LUCIANE RANGEL DE FREITAS

CAMPOS DE SPIN-2 , VARIÁVEIS FUNDAMENTAIS :

A PROPOSTA DE FIERZ

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, abril de 1991

AGRADECIMENTOS

A Mário Novello, pela confiança, pelas belas idéias e ensinamentos, por me passar a certeza de que cada descoberta era um momento magistral. Agradeço a maneira amiga que teve de me orientar.

A Nelson Pinto Neto, o mais alegre colaborador, agradeço a forma carinhosa de passar seus conhecimentos, de criticar precisa e valiosamente cada passo deste trabalho.

A Nami F. Svaiter ao entusiasmo e profissionalismo que manifestou na nossa colaboração.

A Luis Alberto R. de Oliveira e José Martins Salim, nossos valiosos momentos de estudo "estocástico".

Ao Moacyr o encontro.

Aos colegas do CBPF a solidariedade nesta empreitada.

A Eliane, a quem devo toda a beleza gráfica desta tese.

A minha família, por ter me proporcinado um ambiente de segurança, econômica e afetiva, mister a adquirir-se um pouco de conhecimento sobre este tão vasto mundo.

À Myriam Coutinho, pelo carinho e afeição que, no dia a dia, dedica a nós estudantes.

Ao Lafex, o empréstimo dos seus micros e impressoras estar aberto a comunidade científica.

Ao CNPq , por ter financiado este trabalho.

A

vovó Neves+ e tia Carmem+

minha mãe (Zizi), minha irmã (Lula), Si, Celsinho Wilmer, Bia, Sandrinha, Moaça, Serginho, Celso (cunhadão), Ildeu, Gustavo, Carmensita, Rose, Roseni, Joãozinho, Jussara, Marcinha, Moniquinha, Prof Moreira, Luis Alberto (Lu), Cristiana, Katita, Paty gaúcha, Chris, Nelsinho, Chico, Mário Assad, Mabel, Dª Josephina Pagani, Robinho, tia América, Beth, tia Querida, Ary, Maurice Basin, Lea, Claudio Ulpiano, Salim, Mário Novello, Fernandinha, Sergio Schilesinger...

Pela vida afora, fui acumulando uma dívida com a vida: A serena certeza de ter tido a sorte de conviver, compartilhar a existência, sob um mesmo céu e um mesmo tempo, com certas pessoas que não fizeram outra coisa além de abrir meus olhos e engrandecer meus dias. Certas pessoas que são uma espécie de dádiva, de cerimônias tão minhas, de encontro e reencontro comigo mesma. Certas pessoas que, mesmo à distância, diminuiram o meu silêncio e iluminaram a minha solidão. Poucas, valiosas, ternas pessoas.

Vocês por exemplo.

(Eric Nepomuceno em Um Certo Francisco)

R E S U M O

Examinamos neste trabalho processos de interação de campos de spin-2 em diversos contextos. Procuramos fazer uma descrição sistemática e auto-consistente de campos de spin-2 livres, utilizando não as variáveis convencionais ($\varphi_{\mu\nu}$), mas sim as variáveis de Fierz ($A_{\alpha\beta\mu}$). Para tanto sumarizamos a formulação clássica da dinâmica destas variáveis proposta por Novello e Neto e formulamos uma teoria "tipo Fermi-Gupta-Bleuler". Quantizamos este campo nas variáveis de Fierz para estas duas teorias. Construimos dois exemplos de lagrangeanas não-lineares para $A_{\alpha\beta\mu}$, utilizando o método de Boillat (lagrangeanas excepcionais) e mostramos a semelhança destas com à proposta por Born-Infeld para a eletrodinâmica não-linear. Elaboramos assim um quadro bastante amplo de analogia das teorias para campos de spin-2 utilizando as variáveis de Fierz e as existentes para campos de spin-1. Finalmente, estudamos os efeitos microscópicos de campos de spin-2 utilizando a variável padrão e mostramos a coerência da formulação de Novello-Elbaz de uma unificação eletro-fraca-gravitacional.

A B S T R A C T

Interaction processes of spin-2 fields are here examined in serveral contexts. Using Fierz variables ($A_{\alpha\beta\mu}$) instead of the convetional variable ($\varphi_{\mu\nu}$) we try to develop a systematic and self-consistent description of spin-2 free fields. We sumarize the Novello-Neto classical formulation of the dynamics of these variables and propose a "Fermi-Gupta--Bleuler-like" theory. We quantize this field in the Fierz variables for both theories. Two examples of non-linear lagrangean for $A_{\alpha\beta\mu}$ are constructed using the Boillat method (exceptional lagrangeans) and they are show to be similar to Born-Infeld proposal for non-linear eletrodynamics. Finally, we study the microscopic effect of spin-2 fields using the conventional variable and we demonstrate the consistency of Novello-Elbaz formulation of the gravitational-electro-weak unification.

SUMÁRIO

C O N V E N Ç Õ E S

Índices gregos variam de 0 a 3

Índices latinos variam de 1 a 3

Assinatura da métrica: (+,-,-,-)

$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 0 \text{ , índices repetidos} \\ 1 \text{ , permutação par dos índices} \\ -1 \text{ , permutação ímpar dos índices} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk}$$

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Dual de um tensor:

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

Derivada covariante na geometria Riemanniana:

$$T^{\mu}{}_{;\nu} = T^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} T^{\lambda}$$

sendo $T^{\mu}{}_{,\nu} = \dfrac{\partial T^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$

e $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = \dfrac{1}{2} g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\lambda,\nu} + g_{\sigma\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\sigma})$

a conexão afim da métrica $g_{\mu\nu}$.

$L_{(\mu\nu)} = L_{\mu\nu} + L_{\nu\mu}$ (simetria)

$$L_{(\mu\nu)} = L_{\mu\nu} - L_{\nu\mu} \quad \text{(anti-simetria)}$$

Tensor de curvatura de Riemann:

$$T^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} - T^{\alpha}{}_{;\nu;\mu} = R^{\alpha}{}_{\sigma\mu\nu}T^{\sigma}$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

Geometria "Ricci flat":

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Escalar de curvatura:

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}$$

INTRODUÇÃO

O interesse no estudo de teorias de campos de spin-2 em meio aos especialistas na área de gravitação e cosmologia deve-se ao consenso de que o campo gravitacional deve possuir spin maior ou igual a dois. Como usualmente opta-se pela simplicidade, costuma-se dizer que o campo gravitacional possui spin-2.

Particularmente simples é a argumentação de Feymann[1] com relação a esta questão. Faremos aqui um resumo desta argumentação.

Segundo Feymann, o campo gravitacional não poderia ter spin ímpar posto que as interações gravitacionais são sempre atrativas e as interações geradas por campos de spin ímpar podem ser atrativas ou repulsivas. Além disto, o spin deste campo não poderia ser semi-inteiro uma vez que tais interações não geram forças estáticas, como é o caso das forças gravitacionais Newtonianas; finalmente, não poderia ser zero pois isto implicaria em que a atração gravitacional entre gases quentes seria menor do que para gases frios.

Classicamente, aceita-se que a Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein[2] é a melhor teoria, até o momento, para decrever o campo gravitacional. O sucesso desta teoria se deve ao fato dela estar de acordo com todos os resultados observacionais existentes até hoje e obviamente satisfazer as propriedades fundamentais relativas às interações gravitacionais tais como: descrever um campo de spin-2; as equações de campo não possuirem termo de massa (interação de longo alcance); as equações de campo serem não-lineares. Esta última propriedade deve-se ao fato de serem as interações gravitacionais universais, isto é, toda matéria/energia do universo interage gravitacionalmente com tudo que existe. Assim, como deve o campo gravitacional possuir energia, a equação que o descreve deve conter esta auto-interação. Não obstante, existem dificuldades formais nesta teoria, algumas das quais citaremos a seguir.

Desde o início do século, examina-se a possibilidade de unificação das teorias da física. O interesse neste programa tem crescido bastante motivado pelo sucesso da unificação eletro-fraca e a recente convergência entre a física de partículas elementares e a cosmologia. No que diz respeito à gravitação, encontramos sérias dificuldades quando pretendemos incluí-la neste programa utilizando a TRG.

Uma das dificuldades é que todas as interações da natureza, exceto talvez a gravitacional, são descritas por uma teoria de gauge (teorias de Yang-Mills (Y-M)). Uma das diferenças entre estas teorias e a TRG é que, nas teorias de Y-M , as variáveis fundamentais são potenciais da curvatura do espaço "interno" (espaço de gauge) da lagrangeana e na TRG, a curvatura do espaço-tempo, se escreve em termo das derivadas de primeira ordem da conexão. Porém não é esta a variável básica da TRG mas sim o tensor métrico. Outra diferença entre estas teorias situa-se no significado físico dos vínculos de cada uma delas. Nas teorias de Y-M, os vínculos geram transformações canônicas no espaço "interno" não alterando portanto os objetos observáveis. O mesmo não ocorre na TRG posto que, o espaço de simetrias da curvatura corresponde ao próprio espaço-tempo. Assim, as transformações canônicas geradas pelos vínculos correspondem a movimentos no espaço tempo físico, ou seja, estão interligadas à dinâmica da teoria. Esta dificuldade manifesta-se principalmente na tentativa de quantização canônica desta teoria[3,4].

