

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

TESE DE DOUTORADO

CÁLCULO DE RESSONÂNCIAS  
DO ESPALHAMENTO MIE  
E SUAS APLICAÇÕES

*Luiz Gallisa Guimarães*

**à Rô e à Iana,  
por tudo que abdicaram.**

## Agradecimentos

- Ao Prof. H. M. Nussenzveig pela proposta e orientação deste trabalho.

Aos amigos

- Moysés, pela paciência em traduzir e desvendar a ignorância e confusões das minhas idéias em física.
- Jú, João e Céron (Peranga!), pelo eterno carinho e incentivo.

Aos meus Pais (afinal, tudo tem um começo (?))

A Edu e Terezinha (a força que sempre ajuda nas horas difíceis)

A Dimpo (+ a Barriguinha) e Naninha, por amá-las.

## NOTAÇÃO

$a$ : (raio da esfera)

$N$ : (índice de refração da esfera)

$\beta$ : (parâmetro de tamanho externo)

$\alpha = N\beta$ : (parâmetro de tamanho interno)

$[1\beta] = \frac{H_{\lambda}^{(1)'}(\beta)}{H_{\lambda}^{(1)}(\beta)}$  (derivada logarítmica da função de Hankel)

$[\alpha] = \frac{J_{\lambda}'(\alpha)}{J_{\lambda}(\alpha)}$  (derivada logarítmica da função de Bessel)

# SUMÁRIO

## Capítulo 1 - Introdução

1.1 Motivações

pag-1

1.2 Organização da Tese

pag-2

## Capítulo 2 - Teoria de Mie

2.1 Expansões em Multipolos para uma Onda Plana Vetorial

pag-3

2.2 O Espalhamento Mie

pag-5

2.3 As Amplitudes de Espalhamento

pag-8

## Capítulo 3 - Ressonâncias do Espalhamento Mie

3.1 O Potencial Efetivo

pag-11

3.2 Cálculo de Ressonâncias

pag-18

3.3 Efeitos de Absorção

pag-26

## Capítulo 4 - Teoria do Momento Angular Complexo para as Amplitudes de Espalhamento nas direções Dianteira e Traseira

4.1 A Transformada de Watson e o Plano de Momento Angular Complexo

pag-29

4.2 A Expansão de Debye

pag-31

4.3 Contribuições para o Background e Flutuações Rápidas

pag-35

## Capítulo 5 - Teoria do Momento Angular Complexo para o Campo no interior da esfera

5.1 Propriedades do Campo na Ressonância

pag-58

5.2 Localização dos pontos de Intensidade Máxima

pag-59

5.3 Conclusões e perspectivas futuras

pag-76

## Apêndice A - Os Harmônicos Esféricos Vetoriais

pag-78

## Apêndice B - Cálculo de Ressonâncias (Polos Regge) utilizando-se Expansões Assintóticas Uniformes para as Funções de Bessel

pag-83

## Referências

pag-86

## RESUMO

Usando técnicas de *expansões assintóticas uniformes* desenvolvemos algoritmos que nos permitem calcular com precisão as *ressonâncias do espalhamento Mie*. A partir disto e utilizando também a *teoria do momento angular complexo* foi possível formular não só, uma *teoria para as flutuações rápidas (ripple) nas seções de choque* como também, descrever o comportamento do *campo interno ressonante*.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivações

O espalhamento da luz por esferas é um tópico em física que por mais que tenha sido abordado, ao longo deste século, ainda assim, surpreendentemente, continua sendo um assunto muito atual.

A origem de tanta vitalidade, acredito que resida no fato de que conhecimentos e descobertas adquiridos nesta área tenham quase que imediatamente implicações em ramos dos mais diversos do conhecimento científico como por exemplo, na meteorologia, química, astronomia, geologia e física nuclear.

No que tange à física, com o aprimoramento das técnicas espectroscópicas foi possível, no decorrer da última década, observando-se a luz espalhada por micro-esferas dielétricas, determinar-se a existência de espectros ressonantes associados a vários fenômenos bem conhecidos em ótica, como por exemplo, raias espectrais associadas ao espalhamento Raman estimulado [1], outras ao espalhamento Brillouin estimulado [2,3] e até emissão laser [4].

Como em todos esses processos citados acima, suas frequências características estão muito próximas de alguns dos *modos normais eletromagnéticos da esfera* [5], uma das grandes motivações para este trabalho foi entender e se possível calcular tais modos.

Sabia-se, a partir do espectro fluorescente de micro-esferas dielétricas [6] que as larguras de linha associadas a esses modos são muito estreitas, e portanto, isto provoca

imensas dificuldades num possível cálculo teórico para a sua localização.

Paralelamente à estreiteza destes modos, sabemos que micro-esferas são meios tridimensionais finitos, e assim, em tais esferas, além de poderem ser observados efeitos óticos não-lineares usuais, poderão também serem estudados outros processos relacionados a uma nova área de pesquisa, denominada de eletrodinâmica quântica em cavidades [7], na qual algumas propriedades da luz no espaço livre são drasticamente modificadas.

Em ambas as situações, se faz necessário um amplo conhecimento do comportamento dos *campos eletromagnéticos clássicos no interior da esfera*, originando daí outra motivação para este nosso estudo.

## 1.2 Organização da Tese

No *Capítulo 2* introduziremos a definição de grandezas relevantes no espalhamento Mie, obteremos em seguida, a sua solução formal em termos de séries de ondas parciais para os campos. Derivaremos a partir daí, as amplitudes de onda espalhada.

O *Capítulo 3* destina-se basicamente ao cálculo e interpretação física das ressonâncias. Tal interpretação ficará clara com a utilização do conceito de potencial efetivo, que permitirá utilizar a analogia entre o espalhamento Mie e o espalhamento quântico por um potencial. Desenvolveremos ainda, neste Capítulo, algoritmos capazes de nos fornecer com precisão segura o valor da ressonância.

Por sua vez, para o *Capítulo 4* reservaremos os resultados da *teoria do momento angular complexo* para as *flutuações rápidas* associadas às amplitudes de espalhamento (ripple), com ênfase especial às direções traseira e dianteira.

E por fim, deixamos para o *Capítulo 5* o estudo das propriedades do campo ressonante no interior da esfera, que nos permitirá calcular e interpretar os pontos de intensidade máxima para o campo.



## Capítulo 2

### Teoria de Mie

#### 2.1 Expansão em Multipolos de uma Onda Plana Vetorial

Em geral uma teoria para o espalhamento da luz tem que considerar a natureza vetorial do campo eletromagnético. Entretanto, em certos casos, devido a simetrias envolvidas no problema, ou mesmo pelo simples interesse em se observar efeitos que independem do estado de polarização da luz é possível se formular uma teoria escalar para o espalhamento. Infelizmente, no nosso caso isto não acontece e uma teoria vetorial se faz necessária. Portanto começamos por expandir uma onda plana circularmente polarizada em termos de harmônicos esféricos vetoriais. A definição e propriedades destes vetores são dadas no *Apêndice A* e referências ali citadas. Quanto ao fato de escolhermos a polarização circular para abordarmos o problema não há perda nenhuma de generalidade nisto, pois outras polarizações podem ser obtidas como simples combinações desta última.

Cabe salientar também que ao longo deste trabalho trataremos somente com campos que evoluem harmonicamente com o tempo; doravante, o fator temporal ( $e^{-i\omega t}$ ) ficará implícito.

Para a onda plana com vetor de onda  $\vec{k} = k \hat{e}_z$  ( $k = \omega/c$ ), tomamos como "Ansatz" a expansão:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\pm} &= E_0 (\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y) e^{ikr \cos \theta} \\ &\equiv \sum_{\ell, m} \left[ a_{\pm}(\ell, m) j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, m} + \frac{i}{k} b_{\pm}(\ell, m) \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, m}) \right] \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

onde  $j_{\ell}$  são as funções esféricas de Bessel [8].

Segue da ortonormalidade dos  $\vec{X}_{\ell, m}$  que:

$$a_{\pm}(\ell, m) j_{\ell}(kr) = \frac{E_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int d\Omega (L_{\pm} Y_{\ell, m})^* e^{ikr \cos \theta} \quad (2.1.2)$$

sendo  $d\Omega$  o elemento de ângulo sólido,  $L_{\pm}$  os operadores de levantamento (+) e abaixamento (-) de momento angular [9] que atuam sobre o espaço dos harmônicos esféricos  $Y_{\ell, m}$ .

Como  $[L_{\pm} Y_{\ell, m}]^* = \sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)} Y_{\ell, m \mp 1}^*$  e  $e^{ikr \cos \theta}$  pode ser expandida em termos de  $e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kr) Y_{\ell, 0}$ , a eq.(2.1.2) nos fornece que:

$$a_{\pm}(\ell, m) = E_0 i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \delta_{m, \pm \ell} \quad (2.1.3)$$

Por outro lado, segue das equações de Maxwell que:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\pm} &= \frac{-i}{k} \nabla \times \vec{E}_{\pm} \\ &= (\mp i) E_0 (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) e^{ikr \cos \theta} \\ &= \sum_{\ell, m} \left[ b_{\pm}(\ell, m) j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, m} - \frac{i}{k} a_{\pm}(\ell, m) \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, m}) \right] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Portanto novamente através da ortonormalidade dos  $\vec{X}_{\ell, m}$ , mostra-se a partir da eq.(2.1.4) que:

$$b_{\pm}(\ell, m) = (\mp i) a_{\pm}(\ell, m) \quad (2.1.5)$$

De forma que obtemos a expansão desejada:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\pm} &= E_0 (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y) e^{ikr \cos \theta} \\ &= E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm \ell} \pm \frac{1}{k} \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm \ell}) \right] \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\vec{B}_{\pm} = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ (\pm) j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm \ell} + \frac{1}{k} \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm \ell}) \right] \quad (2.1.7)$$

As equações (2.1.6) e (2.1.7) podem ser vistas como superposições de ondas esféricas

vetoriais, soluções da equação de onda homogênea no espaço livre. Tal tipo de idéia pode ser estendida para tratar o problema de propagação de ondas entre meios distintos, como no caso do Espalhamento Mie. Este será o assunto da próxima seção.

## 2.2 O Espalhamento Mie

O Espalhamento Mie [10,11] é aquele que ocorre quando uma onda plana incide sobre uma esfera dielétrica. Como mostra a figura (2.2.1), a onda possui um vetor de onda  $\vec{k} = k \hat{e}_z$ . A esfera tem um raio  $a$  e é caracterizada por um índice de refração  $N$ .

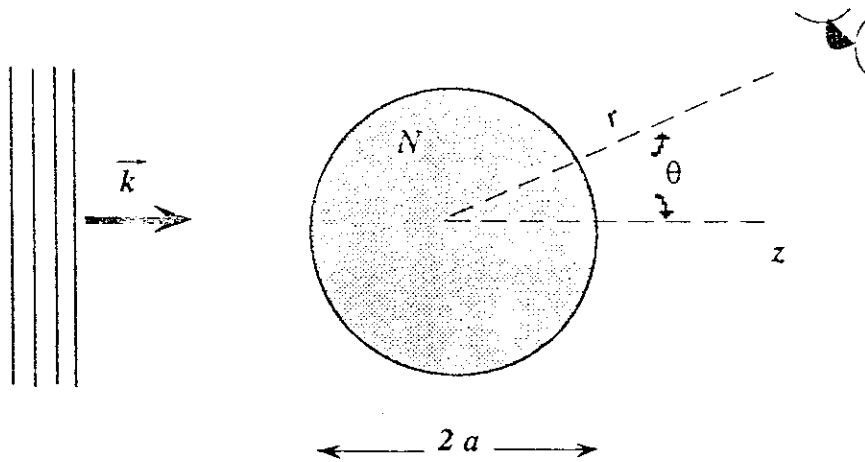


fig. (2.2.1) • O Espalhamento Mie, onde  $r$  é a distância do centro da esfera ao ponto de observação e  $\theta$  o ângulo de espalhamento.

Para uma onda plana incidente dada pelas equações (2.1.6) e (2.1.7) podemos construir os campos no interior da esfera e espalhado da seguinte forma:

Como a esfera é uma superfície fechada, devemos ter em seu interior ondas estacionárias e de magnitude finita em seu centro; portanto para cada componente a parte radial deve se comportar como uma dada função esférica de Bessel. De modo que, podemos definir os campos no interior da esfera como,

$$\vec{E}_{inc} \equiv \sum_{\ell, m} \left[ \bar{a}_M(\ell, m) j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, m} + \frac{i}{kN^2} \bar{a}_E(\ell, m) \nabla \times (j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, m}) \right] \quad (2.2.1)$$

$$\vec{B}_{inc} \equiv \sum_{\ell, m} \left[ \bar{a}_E(\ell, m) j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, m} - \frac{i}{k} \bar{a}_M(\ell, m) \nabla \times (j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, m}) \right] \quad (2.2.2)$$

Por outro lado, o campo total na região externa é a soma da onda incidente e do campo espalhado. Este último é constituído de ondas emergentes dadas pelas funções esféricas de Hankel  $h_\ell^{(1)}$ . Assim, analogamente às equações (2.2.1) e (2.2.2), temos:

$$\vec{E}_{esp} \equiv \sum_{\ell, m} \left[ a_M(\ell, m) h_\ell^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, m} + \frac{i}{k} a_E(\ell, m) \nabla \times (h_\ell^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, m}) \right] \quad (2.2.3)$$

$$\vec{B}_{esp} \equiv \sum_{\ell, m} \left[ a_E(\ell, m) h_\ell^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, m} - \frac{i}{k} a_M(\ell, m) \nabla \times (h_\ell^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, m}) \right] \quad (2.2.4)$$

Nas equações acima os coeficientes  $\bar{a}_{M(E)}$  e  $a_{M(E)}$  são determinados a partir das condições de contorno sobre os campos na superfície da esfera. Os índices **E** e **M** referem-se respectivamente a multipolos associados a *ondas elétricas* (ondas **E**, polarização Transversal Magnética) e a *ondas magnéticas* (ondas **M**, polarização Transversal Elétrica).

As condições de contorno empregadas são as usuais entre interfaces dielétricas, conservação das componentes tangenciais de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  e conservação das componentes normais de  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  [12]. Entretanto, devido ao fato de estarmos trabalhando com ondas monocromáticas e na ausência de fontes, as informações fornecidas pelas condições de contorno associadas à conservação dos componentes normais dos campos estão também contidas naquelas referentes às condições de contorno de conservação de componentes tangenciais. Portanto somente essas últimas se fazem relevantes e nos fornecem o seguinte conjunto de equações que devem ser satisfeitas pelos coeficientes  $\bar{a}_{M(E)}$  e  $a_{M(E)}$ :

$$\tilde{a}_j(\ell, m) = C_j(\ell, m) \frac{N(\zeta_\ell^{(1)}(\beta)\psi_\ell'(\beta) - \psi_\ell(\beta)\zeta_\ell^{(1)'}(\beta))}{\epsilon_j N\zeta_\ell^{(1)}(\beta)\psi_\ell'(\alpha) - \psi_\ell(\alpha)\zeta_\ell^{(1)'}(\beta)} \quad (2.2.5; a)$$

$$a_j(\ell, m) = C_j(\ell, m) \frac{\psi_\ell(\alpha)\psi_\ell'(\beta) - \epsilon_j N\psi_\ell(\beta)\psi_\ell'(\alpha)}{\epsilon_j N\zeta_\ell^{(1)}(\beta)\psi_\ell'(\alpha) - \psi_\ell(\alpha)\zeta_\ell^{(1)'}(\beta)} \quad (2.2.5; b)$$

onde a notação empregada foi: Ondas  $M(j=1)$  e  $E(j=2)$ ; portanto,  $\tilde{a}_{1(2)} = \tilde{a}_{M(E)}$  e  $a_{1(2)} = a_{M(E)}$ .

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1, j=1 \\ \frac{1}{N^2}, j=2 \end{cases} ; \quad (2.2.6; a)$$

$$C_j(\ell, m) = \begin{cases} a(\ell, m), j=1 \\ b(\ell, m), j=2 \end{cases} ; \quad (2.2.6; b)$$

onde  $a$  e  $b$  são dados pelas eqs. (2.1.6) e (2.1.7) e definimos os *parâmetros de tamanho externo* e *interno* respectivamente como,

$$\beta \equiv ka \quad (2.2.6; c)$$

$$\alpha \equiv N\beta \quad (2.2.6; d)$$

enquanto que,  $\psi_\ell(x) = x j_\ell(x)$  e  $\zeta_\ell^{(1)}(x) = x h_\ell^{(1)}(x)$  são respectivamente as funções de Ricatti-Bessel e Ricatti-Hankel, e o símbolo (') significa derivação com respeito ao argumento.

Portanto, agora as expansões em multipolos para os campos tanto no interior quanto fora (espalhado) da esfera são conhecidas e explicitamente escrevem-se<sup>(\*)</sup> como:

$$\vec{E}_{i,m} = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ \tilde{a}_M(\ell, \beta) j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, \pm} \pm \frac{\tilde{a}_E(\ell, \beta)}{kN^2} \nabla \times (j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, \pm}) \right] \quad (2.2.7)$$

$$\vec{B}_{i,m} = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ (\pm) \tilde{a}_E(\ell, \beta) j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, \pm} + \frac{\tilde{a}_M(\ell, \beta)}{k} \nabla \times (j_\ell(Nkr) \vec{X}_{\ell, \pm}) \right] \quad (2.2.8)$$

(\*)- Os duplos sinais  $\pm$  nas eqs. (2.2.9 a 2.2.10) relacionam-se com as polarizações circular à direita (+) e à esquerda (-).

$$\vec{E}_{esp} = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ a_M(\ell, \beta) h_{\ell}^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm} \pm \frac{a_E(\ell, \beta)}{k} \nabla \times (h_{\ell}^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm}) \right] \quad (2.2.9)$$

$$\vec{B}_{esp} = E_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} i^{\ell-1} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ (\pm) a_E(\ell, \beta) h_{\ell}^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm} + \frac{a_M(\ell, \beta)}{k} \nabla \times (h_{\ell}^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm}) \right] \quad (2.2.10)$$

onde,

$$\tilde{a}_j(\ell, \beta) = \frac{N(-i)}{\epsilon_j N_{\zeta_{\ell}^{(1)}}(\beta) \psi_{\ell}'(\alpha) - \psi_{\ell}(\alpha) \zeta_{\ell}^{(1)}(\beta)} \quad , j = 1, 2 \quad (2.2.11)$$

$$a_j(\ell, \beta) = \frac{\psi_{\ell}(\alpha) \psi_{\ell}'(\beta) - \epsilon_j N \psi_{\ell}(\beta) \psi_{\ell}'(\alpha)}{\epsilon_j N_{\zeta_{\ell}^{(1)}}(\beta) \psi_{\ell}'(\alpha) - \psi_{\ell}(\alpha) \zeta_{\ell}^{(1)}(\beta)} \quad , j = 1, 2 \quad (2.2.12)$$

sendo  $\tilde{a}_{1(2)} = \tilde{a}_{M(E)}$  e  $a_{1(2)} = a_{M(E)}$ . Em (2.2.11) usou-se o Wronskiano das funções de Ricatti-Bessel e Hankel. O conjunto de equações (2.2.7 a 2.2.12) é de suma importância, pois a partir dele tópicos de extremo interesse no espalhamento Mie serão derivados.

### 2.3 As Amplitudes de Espalhamento

Para se conhecer características e se fazer medidas que envolvem a intensidade da luz espalhada, é necessário obter a amplitude do campo espalhado.

O processo de detecção da luz espalhada em geral envolve distâncias muito superiores ao comprimento de onda da luz incidente. Neste limite o campo elétrico espalhado pode ser tomado assintoticamente. De posse desta informação podemos obter as amplitudes do campo a partir das expressões para o campo espalhado neste limite:

Para  $kr \gg 1$  é lícito tomarmos,

$$h_{\ell}^{(1)}(kr) \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \times (h_{\ell}^{(1)}(kr) \vec{X}_{\ell, \pm}) \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{n} \times \vec{X}_{\ell, \pm} \quad (2.3.2)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário na direção radial.

Substituindo essas equações em (2.2.9) reescrevemos o campo espalhado como,

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{esp} &= E_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[ (-i)a_M(\ell, \beta) \bar{X}_{\ell, \pm 1} \pm a_E(\ell, \beta) \hat{n} \times \bar{X}_{\ell, \pm 1} \right] \\
&= -E_0 \frac{e^{ikr}}{kr} e^{\pm i\phi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \left[ \left( a_M \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta} + a_E \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \hat{e}_\phi \right. \\
&\quad \left. \pm i \left( a_E \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta} + a_M \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \hat{e}_\theta \right] \\
&\equiv E_0 \frac{e^{ikr}}{kr} (S_1(\theta, \beta) \hat{e}_\phi \pm iS_2(\theta, \beta) \hat{e}_\theta)
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

onde definimos as amplitudes de espalhamento  $S_1$  e  $S_2$  pelas seguintes séries de ondas parciais,

$$S_1(\theta, \beta) = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \left[ a_M \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta} + a_E \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \tag{2.3.4}$$

$$S_2(\theta, \beta) = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)} \left[ a_E \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta} + a_M \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \tag{2.3.5}$$

sendo  $P_\ell^1(\cos \theta)$  o polinômio associado de Legendre de ordem 1.

Estas amplitudes representam a decomposição do campo em duas polarizações lineares distintas, de modo que se a onda incidente for linearmente polarizada pode-se experimentalmente, através de analisadores, selecionar uma das amplitudes em detrimento da outra.

Algumas direções possuem especial interesse devido não só a uma maior intensidade da luz espalhada nestas direções, como também à ocorrência de fenômenos físicos particulares a estas direções, como por exemplo as direções dianteira e traseira, onde respectivamente são bem conhecidos e estudados os fenômenos de difração dianteira e auréola. Nestas direções as amplitudes são dadas pelas expressões a seguir:

Na direção dianteira temos que,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta} &= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta}
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Assim segue de (2.3.4) e (2.3.5) que:

$$\begin{aligned}
 S_1(\theta, \beta) &= -\frac{I}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell + 1) [a_M(\ell, \beta) + a_E(\ell, \beta)] \\
 &= S_2(\theta, \beta)
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

enquanto que na direção traseira temos,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{P_\ell^1(\cos \theta)}{\sin \theta} &= (-1)^{\ell-1} \frac{\ell(\ell + 1)}{2} \\
 &= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{dP_\ell^1(\cos \theta)}{d\theta}
 \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 S_1(\pi, \beta) &= -\frac{I}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} (2\ell + 1) [a_M(\ell, \beta) + a_E(\ell, \beta)] \\
 &= -S_2(\pi, \beta)
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Voltaremos no capítulo IV, a estudar essas amplitudes de espalhamento na tentativa de explicar seu comportamento em função do parâmetro de tamanho.

\*\*\*



## Capítulo 3

### Ressonâncias do Espalhamento Mie

#### 3.1 O Potencial Efetivo

No Capítulo anterior obtivemos as expansões em ondas parciais para os campos no interior e fora da esfera. As ressonâncias no espalhamento Mie estão associadas a modos naturais da esfera [13], isto é, a *oscilações eletromagnéticas que se auto-sustentam* mesmo na ausência da onda plana incidente. Um dado modo destes é excitado quando os coeficientes  $\tilde{a}_j(\ell, \beta)$  e  $a_j(\ell, \beta)$  das expansões deixam de ser finitos, em outras palavras, quando para valores fixos do tamanho e do índice de refração da esfera e momentum angular  $\ell$ , tenha-se que o número de onda seja um polo dos coeficientes  $\tilde{a}_j(\ell, \beta)$  e  $a_j(\ell, \beta)$ .

Como estes coeficientes possuem o mesmo denominador (veja eqs. (2.2.11 e 12) ) os polos são zeros deste denominadores. Tais polos são números complexos, que em geral (ressonâncias estreitas), têm parte imaginária pequena quando comparada à real. Devido a isto, dizemos que um dado modo é selecionado por algum mecanismo de ressonância quando o número de onda da onda plana incidente é muito próximo da parte real do polo associado a este referido modo.

Iremos ainda neste capítulo obter expressões e calcular valores para estes polos, porém antes é mais instrutivo ganharmos um pouco de visão física no que diz respeito aos processos de ressonância. Para tanto utilizaremos a conhecida analogia ótico-mecânica, entre índice de refração e potencial [14].

Inicialmente estamos mais interessados em informações de caráter qualitativo do que

quantitativo. Começemos por escrever a equação de onda que satisfaz o potencial de Debye<sup>(\*)</sup> [13],  $f = f(r, \theta)$ , para a polarização TE:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{L^2 f}{r^2} + k^2(1 - N^2)\theta(a - r)f - k^2 f = 0 \quad (3.1.1)$$

onde adotamos o sistema de coordenadas esférico  $(r, \theta, \Phi)$ ,  $\theta(x)$  é a função de degrau de Heaviside e  $L$  é o operador de momentum angular.

Através do método de separação de variáveis tomamos,  $f(r, \theta) \rightarrow f_\ell(r, \theta) \equiv \frac{\chi_\ell(r)}{r} Q_\ell(\theta)$ , de modo que a eq. (3.1.1) se desacopla em duas outras equações diferenciais ordinárias, a saber:

$$-\frac{d^2 \chi_\ell}{dr^2} + U_{ef}(r) \chi_\ell = k^2 \chi_\ell \quad (3.1.2)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{dQ_\ell}{d\theta} \right) + \ell(\ell + 1) Q_\ell = 0 \quad (3.1.3)$$

A equação radial (3.1.2) é equivalente a uma equação de Schrödinger independente do tempo para um potencial efetivo  $U_{ef}(r)$  e "energia"  $k^2$ , enquanto a equação (3.1.3) é a equação diferencial de Legendre.

O potencial efetivo é dado por:

$$U_{ef}(r) = \frac{(\ell + 1/2)^2}{r^2} - k^2(N^2 - 1)\theta(a - r) \quad (3.1.4)$$

Fizemos aqui a troca (*modificação de Langer*),  $\ell(\ell + 1) \rightarrow (\ell + 1/2)^2$  para o autovalor de  $L^2$ , afim de que tenhamos o comportamento assintótico correto para a "função de onda"  $\chi_\ell(r)$  [15].

