'_{AB}(G')} \quad (4.5.20)$$

Analogamente, pode-se mostrar que no caso anisotrópico, além das eqs. acima, são válidas as seguintes equações:

$$\frac{W(1,1,1)}{W(2,1,1)} = \frac{W'(1,1,1)}{W'(2,1,1)} \Leftrightarrow \Gamma_{BC}^{eq}(G) = \Gamma'_{BC}{}^{eq}(G) \quad (4.5.21a)$$

$$\frac{W(1,1,1)}{W(1,2,1)} = \frac{W'(1,1,1)}{W'(1,2,1)} \Leftrightarrow \Gamma_{AC}^{eq}(G) = \Gamma'_{AC}{}^{eq}(G) \quad (4.5.21b)$$

A relação (4.5.20) mostra a equivalência da transformação de grupo de renormalização (eq.(4.4.3)) com a preservação da função de correlação a 2(dois) spins localizados em qualquer par de raízes ($\Gamma_{12}(G)$) para o modelo de Ising ($q=2$)

isotrópico em grafos com 3(três) raízes.

4.6 - Formalização da transformação de Grupo de Renormalização em termos de ϵ_F e ϵ_I .

Para entendermos as razões da afirmativa (A-1) vamos, nesta sub-seção, reescrever a eq.(4.4.3) em termos de ϵ_F e ϵ_I . Para isto, consideremos o Hamiltoniano de Potts com interação a entre primeiros vizinhos (eq.(5.3.1) com $K_3=0$) associado a uma grafo arbitrário . Levando-se em conta que cada ligação $\langle i,j \rangle$ onde $\sigma_i=\sigma_j$ contribui com um termo $e^{-\beta H_{ij}} = e^{K_2}$, enquanto que cada ligação onde $\sigma_i \neq \sigma_j$ fornece um fator $e^{-\beta H_{ij}} = e^0 = 1$ para os pesos de Boltzmann (eqs.(4.4.1a e b) e (4.4.2a e b)), segue-se que estes pesos, para o grafo não renormalizado, podem ser escritos como:

$$W_1(x) = \sum_{i=0}^{N_b} g_i^{(1)} X^i \quad \begin{array}{l} (i = F, I) \\ (X \equiv e^{K_2}) \end{array} \quad (4.6.1)$$

onde N_b é o número total de ligações do grafo e, $g_i^{(1)}$, a degenerescência do estado com energia adimensional $\beta \epsilon_i = -K_2 i$. Observe que

$$g_F(N_b) = 1 \quad (4.6.2a)$$

$$g_I(N_b) = 0 \quad (4.6.2b)$$

Isto se deve ao fato de que apenas uma configuração (qual seja, $\{\sigma_{\text{internos}}\} = \sigma_A = \sigma_B$) contribui para W_F com a energia mínima ($\beta \varepsilon_{N_b} = -N_b K_2$) (gerando portanto, o termo em X^{N_b}), enquanto que para W_I (devido a $\sigma_A \neq \sigma_B$) tal energia ($\beta \varepsilon_{N_b}$) não é possível de ser alcançada.

Colocando-se em evidência o 1º termo não-nulo ($g_1(j_1) X^{j_1}$) de ordem mais baixa em X^i , temos:

$$W_1(X) = g_1(j_1) X^{j_1} [1 + f_1(X)] \quad (i=F, I) \quad (4.6.3)$$

onde

$$f_1(X) = \sum_{i > j_1}^{N_b} \frac{g_1(i)}{g_1(j_1)} X^{(i-j_1)} \quad (i=F, I) \quad (4.6.4)$$

Como, por definição, $X \geq 0$ e $g_1(i) \geq 0 \quad \forall i, 1$, segue-se das eqs. (4.6.4) e (4.6.2a e b) que:

$$f_1(0) = 0 \quad (4.6.5a)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} f_1(X) \rightarrow \infty \quad (4.6.5b)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{f_F(X)}{f_I(X)} \rightarrow \infty \quad (i=F, I) \quad (4.6.5c)$$

e $f_1(X) \quad (i=F, I)$ é uma função monótona crescente.

Para $X=0$ (ou seja, para o caso antiferromagnético ($J_2 < 0$) deste modelo a $T=0$ ($K_2 \rightarrow -\infty$)) o termo dominante em $W_1(X)$ é $g_1(j_1) X^{j_1}$ correspondente a configurações com j_1 ligações frustradas. Portanto:

$$g_F(j_F) X^{j_F} = g_F e^{-\beta \epsilon_F} \quad (4.6.6a)$$

$$g_I(j_I) X^{j_I} = g_I e^{-\beta \epsilon_I} \quad (4.6.6b)$$

onde ϵ_F e ϵ_I são as respectivas energias das configurações de spins de mais baixa energia para $K_2 \rightarrow -\infty$ no grafo não renormalizado com a restrição dos spins das raízes A e B estarem na configuração $(\sigma_A = \sigma_B = 1)$ e $(\sigma_A = 1, \sigma_B = 2)$ no caso de grafos de duas raízes, ou no caso de grafos de três raízes, $(\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1)$ e $(\sigma_A = \sigma_B = 1$ e $\sigma_C = 2)$. Diremos que estas configurações corespondem a estados do tipo F e I, respectivamente. Observe que a energia do estado fundamental do modelo (para $J_2 < 0$) neste grafo é igual à menor das energias ϵ_F e ϵ_I .

Podemos definir expressões análogas às eqs.(4.6.1)-(4.6.6) para o grafo renormalizado (de distância química b') onde os símbolos tem o índice linha (" ' ").

Das eqs.(4.6.3) e (4.6.6) segue-se que a transformação de grupo de renormalização (eq.(4.4.3)) (com fator de escala b/b') pode ser escrita como:

$$\frac{g_F e^{-\beta \epsilon_F} [1+f_F(X)]}{g_I e^{-\beta \epsilon_I} [1+f_I(X)]} = \frac{g_F' e^{-\beta \epsilon_F'} [1+f_F'(X')]}{g_I' e^{-\beta \epsilon_I'} [1+f_I'(X')]} \quad (4.6.7)$$

onde relembramos que $f_I(0) = f_I'(0) = 0$ e $f_I(\infty) = f_I'(\infty) \rightarrow \infty$ (conforme eqs.(4.6.5a e b)).

4.7 - Análise da transformação de Grupo de Renormalização a $T = 0$ (caso antiferromagnético, $J_2 < 0$).

Façamos a análise da equação anterior para $X \equiv 0$ (ou seja, $K_2 \rightarrow -\infty$). Da eq. (4.6.5a) segue-se que:

$$\frac{g_F e^{-\beta \epsilon_F}}{g_I e^{-\beta \epsilon_I}} = \frac{g_F' e^{-\beta \epsilon_F'} [1+f_F'(X')]}{g_I' e^{-\beta \epsilon_I'} [1+f_I'(X')]} \quad (4.7.1)$$

Vários casos envolvendo a relação entre as energias ϵ_F e ϵ_I , ϵ_F' e ϵ_I' deste modelo (com $J_2 < 0$) para os grafos não renormalizado e renormalizado são possíveis. Explicitamos, na Tabela 4.7.1 as possíveis soluções X' da equação acima para $X=0$, onde levamos em consideração as eqs.(4.6.5) e assumimos que os grafos são finitos (e, portanto, g_F/g_I e g_F'/g_I' são finitos também). Vale notar que o lado esquerdo da eq.(4.7.1) se anula (ou tende a infinito) quando $X \rightarrow \infty$, pois das eqs.(4.6.6)

$$\frac{g_F e^{-\beta \varepsilon_F}}{g_I e^{-\beta \varepsilon_I}} = \frac{g_F X^{j_F}}{g_I X^{j_I}} \xrightarrow{X \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{se } j_F > j_I \text{ (ou seja, } \varepsilon_F > \varepsilon_I \text{)} \\ & \text{(caso a)} \\ \infty & \text{se } j_F < j_I \text{ (ou seja, } \varepsilon_F < \varepsilon_I \text{)} \\ & \text{(caso b)} \end{cases}$$

Da tabela 4.7.1 concluímos que:

1) Quando $\varepsilon_F < \varepsilon_I$ e $\varepsilon_F' > \varepsilon_I'$ (caso b1), $\varepsilon_F < \varepsilon_I$ e $\varepsilon_F'' = \varepsilon_I'$ (caso b3) e, em alguns casos [i.e., se $A \equiv \lim_{X' \rightarrow \infty} f_F(X') / (X' (j_I' - j_F') f_I'(X')) = 0$] de $\varepsilon_F > \varepsilon_I$ e $\varepsilon_F' < \varepsilon_I'$ (caso a2) o ponto $K_2 \rightarrow -\infty$ ($X=0$) é renormalizado em $K_2' \rightarrow \infty$ ($X' \rightarrow \infty$). Como $K_2^* \rightarrow \infty$ é o ponto fixo correspondente ao atrator da fase ferromagnética, concluímos que a transformação de renormalização não apresenta, nestes casos, solução antiferromagnética nem à $T=0$. Em particular, exemplos do caso (b1) para o modelo de Ising são dados pela renormalização dos seguintes grafos:

- 1.1) cadeia linear: $b=2$ em $b'=1$
- 1.2) rede diamante: $b=2$ em $b'=1$
- 1.3) rede diamante: $b=4$ em $b'=1$
- 1.4) ponte de Wheatstone: $b=2$ em $b'=1$ (fig. 2.3.1a)
- 1.5) ponte de Wheatstone: $b=4$ em $b'=1$ (fig. 2.3.1a)

cujos pesos de Boltzmann estão dados na Tabela 4.7.2

Tabela 4.7.1 - Soluções para $T = 0$ da transformação de grupo de renormalização (eq.(4.4.3)) para diferentes relações entre as energias ε_F e ε_I , ε_F' e ε_I' dos grafos não renormalizado e renormalizado, respectivamente.

CASOS POSSÍVEIS	SOLUÇÕES X' PARA DIVERSAS RELAÇÕES ENTRE ε_F' e ε_I' NOS CASOS A, B e C		
	$\varepsilon_F' > \varepsilon_I'$	$\varepsilon_F' < \varepsilon_I'$	$\varepsilon_F' = \varepsilon_I'$
<p>CASO A) $\varepsilon_F > \varepsilon_I$</p> $\frac{g_F' e^{-\beta \varepsilon_F'} [1 + f_F'(X)]}{g_I' e^{-\beta \varepsilon_I'} [1 + f_I'(X)]} = 0$	<p>CASO A1) </p> <p>$X' = 0$ é solução \forall grafo G e G'</p>	<p>CASO A2) </p> <p>se $A = 0$ então $X' \rightarrow \infty$ solução</p>	<p>CASO A3) </p> <p>sem solução real</p>
<p>CASO B) $\varepsilon_F < \varepsilon_I$</p> $\frac{g_F' e^{-\beta \varepsilon_F'} [1 + f_F'(X)]}{g_I' e^{-\beta \varepsilon_I'} [1 + f_I'(X)]} = \infty$	<p>CASO B1) </p> <p>$X' \rightarrow \infty$ é solução \forall grafos G e G'</p>	<p>CASO B2) </p> <p>$X' = 0$ é solução se $A = 0$ então $X' \rightarrow \infty$ também é solução</p>	<p>CASO B3) </p> <p>$X' \rightarrow \infty$ é solução \forall grafo G e G'</p>
<p>CASO C) $\varepsilon_F = \varepsilon_I$</p> $\frac{g_F' e^{-\beta \varepsilon_F'} [1 + f_F'(X)]}{g_I' e^{-\beta \varepsilon_I'} [1 + f_I'(X)]} = \frac{g_F}{g_I}$	<p>CASO C1) </p> <p>$X' = \text{finito}$ $\neq 0$</p>	<p>CASO C2) </p> <p>$X' = \text{finito}$ $\neq 0$</p>	<p>CASO C3) </p> <p>$X' = \text{finito}$ $\neq 0$ se $\frac{g_F'}{g_I'} = \frac{g_F}{g_I}$ então $X' = 0$ também é solução</p>

Tabela 4.7.2 - Pesos de Boltzmann W_F e W_I para os grafos: cadeia linear ($b=1,2,3$ e 4), rede diamante ($b=2$ e 4) e ponte de Wheatstone ($b=2$ e 4).

GRAFOS		PESOS DE BOLTZMANN	
		W_F	W_I
CADEIA LINEAR	$b = 1$	X	1
	$b = 2$	$1+X^2$	$2X$
	$b = 3$	$3X(1+X^2/3)$	$1+3X^2$
	$b = 4$	$1+6X^2+X^4$	$4X(1+X^2)$
REDE DIAMANTE	$b = 2$	$1+2X^2+X^4$	$4X^2$
	$b = 4$	$1+8X^2+60X^4+184X^6+518X^8+184X^{10}+60X^{12}+8X^{14}+X^{16}$	$64X^4(1+4X^2+6X^4+4X^6+X^8)$
PONTE DE WHEATSTONE	$b = 2$	$X(1+2X+X^4)$	$2X^2(1+X)$
	$b = 4$	$X^5(1+10X+40X^2+96X^3+213X^4+472X^5+744X^6+704X^7+474X^8+449X^9+440X^{10}+224X^{11}+74X^{12}+88X^{13}+56X^{14}+5X^{16}+10X^{17}+X^{20})$	$8X^7(1+10X+39X^2+76X^3+81X^4+62X^5+67X^6+72X^7+43X^8+22X^9+21X^{10}+12X^{11}+3X^{12}+2X^{13}+X^{14})$

Nos exemplos 1.1) e 1.2) a 1.5) temos qualitativamente os seguintes gráficos das transmissividades renormalizadas $t'(t)$ e diagramas de fases ilustrados nas figs.(4.2.3a) e (4.3.2a), respectivamente. Acreditamos que tais células sejam inadequadas para descrever o modelo de Ising antiferromagnético ($J_2 < 0$), pois há um grande salto no fluxo inicial para pontos com $K_2 < 0$ ($-1 < t < 0$) (que são renormalizados, na primeira iteração, em $K_2' > 0$ ($0 < t' < 1$)).

Além disso, nos casos onde existe ordem ferromagnética a $T \neq 0$ (exemplos 1.2) a 1.5)), a bacia atratora da fase ferromagnética é descontínua, isto é, formada por duas regiões separadas pela bacia atratora paramagnética (fig.(4.3.2a). Acreditamos que transformações de grupo de renormalização que apresentem grandes saltos no fluxo dos pontos no espaço de parâmetros (gerando bacias atratoras descontínuas) não sejam confiáveis.

2) Quando $\varepsilon_F > \varepsilon_I$ e $\varepsilon_F' > \varepsilon_I'$ (caso a1); $\varepsilon_F < \varepsilon_I$ e $\varepsilon_F' < \varepsilon_I'$ (caso b2), o ponto $K_2 \rightarrow -\infty$ ($X = 0$) é renormalizado em $K_2' \rightarrow -\infty$ ($X' = 0$). Como $K_2^* \rightarrow -\infty$ é o ponto fixo correspondente ao atrator da fase antiferromagnética à $T = 0$, então nestes casos a transformação de renormalização apresenta solução antiferromagnética pelo menos à $T=0$. Exemplos de tais casos são as renormalizações dos seguintes grafos:

2.1) cadeia linear: $b=3$ em $b'=1$ (caso a1)

2.2) cadeia linear: $b=4$ em $b'=2$ (caso b2)

2.3) rede diamante: $b=4$ em $b'=2$ (caso b2)

2.4) ponte Wheatstone: $b=4$ em $b'=2$ (caso b2)

cujos pesos de Boltzmann estão apresentados na Tabela 4.7.2

Nos exemplos 2.1) e 2.2) os gráficos de $t'(t)$ e o diagrama de fases estão ilustrados nas figs.(4.2.3b e c), respectivamente e, nos casos 2.3) e 2.4), estes gráficos estão ilustrados qualitativamente na fig.(4.3.2b). Em todos os casos, os pontos com $K_2 \leq 0$ ($-1 \leq t \leq 0$) são renormalizados sucessivamente em $K_2' \leq 0$ ($-1 \leq t' \leq 0$).

Observamos que para os casos onde existem fases ordenadas a $T \neq 0$ (exemplos 2.3) e 2.4)), as bacias atratoras das diversas fases (P,F e AF) são contínuas (fig. 4.3.2b). Acreditamos então que a escolha de grafos nas quais a transformação de grupo de renormalização, a $T=0$, apresente o comportamento citado (casos a1) e b2) pode ser adequada para o estudo do antiferromagnetismo.

3) Quando $\varepsilon_F = \varepsilon_I$ e $\varepsilon_F' \gtrless \varepsilon_I'$ (casos c1), c2) e c3) o ponto $K_2 \rightarrow -\infty$ ($X=0$) é renormalizado em $K_2' \neq -\infty$ (ou seja, $X' \neq 0$). No entanto, no caso c3) se $(g_F'/g_I') \equiv (g_F/g_I)$ é possível a solução $K_2' = -\infty$ ($X'=0$). Excetuando esta última situação, temos então duas possibilidades:

3a) $K_2' > 0$ e finito (ou seja, $0 < t' < 1$)

3b) $K_2' < 0$ e finito (ou seja, $-1 < t' < 0$)

Um exemplo da situação descrita em 3a) é o modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2, d=2, m)$ para transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$ (caso cl) a ser discutido na seção 5.4.1.

Para a situação (3b) existem duas possibilidades dependendo da intensidade de K_2' , a saber:

3b.1) renormalizações sucessivas de $K_2' < 0$ fluem para o atrator paramagnético $K_p^* = 0$ ($t_p^* = 0$);

3b.2) renormalizações sucessivas de $K_2' < 0$ fluem para um atrator antiferromagnético à $T \neq 0$, isto é, $K_{AF}^* \neq -\infty$ ($t_{AF}^* \neq -1$).

Nestes casos (3b.1) e (3b.2) espera-se qualitativamente os gráficos da transmissividade renormalizada $t'(t)$ e diagrama de fases ilustrados respectivamente nas figs. (4.7.1a) e (4.7.1b).

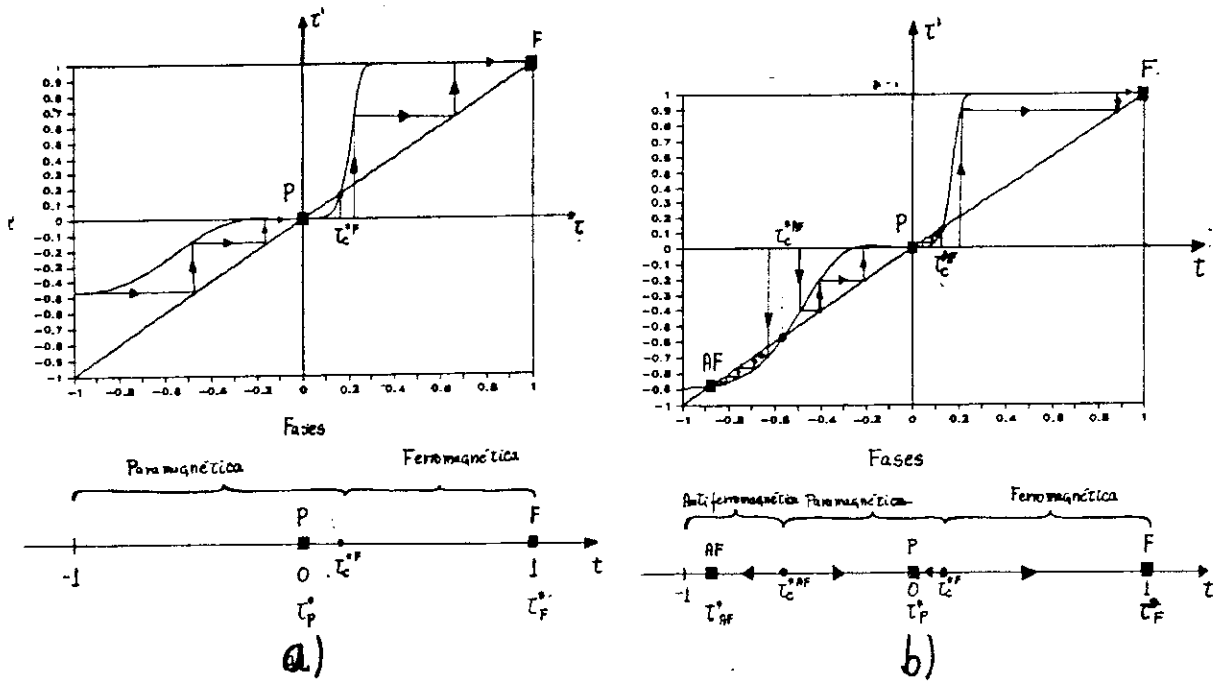


Figura 4.7.1 - Gráfico da transmissividade renormalizada $t'(t)$ e diagrama de fases correspondente esperado para os casos a) 3b.1, onde não há ordem AF nem mesmo à $T = 0$ ($t = -1$); b) 3b.2, onde surge uma fase antiferromagnética com atrator à $T \neq 0$ ($t_{AF}^* \neq -1$).

Exemplos da situação descrita acima ocorre, no contexto de grupo de renormalização, em sistemas cuja entropia residual por partícula (a $T = 0$) é não-nula, ou seja em sistemas que possuem um estado fundamental altamente degenerado como, por exemplo, o antiferromagneto de Potts em redes hipercúbicas [17], hierárquicas [18] e fractais [15]. Berker e

Kadanoff [17] usando argumentos de reescala mostraram como é possível este comportamento. Ilustramos a seguir as linhas gerais deste argumento exemplificando-o para o antiferromagneto de Potts em redes hipercúbicas.

Consideremos o modelo de Ising antiferromagnético descrito pelo Hamiltoniano (4.2.1) (com $J < 0$) em uma rede hipercúbica d-dimensional. Podemos decompor esta rede em duas sub-redes hipercúbicas A e B que se interpenetram de tal forma que um sítio de uma sub-rede, digamos A é cercado por primeiros vizinhos da outra sub-rede (B) (vide fig. 4.7.2).

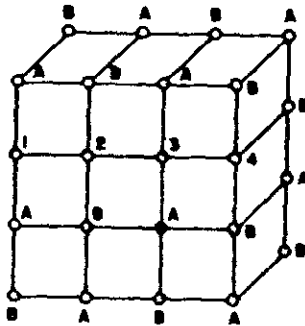
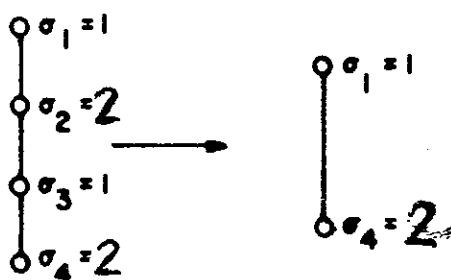


Figura 4.7.2 - Representação de uma parte de uma rede hipercúbica d-dimensional.

Para $T = 0$ ($K \rightarrow -\infty$), apenas duas configurações de spins contribuem para a função de partição do modelo quais sejam: i) todos os spins da sub-rede A estão no estado 1 e os da sub-rede B estão no estado 2; (ii) todos os spins da sub-rede A estão no

estado 2 e os de B estão no estado 1. Cada configuração é caracterizada pelo fato de que o spin em um dado sítio é antiparalelo aos seus vizinhos.

Consideremos o caso particular $d=1$. Ao realizarmos a transformação de escala



vemos que o caráter antiferromagnético a $T=0$ (isto é, $\sigma_i \neq -\sigma_{i+1} = -\sigma_{i-1}$) é preservado. Esta é a razão pela qual este grupo de renormalização fornece corretamente um ordenamento antiferromagnético a $T = 0$ para este modelo (vide diagrama de fases Fig. 4.2.1).

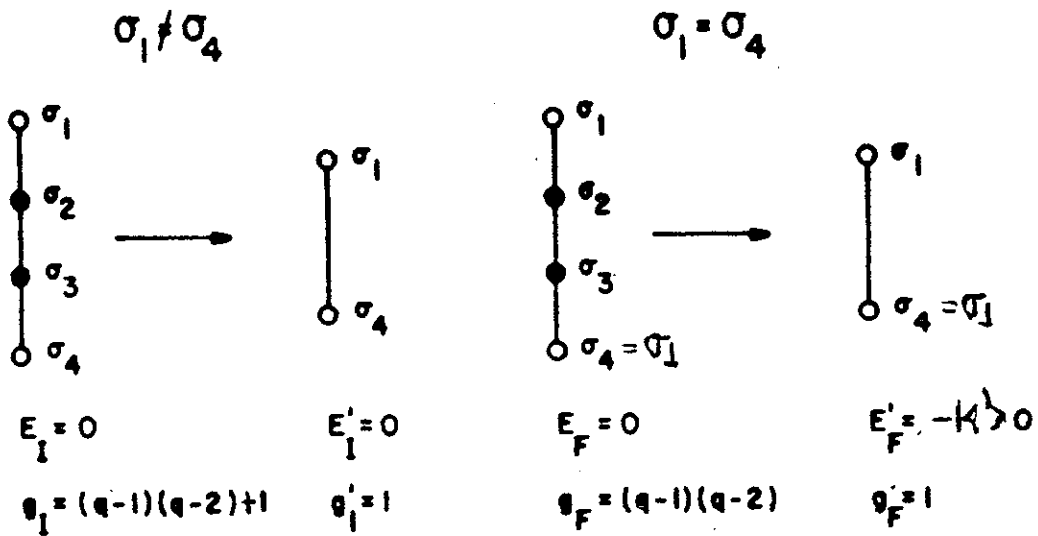
Consideremos agora o caso mais geral do antiferromagneto de Potts com interações entre primeiros vizinhos (eq. (5.3.1) com $K_3=0$) em redes hipercúbicas. Para $T=0$ ($K_2 \rightarrow -\infty$) as configurações de spins que contribuem para os pesos de Boltzmann W_1 são aquelas para as quais $-\beta H=0$ (ou seja, $X=1$). Em particular, para estas redes, isto ocorre pelo menos quando todos os sítios da subrede A (vide fig. 4.7.2) estão no estado $\sigma_i=1$ e cada sítio da subrede B está, independentemente,

em um dos outros $(q-1)$ estados. Temos, portanto, $(q-1)^{N/2}$ configurações distintas com a mínima energia possível (N é o número total de sítios) onde os spins da subrede A estão no mesmo estado 1. Como também existem configurações que minimizam a energia e onde os spins de uma mesma subrede estão em estados diferentes concluímos que a degenerescência g do estado fundamental deste modelo é tal que: $(q-1)^{N/2} < g < q^N$. Portanto a entropia por spin $S_0 = \ln g / N$ do estado fundamental é limitada por:

$$\frac{1}{2} \ln (q-1) < S_0 < \ln q$$

e, conseqüentemente, $S_0 \neq 0$ para $q > 2$. Chow e Wu [16] discutem a validade da 3ª lei da termodinâmica e a ocorrência da entropia residual em sistemas de spin discretos, em particular em redes hipercúbicas.