Toda esta problemática nos ensejou a caminhos alternativos para descrever as interações gravitacionais. Neste trabalho praticamente vamos nos limitar a um deles, procurando percorrer uma trilha que se mantem, quase que ininterruptamente, atrelada a uma analogia formal àquelas teorias que descrevem o comportamento do campo eletromagnético.

Esta escolha está baseada numa teoria desenvolvida por Fierz em 1939[5]. Segundo este autor, existem duas formas distintas, porém equivalentes, de representar campos de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski. Uma delas seria utilizando o tensor de 2ª ordem simétrico $\varphi_{\mu\nu}$, que denotaremos de variável padrão, cuja extensão a espaços-tempos curvos é o próprio tensor métrico $g_{\mu\nu}$[1,6]. A outra forma seria usando um tensor de 3ª ordem $A_{\alpha\beta\mu}$, o qual chamaremos, por motivos óbvios, de variável de Fierz. Este tensor é anti-simétrico no primeiro par de índices e possui pseudo-traço nulo, isto é,

$$A_{\alpha\beta\mu} = - A_{\beta\alpha\mu}$$

$$\overset{*}{A}{}^{\alpha\beta}{}_{\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{\alpha\beta\mu} + A_{\mu\alpha\beta} + A_{\beta\mu\alpha} = 0$$

Estas variáveis possuem respectivamente 10 e 20 graus de liberdade, o que implica, em ambos os casos, na existência de graus de liberdade espúrios, isto é, estão contidas nestas variáveis quantidades não físicas visto que o campo de spin-2 sem massa possui apenas dois graus de liberdade para cada ponto do espaço tempo.

Recentemente, os físicos vêm reavaliando o papel destas quantidades não-físicas deixando de tratar este fato como uma dificuldade mas sim como um ajuste pelo aumento de simetrias na teoria. O sucesso da descrição de gauge da interação eletro-fraca tem reforçado esta atitude. Einstein argumentava (segundo A. Salam[7]) da seguinte forma: " Nature is not economical of structures: only of principles fundamental aplicability. On of these, the general covariance principle, is precisely the main responsible for the appearance of such extra non-physical variables*".

A descrição de campos de spin-2 em termo das variáveis de Fierz foi omitida da literatura durante muitos anos. Entretanto, em 1988, M. Novello e N. P. Neto[4] mostraram uma

---

* A natureza nao é econômica em estruturas, mas apenas em princípios de aplicação fundamental. Um destes princípios, o de covariância geral, é precisamente o principal responsável pelo surgimento de variáveis não-físicas.

formulação clássica precisa para um único campo de spin-2 utilizando estas variáveis.

Estes autores construiram um sistema de equivalência entre as duas representações ($\varphi_{\mu\nu}$ e $A_{\alpha\beta\mu}$) e apresentaram um formalismo lagrangeano completo no espaço-tempo de Minkowski, com suas simetrias de calibre e o esquema de interação com outros campos. Foi feito também a formulação hamiltoniana desta teoria e finalmente a construção de uma teoria alternativa para a gravitação. A hipótese principal deste trabalho é a de que existe um correspondente geométrico do tensor de Fierz na estrutura da variedade Riemanniana, ou melhor, existe um objeto que é a extensão a espaços-tempos curvos da variável $A_{\alpha\beta\mu}$(que descreve um campo de spin-2 no espaço-tempo plano). Este objeto foi identificado com um potencial de três índices do tensor de Weyl, o qual possui simetrias idênticas às do tensor de Fierz. A existência deste potencial foi primeiramente sugerida por Lanczos[8] e definitivamente demonstrada por E. Bampi e G. Caviglia em 1983[9].

As equações para este potencial são as equações de Jordan-Lichnerowicz[10,11] que constituem uma formulação para a gravitação baseada na divergência do tensor de Weyl que se reduz à TRG mediante uma escolha adequada das condições de contorno.

A idéia inicial de nosso trabalho foi fazer uma extensão natural da teoria de Novello e Neto formulando a quantização canônica convencional desta teoria.

Faremos no primeiro capítulo um breve resumo da dinâmica clássica da teoria de campos de spin-2 em termo das variáveis de Fierz, utilizando um tratamento um pouco distinto do encontrado em Novello e Neto uma vez que não era de fundamental iportância neste trabalho obtermos um único campo de spin-2 na formulação clássica mas sim mostrar a estreita analogia desta com a utilizada para descrever campos de spin-1.

Com base nesta semelhança estrutural construimos uma outra teoria para o potencial $A_{\alpha\beta\mu}$ na qual quebramos a invariância de calibre inserindo um termo de divergência do potencial na lagrangeana anterior. Este método foi proposto por Fermi[12] para quantizar a eletrodinâmica de forma manifestamente covariante. Neste caso, ao suprimir a liberdade de escolha de calibre que permitia reduzir os graus de liberdade excedentes do potencial A_{μ} , cria-se um novo problema. A hamiltoniana do sistema deixa de ter sinal definido. Esta dificuldade é superada introduzindo-se condições sobre os estados quânticos do espaço de Hilbert.

No capítulo 2 faremos a quantização canônica das teorias citadas acima, utilizando para a teoria de calibre o método de Dirac[13] e para a formulação "tipo Fermi" o procedimento proposto por este e complementado por Gupta e Bleuler obtendo um quadro formal que possui uma analogia bastante forte entre as teorias para campos de spin-2 e aquelas existentes para campos de spin-1. Assim, o trabalho de Novello-Neto e aquele compreendido nos capítulos 1 e 2 do presente trabalho compreendem uma análise clássica e quântica completamente coerente para campos de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski.

Passaremos agora a uma questão mais delicada que é a de como construir uma teoria não-linear para esta variável.

Como vimos anteriormente, uma teoria que se proponha a descrever a gravitação deve ter equações de campo não-lineares. Claro está que existe uma gama de possibilidades para a escolha desta teoria. Um dos métodos que poderíamos utilizar para isto seria o sugerido por Feynman e outros[1,6] para a variável padrão $\varphi_{\mu\nu}$ que através de um processo de infinitas etapas (descrito com mais detalhes na introdução do cap.3) chega à teoria geometrizada de Einstein.

Um outro procedimento poderia ser o adotado por Boillat para a eletrodinâmica não-linear[14]. Limitando-se ao conjunto de equações que admitem soluções ondulatórias e hiperbólicas, posto que esta última condição garante que a velocidade de propagação de cada onda seja finita[15], Boillat sugere que uma boa teoria física deve garantir que esta velocidade não cesse de ser finita com o tempo. O motivo desta imposição é que, para as equações não-lineares, uma escolha adequada das pertubações iniciais produzem ondas aceleradas. Consequentemente, a pertubação cessará de ser finita depois de um dado tempo crítico, tendendo ao que Boillat e outros denominam de "onda de choque". Neste momento não se pode mais propagar as soluções das equações de campo. No entanto, existe um conjunto de equações para o qual este fenômeno não ocorre. Este fato, que foi primeiramente notado pelo matemático Lax[16], requer que a velocidade de propagação seja contínua através das frentes de onda.

Neste trabalho vamos adotar este segundo procedimento. Primeiramente, devido à não existência de uma relação-ponte entre a variável de Fierz e o tensor métrico de Einstein para o campo forte (o que dificulta bastante a utilização do método sugerido por Feynman, Deser e outros). Ademais, usando o método de Boillat, daremos prosseguimento à interessante analogia que vimos traçando entre as teorias de campos de spin-2 em termo de $A_{\alpha\beta\mu}$ e a eletrodinâmica.

Deste modo, no capítulo 3, mostramos duas lagrangeanas excepcionais não-lineares para alguns invariantes construidos com as variáveis de Fierz, e surpreendentemente verificamos que estas teorias também são análogas à da eletrodinâmica não-linear, conhecida como teoria de Born-Infeld.

A constatação de que teorias para campos de spin-2 podem ser interpretadas como uma extensão das teorias existentes para o campo eletromagnético, nos possibilita algumas extrapolações. Vimos, no início desta introdução, que existem algumas dificuldades formais quando pretendemos, utilizando a TRG de Einstein, construir uma teoria de unificação da gravitação com outras teorias de campo. Assim, no último capítulo, mostraremos a coerência de uma teoria "tipo Glashow-Weinberg-Salam" para quatro campos de spin-2 sugerida por Novello e Elbaz[17] em 1987. Esta teoria supõe a existência de um campo de curto alcance que seja a contrapartida do campo gravitacional, assim como é a força fraca da força eletromagnética.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS CLÁSSICOS DA DINÂMICA DAS VARIÁVEIS DE FIERZ

1- PRELIMINARES

Em um de seus trabalhos (1939), Fierz[5] afirma que pode-se descrever campos de spin-2 através de duas representações distintas, porém equivalentes, utilizando-se o tensor $\varphi_{\mu\nu}$, simétrico, com 10 componentes independentes, que nós denotaremos como variável padrão; ou um tensor de 3ª ordem $A_{\alpha\beta\mu}$ cujas propriedades (algébricas e dinâmicas) serão tratadas neste capítulo. Portanto é razoável esperar existirem fórmulas que permitam a passagem de uma representação a outra. Estas fórmulas são, no caso linear, conhecidas[4] e podem ser escritas sob a forma:

$$A_{\mu\lambda\nu} = \varphi_{\nu[\mu,\lambda]} + B\,\varphi_{,[\mu}\eta_{\lambda]\nu} - B\,\eta_{\nu[\lambda}\varphi_{\mu]}{}^{\beta}{}_{,\beta} \qquad (1.1.1a)$$

$$\varphi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2m}\,A_{(\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu),\lambda} + \frac{Q}{2m}\,(A_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\lambda,\nu} + A_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\lambda,\mu}) + $$
$$-\frac{1}{2m}\,A^{\alpha\beta}{}_{\beta,\alpha}\eta_{\mu\nu} \qquad (1.1.1b)$$

onde,

$Q = \dfrac{1 - B}{1 - 3B}$ e B é uma constante arbitrária.