(\*) - Neste formalismo, os campos eletromagnéticos são obtidos através de derivadas do potencial de Debye, por exemplo, obtemos o campo magnético  $\vec{B}$  da seguinte forma:  $\vec{B} = -i\omega \epsilon \nabla \times \vec{F}$ , onde  $\nabla \cdot \vec{F} = -f$ .

Para que haja convergência dos raios luminosos para o interior da esfera é necessário que  $Re(N) > 1$ ; no outro caso,  $Re(N) < 1$ , a superfície esférica funciona como uma lente divergente. Portanto efeitos de “confinamento” de raios luminosos (auto-sustentação de um modo) estão relacionados à situação em que  $Re(N) > 1$ .

Como primeira análise, vamos ignorar efeitos de absorção ( $Im(N)=0$ ) e tomar  $N > 1$ . Com isto  $U_{ef}$  tem a forma de um poço cercado por uma barreira de potencial (veja fig.(3.1.1)) que suporta a existência de “estados quase-ligados”.

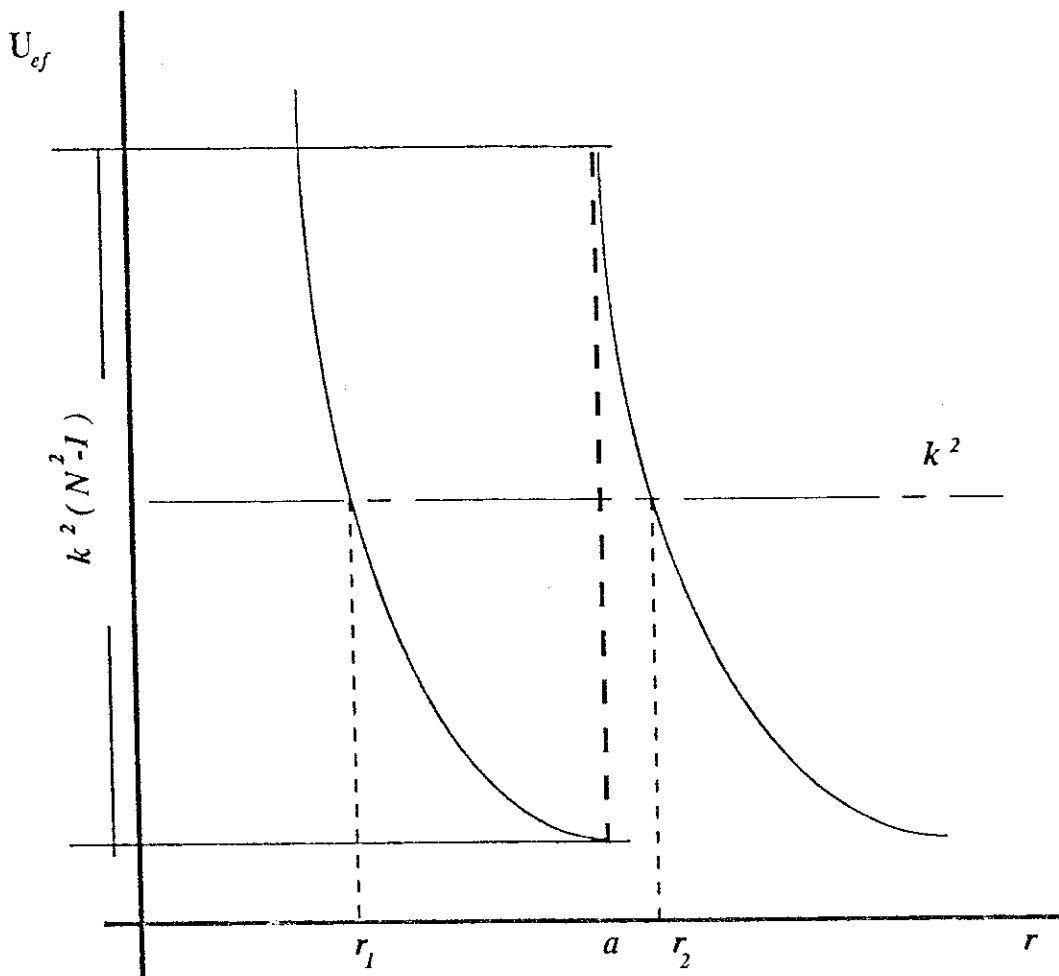


Fig.(3.3.1) • Potencial efetivo para  $N > 1$ .

Na fig(3.3.1), os pontos  $r_1$  e  $r_2$  são os pontos de retorno clássicos, definidos por,

$r_1 = \frac{\ell + 1/2}{\alpha} a < a < r_2 = \frac{\ell + 1/2}{\beta} a$ , ou equivalentemente dizemos que os multipolos ressonantes (ressonâncias estreitas) estão na faixa,  $\beta < \ell + 1/2 < \alpha$ .

Estes "estados quase-ligados da luz" na realidade são os modos normais ressonantes do espalhamento. O critério de ressonância pode ser obtido por um procedimento de quantização tipo Bohr-Sommerfeld [16]; explicitamente temos:

$$\int_{r_1}^a dr p_r = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi \quad ; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1.5)$$

Cabe salientar que a validade da eq. (3.1.5) é restrita. Os melhores resultados ocorrem para as ressonâncias mais profundas do poço de potencial, pois para estas ressonâncias a altura e a largura da barreira são maiores, permitindo assim termos *estados melhor confinados*. Definimos, em (3.1.5), o *momento radial generalizado*  $p_r$ , entre os pontos de retorno  $r_1$  e  $a$  por:

$$p_r = \sqrt{k^2 - U_{ef}} \quad (3.1.6)$$

Logo segue de (3.1.5 e 6) que:

$$\sqrt{\alpha_n^2 - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \cos^{-1} \left( \frac{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}{\alpha_n} \right) = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi \quad (3.1.7)$$

As soluções de (3.1.7) correspondem à parte real de uma dada ressonância. Entretanto, devido à finitude da barreira de potencial, a posição de tais ressonâncias não é bem definida. Tal incerteza está associada a uma parte imaginária para os polos associados à ressonância, de modo que escrevemos estes polos como,  $\tilde{\beta}_n(\ell) = \beta_n(\ell) - i b_n(\ell)$  com  $\alpha_n(\ell) = N\beta_n(\ell)$ .

Por sua vez, a parte imaginária  $b_n$  pode ser também estimada se nos lembramos que

$b_n$  representa a largura do estado quase-ligado ressonante, inversamente proporcional à "meia vida" da luz dentro da esfera, portanto está diretamente relacionada à transmissividade  $\Gamma$  da barreira:

$$\begin{aligned}
 b_n(\ell, \beta_n) &\propto \Gamma(\ell, \beta_n) \\
 &= \text{Exp} \left[ -2 \int_a^{r_2} dr |p_r| \right] \\
 &= \text{Exp} \left[ -2 \left( \ell + 1/2 \right) \ln \left[ \frac{\left( \ell + 1/2 \right) + \sqrt{\left( \ell + 1/2 \right)^2 - \beta_n^2}}{\beta_n} \right] - \sqrt{\left( \ell + 1/2 \right)^2 - \beta_n^2} \right] \quad (3.1.8)
 \end{aligned}$$

A equação (3.1.8) nos mostra que  $b_n$  decai exponencialmente e portanto ressonâncias associadas a grandes momentos angulares podem ser muito estreitas.

Paralelamente a esta interpretação, na qual a condição de ressonância está intimamente relacionada ao comportamento radial da função de onda, podemos reinterpretar esta condição de ressonância em termos da propagação angular, governada pela função  $Q_\ell(\theta)$ .

Para fazermos isto começamos por observar o comportamento assintótico de  $Q_\ell$ .

Fazendo a substituição  $Q_\ell(\theta) = \frac{\tilde{\psi}_\ell(\theta)}{\sqrt{\text{sen } \theta}}$ , a eq.(3.1.3) é levada em:

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_\ell}{d\theta^2} + \left( \ell + 1/2 \right)^2 \tilde{\psi}_\ell + \frac{\tilde{\psi}_\ell}{4 \text{sen}^2 \theta} = 0 \quad (3.1.9)$$

Excluindo-se as direções dianteira e traseira e no limite  $\left| \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \text{sen} \theta \right| \gg 1$ , as soluções de (3.1.9) se comportam como:

$$\tilde{\psi}_\ell(\theta) \approx e^{\pm i \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \theta} \quad (3.1.10)$$

O segundo membro da eq.(3.1.10) representa ondas que viajam na direção angular positiva(+) e na direção angular negativa (-).

Por outro lado, a fase do fator de propagação radial governada por  $\chi_\ell(r)$ , pode ser estimada por (\*):

$$\chi_\ell \approx e^{\pm i k N \Delta s} \quad (3.1.11)$$

onde  $\Delta s$  é o caminho ótico percorrido em um meio com índice de refração  $N$  [17].

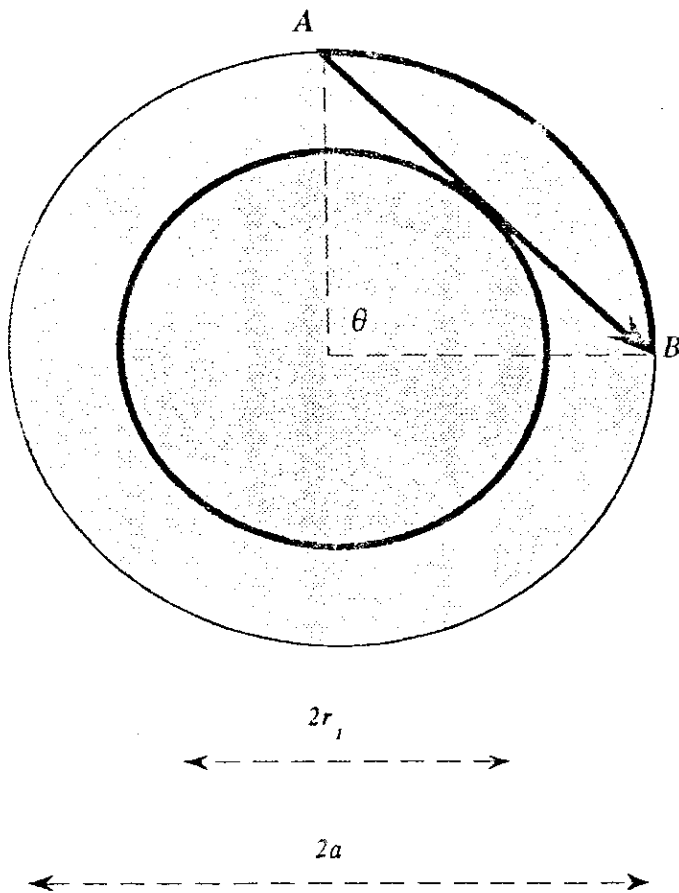
Olhando para a fig.(3.1.2), vemos que para raios no interior da esfera  $\Delta s$  vem dado por:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \overline{AB} \\ &= 2\sqrt{a^2 - r_1^2} \\ &= 2a\sqrt{1 - \left( \frac{\ell + 1/2}{\alpha} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Por outro lado, segue também da fig.(3.1.2) que o ângulo  $\theta$  em (3.1.10) escreve-se como:

$$\begin{aligned} \theta &= \widehat{AB} \\ &= 2 \cos^{-1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 \cos^{-1} \left( \frac{r_1}{a} \right) \\ &= 2 \cos^{-1} \left( \frac{\ell + 1/2}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

(\*) - Na realidade, é possível se mostrar que a eq.(3.1.11) é o limite assintótico ( $\omega \gg 1$ ) da solução WKB para ondas viajantes no interior da esfera.



*Fig.(3.1.2) • Propagação radial e angular da luz no interior da esfera.*

Entretanto, como a superfície esférica  $r=r_1$  é uma cóustica, a passagem do raio por ela acrescenta um salto de  $\pi/2$  na fase em (3.1.11) [17] e passamos a reescrevê-la como:

$$\chi_t = e^{2i \left[ \sqrt{a^2 - (t + \frac{1}{2})^2} - \frac{\pi}{4} \right]} \quad (3.1.14)$$

A interpretação para a condição de ressonância neste caso seria dada pelo casamento das fases das propagações radial e angular, isto é:

$$\begin{aligned} \chi_\ell \tilde{\Psi}_\ell &= \left( e^{2i\sqrt{\alpha^2 - (\ell + 1/2)^2} - \frac{\pi}{2}} \right) \left( e^{-2i(\ell + 1/2) \cos^{-1}\left(\frac{\ell + 1/2}{\alpha}\right)} \right) \\ &= e^{2in\pi} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

resultado este que é completamente equivalente à eq. (3.1.7).

Ainda dentro deste contexto, é possível também dar uma interpretação física para a largura da ressonância. Para vermos isto, procedemos da seguinte forma:

Se fizermos agora,  $k \rightarrow k + i \frac{b}{a}$  e  $(\ell + 1/2) \rightarrow (\ell + 1/2) + i\eta$ , então segue que as equações que governam a propagação radial (eq.(3.1.11)) e angular (eq.(3.1.10)), passam a ter um decaimento exponencial, cujos expoentes se relacionam através de:

$$\eta = \frac{\sqrt{\alpha^2 - (\ell + 1/2)^2}}{\beta \cos^{-1}\left(\frac{\ell + 1/2}{\alpha}\right)} b \quad (3.1.16)$$

A eq.(3.1.16) nos mostra que durante a ressonância, associada à *meia vida temporal* ( $b^{-1}$ ) tem-se uma *meia vida angular* ( $\eta^{-1}$ ), que nos diz qual é o número de voltas necessário para que a luz escape do interior da esfera.

### 3.2 Cálculo de Ressonâncias

Na seção anterior vimos que as ressonâncias, polos dos coeficientes de Mie, podiam ser interpretadas como estados quase-ligados de um poço de potencial efetivo. Vamos agora desenvolver algoritmos que nos permitem calcular tais ressonâncias.

Os polos dos coeficientes de Mie (veja eqs. (2.2.5;6)) satisfazem a seguinte equação:



$$\frac{\zeta_\ell^{(1)'}(\beta)}{\zeta_\ell^{(1)}(\beta)} = \epsilon_j N \frac{\psi_\ell'(\alpha)}{\psi_\ell(\alpha)} \quad (3.2.1)$$

Aqui se torna conveniente trabalharmos com as funções cilíndricas de Bessel ao invés das funções de Ricatti-Bessel. Para isto reescrevemos a eq. (3.2.1) como:

$$[I\beta] = \epsilon_j N[\alpha] + \frac{1}{2\beta}(\epsilon_j - 1) \quad (3.2.2;a)$$

onde

$$[I\beta] = \frac{H_\lambda^{(1)'}(\beta)}{H_\lambda^{(1)}(\beta)} \quad (3.2.2;b)$$

e,

$$[\alpha] = \frac{J_\lambda'(\alpha)}{J_\lambda(\alpha)} \quad (3.2.2;c)$$

são as derivadas logarítmicas das funções cilíndricas de Bessel, com:

$$\lambda = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.2;d)$$

Como primeiro procedimento para resolver a eq. (3.2.2;a) iremos usar as expansões assintóticas de Debye para as funções cilíndricas [18], também chamadas aproximações tipo WKB para tais funções.

Vimos na seção anterior que os multipolos ressonantes estão na faixa ,  $\beta < \lambda < \alpha$ . Neste regime escrevemos as derivadas logarítmicas, no limite WKB, como:

$$[I\beta] = -\frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}}{\beta} \left\{ I - ie^{2\psi(\lambda, \beta)} - \frac{\beta^2}{2(\lambda^2 - \beta^2)^{3/2}} \right\} \\ \left\{ I - \frac{I}{8\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}} \left[ I - \frac{\lambda^2}{3(\lambda^2 - \beta^2)} \right] \right\} \quad (3.2.3)$$

$$[\alpha] = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}}{\alpha} \operatorname{tg}(\varphi(\lambda, \alpha) - \pi/4) - \frac{3}{8\alpha} \left[ I + \frac{7\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)} \right] \\ + \frac{I}{8\alpha} \left[ I + \frac{5\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)} \right] \operatorname{tg}(\varphi(\lambda, \alpha) - \pi/4) \quad (3.2.4)$$

onde,

$$\psi(\lambda, \beta) = \sqrt{\lambda^2 - \beta^2} - \lambda \ln \left[ \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \beta^2}}{\beta} \right] \quad (3.2.5)$$

e

$$\varphi(\lambda, \alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2} - \lambda \cos^{-1} \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right) \quad (3.2.6)$$

A validade das expansões de Debye para (3.2.5 e 6) requer respectivamente,  $\lambda - \beta \gg \beta^{1/2}$  e  $\alpha - \lambda \gg \alpha^{1/2}$ . Dentro deste limite, o 2º membro da eq.(3.2.5) é sempre negativo.

Sendo assim, a eq.(3.2.2) é levada na seguinte equação transcendental:

$$\operatorname{tg}(\varphi(\lambda, \alpha) - \pi/4) = \frac{I}{\epsilon_j} \frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}} \left\{ I - \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 - \beta^2)^{3/2}} + \frac{\epsilon_j}{8\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}} \left[ I - \frac{7\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}}{8 \epsilon_j (\alpha^2 - \lambda^2)} \left[ I + \frac{5\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)} \right] \\
& - i e^{2\psi(\lambda, \beta)} \left[ I - \frac{I}{8\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}} \left( I - \frac{\lambda^2}{3(\lambda^2 - \beta^2)} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}}{8 \epsilon_j (\alpha^2 - \lambda^2)} \left( I + \frac{5\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)} \right) \right] \Bigg\} \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

No limite de ressonâncias estreitas, isto é  $\beta \rightarrow \tilde{\beta}_j = \beta_j - i b_j$  com  $|b_j| \ll \beta_j$ , a eq. (3.2.7) pode ser desacoplada (retendo termos até 1ª ordem em  $b_j$ ) em suas partes real e imaginária. Usando este fato, obtemos como uma primeira aproximação para as soluções de (3.2.7) o conjunto mais simplificado de equações abaixo:

$$\text{tg}(\varphi(\lambda, \alpha_j) - \pi/4) = \frac{I \sqrt{\lambda^2 - \beta_j^2}}{\epsilon_j \sqrt{\alpha_j^2 - \lambda^2}} \tag{3.2.8}$$

$$b_j = \beta_j \cos^2(\varphi(\lambda, \alpha_j) - \pi/4) \frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta_j^2}}{\epsilon_j (\alpha_j^2 - \lambda)} e^{2\psi(\lambda, \beta_j)} \tag{3.2.9}$$

onde a parte imaginária (3.2.9) fica determinada pela solução da eq.(3.2.8) para a parte real.

Como no plano- $\beta$ , os polos de interesse estão na faixa  $\frac{\lambda}{N} < \beta_j < \lambda$ , estimativas para as soluções da eq.(3.2.8) podem ser obtidas a partir de sua expansão em série de potências na vizinhança de  $\lambda$ , tomando  $\beta_j = \lambda \left( 1 - \frac{x_j^2}{2} \right)$ , onde  $x_j$ , com  $0 < x_j < \sqrt{2 \left( 1 - \frac{I}{N} \right)}$ , será o nosso parâmetro de expansão. Fazendo isto temos:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta_j^2}}{\epsilon_j \sqrt{\alpha_j^2 - \lambda^2}} = \frac{x_j}{\epsilon_j M} \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda, \alpha_j) &= \lambda [M - tg^{-1}(M)] \\ &= M\beta_j - \lambda tg^{-1}(M)\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

onde  $M \equiv \sqrt{N^2 - i}$ .

Assim segue da eq. (3.2.8) que,

$$tg \left\{ M\beta_j - \lambda tg^{-1}(M) - \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{x_j}{\epsilon_j M}, \text{ ou equivalentemente,}$$

$$\begin{aligned}M\beta_j - \lambda tg^{-1}(M) - \frac{\pi}{4} &\approx n\pi + tg^{-1} \left( \frac{x_j}{\epsilon_j M} \right) \\ &\approx n\pi + \frac{x_j}{\epsilon_j M}, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

$$\therefore \beta_j \rightarrow \beta_{j,n}(\lambda) \approx \lambda \frac{tg^{-1}(M)}{M} + \left( n + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{M} + \frac{x_j}{\epsilon_j M^2}\tag{3.2.12}$$

onde o número inteiro  $n$ , denominado de *ordem da ressonância*, pode ser interpretado como o número de nodos da função de onda radial  $\chi_\lambda(r)$  no limite de uma barreira impenetrável.

Por sua vez, podemos estimar iterativamente  $x_j = \sqrt{2 \left( \frac{\lambda - \beta_j}{\lambda} \right)}$  usando a própria eq.

(3.2.12) e retendo apenas os dois primeiros termos. Obtemos assim

$$\begin{aligned}x_j &\approx \sqrt{2 \left( 1 - \frac{tg^{-1}(M)}{M} - \left( n + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{\lambda M} \right)} \\ &\approx \sqrt{P} - \left( n + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{\lambda M \sqrt{P}}\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

$$\text{onde } P \equiv 2 \left( 1 - \frac{tg^{-1}(M)}{M} \right).$$

Portanto a eq. (3.2.12) passa a ser reescrita como,

$$\beta_{j,n}(\lambda) = \lambda \frac{t g^{-1}(M)}{M} + \left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{M} + \frac{\sqrt{P}}{\epsilon_j M^2}, \quad n = 0, 1, \dots, n_{MAX} \quad (3.2.14)$$

Em (3.2.14),  $n_{MAX}$  é o  $n^o$  máximo de nodos da função de onda no interior da esfera. Uma vez que a altura da barreira é finita ( $N$  finito), então  $n$  também é finito, sendo o seu valor limitado superiormente por,

$$n_{MAX} \leq \frac{\lambda P M}{2\pi} - \frac{1}{4} \quad (3.2.15)$$

Para estimarmos a parte imaginária da ressonância procedemos da seguinte forma:

Utilizando novamente  $x_j$ , com  $0 < x_j < \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{N}\right)}$ , como parâmetro de expansão, a eq. (3.2.9)

é levada em,

$$b_j \approx \frac{\lambda}{\epsilon_j M} \text{Exp}(2\psi), \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} \psi &\approx -\frac{\lambda}{3} x_j^3 \\ &\approx -\frac{\lambda}{3} P^{3/2} + \left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{M} \sqrt{P}, \quad \text{assim,} \end{aligned}$$

$$b_j \rightarrow b_{j,n} \approx \frac{\lambda}{\epsilon_j M} \text{Exp}\left[-2\left(\frac{\lambda}{3} P^{3/2} - \left(n + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{M} \sqrt{P}\right)\right] \quad (3.2.16)$$

As eqs. (3.2.14 e 16) nos permitem prever várias características das ressonâncias, por exemplo:

- Ressonâncias de modos distintos porém com mesmo  $\lambda$  e  $n$ : a ressonância  $E$  ocorre para um número de onda maior e é também mais larga que a  $M$  por fatores

respectivamente de  $\sqrt{P}$  e  $N^2$ .

- Para uma dada ressonância, vê-se da eq. (3.2.16) que sua largura possui um comportamento oposto em relação aos parâmetros  $\lambda$  e  $n$ : com o primeiro ela decresce exponencialmente enquanto que com o outro ela cresce também de maneira exponencial. Assim, quanto mais alta for a barreira de potencial efetivo (maior  $L$ ) mais estreitas serão as ressonâncias e contrariamente, tanto mais largas serão quanto mais próximas estiverem do topo da barreira. Observe, de (3.2.14), que  $\beta_{\lambda,n}$  se aproxima de  $\lambda$  à medida que  $n$  cresce.
- Observa-se também que a distância entre duas ressonâncias de mesma polarização, caracterizadas pelos parâmetros  $\lambda', \lambda, n'$  e  $n$  com  $\lambda' > \lambda$  e  $n' \leq n$  é dada por:

$$\beta_{n'}^{\lambda'} - \beta_n^\lambda = (\lambda' - \lambda) \frac{I g^{-1}(M)}{M} - (n - n') \frac{\pi}{M} \quad (3.2.17)$$

No caso em que  $\lambda' = \lambda + 1$  e  $n' = n$  obtemos o resultado previsto pelas Refs.[19,20]. Por outro lado a razão entre as larguras destas duas ressonâncias escreve-se como:

$$\frac{b_{n'}^{\lambda'}}{b_n^\lambda} \approx \frac{\lambda'}{\lambda} e^{\frac{2}{3} P^{1/2} (\lambda' - \lambda) + \frac{2\pi}{M} (n - n') \sqrt{P}} \quad (3.2.18)$$

As equações (3.2.17;18) nos permitem avaliar o grau de proximidade e superposição entre um dado par de ressonâncias. Por exemplo, se a desigualdade,  $|\beta_{n'}^{\lambda'} - \beta_n^\lambda| \gg b_{n'}^{\lambda'} + b_n^\lambda$ , é satisfeita para um dado conjunto  $\{\lambda', \lambda, n', n\}$ , estas duas ressonâncias são suficientemente afastadas e estreitas para não se superporem.

É bom salientar que as propriedades acima citadas possuem um caráter mais qualitativo do que quantitativo, pois em sua obtenção algumas aproximações foram envolvidas. Para melhor visualizarmos isto mostramos a seguir a Tabela (3.2.1), na qual confrontamos as soluções obtidas a partir da eq. (3.2.2) com as das eqs. (3.2.8 e 9) corrigidas

com termos de ordem superior na expansão WKB. Em ambos os casos, as soluções numéricas foram obtidas pelo método iterativo de Newton, utilizando-se como estimativas para inicializar-se as iterações as equações (3.2.14 e 16). A convergência foi atingida após um número de passos menor que uma dezena, exigindo uma precisão numérica de 12 casas decimais.