Consideremos agora apenas as configurações de $-\beta H = 0$ ao longo do segmento retilíneo 1234 (vide fig. 4.7.2). Para σ_1 e σ_4 fixos, há um conjunto $\{\sigma_2, \sigma_3\}$ de $g_1 = [(q-1)(q-2)+1]$ configurações com energia $E = 0$ se $\sigma_1 \neq \sigma_4$, e $g_f = (q-1)(q-2)$ configurações com a mesma energia $E = 0$ se $\sigma_1 = \sigma_4$. Portanto, ao efetuarmos o traço sobre os spins σ_2 e σ_3 de tal forma que σ_1 e σ_4 se tornem primeiros vizinhos o caráter antiferromagnético a $T = 0$ (i.e., $\sigma_1 \neq \sigma_4$) é perdido tendo em vista que o número de configurações onde $\sigma_1 = \sigma_4$ deixa de ser nulo, conforme ilustrado abaixo:



como $g_I > g_F$, o sistema reescalado ainda apresenta (apesar de $g_F \neq 0$) propriedades de um antiferromagneto, mas não a $T=0$, pois, da transformação de grupo de renormalização (eq.(4.4.3)) segue-se que para $K_2 \rightarrow -\infty$:

$$\frac{g_F}{g_I} = \frac{X'}{1} \Rightarrow X' \equiv e^{K_2'} \neq 0 \quad (4.7.2)$$

O resultado desta análise estendida para clusters maiores (que representam de forma conveniente a rede hipercúbica) é qualitativamente o mesmo; ou seja, devido à multiplicidade microscópica das configurações (que aumenta ao considerarmos o resto da rede), o caráter antiferromagnético a $T=0$ não é propagado entre spins distantes. Como consequência qualquer transformação de grupo de renormalização quando aplicada a $T=0$ irá produzir uma temperatura renormalizada não-nula (i.e., $X' \neq 0$ ($K_2' \neq -\infty$)). O efeito de renormalizações sucessivas irá caracterizar o comportamento ilustrado nas figs.4.7.1. A primeira possibilidade (fig. 4.7.1a) (ou seja,

uma fase desordenada $\forall -1 < t < 0$) é esperada para sistemas de baixa dimensionalidade ($d < d_c$, d_c é uma dimensão crítica característica de cada sistema), enquanto a segunda (fig. b) (ou seja, uma fase AF cujo atrator encontra-se a $T \neq 0$) é esperada para $d > d_c$. Para este caso, devido à alta conectividade da rede, mais "caminhos" com vizinhos antiparalelos ligam os sítios 1 e 4 (vide fig. 4.7.2). Portanto, embora g_f e g_i aumentem com d , espera-se que como ocorre, em geral, em transições de fase o fato a priori de que a alta conectividade de redes com dimensões grandes fortaleça as correlações; a razão g_f / g_i diminua com d , o mesmo ocorrendo com X' (vide eq. 4.7.2). Como consequência, uma renormalização após sucessivas iterações conduzindo a $T = \infty$ ($t_p^* = 0$) torna-se menos provável.

A transição do regime $d < d_c$ (fig. 4.7.1a) para o regime $d > d_c$ (fig. 4.7.1b) ocorre através do surgimento de um ponto fixo marginal (M^*) em $d = d_c$ que se separa para $d > d_c$ em dois pontos fixos: um ponto fixo instável (SE^*) que define a temperatura de transição AF-P e um ponto fixo atrator da fase AF a $T \neq 0$ (A^*), que no limite $d \rightarrow \infty$ tende a $T = 0$ (i.e., $t_{AF}^*|_{d \rightarrow \infty} = -1$).

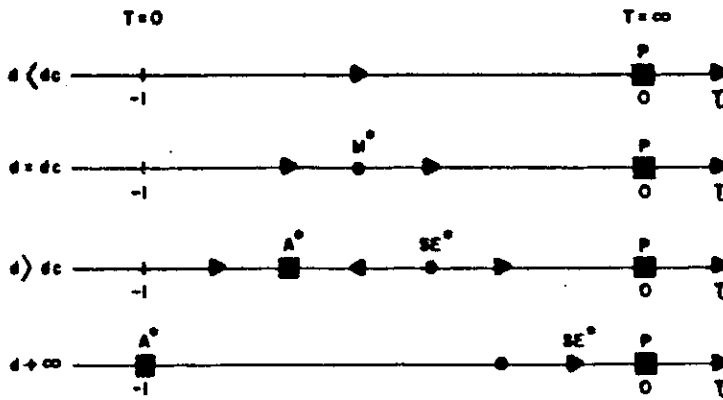


Figura 4.7.3 - Fluxo da equação de renormalização e pontos fixos para sistemas com entropia residual por sítio não nula sugerido por Berker e Kadanoff [17].

Em particular, é sabido que num ponto fixo o comprimento de correlação (ξ) é zero ou infinito. O primeiro caso ($\xi=0$) ocorre para os pontos fixos triviais, $T=0$ e ∞ . Para $T \neq 0$ (em particular, para t_c^{*AF} (transição AF-P)) temos que:

$$\xi(t_c^{*AF}) = \infty \quad (\text{transição de fase}) \quad (4.7.2)$$

Portanto, para o atrator da fase AF a $T \neq 0$ (t_{AF}^*) teremos também

$$\xi(t_{AF}^*) = \infty \quad (4.7.3)$$

tendo em vista que a outra possibilidade $\xi(t_{AF}^*)=0$ não é possível pois existe flutuações dos estados de spins em t_{AF}^* .

Como

$$\xi' = \xi / (b/b')$$

onde ξ' é o comprimento de correlação do sistema renormalizado e b/b' (o fator de escala) > 1 , resulta das eqs. anteriores que

$$\xi(t) = \infty \quad \forall \quad -1 \leq t \leq t_c^{AF} \quad (4.7.4)$$

Consequentemente, como sugerido por Berker e Kadanoff [17], as correlações decaem como uma lei de potência como

$$\Gamma(r) \sim r^{-(2+\eta-d)} \quad (4.7.5)$$

não apenas em t_c^{*AF} (como ocorre em transições de fase usuais) mas ao longo de toda a fase antiferromagnética a $T = 0$ com o expoente η definido pelo ponto fixo atrator (t_{AF}^*). Berker e Kadanoff [17] mencionam que verificaram este comportamento para antiferromagnetos de Potts e para o modelo de Ashkin-Teller completamente frustrado em redes hipercúbicas usando a aproximação de Migdal-Kadanoff.

Riera [15] obteve também um atrator antiferromagnético à temperatura finita para o modelo de Potts antiferromagnético com q estados nos fractais Sierpinski Carpet e Sierpinski Pastry Shell usando o procedimento de renormalização de Migdal-Kadanoff; em particular na primeira estrutura (que apresenta $1 < D_f < 2$) é encontrado um valor crítico de q , $2 < q_c < 3$ abaixo do qual o modelo apresenta a fase antiferro à $T \neq 0$. Este valor de q_c é consistente com o resultado exato, $q_c = 3$, obtido por Baxter [59] para este

modelo na rede quadrada ($d = 2$), tendo em vista que q_c diminui quando D_f diminui ou quando a lacunaridade aumenta, e também, que a aproximação de Migdal-Kadanoff inibe a propagação da ordem AF ao longo de caminhos independentes, diminuindo então q_c . Itzykson e Luck [18], obtiveram também um comportamento análogo (para $q < 1$) no caso antiferromagnético deste modelo na rede hierárquica diamante.

Em redes cúbicas ($d = 3$), simulações de Monte Carlo [60,61,62] indicam a existência de uma fase ordenada deste modelo para $q=3$ e 4, entretanto resultados obtidos com o procedimento de renormalização de Migdal-Kadanoff [17] indicam, para o valor crítico de q , $q_c(d=3) \cong 3.3$. No entanto até o momento, em nosso conhecimento, não há resultado exato na literatura para o valor crítico de q , na rede cúbica, acima do qual $T_c = 0$.

4.8 - Transformação de Grupo de Renormalização com 2 parâmetros

Podemos estender a transformação de grupo de renormalização (com fator de escala b/b') (eq.(4.4.3)) para o caso em que o Hamiltoniano de Potts contém outras interações além da interação entre pares como, por exemplo, interações a 3(três) spins (vide eq. (5.3.1)). Neste caso a transformação de grupo de renormalização é dada por

$$\frac{W_F}{W_{AF}} = \frac{W'_F}{W'_{AF}} \quad (4.8.1a)$$

$$\frac{W_I}{W_{AF}} = \frac{W'_I}{W'_{AF}} \quad (4.8.1b)$$

onde (W_F, W_I, W_{AF}) e (W'_F, W'_I, W'_{AF}) são os pesos de Boltzmann dos grafos não renormalizado e renormalizado, respectivamente definidos para grafos com 3(três) raízes A,B e C (como, por exemplo, o Sierpinski-Gasket) como

$$W_F \equiv W(1, 1, 1) \quad (4.8.2a)$$

$$W_I \equiv W(1, 1, 2) \quad (4.8.2b)$$

$$W_{AF} \equiv W(1, 2, 3) \quad (4.8.2c)$$

Para este caso os pesos de Boltzmann podem ser escritos como:

$$W_1(X, Y) = \sum_{i, j} a_{ij}^{(1)} + a_{10}^{(1)} X + a_{20}^{(1)} X^2 + a_{31}^{(1)} X^3 Y + a_{1j}^{(1)} X^i Y^j \quad (4.8.3)$$

(i = F, I, AF)

onde, $X \equiv e^{K_2}$, $Y \equiv e^{K_3}$ e $a_{ij}^{(1)}$ a degenerescência do estado com energia $\beta\varepsilon = (-iK_2 - jK_3)$. Colocando em evidência o termo de ordem mais baixa em XY temos, de forma análoga à eq.(4.6.3) que

$$W_1(X, Y) = g_1 e^{-\beta \varepsilon_1(X, Y)} [1 + h_1(X, Y)] \quad (4.8.4)$$

(1 = F, I, AF)

onde $\varepsilon_1(X, Y)$ (1=F, I, AF) são as energia das configurações de mais baixa energia para $K_2 \rightarrow -\infty$ quando as raízes A, B e C do grafo estão nas configurações tipo F, I e AF (ou seja, $\sigma_A \neq \sigma_B \neq \sigma_C$ e $\sigma_A \neq \sigma_C$), respectivamente, e $h_1(X, Y)$ são funções monótonas crescentes com as seguintes propriedades

$$h_1(0, 0) = 0 \quad (4.8.5a)$$

$$h_1(\infty, \infty) \rightarrow \infty \quad (4.8.5b)$$

Usando as equações acima podemos reescrever a transformação de grupo de renormalização com 2(dois) parâmetros (K_2 e K_3), eqs.(4.8.1) em termos de ε_F , ε_I e ε_{AF} , como:

$$\frac{g_F e^{-\beta \varepsilon_F(X, Y)} [1 + h_F(X, Y)]}{g_{AF} e^{-\beta \varepsilon_I(X, Y)} [1 + h_{AF}(X, Y)]} = \frac{g'_F e^{-\beta \varepsilon'_F(X', Y')} [1 + h'_F(X', Y')]}{g'_{AF} e^{-\beta \varepsilon'_{AF}(X', Y')} [1 + h'_{AF}(X', Y')]} \quad (4.8.6a)$$

$$\frac{g_I e^{-\beta \varepsilon_I(X, Y)} [1 + h_I(X, Y)]}{g_{AF} e^{-\beta \varepsilon_{AF}(X, Y)} [1 + h_{AF}(X, Y)]} = \frac{g'_I e^{-\beta \varepsilon'_I(X', Y')} [1 + h'_I(X', Y')]}{g'_{AF} e^{-\beta \varepsilon'_{AF}(X', Y')} [1 + h'_{AF}(X', Y')]} \quad (4.8.6b)$$

Como existem um número muito maior de situações que no caso com 1(um) parâmetro (K_2) (pois temos agora que comparar 3(três) energias ϵ_F , ϵ_I e ϵ_{AF} para o grafo não renormalizado e o mesm número para o grafo renormalizado) não faremos a análise em detalhe. A idéia geral é a seguinte: quando no processo de renormalização a relação das desigualdades entre ϵ_F , ϵ_I e ϵ_{AF} e ϵ_F' , ϵ_I' e ϵ_{AF}' não é preservada, então aparecem bacias atratoras descontínuas no espaço de parâmetros indicando que o grupo de renormalização não é confiável.

Um exemplo da situação na qual aparece uma bacia atratora descontínua refere-se ao modelo de Potts ($q=4$) antiferromagnético com interações entre 2 e 3 spins no fractalnoo fractal Sierpinski-Gasket de m folhas com gerador $G(2, d=2, m)$ (que será definido no capítulo seguinte, vide fig. 5.2.1b) para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$. Neste caso temos

$$\begin{cases} \epsilon_F(X, Y) = 0 & g_F = 6 & \epsilon_F'(X, Y) = -3K_2' - K_3' & g_F' = 1 & (4.8.7a) \\ \epsilon_I(X, Y) = 0 & g_I = 2 & \epsilon_I'(X, Y) = -K_2' & g_I' = 1 & (4.8.7b) \\ \epsilon_{AF}(X, Y) = 0 & g_{AF} = 4 & \epsilon_{AF}'(X, Y) = 0 & g_{AF}' = 1 & (4.8.7c) \end{cases}$$

Portanto da eq.(4.8.6) temos que:

$$\left[\frac{6 [1 + h_F(X, Y)]}{4 [1 + h_{AF}(X, Y)]} \right]^m = \frac{X'^3 Y'}{1} \quad (4.8.8a)$$

$$\left[\frac{2 [1 + h_I(X, Y)]}{4 [1 + h_{AF}(X, Y)]} \right]^m = \frac{X'}{1} \quad (4.8.8b)$$

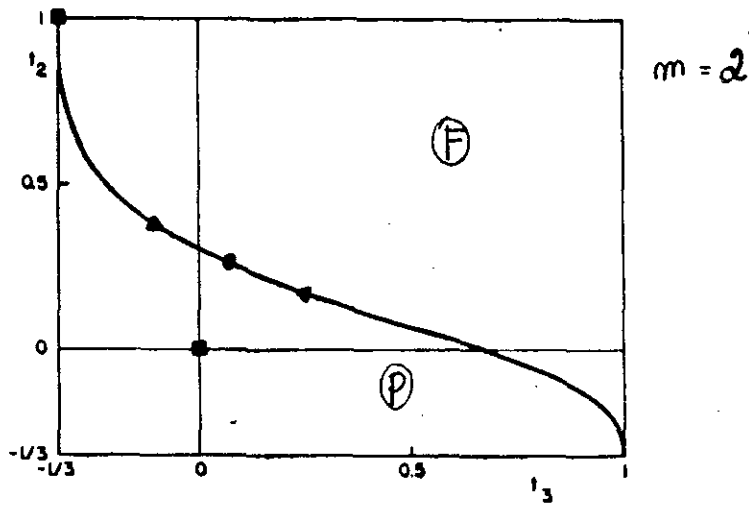
Este é uma caso no qual o estado fundamental do modelo para o grafo não renormalizado é tipo F (pois, apesar de $\varepsilon_F = \varepsilon_I = \varepsilon_{AF} = 0$ temos que $g_F > g_I > g_{AF}$) e tipo I para o grafo renormalizado (pois, $\varepsilon_{AF}' < \varepsilon_I'$ e $\varepsilon_{AF}' < \varepsilon_F'$).

Para $X=0$ ($K_2 \rightarrow -\infty$), $Y=0$ ($K_3 \rightarrow -\infty$) temos das eqs. (4.8.8) que

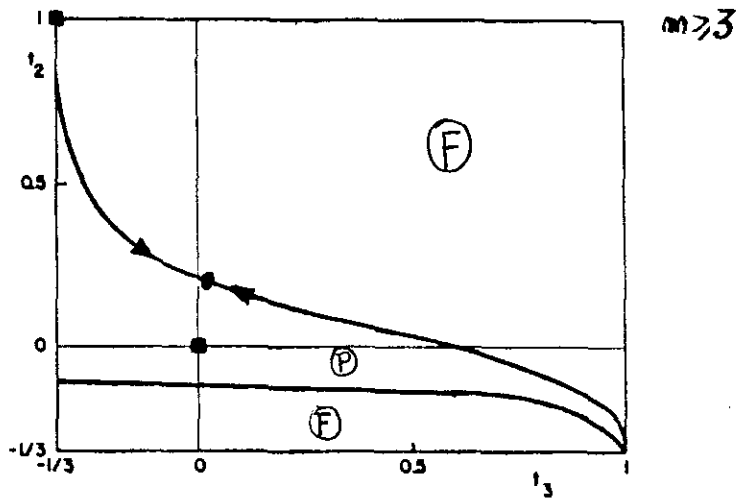
$$\left(\frac{3}{2} \right)^m = X'^3 Y' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X' = (1/2)^m \\ Y' = (12)^m \end{cases} \quad (4.8.9a)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^m = X' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X' = (1/2)^m \\ Y' = (12)^m \end{cases} \quad (4.8.9b)$$

O diagrama de fases deste modelo está apresentado na fig.(4.8.1). Para, $m=2$ o ponto $(X, Y) = (0, 0)$ (ou seja, $(t_2, t_3) = (-1/3, -1/3)$) é renormalizado em $(t_2, t_3) = (-0.231, 0.973)$ no interior da fase paramagnética (P); no entanto, para $m \geq 3$ este mesmo ponto é renormalizado num ponto pertencente à bacia atratora ferromagnética (F) o que confirma a não confiabilidade na escolha de grafos nas quais o estado fundamental do modelo não seja preservado no processo de renormalização.



(a)



(b)

Figura 4.8.1 - Diagrama de fases do modelo de Potts ($q=4$) no fractal Sierpinski-Gasket $G(2, d=2, m)$ para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$. $t_2 \equiv (X-1)/(X+3)$, $t_3 \equiv (Y-1)/(Y+3)$.

(a) diagrama de fases para $m=2$. (b) diagrama de fases para $m \geq 3$.

do modelo de Potts, com interações a dois e três spins, nos fractais Sierpinski-Gasket com m folhas. Esta família de estruturas é uma generalização da família Sierpinski-Gasket bidimensional com gerador $G(b,d=2)$ proposta por Hilfer e Blumen [19] (na qual rede de resistores [63], self-avoiding walks [64], dimensão espectral [65] e modelos de spins [46,66] foram estudados) que apresenta, para $m > 1$, ordem de ramificação infinita, o que permite a existência de transição de fase a $T_c \neq 0$ para modelos de spins com interações de curto alcance. Alguns resultados exatos foram obtidos para o modelo de Potts por Gefen e colaboradores [26] no fractal Sierpinski-Gasket bidimensional com $b=2$ e $m=1$. Analogamente ao caso $m = 1$ estudamos, de uma forma exata em alguns casos, através de uma transformação de renormalização, a criticalidade do modelo de Potts com $q=2,3$ e 4 estados na família de fractais Sierpinski-Gasket com um número m qualquer de folhas. Em algumas situações do caso $q=2$ calculamos também a função de correlação exata na fase antiferromagnética não usual.

5.2 - Família Sierpinski-Gasket com m folhas

Considere os primeiros estágios de construção do fractal Sierpinski-Gasket [8] ilustrado na fig. 2.2.2. O gerador $G(2,d=2,m)$ do fractal Sierpinski-Gasket ($b=2$) com m folhas é definido da seguinte forma: Dividimos a aresta de um triângulo equilátero em 2 partes (gerando 4 triângulos de aresta $1/2$) e retiramos o triângulo que aponta para baixo;

superpomos neste estágio m estruturas topologicamente similares ^{1(*)} conectando as mesmas apenas nos vértices externos A,B,C (ver fig. 5.2.1b para $m = 2$). Nos estágios seguintes de construção ($k = 2, 3, \dots$) repetimos o mesmo processo para cada um dos triângulos que apontam para cima. O caso $m=2$ ($b=2$) foi definido por Griffiths e Kaufman [20] como um exemplo de rede hierárquica onde os objetos agregados não são ligações, mas sim unidades mais complexas (no caso, triângulos).

O processo de construção para a família Sierpinski-Gasket onde $b > 2$ com m folhas é similar ao anterior (vide fig. 5.2.2). Neste caso o gerador $G(b, d=2, m)$ são m folhas triangulares conectadas em A, B e C, onde a aresta de cada triângulo é dividida em b partes gerando, em cada folha, b^2 triângulos menores, sendo que os $b(b-1)/2$ triângulos que apontam para baixo são retirados. A estrutura no estágio $(k+1)$ é formada substituindo-se cada um dos triângulos que apontam para cima pelo gerador $G(b, d=2, m)$. O fractal completo é obtido, então, no limite $k \rightarrow \infty$.

1

(*) É bom ressaltar que devido a conexão entre as folhas se dar apenas nos vértices externos, as estruturas que a compoem são deformações do triângulo equilátero, formando um fractal topológico.

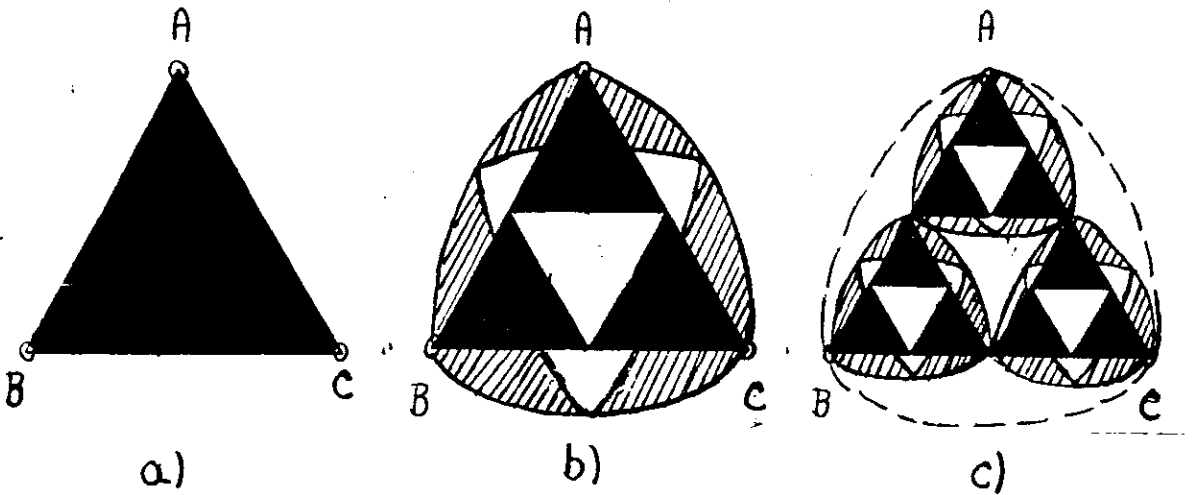


Figura 5.2.1 - Primeiros estágios de construção do fractal Sierpinski-Gasket ($b=2$) com $m=2$ folhas. (a) $k=0$, triângulo equilátero; (b) $k=1$, 1º estágio; (c) $k=2$, 2º estágio. Existe, para $k=2$, uma estrutura similar (2º folha) conectada aos vértices A, B e C que foi simbolizada apenas por uma curva tracejada para não prejudicar a visualização da figura completa.

Pode-se mostrar que a ordem de ramificação $R_k(m)$ em qualquer ponto P para a classe de fractais Sierpinski-Gasket com m folhas no estágio k de construção satisfaz à seguinte equação:

$$R_k(m) = m R_{k-1} \quad (5.2.1)$$

No limite termodinâmico ($k \rightarrow \infty$) segue-se que a ordem de ramificação (R) da família de fractais Sierpinski-Gasket com m folhas é infinita (pois $R_1(m) > 1 \quad \forall m$).

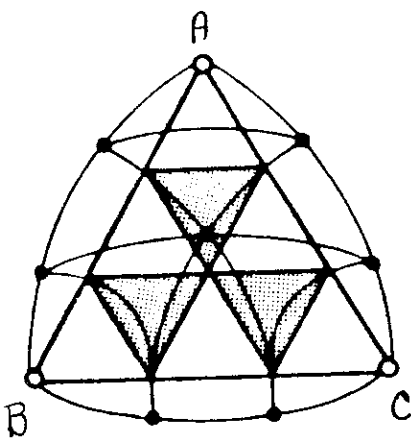
A dimensão fractal destas estruturas é dada por:

$$\Delta(k+1) = b^{D_f} \Delta(k) \quad (5.2.2)$$

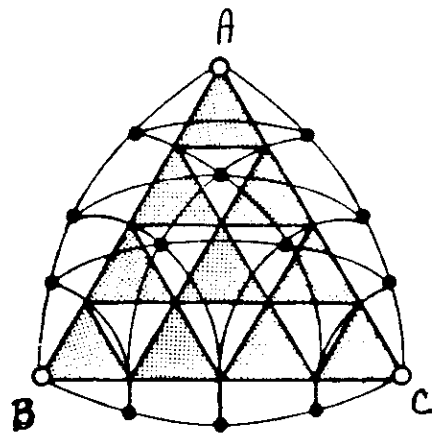
onde $\Delta(k)$ é o número de agregação, ou seja, o número de subunidades (no caso plaquetas) agregadas em cada passo para formar uma nova unidade em redes hierárquicas. Como

$\Delta(k+1) = b(b+1)m/2 \Delta(k)$, temos então que:

$$D_f(m) = \frac{\ln(b(b+1)m/2)}{\ln(b)} \quad (5.2.3)$$



(a)



(b)

Figura 5.2.2 - Primeiro estágio ($k=1$) de construção do fractal Sierpinski-Gasket com 2 folhas (a) $G(3, d=2, m)$ (b) $G(4, d=2, m)$.

5.3 - Modelo

A cada sítio i da rede fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(b,d=2,m)$ associamos a variável aleatória σ_i que pode assumir q estados. O Hamiltoniano adimensional do modelo de Potts com q estados [2] e com interações a 2 e 3 spins (sem campo externo) associado com o grafo G é definido como:

$$\beta H = -K_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) - K_3 \sum_{\Delta} \delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_l) \quad (5.3.1)$$

$(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_l = 1, 2, 3, \dots, q)$

onde $K_2 = J_2 \beta$ representa interação (ferro ($J_2 > 0$) ou antiferromagnética ($J_2 < 0$)) entre primeiros vizinhos i e j quaisquer, $K_3 = J_3 \beta$ ($J_3 > 0$) representa a interação entre os "spins" i, j, l que compõem uma plaqueta que aponta para cima, $\beta = 1/K_B T$ e

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_l) = \delta(\sigma_i, \sigma_j) \delta(\sigma_j, \sigma_l) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma_i = \sigma_j = \sigma_l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Para tratarmos o Hamiltoniano acima vamos usar a transformação de grupo de renormalização ilustrada na

fig.(5.3.1) no caso $b=4, b'=1$ e $m=2$. Para obtermos as relações de recorrência seguimos um procedimento análogo ao utilizado por Gefen e colaboradores [26] na solução exata do modelo de Potts ferromagnético no Sierpinski-Gasket ($b=2$), ou seja, renormalizamos uma célula (grafo com 3 raízes A,B e C) de dimensão linear b com m folhas (vide figs. 5.2.1 e 5.2.2) em um triângulo (grafo com 3 raízes), de lado $b'=1$, que aponta para cima. Em alguns casos (conforme veremos na seção 5.4.2) usaremos uma célula renormalizada de dimensão linear $b' \neq 1$ ($b' < b$).

