

MARIA EMÍLIA XAVIER GUIMARÃES

**SISTEMAS SINCRÔNICOS DE
COORDENADAS NO UNIVERSO
DE GÖDEL**

TESE DE MESTRADO

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/CNPq

Rio de Janeiro, 1991.

Dedicatória

Dedico o meu primeiro trabalho científico
ao professor e amigo Carlos Márcio do Amaral.

Agradecimentos

Aos Professores Mário Novello e Nami Fux Svaiter pelo tema proposto e pela paciência em tirar minhas inúmeras dúvidas;

Aos Professores Teixeira, Alex e Hela; e pelo carinho e amizade com que sempre me trataram, proporcionando para mim um bom ambiente de pesquisa;

Aos amigos da UFRJ e do CBPF;

Aos Professores e Funcionários do CBPF;

Ao CNPq pela bolsa concedida.

RESUMO

Exibimos o modelo de Gödel (1949) em termos de sistemas gaussianos de coordenadas, cuja união cobre completamente esta variedade. Apresentamos um mecanismo pelo qual partículas carregadas seguem curvas tipo-temporais fechadas presentes nesta geometria. Generalizamos a construção de uma classe de observadores (Observadores Generalizados de Milne) com os quais definimos o máximo domínio causal que permite o desenvolvimento de uma Teoria de Campos neste Universo.

Abstract

We exhibit the Gödel's (1949) geometry in terms of a set of gaussian systems of coordinates, the union of which constitutes a complete cover of the whole manifold. We present a mechanism which induces a particle to follow a closed time-like line present in this geometry. We generalize the construction of special class of observers (Generalized Milne Observers) which provides a way to define the largest causal domain allowing a standard field theory to be developed.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
SUMÁRIO	vi
LISTA DE FIGURAS	ix
CONVENÇÕES	x
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - O MODELO DE GÖDEL	5
2.1 - Introdução	5
2.2 - A Solução de Gödel	6
2.3 - Propriedades da Solução de Gödel	10
2.4 - Parâmetros Cinemáticos	15
2.5 - Vetores de Killing	15
CAPÍTULO 3 - SISTEMAS GAUSSIANOS (OU SINCRÔNICOS) NO UNIVERSO DE GÖDEL	17
3.1 - Introdução	17
3.2 - Modelo de Gödel em Coordenadas Cilíndricas ..	18
3.3 - Construção de um Sistema Gaussiano de Coordenadas (Local)	21
3.4 - Sistema de Coordenadas Gaussianas I (SG I) ..	25
3.5 - Limite de Validade de SG I	28

3.6 - Propriedades Cinemáticas dos Observadores Fundamentais de SG I	30
CAPÍTULO 4 - EXTENSÃO DOS SISTEMAS GAUSSIANOS DE	
COORDENADAS	35
4.1 - Introdução	35
4.2 - Sistema de Coordenadas Gaussianas II	35
4.3 - Propriedades Cinemáticas dos Observadores Fundamentais de SG II	38
4.4 - Extensão dos Sistemas Gaussianos para Regiões Exteriores a SG I e SG II	40
CAPÍTULO 5 - AS CURVAS DO TIPO-TEMPO FECHADAS	
5.1 - Introdução	42
5.2 - Indução de Partículas Carregadas Através da Combinação dos Campos Eletromagnético e Gravitacional a Percorrerem Curvas do Tipo-Tempo Fechadas	43
CAPÍTULO 6 - TEORIA DE CAMPOS EM REGIÕES CAUSAIS	
6.1 - Introdução	48
6.2 - O Modelo de Universo de Milne e a Região Causal	48
6.3 - Quantização Canônica do Campo Escalar na Região Causal	52
CONCLUSÃO	63

APÊNDICE A - SISTEMAS GAUSSIANOS DE COORDENADAS	65
APÊNDICE B - GEODÉSICAS NO UNIVERSO DE GÖDEL	68
B.1 - Geodésicas no Universo de Gödel	69
B.1.1 - $B_0 > 0$ (ou $\gamma > 0$)	74
B.1.2 - $B_0 = 0$ (ou $\gamma = 0$)	75
B.1.3 - $B_0 < 0$ (ou $\gamma < 0$)	76
APÊNDICE C - CÁLCULOS REFERENTES À TESE	78
C.1 - Transformação de Coordenadas do Sistema Cilíndrico para o Sistema Gaussiano	78
C.2 - Sistema de Coordenadas Gauss-I	83
C.2.1 - Limite de Validade de Gauss-I	86
BIBLIOGRAFIA	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - O Domínio da Região Gauss-I	31
Figura 6.1 - Os Observadores de Milne no Universe de Gödel	50
Figura 6.2 - Esquema Geral de uma Hiper- superfície Tipo-Espaço	53
Figura A.1 - As Coordenadas de Gauss	66
Figura B.1 - O Potencial Efetivo para o Caso $\gamma > 0$...	74
Figura B.2 - O Potencial Efetivo para o Caso $\gamma = 0$...	75
Figura B.3 - O Potencial Efetivo para o Caso $\gamma < 0$...	76

Convenções

Neste trabalho usaremos as seguintes convenções:

Os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3;

a assinatura da métrica é -2.

Definiremos:

– a derivada covariante:

$$A_{;\mu}^{\alpha} \equiv A_{,\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} A^{\nu}$$

onde, (;) denota a derivada covariante e (,) a derivada simples;

– o símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

– o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma}$$

– o tensor de Levi-Civita:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & , \text{ para permutações pares de } 0, 1, 2 \text{ e } 3; \\ -1 & , \text{ para permutações ímpares de } 0, 1, 2 \text{ e } 3; \\ 0 & \text{ outros} \end{cases}$$

A equação de Einstein com constante cosmológica é:

$$R_{\mu\nu} + (\Lambda - \frac{1}{2}R)g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$$

onde consideramos $\frac{8k\pi}{c^2} = 1$.

Finalmente, denotaremos os sistemas gaussianos por \tilde{x}^{α} .

Capítulo 1

Introdução

Em 1949, Gödel [1] propôs uma solução das equações de Einstein, com constante cosmológica não nula, tendo como fonte um fluido perfeito (sem pressão) distribuído no Universo. Entre outras propriedades, este modelo apresenta matéria em rotação, permite a existência de curvas do tipo-tempo fechadas e seu grupo de isometrias é transitivo e de dimensão 5. Como consequência desta última característica, o espaço-tempo é globalmente homogêneo, mas não é espacialmente homogêneo [2].

Poder-se-ia argumentar que a solução de Gödel possui pouco interesse físico porque é um modelo de Universo estacionário e com rotação, enquanto que o Universo real está se expandindo e aparentemente não é rotacional. No entanto, este é um modelo geral que, embora estacionário, possui variedade completamente regular (isto é, sem singularidades) e simplicidade operacional. As análises acerca do modelo de Gödel [3], [4], [5], [6] ressaltaram algumas de suas importantes propriedades, mas particular atenção daremos ao caráter confinante do seu campo gravitacional.

Já em 1956, Kundt [7] e em 1961, Chandrasekhar e Wright [8] investigaram o movimento de partículas livres nesta geometria. Mais recentemente, Novello et al. (1983) [9] também analisaram o movimento geodésico em Gödel e, entre outros resultados, estes três trabalhos expuseram uma interessante característica deste Universo: o seu campo gravitacional seleciona e confina uma classe de observadores geodésicos (sejam eles massivos ou não) em uma região bem definida do espaço-tempo, que chamaremos, por razões que ficarão claras mais adiante, de região **causal**.

Este caráter confinante não implica em qualquer contradição com a característica de total homogeneidade desta geometria. De fato, do comportamento das geodésicas no Universo de Gödel [9], sabemos, por exemplo, que o movimento dos fótons livres que passam por um ponto P pode ser, de modo equivalente, interpretado como se as partículas sofressem a ação de um potencial atrativo $V(r)$ que as impediria de sair de um certo domínio da variedade. Este domínio consiste em um cilindro de raio definido, r_c , computado a partir de P . Consequentemente, toda geodésica que passa por este ponto permanece confinada em um cilindro de raio r_c e origem em P . Como a escolha de P é absolutamente arbitrária, qualquer ponto desta variedade pode ser tomado como origem do movimento geodésico.

O modelo de Gödel, diferente dos outros modelos de Universo existentes na literatura, nunca foi descrito em termos de sistemas de coordenadas gaussianas (ou sincrônicas). Esta particularidade pode ser entendida como uma consequência da existência de curvas do tipo-tempo fechadas nesta geometria. Entretanto, a Teoria das Variedades Riemannianas Diferenciáveis nos assegura que é sempre possível, ao menos localmente, repre-

sentar eventos em termos de coordenadas gaussianas [10]. Embora existam algumas tentativas no sentido de descrever o modelo de Gödel sob o ponto de vista de observadores sincronizados [11], a forma gaussiana da sua métrica não foi jamais exibida explicitamente.

No intuito de resolver este problema, apresentamos neste trabalho a construção de sistemas gaussianos locais no Universo de Gödel e as consequências da descrição deste modelo sob o ponto de vista dos observadores gaussianos.

Este trabalho será exposto da seguinte forma:

No capítulo 2, definimos a solução de Gödel, seguindo basicamente os artigos originais de 1949 e 1950 [1], [12] e a exposição didática de Adler et al. [13] sobre este modelo. Apresentamos as principais propriedades deste Universo, necessárias à compreensão do trabalho que segue.

Nos capítulos 3 e 4, expomos explicitamente a forma da métrica de Gödel em coordenadas gaussianas, o limite de validade deste sistema de coordenadas e os parâmetros cinemáticos referentes à classe de observadores definidos por este sistema.

Como consequência da arbitrariedade na escolha dos parâmetros da transformação de coordenadas (encontrada por um cálculo direto no capítulo 3), definimos vários sistemas gaussianos locais e mostramos que é possível, através da sua união, cobrir toda esta variedade.

No capítulo 5, exibimos um mecanismo pelo qual partículas carregadas devem seguir trajetórias fechadas do tipo-tempo. Mostramos que a combinação de um campo magnético externo e o campo gravitacional deste modelo imprimem uma aceleração à partícula car-

regada e esta percorre curvas fechadas.

Finalmente, no capítulo seguinte, examinamos a questão concernente à propagação causal de efeitos descritos pela Teoria de Campos.

A Teoria de Campos construída em qualquer espaço-tempo baseia-se na evolução temporal do campo tomada a partir de uma superfície de Cauchy global em um tempo $t = t_0$. Isto é, dados os valores dos campos e de suas derivadas, estes propagam-se para outra superfície em um tempo $t > t_0$. Em outras palavras, a Teoria de Campos baseia-se no fato de o espaço-tempo poder ser folheado em uma família de superfícies 3-dimensionais tipo-espaço. Entretanto, um tal folheamento, na geometria de Gödel, não pode ser feito por toda a variedade devido à existência de curvas tipo-tempo fechadas [14].

A construção de um sistema gaussiano de coordenadas permite automaticamente um folheamento do espaço-tempo em uma família de hipersuperfícies 3-dimensionais tipo-espaço as quais são interceptadas uma única vez por um conjunto de geodésicas tipo-tempo. No entanto, uma vez que o sistema gaussiano está restrito a um domínio limitado do espaço-tempo, este processo não se estende por toda a variedade. A impossibilidade de um tal folheamento completo faz com que consideremos a construção da Teoria de Campos apenas na região causal.

Finalmente, após este capítulo, apresentamos as conclusões desta tese e nos Apêndices A (Sistemas Gaussianos de Coordenadas), B (Geodésicas no Universo de Gödel) e C (Cálculos Referentes à Tese) damos suporte teórico para a compreensão deste trabalho.

Capítulo 2

O Modelo de Gödel

2.1 Introdução

Como dissemos anteriormente, o modelo de Gödel, pela sua simplicidade operacional, é um dos modelos mais estudados no contexto da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein (1915) quando a vorticidade da matéria é incluída nas características do fluido considerado como fonte da gravitação.

Tal modelo, solução das equações de Einstein com constante cosmológica não-nula, é espaço-temporalmente homogêneo e é gerado por um fluido perfeito, cujas partículas componentes giram com velocidade angular não-nula, em relação ao compasso de inércia local [1]. A estrutura deste modelo permite a existência de curvas do tipo-tempo fechadas e, conseqüentemente, o princípio fundamental no qual a matéria se move globalmente em direção ao seu futuro (Princípio de Causalidade) pode ser violado, como veremos mais adiante. Entretanto, estas curvas do tipo-tempo fechadas não são geodésicas [7], [8], [9]. Isto é, uma partícula teste submetida apenas ao campo gravitacional da solução de Gödel nunca percorre as curvas fechadas deste modelo. (Veremos mais adiante como induzir uma partícula carregada a seguir tal trajetória).

Neste capítulo, discutiremos a solução de Gödel para as equações de Einstein da TRG e explicitaremos suas propriedades e simetrias. Estas últimas são expressas através dos 5 vetores de Killing que este modelo admite [15].

2.2 A Solução de Gödel

Em 1949, Gödel demonstrou que a seguinte métrica era compatível com uma distribuição incoerente de matéria [1]:

$$ds^2 = a^2[dx_0^2 - dx_1^2 + \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 + 2e^{x_1}dx_0dx_2 - dx_3^2] \quad (2.1)$$

onde (x_0, x_1, x_2, x_3) são coordenadas cartesianas adimensionais e a é uma constante de dimensão $[L]$.

De (2.1), podemos ver facilmente que os componentes co- e contravariantes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, bem como o seu determinante, valem, respectivamente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 e^{x_1} & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2 e^{x_1} & 0 & \frac{e^{2x_1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{bmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a^2} & 0 & \frac{2e^{-x_1}}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{2e^{-x_1}}{a^2} & 0 & \frac{-2e^{-2x_1}}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a^2} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{-g} = \frac{a^4 e^{x_1}}{\sqrt{2}}$$

Através do Princípio Variacional $\delta \int ds = 0$ – que extremiza a distância ds – encontramos as seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_0 + e^{x_1} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 + \frac{1}{2} e^{2x_1} \dot{x}_2^2 + e^{x_1} \dot{x}_0 \dot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - 2e^{-x_1} \dot{x}_0 \dot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_3 = 0 \end{array} \right.$$

Estas equações comparadas com a equação da geodésica, isto é:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

nos fornecem os símbolos de Christoffel, cujos únicos componentes não-nulos são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01}^0 = 1 \\ \Gamma_{12}^0 = \frac{e^{x_1}}{2} \\ \Gamma_{01}^1 = \frac{e^{x_1}}{2} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{e^{2x_1}}{2} \\ \Gamma_{01}^2 = -e^{-x_1} \end{array} \right.$$

Por definição, o tensor de Ricci é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta$$

e, nesta geometria, suas únicas componentes não-nulas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -1 \\ R_{02} = -e^{x_1} \\ R_{22} = -e^{2x_1} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

O escalar de curvatura R é dado por:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{1}{a^2} \quad (2.3)$$

Deste modo, calculamos todas as quantidades geométricas relevantes ao trabalho que segue, com respeito à métrica (2.1).

Vamos agora voltar nossa atenção para a fonte desta geometria.

No modelo de Gödel, a matéria que gera a curvatura é um fluido perfeito, incoerentemente distribuído no espaço, com densidade de energia ρ e pressão nula. Assim, para observadores comoventes com o fluido, o tensor de energia-momentum $T^{\mu\nu}$ se apresenta sob a forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho \delta_0^\mu \delta_0^\nu$$

As únicas componentes covariantes não-nulas deste tensor são:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{00} = \rho a^2 \\ T_{02} = \rho a^2 e^{x_1} \\ T_{22} = \rho a^2 e^{2x_1} \end{array} \right.$$

Comparando com os valores do tensor de Ricci dados nas expressões (2.2), temos:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\rho a^2} T_{\mu\nu}$$

A equação de Einstein com termo cosmológico se escreve:

$$R_{\mu\nu} + (\Lambda - \frac{1}{2}R)g_{\mu\nu} = -\frac{8k\pi}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Substituindo os valores encontrados em (2.3) e (2.2) para R e $R_{\mu\nu}$, respectivamente, temos:

$$-\frac{1}{\rho a^2}T_{\mu\nu} + (\Lambda + \frac{1}{2a^2})g_{\mu\nu} = -\frac{8k\pi}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Logo, a métrica de Gödel será solução das equações de Einstein (com termo cosmológico) se e só se as condições abaixo forem satisfeitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} = 8k\pi\rho \\ \Lambda = -4k\pi\rho \end{array} \right. \quad (2.6)$$

onde fizemos $c = 1$ na equação (2.5).