MODO	EXATO		WKB		ERRO %	
	$\beta$	$b$	$\beta$	$b$	$\beta$	$b$
$M_{64}^1$	57.47	6.11E-3	57.49	6.69E-3	3.1E-2	9.5
$M_{70}^0$	57.70	1.17E-5	57.73	1.19E-5	4.3E-2	1.7
$E_{64}^1$	57.83	9.40E-3	57.85	1.02E-2	4.1E-2	0.9
$E_{70}^0$	58.15	1.68E-5	58.17	1.65E-5	2.9E-2	1.8
$M_{65}^1$	58.28	5.26E-3	58.29	5.73E-3	3.0E-2	8.9
$M_{71}^0$	58.48	9.49E-6	58.51	9.58E-6	4.1E-2	0.9
$E_{65}^1$	58.64	8.08E-3	58.66	8.76E-3	3.7E-2	8.4
$E_{71}^0$	58.93	1.36E-5	58.95	1.33E-5	2.9E-2	2.2

Tab.(3.2.1): Cálculo de ressonâncias para  $N = 1.33$ . A notação empregada é a seguinte, O símbolo  $j_\ell^n$  representa o modo ressonante  $j$ , momento angular  $\ell$  e ordem de ressonância  $n$ . Cabe salientar que a notação de potenciação empregada E-y é equivalente a  $10^{-y}$ , e que o erro é o erro percentual, assim, 1.17E-3% equivale a um erro relativo de  $1.17 \times 10^{-5}$ .

Observamos da Tab. (3.2.1) que o erro na parte real da ressonância é inferior a  $5 \cdot 10^{-2}$  (0.05 %) e é independente de  $n$ . Isto se deve ao fato de que o erro relativo envolvido nas expansões das funções cilíndricas é  $O(1/\lambda)$ , portanto um erro que predomina sobre os demais erros envolvidos, pois é de mesma ordem que, ou superior à largura das ressonâncias observadas. Por outro lado, o erro envolvido nestas larguras cresce exponencialmente com  $n$ , pois a validade da eq. (3.2.16) é de ordem  $O(b^2)$ .

### 3.3 Efeitos de Absorção

Até agora admitimos que o índice de refração fosse real e maior que a unidade, desprezando completamente qualquer efeito absorutivo do meio. Uma vez que tais efeitos contribuem para atenuação de um dado modo dentro da cavidade esférica, é intuitivo supor que estes devam também influir na largura da ressonância associada a este referido modo.

Neste contexto, o índice de refração passa a ter uma parte imaginária positiva, isto é:  $N \rightarrow N' = N + im$ , com  $m > 0$ .

Analogamente ao que foi feito na seção anterior, vamos estudar estes efeitos ainda nos valendo da aproximação WKB para o cálculo das ressonâncias, veja eq. (3.2.7).

Na maioria dos casos físicos de interesse podemos tomar,  $m \ll N$ . Tendo isto em mente e novamente dentro da aproximação de ressonância estreita, podemos desacoplar a eq. (3.2.7) em suas partes real e imaginária.

A equação para a parte real da ressonância continua sendo a eq. (3.2.8) porém sua validade ao invés de ser  $O(b^2 |_{\kappa=0})$  passa a ser  $O(b^2 |_{\kappa=0})$ .

Confirmando aquilo que esperávamos, a parte imaginária da ressonância é afetada pela absorção e passa agora a ser escrita como:

$$b_j = b_j|_{m=0} + \beta_j \cos^2 \left[ \varphi(\lambda, \alpha_j) - \pi/4 \right] \left[ \frac{m}{N} + \frac{e_j \sqrt{\lambda^2 - \beta_j^2}}{\epsilon_j (\alpha_j^2 - \lambda)} \right] \quad (3.3.1;a)$$

onde  $b_j|_{\kappa=0}$  é a solução na ausência de absorção dada pela eq. (3.2.9), enquanto que o símbolo  $e_j$  é definido como,

$$e_j \equiv \begin{cases} 0, j = 1 \\ -\frac{2m}{N^2}, j = 2 \end{cases} \quad (3.3.1;b)$$



Para termos uma visão qualitativa melhor do comportamento da eq. (3.3.1;a) vamos expandi-la, novamente em torno da vizinhança de  $\lambda$ , tomando  $\beta_j = \lambda \left( 1 - \frac{x_j^2}{2} \right)$ . Fazendo isto temos:

$$b_j \approx b_j \Big|_{m=0} + \beta_j \frac{m}{N} + \frac{e_j x_j}{\epsilon_j M^2} \quad (3.3.2)$$

onde  $x_j$  é estimado pela eq. (3.2.13). A eq. (3.3.2) mostra explicitamente as contribuições para a largura da ressonância dos termos não absorptivos e absorptivos. Expomos a seguir uma tabela para as soluções da eq. (3.2.1) com índice de refração complexo.

<i>m</i>	$M'_{65}$		$E'_{65}$	
	$\beta$	<i>b</i>	$\beta$	<i>b</i>
0.0	58.280844143	0.0052623	58.640691949	0.0080849
1.E-8	58.280844140	0.0052627	58.640691946	0.0080853
5.E-8	58.280844132	0.0052644	58.640691933	0.0080870
1.E-7	58.280844121	0.0052664	58.640691916	0.0080890
5.E-7	58.280844033	0.0052830	58.640691782	0.0081053
1.E-6	58.280843924	0.0053037	58.640691614	0.0081257
5.E-6	58.280843048	0.0054691	58.640690273	0.0082887
1.E-5	58.280841953	0.0056760	58.640688595	0.0084925
5.E-5	58.280833152	0.0073309	58.640675149	0.0101226
1.E-4	58.280822059	0.0093995	58.640658272	0.0121602
5.E-4	58.280729606	0.0259473	58.640520497	0.0284598
1.E-3	58.280604794	0.0466302	58.640341409	0.0488316
5.E-3	58.279240701	0.2120203	58.638640337	0.2116946
1.E-2	58.276642241	0.4185851	58.635874452	0.4150173

Tab. (3.3.1): Ressonâncias do Espalhamento Mie para um meio absorptivo com índice de refração  $N = 1.33 + im$ .

A tabela (3.3.1) nos mostra que as mudanças na parte real da ressonância devido a absorção

são de ordem igual ou superior a  $O(b^2 |m|_0)$ , confirmando aquilo que havíamos comentado anteriormente. Por outro lado, efeitos na parte imaginária da ressonância são mais drásticos, podendo em alguns casos (dependendo de a largura da ressonância  $\beta$ , na ausência de absorção ser muito inferior a  $m$ ), ser a largura final dominada pela absorção. Tal fato está qualitativamente de acordo com a eq. (3.3.2)

Para finalizar este capítulo, vamos descrever os *efeitos de absorção* através de uma aproximação de tipo WKB. Para fazermos isto basta observamos que a mudança  $N \rightarrow N + im$  transforma os expoentes da equação (3.1.11) do seguinte modo:

$$ikN\overline{AB} \rightarrow ikN\overline{AB} - km\overline{AB} \quad (3.3.3)$$

e

$$-\frac{Nb}{a}\overline{AB} \rightarrow -\frac{Nb}{a}\overline{AB} - i\frac{mb}{a}\overline{AB} \quad (3.3.4)$$

Portanto, se a condição de ressonância é satisfeita, a absorção altera a eq.(3.1.10) do seguinte modo:

$$\eta = \left[ b + \frac{\beta m}{N} \right] \frac{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}}{\beta \cos^{-1}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)} \quad (3.3.5)$$

É bom salientar que neste contexto e nesta ordem de aproximação, a parte real da ressonância permanece inalterada. Vê-se entretanto, da eq.(3.3.5), que o termo entre colchetes é completamente equivalente à eq.(3.3.2) para a largura da ressonância. O crescimento linear de  $\eta$  com  $m$  significa que o aumento da absorção no meio leva a um decréscimo na meia vida da luz no interior da esfera, resultado este fisicamente esperado.

## Capítulo 4

### Teoria do momento angular complexo para as amplitudes de espalhamento nas direções dianteira e traseira.

#### 4.1 A transformada de Watson e o plano de momento angular complexo.

Obtivemos no Cap. 2 as expressões para as amplitudes de espalhamento [(eqs. (2.3.4 e 5))]. Do ponto de vista de aplicações, estas são as quantidades mais relevantes do espalhamento. Através de medidas da luz espalhada [21,22] podemos obter informações a respeito de grandezas que caracterizam o espalhador como por exemplo, tamanho e índice de refração da esfera [23]. Sendo assim, uma boa compreensão teórica dessas amplitudes se faz necessária.

A principal dificuldade que aparece no estudo das amplitudes de espalhamento provem do fato delas serem expressas por séries infinitas de ondas parciais cuja convergência se torna lenta para valores grandes do parâmetro de tamanho. Uma tentativa para se contornar este problema pode ser feita através da *transformada de Watson*, que leva séries em integrais de caminho no *plano do momento angular complexo (plano -  $\lambda$ )* [14]. Por exemplo, a série  $S$  dada pela equação abaixo,

$$S = \sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell) \quad (4.1.1)$$

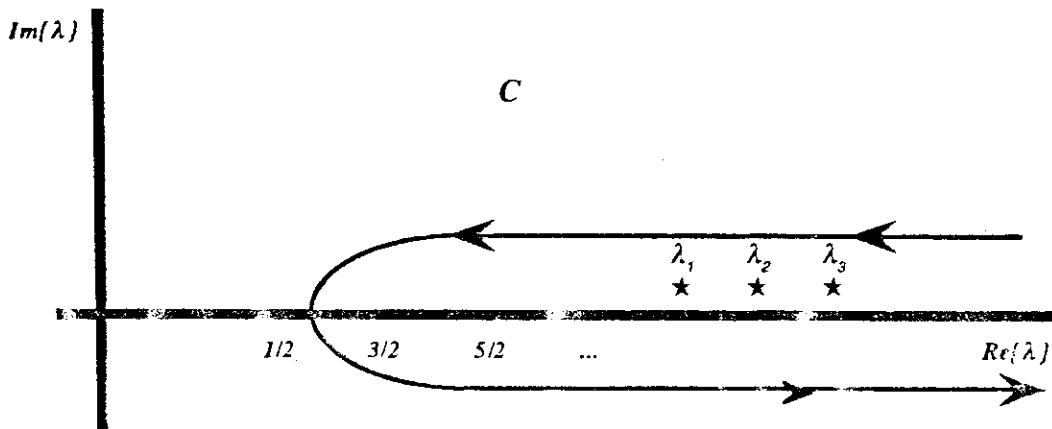
pode ser representada pela integral sobre o contorno  $C$  (veja fig. (4.1.1)) mais uma série de resíduos<sup>(\*)</sup>, caso haja polos de  $f$  no interior de  $C$ , isto é:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C d\lambda \frac{f(\lambda - 1/2)}{\cos \pi \lambda} e^{i\pi \lambda} - \pi i \sum_{\{\lambda^*\}} \frac{e^{i\pi \lambda^*}}{\cos \pi \lambda^*} \text{Res}[f(\lambda^* - 1/2)] \quad (4.1.2)$$

onde  $\lambda^*$  são os possíveis polos de  $f$  contidos em  $C$  e  $\text{Res}[f(\lambda^* - 1/2)]$  é o valor do resíduo de  $f$

(\*) - N: definição usual da transformada de Watson o caminho de integração  $C$  é escolhido evitando polos de  $f$  de modo que, a série de resíduos em (4.1.2) não aparece. Porém, como veremos neste Capítulo, há importantes polos (quando  $f$  é amplitude de espalhamento) que devem estar contidos em  $C$  de forma que já o escolhemos contendo polos como mostra a fig.(4.1.1).

nestes polos.



---

fig.(4.1.1) • Caminho de Integração  $C$  usado na definição da transformada de Watson, onde os  $\lambda_j$  [★] são polos de  $f$ .

---

Feito isso, o problema de somarmos  $S$  foi transferido para o cálculo de uma integral sobre  $C$  e de resíduos em polos. O grão operacional reside no fato de trabalharmos agora com funções definidas no plano complexo  $\lambda$ , permitindo-nos deformar o caminho da forma mais conveniente. Antes de aplicarmos tais idéias ao cálculo de amplitudes vamos abrir um parêntese e discutir algumas propriedades importantes destas amplitudes.

É bem sabido que quando o parâmetro  $\beta$  varia as seções de choque têm dois comportamentos distintos; um mais lentamente variável e suave chamado de background e outro completamente distinto, que ocorre em valores específicos de  $\beta$ , associado a flutuações rápidas e com picos estreitos (ripple) [24].

Para separarmos estes dois comportamentos distintos, reescrevemos as amplitudes em termos de duas novas séries obtidas a partir da *expansão de Debye* [25] para os coeficientes de Mie. Este será o assunto da próxima seção.

## 4.2 A expansão de Debye.

A idéia da expansão de Debye reside no fato de podermos reinterpretar as amplitudes de espalhamento em termos de interações de superfície [26].

Nosso passo inicial consiste em tratar a interação de uma onda multipolar incidente com a superfície esférica; tal interação dá origem a ondas refletidas na superfície e a ondas que convergem para o seu interior (veja a Fig. (4.2.1)).

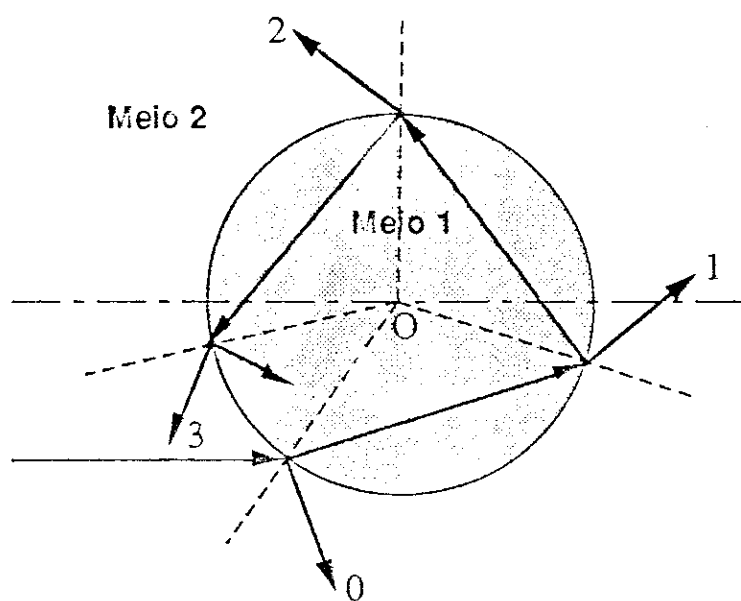


fig.(4.2.1) • Trajetórias dos raios no interior e fora da superfície esférica.

A onda proveniente do vácuo (meio 2) que, após interagir com a superfície esférica, é parcialmente refletida por esta e parcialmente transmitida para o seu interior (meio 1), pode ser decomposta em:

$$\varphi_2^{(j)}(\mathbf{r}) = A \left[ \frac{\zeta_l^{(2)}(kr)}{\zeta_l^{(2)}(\beta)} + R_{22}^{(j)} \frac{\zeta_l^{(1)}(kr)}{\zeta_l^{(1)}(\beta)} \right] \quad (4.2.1)$$

$$\varphi_1^{(j)}(r) = AT_{21}^{(j)} \frac{\zeta_l^{(2)}(Nkr)}{\zeta_l^{(2)}(\alpha)} \quad (4.2.2)$$

onde  $R_{21}^{(j)}$  é o coeficiente esférico de reflexão da interface e  $T_{21}^{(j)}$  o coeficiente de transmissão do meio 2 para o meio 1. Ambos os coeficientes são obtidos a partir das condições de contorno da teoria de Maxwell na superfície esférica, a saber:

i) *Continuidade das componentes tangenciais dos campos em  $r = a$*

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(j)}(r = a) &= \varphi_1^{(j)}(r = a) \\ \Rightarrow T_{21}^{(j)} &= 1 + R_{22}^{(j)} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

ii) *Continuidade das componentes normais dos campos*

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(j)'}(r = a) &= \varphi_1^{(j)'}(r = a) \\ \Rightarrow \{2\beta\} + R_{22}^{(j)}\{1\beta\} &= T_{21}^{(j)}N \epsilon_j \{2\alpha\} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Segue de (4.2.3) e (4.2.4) que,

$$R_{22}^{(j)} = - \frac{\{2\beta\} - N \epsilon_j \{2\alpha\}}{\{1\beta\} - N \epsilon_j \{2\alpha\}} \quad (4.2.5)$$

onde os símbolos  $\{jx\} \equiv \frac{\zeta_l^{(j)'}(x)}{\zeta_l^{(j)}(x)}$  são as derivadas logarítmicas das funções de Ricatti-

Hankel.

$$T_{21}^{(j)} = \frac{\{1\beta\} - \{2\beta\}}{\{1\beta\} - N \epsilon_j \{2\alpha\}} \quad (4.2.6)$$

Situação semelhante ocorre quando ondas vindas do interior da esfera são refletidas e transmitidas através de sua superfície para o meio exterior. Neste caso temos:

$$\varphi_2^{(j)}(r) = AT_{12}^{(j)} \frac{\zeta_l^{(1)}(kr)}{\zeta_l^{(1)}(\beta)} \quad (4.2.7)$$

$$\varphi_1^{(j)}(r) = A \left[ \frac{\zeta_l^{(1)}(Nkr)}{\zeta_l^{(1)}(\alpha)} + R_{11}^{(j)} \frac{\zeta_l^{(2)}(Nkr)}{\zeta_l^{(2)}(\alpha)} \right] \quad (4.2.8)$$

Nestas expressões,  $T_{12}^{(j)}$  é o coeficiente de transmissão do meio 1 para o meio 2 e  $R_{11}^{(j)}$  é o coeficiente de reflexão interna. Novamente, como antes, segue das condições de contorno *i)* e *ii)* respectivamente que:

$$T_{12}^{(j)} = 1 + R_{11}^{(j)} \quad (4.2.9)$$

$$T_{12}^{(j)} \{1\beta\} = N \epsilon_j \left[ \{1\alpha\} + R_{11}^{(j)} \{2\alpha\} \right] \quad (4.2.10)$$

portanto,

$$R_{11}^{(j)} = - \frac{\{1\beta\} - N \epsilon_j \{1\alpha\}}{\{1\beta\} - N \epsilon_j \{2\alpha\}} \quad (4.2.11)$$

$$T_{12}^{(j)} = N \epsilon_j \frac{\{1\alpha\} - \{2\alpha\}}{\{1\beta\} - N \epsilon_j \{2\alpha\}} \quad (4.2.12)$$

Uma vez de posse das expressões para os coeficientes esféricos de reflexão e transmissão, o passo seguinte consiste em notarmos que podemos reescrever a eq. (2.2.12) como,

$$a_j(\ell, \beta) = -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{\zeta_l^{(2)}(\beta)}{\zeta_l^{(1)}(\beta)} \right) \frac{\{2\beta\} - N \epsilon_j \{1\alpha\}}{\{1\beta\} - N \epsilon_j \{1\alpha\}} \right\} \quad (4.2.13)$$

onde  $\{x\} \equiv \frac{\psi_l'(x)}{\psi_l(x)}$  é a derivada logarítmica da função de Ricatti-Bessel. Por sua vez,

$$\begin{aligned}
\frac{(2\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} &= 1 + \frac{(2\beta) - (1\beta)}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} \\
&= 1 - \left( \frac{(1\beta) - (2\beta)}{(1\beta) - N \epsilon_j \{2\alpha\}} \right) \left( \frac{(1\beta) - N \epsilon_j \{2\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} \right) \\
&= 1 - T_{21}^{(j)} \left( \frac{(1\beta) - N \epsilon_j \{2\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Utilizamos, na passagem da segunda para a terceira linha da equação acima, a eq.(4.2.6).

Em (4.2.14) é conveniente escrever

$$\begin{aligned}
\frac{(1\beta) - N \epsilon_j \{2\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} &= 1 + \frac{N \epsilon_j}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} ((\alpha) - \{2\alpha\}) \\
&= 1 + \frac{N \epsilon_j \zeta_t^{(1)}(\alpha)}{2\psi_t(\alpha)} \left( \frac{(\alpha) - \{2\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

onde,

$$\rho_t^{(j)}(\beta) \equiv \frac{\zeta_t^{(1)}(\alpha)}{\zeta_t^{(2)}(\alpha)} R_{11}^{(j)} \tag{4.2.16}$$

Substituindo (4.2.16) em (4.2.14) obtemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{(1\beta) - N \epsilon_j \{2\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} &= 1 + N \epsilon_j \frac{\zeta_t^{(1)}(\alpha)}{\zeta_t^{(2)}(\alpha)} \left( \frac{(\alpha) - \{2\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{2\alpha\}} \right) \frac{1}{1 - \rho_t^{(j)}} \\
&= 1 + \left( \frac{\zeta_t^{(1)}(\alpha)}{\zeta_t^{(2)}(\alpha)} \right) \frac{T_{12}^{(j)}}{1 - \rho_t^{(j)}}
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

e,

$$\begin{aligned}
\frac{(2\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}}{(1\beta) - N \epsilon_j \{\alpha\}} &= 1 - T_{21}^{(j)} - \left( \frac{\zeta_t^{(1)}(\alpha)}{\zeta_t^{(2)}(\alpha)} \right) \frac{T_{21}^{(j)} T_{12}^{(j)}}{1 - \rho_t^{(j)}} \\
&= - \left[ R_{22}^{(j)} + \left( \frac{\zeta_t^{(1)}(\alpha)}{\zeta_t^{(2)}(\alpha)} \right) \frac{T_{21}^{(j)} T_{12}^{(j)}}{1 - \rho_t^{(j)}} \right]
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$



que por fim nos permite levar a eq. (4.2.13) na expansão de Debye para os coeficientes das séries de ondas parciais, isto é:

$$a_j(\ell, \beta) = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\zeta_\ell^{(2)}(\beta)}{\zeta_\ell^{(1)}(\beta)} \left[ R_{22}^{(j)} + T_{21}^{(j)} T_{12}^{(j)} \frac{\zeta_\ell^{(1)}(\alpha)}{\zeta_\ell^{(2)}(\alpha)} \sum_{p=1}^P (\rho_\ell^{(j)})^{p-1} \right] \right) + \frac{1}{2} \frac{\zeta_\ell^{(2)}(\beta)}{\zeta_\ell^{(1)}(\beta)} \left( T_{21}^{(j)} T_{12}^{(j)} \frac{\zeta_\ell^{(1)}(\alpha)}{\zeta_\ell^{(2)}(\alpha)} \frac{(\rho_\ell^{(j)})^P}{1 - \rho_\ell^{(j)}} \right) \quad (4.2.19)$$

onde o último termo corresponde ao resto da expansão.

Em geral, para valores de  $\beta$  reais que dão contribuições significativas, temos que  $|\rho_\ell^{(j)}| \ll 1$ , acarretando que em (4.2.19) só precisamos estender o somatório do termo entre colchetes às primeiras parcelas e podemos ignorar as contribuições restantes. Entretanto, em determinadas direções (para a auréola trazeira, por exemplo), isto não é válido, e veremos que as *flutuações rápidas (ripple)* se originam do resto da série.

A interpretação física do termo entre colchetes em (4.2.19) é simples. A primeira parcela envolve a contribuição de raios que não penetram no interior da esfera, raios que são refletidos por sua superfície externa. As parcelas subsequentes do somatório correspondem à contribuição daqueles raios que ao penetrarem na esfera são refletidos no seu interior ( $p-1$ ) vezes até novamente serem transmitidos para o meio exterior.

Com essas idéias em mente retornemos ao cálculo de amplitudes.

### 4.3 Contribuições para o background e flutuações rápidas

A fim de economizarmos notação, vamos sintetizar as expressões para as amplitudes de espalhamento nas direções dianteira e traseira, eqs. (2.3.7 e 9), da seguinte forma:

$$S_{\pm}(\beta) = -\sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) (\pm 1)^{\ell-1} [a_M(\ell, \beta) \pm a_E(\ell, \beta)] \quad (4.3.1)$$

o sinal (+) correspondendo à direção dianteira ( $\theta = 0$ ) enquanto que (-) corresponde à direção traseira ( $\theta = \pi$ ).

Aplicando a expansão de Debye (eq. (4.2.19)) às amplitudes de espalhamento, a eq. (4.3.1) é levada em

$$\begin{aligned}
 S_{\pm}(\beta) &= -\sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell + \frac{1}{2})(\pm 1)^{\ell-1} \left[ a_M^{(B)}(\ell, \beta) \pm a_E^{(B)}(\ell, \beta) \right] \\
 &\quad - \sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell + \frac{1}{2})(\pm 1)^{\ell-1} \left[ \varepsilon_M^{(R)}(\ell, \beta) \pm a_E^{(R)}(\ell, \beta) \right] \\
 &\equiv S_{\pm}^{(B)} + S_{\pm}^{(R)}
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

onde

$$a_j^{(B)}(\ell, \beta) = -\frac{1}{2} \left( I - \frac{\zeta_{\ell}^{(2)}(\beta)}{\zeta_{\ell}^{(1)}(\beta)} \left[ R_{22}^{(j)} + T_{21}^{(j)} T_{12}^{(j)} \frac{\zeta_{\ell}^{(1)}(\alpha)}{\zeta_{\ell}^{(2)}(\alpha)} \sum_{i=1}^P (\rho_{\ell}^{(ji)})^{i-1} \right] \right) \tag{4.3.3}$$

$$a_j^{(R)}(\ell, \beta) = \frac{1}{2} \frac{\zeta_{\ell}^{(2)}(\beta)}{\zeta_{\ell}^{(1)}(\beta)} \left( T_{21}^{(j)} T_{12}^{(j)} \frac{\zeta_{\ell}^{(1)}(\alpha)}{\zeta_{\ell}^{(2)}(\alpha)} \frac{(\rho_{\ell}^{(jj)})^P}{I - \rho_{\ell}^{(jj)}} \right) \tag{4.3.4}$$

Os índices  $B$  e  $R$  são respectivamente referentes a termos associados ao background e às flutuações rápidas. A teoria para o background já está relativamente estabelecida e discutida [14,27,28,29] nestas duas direções. Sendo assim, nos deteremos aqui em desenvolver uma teoria para as flutuações rápidas. Para fazermos isso, aplicamos uma transformada de Watson (veja eq.(4.1.2)) em  $S_{\pm}^{(R)}$ , isto é:

$$S_{\pm}^{(R)}(\beta) = -\frac{1}{2} \oint_C d\lambda \frac{\lambda}{\cos \pi \lambda} e^{i\pi \lambda} \mu_{\pm}(\lambda) [a_M^{(R)}(\lambda - \frac{1}{2}, \beta) \pm a_E^{(R)}(\lambda - \frac{1}{2}, \beta)] \\ + i\pi \sum_{\{\lambda^*\}} \frac{e^{i\pi \lambda^*}}{\cos \pi \lambda^*} \lambda^* \mu_{\pm}(\lambda^*) \operatorname{Re} s [a_M^{(R)}(\lambda^* - \frac{1}{2}, \beta) \pm a_E^{(R)}(\lambda^* - \frac{1}{2}, \beta)] \quad (4.3.5; a)$$

onde definimos

$$\mu_{\pm}(\lambda) \equiv \begin{cases} 1, & (+) \text{ direção dianteira} \\ ie^{-i\pi \lambda}, & (-) \text{ direção traseira} \end{cases} \quad (4.3.5; b)$$

Para começarmos a manipular com (4.3.5) temos que estudar os possíveis polos de  $a_j^{(R)}$ .