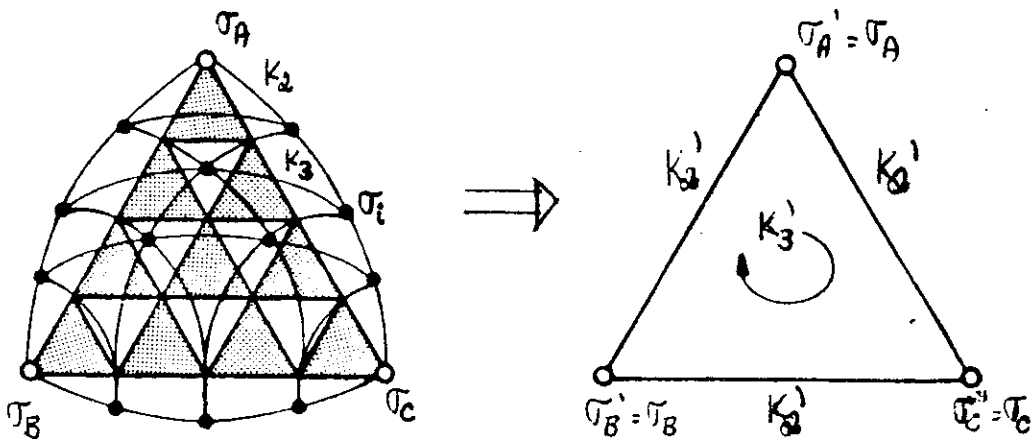


Figura 5.3.1 - Transformação de grupo de renormalização $b=4$ em $b'=1$ para a rede fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m)$. σ_i são os sítios internos.

Mais explicitamente, nosso grupo de renormalização foi construído de tal forma que:

$$D \text{ Tr}_{(\sigma'_{\text{internos}})} \text{Exp}(-\beta H') = \text{Tr}_{(\sigma_{\text{internos}})} \text{Exp}(-\beta H) \quad (5.3.3)$$

onde o traço é feito somente sobre os spins internos σ_{internos} e $\sigma'_{\text{internos}}$ (não localizados nas raízes A, B e C), D é a constante de renormalização e o Hamiltoniano renormalizado H' é dado, no caso $b'=1$, por

$$-\beta H' = K_2' [\delta(\sigma_A, \sigma_B) + \delta(\sigma_B, \sigma_C) + \delta(\sigma_C, \sigma_A)] + K_3' \delta(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C) \quad (5.3.4)$$

Observe que para $b'=1$ não existe spins internos e portanto a operação Tr no lado esquerdo da eq.(5.3.3) é igual a identidade. A eq.(5.3.3) é um caso particular da eq.(3.2.2) onde a função peso é $P(\sigma', \sigma) = \delta(\sigma_A, \sigma_A') \delta(\sigma_B, \sigma_B') \delta(\sigma_C, \sigma_C')$. Como existem (para $q \geq 3$) somente três configurações para $\{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$ com energias diferentes, quais sejam: $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C$; $\sigma_i = \sigma_j \neq \sigma_k$ ($i, j, k = A, B$ ou C); $\sigma_A \neq \sigma_B \neq \sigma_C$ e $\sigma_A \neq \sigma_C$; então segue-se que a igualdade (5.3.3) gera 3 equações:

$$D W'(\alpha, \alpha, \alpha) = W_m(\alpha, \alpha, \alpha) \quad (5.3.5a)$$

$$D W'(\alpha, \alpha, \gamma) = W_m(\alpha, \alpha, \gamma) \quad (5.3.5b)$$

$$D W'(\alpha, \theta, \gamma) = W_m(\alpha, \theta, \gamma) \quad (5.3.5c)$$

γ pode permutar com α ; $(\alpha, \theta, \gamma = 1, 2, \dots, q)$, $\alpha \neq \gamma$ e $\alpha \neq \theta \neq \gamma$.

onde $W_m(\alpha, \theta, \gamma)$ é o peso de Boltzmann para a configuração $\sigma_A = \alpha, \sigma_B = \theta$ e $\sigma_C = \gamma$ dado por:

$$\begin{aligned}
 W_m(\alpha, \theta, \gamma) &\equiv \text{Tr} \quad \delta(\sigma_A, \alpha) \delta(\sigma_B, \theta) \delta(\sigma_C, \gamma) \text{Exp} [-\beta H] = \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{c} \text{t o d o s} \\ \text{s p i n s} \end{array} \right\} \\
 &= Z \langle \delta(\sigma_A, \alpha) \delta(\sigma_B, \theta) \delta(\sigma_C, \gamma) \rangle \quad (5.3.6)
 \end{aligned}$$

e $W'(\alpha, \theta, \gamma)$ é o peso de Boltzmann renormalizado para a configuração $\sigma'_A = \alpha, \sigma'_B = \beta$ e $\sigma'_C = \gamma$ dado por:

$$\begin{aligned}
 W'(\alpha, \theta, \gamma) &\equiv \text{Tr} \quad \delta(\sigma'_A, \alpha) \delta(\sigma'_B, \theta) \delta(\sigma'_C, \gamma) \text{Exp} [-\beta H'] = \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{c} \text{t o d o s} \\ \text{s p i n s} \end{array} \right\} \\
 &= Z' \langle \delta(\sigma'_A, \alpha) \delta(\sigma'_B, \theta) \delta(\sigma'_C, \gamma) \rangle \quad (5.3.7)
 \end{aligned}$$

Nas expressões acima Z e Z' são as funções de partição da célula com m folhas e da célula renormalizada respectivamente, ou seja :

$$Z \equiv \text{Tr} \text{Exp} [-\beta H] , Z' \equiv \text{Tr} \text{Exp} [-\beta H'] \quad (5.3.8)$$

onde os traços são feitos sobre todas as configurações de spin das respectivas células. Levando-se em conta as degenerescências das três configurações com energias distintas, obtemos que:

$$Z = q W_m(1,1,1) + 3q(q-1)W_m(1,1,2) + q(q-1)(q-2) W_m(1,2,3) \quad (5.3.9a)$$

$$Z' = q W'(1,1,1) + 3q(q-1)W'(1,1,2) + q(q-1)(q-2) W'(1,2,3) \quad (5.3.9b)$$

Observe que se definirmos D como sendo Z/Z' então a equação de renormalização (5.3.3) é tal que a probabilidade dos "spins" localizados nas raízes A, B e C estarem nos respectivos estados α, θ e γ ($\alpha, \theta, \gamma = 1, 2, \dots, q$) é invariante sob renormalização, ou seja:

$$W_m(\alpha, \theta, \gamma) / Z = W'(\alpha, \theta, \gamma) / Z' \quad (5.3.10)$$

Dado o fato de que as m folhas têm em comum apenas os vértices A, B e C (que estão fixos nos estados α, θ e γ), resulta que o traço parcial sobre cada uma delas é independente, ou seja,

$$W_m(\alpha, \theta, \gamma) = [W_1(\alpha, \theta, \gamma)]^m \quad (5.3.11)$$

onde $W_1(\alpha, \theta, \gamma)$ representa o peso de Boltzmann referente a uma folha da célula não renormalizada.

As equações de renormalização que conectam os parâmetros $\{K_2, K_3\}$ e $\{K_2', K_3'\}$ das células não-renormalizada e renormalizada, respectivamente, são obtidas das eqs.(5.3.5), a saber

$$\frac{W_F^{(m)}}{W_{AF}^{(m)}} = \frac{W_F'}{W_{AF}'} \quad (5.3.12a)$$

$$\frac{W_I^{(m)}}{W_{AF}^{(m)}} = \frac{W_I'}{W_{AF}'} \quad (5.3.12b)$$

onde, por simetria:

$$W_F' \equiv W'(\alpha, \alpha, \alpha) \quad (5.3.13a)$$

$$W_I' \equiv W'(\alpha, \alpha, \gamma) = W'(\gamma, \alpha, \alpha) = W'(\alpha, \gamma, \alpha) \quad (\alpha \neq \gamma) \quad (5.3.13b)$$

$$W_{AF}' \equiv W'(\alpha, \theta, \gamma) \quad (\alpha \neq \theta \neq \gamma, \quad \alpha \neq \gamma) \quad (5.3.13c)$$

$$(\alpha, \theta, \gamma = 1, 2, \dots, q)$$

e similarmente para os pesos de Boltzmann não-renormalizados $W_F^{(m)}$, $W_I^{(m)}$ e $W_{AF}^{(m)}$. Usando as eqs.(5.3.7) e (5.3.4) segue-se que para $b'=1$ (e $q \geq 3$) que:

$$W_F' = e^{3K_2' + K_3'} \quad (5.3.14a)$$

$$W_I' = e^{K_2'} \quad (5.3.14b)$$

$$W_{AF}' = 1 \quad (5.3.14c)$$

Combinando as eqs.(5.3.12) e (5.3.14) tem-se:

$$e^{K_2'} = [W_I^{(1)} / W_{AF}^{(1)}]^m \quad (5.3.15a)$$

$$e^{K_3'} = [W_I^{(1)} (W_{AF}^{(1)})^2 / (W_I^{(1)})^3]^m \quad (5.3.15b)$$

No caso $q=2$ a eq.(5.3.5c) perde o sentido, e o número de equações torna-se inferior ao número de parâmetros (o que impede a construção das equações de renormalização para K_2' e K_3' , simultaneamente). Entretanto, podemos mostrar (vide Apêndice A) que neste caso ($q=2$) o espaço Hamiltoniano composto apenas por K_2 (isto é, para $K_3 = 0$) é fechado sob renormalização. Como consequência, para $q=2$, temos a seguinte equação de renormalização:

$$\frac{W_F^{(m)}}{W_I^{(m)}} = \frac{W_F'}{W_I'} \quad (5.3.16)$$

que para $b'=1$ fornece

$$e^{K_2'} = [W_F^{(1)} / W_I^{(1)}]^{m/2} \quad (5.3.17)$$

5.4 Modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2, d=2, m)$

5.4.1 - Transformação de Grupo de Renormalização $b=2$ em $b'=1$

Consideremos a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$ para o modelo de Ising ($q=2$) no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2, d=2, m)$ ilustrada, para $m=2$, na fig. 5.4.1.1.

Para este caso os pesos de Boltzmann $W_F^{(m)}$ e $W_I^{(m)}$ são dados por

$$W_F^{(m)} \equiv W_m(1, 1, 1) = (X^9 + 3X^5 + 4X^3)^m \quad (X \equiv e^{K_2}) \quad (5.4.1.1a)$$

$$W_I^{(m)} \equiv W_m(1, 1, 2) = (X^7 + 4X^5 + 3X^3)^m \quad (5.4.1.1b)$$

$$W'_F \equiv W'_1(1, 1, 1) = X'^3 \quad (X' \equiv e^{K'_2}) \quad (5.4.1.1c)$$

$$W'_I \equiv W'_1(1, 1, 2) = X' \quad (5.4.1.1d)$$

Temos então das equações acima que a transformação de grupo de renormalização (eq.(5.3.16)) pode ser escrita como

$$\left[\frac{4 X^3 [1 + f_F(x)]}{3 X^3 [1 + f_I(x)]} \right]^m = \frac{X'^3}{X'} = X'^2 \quad (5.4.1.2)$$

onde

$$f_F(X) = (3/4)X^2 + (1/4)X^6 \quad (5.4.1.3a)$$

$$f_I(X) = (4/3)X^2 + (1/3)X^4 \quad (5.4.1.3b)$$

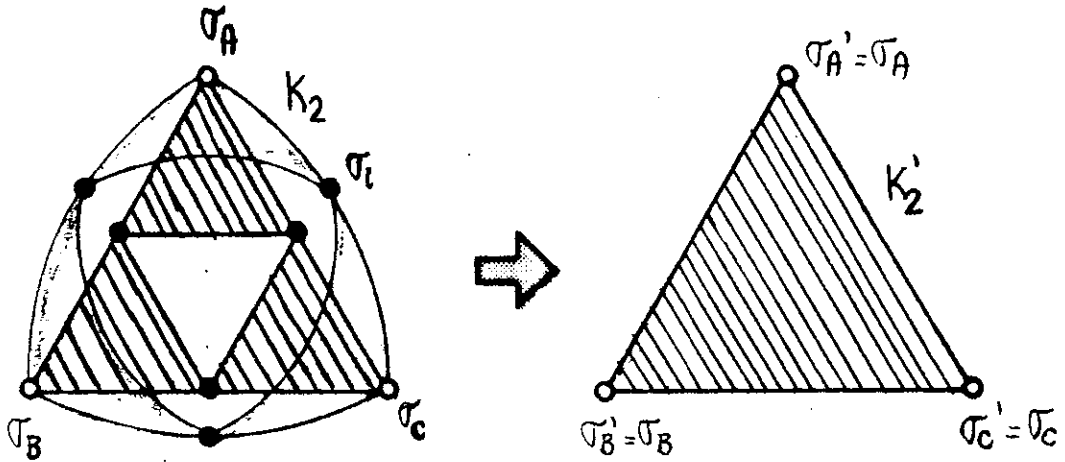


Figura 5.4.1.1 - Transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$ para o modelo de Ising ($q=2$) no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2, d=2, m=2)$. No caso geral, existem m folhas (ao invés de duas) conectadas em σ_A, σ_B e σ_C .

Para $K_2 \rightarrow -\infty$ ($X=0$) temos então que

$$(4/3)^m = X'^2 \Rightarrow X' \Big|_{K_2 \rightarrow -\infty} = (4/3)^{(m/2)} \quad (5.4.1.4)$$

o que indica que o ponto $X = 0$ ($K_2 \rightarrow -\infty$) é renormalizado em $X' > 1$ ($K'_2 > 0$) $\forall m$. Vale notar da eq.(5.4.1.2) que

$$\beta \varepsilon_F = -3K_2 m \quad g_F = 4^m \quad \beta \varepsilon_F' = -3K_2' \quad g_F' = 1 \quad (5.4.1.5a)$$

$$\beta \varepsilon_I = -3K_2 m \quad g_I = 3^m \quad \beta \varepsilon_I' = -K_2' \quad g_I' = 1 \quad (5.4.1.5b)$$

o que mostra, para o caso antiferromagnético ($K_2 < 0$), que o estado fundamental do modelo no grafo não-renormalizado ($b=2, m$ folhas) é do tipo F (pois, apesar de $\varepsilon_F = \varepsilon_I$, $g_F > g_I$) e tipo I no grafo renormalizado ($b'=1$) (pois, $\varepsilon_I' < \varepsilon_F'$).

A equação de renormalização (eq.(5.4.1.2)) pode ser reescrita na variável transmissividade térmica [4]

$$t \equiv \tanh(K/2)$$

Ilustramos na fig. 5.4.1.2 o gráfico da transmissividade renormalizada $t' = t'(t)$ e o diagrama de fases correspondente para este modelo. Vale notar que, para $m=2$, o fluxo da região $-1 \leq t < 0$ ($K_2 < 0$) converge ao atrator paramagnético (P) ($t_p^* = 0$) por valores positivos (ao invés de negativos) de K_2 pois, logo na 1ª iteração qualquer ponto desta região é renormalizado em $K_2' > 0$ de tal forma que $t' < t_c^F$.

Temos ainda que para $m \geq 3$, pontos com $K_2 < 0$ e $|K_2|$ grande, ou seja, cujas transmissividades t são tais que $-1 \leq t < t_0$ (t_0 é tal que $t'(t_0) = t_c^{*F}$) convergem para o atrator ferromagnético (F) ($t_F^* = 1$), gerando portanto uma bacia atratora ferromagnética descontínua. Concluimos então que a escolha destas células não é adequada para descrever o antiferromagneto de Ising neste fractal, o que corrobora a afirmação (A-1).

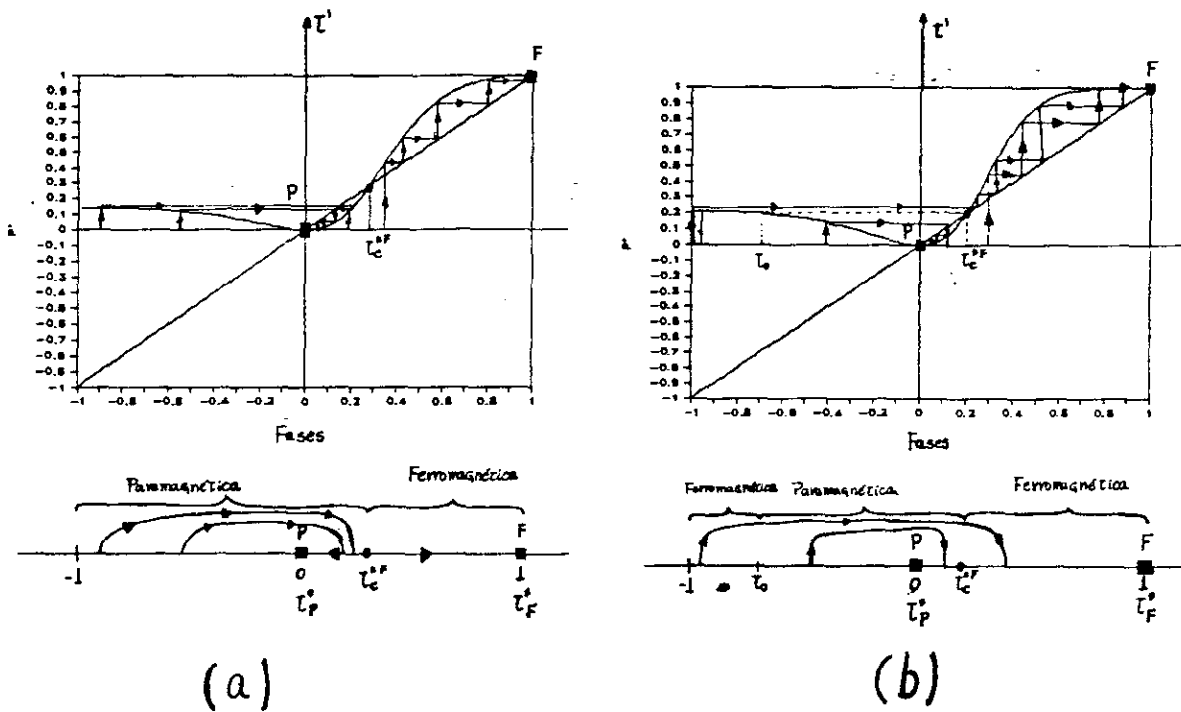


Figura 5.4.1.2 - Gráfico da transmissividade renormalizada $t'(t)$ e diagrama de fases correspondente para o modelo de Ising ($q=2$) no fractal Sierpinski-Gasket $G(2, d=2, m)$ para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$. (a) caso $m=2$. (b) caso $m=3$. Para $m > 3$ obtemos gráficos que não diferem qualitativamente do (b)

Porém, nossos resultados são exatos para o ferromagneto de Ising ($J_2 > 0$) neste fractal. Apresentamos nas figs. 5.4.1.3 e 5.4.1.4 os respectivos gráficos das temperaturas críticas e o expoente crítico térmico ν_T em função de $(m-1)$ para a transição F-P. Observe que a temperatura crítica T_c^F aumenta à medida que m (e, portanto, $D_f(m)$) cresce. Isto mostra que um aumento da conectividade fortalece as correlações facilitando, portanto, o

ordenamento dos spins.

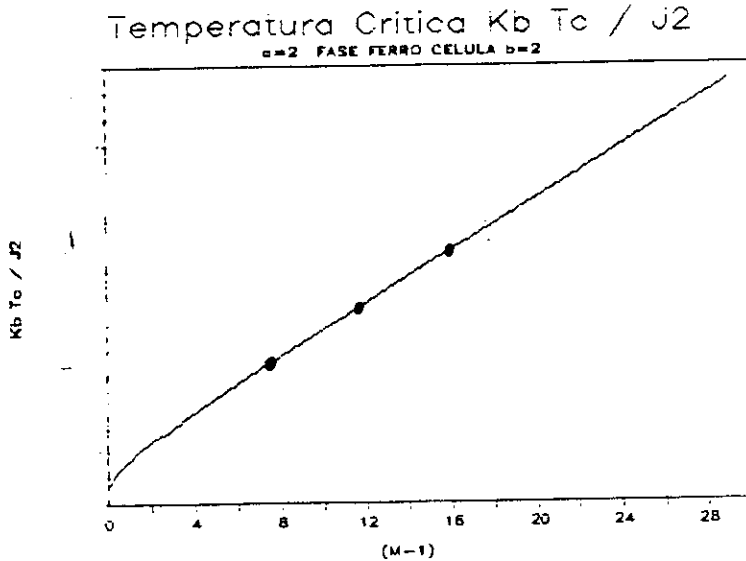


Figura 5.4.1.3 - Grafico da temperatura crítica ($K_B T_c^F / J_2$) em função de $(m-1)$ (transição F-P) para o modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket $G(2, d=2, m)$ para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$. (P) e (F) correspondem às regiões paramagnética e ferromagnética, respectivamente.

Fazendo $X'=X=X_c \cong 1 + K_c + K_c^2 / 2$ (pois, quando $m \rightarrow \infty$ $K_c \rightarrow 0$) na eq. (5.4.1.2) e expandindo até 2ª ordem, obtemos a seguinte expansão assintótica para T_c^F :

$$\frac{K_B T_c^F}{J_2} \sim \frac{m}{2} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (5.4.1.6)$$

Por outro lado, segue-se da eq. (5.2.3) para $b=2$ que:

$$m = e^{[D_f(m) - D_f(1)] \ln 2} \quad (5.4.1.7)$$

Como $K_c^F \ll 1$ para $m \rightarrow \infty$ e usando as eqs. (5.4.1.6 e 7)

temos que

$$t_c = \tanh(K_c/2) \sim \frac{K_c}{2} = e^{-[D_f(m) - D_f(1)] \ln 2} \quad (m \rightarrow \infty)$$

Este comportamento é similar ao comportamento assintótico exato $D_f \rightarrow \infty$ (vide eq. (12) de [42]) obtido para o ferromagneto de Potts em redes hierárquicas d -dimensionais do tipo Migdal-Kadanoff (cujas dimensões fractais D_f coincidem com d), o qual difere do resultado exato para redes hipercúbicas d -dimensionais no limite $d \rightarrow \infty$.

Vemos da fig. (5.4.1.3) que a derivada de $K_B T_c / J_2$ em relação à m é infinita no limite $m \rightarrow 1$, significando portanto que bastaria aumentarmos um pouco o valor de m (neste ponto estamos pensando na extensão analítica para um real positivo) que surgiria uma ordem ferromagnética. Este tipo de comportamento é similar, por exemplo, ao modelo de Ising na rede quadrada anisotrópica com acoplamentos K_x e K_y . Nesta situação se K_y for um pouco diferente de zero a temperatura crítica $K_B T_c^F / J_x = (K_x^c)^{-1}$ passa a ser não nula

($K_X^C \cong \ln 2 - \ln K_Y^C$ ($K_Y \rightarrow 0$)). Inspirados neste caso, fizemos o gráfico de K_c^F x $\ln(m-1)$ ($m \rightarrow 1$) (vide fig. 5.4.1.5). Obtivemos, que T_c^F se comporta como

$$K_c^F = \left(\frac{K_B T_c^F}{J_2} \right)^{-1} = a - c \ln(m-1) \quad (m \rightarrow 1) \quad (5.4.1.8)$$

onde $a \cong 0.36$ e $c \cong 0.41$.

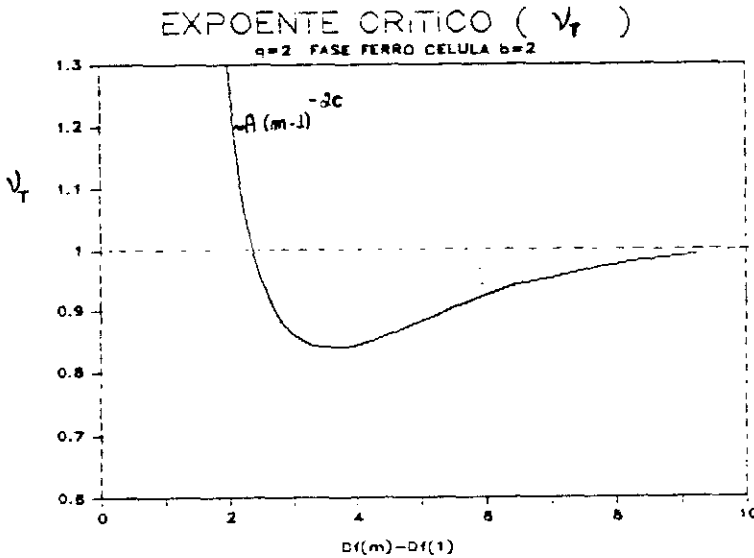


Figura 5.4.1.4 - Gráfico do expoente crítico térmico ν_T^F para o modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket $G(2, d=2, m)$ para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$.

Diferenciando a eq.(5.4.1.2) em relação a X e usando o fato que $X_c \cong 1 + K_c + K_c^2/2$ (quando $m \rightarrow \infty$), obtemos que

$$\lambda \equiv \partial X' / \partial X \Big|_{X_c} \sim m K_c (1 + (9/4)K_c) \quad (m \rightarrow \infty)$$

Usando as eqs. (5.4.1.6) e (3.2.19a) obtemos que:

$$\nu_T \sim 1 - \left[\frac{9}{2 \ln 2} \right] \frac{1}{m} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (5.4.1.9)$$

Usando a eq. (5.4.1.7) podemos reescrever a eq.(5.4.1.9) como

$$\nu_T \sim 1 - \left[\frac{9}{2 \ln 2} \right] e^{-[D_f(m) - D_f(1)] \ln 2} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (5.4.1.10)$$

ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_T = 1$$

similar ao resultado obtido por da Silva e Tsallis (vide eq.(6) da referência [42]) para o ferromagneto de Potts em redes hierárquicas tipo Migdal-Kadanoff quando $D_f \rightarrow \infty$, o qual difere do resultado exato para redes hipercúbicas no limite de dimensão infinita.

Para $m \rightarrow 1$ obtemos (utilizando a expansão assintótica numérica de T_c^F (eq.5.4.1.8)) que

$$\nu_T \sim A (m-1)^{-2c} \quad (5.4.1.11)$$

onde $A = \ln 2 / (4 e^{-2a})$.