Pode-se verificar que, substituindo $\varphi_{\mu\nu}$ dado em (1.1.1b) na expressão de $A_{\mu\lambda\nu}$ (1.1.1a), obtem-se a equação de movimento para o tensor de Fierz (e vice-versa).

Entretanto, segundo Fierz, a representação $A_{\mu\lambda\nu}$ é possível de ser definida independentemente, a partir de suas propriedades básicas; o que faremos a seguir.

2- PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO TENSOR DE FIERZ ($A_{\alpha\beta\mu}$) :

O tensor de Fierz satisfaz a condição de ser anti-simétrico no primeiro par de índices,

$$A_{\alpha\beta\mu} = - A_{\beta\alpha\mu} \tag{1.2.1a}$$

e tem o traço do auto-dual nulo, isto é,

$$A_{\alpha\beta\mu} + A_{\mu\alpha\beta} + A_{\beta\mu\alpha} = 0 \tag{1.2.1b}$$

Por razões que ficarão claras a seguir, utilizamos esta variável para contruir a seguir um tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, que fará o verdadeiro papel de campo (i.e., $A_{\mu\nu\lambda}$ será o potencial). Pelas simetrias de (1.2.1a) segue naturalmente a definição deste objeto , que possui traço nulo, isto é:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} \quad - \quad \text{traços} \\ &= A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} + \frac{1}{2} A_{(\alpha\nu)}\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{2} A_{(\beta\mu)}\gamma_{\alpha\nu} + \\ &\quad - \frac{1}{2} A_{(\alpha\mu)}\gamma_{\beta\nu} - \frac{1}{2} A_{(\beta\nu)}\gamma_{\alpha\mu} + \frac{2}{3} A^{\lambda\sigma}{}_{\lambda,\sigma}\, \gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

onde definimos o tensor $A_{\mu\nu}$ pela relação:

$$A_{\alpha\nu} = A_{\alpha\ \ \nu,\varepsilon}^{\ \ \varepsilon} + A_{\alpha\ \ \varepsilon,\nu}^{\ \ \varepsilon} \qquad (1.2.3)$$

Nestas expressões a derivada é definida covariantemente em termos da métrica $\gamma_{\mu\nu}$ do background, e se identificará com a derivada simples ao se escolher um sistema de coordenadas cartesiano no qual $\gamma_{\mu\nu}$ seja dado por:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{para} \quad \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0 & \text{para} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

Assim definido, o tensor de campo $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem as seguintes propriedades de simetria (compare com as do tensor de Weyl[21]),

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -\ C_{\beta\alpha\mu\nu} = -\ C_{\alpha\beta\nu\mu} = C_{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (1.2.4)$$

tendo ainda traço e pseudo traço nulos,

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\ \gamma^{\alpha\mu} = 0 \qquad (1.2.5a)$$

$$\overset{*}{C}_{\alpha\beta\mu\nu}\ \gamma^{\alpha\mu} = 0 \qquad (1.2.5b)$$

Note que pelas simetrias (1.1.4) e pelo fato de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ não ter traço segue que:

$$\overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = C^{\alpha\beta\overset{*}{\mu\nu}}$$

Assim, devido à (1.2.5), $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ possue apenas 10 componentes independentes.

Neste trabalho iremos também considerar nulo o traço do tensor de Fierz, ficando este com 16 componentes independentes ao invés de 20, se considerássemos apenas as propriedades (1.2.1).

3- TEORIA "TIPO MAXWELL" PARA AS VARIÁVEIS DE FIERZ

- Formalismo Lagrangeano

Seja um campo vetorial do tipo tempo $V^{\mu}(x^{\alpha})$ que representa um campo de observadores no espaço tempo de Minkowski. Podemos definir a parte elétrica ($E_{\mu\nu}$) e magnética ($B_{\mu\nu}$) do tensor de campo $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ da forma padrão:

$$E_{\alpha\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu} V^{\beta} V^{\nu} \tag{1.3.1a}$$

$$B_{\mu\nu} = \overset{*}{C}_{\alpha\beta\mu\nu} V^{\beta} V^{\nu} \tag{1.3.1b}$$

Note que existe uma analogia entre os tensores $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, $E_{\alpha\mu}$ e $B_{\alpha\mu}$, que utilizamos para descrever campos de spin-2 e ,por exemplo, as quantidades

$$F_{\mu\nu} = A_{[\mu,\nu]}$$

$$E_{\mu} = F_{\mu\nu} V^{\nu}$$

$$B_{\mu} = \overset{*}{F}_{\mu\nu} V^{\nu}$$

usadas para decrever campos de spin-1. Este fato nos sugere propor a seguinte lagrangeana para o tensor $A_{\alpha\beta\mu}$

$$L_1 = \frac{1}{8} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} \qquad (1.3.2)$$

cuja forma é semelhante à da lagrangeana de Maxwell para o eletromagnetismo

$$L_m = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Verificaremos mais adiante que, com efeito, se configurará uma analogia muito grande entre as teorias contruidas com $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ e às existentes para o campo $F_{\mu\nu}$, tanto clássica quanto quanticamente.

A equação de movimento proveniente da lagrangeana (3.2) é:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (1.3.3)$$

e esta ,em termo dos potenciais de Fierz se escreve,

$$\Box A_{\alpha\beta\mu} - A_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{,\lambda,\mu} + \frac{1}{2} A_{\mu[\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\lambda,\beta]} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu[\beta} A_{\alpha]}{}^{\lambda\nu}{}_{,\lambda,\nu} = 0 \qquad (1.3.4)$$

Podemos verificar que o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ (como definido em (1.2.2)) possui uma simetria interna, ou seja, ele permanece invariante sob a seguinte transformação:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}(A'_{\alpha\beta\mu}) = C_{\alpha\beta\mu\nu}(A_{\alpha\beta\mu}) \qquad (1.3.5)$$

onde

$$A'_{\alpha\beta\mu} = A_{\alpha\beta\mu} + W_{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{2} W_{\mu[\alpha,\beta]} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu[\alpha} W_{\beta]}{}^{\lambda}{}_{,\lambda} \qquad (1.3.6)$$

sendo $W_{\alpha\beta}$ um tensor antissimétrico arbitrário. Deste modo impondo que o tensor $W_{\alpha\beta}$ satisfaça a seguinte condição:

$$\Box\, W_{\alpha\beta} = - A_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{,\mu} \qquad (1.3.7)$$

permite-nos escolher uma gauge "tipo Lorentz" generalizada, isto é,

$$A'_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{,\mu} = 0 \qquad (1.3.8)$$

Ao introduzir esta condição na equação de movimento obtemos,

$$\Box\, A'_{\alpha\beta\mu} = 0 \qquad (1.3.9)$$

É interessante notar que uma situação semelhante ocorre no eletromagnetismo. Com efeito o tensor $F_{\mu\nu}$ é invariante quando submetido à transformação

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \Lambda_{,\mu}$$

Escolhendo Λ de modo que,

$$\Box\, \Lambda = - A^{\mu}{}_{,\mu}$$

a equação de movimento reduz-se a:

$$\Box A_{\mu} = 0$$

com a gauge de Lorentz,

$$A^{\mu}{}_{,\mu} = 0$$

- FORMALISMO HAMILTONIANO

Devido à invariância de calibre (1.3.7), o formalismo hamiltoniano para esta teoria do tensor $A_{\alpha\beta\mu}$, deve conter 12 vínculos de primeira classe[4],dado que para fixar $A_{\alpha\beta\mu}$ temos que especificar as seis quantidades $W_{\alpha\beta}$ e sua derivadas temporais.

Os momenta canonicamente conjugados às variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ são dados por:

$$\Pi^{\alpha\beta\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_{\alpha\beta\mu}} = C^{\alpha\beta\mu 0} \qquad (1.3.10)$$

Como $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ é anti-simétrico em cada par de índices consequentemente teremos os seis vínculos primários abaixo:

$$\Pi^{\alpha\beta 0} = 0 \qquad (1.3.11)$$

Portanto para desenvolver o formalismo hamiltoniano é necessário decompor o tensor $A_{\alpha\beta\mu}$ nas suas partes irredutíveis e, calcular os momenta canonicamente conjugados correspondentes. Utilizaremos para isto, a decomposição padrão do espaço-tempo (E.T.) em um espaço 3-dimensional e tempo. As partes irredutíveis do tensor $A_{\alpha\beta\mu}$ são, neste caso, dadas por[4]:

$$\phi = A^{1}{}_{01} \tag{1.3.12a}$$

$$\xi_i = A^{0}{}_{i0} \tag{1.3.12b}$$

$$\gamma_i = A^{1}{}_{i1} \tag{1.3.12c}$$

$$\beta_{ij} = A_{ij0} \tag{1.3.12d}$$

$$\alpha_{ij} = A_{(i}{}^{0}{}_{j)} \tag{1.3.12e}$$

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ab(i}\varepsilon_{j)}{}^{ab} \tag{1.3.12f}$$

onde $$\Delta_{ijk} = A_{ijk} + \frac{1}{2}\gamma_{k[i}A^{0}{}_{j]0} \tag{1.3.13}$$

e ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita 3-dimensional.