Observando (4.3.4) vemos que,

$$1 - \rho_{\lambda - \frac{1}{2}}^{(j)}(\beta) = 2 \frac{\Psi_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha)}{\zeta_{\lambda - \frac{1}{2}}^{(2)}(\alpha)} \left[ \frac{(1\beta) - N \in_j(\alpha)}{(1\beta) - N \in_j(2\alpha)} \right] \quad (4.3.6)$$

portanto um tipo de polo<sup>(\*)</sup> ocorre quando  $\rho_{\lambda - \frac{1}{2}}^{(j)} = 1$ , ou seja quando,

$$(1\beta) = N \in_j(\alpha) \quad (4.3.7)$$

A eq. (4.3.7) nada mais é do que a equação para as ressonâncias, eq. (3.2.1), porém agora escrita no plano  $\lambda$ . Cabe aqui salientar que, as ressonâncias estão na fronteira do domínio de convergência da expansão de Debye, de modo que na vizinhança de uma ressonância esta expansão é lentamente convergente sendo necessário somarmos um grande número de termos; por exemplo, para uma ressonância de largura  $b$ , temos que tomar  $P$  em (4.2.19) da ordem de  $b^{-1}$ .

Outras categorias de polos aparecem quando o denominador comum aos coeficientes de transmissão e reflexão se anula. Para que isso ocorra é necessário que:

$$(1\beta) = N \in_j(2\alpha) \quad (4.3.8)$$

Afim de deformarmos convenientemente o caminho  $C$  de integração é necessário conhecer a disposição desses polos no plano  $\lambda$ . Os polos que satisfazem à eq.(4.3.7), associados às ressonâncias, serão neste contexto chamados de polos  $R$ , estes estão localizados<sup>(\*)</sup> próximos ao eixo real entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Entretanto, as soluções da eq. (4.3.8), denominadas *polos de Regge-Debye (RD)* têm suas partes reais próximas de  $\beta$  (no 1º quadrante) ou de  $\alpha$  (no 4º quadrante), porém suas partes imaginárias se afastam assintoticamente do eixo

(\*) - Na realidade, para o espalhamento Mie, a "família" de polos de Regge, polos no plano- $\lambda$  a amplitude de espalhamento, é bem mais extensa do que a apresentada aqui. Um estudo mais completo sobre este assunto encontra-se na Ref.[14] e em especial o mapeamento de todos os polos de Regge encontra-se na fig.3 desta referência.

real [14]. Para vermos isso melhor vamos fazer uma análise qualitativa das soluções de (4.3.8).

Para os polos  $\lambda$  tipo  $RD$ , próximos a  $\beta$  tem-se, [14],

$$(1\beta) = \gamma e^{-i\frac{\pi}{3}} \frac{Ai'(-q)}{Ai(-q)} \quad (4.3.9)$$

onde,

$$\gamma \equiv \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} \ll 1 \quad (4.3.10)$$

$$q \equiv \gamma e^{-i\frac{\pi}{3}} (\lambda - \beta) \quad (4.3.11)$$

e  $Ai$  e  $Ai'$ , são respectivamente a função regular de Airy e sua primeira derivada. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (2\alpha) &= -i \frac{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}}{\alpha} \\ &= -i \frac{M}{N} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Portanto segue de (4.3.8) que,

$$Ai(-q) = \frac{i}{\epsilon_j M} \gamma e^{-i\frac{\pi}{3}} Ai'(-q) \quad (4.3.13)$$

Para resolvermos a equação acima procedemos do seguinte modo:

Como  $\gamma \ll 1$  tem-se  $q \rightarrow q_n^{(j)} = x_n - \delta^{(j)}$  onde  $x_n$  é a  $n$ -ésima raiz de  $Ai(-x)$ . Então, segue de (4.3.13) que

$$\delta^{(j)} = \frac{i}{\epsilon_j M} \gamma e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad (4.3.14)$$

seja,

$$\lambda \rightarrow \lambda_n^{(j)} = \beta + \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\gamma} x_n - \frac{i}{\epsilon_j M} \quad (4.3.15)$$

A eq. (4.3.15) nos mostra que os polos  $RD$  próximos a  $\beta$  têm parte imaginária positiva e  $O(\beta^{\frac{1}{3}})$ .

Fizemos até aqui a análise dos polos  $RD$  para os quais a parte real é próxima a  $\beta$ . De forma inteiramente análoga podemos repetir este procedimento para aqueles polos  $RD$  para os quais a parte real é próxima  $\alpha$ . Começamos este estudo observando que nesta região temos

$$\begin{aligned} (I\beta) &= -\frac{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}}{\beta} \\ &\approx -M \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

onde, como antes,

$$\tilde{\gamma} \equiv \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \ll 1 \quad (4.3.17)$$

e

$$\tilde{q} \equiv \tilde{\gamma} e^{i\frac{\pi}{3}} (\lambda - \alpha) \quad (4.3.18)$$

portanto segue de (4.3.8) que:

$$Ai(-\tilde{q}) \approx -\frac{N}{M} \epsilon_j \tilde{\gamma} e^{i\frac{\pi}{3}} Ai'(-\tilde{q}) \quad (4.3.19)$$

Como  $\tilde{\gamma} \ll 1$ , as soluções de (4.3.19) estão próximas dos zeros  $x_n$  da função de Airy, de modo que para

$$\tilde{q} \rightarrow \tilde{q}_n^{(j)} = x_n - \delta^j \quad (4.3.20)$$

a eq. (4.3.20) nos fornece que,

$$\delta^{(j)} \approx -\frac{N}{M} \epsilon_j \tilde{\gamma} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (4.3.21)$$

ou seja, os polos  $RD$  cuja a parte real é próxima a  $\alpha$  se comportam como:

$$\lambda_n^{(j)} = \alpha + \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{\tilde{\gamma}} x_n + \frac{N}{M} \epsilon_j \quad (4.3.22)$$

Nota-se também que a parte imaginária destes polos é negativa  $O(\alpha^{1/2})$ .

Uma vez que agora conhecemos a distribuição dos polos tanto  $R$  quanto  $RD$  no plano- $\lambda$ , o contorno  $C$  (veja fig. (4.3.1)) é deformado de modo que contenha apenas os polos  $R$ .

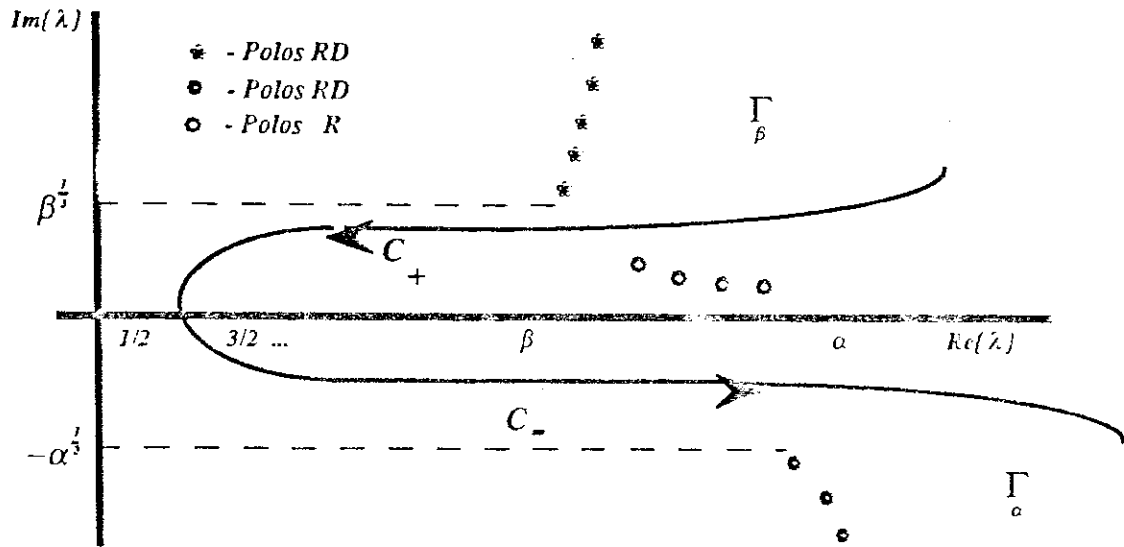


fig.(4.3.1): Deformação do caminho  $C$  para inclusão dos polos  $R$ .

As contribuições vindas dos caminhos  $\Gamma_\beta$  e  $\Gamma_\alpha$  para a integral na eq.(4.3.5) são exponencialmente desprezíveis. Para vermos isto procedemos da seguinte forma:

Para a integral de caminho, temos

$$I^{(j)}[\Gamma] \equiv \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d\lambda \frac{e^{i\pi\lambda}}{\cos \pi\lambda} \lambda a_{(j)} \quad (4.3.23)$$

onde  $\Gamma$  pode ser os caminhos  $\Gamma_\alpha$  ou  $\Gamma_\beta$  e

$$a_{(j=1)} = a_M \quad (4.3.24)$$

$$a_{(j=2)} = a_E \quad (4.3.25)$$

Então,

$$|I^{(j)}[\Gamma]| = O(\text{Exp}[-2R \ln(2R)]) \quad (4.3.26)$$

com  $R \gg 1$ .

Na obtenção da eq.(4.3.26) usamos o fato dos coeficientes de Mie serem assintoticamente [14]

$$\text{de ordem } O\left(\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{e\beta}{2\lambda}\right]^{2\lambda}\right).$$

Possíveis contribuições podem-se originar dos caminhos  $C_\pm$ ; entretanto, como estas estão associadas a efeitos de multi-reflexões no interior da esfera, podem ser computadas como termos do background. Sendo assim  $S_\pm^{(R)}$  passa a ser puramente a série de resíduos em (4.3.5). Passemos a analisá-la agora.

Reescrevendo (4.3.5) restrita aos polos  $R$ , temos que

$$S_\pm^{(R)}(\beta)|_R = \mp i \sum_{\lambda^*=\lambda^{(j)}} \frac{e^{i\pi\lambda^*}}{\cos \pi\lambda^*} \lambda^* \mu_\pm(\lambda^*) \text{Res}\left[a_M^{(R)}(\lambda^* - \frac{1}{2}, \beta) \pm e_E^{(R)}(\lambda^* - \frac{1}{2}, \beta)\right] \quad (4.3.27)$$

Então passemos agora a analisar as contribuições dos polos  $R$ .

Os polos  $R$  são as ressonâncias no plano- $\lambda$ , isto é, são as soluções de (4.3.7)  $\lambda = \lambda_n^{(j)}(\beta)$  para um dado  $\beta$  fixo.

Vamos calcular agora separadamente a contribuição de cada termo em (4.3.27). Afim de economizar notação iremos suprimir momentaneamente os índices  $j$  e  $n$  e passaremos a escrever um dado polo  $R$  como  $\lambda = \xi + i\eta$ . Para uma ressonância estreita,  $0 < \eta \ll \xi$ ; assim, para esses polos, temos que:

$$\frac{e^{i\pi\lambda}}{\cos \pi\lambda} = -2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{2im\pi\xi} e^{-2m\pi\eta} \quad (4.3.28)$$

A equação acima nos permite ver explicitamente que o número médio de voltas  $\bar{m}$ , que a luz executa no interior da esfera antes de escapar para o vácuo é inversamente proporcional à largura da ressonância pois,  $\bar{m} \approx \frac{1}{2\pi\eta}$ .

Uma ressonância estreita nas seções de choque como função de  $\beta$  aparece quando uma trajetória de Regge passa próximo de um valor físico de  $\lambda$ ,  $\xi = (\ell + \frac{1}{2}) + \Delta\xi$  com  $|\Delta\xi| \ll 1$ , de modo que,

$$\frac{e^{i\pi\lambda}}{\cos \pi\lambda} \approx -\frac{(\eta + i\Delta\xi)}{\pi(\eta^2 + (\Delta\xi)^2)} \quad (4.3.29)$$

Por outro lado, olhando para (4.2.19) vemos que

$$\text{Res}\left(a_j^{(R)}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right)_{\lambda=\lambda_j^{(j)}} = \text{Res}\left(a_j\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right)_{\lambda=\lambda_j^{(j)}} \quad (4.3.30)$$

A conveniência da identidade acima reside em nos permitir em trabalhar com  $a_j$  ao invés de  $a_j^{(R)}$ , que possui uma expressão muito mais complicada. Sendo assim (4.2.13) nos fornece que,



$$\begin{aligned}
\text{Res}\left(a_j\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j^{(l)}} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta) (2\beta) - N \in_j \{\alpha\}}{\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta) (1\beta) - N \in_j \{\alpha\}} \right]_{\lambda=\lambda_j^{(l)}} \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta) (2\beta) - (1\beta)}{\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta) (1\beta) - N \in_j \{\alpha\}} \right]_{\lambda=\lambda_j^{(l)}} \tag{4.3.31}
\end{aligned}$$

onde utilizamos (4.3.7) e definimos

$$(f) \equiv \frac{\partial(f)}{\partial\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_j^{(l)}} \tag{4.3.32}$$

Usando

$$(2x) - (1x) = -\frac{2i}{\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(x)} \tag{4.3.33}$$

Obtemos

$$\text{Res}\left(a_j\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j^{(l)}} = \frac{i}{\left(\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta)\right)^2} \frac{1}{\left[(1\beta) - N \in_j \{\alpha\}\right]} \tag{4.3.34}$$

O termo  $\left(\zeta_{\lambda-\frac{1}{2}}^{(1)}(\beta)\right)^{-2}$  na equação acima, mostra que a transmissividade da luz através da barreira de potencial efetivo contribui substancialmente para o valor do resíduo em (4.3.34).

Devido ao fato das ressonâncias serem estreitas, as soluções de (4.3.7) têm em seus complexos conjugados boas estimativas para os zeros de  $(2\beta) - N \in_j \{\alpha\}$ . Isto nos permite, na vizinhança de uma dada ressonância, reescrever (4.3.31) como:

$$\begin{aligned}
\text{Res}(a_j)|_{\lambda=\lambda_n^{(j)}} &= \lim_{z \rightarrow \xi + i\eta} \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{z - (\xi - i\eta)}{z - (\xi + i\eta)} \right] \right\} (z - (\xi + i\eta)) \\
&= i\eta
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

Assim, juntamente com (4.3.29) estimamos, na vizinhança de uma dada ressonância,  $S_{\pm}^{(R)}$  por

$$S_{\pm}^{(R)}(\lambda_n^{(j)}) = \xi \mu_{\pm}(\lambda_n^{(j)}) \left[ \frac{\eta^2}{\eta^2 + (\Delta\xi)^2} \right] \left( I + i \left[ \frac{\eta}{\xi} + \frac{\Delta\xi}{\eta} \right] \right) (-I)^{j+1} \tag{4.3.36}$$

Esta última equação nos mostra que os picos em  $|S_{\pm}^{(R)}|$  estão centrados nos valores de  $\beta$  para os quais  $|\Delta\xi|$  atinge seu menor valor possível ( $= O(\eta^2)$ , na ressonância), enquanto que a largura destes picos é proporcional a  $\eta$ .

Fizemos até aqui um esforço teórico com intuito de entender o comportamento e implicações dos polos de  $S_{\pm}^{(R)}$ , em particular para os polos  $R$ , as ressonâncias no plano- $\lambda$ . Devido a muitas dessas ressonâncias serem bastante estreitas, faz-se necessário um cálculo computacional bastante preciso, pois o erro na localização de uma dada ressonância deve ser inferior pelo menos a sua largura. Isto não ocorre se utilizarmos métodos baseados em expansões assintóticas usuais das funções cilíndricas como por exemplo, expansões WKB (Debye) ou de Schöbe [14], pois nestes casos, as ressonâncias mais estreitas se localizam na vizinhança do raio de convergência destas expansões, inviabilizando por completo qualquer tipo de cálculo mais refinado. Desta forma, tivemos que desenvolver um algoritmo baseado em expansões assintóticas uniformes (EAU) (veja Apêndice-B) que nos permite calcular com excelente precisão não só as ressonâncias (veja Tab. (4.3.1)) como também as suas contribuições para as flutuações na seção de choque.

MODO	EXATO		EAU		ERRO %	
	$\beta$	$b$	$\beta$	$b$	$\beta$	$b$
$M_{64}^1$	57.47716299	6.11E-3	57.47717983	6.13E-3	2.9E-5	0.3
$M_{70}^0$	57.70892489	1.17E-5	57.70892471	1.17E-5	3.1E-7	<1E-2
$E_{64}^1$	57.83391640	9.40E-3	57.83392865	9.44E-3	2.1E-5	0.4
$E_{70}^0$	58.15618603	1.68E-5	58.15618591	1.68E-5	2.1E-7	<1E-2
$M_{65}^1$	58.28084414	5.26E-3	58.28085673	5.28E-3	2.1E-5	0.4
$M_{71}^0$	58.48830936	9.49E-6	58.48830919	9.51E-6	2.9E-7	0.2
$E_{65}^1$	58.64069194	8.08E-3	58.64070099	8.11E-3	1.5E-5	0.3
$E_{71}^0$	58.93622740	1.36E-5	58.93622728	1.36E-5	2.0E-7	<1E-2

Tab.(4.3.1) • Comparação entre os cálculos de ressonâncias usando-se em um caso as expressões exatas para as funções de Bessel e no outro as expansões assintóticas uniformes para estas mesmas funções. Cabe salientar que a notação de potenciação empregada E-y é equivalente a  $10^{-y}$ , e que o erro é o erro percentual: (assim, 2.1 E-5% corresponde a um erro relativo de  $2.1 \times 10^{-7}$ )

Para finalizarmos este capítulo nos falta adicionar as contribuições do background para  $S_{\pm}$ . Como exemplo de aplicação da teoria aqui desenvolvida, vamos utilizá-la na direção *dianteira* para o cálculo do *fator de eficiência de extinção*  $Q_{ext}$ , enquanto que para a direção *traseira* vamos desenvolver uma teoria para o *ganho*  $G$ .

O fator de eficiência de extinção,  $Q_{ext}$ , é definido como a razão entre a seção de choque total e a seção geométrica do centro espalhador, que no caso esférico é  $\pi a^2$ . Utilizando o teorema ótico [5] para relacionarmos a seção de choque total com a amplitude de espalhamento obtemos que,

$$Q_{ext} = \frac{4}{\beta^2} \text{Re}\{S_+\}$$

$$\equiv Q_{ext}^{(B)} + Q_{ext}^{(R)} \tag{4.3.37}$$

onde, novamente separamos as contribuições devidas às flutuações rápidas e ao background.

O termo  $Q_{ext}^{(R)}$ , associado as flutuações rápidas (ressonâncias), é construído utilizando-se (4.3.31). Na vizinhança de uma ressonância suas contribuições são de ordem  $\left[4 \frac{(\ell + \frac{1}{2})}{\beta^2}\right]$ , assim para  $\beta$  próximo de uma centena, isto equivale a menos de 10% do valor total de (4.3.37) [13]. Além disso, o seu comportamento depende fortemente da largura da ressonância. Para ressonâncias mais estreitas  $Q_{ext}^{(R)}$  toma a forma de uma *curva tipo Breit-Wigner* (\*) (veja fig.(4.3.3)).

Entretanto, no caso de ressonâncias mais largas ( $b = 0.1$ ), o perfil da curva para  $Q_{ext}^{(R)}$  começa a se distorcer do comportamento Breit-Wigner, podendo inclusive vir a dar para (4.3.37) contribuições negativas (veja fig.(4.3.4)). Isto se deve ao fato de em (4.3.31) a parte real do termo  $(e^{i\pi\lambda} / \cos \pi\lambda)$  ser negativa quando da passagem da trajetória de Regge por uma "antirressonância",  $\lambda(\beta) = \tilde{\ell}(\beta) + i\eta(\beta)$  sendo  $\tilde{\ell}$  um inteiro (a meio caminho entre duas ressonâncias consecutivas).

Por sua vez, o background é também obtido por meio da teoria do momento angular complexo [44] que nos permite estimá-lo assintoticamente,

(\*) - Uma curva Breit-Wigner tem a forma,

$$BW(z) = \frac{\gamma^2}{(z - z_0)^2 + \gamma^2}$$

onde  $\gamma$  é sua largura e  $z_0$  é seu ponto de máximo.

$$\begin{aligned}
Q_{int}^{(B)}(\beta) = & \left[ 2 + \frac{1.9923860}{\beta^{\frac{1}{2}}} - \frac{0.7153539}{\beta^{\frac{3}{2}}} - 0.5751523 \frac{(N^2 + 1)(2N^4 - 6N^2 + 3)}{(N^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\beta^{\frac{5}{2}}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta^2} \left( \frac{N^6 - N^2 - 1}{(N^2 - 1)} - 3.2959508 \right) \right] \\
& - \left[ \frac{8N^2}{\beta(N-1)(N+1)^2} \left( \text{sen}(2\beta(N-1)) + \frac{\cos(2\beta(N-1))}{2\beta} \left( \frac{1}{N-1} - \frac{N-1}{N} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(N-1)}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}(2\beta((2j+1)N-1)) \frac{\left( \frac{N-1}{N+1} \right)^{2j}}{\left( j - \frac{N-1}{2} \right)} \right) \right] + \Omega \quad (4.3.38)
\end{aligned}$$

Na equação anterior, o primeiro termo entre colchetes sintetiza a principal contribuição para o background. Tal termo corresponde à reflexão direta na superfície esférica, que, como havíamos comentado antes, é representada pelo primeiro termo da expansão de Debye. As parcelas mais importantes deste termo provêm de efeitos de reflexão geométrica, de difração dianteira e tunelamento. A forma final desta expressão é obtida, admitindo-se  $\beta \gg 1$ , através das aproximações de Fock [44].

O segundo termo entre colchetes em (4.3.38), por sua vez, representa a contribuição para o background das parcelas subsequentes da expansão de Debye, associadas a raios axiais diretamente transmitidos ou multirefletidos no interior da esfera antes da transmissão.

Finalmente a última parcela em (4.3.52),  $\Omega$ , é devida às contribuições de auréola dianteira [43] associadas ao termo  $p=4$  na expansão de Debye, isto é, a contribuição dos raios não-axiais que após sofrerem 3 reflexões internas emergem na direção dianteira. Para o índice de refração  $N = 1.33$ , há contribuições tanto de raios reais quanto raios complexos. As primeiras [43] se originam de raios cujo ângulo de incidência  $\theta_i$  é de aproximadamente  $49,5^\circ$  (veja fig.(4.3.5;a)). Por outro lado, estão associadas aos raios complexos *ondas de superfície*,

que são excitadas quando, para as reflexões internas, a condição de ângulo crítico  $\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$  é satisfeita [43]. Neste caso, o raio para emergir na direção dianteira necessita percorrer, ao longo da superfície esférica (veja fig.(4.3.5;b)), um arco  $\zeta = 8\theta_c - 2\pi$  [43].

Esta teoria para o fator de extinção  $Q_{ext}$  fornece excelentes resultados (veja fig.(4.3.6)) pois, o erro relativo percentual (veja fig.(4.3.7)) é inferior a 0.2%.

\*\*\*

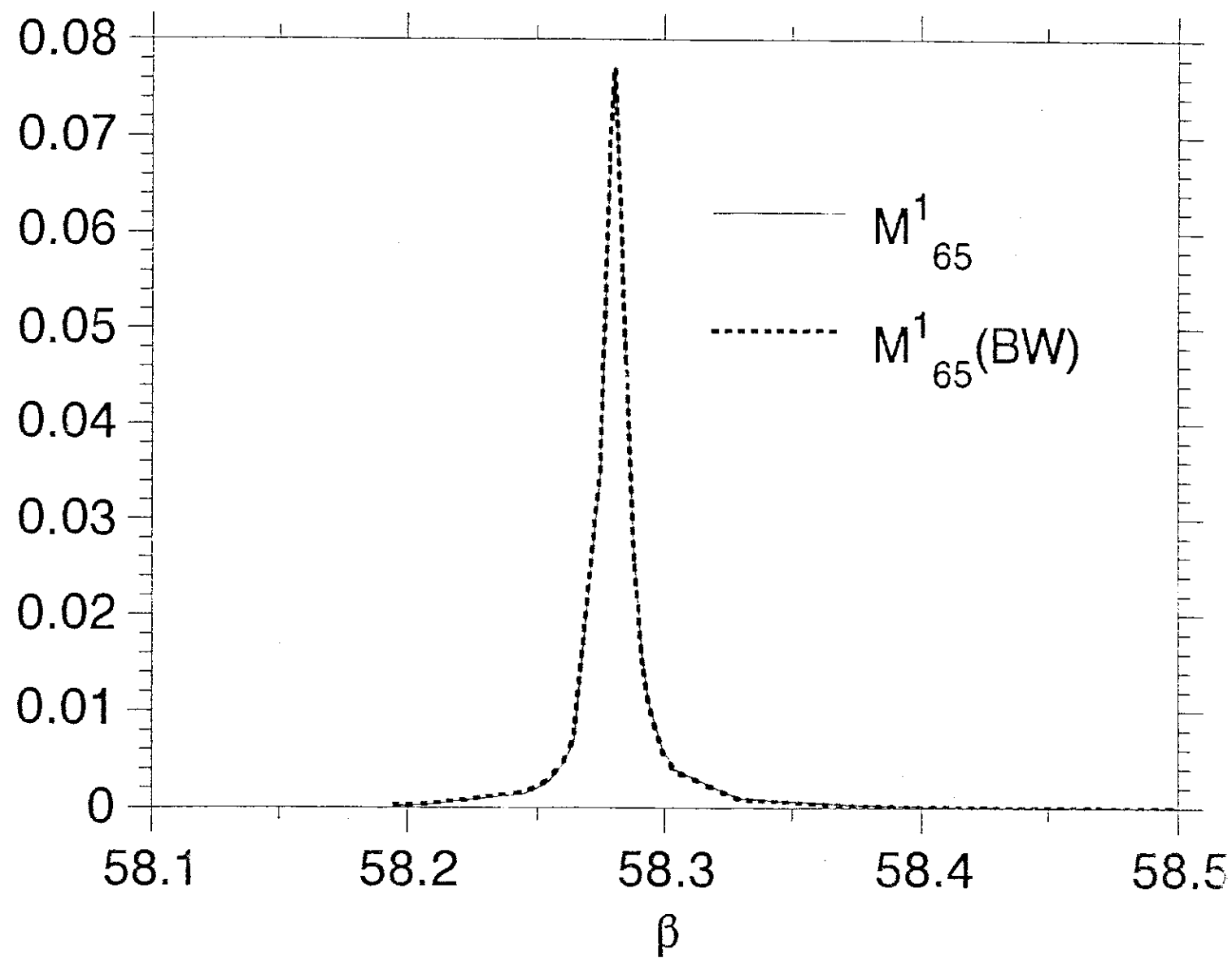


Fig.(4.3.3): Comparação, na vizinhança da ressonância  $M_{65}^1$ , entre a onda parcial magnética com  $\ell = 65$  e uma curva Breit-Wigner (BW) com largura e centro definidos pela ressonância  $M_{65}^1$ .