TEMPERATURA CRITICA (Kc)

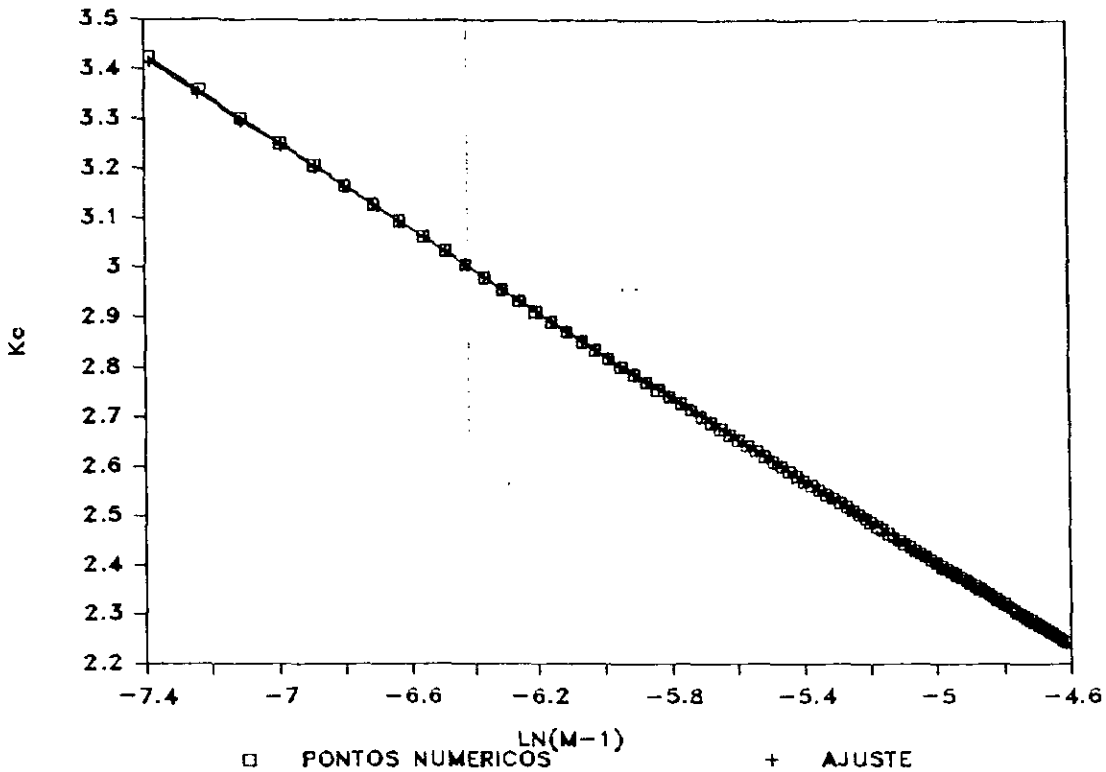


Figura 5.4.1.5 - Gráfico de K_C^F em função de $\ln(m-1)$ (transição F-P) para o modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$ para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$.

Como a escolha das células ($b=2$ em $b'=1$) não foi conveniente para descrever o antiferromagnetismo ($J_2 < 0$) neste modelo, iremos a seguir estudar este modelo para a transformação de renormalização $b=4$ em $b'=2$ (a qual gera o mesmo fractal).

5.4.2 - Transformação de Grupo de Renormalização $b=4$ em $b'=2$

Consideremos a transformação de renormalização $b=4$ em $b'=2$ para o modelo de Ising ($q=2$) ilustrada, para $m=2$, na fig. 5.4.2.1.

Observe que para gerarmos o fractal anterior temos de renormalizar m folhas idênticas com $b=4$ em m folhas idênticas com $b'=2$. Isto é equivalente a renormalizar 1 folha com $b=4$ (a qual contém $3m$ triângulos com $b=2$) em 1 folha com $b'=2$. Neste caso os pesos de Boltzmann, para 1 folha, $(W_F^{(1)}, W_I^{(1)})$ e (W_F', W_I') são dados por:

$$W_F^{(1)} \equiv W_m(1, 1, 1) = g_F(m) X^{9m} [1 + f_F^{(m)}(X)] \quad (5.4.2.1a)$$

$$W_I^{(1)} \equiv W_m(1, 1, 2) = g_I(m) X^{9m} [1 + f_I^{(m)}(X)] \quad (5.4.2.1b)$$

$$W_F' \equiv W_1'(1, 1, 1) = 4 X'^3 [1 + f_F'(X')] \quad (5.4.2.1c)$$

$$W_I' \equiv W_1'(1, 1, 2) = 3 X'^3 [1 + f_I'(X')] \quad (5.4.2.1d)$$

onde

m	$g_F(m)$	$g_I(m)$	$g_F(m)/g_I(m)$
1	280	273	1.02
2	10900	9675	1.13
3	480844	356265	1.35
4	23941828	13627203	1.75

e $f_F^{(m)}(X)$ e $f_I^{(m)}(X)$ são polinômios de grau $18m$ e $16m$ respectivamente. Por exemplo, para $m=2$, estes polinômios são:

$$f_F^{(2)}(X) = \frac{1}{10900} [68328X^2 + 198099X^4 + 359016X^6 + 456258X^8 + 424776X^{10} + 297478X^{12} + 164040X^{14} + 74418X^{16} + 28216X^{18} + 10140X^{20} + 3768X^{22} + 1126X^{24} + 408X^{26} + 138X^{28} + 24X^{30} + 18X^{32} + X^{36}] \quad (5.4.2.2a)$$

$$f_I^{(2)}(X) = \frac{1}{9675} [65976X^2 + 201130X^4 + 366968X^6 + 455582X^8 + 416216X^{10} + 294194X^{12} + 165784X^{14} + 76548X^{16} + 30120X^{18} + 10494X^{20} + 3304X^{22} + 914X^{24} + 200X^{26} + 38X^{28} + 8X^{30} + X^{32}] \quad (5.4.2.2b)$$

$$f_F'(X') = (3/4)X'^2 + (1/4)X'^6 \quad (5.4.2.2c)$$

$$f_I'(X') = (4/3)X'^2 + (1/3)X'^4 \quad (5.4.2.2d)$$

Temos então das equações acima que a transformação de grupo de renormalização (eq.(5.3.16)) torna-se neste caso:

$$\frac{g_F(m) X^{9m} [1 + f_F^{(m)}(x)]}{g_I(m) X^{9m} [1 + f_I^{(m)}(x)]} = \frac{4 X'^3 [1 + f_F'(x')]}{3 X'^3 [1 + f_I'(x')]} \quad (5.4.2.3)$$

Para $T=0$ e $J_2 < 0$ (ou seja, $X=0$) segue-se da equação acima

$$\frac{1 + (3/4)X'^2 + (1/4)X'^6}{1 + (4/3)X'^2 + (1/3)X'^4} = \frac{3 g_F(m)}{4 g_I(m)} \quad (5.4.2.4)$$

Como o lado esquerdo da eq.(5.4.2.4) é sempre menor do que 1 para $0 < X' < 1$ concluimos que a equação só apresenta solução

$X' < 1$ (e, portanto, $K_2' < 0$) para $\frac{g_F(m)}{g_I(m)} < \frac{4}{3}$, o que ocorre

para $m < 3$ (vide tabela acima). Temos então que para valores de $m = 2$ o ponto $X=0$ ($K_2 \rightarrow -\infty$) é renormalizado em $K_2' < 0$. Para $m \geq 3$ esta equação só admite solução $X' > 1$ (ou seja, $K_2' > 0$), ou seja, neste caso, o ponto $X=0$ ($K_2 \rightarrow -\infty$) é renormalizado em $K_2' > 0$.

Das eqs. (5.4.2.1) e dos valores de $g_F(m)$ e $g_I(m)$ temos que

$$\beta \varepsilon_F(m) = \beta \varepsilon_I(m) = -9K_2 m \qquad g_F(m) > g_I(m) \quad \forall m$$

e

$$\begin{aligned} \beta \varepsilon_F' &= -3K_2' & g_F' &= 4 \\ \beta \varepsilon_I' &= -3K_2' & g_I' &= 3 \end{aligned}$$

o que mostra, para o caso antiferromagnético ($K_2 < 0$), que o estado fundamental é do tipo F no grafo não renormalizado $\forall m$ (pois, apesar de $\varepsilon_F(m) = \varepsilon_I(m)$, $g_F(m) > g_I(m)$), assim como no grafo renormalizado $b'=2$ (pois, apesar de $\varepsilon_F' = \varepsilon_I'$, $g_F' > g_I'$). Vemos então que o resultado obtido para $m=2$ corrobora a afirmativa (A-1) enquanto o resultado obtido para $m \geq 3$ mostra que (A-1) é uma condição necessária mas não suficiente.

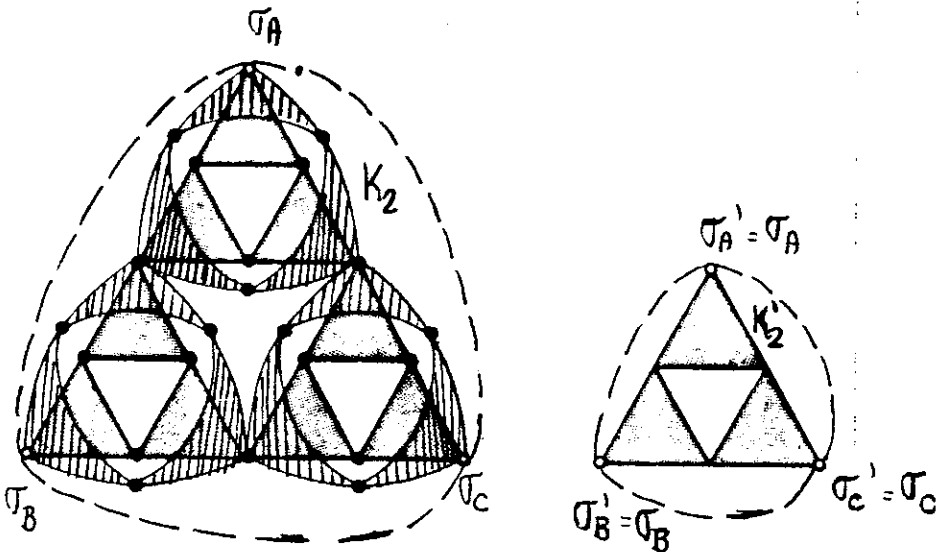


Figura 5.4.2.1 - Transformação de renormalização $b=4$ em $b'=2$ para o modelo de Ising ($q=2$) no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2,d=2,m=2)$. A linha tracejada é simbólica, significando que existe uma folha idêntica superposta à que está desenhada e cujos vértices em comum são A, B e C.

Ilustramos na fig. 5.4.2.2 o gráfico da transmissividade renormalizada $t'=t'(t)$ e o diagrama de fases correspondente para este modelo. Os ramos tracejados na figura representam ramos não físicos da transformação de renormalização (eq. (5.4.2.3)). Em particular, a solução $t'>0$ para $-1 \leq t \leq 1$ é idêntica à solução da eq. (5.4.1.2) (vide fig. 5.4.1.2). Portanto, para o modelo ferromagnético nossos resultados coincidem, como esperado, com aqueles obtidos para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$ (seção 5.4.1). Vemos que para $m=2$ (bem como para $m=1$) não há ordem AF nem mesmo a $T=0$. O fluxo dos pontos na região $t<0$ para $m \geq 3$ é do

mesmo tipo que no caso anterior (transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$ para $m > 3$ (vide fig. 5.4.1.2b)), ou seja, a bacia atratora ferromagnética é descontínua. Acreditamos que nossos resultados para o antiferromagneto de Ising são exatos para $m = 2$. Para $m \geq 3$ cremos que, para um dado m , as células convenientes que fornecem resultados exatos para este modelo devem ter tamanhos $b = 2^n$ e $b' = 2^{(n-1)}$ ($n \geq 3$) onde n é tal que as bacias atratoras sejam contínuas.

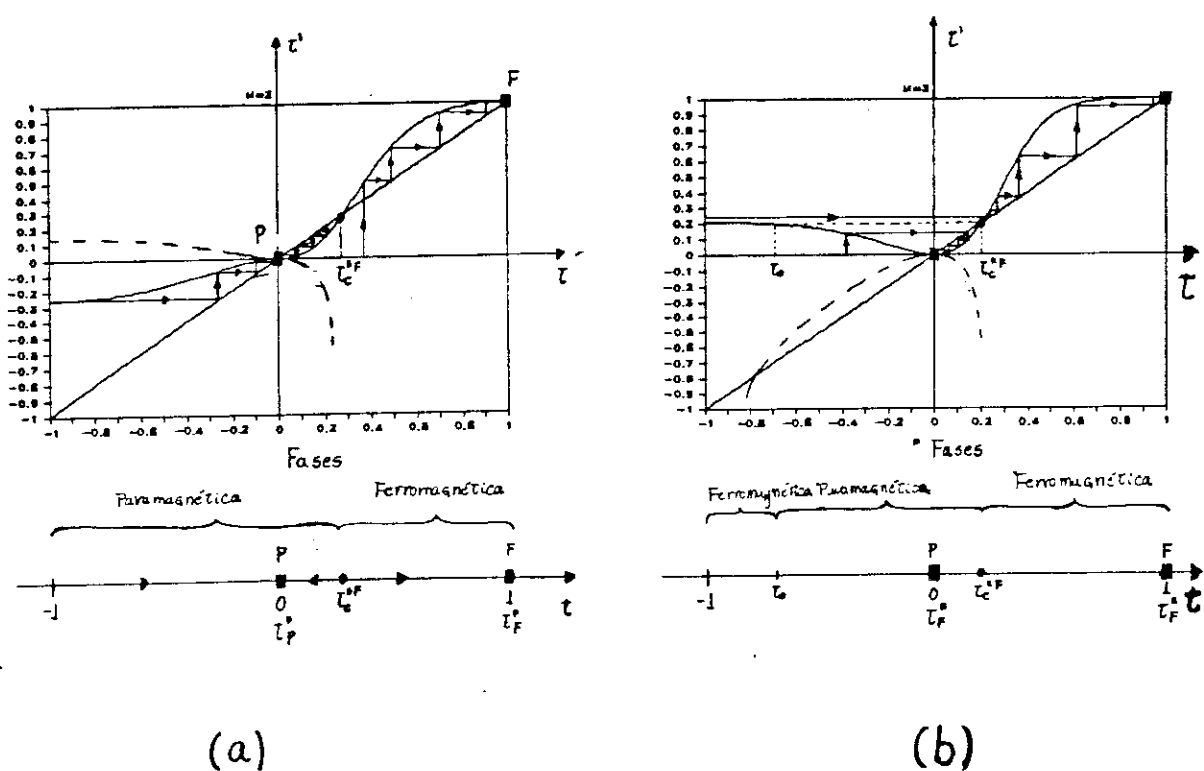


Figura 5.4.2.2 - Gráfico da transmissividade renormalizada $t'=t'(t)$ e o diagrama de fases correspondente para o modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket $G(2,d=2,m)$ usando-se a transformação de renormalização $b=4$ em $b'=2$. (a) caso $m=2$. (b) caso $m=3$. Para $m > 3$ obtem-se gráficos que não diferem qualitativamente do caso (b).

5.5 - Modelo de Potts no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m)$

Conforme vimos nas seções anteriores a transformação de grupo de renormalização $b=2$ em $b'=1$ (seção 5.4.1) e $b=4$ em $b'=2$ (seção 5.4.2) (para $m \neq 2$) não são adequadas para descrever a parte antiferromagnética do modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(2, d=2, m)$ pois geram bacias atratoras descontínuas. O mesmo ocorre para o modelo de Potts para a transformação de renormalização $b=2$ em $b'=1$ na descrição do antiferromagneto de Potts com $q=4$ estados neste mesmo fractal (vide seção 4.8). O cluster subsequente da família Sierpinski Gasket no qual o modelo de Potts poderia ser estudado é o cluster $b=3$ (vide fig. 5.2.2a). No entanto, verificamos que a transformação $b=3$ em $b'=1$ não é adequada para descrever o modelo de Ising ($q=2$) antiferromagnético, pois conduz a bacias atratoras descontínuas para $m > 80$ no Sierpinski-Gasket com gerador $G(3, d=2, m)$. Estudamos então o modelo de Potts com q estados no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m)$ para a transformação de renormalização $b=4$ em $b'=1$ ilustrado, para $m=2$, na fig. 5.5.1.

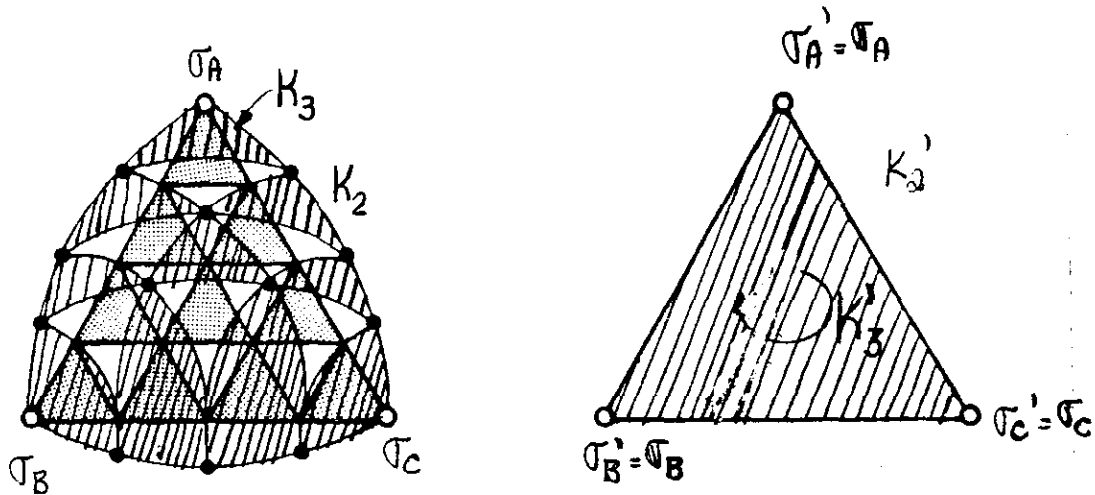


Figura 5.5.1 - Transformação de grupo de renormalização $b=4$ em $b'=1$ para o fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m=2)$ σ_i são os sítios internos e K_2 e K_3 as constantes de acoplamento a dois e três spins, respectivamente.

Devido ao tamanho da célula $b=4$, operacionalmente torna-se impraticável efetuar a decimação (eq.(5.3.3)) sobre os sítios internos σ_i (no total de 12 para $m=1$) para um número de estados q arbitrário do modelo, tendo em vista o grande número de configurações (q^{12}) a serem analisadas (em particular, para $q=4$ temos $\sim 10^7$ configurações distintas). No entanto, é possível compondo-se os pesos de Boltzmann dos geradores $G(2, d=2, m=1)$ e $G(b=1, d=2, m=1)$ calcular os pesos de Boltzmann do gerador $G(4, d=2, m=1)$ (vide Apêndice B), o que reduz a q^6 o número de configurações a serem analisadas. Estudamos apenas o caso $q=2, 3$ e 4 visto que, para $q=5$, mesmo com a redução das configurações proporcionada pela composição

dos grafos $b=2$ e $b=1$, o cálculo dos pesos de Boltzmann já se torna impraticável.

5.5.1 - Modelo de Ising ($q=2$)

Para este caso os pesos de Boltzmann são dados por

$$W_F^{(m)} \equiv W_m(1,1,1) = (168)^m X^{10m} [1 + f_F(q=2, X)]^m \quad (5.5.1.1a)$$

$$W_I^{(m)} \equiv W_m(1,1,2) = (175)^m X^{10m} [1 + f_I(q=2, X)]^m \quad (5.5.1.1b)$$

$$W_F' \equiv W_m'(1,1,1) = X'^3 \quad (5.5.1.1c)$$

$$W_I' \equiv W_m'(1,1,2) = X' \quad (5.5.1.1d)$$

onde

$$f_F(q=2, X) = (1/168)[847X^2 + 1200X^4 + 975X^6 + 595X^8 + 213X^{10} + 75X^{12} + 13X^{14} + 9X^{16} + X^{20}] \quad (5.5.1.2a)$$

e

$$f_I(q=2, X) = (1/175)[812X^2 + 1243X^4 + 991X^6 + 545X^8 + 223X^{10} + 81X^{12} + 21X^{14} + 4X^{16} + X^{18}] \quad (5.5.1.2b)$$

Temos então das equações acima que a transformação de grupo de renormalização (eq.(5.3.16)) é escrita como

$$\frac{(168)^m X^{10m} [1+f_F(x)]^m}{(175)^m X^{10m} [1+f_I(x)]^m} = \frac{X'^3}{X'} \quad (5.5.1.3)$$

Vale notar da equação acima que

$$\beta \varepsilon_F = -10K_2 m \quad g_F = (168)^m \quad \beta \varepsilon'_F = -3K'_2 \quad g'_F = 1 \quad (5.5.1.4a)$$

$$\beta \varepsilon_I = -10K_2 m \quad g_I = (175)^m \quad \beta \varepsilon'_I = -K'_2 \quad g'_I = 1 \quad (5.5.1.4b)$$

o que mostra, para o caso antiferromagnético ($K_2 < 0$), que o estado fundamental do modelo é do tipo I no grafo não-renormalizado ($b=4, m$ folhas) (pois, apesar de $\varepsilon_F = \varepsilon_I$, $g_I > g_F$), assim como no grafo renormalizado ($b'=1$) (pois, $\varepsilon'_I < \varepsilon'_F$). Este é um exemplo do caso (c1) (discutido na seção 4.7) e conforme vimos o ponto $K_2 = -\infty$ ($X=0$) não é renormalizado em $K'_2 = -\infty$.

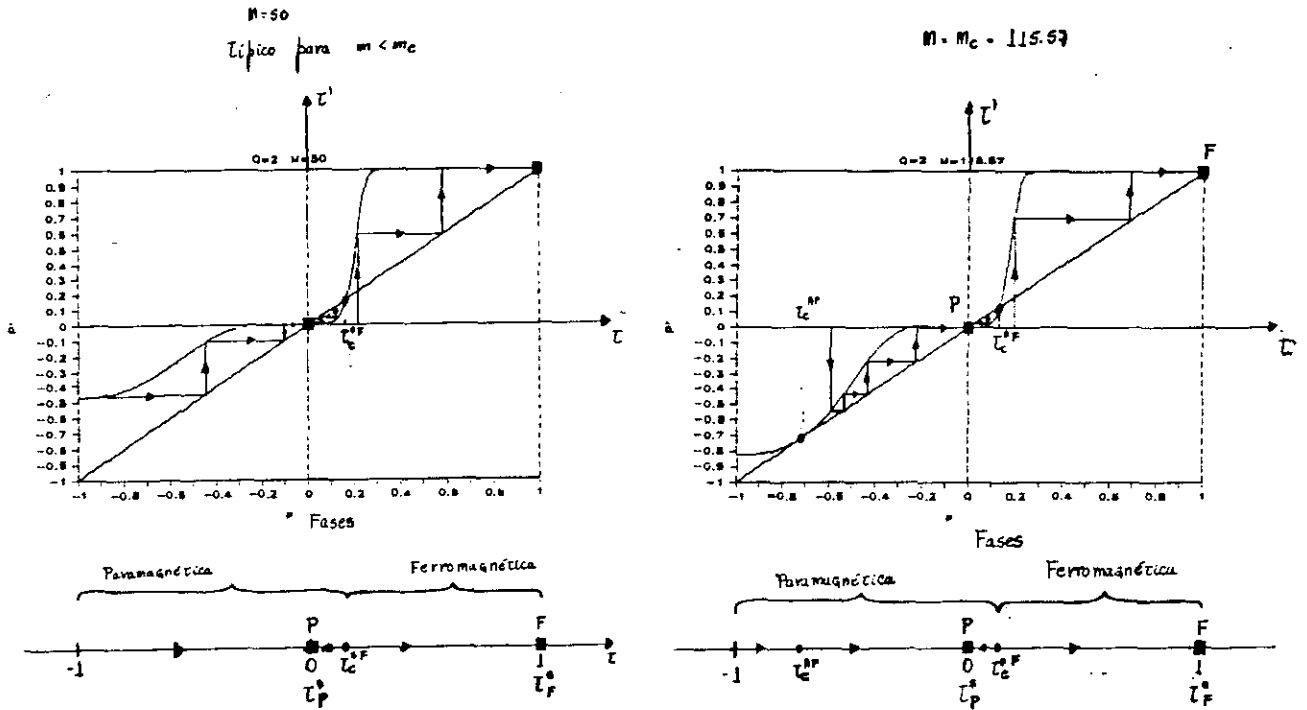
Efetivamente, para $T=0$ e $J_2 < 0$ (ou seja, $X=0$) temos da eq. (5.5.1.3) que

$$\left(\frac{168}{175} \right)^m = X'^2 \quad \Rightarrow \quad X' = \left(\frac{168}{175} \right)^{(m/2)} < 1 \quad \forall m \quad (5.5.1.5)$$

ou seja,

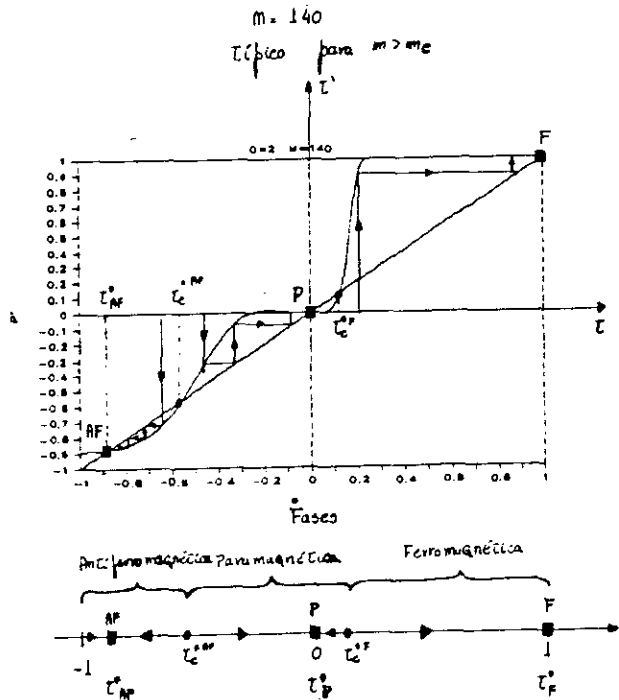
$$K'_2 < 0 \text{ e finito (para } m \text{ finito)}$$

O gráfico da equação de renormalização (eq.(5.5.1.3)) na variável transmissividade térmica $t \equiv \tanh(K_2/2)$ e o diagrama de fases correspondente está ilustrado na fig. 5.5.1.1.