Observando as condições acima, verificamos que se $a \rightarrow \infty$, ambos ρ e Λ tendem a zero, o que implica que o espaço-tempo é Minkowskiano. Assim, a constante a pode ser considerada como um parâmetro associado à curvatura. Tal parâmetro, como veremos adiante, é proporcional ao inverso da rotação do fluido gerador da geometria de Gödel.

2.3 Propriedades da Solução de Gödel

O modelo cosmológico de Gödel gera discussões acerca da estrutura topológica do espaço-tempo devido às interessantes propriedades físicas que esta solução admite. Tais propriedades são enumeradas a seguir:

a. **As linhas de Universo que caracterizam as partículas materiais em repouso no sistema de coordenadas comóvel (x_0, x_i) não podem ser ortogonais a uma família de hipersuperfícies 3-dimensionais definidas a um parâmetro, ao longo de todo o espaço-tempo.**

Notemos que, se tal fato ocorresse, a solução de Gödel admitiria, intrinsecamente, uma transformação de coordenadas do sistema comóvel para um sistema gaussiano global (i. é, as condições $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$ seriam satisfeitas globalmente), o que não ocorre neste modelo.

Concluimos daí que tal propriedade impossibilita a existência de um sistema de coordenadas admitindo uma coordenada temporal **global** e no qual a matéria geradora da geometria esteja em repouso.

Para demonstrarmos a propriedade (a), definimos um vetor V^μ e verificamos se ele é ortogonal a uma família de hipersuperfícies 3-dimensionais em toda a variedade. A condição necessária e suficiente para que tal fato ocorra é que o tensor $A_{\mu\nu\gamma}$ completamente antissimétrico, construído a partir do vetor V^μ , se anule identicamente [13].

No caso de Gödel, estamos particularmente interessados no vetor V^μ que representa a matéria em repouso.

Seguindo argumentos de Gödel [1], [12], vamos definir a quantidade $A_{\mu\nu\gamma}$ como:

$$A_{\mu\nu\gamma} = V_{[\mu}V_{\nu,\gamma]}$$

onde $V^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$ e, conseqüentemente, $V_\mu = (a, 0, a e^{x_1}, 0)$.

As componentes do tensor $A_{\mu\nu\gamma}$ são dadas por:

$$A_{\mu\nu\gamma} = \begin{cases} -\frac{1}{6}a^2 e^{x_1} & \text{para permutações pares de } 0, 1, 2 \\ \frac{1}{6}a^2 e^{x_1} & \text{para permutações ímpares de } 0, 1, 2 \\ 0 & \text{em todos os outros casos} \end{cases}$$

Vemos, portanto, que $A_{\mu\nu\gamma}$ não é identicamente nulo; demonstrando assim que a geometria de Gödel não admite um sistema de coordenadas gaussiano global. Nós iremos ver mais adiante que um exame detalhado das geodésicas deste modelo corrobora esta afirmação.

b. A matéria fonte da geometria de Gödel possui rotação não-nula em relação aos observadores comóveis.

Tal rotação é facilmente obtida através do tensor $A_{\mu\nu\gamma}$ construído anteriormente [1], [13].

Definimos a vorticidade ω^α pela relação:

$$\omega^\alpha \equiv \frac{\epsilon^{\alpha\mu\nu\gamma}}{\sqrt{-g}} A_{\mu\nu\gamma}$$

com $\epsilon^{0123} = +1$.

Por um cálculo direto, encontramos:

$$\omega^\alpha = (0, 0, 0, \sqrt{2}/a^2)$$

Chamando Ω^2 à norma de ω^α , temos:

$$\Omega^2 = -\omega^\alpha \omega_\alpha = 2/a^2$$

Vemos, portanto, que o parâmetro a , que mede o quanto a geometria se desvia do espaço de Minkowski, é proporcional ao inverso da rotação das partículas. Além disso, a não-existência de um sistema gaussiano global é associada à existência da rotação, pois como vimos anteriormente, o tensor $A_{\mu\nu\gamma}$ não se anula identicamente.

c. A solução de Gödel possui simetria rotacional.

Analisando a expressão de ω^α , vemos que ele é um vetor que apresenta características de rotação uniforme em torno do eixo axial x_3 ; indicando que a matéria, no modelo de Gödel, possui uma velocidade angular intrínseca e constante igual a $\sqrt{2}/a^2$ em torno do eixo x_3 em cada ponto.

Fazendo-se uma transformação de coordenadas [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{x_1} = \cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r \\ x_2 e^{x_1} = \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r \\ \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r} \tan \frac{\varphi}{2} \\ x_3 = 2z \end{array} \right.$$

onde $|(x_0 - 2t)|/2\sqrt{2} < \pi/2$ e (t, r, φ, z) são coordenadas cilíndricas. A métrica (2.1)

então é reescrita na forma:

$$ds^2 = 4a^2 \{ dt^2 - dr^2 - 2 \sinh^2 r dt d\varphi + \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\varphi^2 \} \quad (2.7)$$

Esta métrica exhibe explicitamente uma simetria rotacional, pois os coeficientes $g_{\mu\nu}$ independem da coordenada φ . Será nesta forma que a usaremos doravante, uma vez que algumas das propriedades de Gödel ficam mais evidentes quando estudadas neste sistema cilíndrico.

d. Existem curvas do tipo-tempo fechadas na solução de Gödel.

Nos modelos cosmológicos mais simples (como por ex., FRW, de Sitter, etc) é sempre possível se encontrar uma função tempo global que podemos entender como o **tempo cósmico**, no sentido de ser ele sempre direcionado para o futuro de qualquer curva tipo-tempo ou tipo-nulo [16]. As superfícies definidas por $t=\text{constante}$ formam uma família de hipersuperfícies 3-dimensionais, em relação as quais a função tempo global é ortogonal sempre. No entanto, no modelo de Gödel tal fato não ocorre. Existem, nesta solução cosmológica, órbitas circulares ($t = ct\epsilon.$, $r > r_c = ct\epsilon.$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z = ct\epsilon.$) que representam curvas do tipo-tempo fechadas, sendo assim possível, para uma partícula se movimentando sobre estas órbitas, retornar ao mesmo ponto do espaço-tempo [9], [8], [7], [17].

Tal fato é facilmente comprovado se fizermos $dr = dt = dz = 0$ na métrica (2.7).

Temos, então:

$$ds^2 = 4a^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\varphi^2$$

Analisando a expressão acima, vemos que:

1. Para os valores r_1 tais que $0 < r_1 < r_c = \sinh^{-1} 1$ temos $ds^2 < 0$ (tipo-espaço);
2. para os valores de r_2 tais que $r_2 > r_c$, onde r_c é o raio crítico, ds^2 torna-se > 0

(tipo-tempo);

3. para $r = r_c$. temos $ds^2 = 0$ (tipo-nulo).

Chamaremos de “círculo nulo” à órbita definida por $t = t_0, z = z_0, r = r_c$, constantes e que separa o espaço-tempo em duas regiões, que, simplificada (conforme mais adiante), chamaremos de: causal ($0 < r_1 < r_c$) e acausal ($r_2 > r_c$). A possibilidade de uma partícula, se movimentando sobre uma curva do tipo-tempo fechada, retornar ao mesmo ponto do espaço-tempo (digamos, o ponto de partida de seu movimento), e, portanto, uma possível violação da Causalidade, é passível de ser entendida se notarmos que a coordenada φ é angular, variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

Vários estudos detalhados acerca do movimento de partículas nesta geometria têm sido feitos. Em particular, Kundt [7] e Chandrasekhar e Wright [8] (utilizando a integração das equações de movimento) e Novello, Soares e Tiomno [9] (utilizando o método do potencial efetivo) mostraram que tais curvas do tipo-tempo fechadas não são geodésicas, estando estas últimas confinadas ao que chamaremos de “cilindro crítico”: a região causal.¹ Assim, uma partícula se movimentando sobre curvas do tipo-tempo fechadas deve necessariamente estar acelerada e sua aceleração é devida a um campo externo aplicado sobre ela, uma vez que apenas o campo gravitacional não é suficiente para induzir uma partícula a percorrer trajetórias aceleradas [18].

¹O fato de o espaço-tempo da solução de Gödel ser homogêneo permite que todos os pontos da variedade possam ser escolhidos como origem da região causal. Conseqüentemente, a nossa descrição acerca das órbitas circulares deste modelo é válida em todos os pontos da geometria.

2.4 Parâmetros Cinemáticos

Nesta seção, exibiremos os valores dos parâmetros cinemáticos associados aos observadores comoventes com a matéria deste modelo. Pela definição [19], temos que os parâmetros de aceleração (A^μ), expansão (Θ), deformação (shear) ($\sigma_{\mu\nu}$) e rotação (ω^μ) são dados por, respectivamente:

$$A^\mu \equiv V^\mu_{;\nu} V^\nu$$

$$\Theta \equiv V^\mu_{;\mu}$$

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv h_\mu^{(\alpha} h_\nu^{\beta)} V_{(\alpha;\beta)} - \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\nu}$$

$$\omega^\mu \equiv \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha\beta\gamma} V_\alpha h_\beta^\lambda h_\gamma^\rho V_{\lambda;\rho} = \Omega\delta_3^\mu = cte.$$

Através de um cálculo direto, vemos que, à exceção da rotação, todos os parâmetros cinemáticos são nulos para este modelo.

Logo, concluímos que as partículas componentes do fluido fonte da geometria de Gödel seguem geodésicas ($A^\mu = 0$) e apresentam rotação ($\omega^\mu = \text{constante} \neq 0$) rígida ($\sigma_{\mu\nu} = 0, \Theta = 0$), em relação ao compasso de inércia local.

2.5 Vetores de Killing

A geometria de Gödel admite 5 vetores de Killing que são, em coordenadas cilíndricas [15]

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{K}_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{K}_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{K}_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{K}_4 = \frac{\sqrt{2}}{a} \tanh r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{a} \coth 2r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{K}_5 = \frac{\sqrt{2}}{a} \tanh r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{a} \coth 2r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Com os vetores de Killing dados acima, podemos obter importantes informações acerca das simetrias da geometria de Gödel.

Tal geometria admite um grupo \mathcal{G}_5 de isometrias que atua multiplamente-transitivamente sobre a variedade de modo que o espaço-tempo é completamente homogêneo. Porém, como não há sub-grupos de \mathcal{G}_5 que atuem transitivamente sobre hipersuperfícies espaciais, a variedade não é espacialmente homogêneo [15].

Além disso, como \vec{K}_1 é um campo vetorial de Killing do tipo-tempo e não é ortogonal a hipersuperfícies tipo-espaço, a variedade do modelo de Gödel é estacionária ($g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t)$) mas não é estática (estacionária + $g_{0i} = 0$). Através de \vec{K}_2 (cujas curvas integrais são fechadas) e \vec{K}_3 podemos concluir que há simetria rotacional (ou axial) e que a geometria é cilíndricamente simétrica, como havíamos observado na seção [2.3].

Capítulo 3

Sistemas Gaussianos (ou Sincrônicos) no Universo de Gödel

“O God, I could be bounded in a nutshell
and count myself a King of infinite space.”
Hamlet, II, 2.

3.1 Introdução

Uma rápida inspeção nos modelos cosmológicos existentes na literatura nos mostra que, à exceção do modelo de Gödel, todos apresentam uma característica em comum: suas métricas estão (ou podem ser) escritas em termos de um sistema gaussiano (ou sincrônico) de coordenadas global. Esta peculiaridade do modelo de Gödel pode ser interpretada como consequência desta geometria admitir a existência de curvas do tipo-tempo fechadas, resultando numa possível violação da Causalidade.

A teoria das Variedades Riemannianas Diferenciáveis nos garante que é sempre possível, ao menos localmente, representar eventos em termos de coordenadas gaussianas

[10]. Embora a possibilidade de representar o modelo de Gödel em tais coordenadas já tenha sido objeto de análise [11], a sua forma explícita nunca foi obtida.

O objetivo deste capítulo é o de explicitar um sistema de coordenadas gaussianas (local), seus limites e suas propriedades no Universo de Gödel.

3.2 Modelo de Gödel em Coordenadas Cilíndricas

Embora já tenhamos nos referido ao modelo de Gödel em coordenadas cilíndricas no capítulo anterior, iremos fazer aqui um breve resumo de suas principais características.

No sistema de coordenadas cilíndricas (t, r, φ, z) , a métrica de Gödel tem a forma (obtida de (2.7)) por uma transformação de escala:

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2h(r)dtd\varphi + g(r)d\varphi^2] \quad (3.1)$$

onde,

$$\begin{cases} a^2 = \frac{2}{\Omega^2} \\ h(r) = \sqrt{2} \sinh^2 r \\ g(r) = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) \end{cases}$$

As coordenadas (t, r, φ) estão definidas sobre o espaço tri-dimensional \mathcal{H}^3 (hiperbolóide) e variam de $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq r < +\infty$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, respectivamente. A coordenada z é definida sobre o segmento real \mathbb{R} e varia de $-\infty < z < +\infty$. Assim, podemos dizer que o espaço-tempo da solução de Gödel é definido topologicamente por $\mathcal{H}^3 \otimes \mathbb{R}$ [27], a menos de identificação de pontos que alteram a conectividade do espaço-tempo [1].

A fonte desta geometria é um fluido perfeito com densidade de energia ρ e sem pressão ($T^{\mu\nu} = \rho V^\mu V^\nu$), satisfazendo às equações de Einstein com constante cosmológica não-nula ($\Lambda \neq 0$). A quadri-velocidade do fluido é $V^\mu = 1/a\delta_0^\mu$ e, como vimos anteriormente, este modelo não apresenta expansão ($\Theta = 0$) e nem shear ($\sigma_{\mu\nu} = 0$), mas apresenta uma rotação constante e não-nula ($\omega^\alpha \neq 0$) na direção axial z ; isto é:

$$\omega^\alpha \equiv \frac{1}{2}\eta^{\beta\gamma\delta\alpha}\omega_{\beta\gamma}V_\delta = (0, 0, 0, \Omega)$$

As equações de Einstein são satisfeitas se e só se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 2\Omega^2 \\ \Lambda = -\frac{1}{2a^2} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

onde $k = c = 1$, nas equações de Einstein.

Temos agora um significado geométrico para a constante a da métrica (3.1), que pode ser considerada como um parâmetro que mede a curvatura relativa do espaço-tempo de Gödel em relação ao de Minkowski. De fato, podemos entender tal significado, não apenas pela análise das condições (3.2), mas também através do limite $a \rightarrow \infty$ (ou $\Omega \rightarrow 0$) na métrica (3.1).

Fazendo-se uma reescala nas coordenadas (t, r, φ, z) , tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = at \\ r' = ar \\ \varphi' = \varphi \\ z' = az \end{array} \right.$$

a métrica (3.1) toma a forma (lembrando que $a^2 = 2/\Omega^2$):

$$ds'^2 = [dt' + \frac{2}{\Omega} \sinh^2 \Omega / \sqrt{2} r' d\varphi']^2 - \frac{4}{\Omega^2} \sinh^2 \Omega \sqrt{2} r' d\varphi'^2 - dr'^2 - dz'^2$$

Tomando-se o limite $\Omega \rightarrow 0$, temos:

$$ds'^2 \rightarrow dt'^2 - dr'^2 - dz'^2 - r'^2 d\varphi'^2$$

que é exatamente a métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas.

A solução (3.1) apresenta interessantes propriedades (cf. cap. II) e a mais importante delas é a de que, se escolhermos um ponto \mathcal{P} arbitrário neste espaço-tempo, as geodésicas (cf. [9]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{t} = A_0 \left[1 - \frac{2 \sinh^2 r}{\cosh^2 r} \right] + \frac{\sqrt{2} B_0}{\cosh^2 r} \\ \dot{r}^2 = A_0^2 - D_0^2 - \left[\sqrt{2} A_0 \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right]^2 \\ \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2} A_0}{\cosh^2 r} - \frac{B_0}{\sinh^2 r \cosh^2 r} \\ \dot{z} = C_0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

com $\frac{dx^\mu}{ds} = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$

que passam por este ponto estarão confinadas em um cilindro ("cilindro crítico") de raio r_c e origem em \mathcal{P} [9]. As curvas $t = r = z = \text{constantes}$ com $r > r_c$ são curvas do tipo-tempo fechadas e, através delas, é possível retornar ao mesmo ponto do espaço-tempo [9]. Uma vez que este modelo é espaço-temporalmente homogêneo, o raciocínio acima é válido para todos os pontos desta variedade.