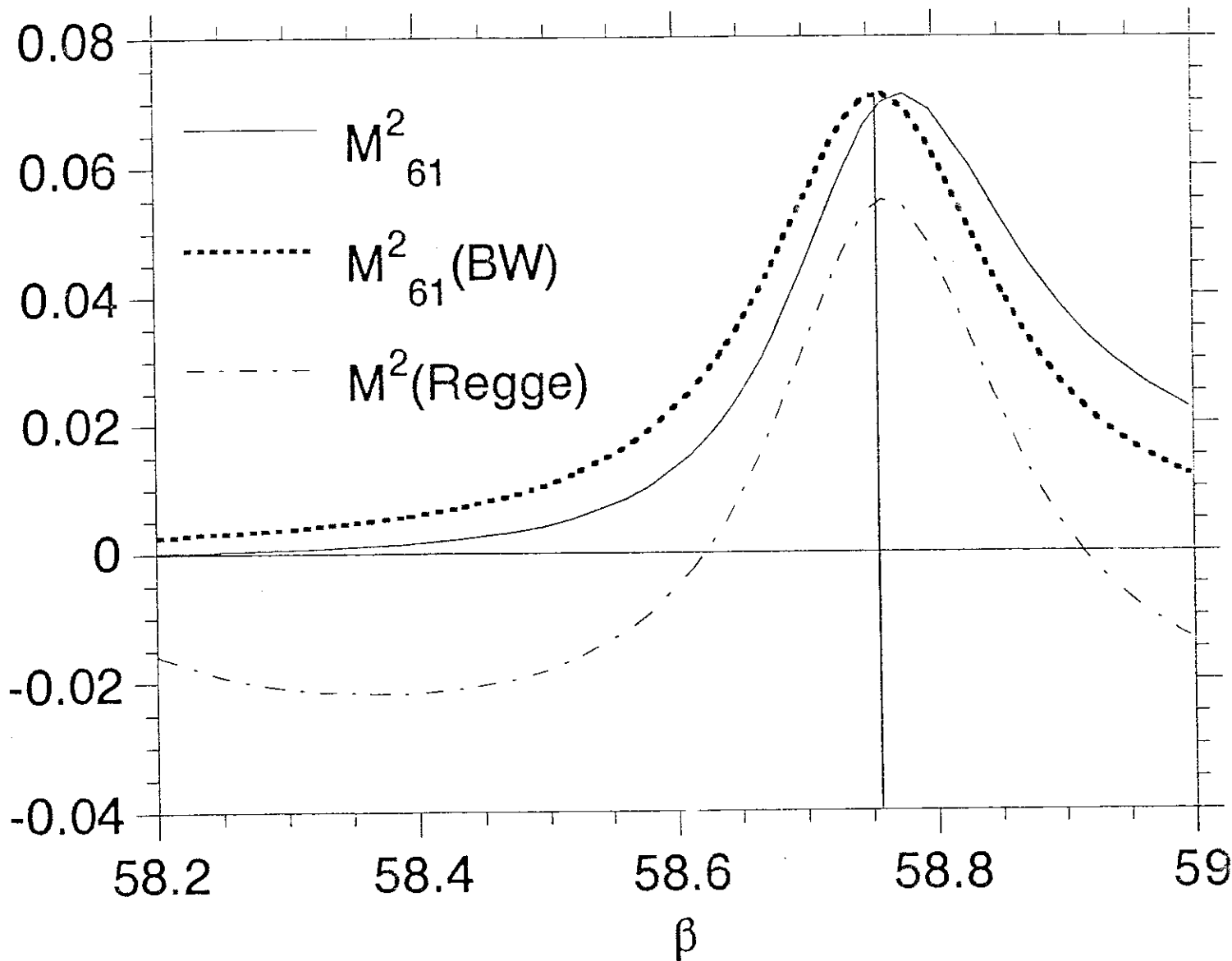


Fig.(4.3.4): Comparação, na vizinhança da ressonância  $M^2_{61}$ , entre as curvas, de onda parcial  $M^2_{61}$ , e de uma curva Breit-Wigner (BW) com largura e centro definidos pela ressonância  $M^2_{61}$ , e a contribuição, eq.(4.3.31), das trajetórias de Regge com  $n = 2$ . Observar o deslocamento do pico da curva  $M^2_{61}$ , em relação ao da  $M^2_{61}(BW)$ , e as contribuições de sinal negativo para  $M^2(\text{Regge})$ .



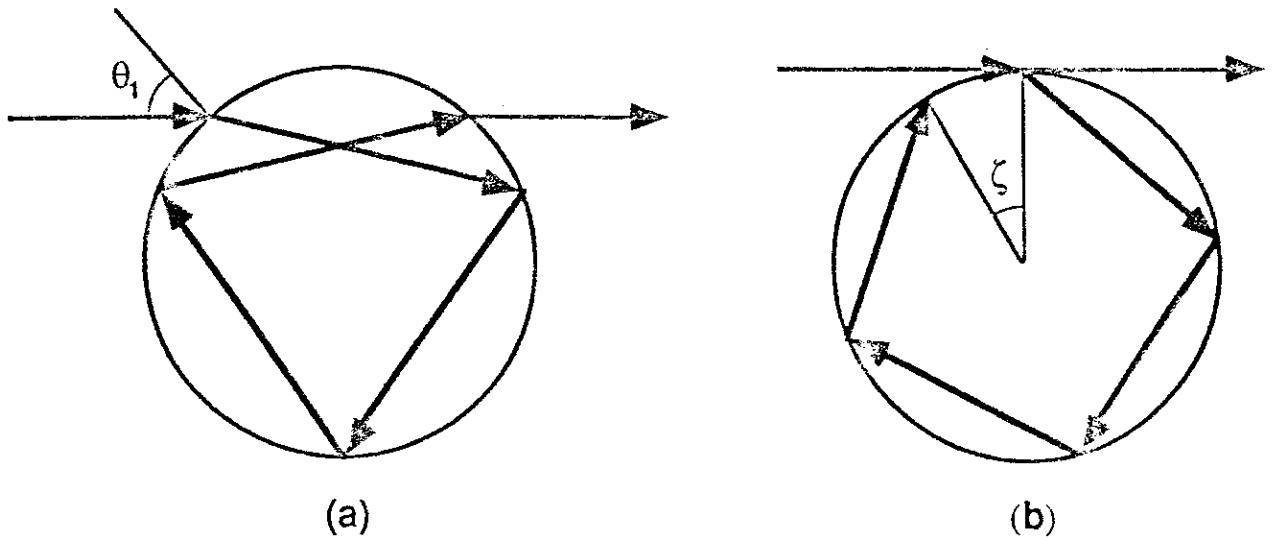


Fig.(4.3.5): Contribuições de auréola dianteira para o background de  $Q_{ext}$ , isto é, contribuição de raios não-axiais que após sofrerem 3 reflexões internas emergem na direção dianteira. Para o índice de refração  $N = 1.33$ , há contribuições, tanto de raios reais (fig. (a)), cujo ângulo de incidência  $\theta_1$  é de aproximadamente de  $49.5^\circ$ , quanto de raios complexos (fig. (b)), ondas de superfície, que percorrem, ao longo da superfície esférica, um arco  $\zeta$  de aproximadamente  $30^\circ$ .

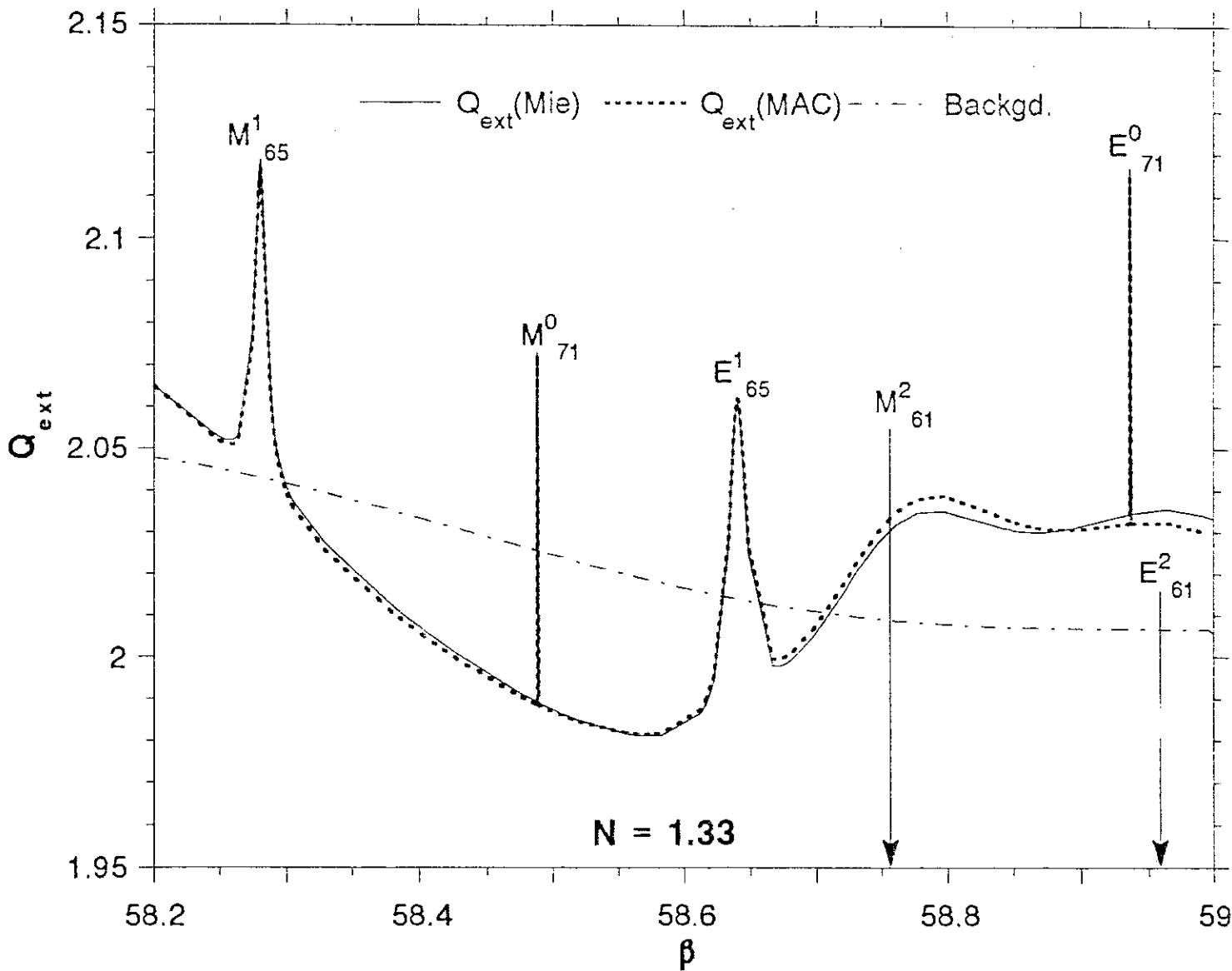


Fig.(4.3.6): Comparação da teoria do momento angular complexo para o fator de eficiência  $Q_{ext}$  (MAC) com a teoria de Mie. Plotamos também as contribuições do background (eq.(4.3.38)). Observe que as contribuições devidas às ressonâncias oscilam em torno do background.

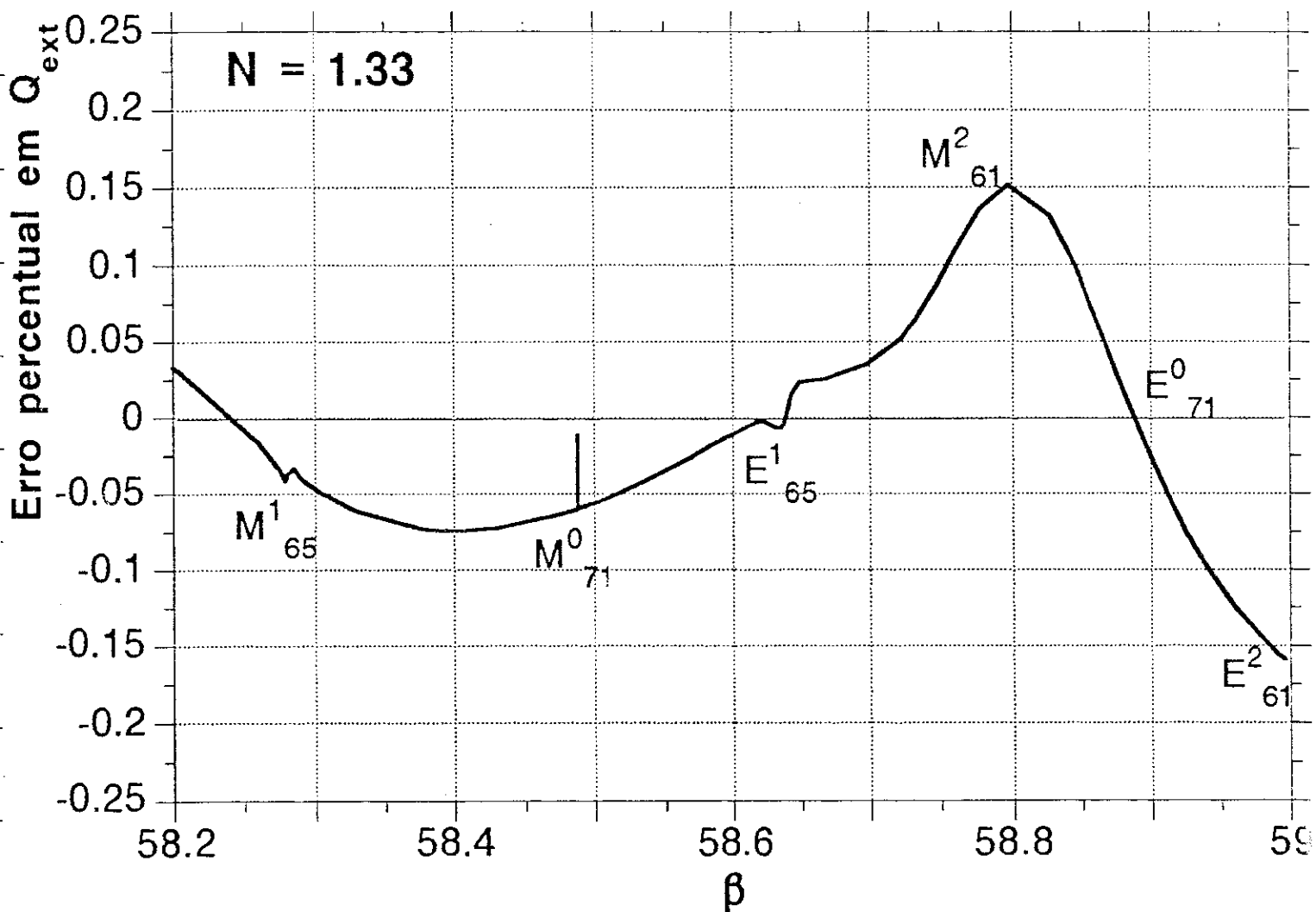


Fig.(4.3.7): Vemos do gráfico acima que em média o erro relativo percentual em  $Q_{ext}$  é inferior a 0.2%. Possíveis melhorias para esta teoria podem ser obtidas através de um aprimoramento do cálculo do background por meio de exp. ass. unif. [44], e também com correções de ordem superior no cálculo das trajetórias de Regge e de seus resíduos.

O intervalo ( $\Delta\beta = \frac{\text{tg}^{-1}(M)}{M} = 0.8$ , para  $N=1.33$ ) em que plotamos a fig.(4.3.6) é tal que, as contribuições de todas as trajetórias de Regge ( $n = 0, 1, 2$ ) se fazem importantes e têm que ser incluídas. Tal intervalo, é chamado de quaseperíodo pois, a estrutura de picos associada às ressonâncias se repete aproximadamente em intervalos desta ordem. Da fig.(4.3.6) podemos claramente identificar algumas das propriedades citadas no Cap. 3, como por exemplo, que ressonâncias  $E$  são mais largas que as  $M$  (veja as ressonâncias  $E^1_{65}$  e  $M^1_{65}$ ); também podemos observar que, para ressonâncias com os mesmos índices  $\lambda$  e  $n$ , a  $E$  ocorre para valores de  $\beta$  maiores que a  $M$ . Além disso, vê-se que há superposição e forte interferência entre as contribuições das ressonâncias  $M^2_{61}$  e  $E^2_{61}$ . Passemos agora ao estudo do ganho traseiro.

A partir da intensidade da luz na direção traseira define-se o ganho traseiro  $G$  como a razão entre a seção de choque traseira e o seu valor limite para um centro espalhador isotrópico [5, 11, 13]:

$$\begin{aligned}
 G &\equiv \frac{4}{\beta^2} |S_-|^2 \\
 &\equiv \frac{4}{\beta^2} |S_{\text{Backgd.}}^- + S_{\text{Res}}^-|^2
 \end{aligned}
 \tag{4.3.39}$$

Novamente, começamos o desenvolvimento de nossa teoria para o ganho traseiro separando as contribuições de background daquelas relacionadas às ressonâncias.

O background para o ganho (veja fig.(4.3.8)) pode ser estimado através da teoria do momento angular complexo para a auréola na direção traseira [28]. Os termos da expansão de Debye que mais contribuem são o primeiro ( $p=0$ : reflexão direta), o terceiro ( $p=2$ : contribuição de ondas superficiais e raios axiais) e o décimo segundo termo ( $p=11$ : contribuições de sombra de arco-íris de décima ordem).

É interessante salientar que nesta direção as contribuições devidas às flutuações rápidas (ressonâncias) (veja fig.(4.3.8)), novamente estimadas para cada polo por (4.3.31), interferem fortemente com o background (veja fig.(4.3.8)), pois neste caso a razão entre as magnitudes destas flutuações e o background é maximizada. Isto contradiz os comentários da Ref.[20], que alega ser as contribuições devidas às flutuações rápidas (que na vizinhança de uma ressonância são de ordem  $\left[4 \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{\beta^2}\right]$ ), preponderantes em relação àquelas associadas ao background.

As discrepâncias que aparecem nesta teoria, que em média correspondem, a 10% a 20% do valor da teoria de Mie (veja fig.(4.3.9)), originam-se em sua grande maioria de nossas estimativas para o background. Correções para tais diferenças podem ser obtidas adicionando-se ao background mais alguns termos da expansão de Debye escolhidos a partir das contribuições, em ordem decrescente de magnitude, associadas a raios multirefletidos no interior da esfera que emergem na direção traseira, como nos mostra a fig.5 da Ref. [28]. Além disto, melhorias (correções de ordem superior) no cálculo de ressonâncias mais largas e seus resíduos se fazem também importantes.

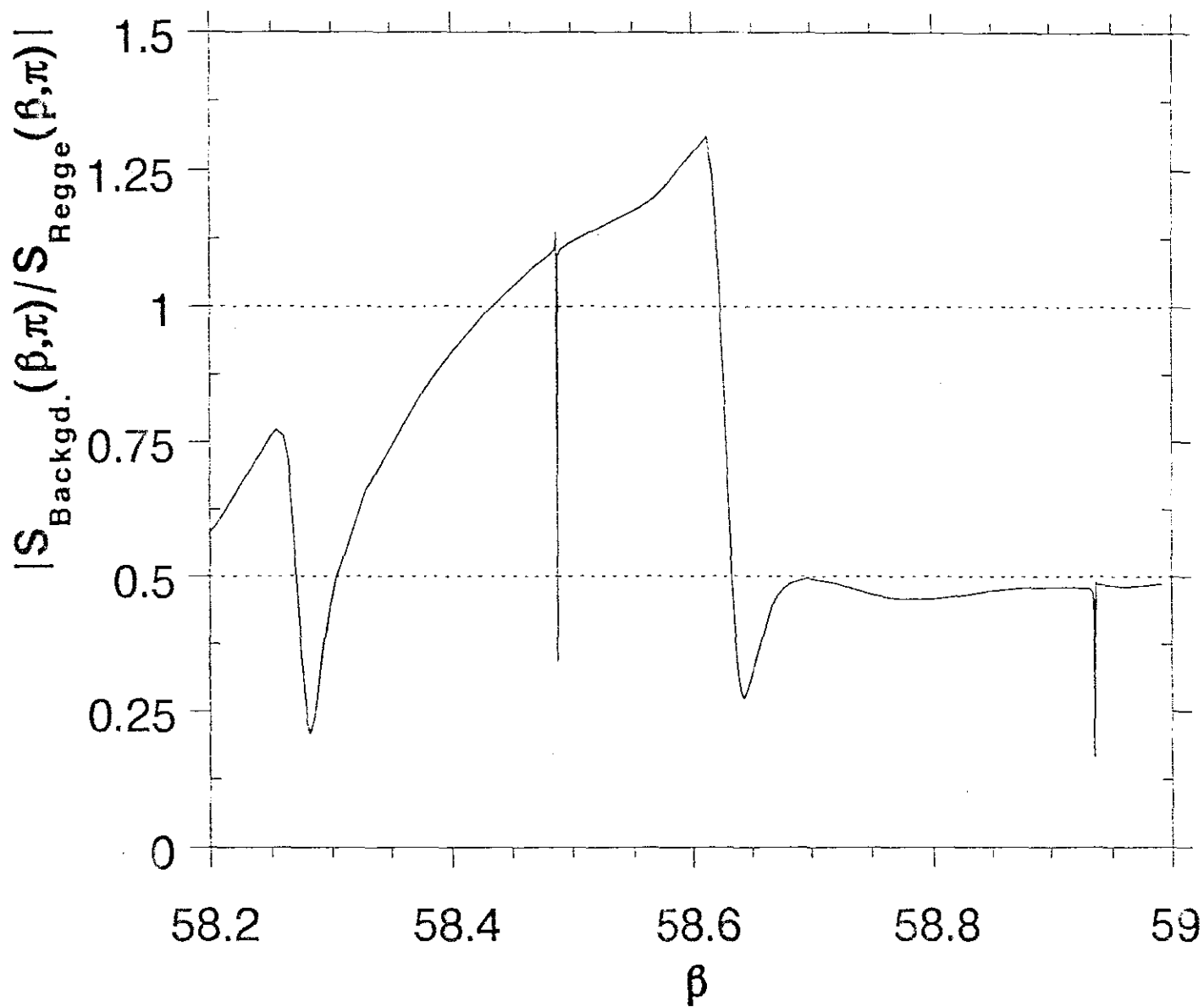


Fig.(4.3.8): Razão entre as contribuições para o ganho traseiro referentes ao background e trajetórias de Regge. Observe que mesmo em torno de ressonâncias o background se faz importante.