(a)

(b)



(c)

Figura 5.5.1.1 - Gráfico da transmissividade $t'=t'(t)$ e diagrama de fases correspondente para o modelo de Ising ($q=2$) no Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$ para a transformação de renormalização $b=4$ em $b'=1$. (a) comportamento típico para $m < m_c$. Toda região $-1 < t < 0$ está no domínio de atração paramagnético. (b) Para $m = m_c$ surge um ponto fixo marginal t_c^{AF} (ou seja, $\lambda=1$, e conseqüentemente $\nu = \infty$). (c) Para $m > m_c$ o ponto fixo marginal se separa em dois pontos fixos: um instável (t_c^{AF*}) e um atrator (t_{AF}^*) que no limite $m \rightarrow \infty$ tende a -1 ($t_c^{AF*}(m \rightarrow \infty) = -1$).

Na fig. 5.5.1.2 ilustramos a evolução do diagrama de fases com o número de folhas (m). Notamos que na região antiferro ($-1 \leq t < 0$), para $m \cong m_c = 115.57$ o ponto fixo instável (t_c^{*AF}) e o atrator (t_{AF}^*) se colapsam no ponto fixo marginal (t_c^{AF}); à medida que m (e, portanto, $D_f(m)$) aumenta observamos que t_{AF}^* se aproxima de -1 ($J_2 < 0, T=0$) em concordância com o resultado obtido por Berker e Kadanoff [17]. As regiões de ordenamento ferro ($t_c^{*F} < t \leq 1$) e antiferromagnética ($-1 \leq t < t_c^{*AF}$), aumentam com o número de folhas (e, portanto, com $D_f(m)$) mostrando, tal como ocorre no ferromagneto de Ising no fractal anterior $G(2, d=2, m)$, que um aumento de conectividade favorece o ordenamento (ferro e antiferromagnético) dos spins.

Das eqs. (5.5.1.4) vemos que o estado fundamental antiferromagnético a $T=0$ é caracterizado pela energia $\varepsilon = -10K_2m$ ($K_2 < 0$).

A probabilidade $p_m(\alpha, \theta, \gamma)$ dos "spins" localizados nas raízes A, B e C do grafo com m folhas (vide fig. 5.5.1) estarem nos estados α, θ e γ (α, θ e $\gamma=1, 2, \dots, q$) é dada por

$$p_m(\alpha, \theta, \gamma) = W_m(\alpha, \theta, \gamma) / Z \quad (5.5.1.6)$$

onde Z é a função de partição do modelo. Como discutido na seção 5.3 e assumindo que $D = Z/Z'$, esta quantidade é invariante sob renormalização (vide eq.(5.3.10)).

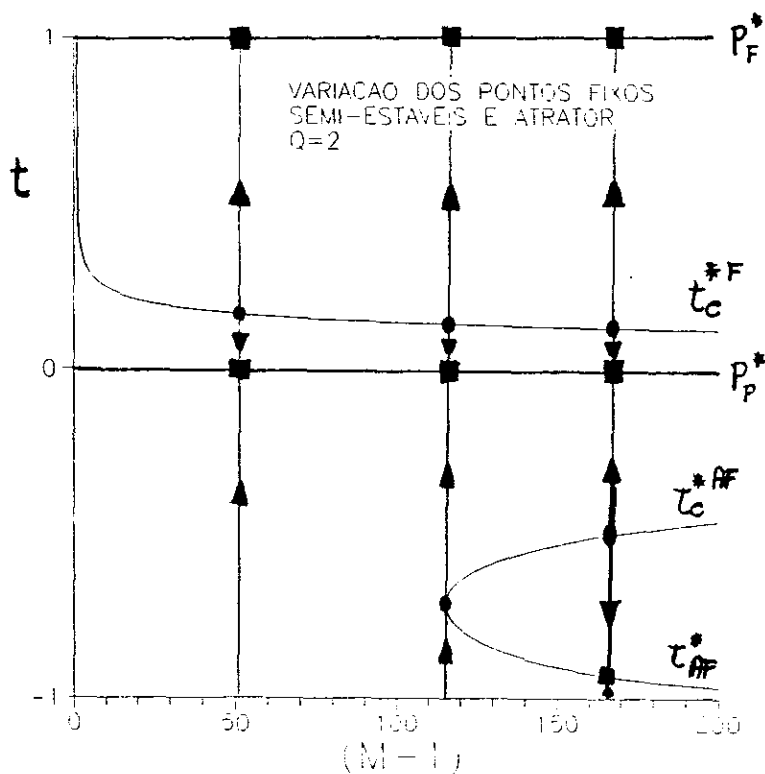


Figura 5.5.1.2 - Evolução do diagrama de fases par ao modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$ ($b=4$ em $b'=1$) com m folhas. As linhas t_c^{*F} , t_c^{*AF} e t_{AF}^* representam a variação das transmissividades dos pontos fixos instáveis ferro, antiferromagnético e do atrator antiferromagnético, respectivamente.

Para $T=0$, a probabilidade do grafo $b=4$ com m folhas na configuração tipo F $p_m(1,1,1)$ (ou seja, quando os spins das raízes A, B e C estão na configuração $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$) ser renormalizado no grafo $b'=1$ na mesma configuração

$(\sigma'_A = \sigma'_B = \sigma'_C = 1)$ é da mesma ordem que $p_m(1,1,2)$ (ou seja, a probabilidade do grafo $(b=4, m$ folhas) onde $(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C) = (1,1,2)$ ser renormalizado no grafo $b'=1$ onde $(\sigma'_A, \sigma'_B, \sigma'_C) = (1,1,2)$) para valores pequenos de m ; ou seja,

$$p_m(1,1,1)/p_m(1,1,2) \Big|_{\substack{T=0 \\ J_2 < 0}} \sim 1 \quad \text{para } m \sim 1 \quad (5.5.1.7)$$

Ao aumentarmos m (o que implica em aumentarmos o número de coordenação médio da rede, bem como sua dimensão fractal (eq.(5.2.3)) esta razão irá decrescer até que para $m \sim 116$ a configuração tipo I $(\sigma_A = \sigma_B = 1, \sigma_C = 2)$ torna-se muito mais provável que a do tipo F $(\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1)$, a saber:

$$p_m(1,1,1)/p_m(1,1,2) \Big|_{\substack{T=0 \\ J_2 < 0}} \sim 0.009 \quad (m \cong 116) \quad (5.5.1.8)$$

Esta mudança de comportamento ao aumentarmos m e, conseqüentemente $D_f(m)$, se reflete no surgimento de uma fase antiferromagnética não usual cujo atrator encontra-se à temperatura finita (vide fig. 5.5.1.1c). Isto pode ser entendido da seguinte forma: A $T=0$ (i.e., para $K_2 = -\infty$) existem $g_I = (175)^m$ configurações do estado fundamental com energia $\epsilon_I = -10K_2m$ (onde existe 1 (uma) ligação frustrada em cada triângulo que aponta cima) do grafo $b=4$ para $\sigma_A = \sigma_B = 1, \sigma_C = 2$ e $g_F = (168)^m$ configurações de mesma energia $\epsilon_F = -10K_2m$ para $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$. Após realizarmos o traço sobre os spins internos, σ_A, σ_B e σ_C tornam-se primeiros vizinhos onde $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$ ocorre com uma multiplicidade $g_F \neq 0$, perdendo portanto o caráter antiferromagnético a $T=0$. Como esta multiplicidade é menor do

que a de $\sigma_A = \sigma_B \neq \sigma_C$ (g_I) então o sistema renormalizado ainda é um antiferromagneto (i.e., $K_2' < 0$) mas não a $T=0$. Portanto, devido ao fato de que $\epsilon_F = \epsilon_I$ e $g_F \neq 0$, a condição de temperatura nula não se propaga entre spins distantes. Consequentemente $K_2 = -\infty$ não é nem um ponto fixo instável. O efeito de renormalizações sucessivas leva ao atrator paramagnético (P) quando g_I não é muito maior que g_F (ou seja, para $m < m_c$) (vide fig. 5.5.1.1a) e ao atrator antiferromagnético a $T \neq 0$ (AF) quando $g_I \gg g_F$ (neste caso particular corresponde a considerar, $g_I/g_F > 114$) (ou seja, para $m > m_c$) (vide fig. 5.5.1.1c).

Como visto na seção 4.7 este comportamento, ou seja, o surgimento de uma fase antiferro cujo atrator encontra-se à temperatura finita foi obtido por Berker e Kadanoff [17], utilizando o procedimento de Migdal-Kadanoff, para o modelo de Potts antiferromagnético em redes hipercúbicas d-dimensionais (vide fig. 4.7.3). Em particular, eles sugerem que devido ao atrator (A^*) (vide fig. 4.7.3) (ponto fixo da equação de renormalização) encontrar-se a $T \neq 0$, o comprimento de correlação (ξ) seria infinito em A^* e consequentemente ao longo de toda a fase antiferromagnética a $T \neq 0$ (vide seção 4.7.3). Consequentemente a função de correlação $\Gamma(r)$ teria um decaimento algébrico dado pela eq.(4.7.5) ao longo desta fase com o expoente η determinado em A^* .

Este comportamento foi obtido por Itzykson e Luck [18] para o modelo de Potts antiferromagnético ($q < 1$) na rede hierárquica diamante. Usando o fato de que a função de

correlação entre os spins das raízes A e B da n-ésima geração da rede diamante (vide fig. 4.3.1)

$$G_n(X) = \langle \delta(\sigma_A, \sigma_B) \rangle_X \quad (5.5.1.9)$$

(onde $X = e^{K_2}$ com K_2 definido pela Hamiltoniana 5.3.1 com $K_3=0$) está relacionada com a função de correlação entre as raízes $G_0(X)$ da 0-ésima geração desta rede (i.e., uma ligação entre A e B) através de

$$G_n(X) = G_0(T^n(X)) \quad (5.5.1.10)$$

onde $T(X)$ é a transformação de grupo de renormalização

$$X' = T(X) \quad (5.5.1.11)$$

gerada pela eq. (4.4.3). Eles mostraram que no limite termodinâmico a função de correlação entre os spins σ_A e σ_B , em torno do atrator à temperatura finita, comporta-se como

$$G_n(X) - G_\infty(X) \sim B(X) L_n^{-\eta} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.5.1.12)$$

onde L_n (a distância química entre os sítios A e B) $= 2^n$, $\eta = -\ln \lambda / \ln 2$ e $\lambda = (\partial T / \partial X) |_{t_{AF}^*}$ ($0 < \lambda < 1$) é o autovalor do Jacobiano da transformação de renormalização ($T(X)$) calculado no ponto fixo atrator. Como para esta rede hierárquica a dimensão fractal é $D_f = 2$, podemos rescrever a eq. (5.5.1.12) como:

$$G_n(X,r) - G_\infty(X,r) \sim B(X) r^{-(2+\eta-D_f)} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.5.1.12a)$$

onde $r \equiv L_n = 2^n$ é a distância química entre as raízes da rede hierárquica no n-ésimo estágio de construção.

Observe que a equação acima é similar à eq.(4.7.5), com a diferença de que no caso do fractal d foi substituído por D_f .

Seguindo um procedimento análogo ao de Itzykson e Luck [18], vamos, a seguir, provar que a função de correlação entre qualquer par de spins Ising situados nas raízes do fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4,d=2,m>m_c)$, em torno do atrator antiferromagnético, comporta-se de uma forma semelhante à eq.(5.5.1.12a).

Como mostrado na seção 4.5 a transformação de grupo de renormalização dada pela eq.(4.4.3) é completamente equivalente à preservação da função de correlação $\Gamma_{\sigma_i \sigma_j}(G)$ entre qualquer par de spins das raízes A,B e C de um grafo com 3(três) raízes para o modelo de Ising com interações a primeiros vizinhos (vide eqs.(4.5.20)), ou seja,

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(1)}(G^{(1)}, X) = \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(0)}(G^{(0)}, X^{(1)}) \quad (5.5.1.13)$$

$$X \equiv e^{K_2}, X^{(1)} \equiv X'$$

onde $\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(n)}(G^{(n)}, X)$ é a função de correlação para o n-ésimo estágio de construção $G^{(n)}$ da rede hierárquica G com raízes A,B e C, cujo gerador está representado na fig. 4.6.1 ($b'=1$

corresponde a $G^{(0)}$ e $b=$ refere-se a $G^{(1)}$). Consequentemente,

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(2)}(G^{(2)}, X) = \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(1)}(G^{(1)}, X^{(1)} = X^{(1)}(x)) = \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(0)}(G^{(0)}, X^{(2)} = X^{(2)}(x)) \quad (5.5.1.14)$$

e por indução,

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(n)}(G^{(n)}, X) = \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(0)}(G^{(0)}, X^{(n)}) \quad (5.5.1.15)$$

onde $X^{(n)}$ representa a n -ésima iteração da transformação de grupo de renormalização (eq.(5.5.1.3))

$$X^{(1)} = T_m(X) \quad (5.5.1.16a)$$

$$\text{onde } T_m(X) = \left[\frac{168 X^{10} (1 + f_F(X))}{175 X^{10} (1 + f_I(X))} \right]^{m/2} \quad (5.5.1.16b)$$

Da eq. (4.5.3), (4.5.7) e (4.5.9) temos

que

$$\begin{aligned} \langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \rangle &= \left\langle \left(\frac{\sqrt{(q-1)}}{q} S_{\sigma_A 1} + \frac{1}{q} \right) \left(\frac{\sqrt{(q-1)}}{q} S_{\sigma_B 1} + \frac{1}{q} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{q^2} ((q-1) \Gamma_{\sigma_A \sigma_B} + 1) \end{aligned} \quad (5.5.1.17)$$

Temos ainda que para o grafo $G^{(0)}$ $b=1$; vide fig. 5.5.1

$$\langle \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) \rangle_G^{(0)} = \frac{\text{Tr}_{(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C)} \delta(\sigma_A, 1) \delta(\sigma_B, 1) e^{-\beta H}}{\text{Tr}_{(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C)} e^{-\beta H}} =$$

$$= \frac{X^3 + X}{2(X^3 + 3X)} \quad (5.5.1.18)$$

Logo das eqs. (5.5.1.17) e (5.5.1.18) e usando o fato que $q=2$, resulta

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}(X) = \frac{2(X^2 + 1)}{(X^3 + 3)} - 1 \quad (5.5.1.19)$$

Linearizando $T_m(X)$ (eq. (5.5.1.16)) em torno do ponto fixo atrator antiferromagnético ($X_{AF}^* = e^{K_{AF}^*}$)

temos:

$$X^{(1)} - X_{AF}^* = \left. \frac{\partial T_m}{\partial X} \right|_{X=X_{AF}^*} (X - X_{AF}^*) + O(X^2) =$$

$$= \lambda_m \Delta X + O(X^2) \quad (5.5.1.20)$$

onde $\lambda_m = (\partial T_m / \partial X) \big|_{X=X_{AF}^*} < 1$, $\Delta X = (X - X_{AF}^*)$.

Iterando-se n vezes a eq. acima:

$$T_m^n(X) - X_{AF}^* = \lambda_m^n (X - X_{AF}^*) \quad (5.5.1.20a)$$

Por outro lado temos das eqs. (5.5.1.15), (5.5.1.16) e (5.5.1.19) que

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(n)}(X) = 2 \frac{(\mathbb{T}_m^n(X) + 1)^2}{(\mathbb{T}_m^n(X) + 3)^2} - 1 \quad (5.5.1.21)$$

Como todos os pontos X da região AF convergem para X_{AF}^* , segue-se da eq. acima que:

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(\infty)}(X) = 2 \frac{(\mathbb{T}_m^\infty(X) + 1)^2}{(\mathbb{T}_m^\infty(X) + 3)^2} - 1 = 2 \frac{(X_{AF}^* + 1)^2}{(X_{AF}^* + 3)^2} - 1 \quad (5.5.1.22)$$

Substituindo a eq.(5.5.1.20a) em (5.5.1.21) temos que, no limite $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(\infty)}(X) &= \\ &= 2 \frac{(X_{AF}^* + 1)^2}{(X_{AF}^* + 3)^2} \left[1 + 2 X_{AF}^* \Delta X \left(\frac{1}{(1+X_{AF}^*)} - \frac{1}{(3+X_{AF}^*)} \right) \lambda_m^n + \right. \\ &\quad \left. O(\lambda_m^{2n}) \right] - 1 \end{aligned} \quad (5.5.1.23)$$

onde usamos o fato de que $n \gg 1$ e $\lambda_m < 1$ e, portanto, $\frac{\lambda_m^n \Delta X}{X_{AF}^*} \ll 1$.

Das duas equações acima segue-se então que

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(n)}(X) - \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(\infty)}(X) \right] = \\
 & = 4 \frac{(X_{AF}^*{}^2 + 1)}{(X_{AF}^*{}^3 + 3)} \left[X_{AF}^* \left(\frac{1}{(1+X_{AF}^*{}^2)} - \frac{1}{(3+X_{AF}^*{}^2)} \right) \right] (X - X_{AF}^*) \lambda_m^n \equiv \\
 & \equiv A_m(m) \lambda_m^n \qquad (5.5.1.24)
 \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\lambda_m^n = 4^{\log \frac{\lambda_m^n}{4^n}} = 4^n \log \frac{\lambda_m^n}{4^n} = L_n^{-a(m)} \qquad (5.5.1.25)$$

onde

$$L_n = 4^n \qquad (5.5.1.26a)$$

é a distância química entre as raízes A e B no n-ésimo estágio de construção $G^{(n)}$ da rede hierárquica em questão, e o expoente $a(m)$ é definido por:

$$a(m) = - \frac{\ln \lambda_m}{\ln 4} \qquad (5.5.1.26b)$$

Logo, a função de correlação entre os spins σ_A e σ_B se comporta no limite fractal ($n \rightarrow \infty$) como

$$\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}(X) \equiv \left[\Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(n)}(X) - \Gamma_{\sigma_A \sigma_B}^{(\infty)}(X) \right] = A_m(X) r_{AB}^{-a(m)} \quad (n \rightarrow \infty) \qquad (5.5.1.27)$$

onde r_{AB} é distância entre as raízes A e B.

Assumindo que a eq.(5.5.1.12a) seja verdadeira para redes hierárquicas com dimensões fractais D_f , segue-se da equação acima que:

$$a(m) = 2 - D_f(m) + \eta(m) \quad (5.5.1.28)$$

Como para este fractal (eq.(5.2.3) para $b=4$)

$$D_f = \ln(10m) / \ln 4$$

deduz-se das duas últimas equações e a eq. (5.5.1.26b) que o expoente crítico $\eta(m)$ para a fase AF ($-1 \leq t < t_c^{*AF}$) é dado por:

$$\eta(m) = \frac{\ln(10m/\lambda_m)}{\ln 4} - 2 \quad (5.5.1.29)$$

Ilustramos na fig. 5.5.1.3 o gráfico de η em função do número de folhas (m), para $m > m_c$.

O comportamento do expoente crítico térmico ν_T para ambas as fases ferro a antiferromagnética será exibido na seção 5.5.4.

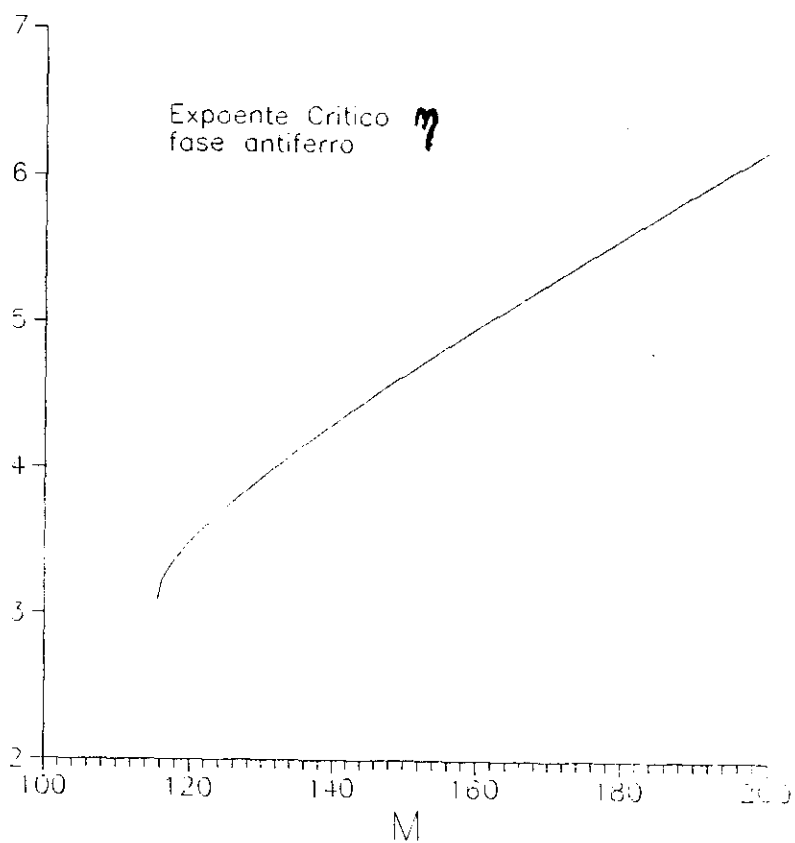


Figura 5.5.1.3 - Gráfico do expoente crítico η para a fase antiferromagnética com atrator a $T = 0$.

5.5.2 - Modelo de Potts (q=3)

Para este caso os pesos de Boltzmann $(W_F^{(m)}, W_I^{(m)}, W_{AF}^{(m)})$ para os grafos com $b=4$ e $b'=1$, usando o Hamiltoniano com interações a 2(dois) e 3(três) spins (vide eq.(5.3.1)) são dados por

$$W_F^{(m)} \equiv W_m(1,1,1) = (24)^m X^{2m} [1 + f_F(q=3, X, Y)]^m \quad (5.5.2.1a)$$

$$W_I^{(m)} \equiv W_m(1,1,2) = (4)^m X^m [1 + f_I(q=3, X, Y)]^m \quad (5.5.2.1b)$$

$$W_{AF}^{(m)} \equiv W_m(1,2,3) = [1 + f_{AF}(q=3, X, Y)]^m \quad (5.5.2.1c)$$

$$(X \equiv e^{K_2}, Y \equiv e^{K_3})$$

$$W'_F \equiv W'_m(1,1,1) = X'^3 Y' \quad (X' \equiv e^{K'_2}, Y' \equiv e^{K'_3}) \quad (5.5.2.1d)$$

$$W'_I \equiv W'_m(1,1,2) = X' \quad (5.5.2.1e)$$

$$W'_{AF} \equiv W'_m(1,2,3) = 1 \quad (5.5.2.1f)$$

onde

$$f_F(q=3, X, Y) = (1/24)[204X + \dots + X^{28}Y^{10}] \quad (5.5.2.2a)$$

$$f_I(q=3, X, Y) = (1/4)[28X + \dots + X^{27}Y^9] \quad (5.5.2.2b)$$

$$f_{AF}(q=3, X, Y) = [48X^2 + \dots + 3X^{26}Y^8] \quad (5.5.2.2c)$$

As expressões completas dos pesos de Boltzmann $W_F^{(1)}, W_I^{(1)}$ e $W_{AF}^{(1)}$ estão no Apêndice C.

Temos das equações acima que a transformação de grupo de renormalização com 2(dois) parâmetros (eqs.(4.8.1)) é escrita como

$$\frac{(24)^m X^{2m} [1+f_F(q=3, X, Y)]^m}{[1+f_{AF}(q=3, X, Y)]^m} = \frac{X'^3 Y'}{1} \quad (5.5.2.3a)$$

$$\frac{(4)^m X^m [1+f_I(q=3, X, Y)]^m}{[1+f_{AF}(q=3, X, Y)]^m} = \frac{X'}{1} \quad (5.5.2.3b)$$

Vale notar da equação acima que

$$\beta\epsilon_F = -2K_2 m \quad g_F = (24)^m \quad \beta\epsilon'_F = -3K_2' - K_3' \quad g'_F = 1 \quad (5.5.2.4a)$$

$$\beta\epsilon_I = -K_2 m \quad g_I = 4^m \quad \beta\epsilon'_I = -K_2' \quad g'_I = 1 \quad (5.5.2.4b)$$

$$\beta\epsilon_{AF} = 0 \quad g_{AF} = 1 \quad \beta\epsilon'_{AF} = 0 \quad g'_{AF} = 1 \quad (5.5.2.4c)$$

o que mostra, para o caso $J_2 < 0$ e $J_3 < -3J_2$ que o estado fundamental do modelo é do tipo AF em ambos os grafos ($b=4$, m folhas) e $b'=1$, pois, $(\epsilon_{AF} < \epsilon_F, \epsilon_{AF} < \epsilon_I)$ e $(\epsilon'_{AF} < \epsilon'_F, \epsilon'_{AF} < \epsilon'_I)$. Este é um caso análogo ao caso (a1) da tabela 4.7.1 (o ponto $X=0$ e $Y=\infty$ é renormalizado em $X'=0$ e $Y'=\infty$).

O diagrama de fases para este modelo nas variáveis

$$t_2 \equiv \frac{e^{K_2} - 1}{e^{K_2} + (q-1)} \quad (5.5.2.5a)$$

$$t_3 \equiv \frac{e^{K_3} - 1}{e^{K_3} + (q-1)} \quad (5.5.2.5b)$$

está ilustrado para diversos valores de m na fig. 5.5.2.1. Os pontos $(t_2, t_3) = (0, 0)$, $(t_2, t_3) = (-1/2, 1)$ e $(t_2, t_3) = (1, -1/2)$ são os respectivos atratores das fases paramagnética (P), ferro (F) e antiferromagnética (AF). As fronteiras críticas P-F e P-AF tangenciam, respectivamente, os eixos $t_3 = -1/2$ (na fase ferro (F)) e $t_2 = 1$ (na fase antiferro (AF)) e terminam em seus respectivos atratores (F) e (AF). Um comportamento análogo a este foi obtido por de Oliveira [5] para a fase superantiferromagnética do modelo de Ising com interações a primeiros e segundos vizinhos na rede quadrada.