Este importante caráter confinante do campo gravitacional do modelo de Gödel é o responsável pela não-possibilidade de representarmos esta geometria em termos de um único sistema gaussiano de coordenadas; isto é, não podemos estender um único sistema gaussiano (local) para fora de uma certa região.

3.3 Construção de um Sistema Gaussiano de Coordenadas (Local)

Uma métrica qualquer que tenha a forma:

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - \tilde{g}_{ik}d\tilde{x}^i d\tilde{x}^k \quad (3.4)$$

é dita estar representada em termos de coordenadas gaussianas (ou sincrônicas), que denotaremos neste trabalho por \tilde{x}^μ . Assim, para que um sistema de coordenadas seja dito gaussiano, o tensor métrico (nestas coordenadas) deve satisfazer às condições:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{00} = 1 \\ \tilde{g}_{0i} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Conforme Landau e Lifschitz [20], a condição (3.5a) nada mais é do que a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre e de massa unitária. De fato, a equação de Hamilton-Jacobi pode ser escrita como:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 1 \quad (3.6)$$

onde S é a função de Hamilton-Jacobi e os momenta associados à partícula livre são

dados por (em termos da função S):

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$$

A solução da equação (3.6) nos fornece a função S em termos das coordenadas x^μ e de 3 parâmetros arbitrários λ_i :

$$S = S(x^\mu, \lambda_i) \quad (3.7)$$

No entanto, a equação (3.6) é equivalente à primeira das equações (3.5) se identificarmos a função S como a nova coordenada temporal \tilde{t} e $g^{\mu\nu}$, no nosso caso particular, com o tensor métrico em coordenadas cilíndricas. De fato, (3.6) reescreve-se:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} = \tilde{g}^{00} = 1 \quad (3.8)$$

e a segunda das condições de Gauss ($\tilde{g}_{0i} = 0$) torna-se:

$$\tilde{g}^{0i} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = 0 \quad (3.9)$$

Derivando a equação (3.8) em relação aos parâmetros λ_i , temos:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} \right) = 0$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \lambda_i} \right) \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} = 0$$

Comparando esta última equação com a eq. (3.9) vemos que

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \quad (3.10)$$

E, então, obtemos, por um cálculo direto e simples, as novas coordenadas espaciais. Deste modo, o problema de se encontrar um sistema gaussiano para o modelo de Gödel reduz-se a encontrar soluções para as equações (3.8) e (3.10).

De (3.1), podemos facilmente obter as componentes contravariantes do tensor métrico em coordenadas cilíndricas, que são:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{-g}{a^2 \Delta^2} & 0 & \frac{h}{a^2 \Delta^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{h}{a^2 \Delta^2} & 0 & \frac{-1}{a^2 \Delta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a^2} \end{bmatrix}$$

onde definimos $\Delta \equiv \sinh r \cosh r$.

O determinante da métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas é:

$$\sqrt{-g} = a^4 \sinh r \cosh r$$

Daí, temos que a equação (3.8) para essa métrica se escreve:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sinh^2 r - 1}{\cosh^2 r} \right] \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \\ & + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + a^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Resolveremos a equação acima usando o “ansatz”:

$$S(x^\alpha, \lambda_i) = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(r) \quad (3.12)$$

onde $x^\alpha = (t, r, \varphi, z)$ e λ_i são parâmetros arbitrários e constantes introduzidos na transformação de coordenadas.

Substituindo (3.12) em (3.11) e integrando o resultado desta substituição, temos:

$$F(x) = \frac{\sqrt{P}}{2} \arcsin \frac{(-2Px + Q)}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} - \frac{\lambda_2^2}{2} \arcsin \frac{(Qx - 2\lambda_2^2)}{x\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} + \frac{\sqrt{|Q + P + \lambda_2^2|}}{2} \arcsin \frac{(Q + 2P)x - Q + 2\lambda_2^2}{(x + 1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{cases} x \equiv \sinh^2 r \\ P \equiv \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + a^2 \\ Q \equiv 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2 - a^2 \end{cases}$$

Assim, substituindo o resultado (3.13) em (3.12) e calculando-se as derivadas (3.10), encontramos finalmente as coordenadas gaussianas \tilde{x}^μ em termos das coordenadas cilíndricas x^μ e em termos dos parâmetros arbitrários λ_i (cuja escolha determina diferentes sistemas gaussianos locais). Explicitando a transformação de coordenadas obtida através da função de Hamilton-Jacobi, temos (os cálculos estão detalhados no Apêndice C):

$$\tilde{t} = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(x)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi} &= t + \frac{\lambda_1}{2\sqrt{P}} \arcsin \frac{-2Px + Q}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{(Q + 2P)x - Q + 2\lambda_2^2}{(x + 1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \\
\tilde{\eta} &= \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{(Q + 2P)x - Q + 2\lambda_2^2}{(x + 1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Qx - 2\lambda_2^2}{x\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \\
\tilde{z} &= z + \frac{\lambda_3}{2\sqrt{P}} \arcsin \frac{-2Px + Q}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Desta forma, encontramos uma transformação de coordenadas geral (isto é, em termos de 3 parâmetros arbitrários λ_i) que levam a métrica de Gödel do sistema cilíndrico (t, r, φ, z) para um sistema de coordenadas gaussianas local – conforme veremos mais adiante –, que denotaremos doravante de $(\tilde{t}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{z})$.

3.4 Sistema de Coordenadas Gaussianas I (SG I)

Sabemos que, ao encontrarmos um sistema de coordenadas gaussianas, estamos definindo matematicamente uma família de hipersuperfícies tri-dimensionais tipo-espaço (Σ) as quais são interceptadas uma única vez (i.é; em apenas um ponto de Σ) por um conjunto de geosésicas tipo-tempo [10]. Assim, uma vez encontrado o sistema (3.14), devemos identificar as geodésicas ortogonais às hipersuperfícies ($\tilde{t} = cte.$) dentre as geodésicas (3.3) do modelo de Gödel.

Escolhendo-se um ponto \mathcal{P} (arbitrário) como a origem do sistema gaussiano (3.14), de modo que \mathcal{P} seja caracterizado por $r = 0$, temos conseqüentemente que a constante B_0 das equações (3.3) deve ser nula. (Ver Apêndice B)

Sem perda de generalidade, mas apenas por simplificação, também podemos escolher os seguintes valores para os parâmetros arbitrários λ_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \equiv \mu a \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Conseqüentemente, as geodésicas ortogonais a Σ no sistema de coordenadas gaussianas são definidas por $l^\mu = \delta_0^\mu$. No sistema de coordenadas cilíndricas suas componentes, que aqui chamaremos de $W^\mu (= \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} l^\nu)$, são respectivamente dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} W^0 = -\frac{\mu(\sinh^2 r - 1)}{a \cosh^2 r} \\ W^1 = \frac{\sqrt{(\mu^2 - 1) - (\mu^2 + 1)\sinh^2 r}}{a \cosh r} \\ W^2 = \frac{\mu\sqrt{2}}{a^2 \cosh^2 r} \\ W^3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

O sistema gaussiano cujas geodésicas ortogonais à hipersuperfície $\tilde{t} = cte.$ são as geodésicas (3.3) com as constantes $A_0 = \mu/a$, $B_0 = C_0 = 0$, $D_0 = 1/a$ é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t} = \mu a t + \frac{a}{2} \sqrt{\mu^2 + 1} \arcsin \Psi + \frac{\mu a}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta \\ \tilde{\xi} = t + \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 1}} \arcsin \Psi + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta \\ \tilde{\eta} = (\varphi - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \arcsin \Delta \\ \tilde{z} = z \end{array} \right. \quad (3.17)$$

no qual,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 1 - 2 \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \sinh^2 r \\ \Delta = \frac{3\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \frac{\sinh^2 r}{\sinh^2 r + 1} - \frac{1}{\sinh^2 r + 1} \end{array} \right.$$

A métrica de Gödel em termos destas coordenadas torna-se:

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - a^2(\mu^2 - 1)d\tilde{\xi}^2 + a^2 g(\tilde{t}, \tilde{\xi}) d\tilde{\eta}^2 + 2a^2 h(\tilde{t}, \tilde{\xi}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} - a^2 d\tilde{z}^2 \quad (3.18)$$

onde as funções $g(\tilde{t}, \tilde{\xi})$ e $h(\tilde{t}, \tilde{\xi})$ são exatamente as mesmas da métrica (3.1) mas agora reescritas em termos das novas coordenadas \tilde{x}^μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\tilde{t}, \tilde{\xi}) = -\frac{1}{4} \frac{\mu^2 - 1}{(\mu^2 + 1)^2} (1 - \sin M) [\mu^2 + 3 + (\mu^2 - 1) \sin M] \\ h(\tilde{t}, \tilde{\xi}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu \beta_2}{\mu^2 + 1} (1 - \sin M) \end{array} \right.$$

com $M \equiv 2/a\sqrt{\mu^2 + 1}(\tilde{t} - \mu a \tilde{\xi})$.

O determinante da métrica é:

$$\sqrt{-\tilde{g}} = a^4 \sinh r \sqrt{(\mu^2 - 1) - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}$$

As coordenadas $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ e \tilde{z} estão definidas sobre uma hipersuperfície tri-dimensional Σ e variam de $-\infty < \tilde{\xi} < +\infty$, $\pi/2 \leq \tilde{\eta} \leq 2\pi$ e $-\infty < \tilde{z} < +\infty$, respectivamente. A coordenada temporal \tilde{t} está definida sobre o eixo real \mathfrak{R} e varia de $-\infty < \tilde{t} < +\infty$.

3.5 Limite de Validade de SG I

Durante todo este trabalho, temos dito várias vezes que o modelo de Gödel admite apenas sistemas gaussianos locais. Isto pode ser comprovado pela integração das geodésicas (3.3) ou através da análise do limite de validade de SG I.

De fato, uma rápida inspeção nas transformações (3.17) nos mostra que SG I é válido somente nos intervalos:

$$0 \leq x \leq x_c = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \quad (3.19)$$

com,

$$x = \begin{cases} \sinh^2 r & \text{em coordenadas cilíndricas} \\ \frac{\mu^2 - 1}{2(\mu^2 + 1)}(1 - \sin M) & \text{em coordenadas gaussianas} \end{cases}$$

Em termos da coordenada radial r , o limite (3.18) se escreve:

$$0 \leq \sinh^2 r \leq \sinh^2 R_c = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \quad (3.20)$$

e podemos tirar daí, ao menos, duas importantes conclusões: a primeira, de caráter geométrico, trata da dependência direta entre a vorticidade do fluido material gerador da gravitação no Universo de Gödel e a restrição no domínio do sistema gaussiano de coordenadas. A segunda conclusão trata do caráter material dos observadores geodésicos associados ao sistema gaussiano em questão.

1. Fazendo-se a mesma transformação de escala feita na seção [3.2], veremos que o limite (3.20) tornar-se-á:

$$0 \leq \sinh^2 r'/a \leq \sinh^2 R'_c/a = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$$

Consequentemente, no limite teremos:

$$R'_c = a \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}} \quad (3.21)$$

Assim, no caso em que $\Omega \rightarrow 0$ (ou $a \rightarrow \infty$), o domínio de validade do sistema gaussiano é estendido por toda a variedade, conforme podemos ver pela expressão (3.21) acima. Esta dependência direta com a vorticidade já era esperada, uma vez que, como vimos na seção [3.2], a geometria de Gödel, no limite $\Omega \rightarrow 0$, não é outra senão a geometria de Minkowski.

2. Comparando os limites das regiões causais SG I – apresentada neste trabalho – e $\gamma = 0$ – apresentada no trabalho de Novello et al. [9] –, concluímos que o domínio da região SG I é menor do que aquele exibido em [9] ($R_c = \text{arcsh} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}} < r_c = \text{arcsh} 1$), apesar de representarem a mesma situação física: pontos-eventos do espaço-tempo descritos sob o ponto de vista de observadores geodésicos situados na origem do sistema de coordenadas.

De fato, SG I também é caracterizado por $B_0 = 0$, assim como a região $\gamma = 0$ de [9]

1.

No entanto, notemos que SG I também se caracteriza por:

¹Recomendamos uma leitura prévia do ap. B desta tese ou da referência [9] para uma melhor compreensão deste capítulo.

$$\begin{cases} A_0 = \frac{\epsilon}{a} \\ C_0 = 0 \\ D_0 = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Como, $D_0^2 = \frac{1}{a^2}(C_0^2 + \epsilon)$, onde $\epsilon = 0, +1$, conforme a geodésica for tipo-nulo ou tipo-tempo, respectivamente [9], concluímos que as geodésicas com que estamos caracterizando SG I são do tipo-tempo, indicando que os observadores não-acelerados são massivos.

De fato, apenas fótons (e outras partículas não-massivas) atingem o limite máximo causal:

$$r_c = \text{arcsh}1.$$

3.6 Propriedades Cinemáticas dos Observadores Fundamentais de SG I

Exporemos nesta seção os parâmetros cinemáticos associados aos observadores que seguem geodésicas ortogonais às hipersuperfícies tipo-espaço Σ definidas por $\tilde{t} = \text{cte}$.

Estes observadores serão denotados neste trabalho por Observadores Fundamentais de SG I, pois nossa descrição será apenas local, uma vez que este sistema de coordenadas é limitado. São eles, em coordenadas gaussianas, por definição:

$$l^\mu = \delta_0^\mu \tag{3.22}$$

e, em coordenadas cilíndricas são dados por (3.3).

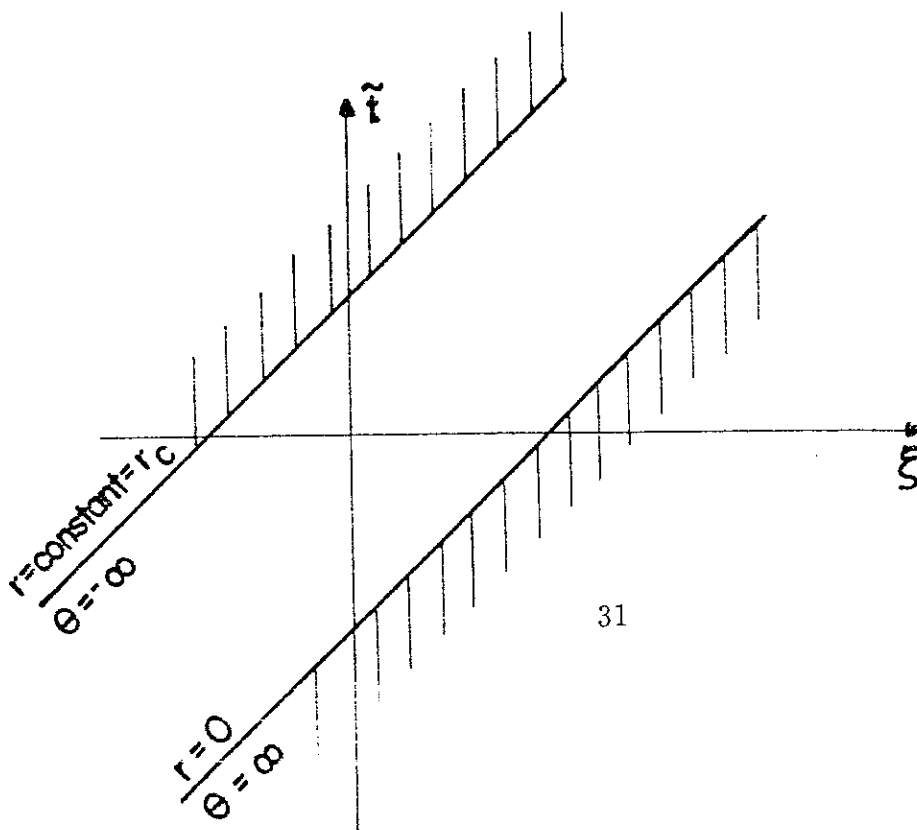
Os parâmetros cinemáticos associados a eles são, em coordenadas gaussianas:

a. Expansão (Θ):

$$\begin{aligned} \Theta &= l_{;\mu}^{\mu} \\ &= \frac{\partial \sqrt{-\tilde{g}} / \partial \tilde{t}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \\ &= \frac{-2}{a} \sqrt{\mu^2 + 1} \tan M \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observemos que $\sqrt{-\tilde{g}}$ é nulo em $r = 0$ e em $r = r_c$, de modo que Θ diverge nesses dois pontos. Isto quer dizer que as geodésicas, ao se aproximarem destas superfícies, formam uma caústica (cf. Hawking [21]). De fato, analisando a expressão (3.23), vemos que $\Theta(r = 0) \rightarrow +\infty$ e $\Theta(r = R_c) \rightarrow -\infty$, corroborando o resultado (3.19) que SG I é realmente limitado e que os observadores fundamentais (ou geodésicos) estão confinados dentro do limite deste sistema.