Reescreveremos então a lagrangeana dada por (1.3.2) com o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ decomposto nas variáveis irredutíveis. Tem-se:

$$L = \frac{1}{8} C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2} C_{i0j0}C^{i0j0} + \frac{1}{2} C_{ijk0}C^{ijk0} + \frac{1}{8} C_{ijkl}C^{ijkl} \tag{1.3.14}$$

A parte sem traço de C_{ijkl} é dada por:

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl} - C_{i0k0}\eta_{jl} - C_{i0j0}\eta_{kl} - C_{j0k0}\eta_{il} - C_{j0l0}\eta_{ik} \tag{1.3.15}$$

então,

$$\frac{1}{8} C'_{ijkl} C'^{ijkl} = \frac{1}{8} C_{ijkl} C^{ijkl} - \frac{1}{2} C_{i0j0} C^{i0j0} \qquad (1.3.16)$$

O tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ para um número d arbitrário de dimensões, é definido como[4,22]:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} + \frac{1}{d-2} (A_{(\alpha\nu)}\gamma_{\beta\mu} + A_{(\beta\mu)}\gamma_{\alpha\nu} + $$

$$ - A_{(\alpha\mu)}\gamma_{\beta\nu} - A_{(\beta\nu)}\gamma_{\alpha\mu}) + \frac{4}{(d-2)(d-1)} A^{\sigma\lambda}{}_{\sigma,\lambda}\, \gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \qquad (1.3.17)$$

onde os índices variam de 0 a d-1. Então, C'_{ijkl} (para d=3) será dado por:

$$C'_{ijkl} = A_{ij[k,l]} + A_{kl[i,j]} + A_{(il)}\gamma_{jk} + A_{(jk)}\gamma_{il} - A_{(ik)}\gamma_{jl} + $$

$$ - A_{(jl)}\gamma_{ik} + 2A^{pq}{}_{p,q}\, \gamma_{ijkl} \qquad (1.3.18)$$

e devido as simetrias de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, C'_{ijkl} se anula identicamente.

Retornando à expressão da lagrangeana (1.3.14) e substituindo a equação (1.3.16), obtemos:

$$L = C_{i0j0} C^{i0j0} + \frac{1}{2} C_{ijk0} C^{ijk0} \qquad (1.3.19)$$

onde,

$$C_{i0j0} = \frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}_{ij} + \xi_{(i,j)} - \frac{1}{2}\gamma_{(i,j)} - \Delta_{(il,m}\varepsilon^{lm}{}_{j)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\gamma^{p}{}_{,p} - \xi^{p}{}_{,p} \right)\eta_{ij} \qquad (1.3.20)$$

e,

$$C_{ijk0} = \dot{\Delta}_{il}\varepsilon^{l}{}_{jk} + \frac{1}{2}\alpha_{k[i,j]} - \beta_{ij,k} + \frac{1}{2}\beta_{k[i,j]} +$$

$$+ \frac{1}{2}\eta_{kj}\left(\frac{3}{2}\beta_{i}{}^{l}{}_{,l} - \frac{1}{2}\alpha_{i}{}^{l}{}_{,l} \right) - \frac{1}{2}\eta_{ki}\left(\frac{3}{2}\beta_{j}{}^{l}{}_{,l} - \frac{1}{2}\alpha_{j}{}^{l}{}_{,l} \right)$$
$$(1.3.21)$$

Considerando que $A_{\alpha\beta\mu}$ tem traço nulo, temos:

$$\phi = A^{l}{}_{0l} = 0 \qquad (1.3.22)$$

$$\xi_i + \gamma_i = A^{0}{}_{i0} + A^{l}{}_{il} = 0 \qquad (1.3.23)$$

Sendo assim a expressão de C_{i0j0} dada em (3.20) fica:

$$C_{i0j0} = \frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}_{ij} + \frac{3}{2}\xi_{(i,j)} - \varepsilon^{lm}{}_{(j}\Delta_{i)l,m} \right) - \frac{1}{3}\xi^{p}{}_{,p}\eta_{ij}$$
$$(1.3.24)$$

Os momenta canonicamente conjugados a estas variáveis são respectivamente:

De ξ_i $\Rightarrow$ $N^{i} = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{\xi}_i} \simeq 0$ (1.3.25a)

De β_{ij} $\Rightarrow$ $M^{ij} = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{\beta}_{ij}} \simeq 0$ (1.3.25b)

$$\text{De } \alpha_{ij} \Rightarrow \Pi_{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}_{ij}} = C^{i0j0} = E_{ij} \qquad (1.3.25c)$$

$$\text{De } \Delta_{ij} \Rightarrow P_{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\Delta}_{ij}} = -\frac{1}{4} C^{ab(i}{}_{0}\varepsilon_{ab}{}^{j)} = B_{ij} \qquad (1.3.25d)$$

onde os vínculos dados por (1.3.25a e b), são os mesmos da eq.1.3.10.

Devemos notar que neste caso não se constata a analogia com a eletrodinâmica, pois naquela teoria, o momento canônico é dado unicamente pelo vetor de campo elétrico, enquanto que na teoria de Fierz, tanto a parte elétrica quanto a magnética do tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ aparecem na expressão do momento. Este fato reflete, o que verificaremos no capítulo 2, que esta teoria não representa apenas um campo de spin-2, mas sim dois campos de spin-2 com paridades e energias com sinais opostos.

Segundo Fierz para que as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ representem apenas um campo de spin-2, elas devem satisfazer a um vínculo adicional que pode ser dado por:

$$A^{(\overset{*}{\alpha}\beta\mu)}{}_{,\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{,\mu} + A_{\mu\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\beta} + A_{\beta\mu}{}^{\lambda}{}_{,\alpha} = 0 \qquad (1.3.26)$$

Por se tratar de uma condição adicional sobre os campos este termo deveria então, ser inserido na lagrangeana através de multiplicadores de lagrange, a fim de que conste na lagrangeana do sistema esta informação, assim como foi exibido no trabalho de N.P.Neto e M.Novello[4]. Nesta seção continuaremos com a descrição da dinâmica clássica de dois campos de spin-2, deixando para eliminar um desses campos quando fizermos a abordagem quântica do problema.

As equações (1.3.25.a e b) correspondem a 6 vínculos primários. Seguindo o procedimento de Dirac[13], devemos verificar se estes vínculos se conservam no tempo, isto é, temos que calcular os parênteses de Poisson destes vínculos com a hamiltoniana, que nos dará a equação de movimento destas quantidades[3]. Se estes parênteses de Poisson não forem identicamente nulos, nós encontraremos então vínculos secundários. Devemos a seguir verificar se estes novos vínculos se conservam no tempo e repetir sucessivamente este procedimento até que não apareçam mais vínculos.

A densidade hamiltoniana deste sistema é dada por:

$$H_T = N^i\dot{\xi}_i + M^{ij}\dot{\beta}_{ij} + \Pi^{ij}\dot{\alpha}_{ij} + P^{ij}\dot{\Delta}_{ij} - L \qquad (1.3.27)$$

onde L é dado por(1.3.19), utilizando (1.3.21) e (1.3.24). Então a hamiltoniana (1.3.27) se escreve:

$$\begin{aligned} H_T = {} & N^i\dot{\xi}_i + M^{ij}\dot{\beta}_{ij} + \Pi^{ij}\dot{\alpha}_{ij} + P^{ij}\dot{\Delta}_{ij} + \\ & - \frac{1}{4}\left\{ \dot{\alpha}_{ij} + \frac{3}{2}\xi_{(i,j)} - \varepsilon^{lm}{}_{(j}\Delta_{i)l,m} - \frac{1}{3}\xi^p{}_{,p}\eta_{ij} \right\}^2 + \\ & - \frac{1}{2}\left\{ \dot{\Delta}_{il}\varepsilon^l{}_{jk} + \frac{1}{2}\alpha_{k[i,j]} - \beta_{ij,k} + \frac{1}{2}\beta_{k[i,j]} + \right. \\ & + \frac{1}{2}\eta_{kj}\left(\frac{3}{2}\beta_i{}^l{}_{,l} - \frac{1}{2}\alpha_i{}^l{}_{,l}\right) \\ & \left. - \frac{1}{2}\eta_{ki}\left(\frac{3}{2}\beta_j{}^l{}_{,l} - \frac{1}{2}\alpha_j{}^l{}_{,l}\right) \right\}^2 \end{aligned} \qquad (1.3.27')$$