Tabela 5.5.2.1 - Valores dos pontos críticos semi-estáveis para as fases ferro (F) e antiferromagnética (AF) do modelo de Potts ($q=3$) no fractal Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$.

m	$t_c^{*F} \equiv (t_3, t_2)$	$t_c^{*AF} \equiv (t_3, t_2)$
2	(0.0700, 0.2947)	(0.9346, -0.4724)
3	(0.0940, 0.2432)	(0.8667, -0.4503)
4	(0.0930, 0.2233)	(0.8101, -0.4368)
5	(0.0878, 0.2123)	(0.7604, -0.4268)
6	(0.0819, 0.2051)	(0.7166, -0.4187)
7	(0.0764, 0.1999)	(0.6780, -0.4119)
8	(0.0714, 0.1957)	(0.6441, -0.4060)
9	(0.0669, 0.1924)	(0.6143, -0.4007)
10	(0.0629, 0.1895)	(0.5879, -0.3959)
20	(0.0391, 0.1720)	(0.4363, -0.3633)
30	(0.0282, 0.1619)	(0.3713, -0.3436)
40	(0.0219, 0.1546)	(0.3349, -0.3297)
50	(0.0179, 0.1489)	(0.3110, -0.3190)
60	(0.0151, 0.1441)	(0.2940, -0.3105)
70	(0.0130, 0.1401)	(0.2811, -0.3034)
80	(0.0114, 0.1366)	(0.2708, -0.2974)
90	(0.0101, 0.1335)	(0.2625, -0.2921)
100	(0.0090, 0.1308)	(0.2556, -0.2875)

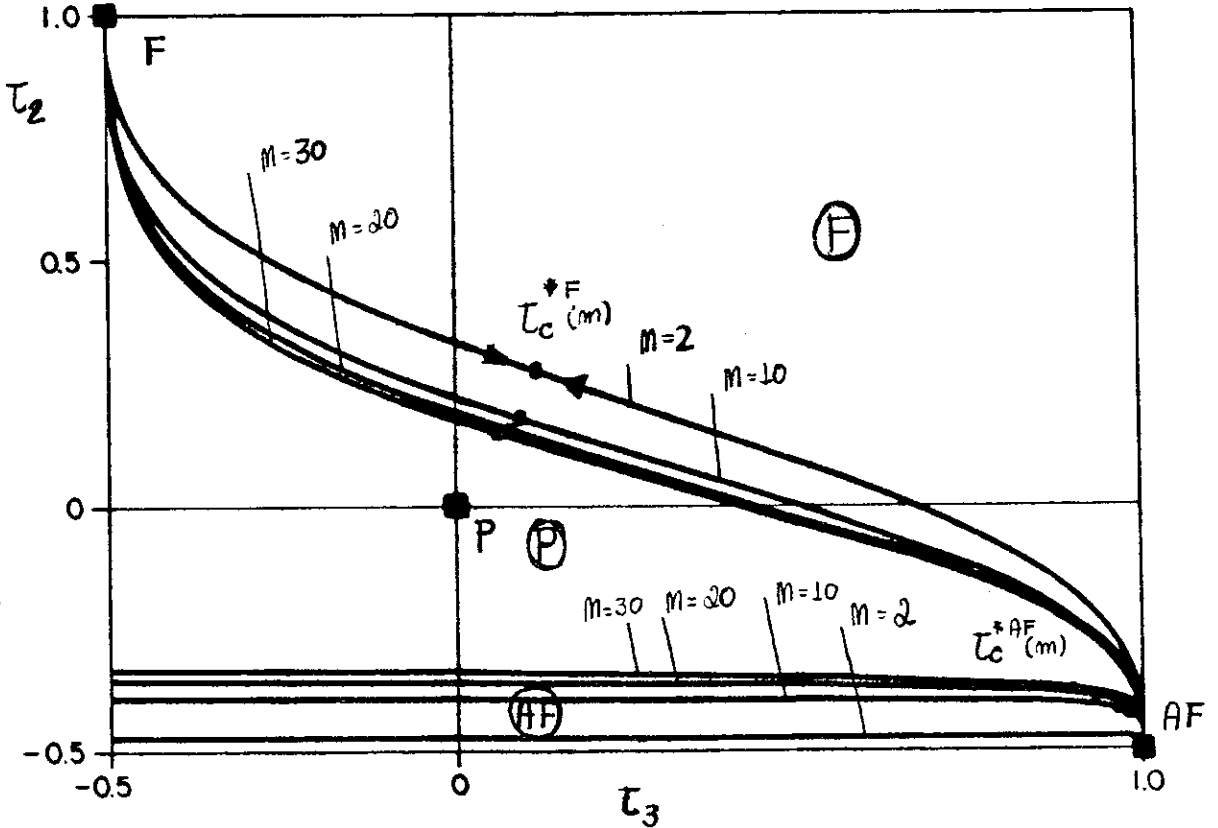


Figura 5.5.2.1-Diagrama de fases para o modelo de Potts ($q=3$) no Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$. Os pontos \blacksquare representam os atratores das fases ferro (F), antiferro (AF) e paramagnética (P). Os pontos fixos semi-estáveis que controlam as fronteiras críticas F-P e AF-P são representados por \circ .

No limite em que o número de folhas $m \rightarrow 1$ os pontos fixos semi-estáveis ($t_c^*F(m)$ e $t_c^*AF(m)$) das fronteiras críticas ferro (F) e antiferromagnética (AF) se colapsam em seus respectivos atratores, e estas fronteiras tendem aos eixos ($t_2=1$ U $t_3=1$) e $t_2 = -1/2$, respectivamente

(vide fig. 5.5.2.1); ou seja, a rede torna-se finitamente ramificada e existe, portanto, apenas a fase paramagnética (P) para $T \neq 0$. Observe que para $m=1$, diferentemente do caso $q=2$ (onde devido à frustação não existe ordem AF nem à temperatura nula), o modelo de Potts com $q=3$ estados se ordena antiferromagneticamente a $T = 0$ com um estado fundamental não degenerado e sem nenhuma ligação frustada. Por outro lado, quanto maior m , maior é a região definida pelas fases ordenadas, (tal como ocorreu em $q=2$) mostrando que o aumento da conectividade fortalece as correlações, favorecendo portanto, um maior ordenamento entre os spins.

Ilustramos na fig.5.5.2.2 o diagrama de fase com os fluxos para o caso $m=2$.

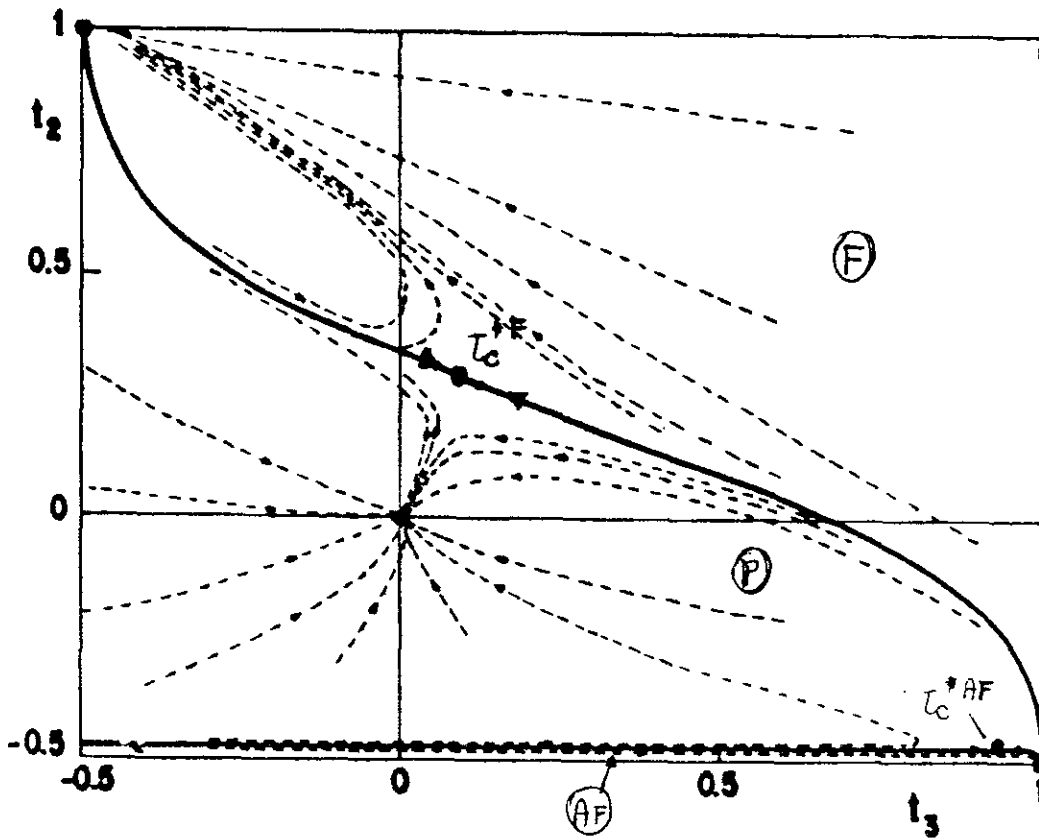


Figura 5.5.2.2 - Diagrama de fases para o modelo de Potts ($q=3$) no Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$ para $m=2$. Os pontos \blacksquare e \circ representam os respectivos atratores das fases e pontos fixos semi-estáveis que controlam as transições F-P e AF-P. As setas indicam o sentido do fluxo sob sucessivas iterações da transformação de renormalização.

5.5.3 - Modelo de Potts (q=4)

Para este caso os pesos de Boltzmann ($W_F^{(m)}, W_I^{(m)}$ e $W_{AF}^{(m)}$) para os grafos com $b=4$ e $b'=1$ usando o Hamiltoniano com interações a 2(dois) e 3(três) spins (vide eq.(5.3.1)) são dados por

$$W_F^{(m)} \equiv W_m(1,1,1) = (360)^m [1 + f_F(q=4, X, Y)]^m \quad (5.5.3.1a)$$

$$W_I^{(m)} \equiv W_m(1,1,2) = (456)^m [1 + f_I(q=4, X, Y)]^m \quad (5.5.3.1b)$$

$$W_{AF}^{(m)} \equiv W_m(1,1,2) = (616)^m [1 + f_{AF}(q=4, X, Y)]^m \quad (5.5.3.1c)$$

$$(X \equiv e^{K_2}, Y \equiv e^{K_3})$$

$$W'_F \equiv W'_1(1,1,1) = X'^3 Y' \quad (X' \equiv e^{K'_2}, Y' \equiv e^{K'_3}) \quad (5.5.3.1d)$$

$$W'_I \equiv W'_1(1,1,2) = X' \quad (5.5.3.1e)$$

$$W'_{AF} \equiv W'_1(1,2,3) = 1 \quad (5.5.3.1f)$$

onde

$$f_F(q=4, X, Y) = (1/360)[8064X + \dots + X^{30}Y^{10}] \quad (5.5.3.2a)$$

$$f_I(q=4, X, Y) = (1/456)[8928X + \dots + X^{28}Y^9] \quad (5.5.3.2b)$$

$$f_{AF}(q=4, X, Y) = (1/616)[9168X + \dots + 3X^{26}Y^8] \quad (5.5.3.2c)$$

As expressões completas dos pesos de Boltzmann $W_F^{(1)}$, $W_I^{(1)}$ e $W_{AF}^{(1)}$ estão no Apêndice D.

De forma análoga ao caso ($q=3$) (seção 5.5.2) temos que a transformação de grupo de renormalização (eqs.(4.8.1)) é escrita como

$$\frac{(360)^m [1+f_F(q=4, X, Y)]^m}{(616)^m [1+f_{AF}(q=4, X, Y)]^m} = \frac{X'^3 Y'}{1} \quad (5.5.3.3a)$$

$$\frac{(456)^m [1+f_I(q=4, X, Y)]^m}{(616)^m [1+f_{AF}(q=4, X, Y)]^m} = \frac{X'}{1} \quad (5.5.3.3b)$$

Vale notar da equação acima que

$$\beta \varepsilon_F = 0 \quad g_F = (360)^m \quad \beta \varepsilon'_F = -3K'_2 - K'_3 \quad g'_F = 1 \quad (5.5.3.4a)$$

$$\beta \varepsilon_I = 0 \quad g_I = (456)^m \quad \beta \varepsilon'_I = -K'_2 \quad g'_I = 1 \quad (5.5.3.4b)$$

$$\beta \varepsilon_{AF} = 0 \quad g_{AF} = (616)^m \quad \beta \varepsilon'_{AF} = 0 \quad g'_{AF} = 1 \quad (5.5.3.4c)$$

Quando $J_2 < 0$ e $0 < J_3 < -3J_2$ temos que o estado fundamental do modelo a $T = 0$ é do tipo AF no grafo $b=4$ com m folhas (pois, apesar de $\varepsilon_F = \varepsilon_I = \varepsilon_{AF} = 0$, $g_{AF} > g_I > g_F$), assim como no grafo $b'=1$ (pois, nestas condições temos que $\varepsilon'_{AF} < \varepsilon'_F$ e $\varepsilon'_{AF} < \varepsilon'_I$). Assim como no modelo de Ising (vide seção 5.5.1), este caso é um exemplo semelhante do caso (c1) discutido na seção 4.7.

Das expressões dos $f_i(q=4, X, Y)$ e da eq.(5.5.3.2) temos, para $T=0$, $J_2, J_3 < 0$ e $J_2 < 0$, $0 < J_3 < -3J_2$ (ou seja, $X=Y=0$ e $X=0, Y=\infty$) que

$$X' = \left(\frac{456}{616} \right)^m < 1 \quad \forall m \text{ finito} \quad (5.5.3.5a)$$

$$Y' = \left(\frac{360 (616)^2}{456^2} \right)^m > 1 \quad \forall m \quad (5.5.3.5b)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} K_2' &< 0 \text{ e finito} \\ K_3' &> 0 \text{ e finito} \end{aligned} \quad (\text{para } m \text{ finito})$$

O diagrama de fases e os fluxos para este modelo nas variáveis t_2 e t_3 (vide eqs.(5.5.2.5)) está ilustrado, para $m=2$ na fig. 5.5.3.1. O ponto $(t_2, t_3)=(-1/3, 1)$ é o atrator da fase ferromagnética (F) que existe $\forall m > 1$, e o ponto $(t_2, t_3)=(0, 0)$ é o atrator da fase paramagnética (P). A fronteira crítica F-P tangencia o eixo $t_3=-1/3$ e termina em seu respectivo atrator $(t_2, t_3)=(-1/3, 1)$. Quando $m \rightarrow 1$ (limite para o qual o fractal torna-se finitamente ramificado), a mesma tende aos eixos $t_2=1 \cup t_3=1$ e o ponto fixo semi-estável $(t_c^{*F}(m))$ que governa a fase ferro se colapsa com o atrator (■) restando apenas a fase paramagnética para $T \neq 0$ (de forma análoga ao caso ferromagnético $q=3$).

A fase antiferromagnética é do mesmo tipo que no caso $q=2$. Devido a efeitos de degenerescência do estado fundamental antiferromagnético, como discutido na seção 5.5.1, o atrator (quando existe) encontra-se a $T \neq 0$. Ilustramos na fig. 5.5.3.2 o diagrama de fases com os fluxos deste modelo para $m=20$. A fase antiferromagnética com atrator a $T \neq 0$

(AF) surge para $m > m_c \cong 17.6$; abaixo deste valor existe apenas as fases ferromagnética (F) e paramagnética (P) (como ilustrado na fig. 5.5.3.1). Ilustramos na fig. 5.5.3.3 a evolução com m dos pontos fixos semi-estável ($t_c^{*AF}(m)$) que controla a fronteira P-AF e do atrator ($t_{AF}^*(m)$) da fase antiferro deste modelo. De forma análoga ao caso $q=2$, para $m = m_c \cong 17.6$ os pontos fixos semi-estável e o atrator se colapsam no ponto fixo marginal ($M^* = M_c$). No limite $m \rightarrow \infty$ (e, portanto, $D_f(m) \rightarrow \infty$) o atrator à temperatura finita tende a $T = 0$ ($t_{AF}^* = (t_2, t_3) = (-1/3, 1)$) (vide fig. 5.5.3.3).

Tabela 5.5.3.1 - Valores dos pontos críticos semi-estáveis para a fase ferromagnética do modelo de Potts ($q=4$) no fractal Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$.

m	$t_c^{*F} \equiv (t_3, t_2)$
2	(0.0730, 0.2526)
3	(0.0995, 0.2077)
4	(0.1003, 0.1914)
5	(0.0959, 0.1830)
6	(0.0905, 0.1777)
7	(0.0851, 0.1741)
8	(0.0801, 0.1713)
9	(0.0755, 0.1691)
10	(0.0714, 0.1672)
11	(0.0676, 0.1656)
12	(0.0642, 0.1642)
13	(0.0612, 0.1629)
14	(0.0584, 0.1617)
15	(0.0558, 0.1606)
16	(0.0534, 0.1595)
17	(0.0513, 0.1586)
18	(0.0493, 0.1576)
19	(0.0474, 0.1568)
20	(0.0457, 0.1559)

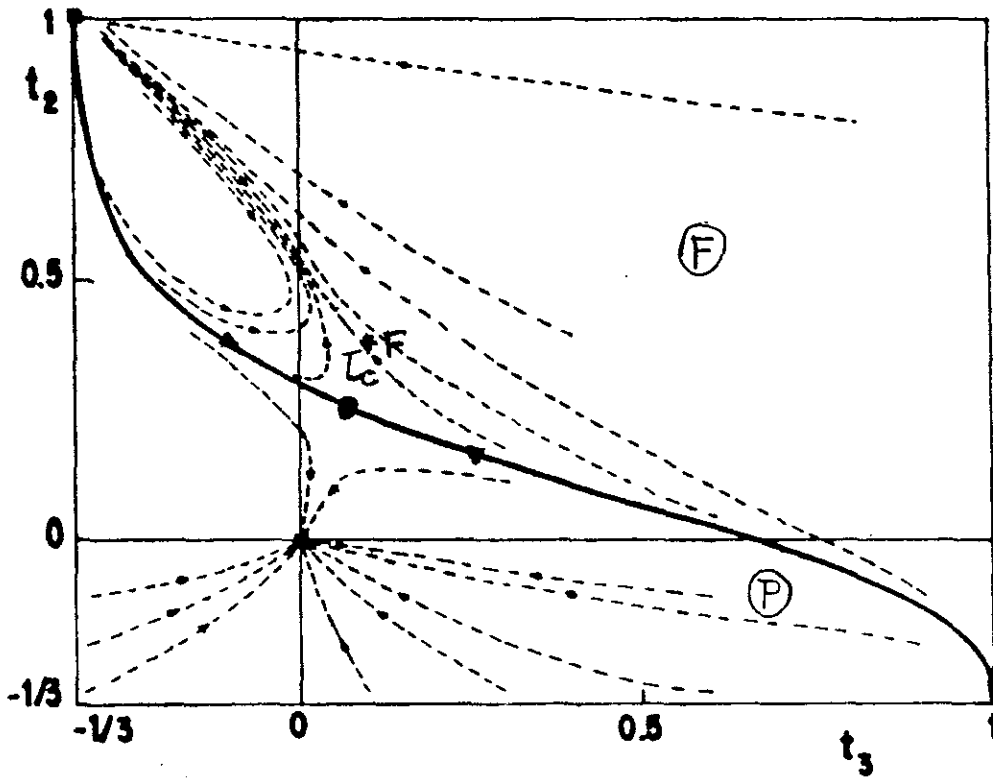
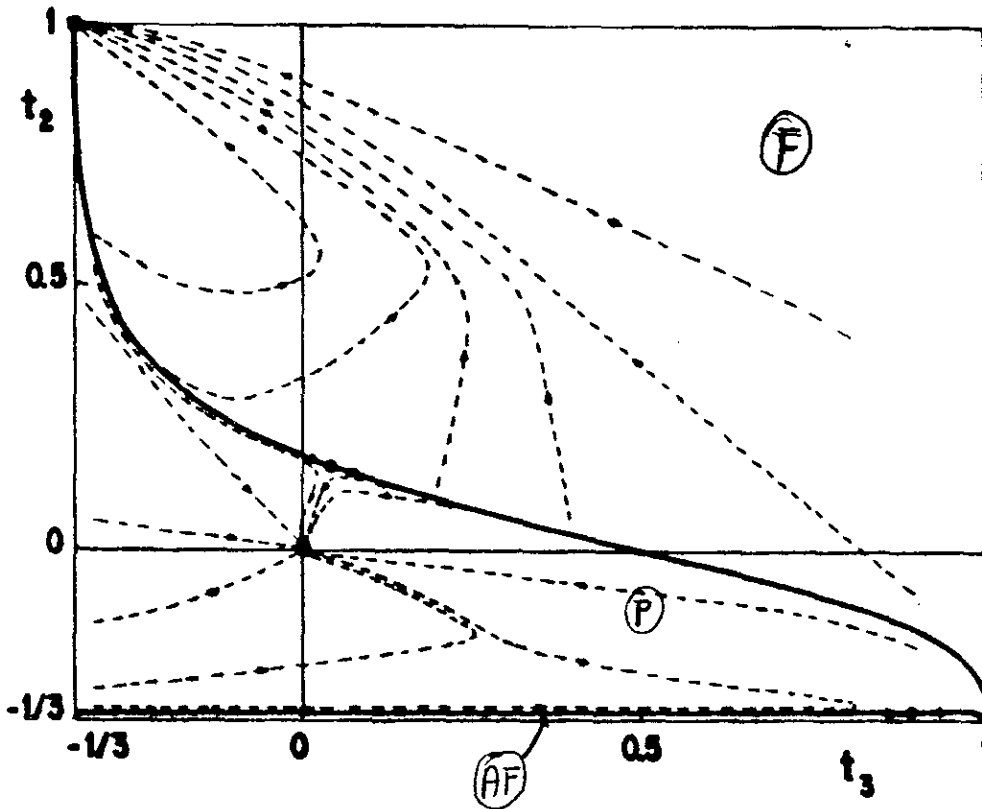
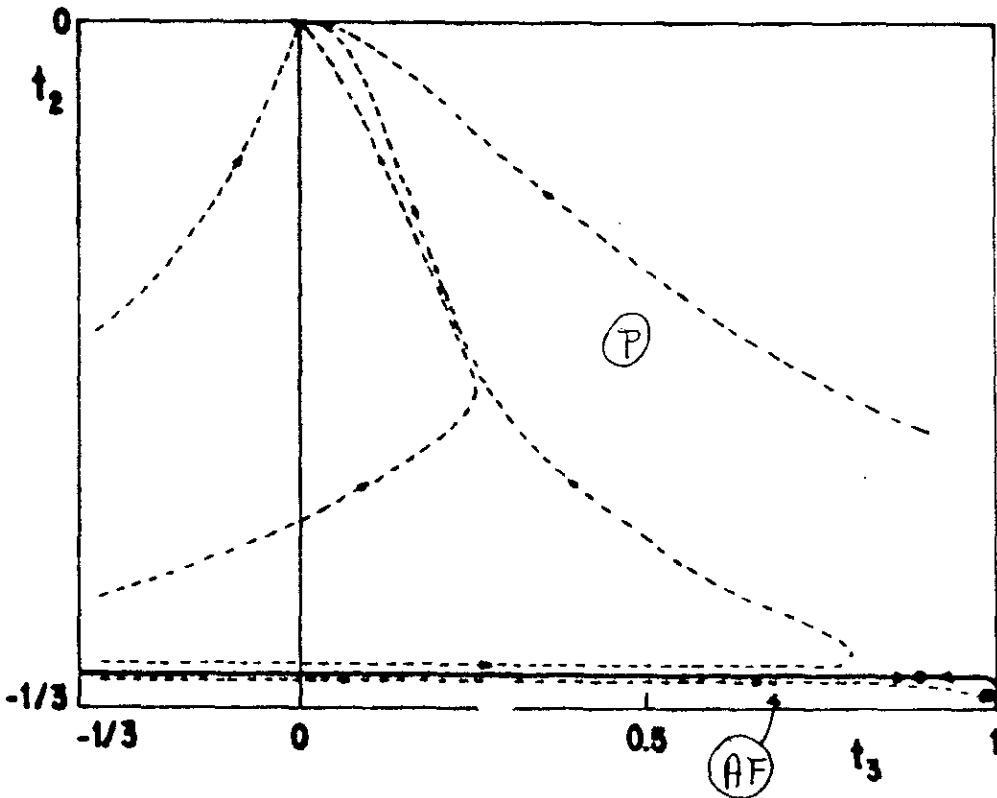


Figura 5.5.3.1 - Diagrama de fases para o modelo de Potts ($q=4$) no Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$ para $m=2$. Os pontos \blacksquare e \circ representam os respectivos atratores das fases ferro (F) e paramagnética (P) e o ponto fixo semi-estável que controla a fronteira F-P. Observamos que não há fase AF para $m=2$. As setas indicam o sentido dos fluxos

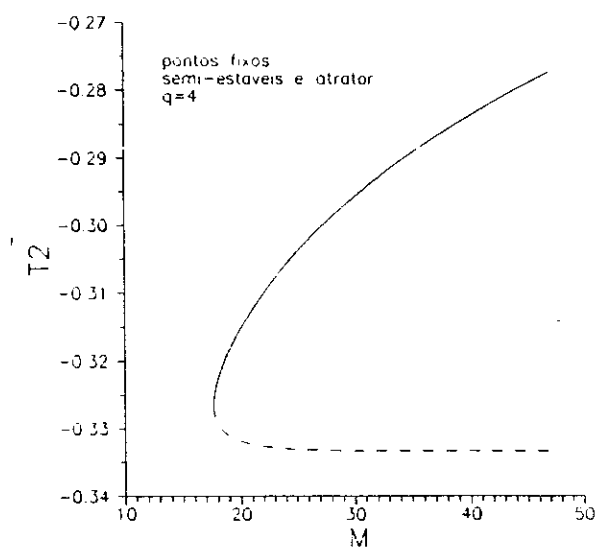


(a)



(b)

Figura 5.5.3.2 - Diagrama de fases e fluxos para o modelo de Potts $q=4$ no Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$ para $m=20$. As setas indicam o sentido dos fluxos em sucessivas iterações da transformação de renormalização. (b) ampliação da região $(-1/3 < t_2 < 0, -1/3 < t_3 < 1)$ da figura (a).