Vemos abaixo, o esquema do limite de SG I no plano $(\tilde{t}, \tilde{\xi})$. A região causal é limitada pelas superfícies $\Theta \rightarrow +\infty$ e $\Theta \rightarrow -\infty$.



b. Aceleração (A^μ):

$$A^\mu = l^\mu{}_{;\nu} l^\nu = 0$$

c. Shear ($\sigma_{\mu\nu}$):

$$\sigma_{\mu\nu} = h_\mu^{(\alpha} h_\nu^{\beta)} l_{(\alpha;\beta)} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}$$

As únicas componentes não-nulas do shear são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = -\frac{1}{3} \Theta \tilde{g}_{11} \\ \sigma_{12} = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{\mu^2-1}{\sqrt{\mu^2+1}} [\cos M - \frac{2}{3} \tan M (1 - \sin M)] \\ \sigma_{22} = -\frac{a}{2} \frac{\mu^2-1}{(\mu^2+1)^{3/2}} \cos M [2 + \sin M (\mu^2 - 1)] - \frac{1}{3} \Theta \tilde{g}_{22} \\ \sigma_{33} = \frac{-1}{3} \Theta \tilde{g}_{33} \end{array} \right.$$

d. Rotação ($\omega_{\mu\nu}$):

$$\omega_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta l_{[\alpha;\beta]} = 0$$

Portanto, os observadores fundamentais de SG I não possuem rotação por construção. No entanto, as partículas que compoem o fluido que gera gravitação neste modelo possuem rotação.

O fluxo de matéria, que em coordenadas cilíndricas é:

$$V^\mu = \frac{1}{a} \delta_0^\mu$$

em coordenadas gaussianas se escreve:

$$\tilde{V}^\mu = (\mu, 1/a, 0, 0)$$

O produto escalar entre a quadri-velocidade da matéria (fluxo) e a quadri-velocidade dos observadores fundamentais é:

$$l^\mu \tilde{V}_\mu = \mu \quad (3.24)$$

Concluimos então que a constante μ possui um significado geométrico: ele mede o quanto a matéria que compõe o fluido gerador da geometria se desvia das curvas geodéticas tipo-tempo no sistema gaussiano local construído neste capítulo.

Para finalizar, os vetores de Killing em termos das coordenadas gaussianas-I são:

$$\vec{K}_1 = \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}$$

$$\vec{K}_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$$

$$\vec{K}_3 = \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}}$$

$$\begin{aligned} \vec{K}_4 = & \left\{ \mu \sqrt{2} \tanh r \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}} \left[\frac{2\mu}{\cosh r} - \mu^2 - 1 \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \\ & + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{a} \tanh r \sin \varphi - \frac{\mu \cos \varphi}{a \sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}} [\cosh r - 2/\cosh r] \right\} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \\ & + \left\{ \frac{2}{a} \coth 2r \sin \varphi - \frac{\cos \varphi \mu \sqrt{2}}{a \cosh r \sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}} \right\} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \end{aligned}$$

$$\vec{K}_5 = \left[\mu \sqrt{2} \tanh r \cos \varphi + \frac{\sin \varphi [2\mu/\cosh r - \mu^2 - 1]}{\sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}} \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\sqrt{2}}{a} \tanh r \cos \varphi + \frac{\mu \sin \varphi [a / \cosh r - \cosh r]}{a \sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \\
& + \left[\frac{2}{a} \coth 2r \cos \varphi + \frac{\mu \sqrt{2} \sin \varphi}{a \cosh r \sqrt{\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1) \sinh^2 r}} \right] \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \quad (3.25)
\end{aligned}$$

e estes refletem as simetrias do espaço-tempo dentro do qual estes vetores estão definidos.

Através da análise de $\vec{K}_1, \vec{K}_2 \epsilon \vec{K}_3$, vemos que a variedade é estacionária e possui simetrias rotacional e cilíndrica.

No capítulo seguinte discutiremos a possibilidade de estendermos os sistemas gaussianos de coordenadas de modo a cobrir toda a variedade da solução de Gödel e mostraremos uma natural extensão para o SG I definido neste capítulo.

Capítulo 4

Extensão dos Sistemas Gaussianos de Coordenadas

4.1 Introdução

No capítulo anterior vimos que, uma vez escolhido um ponto \mathcal{P} arbitrário como origem do sistema gaussiano I, as geodésicas que passam por este ponto estão confinadas a um domínio de raio $R_c = \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}}$. Esta propriedade de confinamento (característica inerente da solução de Gödel) impossibilita uma continuação analítica de SG I através de regiões exteriores ao seu domínio. No entanto, uma vez que os parâmetros λ_i das transformações de coordenadas (3.13) são arbitrários, nada nos impede de escolhermos novos valores para estes parâmetros e definirmos novos sistemas gaussianos (locais), de modo que a sua união cubra a geometria de Gödel globalmente.

A extensão do Sistema Gaussiano I, portanto, é o objetivo deste capítulo.

4.2 Sistema de Coordenadas Gaussianas II

Como foi dito na seção [3.4] do capítulo anterior, uma vez encontrado um sistema de coordenadas gaussianas, estamos definindo matematicamente uma família de hiper-

superfícies 3-dimensionais tipo-espaço Σ_{II} as quais são interceptadas uma única vez por um conjunto de geodésicas tipo-tempo. Isto é equivalente a se definir um novo tempo **local** \tilde{t}_{II} através da escolha de uma nova classe de geodésicas tipo-tempo. Assim, como fizemos na seção [3.4], devemos aqui também identificar as geodésicas ortogonais às novas hipersuperfícies definidas por $\tilde{t}_{II} = \text{constante}$.

Sem perda de generalidade, arbitramos os seguintes valores para os parâmetros λ_i das transformações (3.13):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \equiv \mu a \\ \lambda_2 \equiv \nu a \\ \lambda_3 \equiv 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

As geodésicas no sistema de coordenadas gaussianas são definidas por:

$$p^\mu = \delta_0^\mu$$

Consequentemente, as geodésicas ortogonais a Σ_{II} no sistema de coordenadas cilíndricas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{II}^0 = \frac{1}{a^2 \cosh^2 r} [\mu(1 - \sinh^2 r) + \sqrt{2}\nu] \\ W_{II}^1 = \frac{1}{a \cosh r \sinh r} [(\mu^2 - 1) \cosh^2 r \sinh^2 r - (\sqrt{2}\mu \sinh^2 r - \nu)^2] \\ W_{II}^2 = \frac{1}{a \cosh^2 r \sinh^2 r} [\sqrt{2}\mu \sinh^2 r - \nu] \\ W_{II}^3 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Com os seguintes valores para as constantes $A_0, B_0, C_0 \text{ e } D_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{\mu}{a} \\ B_0 = \frac{\nu}{a} \\ C_0 = 0 \\ D_0 = \frac{1}{a} \end{array} \right.$$

de modo que as constantes γ e β^2 de (B.4) têm os valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{\nu}{\mu} \\ \beta^2 = \frac{1}{\mu^2} \end{array} \right.$$

A transformação de coordenadas (3.13) com os valores (4.1) que arbitramos para os parâmetros λ , torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t}_2 = \mu at + \nu a\varphi + \frac{a}{2}\sqrt{\mu^2 + 1} \arcsin \Psi_2 - \frac{\nu a}{2} \arcsin \chi_2 + \frac{a}{2}(\nu + \sqrt{2}\mu) \arcsin \Delta_2 \\ \tilde{\xi}_2 = t + \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 1}} \arcsin \Psi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta_2 \\ \tilde{\eta}_2 = \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \Delta_2 - \frac{1}{2} \arcsin \chi_2 \\ \tilde{z}_2 = z \end{array} \right. \quad (4.3)$$

no qual definimos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{q}}[-2(\mu^2 + 1) \sinh^2 r + 2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2 - 1] \\ \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{q}} \left[\frac{(2\sqrt{2}\mu\nu + 3\mu^2 + 1) \sinh^2 r - (\mu + \sqrt{2}\nu)^2 + 1}{\sinh^2 r + 1} \right] \\ \Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{q}} \left[\frac{-2\nu^2 + (2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2) \sinh^2 r}{\sinh^2 r} \right] \\ q \equiv (2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2 - 1)^2 - 4\nu^2(\mu^2 + 1) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Chamaremos de agora em diante este novo sistema de SG II.

A métrica de Gödel em termos destas novas coordenadas se escreve:

$$d\tilde{s}_2^2 = d\tilde{t}_2^2 - a^2(\mu^2 - 1)d\tilde{\xi}_2^2 + 2a^2(\sqrt{2}x - \mu\nu)d\tilde{\xi}_2d\tilde{\eta}_2 + a^2[x(x-1) + \nu^2]d\tilde{\eta}_2^2 - a^2d\tilde{z}_2^2 \quad (4.5)$$

onde x se reescreve como:

$$x = \frac{\sqrt{g}}{2(\mu^2 + 1)} \sin M_2 - \frac{2\sqrt{2}\mu\nu + \mu^2 - 1}{2(\mu^2 + 1)}$$

com,

$$M_2 = \frac{2}{a}\sqrt{\mu^2 + 1}(\tilde{t}_2 - \mu a\tilde{\xi}_2 - \nu a\tilde{\eta}_2) \quad (4.6)$$

As coordenadas $\tilde{\xi}_2$, $\tilde{\eta}_2$ e \tilde{z}_2 estão definidas sobre a hipersuperfície 3-dimensional Σ_{II} e variam de $-\infty < \tilde{\xi}_2 < +\infty$, $0 \leq \tilde{\eta}_2 \leq 2\pi$ e $-\infty < \tilde{z}_2 < +\infty$, respectivamente. A coordenada temporal \tilde{t}_2 está definida sobre o segmento real \mathcal{R} e varia de $-\infty < \tilde{t}_2 < +\infty$.

Da análise de SG I no capítulo anterior, vimos que $\mu^2 > 1$ necessariamente. Assim, a condição $0 < \beta^2 < 1$ nos garante a existência de SG II.

4.3 Propriedades Cinemáticas dos Observadores Fundamentais de SG II

Exporemos nesta seção os parâmetros cinemáticos associados aos observadores geodésicos ortogonais às hipersuperfícies Σ_{II} definidas por $\tilde{t}_2 = \text{constante}$. Assim como na seção [3.6] do capítulo anterior, estes observadores serão denotados aqui como fundamentais.

São eles, em coordenadas gaussianas, por definição:

$$p^\mu = \delta_0^\mu$$

e, em coordenadas cilíndricas são dados por (4.2).

Os parâmetros cinemáticos associados a eles são:

a. Expansão (Θ_2):

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= p_{;\mu}^\mu \\ &= -\frac{2}{a}\sqrt{\mu^2 + 1} \tan M_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim como no capítulo anterior, também neste caso há divergências no parâmetro de expansão. Estes pontos nos quais Θ_2 tende a $\pm\infty$ são:

$$\tilde{t}_2 - \mu a \tilde{\xi}_2 - \nu a \tilde{\eta}_2 = \pm \frac{\pi a}{4\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

b. Aceleração (A^μ):

$$A^\mu = p^\mu; \nu p^\nu = 0$$

c. Shear ($\sigma_{\mu\nu}$):

Os únicos componentes não-nulos do parâmetro de deformação (ou shear) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = -\frac{1}{3}\Theta_2\tilde{g}_{11} \\ \sigma_{12} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{\frac{q}{\mu^2+1}}\cos M_2 - \frac{1}{3}\Theta_2\tilde{g}_{12} \\ \sigma_{22} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{q}{\mu^2+1}}\left[\frac{(2\sqrt{2}\mu\nu+\mu^2-1)-\sqrt{q}\sin M_2}{\mu^2+1}\right] - \frac{1}{3}\Theta_2\tilde{g}_{22} \\ \sigma_{33} = -\frac{1}{3}\Theta_2\tilde{g}_{33} \end{array} \right.$$

onde q , M_2 e Θ_2 são dados respectivamente por (4.4), (4.6) e (4.7).

d. Rotação ($\omega^{\mu\nu}$):

$$\omega^{\mu\nu} = 0$$

Como em Gauss-I, os observadores fundamentais de Gauss-II também não possuem rotação, por construção.

O ângulo entre o fluxo de matéria $\tilde{V}^\alpha = (\mu, 1/a, 0, 0)$ e a 4-velocidade dos observadores geodésicos de SG II $p^\alpha = \delta_0^\alpha$ é:

$$\tilde{V}^\alpha p_\alpha = \mu$$

Este é exatamente o mesmo resultado encontrado em (3.23). Isto reflete a propriedade de continuidade entre os sistemas gaussianos I e II que faz com que os observadores fundamentais destes dois sistemas coincidam no limite $\nu \rightarrow 0$.

4.4 Extensão dos Sistemas Gaussianos para Regiões Exteriores a SG I e SG II

Para finalizar a nossa rápida inspeção acerca do sistema Gauss-II, vamos aqui discutir a extensão dos sistemas gaussianos locais por toda a variedade da solução de Gödel, fazendo um breve resumo do que foi feito nos capítulos anteriores.

Devido à propriedade de confinamento do campo gravitacional deste modelo, vimos que podemos construir apenas sistemas gaussianos locais. De acordo com o “ansatz” introduzido em (3.11) para a resolução da equação de Hamilton-Jacobi (3.6) encontramos um conjunto de transformações capazes de fazer a passagem do sistema cilíndrico para

o sistema de Gauss. Assim, de posse das transformações (3.13), escolhemos dentre todas as classes de sistemas gaussianos o mais simples, que denotamos de Gauss-I e que definimos por $\lambda_1 = \mu a$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Este sistema é limitado a uma região do espaço-tempo de Gödel. Isto é, arbitrando-se um ponto qualquer desta variedade como origem $r = 0$, SG I cobre apenas o intervalo $0 \leq r \leq R_c = \text{arcsch} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}}$. Seguindo o mesmo raciocínio, escolhemos novos valores para os parâmetros λ_i e encontramos um novo sistema gaussiano: Gauss-II, definido por $\lambda_1 = \mu a$, $\lambda_2 = \nu a$ e $\lambda_3 = 0$. Este sistema depende, não só do parâmetro μ , mas também do parâmetro ν e está definido no intervalo $r_1 \leq r \leq r_2$, onde $r - 1$ pode ser $r_1 \leq R_c$. Isto é, pode haver interseção entre os dois sistemas gaussianos. Podemos proceder desta forma indefinidamente, de modo que cobriremos toda a geometria. Cada um dos N sistemas gaussianos apresentará métrica com a forma generalizada:

$$d\tilde{s}_N^2 = d\tilde{t}_N^2 - a^2(\mu^2 - 1)d\tilde{\xi}_N^2 + 2B(\tilde{t}_N, \tilde{\xi}_N)d\tilde{\xi}_N d\tilde{\eta}_N + C(\tilde{t}_N, \tilde{\xi}_N)d\tilde{\eta}_N^2 - a^2 d\tilde{z}_N^2 \quad (4.8)$$

onde B e C são funções que dependem da particular escolha dos parâmetros arbitrários λ_i .

Assim, através da união infinita de sistemas gaussianos locais (Gauss-I, Gauss-II, etc.), podemos cobrir toda a variedade da solução de Gödel. No limite em que $\lambda_2, \lambda_3 \rightarrow 0$ e $\lambda_1 \rightarrow \mu a$, teremos Gauss- $N \rightarrow$ Gauss-I.