Sendo assim, a equação de movimento para o vínculo (1.3.25.a) é dada por:

$$\dot{N}^i = [N^i, H_T] =$$

$$= \int d^3y\, d^3z \left[\frac{\delta H_T(y)}{\delta N^1(z)} \frac{\delta N^i(x)}{\delta \xi^1(z)} - \frac{\delta N^i(x)}{\delta N^1(z)} \frac{\delta H_T(y)}{\delta \xi^1(z)} \right]$$

$$= - \int d^3y\, d^3z \quad \frac{\delta N^i(x)}{\delta N^1(z)} \frac{\delta H_T(y)}{\delta \xi^1(z)}$$

$$= - \iint d^3y\, d^3z \quad \delta^i_1\, \delta(x-z) \quad \frac{\delta [\pi^{pq}(y)\xi_{(p,q)}(y)]}{\delta \xi^1(z)}$$

$$= - \iint d^3y\, d^3z\; \delta(x-z) \; [-2\pi^{pq}(y)] \frac{\delta \xi_{p,q}(y)}{\delta \xi^1(z)}$$

$$= - \int d^3y\; 2\, \Pi^{pq}{}_{,q}(y)\; \delta^i_p\; \delta(y-x) \;=\; 2\, \Pi^{pq}{}_{,q}(x)$$

Conforme dito no parágrafo anterior $\dot{N}^i = 0$ gera os vínculos secundários

$$\Pi^{pq}{}_{,q}(x) = 0 \qquad (1.3.28)$$

Utilizamos o mesmo procedimento para calcular a equação de evolução temporal para a variável M^{ij}, obtendo que $\dot{M}^{ij} = 0$ gera os vínculos secundários abaixo:

$$P^{ij}{}_{,j} = 0 \qquad (1.3.29)$$

Os 12 vínculos (1.3.25.a e b), (1.3.28) e (1.3.29) são de primeira classe, isto é, os parênteses de Poisson de cada um deles com todos os outros são nulos. Estes são os vínculos geradores da transformação de calibre (1.3.6)[4].

Podemos verificar que não existem mais vínculos, isto é, os parênteses de Poisson entre estes vínculos e a hamiltoniana se anulam identicamente.

Vamos agora fixar a gauge impondo:

$$\xi_i = 0 \tag{1.3.30a}$$

$$\beta_{ij} = 0 \tag{1.3.30b}$$

$$\alpha^{ij}{}_{,j} = 0 \tag{1.3.30c}$$

$$\Delta^{ij}{}_{,j} = 0 \tag{1.3.30d}$$

que chamaremos, por razões óbvias, de gauge de radiação.

Os vínculos (1.3.25),(1.3.28),(1.3.29) e (1.3.30) passam a ser vínculos de segunda classe. Podemos usar os parênteses de Dirac para torná-los igualdades fortes e assim eliminar graus de liberdade indesejados.

As equações (1.3.9) nesta gauge tornam-se

$$\Box\, \alpha_{ij} = 0 \tag{1.3.31a}$$

$$\Box\, \Delta_{ij} = 0 \tag{1.3.31b}$$

e a hamiltoniana será reduzida a:

$$H= \int d^3x \left(\frac{1}{4}\, \dot{\alpha}_{ij}\dot{\alpha}^{ij} - \frac{1}{4}\alpha_{ij,m}\alpha^{ij,m} - \frac{1}{4}\dot{\Delta}_{ij}\dot{\Delta}^{ij} + \frac{1}{4}\Delta_{ij,m}\Delta^{ij,m}\right) \tag{1.3.32}$$

Afim de exibir o fato desta hamiltoniana conter a dinâmica de dois campos de spin-2, vamos expandir as variáveis $\alpha_{ij}(x)$ e $\Delta_{ij}(x)$ em ondas planas:

$$\alpha_{ij} = Q_{ij}\exp\left(-X_\mu K^\mu\right) + h.c. \tag{1.3.33a}$$

$$\Delta_{ij} = R_{ij}\exp\left(-X_\mu K^\mu\right) + h.c. \tag{1.3.33b}$$

Verificamos que estas expansões satisfazem a equação de movimento para α_{ij} e Δ_{ij} se $K_\mu K^\mu = 0$ e ademais as condições (1.3.29.c e d) se:

$$Q_{ij}K^i = 0 \tag{1.3.34a}$$
$$R_{ij}K^i = 0 \tag{1.3.34b}$$

Obviamente, os tensores Q_{ij} e R_{ij} devem possuir as mesmas simetrias de α_{ij} e Δ_{ij} respectivamente.

Supondo que a frente de onda esteja se propagando na direção x^3, obtemos de (1.3.33) que:

$$Q_{i3} = 0 \tag{1.3.35a}$$
$$R_{i3} = 0 \tag{1.3.35b}$$

Consequentemente, devido às simetrias de R_{ij} e Q_{ij}, e as equações (1.3.34.a e b), as únicas componentes independentes de Q_{ij} e R_{ij} são Q_{11}, Q_{21}, R_{11}, R_{21}.

Definiremos então as quantidades $Q_\pm$ e $R_\pm$ tal que:

$$Q_{\pm} = Q_{11} \mp iQ_{21} \qquad (1.3.36a)$$

$$R_{\pm} = R_{11} \mp iR_{21} \qquad (1.3.36b)$$

Se fizermos agora uma tranformação correspondendo a uma rotação de um angulo arbitrário θ, em torno do eixo x^3, segue que as quantidades definidas em (1.3.36) se transformam da seguinte forma:

$$Q'_{\pm} = e^{\pm 2i\theta}\, Q_{\pm} \qquad (1.3.37a)$$

$$R'_{\pm} = e^{\pm 2i\theta}\, R_{\pm} \qquad (1.3.37b)$$

o que mostra que podemos decompor a onda em suas partes irredutíveis $Q_{\pm}$ e $R_{\pm}$, cada uma contendo helicidade ± 2. Detalharemos mais esta questão quando calcularmos o operador de spin, na abordagem quântica.

Ainda que se possa obter através deste procedimento os verdadeiros graus de liberdade, perdemos a manifesta invariancia de Lorentz da teoria.

Continuando a utilizar a analogia desta teoria com a eletrodinâmica, podemos, assim como o fez Fermi, eliminar esta dificuldade, quebrando a invariancia de gauge da teoria, introduzindo um termo de divergência do potencial na lagrangeana.

4- TEORIA "TIPO FERMI-GUPTA-BLEULER" PARA AS VARIÁVEIS DE FIERZ

Na eletrodinâmica de Maxwell nos deparamos com uma problemática análoga a examinada na seção anterior. A teoria é invariante sob uma certa gauge, e esta simetria está atrelada a existência de vínculos. Com o propósito de obter uma teoria sem vínculos e manifestamente covariante, Fermi[12] propôs uma nova lagrangeana. Nesta nova teoria a invariância de gauge é quebrada através da introdução de um termo de divergência do potencial na lagrangeana, isto é,

$$L_{E-F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (A^{\mu}{}_{,\mu})^2 \qquad (1.4.1)$$

A equação de Euler-Lagrange nos dá:

$$\Box A^{\mu} = 0 \qquad (1.4.2)$$

Seguindo a analogia que vimos traçando entre a eletrodinâmica e a teoria para campos de spin-2 em termo das variáveis de Fierz, vamos supor uma lagrangeana tipo Fermi para as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$, como segue:

$$L_2 = \frac{1}{8} C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} - a\,(A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\mu})^2 \qquad (1.4.1)$$

Deixamos a constante "a" a ser fixada sob a condição de obtermos diretamente da variação de $A_{\alpha\beta\mu}$ a equação de movimento,

$$\Box A_{\alpha\beta\mu} = 0 \tag{1.4.3}$$

assim como (1.4.2). Verificamos que o valor de "a" deve ser $-\frac{3}{4}$.

Escrevendo $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ em termo das variáveis de Fierz e utilizando as propriedades algébricas dadas por (1.2.1), a lagrangeana (1.4.1) reduz-se a forma:

$$L_2 = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta\mu,\lambda})^2 + \text{div.} \tag{1.4.4}$$

a qual não possui vínculos, como observaremos no formalismo hamiltoniano a seguir.

- Formalismo Hamiltoniano

O momento canonicamente conjugado à $A_{\alpha\beta\mu}$ nesta teoria é dado por:

$$\Pi_{\alpha\beta\mu} = \frac{\delta L_2}{\delta \dot{A}_{\alpha\beta\mu}} = \dot{A}_{\alpha\beta\mu} \tag{1.4.5}$$

Resultando na hamiltoniana:

$$H = \int d^3x \left[\Pi_{\alpha\beta\mu}\dot{A}^{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta\mu,\lambda})^2 \right]$$

$$= \int d^3 x\left[\frac{1}{2} \dot{A}_{\alpha\beta\mu}\dot{A}^{\alpha\beta\mu} - \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\mu,k}A^{\alpha\beta\mu,k} \right] \tag{1.4.6}$$

Na versão quântica destas duas teorias (capítulo 2), constataremos que a analogia com a eletrodinâmica será mantida, enquanto estivermos examinando dois ao invés de um único campo de spin-2. Para eliminarmos um destes campos nós iremos verificar que será necessário impormos condições extras, o que faremos agindo sobre os estados quânticos.