(a)

(b)

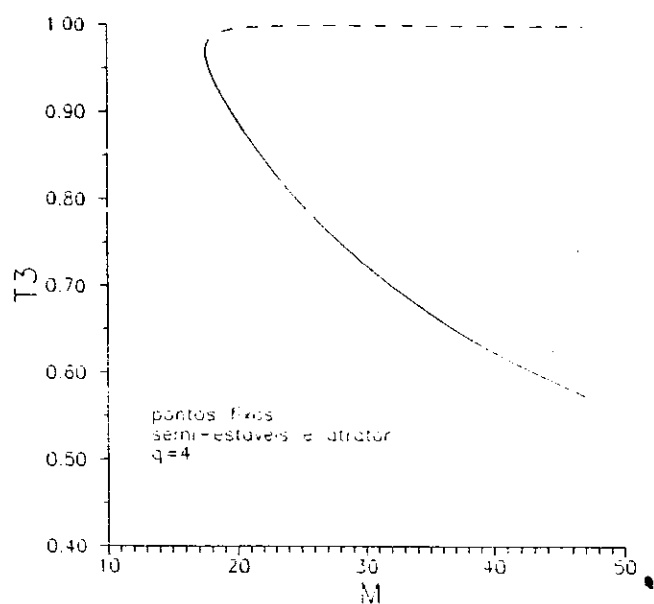


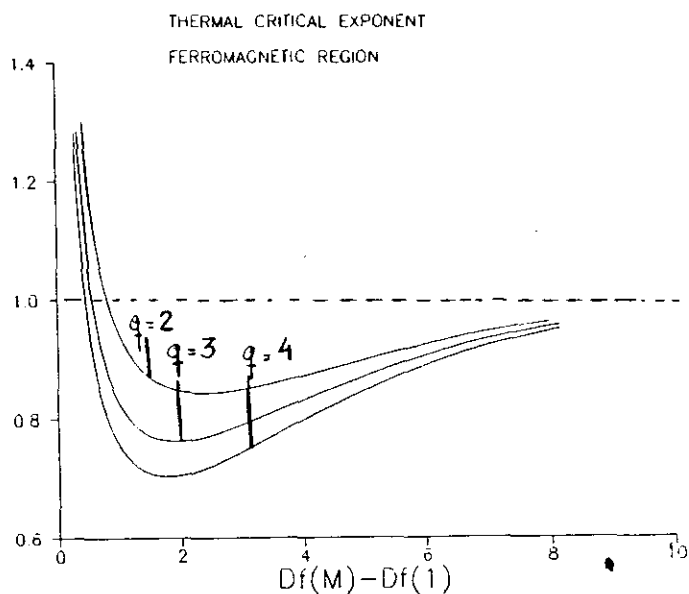
Figura 5.5.3.3 - Variação com m do ponto fixo semi-estável $t_c^{*AF}(m)$ (linha cheia) e do atrator $t_{AF}^*(m)$ (linha tracejada) da fase antiferromagnética do modelo de Potts ($q=4$) no fractal Sierpinski-Gasket $G(4, d=2, m)$: (a) na variável t_2 (b) na variável t_3

5.5.4 - Expoente Crítico Térmico ν_T para $q=2,3$ e 4

O expoente crítico térmico ν_T é obtido linearizando as equações de renormalização (eqs. (5.5.1.3), (5.5.2.3) e (5.5.3.3) para os casos $q=2,3$ e 4 , respectivamente) em torno dos pontos fixos semi-estáveis. Conforme vimos na seção 3.2 a partir do autovalor relevante ($\lambda_s^T > 1$) associado à matriz Jacobiana da transformação de renormalização obtemos o expoente crítico ν_T dado por

$$\nu_T = \ln (b/b') / \ln \lambda_s^T \quad (5.5.4.1)$$

Ilustramos na fig. 5.5.4.1 os comportamentos de ν_T^F e ν_T^{AF} , que controlam as transições P-F e P-AF, respectivamente em função da dimensão fractal $D_f(m)$.



(b)

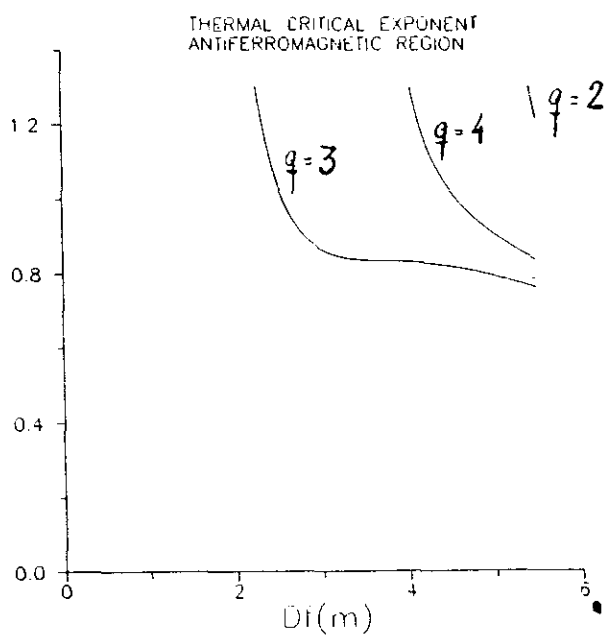


Figura 5.5.4.1 - Expoentes críticos térmicos (ν_T^F) e (ν_T^{AF}) para o modelo de Potts $q=2,3$ e 4 no fractal Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m)$ para a transformação de renormalização $b=4$ em $b'=1$. (a) comportamento de ν_T^F . (b) comportamento de ν_T^{AF} .

Isto se deve ao fato de que quanto menor o número de estados (q) do modelo maior é o tamanho da ilha finita (comprimento de correlação) formada de spins num mesmo estado. Isto ocorre porque quanto menor q maior é a probabilidade que spins vizinhos estejam no mesmo estado. Como consequência, ao aproximarmos de T_c a divergência da mesma (ou seja, $\xi \sim (T-T_c)^{-\nu_T}$) será mais rápida quanto menor q o que implica na eq. (5.5.4.4).

Para $m \rightarrow \infty$ obtemos, numericamente, que:

$$\lambda_s^T \sim 4 + C(q) m^{-\alpha(q)} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (5.5.4.5)$$

o que implica da eq. (5.5.4.1), num comportamento assintótico semelhante ao encontrado na seção 5.4.1 ($q=2$ e $b=2$), qual seja:

$$\nu_T \sim 1 - a(q) m^{-\alpha(q)} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (5.5.5.6)$$

onde $a(q) = C(q) / (4 \ln 4)$. Os valores de $a(q)$ e $\alpha(q)$, para q fixo, foram obtidos através da regressão linear do gráfico de $\ln(\lambda(q)-4)$ versus $\ln m$ para m variando entre 2.0×10^4 a 1.0×10^5 . Obtivemos então os seguintes valores aproximados:

$$a(2) \cong 0.52 \qquad \alpha(2) \cong 0.08 \qquad (5.5.4.7a)$$

$$a(3) \cong 0.66 \qquad \alpha(3) \cong 0.09 \qquad (5.5.4.7b)$$

$$a(4) \cong 0.87 \qquad \alpha(4) \cong 0.11 \qquad (5.5.4.7c)$$

Este mesmo limite de ν_T , ($\nu_T \rightarrow 1 \forall q$ ($m \rightarrow \infty$)), foi também obtido para este modelo em redes hierárquicas tipo Migdal-Kadanoff [42] quando a dimensão fractal tende a infinito, que não corresponde ao resultado exato [68]

$$\nu_T = 1/2 \qquad (d \rightarrow \infty) \qquad (5.5.4.8)$$

para redes hipercúbicas.

Para a fase a transição PARA-ANTIFERROMAGNÉTICA obtivemos o seguinte comportamento para ν_T^{AF} .

i) No caso $q=3$ o expoente ν_T^{AF} diverge como:

$$\nu_T \sim 1 / (D_f(m) - D_f(1)) \qquad (m \rightarrow 1) \qquad (5.5.4.9)$$

ii) Nos casos $q=2$ e 4 , onde o valor crítico $m_c(q) > 1$ (abaixo do qual não existe transição de fase), obtivemos, numericamente que:

$$\lambda_s^T \sim 1 + d(q) (m - m_c(q))^{\theta(q)} \qquad (5.5.4.10)$$

(quando $m \rightarrow m_c$)

onde, através de regressão linear do gráfico $\ln(\lambda_s^T - 1)$ versus $\ln(m - m_c(q))$, obtivemos $d(2) \cong 0.198$, $d(4) \cong 0.63$. Usando a aproximação $\ln(1 + X) \sim X$ (para $X \ll 1$) e as eqs, (5.5.4.1) e (5.5.4.10) resulta que:

$$\nu_T^{\text{AF}} \sim D(q) (m - m_c(q))^{-\theta(q)} \quad (5.5.4.11)$$

(quando $m \rightarrow m_c$)

onde $D(q) = \ln 4 / d(q)$ e

$$m_c(2) \cong 115.57 \quad D(2) \cong 7.00, \quad \theta(2) \cong 0.494$$

$$m_c(4) \cong 17.63, \quad D(4) \cong 2.20 \quad \theta(4) \cong 0.511$$

CONCLUSÕES

Neste trabalho propomos um critério, dentro do contexto de GRER, para a escolha de células convenientes no estudo de antiferromagnetos de Potts com q estados em sistemas que sejam aproximados por redes hierárquicas com duas raízes (A e B) (ou definidos diretamente sobre estas redes). No caso $q=2$ este critério é válido também para 3 raízes (A, B e C). Fazendo uma análise das energias das configurações de mais baixa energia deste modelo nos grafos não-renormalizado (ϵ_F e ϵ_I) e renormalizado (ϵ_F' e ϵ_I') (ϵ_F, ϵ_F' e ϵ_I, ϵ_I' são tais que os spins σ_A, σ_B (e σ_C , no caso de redes com 3 raízes) localizados nas raízes da rede hierárquica estão nos estados tipo F (todos os σ_i iguais $i=A, B$ e C) e tipo I (onde um dos σ_i é diferente dos outros $i=A, B, C$)) mostramos, usando uma transformação de Grupo de Renormalização (GR) baseada na preservação da função de correlação entre dois spins quaisquer das raízes, que uma condição necessária para que tal GR apresente resultados confiáveis (isto é, produza fluxos que não apresentem "saltos" que gerem bacias atratoras descontínuas) é que o estado fundamental deste modelo seja gerado pela mesma configuração de spin (tipo F ou I) das raízes A, B (e C) em ambas os grafos. Usando uma transformação de GR (que envolve 1 único parâmetro) em termos dos pesos de Boltzmann, nas quais as energias ϵ_F e

ϵ_I , ϵ_F e ϵ_I' aparecem naturalmente, provamos que esta transformação de GR é equivalente ($\forall q$ no caso de redes com 2 raízes e, para $q=2$, em redes com 3 raízes) a preservar a função de correlação entre qualquer par de spins localizados nas raízes da rede hierárquica. Fazemos uma análise desta transformação (para o caso antiferromagnético) à temperatura nula para todos os casos possíveis ($\epsilon_F > \epsilon_I$, $\epsilon_F' > \epsilon_I'$). Quando $\epsilon_F = \epsilon_I$, dizemos que o estado fundamental do grafo é do tipo F (do tipo I) se a degenerescência g_F (g_I) da configuração tipo F (do tipo I) for maior que a do tipo I (do tipo F). Se neste caso ($\epsilon_F = \epsilon_I$), os estados fundamentais dos grafos não-renormalizado e renormalizado são do mesmo tipo (F ou I), é possível o surgimento de uma fase antiferromagnética não usual cujo atrator encontra-se à temperatura finita. Para esta fase mostramos, para o modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m)$, que a função de correlação entre pares de spins nas raízes decai com uma lei de potência da distância química entre as raízes consideradas.

Estendemos esta transformação de GR para o modelo de Potts com 2 parâmetros (interações a dois (K_2) e três (K_3) spins) em sistemas que envolvam redes hierárquicas com 3 raízes. Neste caso aparece a energia adicional ϵ_{AF} (corresponde ao caso em que σ_A , σ_B e σ_C são diferentes). Verificamos, através de 3 exemplos (o modelo de Potts $q=4$ no Sierpinski-Gasket $G(2, d=2, m)$, o modelo de Potts com $q=3$ e $q=4$ no Sierpinski-Gasket com gerador $G(4, d=2, m)$) que o critério acima sobre a confiabilidade do GR é estendido naturalmente

quando temos mais de 2 tipos de configurações.

Estudamos também o modelo de Potts ferro e antiferromagnético com $q=2,3$ e 4 estados com interações a 2 e 3 spins (para $q=2$ estudamos apenas com interações entre 2 spins primeiros vizinhos) na família de fractais Sierpinski-Gasket com m folhas para diversos geradores $G(b,d=2,m)$. Esta família de estruturas apresenta ordem de ramificação (R) infinita para $m > 1$, o que permite a existência de transição de fase à $T_c \neq 0$. Utilizando a transformação de Grupo de Renormalização com 1 (no caso $q=2$) e 2 (no caso $q=3$ e 4) parâmetros que preserva as razões entre as probabilidades dos spins σ_A, σ_B e σ_C estarem nos estados tipo F, I e AF, estudamos o comportamento crítico dos sistemas acima para diferentes renormalizações. Nossos resultados são exatos para o caso antiferromagnético deste modelo e acreditamos, baseados na discussão acima, que sejam também exatos para o caso antiferromagnético nos fractais com gerador $G(4,d=2,m)$ e também, para $q=2$, com gerador $G(2,d=2,m=2)$ para a transformação de GR $b=4$ em $b'=2$. Neste último caso, a motivação de aumentar a célula para efeitos de renormalização foi de preservar a configuração que gera o estado fundamental do modelo. Verificamos que (diferentemente da renormalização $b=2$ em $b'=1$ onde o estado fundamental é do tipo F e I nas células $b=2$ e $b'=1$, respectivamente) a configuração é do tipo F na célula $b=4$ assim como em $b'=2$. O diagrama de fases obtido para o caso $m=2$ é confiável (isto é, o fluxo das sucessivas iterações de GR não apresenta "grandes saltos" e as bacias atratoras ferro e

devido ao fato da ordem de ramificação ser finita ($R = 4$) há ordenamento apenas à $T = 0$ em ambas as fases (F) e antiferromagnéticas (AF). Para $m > 1$ existe transição de fase $F-P$ e $AF-P$ à $T_c \neq 0$ e ao aumentarmos m (e, conseqüentemente $D_f(m)$) as fases ordenadas aumentam, mostrando que um aumento da conectividade favorece o ordenamento dos spins. Observamos que as fronteiras críticas das fases ordenadas terminam em seus respectivos atratores. Este comportamento é não-usual e foi verificado, em nosso conhecimento, apenas para o modelo de Ising com interações a primeiros e segundos vizinhos na rede quadrada (vide de Oliveira [5]).

c) Caso $q=4$

O caso antiferromagnético deste modelo é um exemplo de um sistema degenerado onde as energias das configurações de mais baixa energia (ϵ_F, ϵ_I e ϵ_{AF}) são todas iguais a zero. Para $m=1$ ocorre ordenamento ferromagnético apenas a $T = 0$ (análogo ao caso $q=3$). Para $1 < m < m_c$ apenas as fases ferro (F) e paramagnética (P) existem e, quando $m > m_c$, surge a fase antiferromagnética (AF) não usual com atrator à temperatura finita, que tende a temperatura zero quando $m \gg m_c$.

Calculamos em todos os casos ($q=2,3$ e 4) os expoentes críticos térmicos ν_T^F e ν_T^{AF} para as transições $F-P$ e $AF-P$, respectivamente.

Como perspectivas deste trabalho podemos citar:

- 1) Mostrar a equivalência da transformação da transformação de grupo de Renormalização com 2 parâmetros (K_2 e K_3) (eq.(4.8.1)) com a preservação das funções de correlação entre dois e três spins das raízes (A,B e C) de uma rede hierárquica com 3 raízes (por exemplo, fractais tipo Sierpinski-gasket) e calcular os comportamentos das mesmas na fase antiferromagnética com atrator à $T \neq 0$ para o modelo de Potts com $q=4$ estados no fractal Sierpinski-Gasket $G(4,d=2,m \geq 18)$.

- 2) Estudar a criticalidade do modelo de Ising no fractal Sierpinski-Gasket com gerador $G(4,d=2,m)$ submetido a um campo magnético externo. Neste caso para que o espaço de parâmetros seja fechado por renormalização é necessário incluir também interações entre 3 spins (K_3). Vários autores (vide referência [43] e referências internas) tem utilizado empiricamente um campo magnético proporcional ao número de coordenação z em redes hierárquicas devido à inomogeneidade destas. Têm sido verificado que a aplicação de um campo constante nestas redes gera uma série de resultados inconsistentes, mas o estabelecimento do correto campo conjugado ao parâmetro de ordem w uma questão ainda não resolvida na literatura.

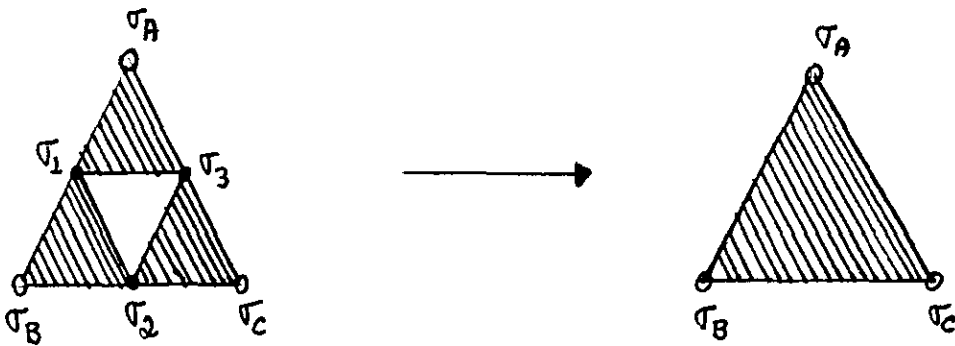
- 3) Calcular outras grandezas termodinâmicas tais como a energia livre, entropia, calor específico, utilizando um

procedimento análogo ao proposto por Stinchcombe [45].

4) Recentemente [54] tem sido calculado exatamente (sem introduzir campo magnético externo) a magnetização local e média do modelo de Ising ferromagnético na rede hierárquica diamante, constando-se o caráter multifractal desta grandeza. Seria interessante estender o método utilizado em [54] para redes hierárquicas com 3 raízes e depois aplicá-lo para os fractais do tipo Sierpinski-Gasket. Isto permitiria verificar (ou não) a multifractalidade da magnetização nestes sistemas, bem como calcular o expoente crítico β .

APÊNDICE A

Prova de que o sub espaço gerado pelo parâmetro K_2 é fechado sob renormalização para $q=2$ em células do tipo triangular



Usando a identidade,

$$\delta(\sigma_i, \sigma_j) = (1/2) * (1 + \sigma_i \sigma_j) \quad (\text{A.1})$$

onde $\sigma_i = \pm 1$ e o Hamiltoniano de Potts com interação a dois spins

$$-\beta H = K_2 \sum_{\langle i, j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad (\text{A.2})$$

temos que o peso de Boltzmann de 1 folha, $W_1(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C)$, para o grafo G com 3 raízes Sierpinski-Gasket ($b=2$) é dado por:

$$W_1(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C) = \text{Tr}_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}} \text{Exp} [(9/2)K_2 (\sigma_A \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_A + \sigma_1 \sigma_B + \sigma_B \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_C + \sigma_C \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2)] \tag{A.3}$$

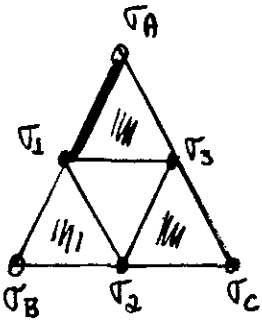
onde σ_i ($i=1,2,3,A,B$ ou C) são os spins em cada sitio da rede. Usando também a identidade,

$$e^{K_2 \sigma_i \sigma_j} = X1 * [1 + X2 \sigma_i \sigma_j] \quad \begin{matrix} X1 \equiv \cosh(K_2) \\ X2 \equiv \tanh(K_2) \end{matrix} \tag{A.4}$$

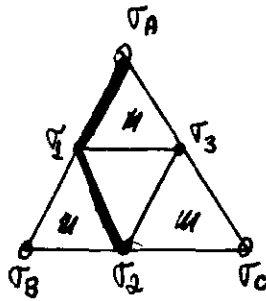
temos que,

$$\begin{aligned} W_1(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C) &= \text{Tr}_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}} X1^9 e^{(9/2)K_2} [1 + X2 \sigma_A \sigma_1][1 + X2 \sigma_1 \sigma_3] \\ &\quad [1 + X2 \sigma_3 \sigma_A][1 + X2 \sigma_1 \sigma_B] \\ &\quad [1 + X2 \sigma_B \sigma_2][1 + X2 \sigma_2 \sigma_1] \\ &\quad [1 + X2 \sigma_2 \sigma_C][1 + X2 \sigma_C \sigma_3] \\ &\quad [1 + X2 \sigma_3 \sigma_2] \\ &= \text{Tr}_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}} X1^9 e^{(9/2)K_2} \{ 1 + X2 [\sigma_A (\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_B (\sigma_1 + \sigma_2) \\ &\quad \sigma_C (\sigma_2 + \sigma_3) + \sum_{\substack{i, j=1 \\ j > i}}^3 \sigma_i \sigma_j] + X2^2 [\text{termos} \\ &\quad \text{tipo } \sigma_A \sigma_i^2 \sigma_B + \sigma_A \sigma_i^2 \sigma_j + \sigma_A \sigma_i \sigma_j \sigma_i + \text{etc.}] + X2^3 [\text{termos} \\ &\quad \text{tipo } \sigma_A \sigma_i^2 \sigma_j^2 \sigma_i + \text{etc.}] + \dots \} \end{aligned} \tag{A.5}$$

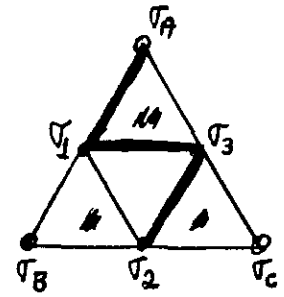
Cada termos em X_2^n dentro do colchete $\{ \}$ pode ser representado por um subgrafo de G com n lados. Por exemplo:



$$X_2 \sigma_A \sigma_i$$



$$X_2^2 \sigma_A \sigma_i^2 \sigma_j$$

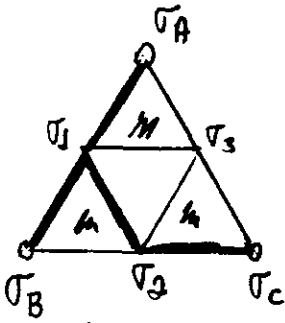


$$X_2^3 \sigma_A \sigma_i^2 \sigma_j^2 \sigma_c$$

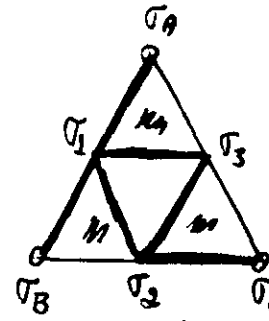
O expoente de cada σ_i ($i = 1, 2, 3, A, B, C$) é igual ao número de coordenação do sítio i no subgrafo considerado. Usando o fato de que $\sigma_i^2 = 1$ ($\forall i$) e de que $\sum_{i=1}^6 \sigma_i = 0$, ao

efetuarmos o traço temos que:

- i) todos os termos em X_2 somem pois dependem explicitamente de σ_i ($i=1, 2, 3$);
- ii) apenas termos do tipo $\sigma_A \sigma_B$ sobrevivem em X_2^2 (o 2° e o 3° desaparecem por dependerem de σ_i , $i=1, 2, 3$);
- iii) termos do tipo $\sigma_A \sigma_B \sigma_C$ não contribuem, pois, as possíveis configurações que os gerariam contem pelo menos um termo de grau ímpar em σ_j ($j=1, 2, 3$). Por exemplo:



$$\chi_2^4 \sigma_A \sigma_1^2 \sigma_B \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_C$$

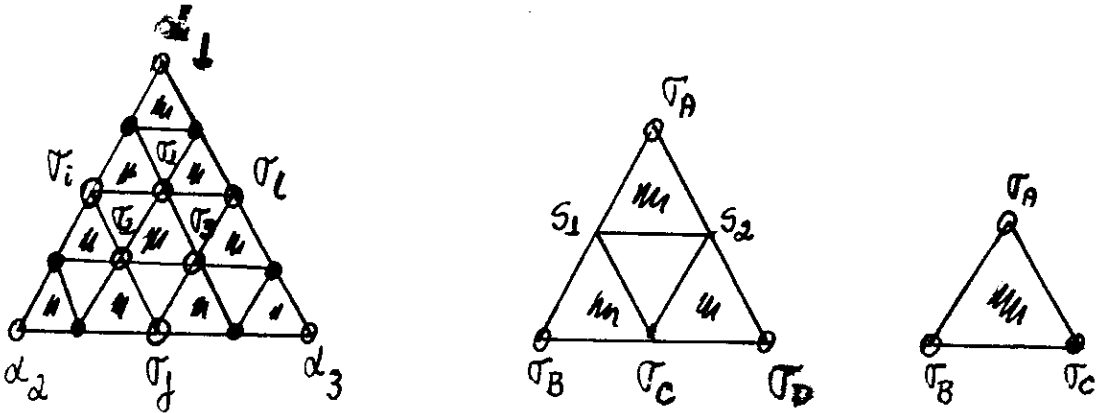


$$\chi_2^6 \sigma_A \sigma_1^4 \sigma_B \sigma_2^3 \sigma_C \sigma_3^2$$

Assim sendo, devido à topologia do grafo considerado ser tal que não contém nenhum subgrafo cujos vértices incluem $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ e pelo menos um σ_i ($i=1,2,3$) onde os números de coordenação de todos os σ_i sejam pares, segue-se então que apenas interações entre dois spins, $\sigma_i \sigma_j$ ($i,j = A,B,C$), são preservadas no traço, o que mostra a invariância do subespaço de parâmetros K_2 (para $q=2$) por renormalização. O mesmo resultado se obtém para qualquer célula da família ($b=3,4,\dots$) e para qualquer número de folhas.

APÊNDICE B

Obtenção dos pesos de Boltzmann $W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ para $b=4$
a partir dos pesos de $b=2$ e $b=1$



Podemos escrever o peso de Boltzmann de 1 folha, $W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, do grafo $b=4$ como

$$\begin{aligned}
 W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = & \sum_{\{\sigma_1, \sigma_j, \sigma_1\}} \sum_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}} \bar{W}(\alpha_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1) \bar{W}(\alpha_2, \sigma_j, \sigma_2, \sigma_1) \\
 & \bar{W}(\alpha_3, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_j) W(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\
 & (\sigma_1, \sigma_j, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 1, 2, \dots, q) \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

onde $\bar{W}(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D) = W(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C)$, os pesos de Boltzmann dos grafos $b=2$ e $b=1$ respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} \bar{W}(\alpha_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1) = & \text{Tr} \quad \{ X^{**} [\delta(\sigma_A, S_1) + \delta(S_1 + S_2) + \delta(\sigma_A, S_1) + \\ & \{ S_1, S_2 \} \\ & \delta(S_1, \sigma_B) + \delta(\sigma_B, \sigma_C) + \delta(S_1, \sigma_C) + \\ & \delta(\sigma_C, \sigma_D) + \delta(\sigma_D, S_2) + \delta(S_2, \sigma_C) +]^* \\ & Y^{**} [\delta(\sigma_A, S_1, S_2) + \delta(\sigma_B, \sigma_C, S_1) + \delta(\sigma_C, \sigma_D, S_2)] \} \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} W(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C) = & X^{**} [\delta(\sigma_A, \sigma_B) + \delta(\sigma_B, \sigma_C) + \delta(\sigma_C, \sigma_A)]^* \\ & Y^{**} [\delta(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C)] \end{aligned} \quad (B.3)$$

onde $X \equiv e^{J_2 \beta}$ e $Y \equiv e^{J_3 \beta}$ e $\{S_1, S_2\} = 1, 2, \dots, q$. Logo, conhecendo estes pesos $\forall \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D = 1, 2, \dots, q$ (facilmente obtidos em vista do número reduzido de configurações, q^2 , sobre as quais efetuarmos o traço) podemos obter $W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ efetuando um traço sobre q^6 configurações ($\sigma_1, \sigma_j, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 1, 2, \dots, q$).