Capítulo 5

As Curvas do Tipo-Tempo Fechadas

5.1 Introdução

O modelo de Gödel admite um vetor de Killing tipo-tempo global $\vec{K}_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}$. No entanto, este modelo tem a propriedade de admitir também um vetor de Killing que é tipo-espaço no interior da região causal ($0 \leq r \leq r_c$) e que muda a sua assinatura na região exterior à região causal ($r > r_c$)¹.

Facilmente observamos que as curvas integrais de \vec{K}_3 (com $t = r = z = \text{constantes}$) são curvas do tipo-tempo fechadas para $r > r_c$, pois φ varia no intervalo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Como sabemos, estas curvas não são geodésicas, de modo que uma partícula teste

1

$$K_3^\mu = \frac{\partial}{\partial \varphi} = (0, 0, 1, 0)$$

$$K_\mu^3 = (\sqrt{2}, 0, \sinh^2 r - 1, 0)$$

Então, temos:

$$K^\mu K_\mu = a^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1)$$

para $\sinh^2 r < 1$, o vetor é tipo-espaço;

para $\sinh^2 r > 1$, o vetor é tipo-tempo.

submetida somente ao campo gravitacional desta solução não percorre estas trajetórias.

Neste capítulo mostraremos como induzir uma partícula carregada a seguir trajetórias fechadas no tempo.

5.2 Indução de Partículas Carregadas Através da Combinação dos Campos Eletromagnético e Gravitacional a Percorrerem Curvas do Tipo-Tempo Fechadas

Muito se tem falado acerca das “máquinas do tempo” e de possíveis viagens de volta ao passado, inclusive através do uso de “wormholes” generalizados e adaptados a estas viagens [22], [23]. No entanto, ao estudarmos a solução cosmológica proposta por Gödel, encontramos “máquinas do tempo” naturais e características desta geometria: as curvas do tipo-tempo fechadas. Assim, ao discutirmos este problema, nós nos deparamos com as seguintes questões:

i. É possível a uma partícula real (de propriedades físicas conhecidas) viajar de volta ao passado?

ii. Se possível, então como induzir tal viagem?

Uma vez que a questão de “viagem de volta ao passado” é fundamentada em propriedades globais do espaço-tempo, e uma vez que, apenas submetida ao campo gravitacional, a partícula não segue curvas fechadas tipo-tempo, este movimento será induzido através da combinação entre os campos Eletromagnético e Gravitacional.

Assim, consideremos uma partícula carregada (o elétron ou o positron, por exemplo) submetida a estes dois campos e que segue a trajetória Γ , em coordenadas cilíndricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t_0 = \text{constante} \\ r = r_0 > r_c = \text{constante} \\ z = z_0 = \text{constante} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

As equações de Einstein para o modelo de Gödel devem ser acrescidas das equações de Maxwell do Eletromagnetismo:

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.1)$$

Além disso, para que as equações de Einstein permaneçam inalteradas após a introdução do campo Eletromagnético externo, este último será considerado como induzindo uma pequena perturbação sobre a geometria. Apenas por simplificação, nos restringiremos a um campo magnético puro que, em relação aos observadores comóveis com a matéria fonte da gravitação, tem como única componente não-nula:

$$F^{12} = H$$

e está direcionado ao longo do eixo z .

Resolvendo as equações (5.1) para a métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas (3.1), encontramos o campo magnético H :

$$H(r) = \frac{H_0}{\sinh 2r}$$

Afim de que o campo magnético seja uma perturbação no “background” de Gödel, a densidade de energia do campo Eletromagnético deve ser muito menor do que a densidade de energia do campo Gravitacional.

O tensor de momentum-energia do campo eletromagnético é dado por [13] [25] :

$$T_{(EM)}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} [F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}]$$

Usaremos, por questão de simplicidade, o referencial local de tetradas $(\eta^{AB} e_A^{(\alpha)} e_B^{(\beta)} = g^{\alpha\beta})$ para o cálculo das densidades de energia.

Em Gödel, é comum se escolher o seguinte conjunto de tetradas $e_{(\alpha)}^A$ [19]:

$$\begin{cases} e_{(0)}^0 = e_{(1)}^1 = e_{(3)}^3 = a \\ e_{(2)}^0 = a\sqrt{2} \sinh^2 r \\ e_{(2)}^2 = a \sinh r \cosh r \end{cases}$$

Assim, a densidade de energia do campo eletromagnético é dada por:

$$T_{00}^{(EM)} = \frac{a^4}{4} H_0^2$$

e a do campo gravitacional é uma constante dada por [19]:

$$T_{00}^{(G)} = \rho = \frac{4}{a^2}$$

Comparando estas duas densidades, devemos impor a restrição:

$$H_0 \ll \frac{16}{a^6} \tag{5.2}$$

como condição necessária e suficiente para que o campo Eletromagnético externo não modifique a geometria original.

Concluimos assim que o efeito da combinação entre o campo gravitacional (que rege as propriedades geométricas e que se faz sentir através dos símbolos de Christoffel) e o campo magnético (que age através da força de Lorentz) leva o elétron a percorrer uma órbita circular em torno do eixo- z com velocidade dada por:

$$b^\mu = (0, 0, \frac{1}{a \sinh r (\sinh^2 - 1)^{1/2}}, 0)$$

e cuja aceleração vale:

$$\dot{b}^\mu = (0, \frac{\cosh r (2 \sinh^2 - 1)}{a^2 \sinh r (\sinh^2 - 1)}, 0, 0)$$

Para encontrarmos o valor da constante H_0 de (5.2), para um dado raio fixo $r_0 > r_c$, usaremos a segunda lei de Newton, uma vez que já possuímos a aceleração da partícula, bem como sua velocidade e massa, restando-nos apenas calcular a constante existente no valor do campo magnético:

$$H_0 = \frac{2Mc \cosh^2 r_0 (2 \sinh^2 r_0 - 1)}{\epsilon a^3 \sinh r_0 (\sinh^2 r_0 - 1)^{3/2}}$$

Logo, numa região externa ao domínio de Gauss-I, o elétron, submetido aos dois campos, percorre uma trajetória fechada e acelerada. Além disso, observemos que, em relação ao referencial do elétron, o campo $F^{\mu\nu}$ não é um campo magnético puro, existindo também uma componente elétrica não-nula:

$$E_\mu = F_{\mu\nu} b^\nu = F_{\mu 2} b^2 \neq 0$$

Se, ao invés de escolhermos o elétron, o nosso exemplo for o pósitron, devemos reverter a direção do campo magnético, afim de que ele percorra a mesma trajetória Γ .

Concluimos este capítulo observando que, ao construirmos um novo sistema gaussiano (Gauss-II) numa região $r > R_c$ é que ao definirmos um novo tempo \tilde{t}_2 que nos garante uma região causal com passado e futuro bem definidos, a trajetória Γ cruza a superfície gaussiana Σ_{II} em apenas um ponto. Assim, para o observador fundamental de Gauss-II, não há violação de Causalidade no comportamento do elétron (ou do pósitron). No entanto, para o observador solidário ao movimento desta partícula acelerada, parece, de fato, ocorrer uma “viagem de volta ao passado”. Como são dois pontos de vista baseados em particulares referenciais, não existe qualquer contradição entre eles.

Capítulo 6

Teoria de Campos em Regiões Causais

6.1 Introdução

Ao descrevermos o Universo de Gödel sob o ponto de vista dos observadores gaussianos, estabelecemos naturalmente um folheamento deste espaço-tempo em hipersuperfícies 3-dimensionais tipo-espaço. No entanto, estes sistemas gaussianos não podem ser estendidos por toda a variedade, resultando daí um folheamento não completo desta geometria.

Assim, tentaremos neste capítulo construir uma Teoria de Campos, restringido-nos à região do Universo de Gödel definida pelo sistema gaussiano de coordenadas, onde sabemos ser garantida a propagação causal dos campos e de suas derivadas.

6.2 O Modelo de Universo de Milne e a Região Gauss-I

Nesta seção, faremos um breve resumo do modelo cosmológico proposto por E. Milne em 1932 e que nos ajudará a compreender a região descrita pelo sistema de Gauss-I,

exposto nos capítulos precedentes.

O modelo de Milne é espacialmente homogêneo e isotrópico e consiste em um número infinito de partículas fundamentais, sem massa e sem volume (“ghosts” ou “fantasmas”), lançadas aleatoriamente em todas as direções e possuindo todas as velocidades possíveis ($v \leq c$), no momento único da singularidade inicial \mathcal{C} . Uma vez que as partículas não estão submetidas a qualquer interação elas mover-se-ão uniforme e radialmente em relação à origem \mathcal{C} , de um referencial inercial $S(t, x^i)$.

Como este modelo é isotrópico e homogêneo, um observador comóvel a cada partícula considerar-se-á o centro do movimento de expansão iniciado na origem \mathcal{C} e, portanto, verá as outras partículas afastando-se radialmente de si próprio.

De fato, consideremos a métrica de Minkowski em relação ao referencial S em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (6.1)$$

onde a origem \mathcal{C} ocorre em $t = r = 0$.

Façamos agora uma transformação de coordenadas do referencial S para o referencial comóvel $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$, onde τ é o tempo próprio de cada observador acoplado a cada uma das partículas e ρ a sua nova coordenada comóvel:

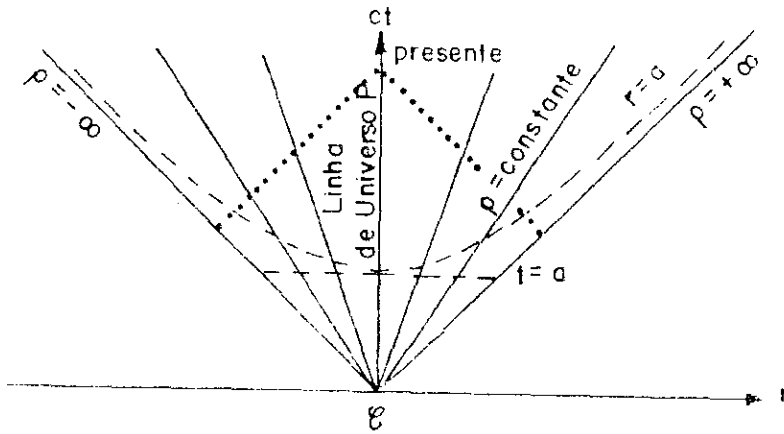
$$\begin{cases} t = \tau \sinh \psi \\ r = \tau \cosh \psi \\ \theta' = \theta \\ \varphi' = \varphi \end{cases}$$

onde, $\sinh \psi = \rho$.

A métrica então torna-se:

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 \left[\frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (6.2)$$

Temos, assim, a seguinte situação:



As linhas $\rho = \text{constante}$ entre os valores $\rho = \pm\infty$ representam as linhas de Universo de cada partícula fundamental enquanto que as linhas $\rho = \pm\infty$ representam os limites do

Universo que cada partícula observa. Em outras palavras, como o Universo é homogêneo e isotrópico, cada partícula é o centro do movimento iniciado na singularidade \mathcal{C} e possui seu Universo “particular” limitado entre os valores $v = \pm 1$ (porque arbitramos $c = 1$) ou $\rho = \pm\infty$. O parâmetro de expansão Θ , medido pelos observadores comóveis $V^\alpha = \delta_0^\alpha$, é proporcional a $1/\tau$ e, portanto, diverge no ponto \mathcal{C} . De fato,

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d\sqrt{-g}}{d\tau}$$

Mas,

$$\sqrt{-g} = \frac{\tau^3 \rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1 + \rho^2}}$$

Então, temos:

$$\Theta = \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{\tau^3 \rho^2 \sin \theta} \frac{3\tau^2 \rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1 + \rho^2}} = \frac{3}{\tau}$$

Após esse breve estudo do modelo de Milne, podemos agora entender o que ocorre na região Gauss-I, cujos observadores fundamentais têm comportamento análogo ao comportamento dos observadores “fantasmas” de Milne.

No modelo de Gödel, vimos que os observadores geodésicos que passam por um ponto arbitrário \mathcal{O} ($r = 0$) estão confinados à região $0 \leq r \leq R_c = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$. Nestes limites, o parâmetro de expansão diverge, como vimos na figura [3.1].

Desta forma, assim como no modelo de Milne, cada observador fundamental de Gauss-I possui o seu “particular” Universo, que tem início em $r = 0$ (em relação ao referencial de cada partícula) como um falso Big-Bang, e que termina em $r = R_c$, limite em que o parâmetro Θ é infinito, criando-se um horizonte fictício.

As superfícies $\tilde{t} - \mu a \tilde{\xi} = \text{constante}$ (ou $r = ct$) representam os falsos Big-Bangs (ou equivalentemente, horizontes fictícios) em relação a cada observador geodésico. Em outras palavras, uma vez que o espaço-tempo é homogêneo, cada superfície $\tilde{t} - \mu a \tilde{\xi} = \text{constante}$ pode ser considerada como origem do referencial do observador fundamental, podendo assim ser considerado um falso Big-Bang.

Da análise das geodésicas neste modelo, sabemos que a região Gauss-I é a máxima região causal nesta geometria.

O vetor normal às superfícies-limites desta região - $S : \tilde{t} - \mu a \tilde{\xi} = \pm \frac{\pi a}{4\sqrt{\mu^2+1}}$ - são do tipo-espaço. De fato,

$$N_\mu = \partial_\mu S = (1, -\mu a, 0, 0)$$

$$N^\mu = \left(1, \frac{\mu[(\mu^2 + 3) + (\mu^2 - 1)\sin M]}{a(\mu^2 - 1)(\mu^2 + 1)(1 + \sin M)}, \frac{2\sqrt{2}\mu}{a(\mu^2 - 1)(1 + \sin M)}, 0 \right)$$

Então, temos:

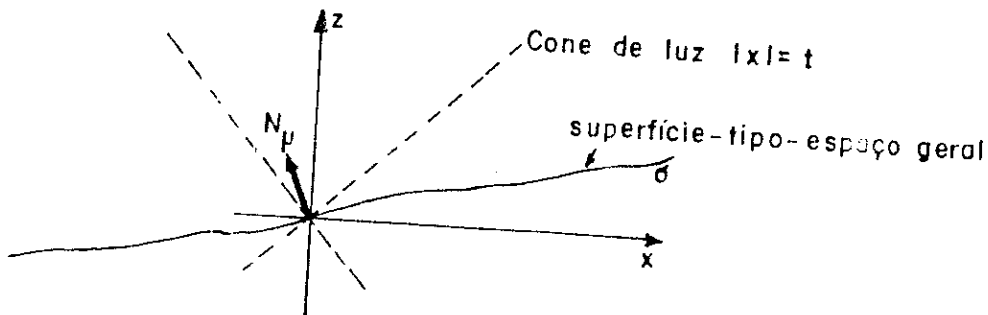
$$N^\mu N_\mu = \frac{-(1 + \sin M) - \mu^2(3 - \sin M)}{(\mu^2 - 1)(\mu^2 + 1)(1 + \sin M)} < 0$$

Portanto, as superfícies $\Theta = \pm\infty$ que delimitam o sistema de coordenadas gaussianas na região causal I são “orientadas” na direção temporal.

6.3 Quantização Canônica do Campo Escalar na Região Causal

Na Teoria de Campos, seja ela clássica ou quântica, é necessário, antes de tudo, se definir uma hipersuperfície tipo-espaço sobre a qual especificamos as condições iniciais e as relações de comutação entre os campos [24], [26].

Por hipersuperfície tipo-espaço entendemos uma superfície 3-dimensional σ cujo vetor normal $N_\mu \equiv \partial_\mu \sigma$ é sempre tipo-tempo ($N_\mu N^\mu > 0$), como exemplificado na figura abaixo.



Após a escolha desta hipersuperfície, que nos garante a propagação causal dos campos, o processo de quantização canônica possui três passos principais:

1. Encontrar a lagrangeana que descreve o sistema e, através do Princípio de Hamilton, encontrar as equações de campo;
2. definir a álgebra dos operadores;
3. construir o espaço de Hilbert associado aos estados físicos.

No nosso caso particular, estamos interessados no campo escalar real e não-massivo $\Phi(x^i, t)$, cuja lagrangeana é bastante conhecida:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$$

A equação de movimento derivada desta lagrangeana é a equação de Klein-Gordon:

$$\square\Phi(x^\mu) = 0 \quad (6.3)$$

onde \square é o operador d'Alembertiano.