5- VARIÁVEIS DE FIERZ E POTENCIAL DE LANCZOS

Finalizando a análise clássica desta teoria, é talvez interessante fazermos umsumário da formulação de Jordan-Lichnerowicz[10,11] para a TRG. A base desta teoria são as identidades de Bianchi[21] para a geometria Riemanniana. Esta identidade pode ser escrita na forma:

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = R^{\mu[\alpha;\beta]} \tag{1.5.1}$$

ou usando o tensor de Weyl,

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} R^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{1}{12} g^{\mu[\alpha}R^{,\beta]} \tag{1.5.2}$$

O tensor de Weyl é definido como a parte sem traço do tensor de curvatura, isto é,

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + \frac{1}{2} R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}$$
$$\frac{-1}{6} Rg_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1.5.3}$$

A idéia de Jordan e Lichnerowicz consistia em procurar um novo conjunto de equações, similar à (1.5.2), cujo lado direito da equação fosse identificado a uma corrente, ou seja,

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = J^{\alpha\beta\mu} \tag{1.5.4}$$

Para que haja um contato desta teoria com a teoria da relatividade geral de Einstein, esta corrente deve ser construida apenas em termo do tensor momento energia $T_{\mu\nu}$.

Em 1962, foi demonstrado por Lanczos[8], que o tensor de Weyl admite uma representação em termo de um tensor de 3ª ordem $L_{\alpha\beta\mu}$ dada por:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = L_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + L_{\mu\nu[\alpha,\beta]} + \frac{1}{2} L_{(\alpha\nu)} g_{\beta\mu} + \frac{1}{2} L_{(\beta\mu)} g_{\alpha\nu} +$$

$$- \frac{1}{2} L_{(\alpha\mu)} g_{\beta\nu} - \frac{1}{2} L_{(\beta\nu)} g_{\alpha\mu} + \frac{2}{3} L^{\lambda\sigma}{}_{\lambda,\sigma}\, g_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{1.5.5}$$

onde,

$$L_{\alpha\beta\mu} = - L_{\beta\alpha\mu} \tag{1.5.6a}$$

e,

$$L_{\alpha\beta\mu} + L_{\mu\alpha\beta} + L_{\beta\mu\alpha} = 0 \tag{1.5.6b}$$

Na aproximação fraca, é possível encontrar uma relação entre o potencial de Lanczos e a perturbação da métrica. Sendo a métrica dada por:

$$g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\, h_{\mu\nu} \tag{1.5.7}$$

O tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, são em primeira ordem escritos como[23]:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \cong \frac{\varepsilon}{2} (h_{\alpha\mu,\beta,\nu} + h_{\beta\nu,\alpha,\mu} - h_{\alpha\nu,\beta,\mu} - h_{\mu\beta,\alpha,\nu}) \quad (1.5.8)$$

$$R_{\alpha\mu} \cong \frac{\varepsilon}{2} (\Box h_{\alpha\mu} + h_{,\alpha,\mu} - h_{(\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{,\mu),\varepsilon}) \quad (1.5.9)$$

$$R \cong \varepsilon\ (\Box h - h^{\varepsilon\sigma}{}_{,\varepsilon,\sigma}) \quad (1.5.10)$$

Inserindo estes tensores na equação (1.5.3), e comparando com (1.5.5), obtemos que na aproximação fraca, o potencial de Lanczos se escreve:

$$L_{\alpha\beta\mu} \cong \frac{\varepsilon}{4} h_{\mu[\alpha,\beta]} \quad (1.5.11)$$

Identificando $\varphi_{\mu\nu}$ com $h_{\mu\nu}$, podemos verificar que a variável de Fierz é a aproximação fraca do potencial de Lanczos e o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ a aproximação fraca do tensor de Weyl. Assim sendo a equação (1.3.3) pode ser entendida como a equação de Jordan-Lichnerowicz na aproximação fraca.

No capítulo 3, discorreremos um pouco sobre esta identificação para campos fortes.

Passemos agora à formulação quântica das teorias desenvolvidas nas seções 3 e 4.

CAPÍTULO 2

QUANTIZAÇÃO DE CAMPOS DE SPIN-2 EM TERMO DAS VARIÁVEIS DE FIERZ

Nós iremos aqui passar à quantização das teorias expostas no capítulo anterior[24].

Começaremos desenvolvendo o formalismo canônico para a lagrangeana (1.7), i.e.,

$$L_1 = \frac{1}{8} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Vimos que, na gauge de radiação, as quantidades dinâmicas de $A_{\alpha\beta\mu}$ são representadas por dois tensores simétricos de 2ª ordem α_{ij} e Δ_{ij}, cujos momentos canonicamente conjugados são, respectivamente, (cf.1.3.25c,d)

$$E^{ij} = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^{ij} - \frac{1}{4} \Delta_l{}^{(j}{}_{,m} \varepsilon^{i)lm} \qquad (2.1a)$$

$$B^{ij} = \frac{1}{2} \dot{\Delta}^{ij} - \frac{1}{4} \alpha_l{}^{(j}{}_{,m} \varepsilon^{i)lm} \qquad (2.1b)$$

A expansão em série de Fourier destas variáveis pode ser escrida da forma:

$$\alpha_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{5} \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} (e^{\lambda}_{ij}\, a_{\lambda}(k)\, e^{-ikx} + e^{\lambda}_{ij}\, a^{+}_{\lambda}(k)\, e^{ikx})$$

(2.2a)

$$\Delta_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{5} \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} (e^{\lambda}_{ij}\, b_{\lambda}(k)\, e^{-ikx} + e^{\lambda}_{ij}\, b^{+}_{\lambda}(k)\, e^{ikx})$$

(2.2a)

onde, $a_{\lambda}(k)$ e $b_{\lambda}(k)$ são os operadores de aniquilação de partículas, e $a^{+}_{\lambda}(k)$ e $b^{+}_{\lambda}(k)$ os operadores de criação de partículas.

Os tensores de polarização e^{λ}_{ij}, possuem as mesmas simetrias de α_{ij} e Δ_{ij} , e constituem uma base para estes tri-tensores satisfazendo as seguintes condições:

$$\sum_{i,j} e^{\lambda}_{ij} e^{\lambda'}_{ij} = \delta^{\lambda\lambda'} \qquad (2.3a)$$

$$\sum_{\lambda} e^{\lambda}_{ij} e^{\lambda}_{kl} = \delta^{k}_{(i}\delta^{l}_{j)} \qquad (2.3b)$$

No referencial em que $k^{\mu} = (k,0,0,k)$, pode-se escrever os tensores da base como:

$$e^{1}_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; (\delta^{1}_{i}\delta^{1}_{j} - \delta^{2}_{i}\delta^{2}_{j}) \qquad (2.4a)$$

$$e^{2}_{ij} = \frac{\sqrt{6}}{2} \; (\delta^{3}_{i}\delta^{3}_{j} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}) \qquad (2.4b)$$

$$e^{3}_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; \delta^{1}_{(i}\delta^{2}_{j)} \qquad (2.4c)$$

$$e^4_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; \delta^2_{(i}\delta^3_{j)} \tag{2.4d}$$

$$e^5_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; \delta^3_{(i}\delta^1_{j)} \tag{2.4e}$$

Substituindo as expansões de α_{ij} e Δ_{ij} , dadas em (2.1), e suas derivadas temporais na hamiltoniana do sistema, indicada em (1.3.32), obtemos:

$$H_1 = \sum_{\lambda',\lambda=1}^{5} \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} \; k_0 \Big\{ \left(a_\lambda(k) a^+_{\lambda'}(k) + a^+_\lambda(k) a_{\lambda'}(k) \right) + \left(- b_\lambda(k) b^+_{\lambda'}(k) - b^+_\lambda(k) b_{\lambda'}(k) \right) \Big\} \tag{2.5}$$

Reescrever a hamiltoniana acima em termo dos operadores nùmero de partículas, requer a reordenação dos operadores de aniquilação e criação. Para isto necessita-se das relações de comutação entre eles que iremos obter a seguir.

As relações de comutação entre as variáveis canônicas e seus momenta são[4],

$$\left[\alpha_{ij}(x), E^{lm}(y)\right] = -i\left[\frac{1}{2}\,\delta^l_{(i}\delta^m_{j)} - \frac{1}{3}\,\gamma^{lm}\gamma_{ij} \right] \delta^3(x-y) \tag{2.6a}$$

$$\left[\Delta_{ij}(x), B^{lm}(y)\right] = -i\left[\frac{1}{2}\,\delta^l_{(i}\delta^m_{j)} - \frac{1}{3}\,\gamma^{lm}\gamma_{ij} \right] \delta^3(x-y) \tag{2.6b}$$

Assim sendo, as igualdades (2.1) e (2.6) nos dão que:

$$\left[\alpha_{ij}(x), \dot{\alpha}^{lm}(y)\right] = -i\left[\gamma_{il}\gamma_{jm} + \gamma_{im}\gamma_{jl} - \frac{2}{3}\,\gamma_{lm}\gamma_{ij} \right] \delta^3(x-y) \tag{2.7a}$$

$$\left[\alpha_{ij}(x),\dot{A}^{lm}(y)\right] = i\left[\gamma_{il}\gamma_{jm}+\gamma_{im}\gamma_{jl}-\frac{2}{3}\gamma_{lm}\gamma_{ij}\right]\delta^3(x-y) \tag{2.7b}$$

De posse da relação (2.7a), demonstraremos a relação de comutação entre $a_\lambda(k)$ e $a^+_{\lambda'}(k')$.