Dada a simetria do grafo $b=2$, temos que os vários pesos de Boltzmann, $\bar{W}(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D)$, com diferentes configurações apresentam o mesmo valor, por exemplo:

$$\begin{aligned} \bar{W}(1, 1, \lambda_1, 1) &= \bar{W}(1, \lambda_1, 1, \lambda_1) \quad \lambda_1 = 2, 3, \dots, q \\ \bar{W}(1, 1, \lambda_1, \lambda_j) &= \bar{W}(1, \lambda_1, \lambda_j, 1) \quad \lambda_1, \lambda_j = 2, 3, \dots, q \\ &\quad \lambda_1 \neq \lambda_j \end{aligned}$$

Em particular, temos:

Nº de pesos com o valor

$$P11 = \bar{W}(1,1,1,1) \quad 1 \quad (B.4.1)$$

$$P12 = \bar{W}(1,i,i,i) \quad i=2,3,\dots,q \quad (q-1) \quad (B.4.2)$$

$$P13 = \bar{W}(1,1,1,i) = \bar{W}(1,i,1,1) \quad i=2,3,\dots,q \quad 2(q-1) \quad (B.4.3)$$

$$P14 = \bar{W}(1,i,i,1) = \bar{W}(1,1,i,i) \quad i=2,3,\dots,q \quad 2(q-1) \quad (B.4.4)$$

$$P15 = \bar{W}(1,i,i,j) = \bar{W}(1,j,i,i) \quad i,j=2,3,\dots,q \quad 2(q-1) \quad (B.4.5)$$

$i \neq j$

$$P16 = \bar{W}(1,1,i,1) = \bar{W}(1,i,1,i) \quad i=2,3,\dots,q \quad 2(q-1) \quad (B.4.6)$$

$$P17 = \bar{W}(1,i,j,1) \quad i,j=2,3,\dots,q \quad (q-1) \quad (B.4.7)$$

$$P18 = \bar{W}(1,1,i,j) = \bar{W}(1,j,i,1) \quad i,j=2,3,\dots,q \quad 2(q-1) \quad (B.4.8)$$

$i \neq j$

$$P19 = \bar{W}(1,i,1,j) \quad i,j=2,3,\dots,q \quad (q-1) \quad (B.4.9)$$

$$P110 = \bar{W}(1,i,j,k) \quad i,j,k = 2,3,\dots,q \quad (q-1)(q-2)(q-3) \quad (B.4.10)$$

$i \neq j \neq k, i \neq k$

Total q^3 configurações

ou seja, fixando σ_A , apenas 10 dos q^3 pesos de Boltzmann possíveis são diferentes. Notamos ainda que:

$$P11 = \bar{W}(2,2,2,2) = \bar{W}(3,3,3,3) \quad (B.4.11)$$

$$P12 = \bar{W}(2,i_1,i_1,i_1) = \bar{W}(3,i_2,i_2,i_2) \quad (B.4.12)$$

$$P13 = \bar{W}(2,2,2,i_1) = \bar{W}(3,3,3,i_2) \quad (B.4.13)$$

$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$

$$P110 = \bar{W}(2,i_1,j_1,k_1) = \bar{W}(3,i_2,j_2,k_2) \quad (B.4.20)$$

$i_1, j_1, k_1 = 3, \dots, q$

se

$i_2, j_2, k_2 = 1, 2, 4, \dots, q$

ou seja, para diferentes valores de σ_λ existe um vínculo entre os pesos $\bar{W}(\sigma, \sigma, \sigma, \sigma)$ dado pelas eqs. (B.4.11) - (B.4.20); segue-se então que apenas 10 pesos de Boltzmann do grafo $b=2$ (eqs.(B.4.1) - (B.4.10)) juntamente com os 3 pesos, $W(1,1,1)$, $W(1,1,2)$ e $W(1,2,3)$, do grafo $b=1$ são necessários para o cálculo dos pesos de Boltzmann de uma folha do grafo $b=4$.

APÊNDICE C

Expressões dos pesos de Boltzmann $W_F^{(1)}$, $W_I^{(1)}$ e $W_{AF}^{(1)}$ para a célula $b=4$ no caso $q=3$ para 1 folha

$$W_F^{(1)} = W_1(1,1,1) = \text{WP3B4111}$$

$$W_I^{(1)} = W_1(1,1,2) = \text{WP3B4112}$$

$$W_{AF}^{(1)} = W_1(1,2,3) = \text{WP3B4123}$$

2: WP3B4111:

$$\begin{aligned} & X^2 \cdot (X^{19} \cdot Y^{10} + 13 \cdot X^{24} \cdot Y^8 + 26 \cdot X^{22} \cdot Y^7 + 18 \cdot X^{21} \cdot Y^7 + 204 \cdot X^{20} \cdot Y^6 + 72 \cdot \\ & X^{19} \cdot Y^5 + 43 \cdot X^{18} \cdot Y^6 + 630 \cdot X^{18} \cdot Y^5 + 529 \cdot X^{17} \cdot Y^5 + 330 \cdot X^{16} \cdot Y^5 + 2216 \\ & \cdot X^{15} \cdot Y^4 + 30 \cdot X^{15} \cdot Y^5 + 2880 \cdot X^{15} \cdot Y^4 + 24 \cdot X^{14} \cdot Y^5 + 2354 \cdot X^{14} \cdot Y^4 + \\ & 5735 \cdot X^{14} \cdot Y^3 + 952 \cdot X^{13} \cdot Y^4 + 11092 \cdot X^{13} \cdot Y^3 + 229 \cdot X^{12} \cdot Y^4 + 11256 \cdot X^{12} \\ & \cdot Y^3 + 11545 \cdot X^{12} \cdot Y^2 + 48 \cdot X^{11} \cdot Y^4 + 6050 \cdot X^{11} \cdot Y^3 + 28512 \cdot X^{11} \cdot Y^2 + 2 \cdot \\ & X^{10} \cdot Y^4 + 2110 \cdot X^{10} \cdot Y^3 + 34440 \cdot X^{10} \cdot Y^2 + 15363 \cdot X^{10} \cdot Y + 450 \cdot X^9 \cdot Y^3 + \\ & 23340 \cdot X^9 \cdot Y^2 + 45323 \cdot X^9 \cdot Y + 36 \cdot X^8 \cdot Y^3 + 9220 \cdot X^8 \cdot Y^2 + 64003 \cdot X^8 \cdot Y + \\ & 2215 \cdot X^7 + 2772 \cdot X^7 \cdot Y^2 + 50290 \cdot X^7 \cdot Y + 30720 \cdot X^7 + 546 \cdot X^6 \cdot Y^2 + 26442 \\ & \cdot X^6 \cdot Y + 46206 \cdot X^6 + 48 \cdot X^5 \cdot Y^2 + 9126 \cdot X^5 \cdot Y + 39934 \cdot X^5 + 6 \cdot X^4 \cdot Y^2 + \\ & 2154 \cdot X^4 \cdot Y + 22932 \cdot X^4 + 238 \cdot X^3 \cdot Y + 8329 \cdot X^3 + 24 \cdot X^2 \cdot Y + 2076 \cdot X^2 + \\ & 204 \cdot X + 24) \end{aligned}$$

3: WP3E4112;

$$\begin{aligned}
& 1 \cdot (X^9 + 4X^8 + 2X^8 + 32X^7 + 10X^7 + 3X^7 \\
& + 141X^6 + 106X^6 + 43X^6 + 593X^5 + 2X^5 + \\
& 660X^5 + X^5 + 336X^5 + 2054X^4 + 98X^4 + 3214 \\
& X^4 + 3X^4 + 2393X^3 + 5650X^3 + 300X^3 + \\
& 11432X^3 + 219X^3 + 10842X^3 + 11508X^2 + 40X^2 + \\
& X^4 + 5673X^3 + 29190X^2 + 3X^2 + 2050X^2 + 33905X \\
& X^2 + 15360X^2 + 418X^2 + 22978X^2 + 16104X^2 + \\
& 59X^3 + 10308X^2 + 62910X^2 + 9216X^2 + 2X^2 + 2940X \\
& X^2 + 50950X^2 + 30720X^2 + 540X^2 + 26657X^2 + 16088X^2 \\
& + 44X^2 + 9112X^2 + 40490X^2 + 3X^2 + 1990X^2 + 22615X \\
& X^5 + 260X^4 + 8292X^4 + 17X^3 + 1948X^3 + 286X^2 + 28X^2 + 4)
\end{aligned}$$

1: WP3E4123;

$$\begin{aligned}
& 1 \cdot (X^9 + 18X^8 + 12X^8 + 123X^7 + 152X^7 + 30X^7 \\
& X^6 + 552X^5 + 18X^5 + 702X^5 + 366X^5 + 1955X^5 + \\
& + 34X^5 + 3492X^4 + 12X^4 + 2190X^4 + 5532X^4 + \\
& + 3X^5 + 954X^4 + 11774X^3 + 222X^3 + 10218X^3 + \\
& + 11493X^2 + 18X^2 + 6042X^2 + 29484X^2 + 1780X^2 + \\
& X^3 + 33510X^2 + 15360X^2 + 471X^3 + 23406X^2 + 46134X \\
& X^2 + 54X^3 + 10026X^2 + 62476X^2 + 9216X^2 + 5X^3 + \\
& + 3102X^2 + 50958X^2 + 30720X^2 + 561X^2 + 26766X^2 + \\
& 46053X^2 + 60X^2 + 9294X^2 + 40548X^2 + 1932X^2 + 22723X^2 + \\
& 169X^5 + 3142X^5 + 18X^4 + 1863X^4 + 336X^3 + 48X^2 + 1)
\end{aligned}$$

APÊNDICE D

Expressões dos pesos de Boltzmann $W_F^{(1)}$, $W_I^{(1)}$ e $W_{AF}^{(1)}$ para a célula $b=4$ no caso $q=4$ para 1 folha

$$W_F^{(1)} = W_1(1,1,1) = WB4111$$

$$W_I^{(1)} = W_1(1,1,2) = WB4112$$

$$W_{AF}^{(1)} = W_1(1,2,3) = WB4123$$

6: WB4111;

$$\begin{aligned} & 20 \ 10 \quad 26 \ 8 \quad 24 \ 7 \quad 23 \ 7 \quad 22 \ 6 \quad 21 \\ & X^2 * Y^{10} + 27 * X^{26} * Y^8 + 39 * X^{24} * Y^7 + 54 * X^{23} * Y^7 + 387 * X^{22} * Y^6 + 216 * X^{21} * \\ & Y^6 + 199 * X^{20} * Y^6 + 1251 * X^{20} * Y^5 + 18 * X^{19} * Y^6 + 1908 * X^{19} * Y^5 + 1566 * X^{18} * \\ & Y^5 + 5051 * X^{18} * Y^4 + 450 * X^{17} * Y^5 + 10836 * X^{17} * Y^4 + 162 * X^{16} * Y^5 + 13248 * \\ & X^{16} * Y^4 + 15331 * X^{16} * Y^3 + 9732 * X^{15} * Y^4 + 48942 * X^{15} * Y^3 + 3672 * X^{14} * Y^4 + \\ & 34330 * X^{14} * Y^3 + 33890 * X^{14} * Y^2 + 1314 * X^{13} * Y^4 + 82296 * X^{13} * Y^3 + 163764 * \\ & X^{13} * Y^2 + 132 * X^{12} * Y^3 + 54882 * X^{12} * Y^2 + 347544 * X^{12} * Y^2 + 66075 * X^{12} * Y + \\ & 23390 * X^{11} * Y^3 + 452838 * X^{11} * Y^2 + 349488 * X^{11} * Y + 5202 * X^{10} * Y^3 + 175030 * \\ & X^{10} * Y^2 + 919512 * X^{10} * Y + 55224 * X^{10} + 468 * X^9 * Y^3 + 207144 * X^9 * Y^2 + \\ & 1451502 * X^9 * Y + 349944 * X^9 + 71766 * X^8 * Y^2 + 1500660 * X^8 * Y + 1056906 * X^8 \\ & + 14256 * X^7 * Y^2 + 1041994 * X^7 * Y + 1901088 * X^7 + 1566 * X^6 * Y^2 + 485646 * X^6 * \\ & Y + 2229354 * X^5 + 146628 * X^5 * Y + 1771036 * X^5 + 24568 * X^4 * Y + 964566 * X^4 \\ & + 1632 * X^3 * Y + 342072 * X^3 + 71134 * X^2 + 8064 * X + 360 \end{aligned}$$

7: W84112;

$$\begin{aligned}
 & 28^9 X^9 Y + 4^8 X^8 Y + 4^8 X^8 Y + 43^7 X^7 Y + 22^7 X^7 Y + 10^7 X^7 Y + \\
 & 201^6 X^6 Y + 290^6 X^6 Y + 150^6 X^6 Y + 1057^5 X^5 Y + 30^5 X^5 Y + \\
 & 1878^5 X^5 Y + 5^5 X^5 Y + 1656^4 X^4 Y + 4269^4 X^4 Y + 746^4 X^4 Y + \\
 & 11274^4 X^4 Y + 152^4 X^4 Y + 14262^3 X^3 Y + 14443^3 X^3 Y + 14^3 X^3 Y \\
 & + 10040^3 X^3 Y + 50690^3 X^3 Y + 4282^2 X^2 Y + 85112^2 X^2 Y + 36951^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 1103^2 X^2 Y + 33384^2 X^2 Y + 165664^2 X^2 Y + 150^2 X^2 Y + \\
 & 52050^2 X^2 Y + 354004^2 X^2 Y + 64052^2 X^2 Y + 20900^2 X^2 Y + 448118^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 354692^2 X^2 Y + 4994^2 X^2 Y + 371564^2 X^2 Y + 522806^2 X^2 Y \\
 & + 54555^2 X^2 Y + 484^2 X^2 Y + 206460^2 X^2 Y + 1441766^2 X^2 Y + 352498^2 X^2 Y \\
 & + 74346^2 X^2 Y + 1491700^2 X^2 Y + 1057560^2 X^2 Y + 15152^2 X^2 Y + 1051366^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 1889336^2 X^2 Y + 1374^2 X^2 Y + 492454^2 X^2 Y + 2235990^2 X^2 Y + 144212^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 1781948^2 X^2 Y + 23916^2 X^2 Y + 959360^2 X^2 Y + 1600^2 X^2 Y + 337432^2 X^2 Y \\
 & + 72814^2 X^2 Y + 3928^2 X^2 Y + 456
 \end{aligned}$$

8: W34123;

$$\begin{aligned}
 & 26^3 X^3 Y + 13^7 X^7 Y + 24^7 X^7 Y + 165^6 X^6 Y + 248^6 X^6 Y + 159^6 X^6 Y \\
 & X^6 Y + 352^5 X^5 Y + 60^5 X^5 Y + 1974^5 X^5 Y + 15^5 X^5 Y + 1704^5 X^5 Y \\
 & + 3906^4 X^4 Y + 316^4 X^4 Y + 11610^4 X^4 Y + 195^4 X^4 Y + 14607^4 X^4 Y \\
 & X^4 Y + 13581^3 X^3 Y + 18^3 X^3 Y + 10404^3 X^3 Y + 52008^3 X^3 Y + 4306^3 X^3 Y \\
 & X^3 Y + 95254^3 X^3 Y + 35601^3 X^3 Y + 1110^3 X^3 Y + 83304^3 X^3 Y + \\
 & 168684^2 X^2 Y + 88^2 X^2 Y + 51012^2 X^2 Y + 353511^2 X^2 Y + 62920^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 20520^2 X^2 Y + 447864^2 X^2 Y + 358290^2 X^2 Y + 4674^2 X^2 Y + \\
 & 370725^2 X^2 Y + 921958^2 X^2 Y + 54081^2 X^2 Y + 560^2 X^2 Y + 205668^2 X^2 Y \\
 & + 1428334^2 X^2 Y + 355034^2 X^2 Y + 74646^2 X^2 Y + 1490425^2 X^2 Y + 1053123^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 15823^2 X^2 Y + 1050990^2 X^2 Y + 1893600^2 X^2 Y + 1374^2 X^2 Y + 496590^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 2229723^2 X^2 Y + 145032^2 X^2 Y + 1790814^2 X^2 Y + 22908^2 X^2 Y + 958482^2 X^2 Y \\
 & X^2 Y + 1439^2 X^2 Y + 333300^2 X^2 Y + 73086^2 X^2 Y + 9163^2 X^2 Y + 616
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Ising E. - "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus " (Uma contribuição à Teoria do Ferromagnetismo), Z. Physik 31(1925)253
- [2] - Wu Fa Y. - "The Potts model", Rev. Mod. Phys. 54(1982)235
- [3] - Baxter R.J. - "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics" (Academic Press, London)1982
- [4] - Tsallis C., Levy S.V.F. - "Simple Method to Calculate Percolation, Ising, and Potts Clusters: Renormalization-Group Applications", Phys. Rev. Letters 47(1981)950
- [5] - de Oliveira, P.M.C. - "Renormalization group for Ising system with competing interactions", le J.Physique 47(1986)1107
- [6] - da Silva L.R., Tsallis C. e Schwachhein G. - "Anisotropic Cubic Lattice Potts ferromagnet:renormalization group procedure", J.Phys. A17(1984)3209
- [7] - Mandelbrot, B.B. - "Fractal, form and chance", S. Francisco: W.H. Freeman,1977
- [8] - Mandelbrot, B.B. - "The fractal geometry of Nature", New York: W.H. Freeman,1983
- [9] - Stauffer D. e Stanley H.E. - "From Newton to

Mandelbrot", Spring Verlag 1990

- [10] - Berker A. N. e Ostlund S. - "Renormalisation-group calculations of finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering", J. Phys C12(1979)4961
- [11] - Gefen Y., Mandelbrot B.B. e Aharony A. - "Critical Phenomena on Fractal Lattices", Phys. rev. Letters 45(1980)855
- [12] - Gefen Y., Aharony A. e Mandelbrot B.B. - "Phase transitions on fractals: III. Infinitely ramified Lattices", J. Phys A17(1984)1277
- [13] - Costa UMS, Roditi I e Curado EMF - "Potts model on Sierpinski carpets and their relation to hipercubic lattices of non-integer dimensionality", J. Phys. A20(1987)6001
- [14] - Riera R e Chaves CM - "Fractal Geometries and Potts Model Behavior", Z. Phys. B-Condensed Matter 62(1986)387
- [15] - Riera R - "Critical phases of antiferromagnetic potts model on fractals", J. Phys. A19(1986)3395
- [16] - Chow Y. e Wu Fa Y. - "Residual entropy and the validity of the Third law of Thermodynamics in Discrete Spin Systems , Pre-print
- [17] - Berker AN e Kadanoff LP - "Ground-state entropy and algebraic order at low temperatures", J.Phys. A13(1980)L259
- [18] - Itzykson C and Luck JM - "Zeroes of the partition function for Statistical models on Regular and

hierarchical lattices" Progress in Physics Vol.11
Critical Phenomena (1983 Brasov School Conference) 1985
Birkhauser Boston, Inc

- [19] - Hilfer R e Blumen A - "Renormalisation on Sierpinski-type fractals", J.Phys. A17(1984)1537
- [20] - Griffiths RB e Kaufman M - Spins systems on hierarquical lattices. Introdution and Thermodynamic limit", Phys. Rev. B26(1982)5022
- [21] - Stanley HE e Ostrowsky - "On growth and form: fractal and non-fractal patterns in physics", Boston: Matinus Nijhoff,1986
- [22] - Sander L. - "Fractal Growth", Scientific American 26(1987)82
- [23] - Avnir D, Farin D e Pfeifer P - "Molecular fractal surfaces", Nature 308(1984)261; Nittmann J, Dacccord G e Stanley H E - "Fractal growth of viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon, Nature 314(1985)141
- [24] - Tamas Tel - "Fractals, Multifractals and Thermodynamics" Z.Naturforsch. 43a(1988)1154; Feder - "Fractals", Plenum Press, NY (1988); B.B Mandelbrot - J.Fluid Mech. 62(1974)331
- [25] - Gefen Y, Aharony A e Mandelbrot BB - "Phase transitons on fractals:I. Quase-linear lattices", J.Phys. A16(1983)1267
- [26] - Gefen Y, Aharony A, Shapir Y e Mandelbrot BB - "Phase transition on fractals:II. Sierpinski gaskets,

J.Phys.A17(1984)435

- [27] - Wu YK e Hu B - "Phase transitions on complex Sierpinski Carpets", Phys. Rev. A35(1987)1404
- [28] - Lin B e yang ZR - "A suggested lacunarity expression for Sierpinski Carpets", J. Phys. A19(1980)L49
- [29] - Melrose JR - "Hierarchical lattices:somes examples with a comparation of intrinsic dimension and connectivy and Ising model exponents", J.Phys. A16(1983)3077
- [30] - Melrose JR - " The Migdal -Kad a noff aproximation: optimisation, generalization, Ising model in external field and the Migdal-Kadanoff hierarchies", J.Phys. A16(1983)1041
- [31] - Martin, Tsallis, Self-dual cluster renormalization-group approach for the square lattice Ising model, specific heat and magnetization J.Phys. C14(1981)5645
- [33] - Stanley H E - "Introdution to phase transitions and Critical Phenomena", Claredndon Press,1971
- [34] - Burkhardt TW e van Leeuwen JMJ - "Real-Space renormalization" (Springer-Verlag)1982
- [35] - Niemeijer Th e Van Leeuwen JmJ - "Renormalization Theory for Ising-like Spin systems", Cap. 7 do volume 6 da coleção Domb Green
- [36] - Pfeuty P e Toulouse G - "Introduction to the Renormalisation Group and to Critical Phenomena" - John Wiley & Sons (1977)
- [37] - Kaufman M, Griffiths R B - "Exactly soluble Ising models

- on hierarquical lattices", Phys. Rev. B24(1981)496
- [38] - Kaufman M, Griffiths R B - "Convexity of the free energy in some real-space renormalization-group aproximations", Phys. Rev. B28(1983)3864
- [39] - Kaufman M, Griffiths R B - "Spin systems on hierarchical lattices. II some examples of soluble models", Phys. Rev. B30(1984)244
- [40] - Chame A, Tsallis C e Costa UMS - "Equation of state of the Potts ferromagnet in anisotropic square lattice: Renormalization-group approach, Phys. Rev. B37(1988)7549
- [41] - Caride AO e Tsallis C - "Simple renormalization group method for calculating thermal equations of states", J. Phys. A20(1987)L665
- [42] - da Silva e Tsallis C - "criticality of the Potts ferromagnet in Migdal-Kadanoff-like hierarchical lattices", J. Phys. A20(1987)6013
- [43] - da Silva E P e Tsallis - "Susceptibility of the Potts model on a hierarchical lattice: Renormalization group approach", Physica A167(1990)347
- [44] - Abe T - "A model for Phase transition on Sierpinski Gaskets", J. Phys. Soc. Japan 58(1989)1962
- [45] - Stinchcombe R B - "Fully frustated fractal", Phys. Rev. B41(1990)2510
- [46] - Grillon MP e Brady Moreira FG - "Exact Renormalisation group on Sierpinski-type fractals", Phys. Lett. A142(1989)22
- [47] - Lin B - "Classification and universal propperties of

- Sierpinski Carpets", J.Phys. A20(1987)L163
- [48] - Zidam W, Changde G e Holz A - "Critical Behavior on some fractals", Phys. review A34(1986)1531
- [49] - Hu B - "Problem of universality in Phase transition of hierarchical lattices", Phys. Rev. Letters 55(1985)2316
- [50] - Hauser PR e Saxena UK - "Geometrical phase transitions on hierarchical lattices and universality", Phys. Rev. B34(1986)8193
- [51] - Hao L e Yang ZR - "Lacunarity and universality", J.Phys. A20(1987)1627
- [52] - Halsey TC et al "Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets", Phys. Rev. A33(1986)141
- [53] - Coniglio A - "Scaling Approach to Multifractality", PREPRINT
- [54] - Morgado WAM, Curado EMF e Coutinho S - Multifractal Magnetisation on Hierchical lattices", J. Stat. Phys. 61(1990) 913
- [55] - Essam JW e Tsallis C - "The Potts model and Flows: I . The pair correlation function", J.Phys.A19(1986)409
- [56] - Domb C - J.Phys. A7(1974)1335
- [58] - de Magalhães ACN e Essam JW - "The Potts models and flows:II. MAny-spin correlation function", J. Phys. A19(1986)1965
- [59] - Baxter RJ - "Critical antiferromagnetic square lattice Potts model", Proc. Roy. Soc. London a383(1982)43
- [60] - Banavar JR, Grest GS e Jasnow D - "Ordering and Phase

- transitions in Antiferromagnetic Potts models", Phys. Rev. Lett. 45(1980)1424
- [61] - Grest GS e Banavar JR - "Monte Carlo Study of the Antiferromagnetic Potts models in 2 dimensions", Phys. Rev. Lett. 46(1981)1458
- [62] - Wang JS, Swendsen RH e Kotecky R - "Antiferromagnetic Potts models", Phys. Rev. Lett. 63(1989)109
- [63] - Alström P, Stassinopoulos D e Stanley HG - "Thermodynamical formalism for an infinite hierarchy of fractal resistor Networks", Physica A153(1988)20
- [64] - Elezovic S, Knezevic M e Milosevic S - "Critical exponents of self-avoiding walks on a family of finitely ramified fractals, J. Phys. A20(1987)1215
- [65] - Borjan Z, Elezovic, Knezevic M e Milosevic S - "Asymptotic form of the spectral dimension of the Sierpinski gasket type of fractals", J. Phys. A20(1987)L715
- [66] - Stosic T, Stosic B, Milosevic S e Stanley HE - "Crossover from fractal lattice to Euclidean lattice for the residual entropy of an Ising antiferromagnetic in maximum critical field H_c ", Phys. Rev. A37(1988)1747
- [67] - Stenphen MJ 1976 Phys. Lett. 56a 149
- [68] - Wilson K G e Fisher ME - "Critical Exponents in 3.99 Dimensions", Phys. Rev. Lett. 28(1972)240
- [69] - Wannier GH - "antiferromagnetism. The triangular Ising Net", Phys. Rev. 79(1950)357