O momento canonicamente conjugado a $\Phi(x^i, t)$ é definido por:

$$\Pi(x^i, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}}$$

onde, $\dot{\Phi} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

Por analogia à mecânica das partículas, temos que o Hamiltoniano é:

$$H = \Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi})$$

A quantização dos campos se dá quando associamos a eles uma álgebra dos operadores no espaço de Hilbert. Desta forma, eles obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[\Phi(x^i, t), \Phi(x^j, t)]_\sigma = 0$$

$$[\Pi(x^i, t), \Pi(x^j, t)]_\sigma = 0$$

$$[\Phi(x^i, t), \Pi(x^j, t)]_\sigma = i\delta^3(x^i - x^j)$$

O produto interno entre dois campos Φ_1 e Φ_2 é definido por:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = i \int_\sigma d\sigma \Phi_1^* \vec{\partial}_\mu \Phi_2 N^\mu \sqrt{-g_\sigma} \quad (6.4)$$

onde,

$$\begin{cases} \Phi_1^* \vec{\partial}_\mu \Phi_2 \equiv (\partial_\mu \Phi_1^*) \Phi_2 - \Phi_1^* (\partial_\mu \Phi_2) \\ N^\mu = \partial^\mu \sigma \end{cases}$$

e $\sqrt{-g_\sigma}$ é o determinante da métrica projetada sobre a hipersuperfície de Cauchy.

Este produto é conservado, de modo que independe da superfície sobre a qual fizermos a integral acima.

A ortogonalidade e a completeza das autofunções Φ_i são discutidas a partir do produto interno.

A ortogonalidade entre Φ_1 e Φ_2 é definida como:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

e a completeza do conjunto de autofunções Φ_i é garantida quando a diferença entre uma função arbitrária $f(x^j, t)$ e sua expansão $g_m(x^j, t) = \sum_{i=1}^m C_i \Phi_i(x^j, t)$ (com $C_i = \text{constantes}$.) é arbitrariamente pequena.¹ Isto é:

$$(f - g_m, f - g_m) \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Finalmente, tanto o campo Φ quanto o seu momento canonicamente conjugado Π evoluem segundo a equação de Heisenberg:

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = i[H, \Phi] \\ \dot{\Pi} = i[H, \Pi] \end{cases}$$

¹Um conjunto de autofunções é dito completo quando pode ser tomado como base no espaço de Hilbert em que está definido.

Vamos agora considerar a Teoria de Campos no Universo de Gödel.

A Teoria Clássica do Campo Escalar neste espaço-tempo já foi estudada e a equação de Klein-Gordon resolvida [14], [27], [28].

A equação de Klein-Gordon para a métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas se escreve [28]:

$$\square\Phi = \frac{\Delta^2 - h^2}{\Delta^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{\Delta'}{\Delta} \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{2h}{\Delta^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial\varphi} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.5)$$

onde:

$$\begin{cases} \Delta = \sinh r \cosh r \\ h = \sqrt{2} \sinh^2 r \\ \Delta' = \sinh^2 r + \cosh^2 r \end{cases}$$

Para resolver esta equação, introduzimos modos invariantes Φ_i associados aos vetores de Killing ∂_t , ∂_φ e ∂_z com os quais podemos fazer uma separação de variáveis em (6.5).

Assim, temos:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\partial_z}\Phi_2 = -ik\Phi_2 \\ \mathcal{L}_{\partial_\varphi}\Phi_1 = -im\Phi_1 \\ \mathcal{L}_{\partial_t}\Phi_0 = -i\epsilon\Phi_0 \end{cases}$$

onde \mathcal{L}_{K_i} é a derivada de Lie ao longo dos vetores de Killing K_i . Suas soluções são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2 \approx e^{-ikz} \\ \Phi_1 \approx e^{-im\varphi} \\ \Phi_0 \approx e^{-ict} \end{array} \right.$$

Deste modo, o campo Φ pode ser escrito como:

$$\Phi_{m\kappa\epsilon} = R(r)e^{-i(m\varphi+kz+ct)} \quad (6.6)$$

Como ∂_t é um vetor de Killing tipo-tempo global e é também responsável pelas translações temporais, a equação:

$$\mathcal{L}_{\partial_t}\Phi_0 = -i\epsilon\Phi_0$$

é interpretada como a equação que define os modos invariantes de energia.

Substituindo (6.6) em (6.5), temos:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\Delta'}{\Delta} \frac{dR}{dr} + \left[\epsilon^2 \frac{(\Delta^2 - h^2)}{\Delta^2} - \frac{m^2}{\Delta^2} - \frac{2h\mu\epsilon}{\Delta^2} - k^2 \right] R = 0$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis, tal que:

$$x \equiv \cosh 2r = \sinh^2 r + \cosh^2 r$$

temos:

$$(x^2 - 1) \frac{d^2R}{dx^2} + 2x \frac{dR}{dx} + \left[\frac{\epsilon^2 + \sqrt{2}\mu\epsilon}{x+1} - \frac{m^2}{x^2-1} - \frac{(\epsilon^2 + k^2)}{4} \right] R = 0$$

Reescrevendo $R(x)$ como:

$$R(x) = (x^2 - 1)^{m/2}(x + 1)^{\sqrt{2}\epsilon/2}X(x)$$

e fazendo-se uma nova mudança de variáveis:

$$y = \frac{1 - x}{2}$$

temos:

$$y(1 - y)\frac{d^2X}{dy^2} + [c - (a + b + 1)y]\frac{dX}{dy} - abX = 0$$

onde,

$$\begin{cases} a = m + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} + \frac{n}{2} \\ b = m + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\epsilon}{2} - \frac{n}{2} \\ c = m + 1 \\ n \equiv \sqrt{\epsilon^2 + k^2} \end{cases}$$

A equação acima é conhecida como a Equação Hipergeométrica [29] e, apesar de conhecermos suas soluções [28], não as usaremos neste trabalho, pois seus modos, face ao produto interno definido anteriormente, não formam um conjunto completo de soluções para todo o espaço-tempo [14]. A completeza dos modos é definida a partir do produto interno e este, por sua vez, é calculado sobre a superfície de Cauchy. Como a superfície de Cauchy, no Universo de Gödel, não pode ser estendida por toda a variedade, afirmamos que o folheamento é incompleto.

A Teoria de Campos feita em qualquer espaço-tempo, em sua atual formulação, baseia-se na evolução temporal do campo tomada a partir de uma superfície de Cauchy

completa (global). num determinado $t = t_0$, para uma outra superfície de Cauchy, também global e em um determinado $t > t_0$. Isto é, a Teoria de Campos baseia-se no fato de o espaço-tempo poder ser folheado em um conjunto completo de superfícies 3-dimensionais tipo-espaço.

Entretanto, a presença das curvas do tipo-tempo fechadas impede a construção de uma hipersuperfície de Cauchy $t = \text{cte.}$ global [14]. Assim, faremos um estudo da TQC no Universo de Gödel restringido-nos à região causal Gauss-I, onde, como sabemos dos capítulos precedentes, as curvas fechadas do tipo-tempo cruzam esta região apenas uma vez.

Seguindo a prescrição para a quantização canônica do campo escalar, devemos, antes de tudo, definir uma superfície de Cauchy na região Gauss-I.

Para descobrirmos qual é a superfície nesta região, levaremos em conta dois fatores:

1. O problema de Cauchy do valor inicial é bem definido quando o espaço-tempo pode ser folheado em uma família de superfícies 3-dimensionais tipo-espaço;

2. A existência de um vetor de Killing tipo-tempo é decisiva na construção de uma TQC na região causal, pois é ela que nos garante a invariância nos modos de energia positiva e negativa do campo escalar [27], [30], [31] e [26]. Analisando as equações (3.24) vemos que \vec{K}_1 é um vetor de Killing tipo-tempo globalmente ² e representa as translações temporais no sistema gaussiano.

2

$$K_1^\mu = (\mu, 1/a, 0, 0)$$

$$K_\mu^1 = (\mu, -a(\mu^2 - 1), a^2 h(\tilde{t}, \tilde{\xi}), 0)$$

Levando-se em consideração o primeiro dos fatores, escolhemos as superfícies gaussianas $\tilde{t} = \text{cte.}$ como as superfícies de Cauchy e nos restringiremos à região Gauss-I.

Uma vez que já temos definida a superfície nesta região, podemos agora seguir com o procedimento usual da Teoria de Campos.

A equação de Klein-Gordon sem o termo de massa e em coordenadas gaussianas se escreve:

$$\begin{aligned}
 \square\Phi &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{t}^2} - \frac{2}{a}\sqrt{\mu^2+1}\tan M\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{t}} \\
 &- \frac{1}{a^2(\mu^2-1)(\mu^2+1)}\frac{1}{1+\sin M}[\mu^2+3+(\mu^2-1)\sin M]\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{\xi}^2} \\
 &- \frac{4\sqrt{2}}{a^2(\mu^2-1)}\frac{1}{1+\sin M}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{\xi}\partial\tilde{\eta}} \\
 &- \frac{2\mu}{a^2(\mu^2-1)\sqrt{\mu^2+1}}\frac{1}{\cos M(1+\sin M)}[\mu^2+3+(\mu^2-1)\sin M - \cos^2 M]\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\xi}} \\
 &- \frac{4\sqrt{2}\mu\sqrt{\mu^2+1}}{a^2(\mu^2-1)}\frac{1}{\cos M(1+\sin M)}\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\eta}} \\
 &- \frac{4}{a}\frac{\mu^2-1}{\mu^2-1}\frac{1}{\cos M}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{\eta}^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{z}^2} = 0 \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

Para resolvermos esta equação, vamos introduzir modos invariantes associados aos vetores de Killing $\vec{K}_2 = 1/a\partial_{\tilde{z}}$ e $\vec{K}_3 = \partial_{\tilde{\eta}}$:

$$\mathcal{L}_{\vec{K}_2}\Phi_k = -ik\Phi_k$$

$$\mathcal{L}_{\vec{K}_3}\Phi_n = n\Phi_n$$

Então,

$$K_\mu K^\mu = \mu^2 - \frac{a(\mu^2-1)}{a} = 1 > 0$$

No entanto, em oposição à solução desta equação em coordenadas cilíndricas, não podemos fazer a separação de variáveis entre \tilde{t} e a coordenada “radial” $\tilde{\xi}$, uma vez que o vetor de Killing \vec{K}_1 , em coordenadas gaussianas, é uma combinação destas duas variáveis.

Assim, para resolvermos a equação de Klein-Gordon, decompos o campo Φ da seguinte forma:

$$\Phi_{nk}(x) = e^{n\tilde{t}} e^{-ik\tilde{z}} F(M) \quad (6.8)$$

onde M , como vimos, é uma função de $(\tilde{t}, \tilde{\xi})$.

Substituindo (6.8) em (6.7), temos:

$$\alpha(M)F'' + \beta(M)F' + \gamma(M)F = 0 \quad (6.9)$$

onde $F' = \frac{dF}{dM}$.

Os coeficientes α, β, γ valem, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(M) = \frac{(\mu^2-1)\sin M - (3\mu^2+1)}{(\mu^2-1)(\mu^2+1)(1+\sin M)} \\ \beta(M) = \frac{2\sqrt{2}n\mu}{(\mu^2-1)\sqrt{\mu^2+1}(1-\sin M)} - \tan M + \frac{\mu^2[(\mu^2+3)+(\mu^2-1)(\sin^2 M + \sin M - 1)]}{(\mu^2-1)(\mu^2+1)\cos M(1+\sin M)} \\ \gamma(M) = -\frac{\sqrt{2}n\mu}{(\mu^2-1)\sqrt{\mu^2+1}\cos M(1+\sin M)} - \frac{n^2}{(\mu^2-1)\cos^2 M} + \frac{k^2}{4(\mu^2+1)} \end{array} \right. \quad (6.10)$$

O momento canonicamente conjugado é dado por:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \quad (6.11)$$

e o produto escalar entre dois campos, segundo a definição dada anteriormente, é:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = i \int_{\sigma} \Phi_1^* \vec{\partial}_{\mu} \Phi_2 N^{\mu} \sqrt{-g_{\sigma}} d\sigma \quad (6.12)$$

onde $\vec{\partial}_{\mu}$ é o vetor de Killing tipo-tempo:

$$\vec{\partial}_{\mu} = \mu \vec{\partial}_t + \frac{1}{a} \vec{\partial}_{\xi}$$

e que corresponde, em coordenadas cilíndricas, ao vetor tangente à velocidade do fluxo de matéria. O determinante da métrica projetada sobre a hipersuperfície $\tilde{t} = \text{cte.}$ ($\sqrt{-g_{\sigma}}$) é dado por:

$$\sqrt{-g_{\sigma}} = \frac{a^3}{2} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} [(\mu^2 - 1)(1 - \sin^2 M)]^{1/2}$$

Assim, apesar de alguns autores [14] argumentarem que uma Teoria de Campos no Universo de Gödel não deve ser construída da maneira usual porque este Universo admite curvas do tipo-tempo fechadas, concluímos que este procedimento é possível se, antes de tudo, conseguirmos definir estruturas causais nesta geometria. Uma vez encontradas tais estruturas, podemos então garantir a validade do problema de Cauchy do valor inicial e esquematizar a quantização usual dos campos nesta variedade.

A análise completa da Teoria Quântica do Campo Escalar no Universo de Gödel, com a solução da equação (6.9), e a generalização destes resultados para outros Universos com rotação são perspectivas futuras de extensão deste trabalho.

Conclusão

Nesta tese construímos pela primeira vez um sistema gaussiano de coordenadas no Universo de Gödel.

Corroborando a observação sobre a impossibilidade de descrever globalmente o Universo de Gödel por um único sistema gaussiano, mostramos, através de cálculos diretos, como esta limitação está relacionada ao caráter confinante do campo gravitacional deste modelo. Cada sistema gaussiano encontrado define uma classe de observadores geodésicos que desempenham papel análogo aos observadores de Milne no Universo de Minkowski. Como consequência da arbitrariedade na escolha destas classes de observadores, definimos vários sistemas gaussianos locais e, através da sua união, mostramos que é possível cobrir toda a variedade.

Exibimos a seguir um mecanismo pelo qual partículas carregadas podem percorrer trajetórias fechadas do tipo-tempo. Provamos que a combinação de um campo magnético externo fraco (isto é, cuja densidade de energia pode ser desprezada em relação à densidade de energia da matéria, fonte da gravitação) e o campo gravitacional de Gödel imprime uma aceleração à partícula teste e esta move-se sobre uma curva tipo-tempo fechada.

Finalmente, a construção de um sistema \mathbb{R}^4 gaussiano local possibilitou um folheamento da região descrita por tais coordenadas. Desta forma, é possível, ainda que num domínio restrito desta variedade, examinar a propagação causal dos dados de Cauchy e, conseqüentemente, esquematizar uma Teoria de Campos no Universo de Gödel.

Apêndice A

Sistemas Gaussianos de Coordenadas

Em Relatividade Geral, não há restrições na escolha de um particular sistema de referência para se descrever o campo gravitacional. Contudo, mesmo diante deste “Princípio Democrático”, devemos escolher o que melhor se adapta às condições físicas impostas *a priori*.

Um dos sistemas mais interessantes e convenientes de serem utilizados em Gravitação é o Sistema Sincrónico de Coordenadas, que vamos expor brevemente neste Apêndice.

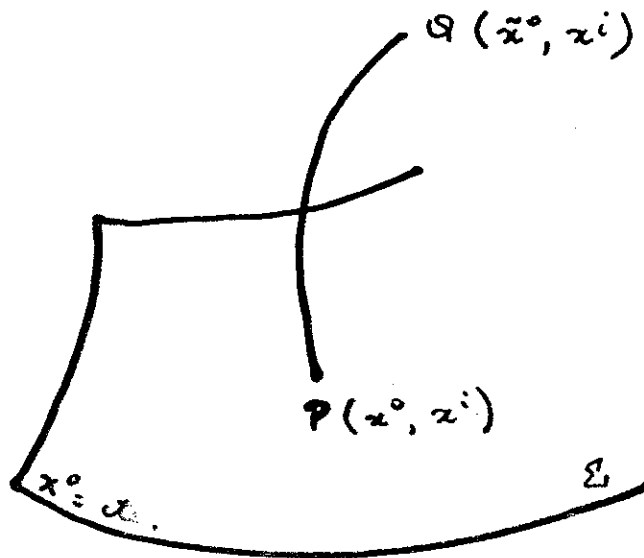
Consideremos uma hipersuperfície 3-dimensional Σ embebida no espaço 4-dimensional. Todo vetor normal à hipersuperfície Σ satisfaz à desigualdade:

$$n_\mu n^\mu > 0 \tag{A.1}$$

Isto é, n^μ é um vetor do tipo-tempo e Σ é uma hipersuperfície “orientada” no espaço.