Os operadores $a_\lambda(k)$ e $a^+_\lambda(k)$, são os coeficientes de Fourier da expansão (2.2a) e escrevêmo-los da seguinte forma:

$$a_\lambda(k) = \delta_{\lambda\lambda'}\int d^3x\ [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}\ e^{ikx}\ i\partial_0(e^{\lambda'}_{ij}\ \alpha^{ij}) \tag{2.8a}$$

$$a^+_\rho(k') = \delta_{\rho\rho'}\int d^3x\ [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}\ e^{-ik'x}\ i\partial_0(e^{\rho'}_{lm}\ \alpha^{lm}) \tag{2.8b}$$

Usando (2.8), podemos calcular o comutador:

$$[a_\lambda(k),a^+_\rho(k')] = -\ \delta^{\lambda\lambda'}\delta^{\rho\rho'}\int d^3x\ d^3y\ [(2\pi)^3 2k_0]*$$

$$\left[\ e^{ikx}\ i\partial_0 e^{\lambda'}_{ij}\ \alpha^{ij}(x),\ e^{-ik'x}\ i\partial_0 e^{\rho'}_{lm}\ \alpha^{lm}(y)\right] =$$

$$= -\ \delta^{\lambda\lambda'}\delta^{\rho\rho'}\int d^3x\ d^3y\ [(2\pi)^3 2k_0]\left\{\left[e^{ikx}\ ie^{\lambda'}_{ij}\ \dot{\alpha}^{ij}(x),\right.\right.$$

$$\left.\left.(-k_0)e^{-ik'x}e^{\rho'}_{lm}\alpha^{lm}(y)\right]+\left[k_0 e^{ikx}\ ie^{\lambda'}_{ij}\ \alpha^{ij}(x),ie^{-ik'x}e^{\rho'}_{lm}\dot{\alpha}^{lm}(y)\right]\right\}$$

então,

$$[a_\lambda(k),a^+_\rho(k')] = -\ i\delta^{\lambda\lambda'}\delta^{\rho\rho'}\int d^3x\ d^3y\ (M+N)\ [(2\pi)^3 2k_0]$$

sendo,

$$M = e^{ikx}e^{-ik'y}\, e^{\lambda'}_{ij}\, e^{\rho'}_{lm}\, [\dot{\alpha}_{ij}(x),\alpha_{lm}(y)]\ (-k'_0)$$

$$N = e^{ikx}e^{-ik'y}\, e^{\lambda'}_{ij}\, e^{\rho'}_{lm}\, [\alpha_{ij}(x),\dot{\alpha}_{lm}(y)]k_0$$

Inserindo (2.7a) em M e N , obtemos:

$$M = -i\ e^{ikx}e^{-ik'y}\ \delta^{\lambda'\rho'}k'_0\delta^3(x-y)$$

$$N = -i\ e^{ikx}e^{-ik'y}\ \delta^{\lambda'\rho'}k_0\delta^3(x-y)$$

Substituindo M e N na expressão do comutador, temos:

$$[a_\lambda(k),a^+_\rho(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\rho\rho'}\delta^{\lambda'\rho'}\int d^3x\ d^3y\ [(2\pi)^3 2k_0]e^{ikx}e^{-ik'y}$$

$$\delta^3(x-y)\ \ (k'_0 + k_0)$$

$$[a_\lambda(k),a^+_\rho(k')] = \delta_{\lambda\rho}\int d^3x\ [(2\pi)^3 2k_0]e^{i(k-k')X}\ \ (k'_0 + k_0)$$

como,

$$\int d^3x\ e^{i(k-k')X} = \delta^3(x-y)$$

a relação de comutação acima torna-se:

$$[a_\lambda(k),a^+_\rho(k')] = 2\ \delta_{\lambda\rho}\ (2\pi)^3\ 2k_0^2\ \delta^3(k-k') \tag{2.9a}$$

Utilizando o mesmo procedimento, podemos verificar que:

$$[b_\lambda(k), b_\rho^+(k')] = -2\,\delta_{\lambda\rho}\,(2\pi)^3\,2k_0^2\,\delta^3(k-k') \qquad (2.9b)$$

A presença do fator 2 nas relações de comutação (2.9a e b), nos induz a redefinir os operadores (normalizado), como:

$$a'_\lambda(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a_\lambda(k) \qquad (2.10a)$$

$$b'_\lambda(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,b_\lambda(k) \qquad (2.10b)$$

Utilizando (2.9) e (2.10), podemos reescrever a hamiltoniana (2.5), da seguinte forma:

$$H = \sum_{\lambda=1}^{5}\int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}}\,k_0(a'^+_\lambda(k)\;a'_\lambda(k) - b'^+_\lambda(k)b'_\lambda(k)) \qquad (2.11)$$

$$H = \sum_{\lambda=1}^{5}\int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}}\,k_0(A_\lambda - B_\lambda) \qquad (2.12)$$

onde,

$$A_\lambda = a'^+_\lambda a'_\lambda \quad \text{e} \quad B_\lambda = b'^+_\lambda b'_\lambda$$

são os operadores número de partículas.

Fixando a gauge (1.40) verifica-se que:

$$\alpha^{ij}{}_{,j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{ij}_\lambda\,k_j\,a_\lambda(k) = 0 \qquad (2.13a)$$

$$\Delta^{ij}{}_{,j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{ij}_\lambda\,k_j\,b_\lambda(k) = 0 \qquad (2.13b)$$

mas,

$$k^{\mu} = (k,0,0,k)$$

então, (2.13) nos dá:

$$e_{\lambda}^{13}\ k_3 a'_{\lambda}(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad a'_5 = a'_4 = a'_2 = 0 \tag{2.14a}$$

$$e_{\lambda}^{13}\ k_3 b'_{\lambda}(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b'_5 = b'_4 = b'_2 = 0 \tag{2.14b}$$

o que reduz a hamiltoniana (2.11) a:

$$H_1 = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}}\, k_0 \left(A_1 + A_3 - B_1 - B_3\right) \tag{2.15}$$

Vamos agora calcular o tensor de spin deste sistema. Classicamente, o momento angular de spin é definido como (apêndice A):

$$S^{\lambda}_{\rho\sigma} = \frac{\partial L}{\partial A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda}}\ F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} . \tag{2.16}$$

Para a lagrangeana deste sistema temos:

$$\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda}} = \frac{1}{4}\, C_{\rho\sigma\varepsilon\nu}\ \frac{\partial C^{\rho\sigma\varepsilon\nu}}{\partial A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda}} \tag{2.17}$$

e,

$$F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} = A_{\sigma}{}^{\beta\mu}\ \delta^{\alpha}_{\rho} + A^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\mu}\ \delta^{\beta}_{\rho} + A^{\beta\alpha}{}_{\rho}\ \delta^{\mu}_{\sigma} - A_{\rho}{}^{\beta\mu}\ \delta^{\alpha}_{\sigma} - A^{\alpha}{}_{\rho}{}^{\mu}\ \delta^{\beta}_{\sigma} - A^{\beta\alpha}{}_{\sigma}\ \delta^{\mu}_{\rho} \tag{2.18}$$

Assim sendo (2.16) se escreve:

$$S^{\lambda}_{\rho\sigma} = 2C_{\rho\beta\mu}{}^{\lambda}\, \lambda_{\sigma}{}^{\beta\mu} - 2C_{\sigma\beta\mu}{}^{\lambda}\, \lambda_{\rho}{}^{\beta\mu} + C_{\alpha\beta\sigma}{}^{\lambda}\, \lambda^{\beta\alpha}{}_{\rho} - C_{\alpha\beta\rho}{}^{\lambda}\, \lambda^{\beta\alpha}{}_{\sigma} \tag{2.19}$$

O momento angular de spin, na direção ortogonal ao plano definido por $\rho\sigma$, é dado por:

$$S_{\rho\sigma} = \int d^3x\, S^0_{\rho\sigma} \tag{2.20}$$

Queremos aqui calcular o momento angular de spin na direção x^3, isto é, S_{12}. Para isto necessitamos apenas das componentes S^0_{ij}, que será dada a partir de (2.19) como:

$$S^0_{ij} = -2C_{[i0i0}A_{j]}{}^{0i} - 2C_{[iik0}A_{j]}{}^{ik} - 2C_{i0[i0}A^{i0}{}_{j]} - C_{ik[i0}A^{ik}{}_{j]} \tag{2.21}$$

Usando (1.3.21) e (1.3.24) temos:

$$C_{i0i0}A_{j}{}^{0k} = \left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}_{ii} - \frac{1}{4}\Delta_{p}{}^{(i}{}_{,q}\varepsilon^{j)pq} \right) \frac{1}{2}\alpha_{j}{}^{i} \tag{2.22a}$$

$$C_{iik0}A^{jik} = \left(-\dot{\Delta}_{[ip}\,\varepsilon^{p}{}_{i]k} - \frac{1}{2}\alpha_{k[i,i]} \right) 2\Delta^{[j}{}_{q}\varepsilon^{qi]k} \tag{2.22b}$$

Substituindo a expansão (2.2) nas expressões acima, podemos verificar que:

$$\Delta_{p}{}^{(i}{}_{,q}\varepsilon^{j)pq}\,\alpha_{j}{}^{i} = 0 \tag{2.23a}$$

$$\alpha_{k[i,j]}\,\Delta^{ij}{}_{q}\,\epsilon^{qjk} = 0 \qquad (2.23b)$$

Sendo assim (2.21) reduz-se

$$S^{0}_{ij} = -\,\dot{\alpha}_{[i1}\alpha_{j]}{}^{1} + \dot{\Delta}_{[i1}\Delta^{1}{}_{j]} \qquad (2.24)$$

isto implica,

$$S_{ij} = \int d^{3}x \; (\, -\,\dot{\alpha}_{[i1}\alpha_{j]}{}^{1} + \dot{\Delta}_{[i1}\Delta^{1}{}_{j]} \,) \qquad (2.25)$$