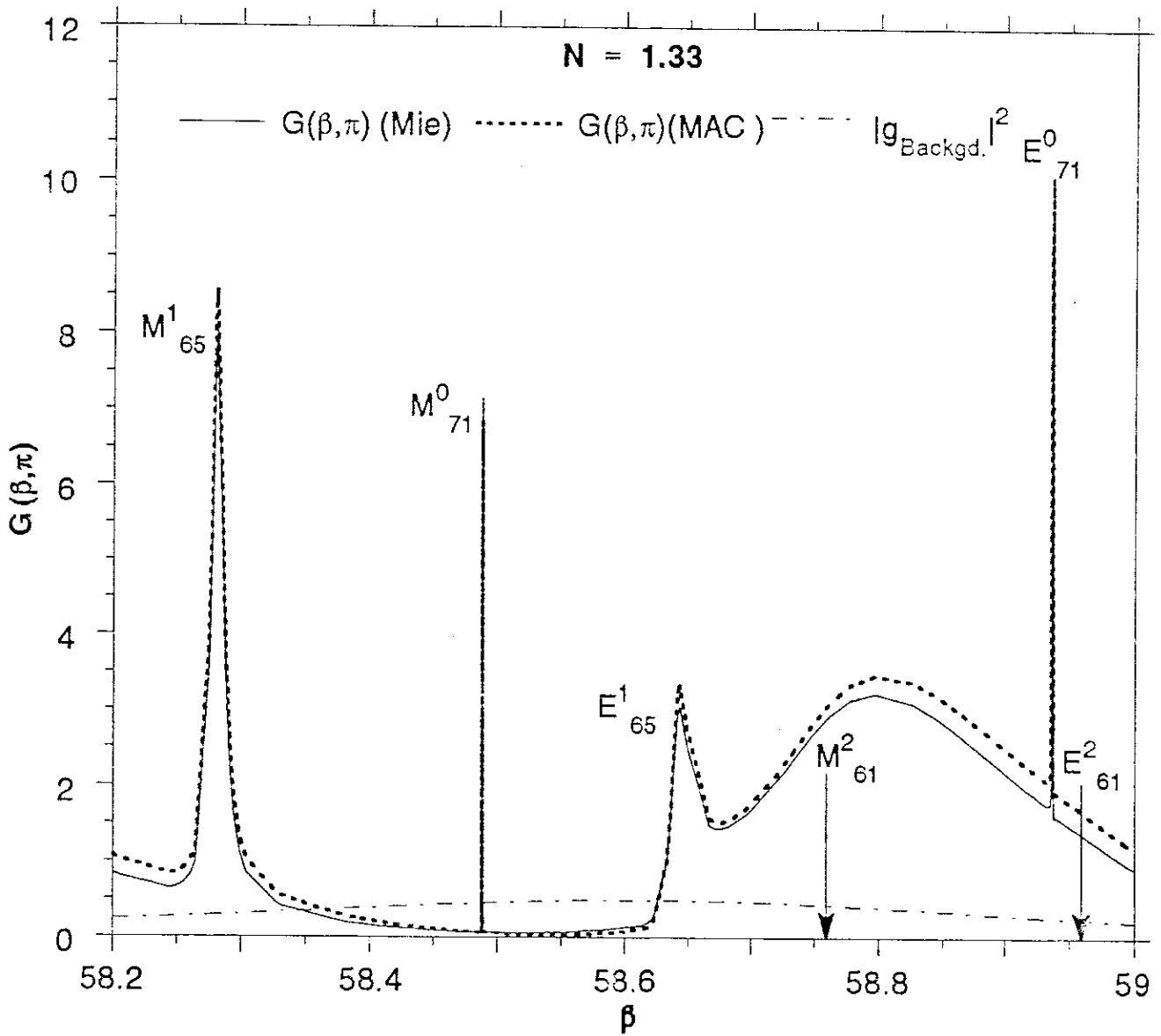


Fig.(4.3.9): Teoria do momento angular complexo (MAC) para o ganho traseiro. O erro médio é de 20% e provém em grande parte de nossa interpolação para o background ( $|g_{\text{Backgd.}}|^2 \equiv \frac{4}{\beta^2} |S_{\text{Backgd.}}^-|^2$ ), que por sua vez pode ser melhorada adicionando-se mais termos da expansão de Debye.

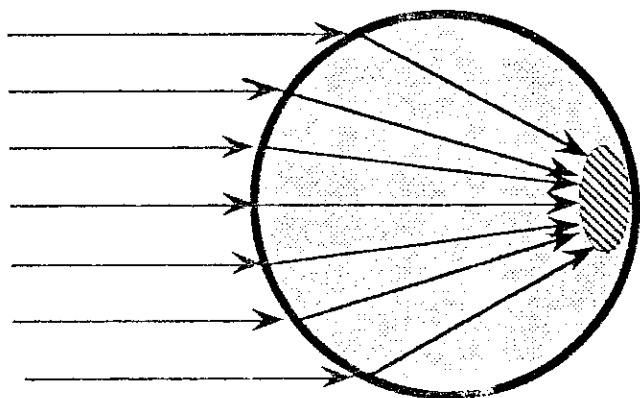
## Capítulo 5

### teoria do momento angular complexo para o campo no interior da esfera

#### 5.1 Propriedades do campo na ressonância

Devido a sua própria geometria e à possibilidade de se excitar modos extremamente estreitos (fatores de qualidade  $Q$  altos), microesferas têm se tornado, ao longo dos últimos anos, excelentes candidatas a cavidades óticas em ótica não-linear [31,32,33,34].

No caso em que  $Re\{N\} > 1$ , a lei de Snell nos mostra que os raios incidentes na superfície esférica tendem, após serem refratados, a se concentrarem na direção dianteira, funcionando então a superfície esférica como uma lente convergente. (veja fig.5.1.1.).



---

fig.(5.1.1): Para  $Re\{N\} > 1$ , trajetórias de raios que produzem efeitos de focalização no interior da esfera na vizinhança da direção dianteira.



Entretanto, esta não é a única situação que pode dar origem a regiões de cáusticas (campos intensos). Outra de caráter completamente distinto surge quando o espalhamento torna-se ressonante [35].

Durante este processo o campo no interior da esfera torna-se bastante amplificado em regiões próximas à sua superfície. Tais regiões distam do centro em média, de 70 a 90% do raio da esfera [36,37]. Esta amplificação toma a forma de picos extremamente altos em contraste com uma distribuição mais uniforme do campo nas regiões restantes.

A intensidade destes picos tem duas características marcantes. A primeira que se observa é que quanto mais estreita for a ressonância maior será a altura do pico. A segunda mostra, por sua vez, que estes picos decrescem em altura à medida que se sai da ressonância, chegando, no caso limite do sistema completamente fora da ressonância, a desaparecerem (veja figs. (5.1.2 e 3)).

Outra característica importante do campo ressonante, é a forte relação entre o número de picos e a ordem  $n$  da ressonância (veja figs.(5.1.4,5 e 6)). Iremos mostrar adiante que o primeiro excederá em uma unidade a segunda.

Para entendermos e manipularmos todas essas propriedades que envolvem o campo ressonante no interior da esfera, será necessário utilizarmos os conhecimentos expostos até aqui, com especial ênfase a teoria do momento angular complexo. Este será o assunto da próxima seção.

## 5.2 Localização dos pontos de intensidade máxima

É intuitivo supor, que devido à ressonância, o multipolo ressonante dê uma contribuição mais substancial em relação aos outros não-ressonantes para o campo interno. Portanto, se isto realmente acontece, os pontos de extremo (máximos ou mínimos) do modo ressonante devem estar bastante próximos dos pontos de intensidade máxima.

Bhandari [38], em um dos trabalhos pioneiros sobre este tema, conjecturou corretamente a este respeito.

$$\langle I \rangle \equiv \frac{S}{\pi a^2}$$

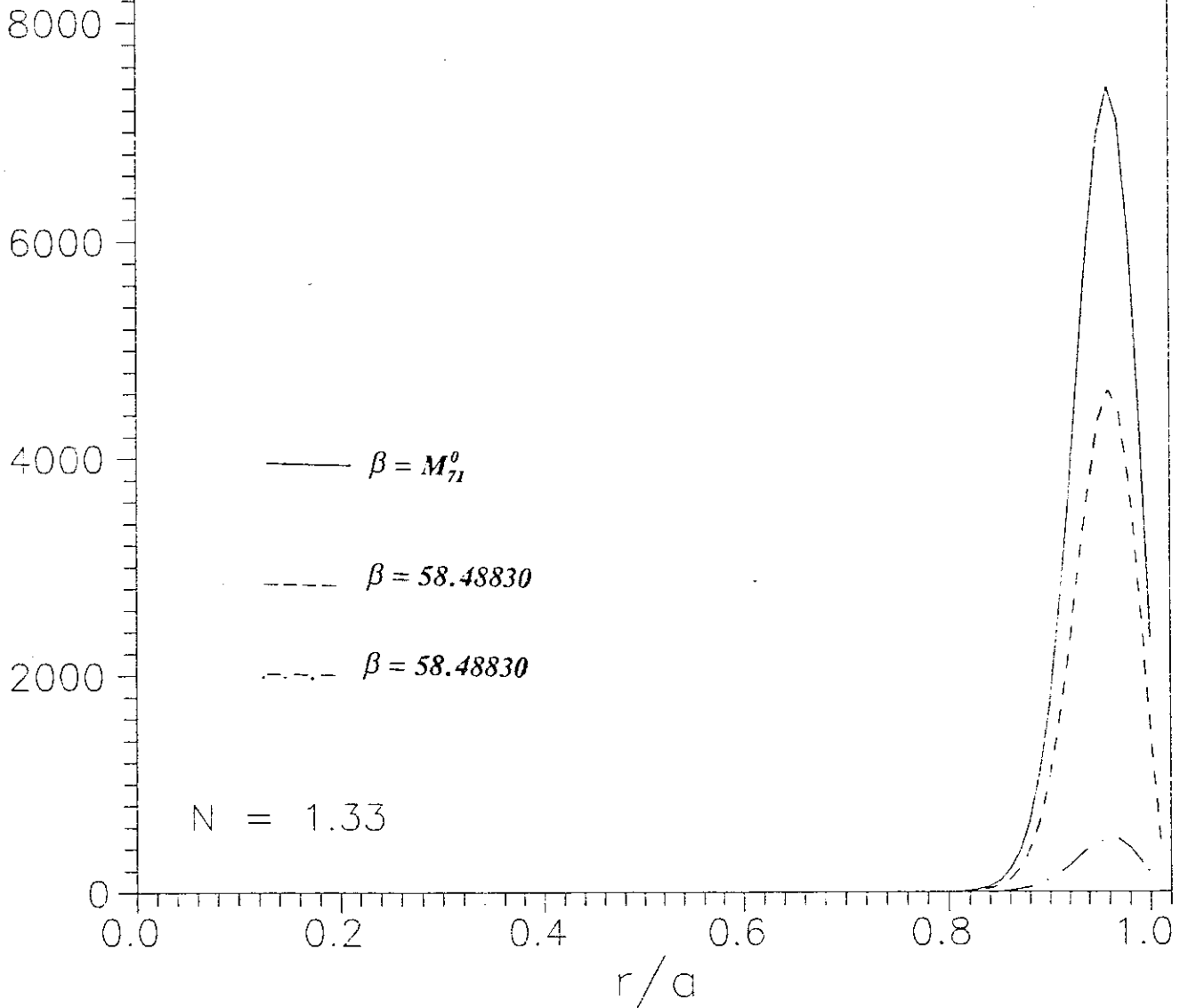


Fig:(5.1.2): Variação da intensidade média do campo,  $\langle I \rangle$ , no interior da esfera<sup>(\*)</sup> à medida que se sai da ressonância  $M_{71}^0$  (veja Cap. 4).

(\*) - para a definição de  $S$ , veja Apêndice A.

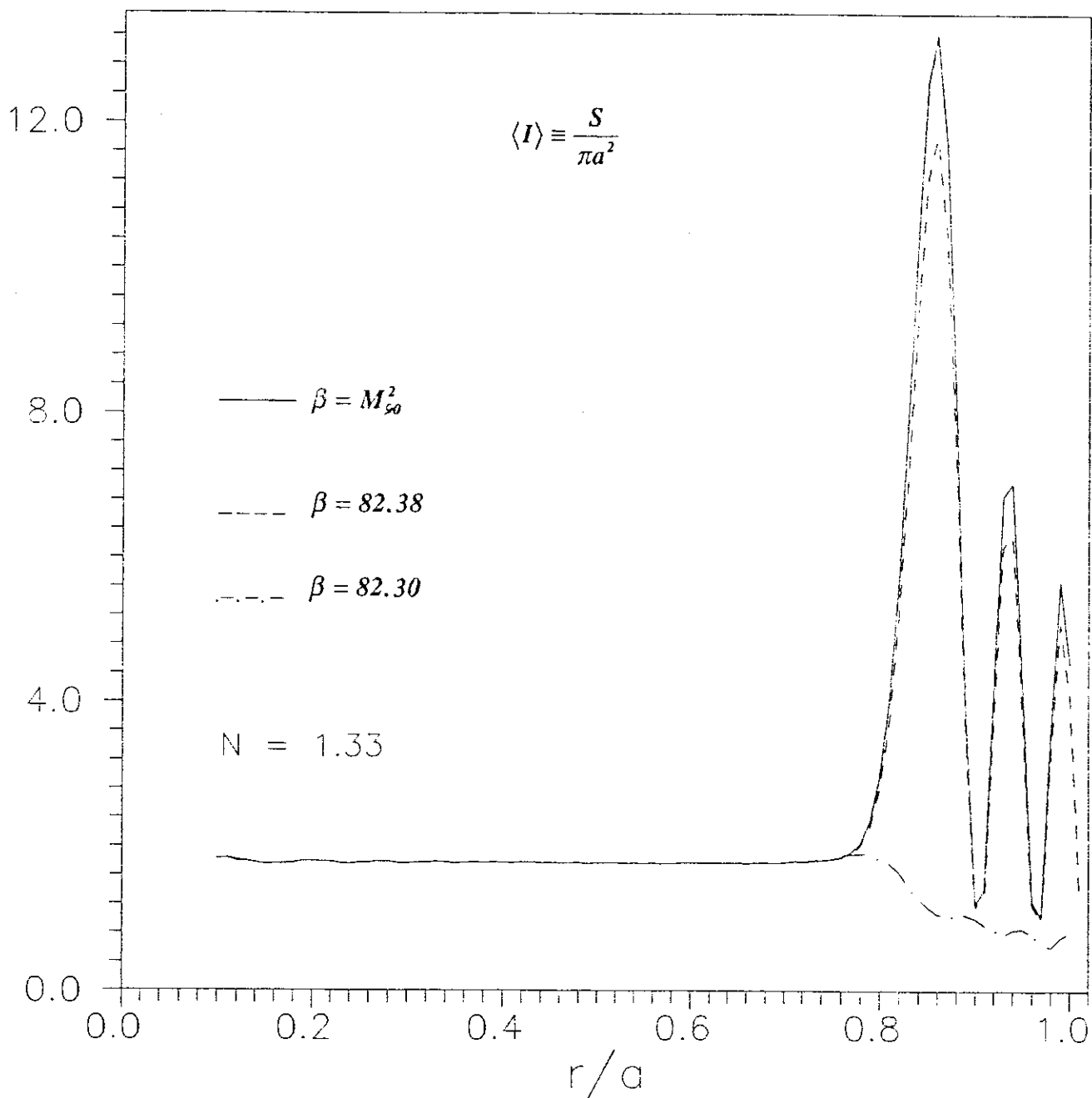


Fig:(5.1.3): Variação da intensidade do campo no interior da esfera à medida que se sai da ressonância  $M_{90}^2$  centrada no valor de  $\beta=82.378360$  e de largura  $4.57E-3$ . Observe que, como esta ressonância é bem mais larga que  $M_{90}^0$ , a intensidade do campo neste caso se torna menor.

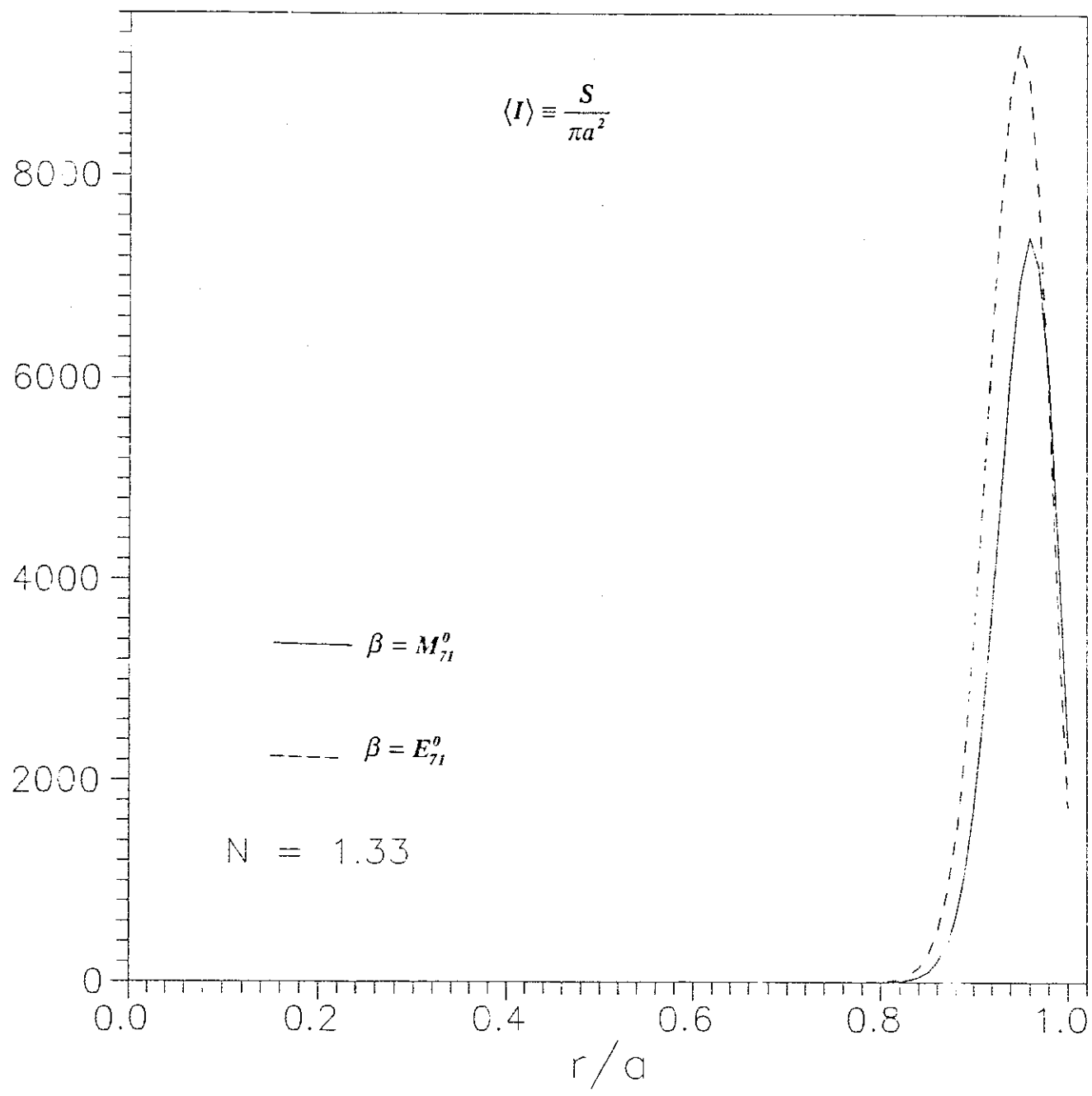


Fig:(5.1.4): campo ressonante no interior da esfera para as ressonâncias  $M_{71}^0$  e  $E_{71}^0$  . Observe que há apenas 1 pico.

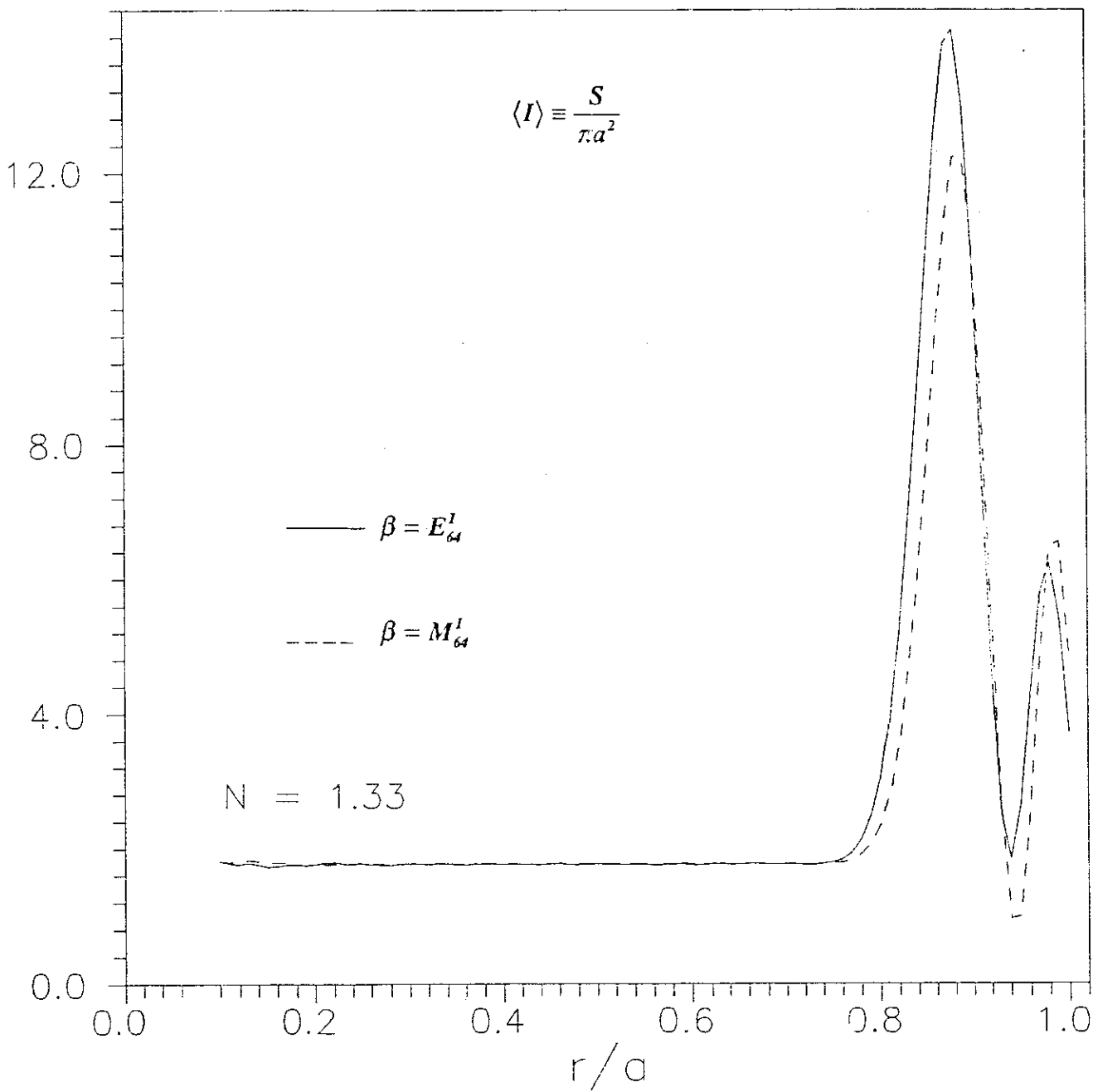


Fig:(4.1.5): campo ressonante no interior da esfera para as ressonâncias  $M'_{64}$  e  $E'_{64}$  . Há 2 picos.

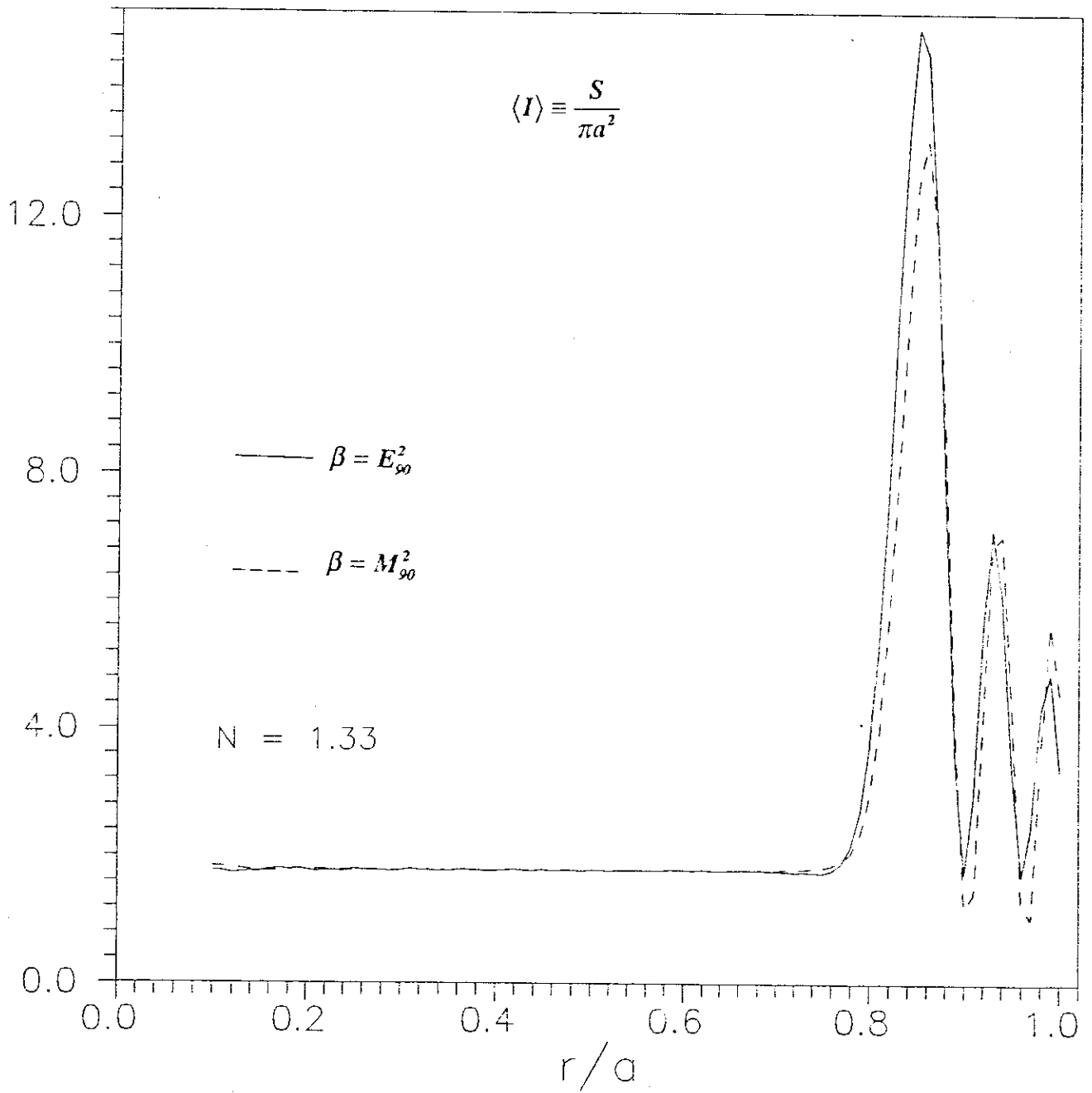


Fig:(5.1.6): campo ressonante no interior da esfera para as ressonâncias  $M_{90}^2$  e  $E_{90}^2$  . Há 3 picos.