Sejam x^i com $(i = 1, 2, 3)$ coordenadas que caracterizam um ponto $\mathcal{P} \in \Sigma$. Através deste ponto traçamos geodésicas ortogonais a Σ . Estas geodésicas formam uma família de curvas, que não se interceptam, tal que a cada ponto \mathcal{Q} pertencente a uma vizinhança

M de Σ corresponderá uma única geodésica [32], [20], conforme figura abaixo:



Desta forma, definimos coordenadas no espaço 4-dimensional tais que dado um ponto Q , consideraremos geodésica à curva normal a Σ que, passando por $P \in \Sigma$, chega a $Q \in M$.

Assim, definimos as novas coordenadas \tilde{x}^μ de Q da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^0 = \text{arco}\widehat{PQ} \\ \tilde{x}^1 = x^1 \\ \tilde{x}^2 = x^2 \\ \tilde{x}^3 = x^3 \end{array} \right.$$

Desta forma, as coordenadas x^i permanecem constantes ao longo de qualquer geodésica perpendicular a Σ . Daí, segue que, ao longo das geodésicas, temos:

$$ds^2 = (dx^0)^2$$

isto é:

$$g_{00} = 1 \tag{A.2}$$

Da condição de ortogonalidade das geodésicas em relação a Σ , resulta que todo vetor $(0, a, b, c) \in \Sigma$ é necessariamente ortogonal ao vetor $(1, 0, 0, 0)$ tangente a x^0 (geodésica), logo:

$$g_{0i} = 0 \tag{A.3}$$

Assim, uma métrica expressa em termos de coordenadas gaussianas tem a forma:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - g_{ij}dx^i dx^j \tag{A.4}$$

A conveniência de utilizarmos este sistema vem do fato de que a sincronização de relógios é automaticamente garantida [20], sendo por isso chamado de Sistema Sincrônico de Coordenadas. Além disso, ao definirmos este sistema, estamos definindo uma classe de observadores (de certa forma, “privilegiados”), não-rotacionais por definição e ortogonais a hipersuperfícies Σ tipo-espaço. Desta forma, ao descrevermos eventos do ponto de vista de observadores gaussianos, o espaço-tempo é naturalmente folheado em hipersuperfícies de Cauchy. Este folheamento nos garante estruturas causais possibilitando, entre outras coisas, a construção de uma Teoria de Campos.

Apêndice B

Geodésicas no Universo de Gödel

O estudo do movimento geodésico no Universo de Gödel foi realizado primeiramente por Kundt [7] (1956) e Chandrasekhar e Wright em 1961 [8]. Tais trabalhos investigaram a métrica de Gödel em coordenadas cartesianas e a análise das geodésicas foi feita através da integração direta das suas equações e nos revelaram algumas interessantes propriedades dos movimentos das partículas livres nesta geometria.

Em 1983, Novello, Soares e Tiomno [9] publicaram um método alternativo ³ da análise do movimento geodésico neste modelo - o potencial efetivo. Este método diferencia-se do primeiro por ser mais completo, fornecendo-nos uma caracterização simples (através de gráficos do potencial) deste movimento.

Neste apêndice, faremos um breve resumo da análise qualitativa do movimento geodésico no Universo de Gödel, baseando-nos principalmente no artigo “Geodesic Motion and Confinement in Gödel’s Universe” de Novello et alli e na tese “Geodésicas em Universos do tipo de Gödel” de Maurício O. Calvão [15].

³Utilizado no estudo das geodésicas em Schwarzschild por Wheeler et al., in Gravitation.

B.1 Geodésicas no Universo de Gödel

No sistema de coordenadas cilíndricas (t, r, φ, z) a métrica de Gödel tem a forma:

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi + \sinh^2 r(\sinh^2 r - 1)d\varphi^2] \quad (\text{B.1})$$

onde $a^2 = 2/\Omega^2$.

Como sabemos, as equações das geodésicas são obtidas através do princípio variacional:

$$\delta \int \mathcal{L} ds = 0$$

onde,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

com $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$.

A métrica (B.1) fornece a seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{a^2}{2} [\dot{t}^2 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r \dot{t}\dot{\varphi} + \sinh^2 r(\sinh^2 r - 1)\dot{\varphi}^2] \quad (\text{B.2})$$

Temos, assim, as seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Como,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

as quantidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \\ p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \\ p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \end{array} \right.$$

são conservadas ao longo das geodésicas. p_φ e p_z são definidos como o momento angular azimutal e o momento linear axial, respectivamente.

Além destas três integrais primeiras, temos uma outra tirada de (B.2):

$$2\mathcal{L} = a^2[\dot{t}^2 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r \dot{t} \dot{\varphi} + \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) \dot{\varphi}^2] = \epsilon$$

$$\dot{t}^2 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 + 2\sqrt{2} \dot{t} \dot{\varphi} + \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) \dot{\varphi}^2 = \frac{\epsilon}{a^2}$$

o onde ($\epsilon = 0, 1$), conforme a geodésica seja do tipo-nulo ou do tipo-tempo, respectivamente.

Reescrevendo as equações anteriores, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{t} - \sqrt{2} \dot{\varphi} = \frac{p_t}{a^2} \\ \sqrt{2} \sinh^2 r \dot{t} + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{a^2} \\ \dot{z} = -\frac{p_z}{a^2} \\ \dot{r}^2 = \dot{t}^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r \dot{t} \dot{\varphi} + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{a^2} (p_z + \epsilon) \end{array} \right.$$

Definindo:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{p_t}{a^2} \\ B_0 = \frac{p_\varphi}{a^2} \\ C_0 = -\frac{p_z}{a^2} \\ D_0^2 = \frac{1}{a^2}(p_z^2 + \epsilon) \end{array} \right.$$

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{t} = A_0 \left[1 - \frac{2 \sinh^2 r}{\cosh^2 r} \right] + \frac{\sqrt{2} B_0}{\cosh^2 r} \\ \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2} A_0}{\cosh^2 r} - \frac{B_0}{\sinh^2 r \cosh^2 r} \\ \dot{z} = C_0 \\ \dot{r}^2 = A_0^2 - D_0^2 - \left[A_0 \sqrt{2} \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right]^2 \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

Definindo também:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^2 = \frac{p_z^2 + \epsilon}{p_t^2} = \frac{D_0^2}{A_0^2} \\ \gamma = \frac{p_\varphi}{p_t} = \frac{B_0}{A_0} \end{array} \right.$$

Da equação de \dot{r}^2 , podemos ver facilmente que, para partículas reais, β^2 deve estar restrito aos valores:

$$0 \leq \beta^2 \leq 1 \quad (\text{B.4})$$

Introduziremos o potencial efetivo, reescrevendo a equação de \dot{r}^2 do seguinte modo:

$$\dot{r}^2 = A_0^2 - V(r) \quad (\text{B.5})$$

onde,

$$V(r) = \left[A_0 \sqrt{2} \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right]^2 + D_0^2$$

De (B.5), vemos que o valor mínimo do potencial V_{min} , correspondente a $r = r_{min}$, deve ser:

$$V_{min} \leq A_0^2$$

e concluimos, também de (B.5), que A_0 é a energia total do sistema.

A coordenada radial r oscila entre os valores $r_1 \leq r \leq r_c$ e os pontos de retorno, definidos por $\dot{r} = 0$, são:

$$A_0^2 = V(r)$$

$$A_0^2 = 2A_0^2 \frac{\sinh^2 r}{\cosh^2 r} - \frac{2\sqrt{2}A_0B_0}{\cosh^2 r} + \frac{B_0^2}{\sinh^2 r \cosh^2 r} + D_0^2$$

Mas, $\cosh^2 r = \sinh^2 r + 1$. Então, temos:

$$A_0^2 = 2A_0^2 \frac{\sinh^2 r}{\sinh^2 r + 1} - \frac{2\sqrt{2}A_0B_0}{\sinh^2 r + 1} + \frac{B_0^2}{\sinh^2 r (\sinh^2 r + 1)} + D_0^2$$

Dividindo os dois lados desta equação por A_0^2 e usando as definições anteriores para β^2 e γ , temos:

$$\sinh^2 r (\sinh^2 r + 1) = 2 \sinh^4 r - 2\sqrt{2}\gamma \sinh^2 r + \gamma^2 + \beta^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r + 1)$$

Assim, finalmente, encontramos:

$$(1 + \beta^2) \sinh^4 r - (1 + 2\sqrt{2}\gamma - \beta^2) \sinh^2 r + \gamma^2 = 0$$

$$\sinh^2 r_i = \frac{1 + 2\sqrt{2}\gamma - \beta^2}{2(1 + \beta^2)} \pm \frac{(1 - \beta^2)^{1/2} \sqrt{(1 - \beta^2) + \gamma(\sqrt{2} + \gamma)}}{2(1 + \beta^2)} \quad (\text{B.6})$$

onde $i = 1, 2$ são os pontos extremos da oscilação e a trajetória é fixa entre estes dois extremos.

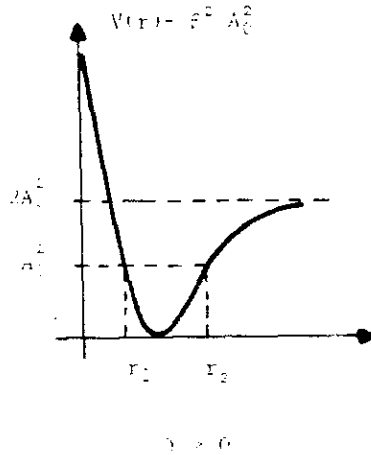
Podemos fazer uma caracterização completa do movimento analisando três casos distintos:

- i. $B_0 > 0$;
- ii. $B_0 = 0$;
- iii. $B_0 < 0$.

E os potenciais correspondentes a estes três valores são também distintos.

Na análise destes três casos, devemos, em cada um deles, analisar também os casos em que as partículas são massivas e não-massivas (fótons). Assim, temos:

B.1.1 $B_0 > 0$ (ou $\gamma > 0$):



Derivando a função $V(r) = \beta^2 A_0^2$, vemos que o seu valor mínimo, correspondente ao valor $r = r_{min}$, é nulo [9]. Além disso, vemos que $\beta^2 = 0$ corresponde à trajetória dos fótons no plano $z = cte$.⁴

Se $\beta^2 \neq 0$ (partículas massivas ou fótons com momento linear axial não-nulo) a largura do cilindro diminui e tende a zero para $\beta^2 = 1$. [9] Notemos também que o parâmetro γ depende dos valores de r_i ($i = 1, 2$), extremos do domínio das geodésicas com parâmetro $\gamma > 0$. As geodésicas nunca alcançam a origem $r = 0$.

Isto é o que ocorre na região Gauss-II, definida no cap. III.

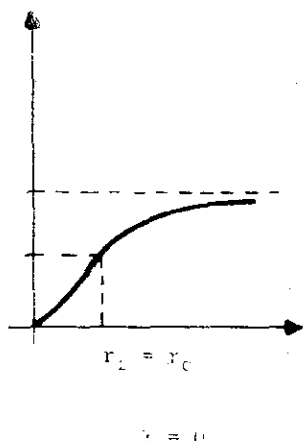
⁴Isto é,

$$D_0^2 = C_0^2 + \frac{\epsilon}{a^2}$$

Se $z = cte.$, então $C_0 = 0$. Como $\epsilon = 0$ para fótons, então $D_0^2 = 0$. Assim,

$$\beta^2 = 0$$

B.1.2 $B_0 = 0$ (ou $\gamma = 0$):



Neste caso, a partir de (B.6), vemos que fótons ($\beta^2 = 0$) estão confinados a um cilindro de raio igual a $r_c = \text{arcsch } 1$. De fato,

$$\sinh^2 r_i = \frac{1 \pm 1}{2}$$

Temos, então:

$$\begin{cases} \text{arcsch } r_1 = 0 \\ \text{arcsch } r_2 = 1 \end{cases}$$

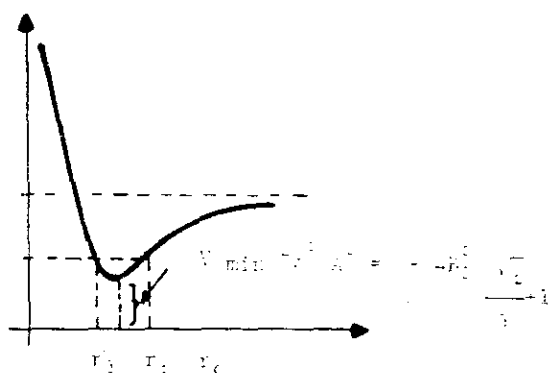
Este é exatamente o limite entre as regiões causal e acausal. Este resultado também é válido para partículas massivas ($\beta^2 \neq 0$):

$$\sinh^2 r_i = \frac{(1 - \beta^2) \pm (1 - \beta^2)}{2(1 + \beta^2)}$$

Como β varia no intervalo $[0, 1]$, é fácil notarmos que $\sinh^2 r_i$ oscila entre os extremos deste intervalo.

Definimos o caso acima como Confinamento e é o que ocorre na região causal Gauss-I.

B.1.3 $B_0 < 0$ ou $(\gamma < 0)$:



Derivando a função $V(r) - \beta^2 A_0^2$ vemos que o valor mínimo é [9]:

$$V_{min} - \beta^2 A_0^2 = -4\beta^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma} + 1 \right)$$

correspondente ao valor:

$$r_{min} = \operatorname{arcsch}^2 \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\gamma}{1 + \sqrt{2}\gamma}$$

No entanto, segundo a equação

$$\dot{r}^2 = A_0^2 - V(r)$$

devemos ter sempre

$$V_{min} \leq A_0^2$$

o que implica que γ possui valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-\sqrt{2} + (1 + \beta^2)^{1/2}}{2} \leq \gamma < 0 \\ \gamma \leq \frac{-\sqrt{2} + (1 + \beta^2)^{1/2}}{2} \end{array} \right.$$

Porém, para o último caso, $\sinh^2 r_{min}$ é negativo, sendo assim excluído da análise que segue [9]

O valor mínimo de γ correspondente a $V_{min} \leq A_0^2$ é:

$$\gamma_{min} = \frac{-\sqrt{2} + (1 + \beta^2)^{1/2}}{2}$$

Substituindo γ_{min} na equação (B.6), encontramos:

$$\sinh^2 r = \frac{\sqrt{2} - (1 + \beta^2)^{1/2}}{2(1 + \beta^2)^{1/2}}$$

Assim, a análise do movimento das partículas livres no modelo de Gödel nos revela uma das propriedades mais interessantes deste Universo: o campo gravitacional seleciona e confina uma classe de observadores geodésicos (sejam eles massivos ou não) em uma região bem definida ($r \leq r_c$). A partir desta região, surgem curvas fechadas no tempo e que podem violar o Princípio de Causalidade, uma vez que seja criado um mecanismo que induza um observador a percorrer tais trajetórias, como mostramos no capítulo 5.

Apêndice C

Cálculos Referentes à Tese

Este apêndice está reservado para os cálculos detalhados desta Tese.

C.1 Transformação de Coordenadas do Sistema Cilíndrico para o Sistema Gaussiano

A métrica de Gödel em coordenadas cilíndricas tem a forma:

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi + \sinh^2 r(\sinh^2 r - 1)d\varphi^2] \quad (\text{C.1})$$

Por um cálculo direto, podemos encontrar a matriz $g^{\mu\nu}$ e seu determinante, quais sejam:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sinh^2 r}{a^2 \cosh^2 r} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{a^2 \cosh^2 r} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{a^2 \cosh^2 r} & 0 & \frac{-1}{a^2 \sinh^2 r \cosh^2 r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a^2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\det g^{\mu\nu} = \frac{-1}{a^8 \sinh^2 r \cosh^2 r} \quad (\text{C.3})$$

Para que uma métrica seja descrita por um sistema gaussiano de coordenadas as condições abaixo devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} \tilde{g}^{00} = 1 \\ \tilde{g}^{0i} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

onde o símbolo (\sim) denotará o sistema gaussiano.