Entretanto, não é claro em seu artigo qual o mecanismo que permite distinguir, dentro da série de ondas parciais que descreve o campo, por que as contribuições do modo ressonante são dominantes. Para ver isto, vamos desenvolver para os coeficientes de Mie para o campo interno (eq. (2.2.11)) uma expansão de Debye.

Reescrevendo (2.2.11) como

$$\tilde{a}_j = \frac{i}{\psi_l(\alpha)\zeta_l^{(1)}(\beta)} \left( \frac{N}{\{I\beta\} - N \epsilon_j(\alpha)} \right) \quad (5.2.1)$$

e usando a identidade

$$\{I\beta\} - N \epsilon_j(\alpha) = 2i \left( \frac{\zeta_l^{(2)}(\alpha)}{\psi_l(\alpha)\zeta_l^{(1)}(\beta)\zeta_l^{(2)}(\beta)} \right) \left[ \frac{1 - \rho_l^{(j)}(\beta)}{T_{2l}^{(j)}} \right] \quad (5.2.2)$$

escrevemos a expansão de Debye para (5.2.1) como

$$\tilde{a}_j \equiv \tilde{a}_j^{(1)} + \tilde{a}_j^{(2)} \quad (5.2.3)$$

onde

$$\tilde{a}_j^{(1)} = \left( \frac{N\zeta_l^{(2)}(\beta)}{2\zeta_l^{(2)}(\alpha)} \right) T_{2l}^{(j)} \sum_{p=1}^P (\rho_l^{(j)})^{p-1} \quad (5.2.4)$$

$$\tilde{a}_j^{(2)} = \left( \frac{N\zeta_l^{(2)}(\beta)}{2\zeta_l^{(2)}(\alpha)} \right) T_{2l}^{(j)} \left[ \frac{(\rho_l^{(j)})^P}{1 - \rho_l^{(j)}} \right] \quad (5.2.5)$$

Os termos do somatório em (5.2.4) representam contribuições associadas a  $(p-1)$  reflexões

internas. É destes termos que se origina a descrição tipo ótica geométrica.

Para valores de  $\beta$  que dão contribuição apreciável é geralmente  $|\rho_l^{(j)}| \ll 1$ , de forma que, a segunda parcela em (5.2.3) pode na maioria das vezes ser desprezada. Entretanto, isto não vale na vizinhança de uma ressonância, quando  $|\rho_l^{(j)} - 1|$  se torna muito pequeno, amplificando o termo correspondente da eq.(5.2.5).

Desta forma, reescrevemos o campo no interior (eq. (2.2.7)) como a soma de dois termos distintos,

$$\vec{E}_{int} \equiv \vec{E}_{int}^{(1)} + \vec{E}_{int}^{(2)} \quad (5.2.6)$$

Os efeitos associados a ressonâncias estão contidos no 2º termo. Como estamos interessados no estudo desses efeitos, vamos concentrar nossos esforços na análise deste último termo em (5.2.6).

Na aproximação de Debye, o comportamento assintótico das Funções de Ricatti-Bessel e sua primeira derivada é regido por

$$\psi_{\lambda-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} \begin{cases} (x^2 - \lambda^2)^{-\frac{1}{4}} \cos(\varphi(\lambda, x) - \frac{\pi}{4}), & |\lambda| < |x| \\ (\lambda^2 - x^2)^{-\frac{1}{4}} e^{\psi(\lambda, x)}, & |x| < |\lambda| \end{cases} \quad (5.2.7)$$

$$\psi'_{\lambda-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \begin{cases} (x^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{4}} \text{sen}(\varphi(\lambda, x) - \frac{\pi}{4}), & |\lambda| < |x| \\ (\lambda^2 - x^2)^{\frac{1}{4}} e^{\psi(\lambda, x)}, & |x| < |\lambda| \end{cases} \quad (5.2.8)$$



Usando o caminho  $C$  deformado (veja fig.(4.3.1)) podemos implementar uma transformação de Watson em  $\vec{E}_{int}^{(2)}$  dando origem à seguinte série de resíduos:

$$\vec{E}_{int}^{(2)} = -\pi i E_0 \sum_{\lambda^* = \lambda_n^{(j)}} \frac{e^{i\pi\lambda^*}}{\cos \pi\lambda^*} e^{i\frac{\pi}{2}(\lambda^* - \frac{1}{2})} \sqrt{8\pi\lambda^*} \left\{ \text{Res}[\tilde{a}_M^{(2)}] j_{\lambda^* - \frac{1}{2}}(\alpha f) \vec{X}_{\lambda^* - \frac{1}{2}, \pm} \right. \\ \left. \pm \frac{\text{Res}[\tilde{a}_E^{(2)}]}{kN^2} \nabla \times \left( j_{\lambda^* - \frac{1}{2}}(\alpha f) \vec{X}_{\lambda^* - \frac{1}{2}, \pm} \right) \right\} \quad (5.2.9)$$

onde o duplo sinal  $\pm$  refere-se a campos circularmente polarizados à direita (+) e à esquerda (-) (veja Cap. 2),  $\lambda_n^{(j)}$  são os polos  $R$ , enquanto que  $\vec{X}_{\lambda^* - \frac{1}{2}, \pm}$  é a extensão analítica dos harmônicos esféricos vetoriais para o plano de momento angular complexo  $-\lambda$ , obtida substituindo  $\ell$  por  $(\lambda - 1/2)$  nas funções de Legendre. Definimos também em (5.2.9) a distância relativa ao centro da esfera como sendo  $f \equiv \frac{r}{a}$ .

Para os polos  $R$  segue de (5.2.5) que

$$\text{Res}[\tilde{a}_j^{(2)}] = \text{Res}[\tilde{a}_j] \\ = \frac{iN}{\psi_{\lambda^* - \frac{1}{2}}(\alpha) \zeta_{\lambda^* - \frac{1}{2}}^{(j)}(\beta)} \left[ \frac{1}{\{2\beta\} - N \epsilon_j \{\alpha\}} \right] \quad (5.2.10)$$

Omitindo por simplicidade de notação os índices de ressonância  $j$  e  $n$ , escrevemos um dado polo  $R$  como  $\lambda^* = \xi + i\eta$ . Como na região de ressonância  $\beta < |\lambda^*| < \alpha$ , o valor absoluto da função de Ricatti-Hankel  $\zeta_{\lambda^* - \frac{1}{2}}^{(j)}(\beta)$  é exponencialmente crescente ( $e^{-\nu(\xi, \beta)}$ ) com  $\xi$ . Logo, o resíduo em (5.2.10) é de ordem  $\sqrt{\eta}$  [cf. (4.3.34)], de modo que podemos reescrevê-lo como:

$$\text{Res}[\tilde{a}_j^{(2)}] = ig_j(\xi, \beta) \sqrt{\eta} \quad (5.2.11)$$

onde  $g_j(\xi, \beta)$  é uma função suave. Observe a diferença entre este resultado e a (4.3.35).

O termo em (5.2.9) que mais fortemente depende das ressonâncias vem do produto entre (4.3.54) e (5.2.11), isto é,

$$\frac{e^{i\pi\lambda^*}}{\cos(\pi\lambda^*)} \text{Res}[\tilde{a}_j^{(2)}] \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{8\pi\eta}} \tilde{g}_j(\xi, \beta) \left[ \frac{1 + i\frac{\Delta\xi}{\eta}}{1 + \left(\frac{\Delta\xi}{\eta}\right)^2} \right] \quad (5.2.12)$$

onde novamente  $\tilde{g}_j(\xi, \beta)$  é uma função suave neste domínio.

Portanto, como na vizinhança de uma ressonância  $|\Delta\xi(\beta)|$  é  $O(\eta^2(\beta))$ , reescrevemos (5.2.9) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{int}^{(2)} \approx -E_0 & \left( \left[ \sum_{\lambda_M^*} e^{i\frac{\pi}{2}(\lambda^* - \frac{1}{2})} \tilde{g}_M \sqrt{\frac{\xi_M}{\eta_M}} \frac{\Psi_{\lambda_M^* - \frac{1}{2}}(\alpha f)}{\alpha f} \vec{X}_{\lambda_M^* - \frac{1}{2}, \pm 1} \right] \right. \\ & \left. \pm \frac{1}{kN^2} \left[ \sum_{\lambda_E^*} e^{i\frac{\pi}{2}(\lambda^* - \frac{1}{2})} \tilde{g}_E \sqrt{\frac{\xi_E}{\eta_E}} \nabla \times \left( \frac{\Psi_{\lambda_E^* - \frac{1}{2}}(\alpha f)}{\alpha f} \vec{X}_{\lambda_E^* - \frac{1}{2}, \pm 1} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

A eq. (5.2.13) nos mostra explicitamente aquela propriedade anteriormente citada de que picos de intensidade máxima mais altos estão relacionados às ressonâncias mais estreitas (veja fig (5.1.2 e 3)). Vemos também de (5.2.13), que o modo ressonante mais estreito domina em relação aos restantes. A dependência do campo com a distância relativa  $f$  está basicamente toda contida na função de Ricatti-Bessel ou em sua primeira derivada, dependendo de qual será a polarização da ressonância (veja figs.(5.2.1;2;3)). Assim, os pontos de módulo máximo para o campo são bem próximos dos pontos extremos de uma destas funções para o modo ressonante. Passemos agora a estimar estes pontos.

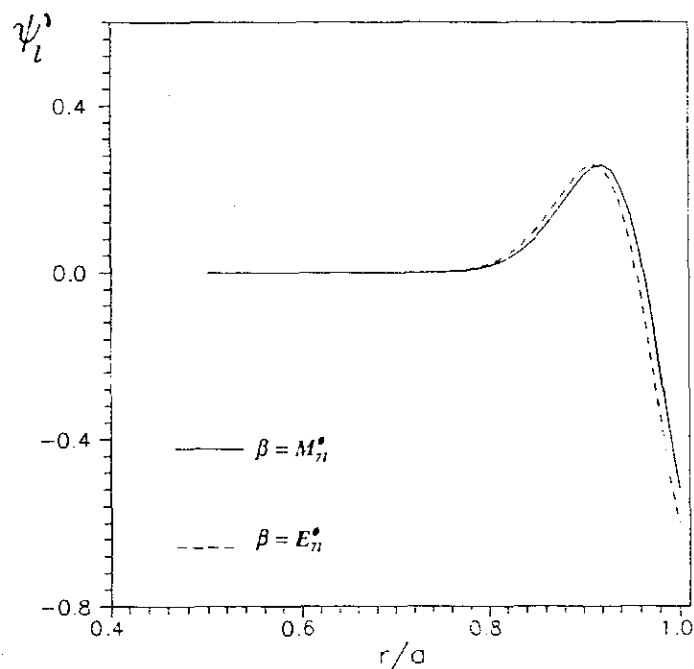
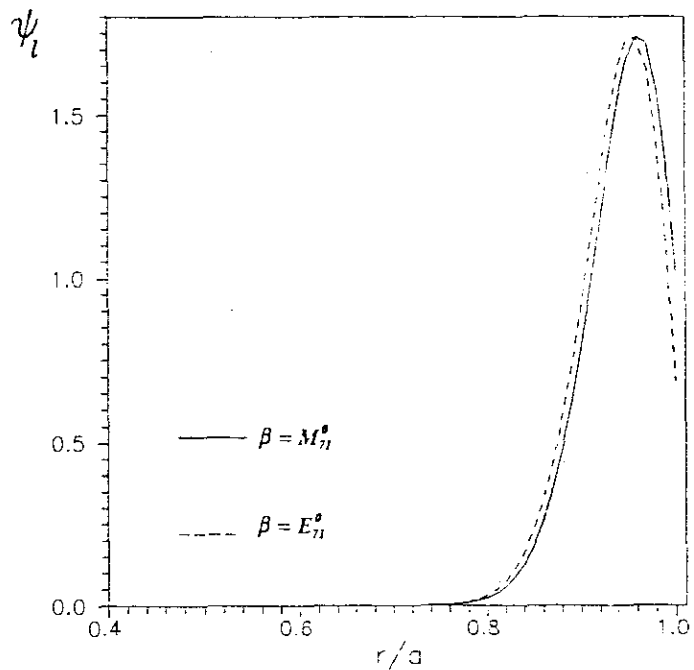


Fig.(5.2.1): Para  $N = 1.33$ , gráficos da função de Riccati-Bessel e sua primeira derivada, para as ressonâncias  $M_{11}^0$  e  $E_{11}^0$ . Compare o nº de picos destes com aqueles vistos na fig.(5.1.4).

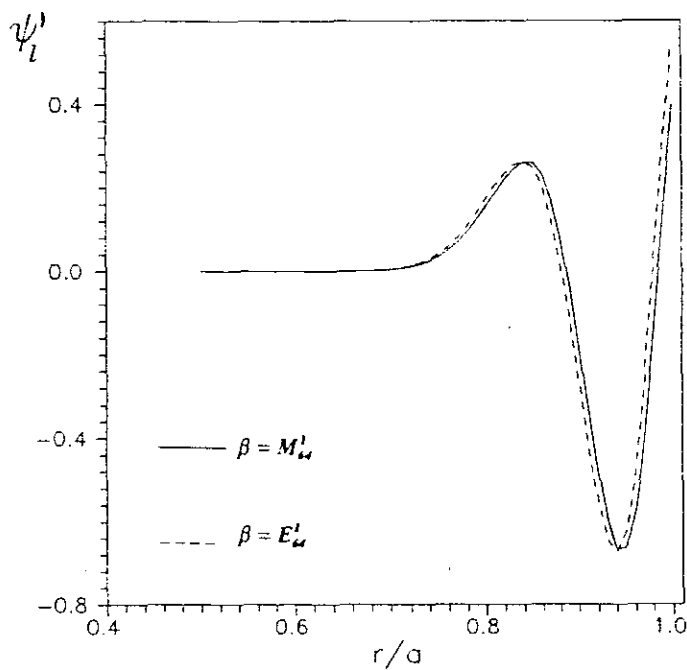
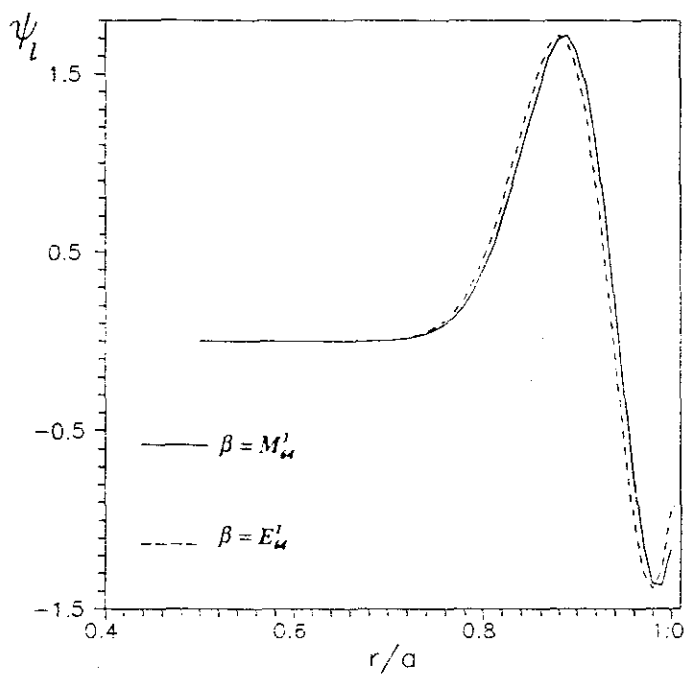


Fig.(5.2.2): Para  $N = 1.33$ , gráficos da função de Ricatti-Bessel e sua primeira derivada, para as ressonâncias  $M'_{\omega}$  e  $E'_{\omega}$ . Compare o  $n^2$  de picos destes com aqueles vistos na fig.(5.1.5).

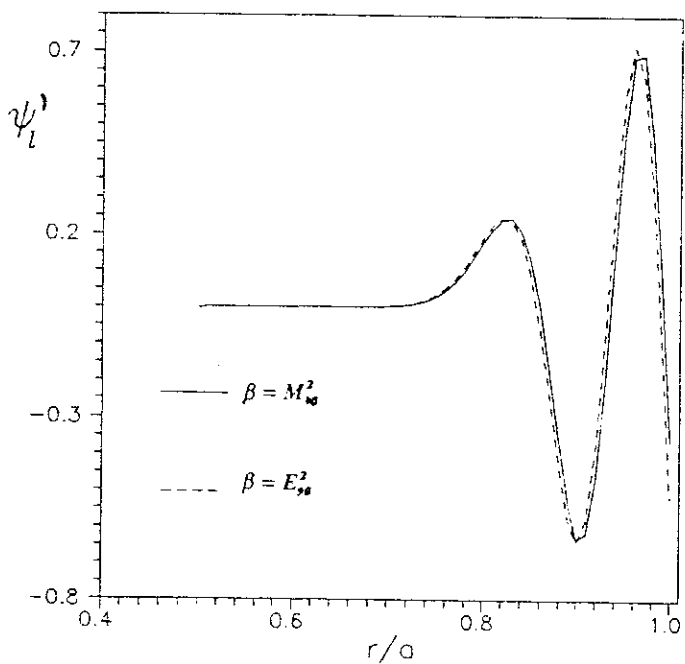
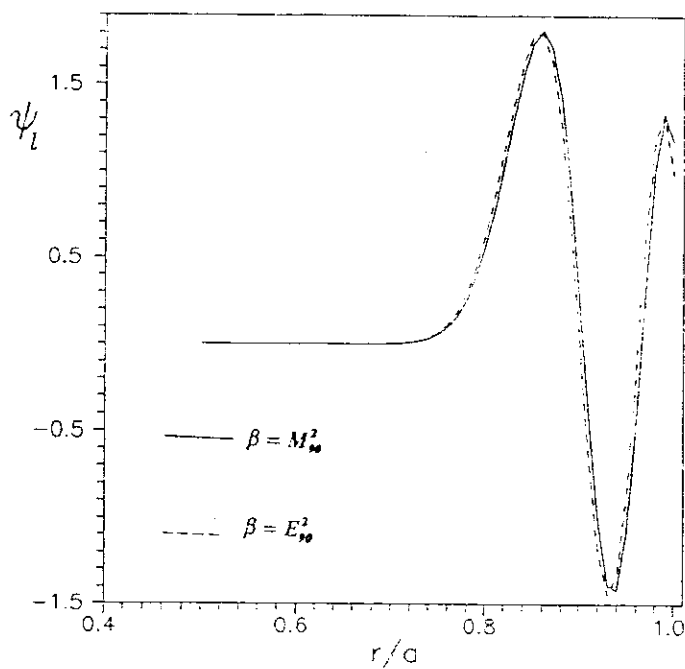


Fig.(5.2.3): Para  $N = 1.33$ , gráficos da função de Ricatti-Bessel e sua primeira derivada, para as ressonâncias  $M_{\omega}^2$  e  $E_{\omega}^2$ . Compare o nº de picos destes resultados com aqueles vistos na fig.(5.1.6).

Segue de (5.2.7 e 8) respectivamente que os seus pontos extremos estão na vizinhança de

$$\varphi(\xi, x) = \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi \quad (5.2.14)$$

$$\varphi(\xi, x) = \left(m - \frac{1}{4}\right)\pi \quad (5.2.15)$$

onde  $x = 0$  e  $m = 0, 1, \dots$

Explicitando  $\varphi$ , sintetizamos estas duas últimas equações em:

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 - \xi^2}}{\xi}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - \xi^2}}{\xi}\right) = \left(m \pm \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{\xi} \quad (5.2.16)$$

É fácil de observar de (5.2.16) que para  $\xi \gg 1$  uma de suas soluções ocorre na vizinhança de  $x = \xi$ . Este resultado corresponde ao limite assintótico daquele encontrado na Ref. [38]. Entretanto, é bom salientar que tal solução não é um ponto de extremo e sim, nada mais é do que o ponto de retorno clássico  $r_1$ .

Na vizinhança de uma dada ressonância, isto é para  $\xi = \beta + O(\beta^{\frac{1}{2}})$ , a eq. (5.2.16) pode ser reescrita como:

$$\sqrt{N^2 f^2 - 1} - \operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{N^2 f^2 - 1}\right) = \left(m \pm \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{\xi} \quad (5.2.17)$$

É interessante notar que soluções reais de (5.2.17) limitam inferiormente as regiões no interior da esfera onde podem existir campos intensos, através da desigualdade,

$$r \geq \frac{a}{N} \quad (5.2.18)$$

Com uma análise inteiramente análoga a esta desenvolvida aqui para o campo interno, obtemos através da expressão para o campo fora da esfera o limite superior para as regiões de campos intensos, a saber:

$$r \leq Na \tag{5.2.19}$$

Na realidade, sabemos que o campo no interior da barreira centrífuga decresce mais que exponencialmente (veja eqs.(5.2.7 e 5.2.8)) de modo que, a desigualdade acima é melhor aplicada a campos associados a ressonâncias mais próximas do topo da barreira de potencial.

Para estes, a interpretação física das eqs.(5.2.18 e 19) é a seguinte: As esferas  $r = \frac{a}{N}$  e  $r = Na$ , são imagens astigmáticas uma da outra, chamadas de *esferas aplanáticas* (veja fig.(5.2.4)), que nos permitem traçar as trajetórias dos raios refratados [17]. Sendo assim, as desigualdades (5.2.18 e 19) nos dizem que há campos intensos entre estas esferas.

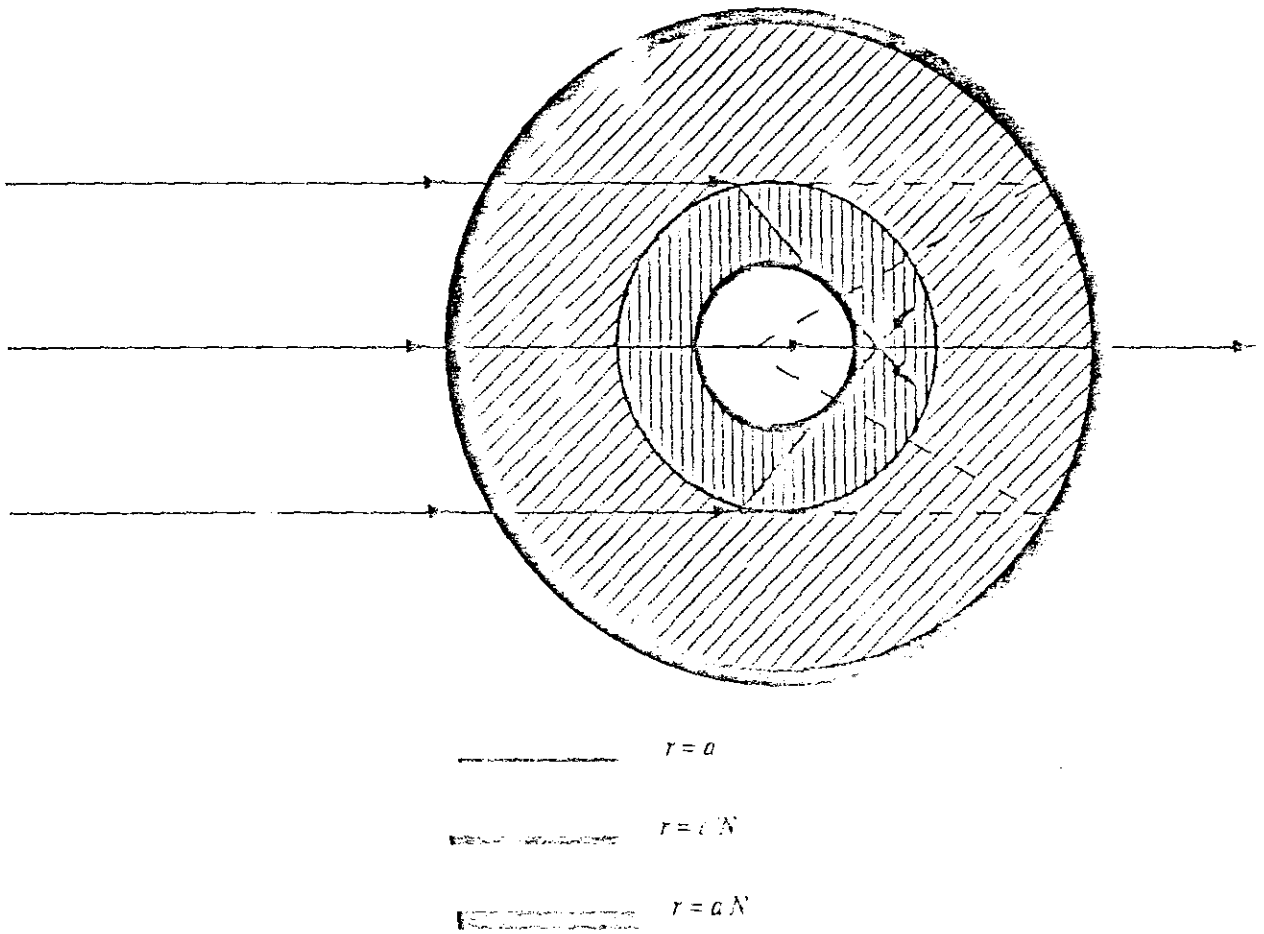


Fig.(5.2.4): esferas aplanáticas e as trajetórias dos raios refratados para  $N > 1$ .

Retornando à (5.2.17), podemos procurar soluções na vizinhança de  $f=1$ . Expandido-a nesta vizinhança, obtemos:

$$f \rightarrow f_m = \frac{1g^{-1}(M)}{M} + (m \pm \frac{1}{4}) \frac{\pi}{\xi M} \quad (5.2.20)$$

Esta equação nos permite ver que a distância entre dois picos consecutivos permanece aproximadamente constante, a saber:

$$f_{m+1} - f_m = \frac{\pi}{\xi M} \quad (5.2.21)$$

Uma forma mais conveniente de se escrever (5.2.20) é obtida quando a eq. (3.2.15) para as ressonâncias é nela substituída:

$$\begin{aligned} f_m \rightarrow f_{m,n}^j &= \frac{\beta_j}{\xi} + (m - n \pm \frac{1}{4} - \frac{j}{4}) \frac{\pi}{M\xi} - \frac{\sqrt{P}}{\epsilon_j M^2 \xi} \\ &= 1 - (n - m + \frac{j}{4} \mp \frac{1}{4}) \frac{\pi}{M\xi} - \frac{\sqrt{P}}{\epsilon_j M^2 \xi} \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Uma vez que  $f_{m,n}^j \leq 1$ , vemos da equação acima que o valor de  $m$  é limitado superiormente por

$$m \leq n + \frac{j}{4} \mp \frac{1}{4} \quad (5.2.23)$$

Portanto, fica claro de (5.2.23) que o número de picos de intensidade máxima é inferior ou igual a  $n + 1$  (veja figs. (5.1.4,5 e 6)). Também vemos de (5.2.23) que, à medida que  $m$  cresce, os picos se aproximam da superfície da esfera (veja tab. (5.2.1)).