A primeira das condições acima nada mais é do que a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre e de massa unitária. [20]. De fato,

$$\tilde{g}^{00} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = 1$$

onde S é a função de Hamilton-Jacobi. Substituindo (C.2) na expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{00} &= \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 g^{00} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 g^{11} + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 g^{22} \\ &+ 2 \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} g^{02} + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 g^{33} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{(\sinh^2 r - 1)}{\cosh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &- \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + 2 \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Para resolver esta equação introduziremos o “ansatz”:

$$S(x^\alpha, \lambda_i) = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(r) \quad (\text{C.6})$$

Substituindo (C.4) em (C.3), temos:

$$a^2 = 2 \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{(\sinh^2 r - 1)}{\cosh^2 r} \lambda_1^2 - \frac{\lambda_2^2}{\sinh^2 r \cosh^2 r} - \lambda_3^2 - F'^2(r)$$

Isto é:

$$F'^2 = 2 \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_2^2}{\sinh^2 r \cosh^2 r} - \frac{(\sinh^2 r - 1)}{\cosh^2 r} \lambda_1^2 - M^2 > 0$$

onde, definimos $M^2 \equiv \lambda_3^2 + a^2$.

Integrando, temos:

$$F(r) = \int \left[2 \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_2^2}{\sinh^2 r \cosh^2 r} - \frac{(\sinh^2 r - 1)}{\cosh^2 r} \lambda_1^2 - M^2 \right]^{1/2} dr$$

Façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x = \sinh^2 r \\ x + 1 = \cosh^2 r \end{cases}$$

Temos, então:

$$dx = 2 \sinh r \cosh r dr = 2\sqrt{x(x+1)} dr$$

A função $F(r)$ torna-se:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{2} \left[2 \frac{\sqrt{2}}{x(x+1)^2} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{\lambda_2^2}{x^2(x+1)^2} - \frac{(x-1)}{x(x+1)^2} \lambda_1^2 - \frac{M^2(x+1)}{x(x+1)^2} \right]^{1/2} dx \\ &= \int \frac{dx}{2x(x+1)} \left[2\sqrt{2}x \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 - \lambda_1^2 x(x-1) - M^2 x(x+1) \right]^{1/2} \\ &= \int \frac{dx}{2x(x+1)} \left[-x^2(\lambda_1^2 + M^2) + x(2\sqrt{2}\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1^2 - M^2) - \lambda_2^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{2x} [Px^2 + Qx - \lambda_2^2]^{1/2} \\ &\quad - \int \frac{dx}{2(x+1)} [Px^2 + Qx - \lambda_2^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{C.7}$$

onde, definimos:

$$\begin{cases} P \equiv -(\lambda_1^2 + M^2) < 0 \\ Q \equiv 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2 - M^2 \end{cases}$$

Chamemos a primeira das integrais de I_1 e a segunda delas de I_2 . Estas integrais estão tabeladas e são facilmente resolvidas [33].

$$I_1 = \frac{(Px^2 + Qx - \lambda_2^2)^{1/2}}{2} - \frac{Q}{4} \frac{1}{\sqrt{-P}} \arcsin \frac{2Px + Q}{(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} - \frac{\lambda_2}{2} \arcsin \frac{Qx - 2\lambda_2^2}{x(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \quad (\text{C.8})$$

Antes de apresentarmos o resultado da integral I_2 , vamos reescrevê-la de uma forma mais conveniente. Seja,

$$y = x + 1$$

então, temos:

$$I_2 = - \int \frac{dy}{2y} [Py^2 + (Q - 2P)y + (P - \lambda_2^2 - Q)]^{1/2}$$

Integrando, temos:

$$I_2 = - \frac{(Px^2 + Qx - \lambda_2^2)^{1/2}}{2} + \frac{(Q - 2P)}{4} \frac{1}{\sqrt{-P}} \arcsin \frac{2Px + Q}{(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} - \frac{(P - Q - \lambda_2^2)^{1/2}}{2} \arcsin \frac{(Q - 2P)x - 2\lambda_2^2 - Q}{(x + 1)(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \quad (\text{C.9})$$

Mas, $F(x) = I_1 + I_2$. Então:

$$F(x) = \frac{\sqrt{|P|}}{2} \arcsin \frac{2Px + Q}{(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} - \frac{\lambda_2}{2} \arcsin \frac{Qx - 2\lambda_2^2}{x(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \\ - \frac{\sqrt{|Q + \lambda_2^2 - P|}}{2} \arcsin \frac{(Q - 2P)x - 2\lambda_2^2 - Q}{(x + 1)(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \quad (\text{C.10})$$

lembrando sempre que $x = \sinh^2 r$. Assim, (C.4) se escreve:

$$S(x^\alpha, \lambda_i) = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(r) = \tilde{t} \quad (\text{C.11})$$

onde, $F(r)$ é dado por (C.10).

Para obtermos as outras coordenadas gaussianas devemos calcular as derivadas:

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial S}{\partial \lambda_i}$$

Logo,

$$\hat{x}^1 \equiv \tilde{\xi} = t + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}$$

$$\tilde{\xi} = t + \frac{\lambda_1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + M^2}} \arcsin \frac{2Px + Q}{(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{(Q - 2P)x - 2\lambda_2^2 - Q}{(x + 1)(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \quad (\text{C.12})$$

$$\hat{\eta} \equiv \hat{x}^2 = \varphi + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} = & \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{(Q - 2P)x - 2\lambda_2^2 - Q}{(x + 1)(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}} \\ & - \frac{1}{2} \arcsin \frac{Qx - 2\lambda_2^2}{x(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

e a nova coordenada “axial”:

$$\tilde{z} = z + \frac{\partial F}{\partial \lambda_3}$$

$$\tilde{z} = z + \frac{\lambda_3}{2\sqrt{\lambda_1 + M^2}} \arcsin \frac{2Px + Q}{(Q^2 - 4P\lambda_2^2)^{1/2}}\quad (\text{C.14})$$

Podemos ver facilmente que este conjunto de transformações de coordenadas satisfaz às condições:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{00} = 1 \\ \tilde{g}_{0i} = 0 \end{cases}$$

C.2 Sistema de Coordenadas Gauss-I

Sem perda de generalidade, podemos arbitrar valores para os parâmetros λ_i . Definiremos o Sistema de Coordenadas Gauss-I como:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu a \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Assim, as novas coordenadas se escrevem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t} = \mu at + \frac{a}{2} \sqrt{\mu^2 + 1} \arcsin \Psi + \frac{\mu a}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta \\ \tilde{\xi} = t + \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 1}} \arcsin \Psi + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta \\ \tilde{\eta} = (\varphi - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \arcsin \Delta \\ \tilde{z} = z \end{array} \right. \quad (\text{C.15})$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = 1 - 2 \sinh^2 r \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \\ \Delta = \frac{x}{x+1} \frac{3\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} - \frac{1}{x+1} \end{array} \right.$$

Para encontrarmos a métrica nesta região basta usarmos a equação de transformação do tensor métrico:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}$$

Assim, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}^{00} = 1 \\ \tilde{g}^{0i} = 0 \end{array} \right.$$

por definição. As outras componentes são:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{12} &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} g^{11} + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} g^{02} = \frac{-\sqrt{2}}{(Q + Px)} \\ \tilde{g}^{11} &= \left(\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^0} \right)^2 g^{00} + \left(\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \right)^2 g^{11} = \frac{(x-1)}{(Q + Px)} \\ \tilde{g}^{22} &= \left(\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} \right)^2 g^{11} + \left(\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} \right)^2 g^{22} = \frac{-(\mu^2 - 1)}{x(Q + Px)} \\ \tilde{g}^{33} &= \left(\frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} \right)^2 g^{33} = \frac{-1}{a^2} \end{aligned}$$

Lembrando sempre que Q e P para este particular sistema valem, respectivamente:

$$\begin{cases} Q = a^2(\mu^2 - 1) \\ P = -a^2(\mu^2 + 1) \end{cases}$$

e $x = \sinh^2 r$. As outras componentes do tensor métrico são nulas. O determinante vale:

$$\det(\tilde{g}_{\mu\nu}) = -a^4 x(Q + Px) = -a^6 x[(\mu^2 - 1) - (\mu^2 + 1)x]$$

logo,

$$\sqrt{-\tilde{g}} = a^3 \sqrt{x[\mu^2 - 1 - (\mu^2 + 1)x]}$$

Por um cálculo direto podemos encontrar as componentes covariantes do tensor métrico, que são:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{00} = 1 \\ \tilde{g}_{11} = -a^2(\mu^2 - 1) \\ \tilde{g}_{12} = a^2 x \\ \tilde{g}_{22} = a^2 x(x - 1) \\ \tilde{g}_{33} = -a^2 \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Antes de escrevermos a métrica desta região em termos das coordenadas de Gauss-I, vamos reescrever a variável x em termos destas novas coordenadas. Se, em (C.15), multiplicarmos a coordenada $\tilde{\xi}$ por $-\mu a$ e somarmos com a coordenada \tilde{t} temos:

$$x = \frac{\mu^2 - 1}{2(\mu^2 + 1)} [1 - \sin M] \quad (\text{C.17})$$

onde

$$M = \frac{2}{a} \sqrt{\mu^2 + 1} (\tilde{t} - \mu a \tilde{\xi})$$

Desta forma, inserindo (C.17) em (C.15), temos finalmente a métrica da região Gauss-I:

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - a^2(\mu^2 - 1)d\tilde{\xi}^2 + a^2 g(\tilde{t}, \tilde{\xi}) d\tilde{\eta}^2 + 2h(\tilde{t}, \tilde{\xi}) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} - a^2 d\tilde{z}^2 \quad (\text{C.18})$$

onde as funções \tilde{g} e \tilde{h} são as mesmas funções do cap. 3, com os valores dados na página 27, uma vez que estamos retratando a mesma região causal Gauss-I.

C.2.1 Limite de Validade de Gauss-I

Como sabemos, o sistema de coordenadas gaussianas Gauss-I cobre apenas uma região da geometria de Gödel. O limite de validade deste sistema é dado da seguinte forma:

O arcsin é uma função que varia entre o intervalo $[-1, +1]$. Desta forma, nas transformações (C.15), temos:

$$-1 \leq \Psi \leq +1$$

onde,

$$\Psi = 1 - 2x \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \right)$$

Logo, temos duas condições a satisfazer, quais sejam:

- a. $\mu^2 > 1$ sempre;
- b. $0 \leq x \leq \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$.

Bibliografia

- [1] K. Gödel. "An Exemple of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation"; *Rev. Mod. Phys.*, **21**(3), 447 (1949)
- [2] J. Pfarr. "Time Travel in Gödel's Space"; *Gen. Rel. and Grav.*, **13**(11), 1073 (1981)
- [3] M. Novello and M. J. Rebouças. "Rotating Universes with Sucessive Causal and Noncausal Regions"; *Phys. Rev. D*, **19**(10), 2850 (1979)
- [4] V. G. Agakov. "The Nonstationary Generalization of the Gödel Cosmological Model"; *Gen. Rel. and Grav.*, **16**(4), 317 (1984)
- [5] J. Lathrop and R. Teglas. "Dynamics in the Gödel Universe"; *Il Nuovo Cimento*, **43 B**(1), 162 (1978)
- [6] W. A. Hiscock. "Scalar Perturbations in the Gödel Universe"; *Phys. Rev. D*, **17**(6), 1497 (1978)
- [7] W. Kundt. *Z. Phys.*, **145**, 611 (1956)
- [8] S. Chandrasekhar and J. P. Wright. "The Geodesics in Gödel's Universe"; *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*; **47**, 341 (1961)

- [9] M. Novello, I. D. Soares and J. Tiomno. "Geodesic Motion and Confinement in Gödel's Universe"; *Phys. Rev. D*, **27**(4), 779 (1983)
- [10] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Moretti and M. Dillard. "Analysis, Manifolds and Physics"; North Holland Publ. (1978)
- [11] H. P. Robertson and T. Noonan. "General Relativity and Cosmology"
- [12] K. Gödel. "Rotating Universes in General Relativity Theory"; Einstein volume of the Library of Living Philosophers (1950)
- [13] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer. "Introduction to General Relativity"; segunda edição, McGraw-Hill Kogakusha, ltd. (1975)
- [14] D. A. Leahy. "Scalar and Neutrino Fields in the Gödel Universe"; *Int. Journ. Theor. Phys.*, **21**(8/9), 703 (1982)
- [15] M. O. Calvão. "Geodésicas em Universos do Tipo de Gödel"; Tese de Mestrado, CBPF - Brasil (1982)
- [16] S. W. Hawking. "The Existence of Cosmic Time Functions"; *Proc. Roy. Soc. A*, **308**, 433 (1968)
- [17] D. Malament. "A Note about Closed Timelike Curves in Gödel Space-Time"; *J. Math. Phys.*, **28**(10), 2427 (1987)
- [18] M. Novello, N. F. Svaiter and M. E. X. Guimarães. "Backwards Time Travel Induced by Combined Magnetic and Gravitational Fields"; letter submetida à pub-

licação. (1990)

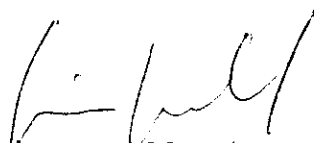
- [19] M. Novello. II Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF - Brasil (1982)
- [20] L. Landau et E. Lifchitz. “Mécanique Classique”; segunda edição, ed. Mir. (1966)
- [21] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. “The Large-Scale Structure of Space-time”; Cambridge University Press. (1977)
- [22] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever. “Wormholes, Time Machines and the Weak Energy Condition”; Phys. Rev. Letters, **61**(13), 1446 (1988)
- [23] M. S. Morris and K. S. Thorne. “Wormholes in Space-Time and their Use for Interstellar Travel: a Tool for Teaching General Relativity”; Am. J. Phys., **56**(5), 395 (1988)
- [24] D. Lurié. “Particles and Fields”; Interscience Publ. (1968)
- [25] H. C. Ohanian. “Gravitation and Space-Time”; W. W. Norton. (1976)
- [26] J. D. Bjorken and S. D. Drell. “Relativistic Quantum Fields”; McGraw-Hill Book Co. (1965)
- [27] I. D. Soares. “Gravitational Coupling of Neutrinos to Matter Vorticity: Microscopic Asymetries”; Phys. Rev. D, **21**(2), 272 (1981)
- [28] B. D. B. Figueiredo. “Um Estudo da Interação Gravitacional de Campos Escalares e Espinoriais com a Torção do Espaço-Tempo com a Vorticidade da Matéria”; Tese de Doutorado CBPF - Brasil (1987)

- [29] A. Erdelli et al. "Higher Transcendental Functions"; vol. 1, McGraw-Hill. (1960)
- [30] G. Denardo and R. Percacci. "Quantum Field Theory for a Rotating Observer"; *Il Nuovo Cimento*, **48 B(1)**, 81 (1978)
- [31] N. F. Svaiter. "Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-Tempo de Minkowski e em Espaços Curvos"; Tese de Doutorado, CBPF. (1989)
- [32] A. Lichnerowicz. "Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme"; primeira edição, Masson et Cie. (1955)
- [33] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. "Table of Integrals, Series and Products"; Academic Press. (1980)

"SISTEMAS SINCRÔNICOS DE COORDENADAS NO
UNIVERSO DE GÖDEL"

MARIA EMÍLIA XAVIER GUIMARÃES

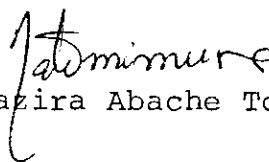
Tese de Mestrado apresentada no Cen-
tro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvi-
mento Científico e Tecnológico, fa-
zendo parte da banca examinadora os
seguintes professores:



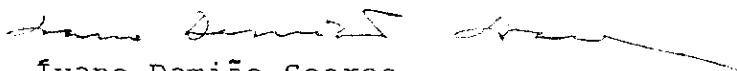
Mário Novello (Presidente)



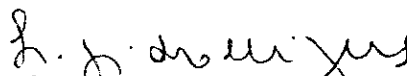
Nami Fux Svaite (Co-orientador)



Nazira Abache Tomimura



Ivano Damião Soares



Lígia Maria Coelho de Souza Rodrigues
(Suplente)