Segue também da eq. (5.2.22) que a distância entre picos com o mesmo  $n$  e  $m$ , porém associados a ressonâncias de polarizações distintas, é de ordem  $\frac{\sqrt{P}}{\xi}$ .

Por fim, ainda através de (5.2.22) podemos estimar, no interior da esfera, qual é a região



$f_{m,n}^j(\ell) \rightarrow (n, m, \ell)$	$\bar{f} \Rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial f} \ \bar{E}_{int}\ ^2 \right _{f=\bar{f}} = 0$	$\hat{f} \Rightarrow \left. \frac{\partial V_{\ell}}{\partial f} \right _{f=\hat{f}} = 0$
(1, 0, 64)	0.8836	0.8874
(1, 1, 64)	0.9839	0.9856
(0, 0, 70)	0.9601	0.9632
(2, 0, 92)	0.8599	0.8599
(2, 1, 92)	0.9375	0.9358
(2, 2, 92)	0.9901	0.9917

Tab.(5.2.1): Para ressonâncias magnéticas ( $M$ ) e índice de refração  $N = 1.33$ , comparamos os pontos de intensidade máxima ( $\bar{f}$ ) do campo no interior da esfera com os pontos de extremo ( $\hat{f}$ ) da função de Ricatti-Bessel associada a onda parcial ressonante. A notação empregada é a seguinte:  $n$  é a ordem da ressonância,  $m$  a ordem do ponto de extremo e  $\ell$  o multipolo ressonante.

máxima, em unidades do raio da esfera, que numa ressonância está sujeita a campos intensos, isto é, a região  $r_{min} < r < a$ , onde

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{r}{a}\right)_{min} &\equiv 1 - \left[ (f_{r=r_{min}, \ell, P, M})^j - (f_{r=a, \ell, P, M})^j \right] \\
 &\approx 1 - n_{M(\ell)} \frac{\pi}{M\zeta} \\
 &\approx 1 - \frac{P}{2}
 \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Assim, por exemplo, para  $N=1.33$  e partir de 70% do raio até a sua superfície a esfera, numa ressonância, comporta campos intensos.

Para finalizar, gostaríamos de dizer que os cálculos apresentados aqui nesta seção têm um caráter mais qualitativo do que quantitativo, fornecendo porém boas estimativas iniciais para um cálculo numérico mais refinado.

### 5.3 Conclusões e Perspectivas Futuras

Uma das principais contribuições deste trabalho reside no cálculo das ressonâncias do espalhamento Mie [45]. Os algoritmos desenvolvidos aqui permitem calculá-las com excelente precisão e rapidez.

No tocante ao estudo das amplitudes de espalhamento nas direções dianteira e traseira nossos resultados foram também bastantes satisfatórios [46], pois conseguimos com auxílio da teoria do momento angular complexo compreender e reproduzir o comportamento das curvas de seção de choque total e ganho traseiro.

Outra direção interessante é a transversal ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), pois nesta direção, devido às propriedades das funções angulares, os termos de paridade par ou ímpar na série de ondas parciais se tornam mutuamente exclusivos. Assim, no espectro da luz espalhada ressonante, a distância entre grupos de picos associados a uma dada polarização é duas vezes maior que no caso das direções dianteira ou traseira, o que pode vir a ser útil sempre que se necessitar estudar ondas parciais ressonantes associadas a uma dada paridade específica.

Com base no nosso estudo do campo ressonante no interior da esfera, gostaríamos de propor um modelo de espalhamento de luz, que é uma extensão natural do de Mie, porém com uma característica fundamentalmente diferente, que se origina de tomar agora o centro espalhador como uma esfera constituída de várias camadas dielétricas distintas. As nossas motivações se baseiam no seguinte:

Vimos que na ressonância o campo é enormemente ampliado em regiões bem determinadas dentro da esfera. Dependendo da magnitude desta ampliação, efeitos não-lineares podem ocorrer, devido a mudanças locais de propriedades dielétricas do material. Uma vez que essas ressonâncias são bastantes estreitas (meias vidas muito grandes) podemos admitir que o sistema tenha tempo suficiente para entrar em equilíbrio com essa nova situação. Portanto, o modelo a ser estudado não seria mais de uma esfera caracterizada

apenas por um único índice de refração mas sim, de um sistema de multicamadas dielétricas concêntricas, que se tornaria o análogo ótico das estruturas de super-redes em materiais semicondutores. Como uma primeira análise, poderíamos inicialmente, desprezando efeitos de anisotropia angular, tomar estas multicamadas como equidistantes, de mesma espessura e caracterizadas por um mesmo valor para a constante dielétrica, pois vimos na seção anterior que a distância e a altura entre picos consecutivos variam pouco.

Com isto em mente e novamente pedindo ajuda aos conceitos que envolvem o espalhamento de partículas por potenciais efetivos em mecânica quântica, podemos inferir algumas características do espectro ressonante deste novo processo. Certamente, as ressonâncias mais profundas do espalhamento Mie sofrerão duas importantes alterações: a primeira será a diminuição do valor numérico de  $\beta$  (para um dado  $\ell$  fixo) devido à magnitude das barreiras interiores; a segunda é a sua divisão em sub-níveis, fato este relacionado à diferença de transmissividade entre os lados de cada barreira. Assim, de posse de um espectro tão mais rico que o espectro do espalhamento Mie, é de se esperar que questões novas interessantes surjam.

# Apêndice A

## Os Harmônicos Esféricos Vetoriais

As equações de Maxwell [39], para campos que evoluem harmonicamente no tempo ( $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega = kc$ ), no vácuo e em um meio sem fontes, são escritas como:

$$\nabla \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = ik \begin{bmatrix} \vec{B} \\ -\vec{E} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = 0 \quad (A.2)$$

Nas equações acima qualquer um dos campos pode ser eliminado em favor do outro, de modo que ambos satisfazem a equação de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = 0 \quad (A.3)$$

Como os campos eletromagnéticos são entidades vetoriais, soluções vetoriais de (A.3) podem ser obtidas [40] a partir da seguinte construção:

Para um dado campo vetorial  $\vec{F}$  de divergência nula e que é também uma solução da equação de Helmholtz, vale a identidade:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{F}) &= \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{F}) + 2\nabla \cdot \vec{F} \\ &= -k^2(\vec{r} \cdot \vec{F}) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Portanto, podemos tomar a solução de (A.4) como,

$$\vec{r} \cdot \vec{F} = a_\ell f_\ell(kr) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.5})$$

onde  $f_\ell$  é uma função esférica de Bessel e  $Y_{\ell, m}$  são os harmônicos esféricos

Como  $\vec{F}$  tem divergência nula, podemos escrevê-lo como o rotacional de um campo vetorial  $\vec{G}$ , isto é:

$$\vec{F} \equiv -\frac{i}{\lambda} \nabla \times \vec{G} \quad (\text{A.6})$$

Então segue de (A.5) que,

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{F} &= -\frac{i}{\lambda} \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \\ &= -\frac{i}{\lambda} (\vec{r} \times \nabla) \cdot \vec{G} \\ &= \frac{I}{\lambda} \vec{L} \cdot \vec{G} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

sendo  $\lambda$  uma constante e  $\vec{L}$  o operador do momento angular (em unidades de  $\hbar = I$ ) usual da Mecânica Quântica. Portanto, substituindo em (A.7) o resultado de (A.5) encontramos que,

$$\vec{L} \cdot \vec{G} = \lambda a_\ell f_\ell(kr) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.8})$$

Tomando

$$\vec{G} = \vec{L} f_\ell(kr) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.9})$$

segue de (A.8) que o valor de  $a_\ell$  vem dado por

$$a_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} \quad (\text{A.10})$$

Feito isso, retornando à (A.3), sabemos agora que suas soluções acarretam que

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{bmatrix} (\vec{r} \cdot \vec{E}) \\ (\vec{r} \cdot \vec{B}) \end{bmatrix} = 0 \quad (A.11)$$

Então, soluções do tipo *magnético (M)* são escritas como

$$\vec{r} \cdot \vec{E}^{(M)} = 0 \quad (A.12)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{B}^{(M)} \neq 0 \quad (A.13)$$

logo, tomando,  $\vec{B}^{(M)} = \vec{F}$ ,  $\vec{E}^{(M)} = \vec{G}$  com  $\lambda = k$ , obtemos

$$\vec{E}^{(M)} = f_l(kr) \vec{L}Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (A.14)$$

$$\vec{B}^{(M)} = -\frac{i}{k} \nabla \times (f_l(kr) \vec{L}Y_{l,m}(\theta, \phi)) \quad (A.15)$$

Soluções de (A.11) do tipo *Elétrico (E)* satisfazem a

$$\vec{r} \cdot \vec{B}^{(E)} = 0 \quad (A.16)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E}^{(E)} \neq 0 \quad (A.17)$$

que nos levam a escrever

$$\vec{B}^{(E)} = f_l(kr) \vec{L}Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (A.18)$$

$$\vec{E}^{(E)} = \frac{i}{k} \nabla \times (f_l(kr) \vec{L}Y_{l,m}(\theta, \phi)) \quad (A.19)$$

de modo que a solução mais geral para os campos pode ser escrita como uma combinação linear das soluções Magnéticas e Elétricas:

$$\vec{E} = \sum_{\ell, m} \left[ a(\ell, m) f_\ell(kr) \vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi) + \frac{i}{k} b(\ell, m) \nabla \times (f_\ell(kr) \vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi)) \right] \quad (A.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{i}{k} \nabla \times \vec{E} \\ &= \sum_{\ell, m} \left[ b(\ell, m) f_\ell(kr) \vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi) - \frac{i}{k} a(\ell, m) \nabla \cdot (f_\ell(kr) \vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi)) \right] \end{aligned} \quad (A.21)$$

com  $-\ell \leq m \leq \ell$  e  $1 \leq \ell < \infty$ .

Definimos os harmônicos esféricos vetoriais como:

$$\vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{L} Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (A.22)$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \nabla \times (f_\ell(r) \vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi)) &= i \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r} f_\ell(r) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \hat{e}_r \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r f_\ell(r))}{\partial r} \right] \left[ \hat{e}_r \times \vec{X}_{\ell, m}(\theta, \phi) \right] \end{aligned} \quad (A.23)$$

Enumeramos, a seguir, as principais propriedades de ortogonalidade envolvendo estes vetores [41]:

$$\int d\Omega [g_\ell \vec{X}_{\ell, m}] \cdot [f_{\ell'} \vec{X}_{\ell', m'}] = g_\ell f_{\ell'} \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \quad (A.24)$$

$$\int d\Omega [g_\ell \vec{X}_{\ell, m}] \cdot [\nabla \times (f_{\ell'} \vec{X}_{\ell', m'})] = 0 \quad (A.25)$$

$$\int d\Omega \left[ \nabla \times (f_\ell \bar{X}_{\ell,m}) \right]^* \cdot \left[ \nabla \times (g_\ell \bar{X}_{\ell,m}) \right] = k^2 \left[ f_\ell^* g_\ell + \frac{1}{k^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r f_\ell^* \frac{\partial (r g_\ell)}{\partial r} \right) \right] \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \quad (A.26)$$

A partir destas propriedades de ortogonalidade dos harmônicos esféricos vetoriais podemos obter algumas grandezas importantes, como, por exemplo, a *intensidade média da luz*  $S$  (veja Cap. 5), isto é:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\int d\Omega \|\vec{E}\|^2}{4\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell,m} \left( |a(\ell,m) f_\ell(kr)|_1^2 + |b(\ell,m)|_1^2 \left[ |f_\ell(kr)|_1^2 + \frac{1}{2k^2 r^2} \frac{\partial^2 |f_\ell(kr)|_1^2}{\partial^2 r^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (A.27)$$



## Apêndice B

### Cálculo de Ressonâncias (Polos de Regge) utilizando-se Expansões Assintóticas Uniformes para as Funções de Bessel

Vimos nos capítulos 3 e 4 que as ressonâncias do espalhamento Mie podem ser muito estreitas e portanto, para sua localização, devemos ter no método de cálculo um erro pelo menos inferior à sua largura. Para conseguirmos isto, tivemos que utilizar as expansões assintóticas uniformes para as funções de Bessel, que expomos a seguir.

No plano- $\lambda$ , para a região de ressonâncias  $\beta < \text{Re}(\lambda) < \alpha$ , as expansões assintóticas uniformes para a função de Bessel e sua primeira derivada [18,42] são respectivamente,

$$J_\lambda(\alpha) = \left[ \frac{4y}{(\alpha^2 - \lambda^2)} \right]^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{Ai}(-y) + \frac{f_b(\lambda, \alpha)}{8\lambda\sqrt{y}} \text{Ai}'(-y) \right\} \quad (B.1)$$

$$J'_\lambda(\alpha) = -\frac{2}{\alpha} \left[ \frac{4y}{(\alpha^2 - \lambda^2)} \right]^{-\frac{1}{4}} \left\{ \text{Ai}'(-y) + \frac{f_c(\lambda, \alpha)\sqrt{y}}{8\lambda} \text{Ai}(-y) \right\} \quad (B.2)$$

sendo,  $\text{Ai}$  e  $\text{Ai}'$  respectivamente a função de Airy e sua derivada regulares na origem e

$$y = y(\lambda, \alpha) = \left\{ \frac{3}{2} \varphi(\lambda, \alpha) \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (B.3)$$

$$f_b(\lambda, \alpha) = \frac{1}{(\alpha^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{5\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{9\varphi(\lambda, \alpha)} \quad (B.4)$$

$$f_c(\lambda, \alpha) = -\frac{3}{(\alpha^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{7\lambda^2}{3(\alpha^2 - \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{7}{9\varphi(\lambda, \alpha)} \quad (B.5)$$

As expansões correspondentes para a função de Hankel e sua primeira derivada escrevem-se como

$$H_{\lambda}^{(1)}(\beta) \approx \left[ \frac{4x}{(\lambda^2 - \beta^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ [Ai(x) - iBi(x)] + \frac{\tilde{f}_b(\lambda, \beta)}{8\lambda\sqrt{x}} [Ai'(x) - iBi'(x)] \right\} \quad (B.6)$$

$$H_{\lambda}^{(1)'}(\beta) \approx -\frac{2}{\beta} \left[ \frac{4x}{(\lambda^2 - \beta^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ [Ai'(x) - iBi'(x)] + \frac{\tilde{f}_c(\lambda, \beta)\sqrt{x}}{8\lambda} [Ai(x) - iBi(x)] \right\} \quad (B.7)$$

onde,  $Bi$  e  $Bi'$  são respectivamente a função de Airy e sua derivada irregulares na origem e

$$\begin{aligned} x &= x(\lambda, \beta) \\ &= \left\{ -\frac{3}{2} \psi(\lambda, \beta) \right\}^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (B.8)$$

$$\tilde{f}_b(\lambda, \beta) = \frac{-1}{(\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{5\lambda^2}{3(\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{9\psi(\lambda, \beta)} \quad (B.9)$$

$$\tilde{f}_c(\lambda, \beta) = \frac{3}{(\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{7\lambda^2}{3(\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{7}{9\psi(\lambda, \beta)} \quad (B.10)$$

Os polos de Regge,  $\lambda = \xi + i\eta$ , são zeros (veja eq.(3.2.2)) da equação,

$$Z(\lambda, \beta) \equiv [I\beta] - \epsilon_j N[\alpha] + \frac{(I - \epsilon_j)}{2\beta} \quad (B.11)$$

No limite de ressonâncias estreitas (veja fig(B.1)), as partes real e imaginária destes polos satisfazem respectivamente a

$$Re\{Z(\xi, \beta)\} = O(\eta^2) \quad (B.12)$$

$$\eta \approx -\frac{Im\{Z(\xi, \beta)\}}{Re\{Z(\xi, \beta)\}} \quad (B.13)$$

onde o ponto (.) representa derivação com respeito a  $\xi$ .

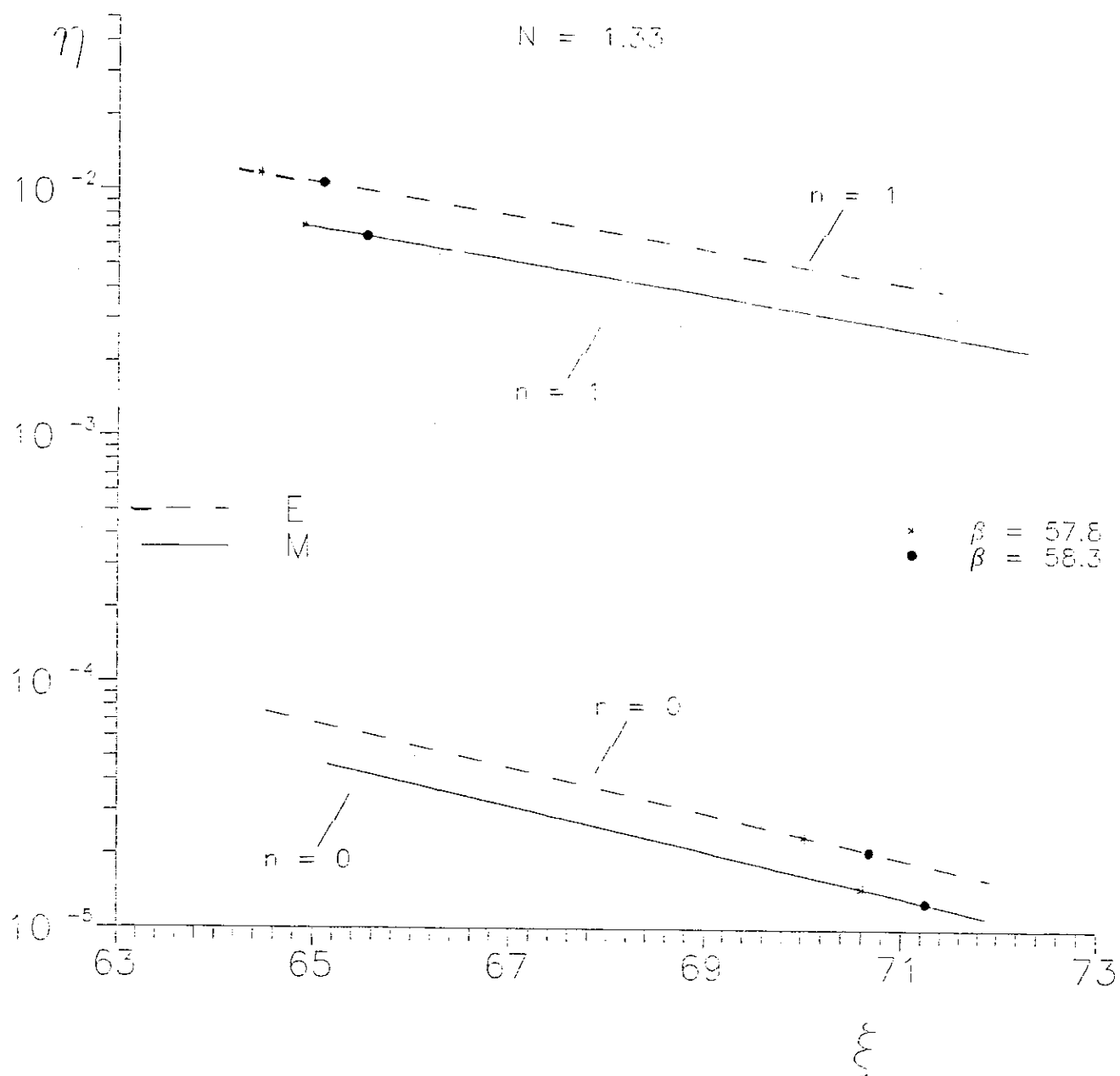


Fig.(B.1): Trajetórias dos polos de Regge (com índices de ressonância  $n=0,1$ ) que são soluções simultâneas de (B.12 e 13) no plano de momento angular complexo. As ressonâncias ocorrem quando  $\xi$  é um  $n^{\circ}$  semi-inteiro. Observe a rápida variação (aproximadamente exponencial) de  $\eta$  em relação a  $\xi$ .

## Referências

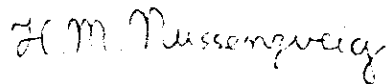
- [1] – Pinnick, P. G., et al, Opt. Lett. 13, 494 (1988)
- [2] – Zhang, I. Z. e Chang, R. K., J. Opt. Soc. Am. B 6, 151 (1989)
- [3] – Chitanvis, S. M. e Cantrell, C. D., J. Opt. Soc. Am. B 6,1326 (1989)
- [4] – Qian, S. X., et al., Science 231, 486 (1986)
- [5] – Bohren, C. F. e Huffman, D. R., *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Willey, N. Y. 1983)
- [6] – Benner, R. E., et al., Phys. Rev. Lett. 44, 475 (1980)
- [7] – Haroche, S. e Kleppner, D., Phys. Today (Jan.), 24 (1989)
- [8] – Arken, G., *Mathematical Methods for Physicists* (Acad.Press, N. Y., 1970)
- [9] – Schiff, L. I., *Quantum Mechanics* (M. Graw -Hill, N. Y., 1968)
- [10] – Mie, G., Ann. Physik. 25, 377 (1908)
- [11] – Kerker, M., *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation* (Acad.Press, N. Y., 1969)
- [12] – Marion, J. B., *Classical Electromagnetic Radiation* (Acad.Press, N. Y., 1965)
- [13] – Van de Hulst, H. C., *Light Scattering by Small Particles* (Dover, N. Y. 1980)
- [14] – Nussenzveig, H. M., J. Math. Phys. 10, 82 (1969)
- [15] – Berry, M. V., Proc. Phys. Soc. (London), 88, 285 (1986)
- [16] – Merzbacher, E., *Quantum Mechanics* (Willey, N. Y., 1970)
- [17] – Born, M. e Wolf, E., *Principles of Optics* (Pergamon, N. Y.,1970)
- [18] – Abramowitz, M. e Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, N.Y., 1965)
- [19] – Chylek, P., et al.,Appl. Opt. 25, 2464 (1986)
- [20] – Probert-Jones, J. R., J. Opt. Soc. Am. A 1, 822 (1984)
- [21] – Ashkin, A. e Dziedzic, J. M., Appl. Opt. 20, 1803 (1981)
- [22] – Conwell, P. R., et al., J. Opt. Soc. Am. A 1, 62,(1984)
- [23] – Chylek, P., et al.,Appl. Opt. 22, 2302 (1983)

- [24] — Chylek, P., J. Opt. Soc. Am. 66, 285 (1976)
- [25] — Debye, P. J., Phys. Z. 9, 775 (1908)
- [26] — Van der Pol, B. e Bremmer, H., Phil. Mag. 24, 141 (1937)
- [27] — Nussenzveig, H. M., J. Math. Phys. 10, 125 (1969)
- [28] — Nussenzveig, H. M., J. Opt. Soc. Am. 69, 106 (1979)
- [29] — Khare, V., Ph. D. Thesis, University of Rochester (1975)
- [30] — Nussenzveig, H. M., Ann. Phys. (N. Y.) 34, 23 (1965)
- [31] — Pinnick, R. G., et al., Opt. Lett. 13, 1099 (1988)
- [32] — Tzeng, H. M., et al., Opt. Lett. 9, 499 (1984)
- [33] — Tzeng, H. M., et al., Opt. Lett. 9, 273 (1984)
- [34] — Lai, H. M., et al., J. Opt. Soc. Am. B 6, 2430 (1989)
- [35] — Drobnik, A., et al., J. Mod. Opt. 36, 523 (1989)
- [36] — Chylek, P., et al., Appl. Opt. 24, 3940 (1985)
- [37] — Owen, J. F., et al., Opt. Lett. 6, 540 (1981)
- [38] — Bhandari, R., Appl. Opt. 25, 2464 (1986)
- [39] — Jackson, J. D., *Eletrodinâmica Clássica* (Guanabara Koogan, RJ, 1983)
- [40] — Bouwkamp, C. J. e Casimir H. B. G., Physica 20, 539 (1954)
- [41] — Hill, E. L., Am. J. Phys. 22, 211 (1954)
- [42] — Olver, F. W. J., *Asymptotics and Special Functions* (A. Press, N. Y., 1974)
- [43] — Nussenzveig, H. M. e Wiscombe, W. J., Opt. Lett. 5, 455 (1980)
- [44] — Nussenzveig, H. M., *Coherence and Quantum Optics VI*, eds. J. H. Eberly, L. Mandel e E. Wolf (Plenum, N. Y., 1990), 821; *Comments At. Mol. Phys.* 23, 175 (1990)
- [45] — Guimarães, L. G. e Nussenzveig, H. M., a ser publicado
- [46] — Guimarães, L. G. e Nussenzveig, H. M., submetido a publicação no Phys. Rev. Lett.


"CÁLCULO DE RESSONÂNCIAS DO ESPALHAMENTO MIE E SUAS APLICAÇÕES"

LUIZ GALLISA GUIMARÃES

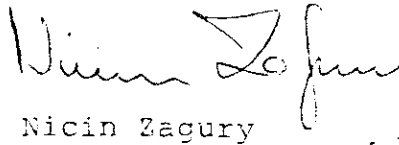
Tese de Doutorado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



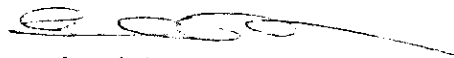
Herch Moyses Nussenzveig - Presidente



Luiz Felipe Alvahydo de Ullôa Canto



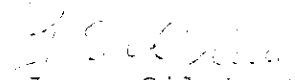
Nicin Zagury



Takeshi Kodama



Sergio Joffily



Jorge Silvio Helman - Suplente

Rio de Janeiro, 29 de novembro de 1991