Em função dos operadores de aniquilação e criação (2.25), se escreve:

$$S_{ij} = -\frac{i}{2} \int d^{3}k \; e^{\lambda}_{[i1} e^{\lambda' 1}_{j]} \left\{ (a_{\lambda} a^{+}_{\lambda'} - a^{+}_{\lambda} a_{\lambda'}) - (b_{\lambda} b^{+}_{\lambda'} - b^{+}_{\lambda} b_{\lambda'}) \right\} \qquad (2.26)$$

Usando os tensores de polarização definidos em (2.4), e lembrando que os únicos operadores não nulos são, a_1, a_3, b_1, b_3 e seus conjugados hermitianos, podemos verificar que apenas os seguintes termos contribuem para o operador S_{12}.

$$e^{(1)}_{11} e^{(3)1}{}_{2} \left\{ (a_1 a^{+}_{3} - a^{+}_{1} a_3) - (b_1 b^{+}_{3} - b^{+}_{1} b_3) \right\} \qquad (2.27a)$$

$$e^{(3)}_{12} e^{(1)2}{}_{2} \left\{ (a_3 a^{+}_{1} - a^{+}_{3} a_1) - (b_3 b^{+}_{1} - b^{+}_{3} b_1) \right\} \qquad (2.27b)$$

$$e^{(3)}_{21} e^{(1)1}{}_{1} \left\{ (a_3 a^{+}_{1} - a^{+}_{3} a_1) - (b_3 b^{+}_{1} - b^{+}_{3} b_1) \right\} \qquad (2.27c)$$

$$e^{(1)}_{22}e^{(3)2}{}_{1}\left\{ (a_1a_3^+ - a_1^+a_3) - (b_1b_3^+ - b_1^+b_3) \right\} \qquad (2.27d)$$

mas,

$$e^{(1)}_{11}e^{(3)1}{}_{2} = - e^{(3)}_{21}e^{(1)1}{}_{1} = -\frac{1}{2} \qquad (2.28a)$$

$$e^{(3)}_{12}e^{(1)2}{}_{2} = - e^{(1)}_{22}e^{(3)2}{}_{1} = \frac{1}{2} \qquad (2.28b)$$

Utilizando as relações de comutação (2.9) e a redefinição dos operadores de aniquilaçãos e criação dada em (2.10), obtemos que o operador de spin na direção x^3 é dado por:

$$S_{12} = 2i\int d^3k \left\{ (a_1'a_3'^+ - a_1'^+a_3') - (b_1'b_3'^+ - b_1'^+b_3') \right\} \qquad (2.29)$$

Vamos definir,

$$a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_1 \mp ia_3) \qquad (2.30a)$$

$$b_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(b_1 \mp ib_3) \qquad (2.30b)$$

de tal modo que:

$$[a_+^+, a_+] = [a_-^+, a_-] = 1 \qquad (2.31)$$

Em função desta nova redefinição, podemos reescrever o operador de spin (2.29) como:

$$S_{12} = 2\int d^3k \left\{ (a_+^+a_+ - a_-^+a_-) + (b_+^+b_+ - b_-^+b_-) \right\} \qquad (2.32)$$

isto é,

$$<+|S_{12}|+> = 2 \qquad (2.33a)$$

$$<-|S_{12}|-> = 2 \qquad (2.33b)$$

Conforme citamos no capítulo anterior, o sistema representado pela hamiltoniana (2.15), corresponde à dois campos de spin-2 independentes. Posteriormente, examinaremos a possibilidade e/ou necessidade de eliminarmos um destes campos.

Consideremos agora a lagrangeana (1.4.4), "tipo Fermi". A expansão em série de Fourier de $A_{\alpha\beta\mu}$ é dada por:

$$A_{\alpha\beta\mu} = \sum_{n=1}^{16}\int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} e^n_{\alpha\beta\mu}\left[a_n(k)e^{-ikx} + a_n^+(k)e^{ikx} \right] \qquad (2.34)$$

onde o tensor de polarização $e^n_{\alpha\beta\mu}$ possue todas as simetrias de $A_{\alpha\beta\mu}$ e constitui uma base para esta variável. Assim, $e^n_{\alpha\beta\mu}$ satisfaz as seguinte condições:

$$e^n_{\alpha\beta\mu}e^{n'}_{\alpha\beta\mu} = g^{nn'} \qquad (2.35)$$

sendo,

$$g^{nn'} = \begin{cases} -1 & , \quad \text{para } n = 1,\ldots,8 \\ +1 & , \quad \text{para } n = 9,\ldots,16 \\ 0 & , \quad \text{para } n \neq n' \end{cases} \tag{2.36}$$

No referencial em que $k^{\mu} = (k,0,0,k)$, nós escolhemos convenientemente a base:

$$e^{(i)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\delta^0_{[\alpha} \, \delta^i_{\beta]} \delta^0_{\mu} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu[\alpha} \delta^i_{\beta]} \right] \quad , \; i = 1,2,3 \tag{2.37a}$$

$$e^{(4)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \left[\delta^2_{[\alpha} \delta^1_{\beta]} \delta^2_{\mu} - \delta^3_{[\alpha} \delta^1_{\beta]} \delta^3_{\mu} \right] \tag{2.37b}$$

$$e^{(5)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \left[\delta^3_{[\alpha} \delta^2_{\beta]} \delta^3_{\mu} - \delta^1_{[\alpha} \delta^2_{\beta]} \delta^1_{\mu} \right] \tag{2.37c}$$

$$e^{(6)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \left[\delta^1_{[\alpha} \delta^3_{\beta]} \delta^1_{\mu} - \delta^2_{[\alpha} \delta^3_{\beta]} \delta^2_{\mu} \right] \tag{2.37d}$$

$$e^{(7)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\delta^1_{[\alpha} \, \delta^2_{\beta]} \delta^3_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^1_{[\mu} \delta^2_{\alpha]} \delta^3_{\beta} + \frac{1}{2} \delta^1_{[\mu} \delta^2_{\beta]} \delta^3_{\alpha} \right] \tag{2.37e}$$

$$e^{(8)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \left[\delta^2_{[\alpha} \delta^3_{\beta]} \delta^1_{\mu} - \delta^3_{[\alpha} \delta^1_{\beta]} \delta^2_{\mu} \right] \tag{2.37f}$$

$$e^{(9)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\delta^1_{[\alpha} \, \delta^2_{\beta]} \delta^0_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^1_{[\mu} \delta^2_{\alpha]} \delta^0_{\beta} + \frac{1}{2} \delta^1_{[\mu} \delta^2_{\beta]} \delta^0_{\alpha} \right] \tag{2.37g}$$

$$e^{(10)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\delta^2_{[\alpha} \, \delta^3_{\beta]} \delta^0_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^2_{[\mu} \delta^3_{\alpha]} \delta^0_{\beta} + \frac{1}{2} \delta^2_{[\mu} \delta^3_{\beta]} \delta^0_{\alpha} \right] \tag{2.37h}$$

$$e^{(11)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\delta^3_{[\alpha} \, \delta^1_{\beta]} \delta^0_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^3_{[\mu} \delta^1_{\alpha]} \delta^0_{\beta} + \frac{1}{2} \delta^3_{[\mu} \delta^1_{\beta]} \delta^0_{\alpha} \right] \tag{2.37i}$$

$$e^{(12)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left[\delta^0_{[\alpha}\delta^1_{\beta]}\delta^1_\mu - \delta^0_{[\alpha}\delta^1_{\beta]}\delta^1_\mu\right] \tag{2.37j}$$

$$e^{(13)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\delta^0_{[\alpha}\,\delta^3_{\beta]}\delta^3_\mu - \frac{1}{3}\gamma_{\mu[\alpha}\delta^0_{\beta]}\right] \tag{2.37k}$$

$$e^{(14)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left[\delta^0_{[\alpha}\delta^1_{\beta]}\delta^2_\mu - \delta^0_{[\alpha}\delta^2_{\beta]}\delta^1_\mu\right] \tag{2.37l}$$

$$e^{(15)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left[\delta^0_{[\alpha}\delta^2_{\beta]}\delta^3_\mu - \delta^0_{[\alpha}\delta^3_{\beta]}\delta^2_\mu\right] \tag{2.37m}$$

$$e^{(16)}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left[\delta^0_{(\alpha}\delta^3_{\beta]}\delta^1_\mu - \delta^0_{[\alpha}\delta^1_{\beta]}\delta^3_\mu\right] \tag{2.37n}$$

A hamiltoniana deste sistema em termo dos operadores de aniquilação e criação se escreve como:

$$H_2 = \sum_{n=1}^{16}\int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} \{a_n a_n^+ , a_n^+ a_n\} \tag{2.38}$$

onde, $\{p,q\}$ significa o anti-comutador entre p e q.

Portanto, assim como na teoria anterior, necessitamos calcular a relação de comutação entre os operadores a_n e a_n^+, para que possamos reescrever a hamiltoniana (2.38) em função dos operadores número de partículas.

A relação de comutação canônica das variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ num dado tempo $x_0 = y_0$, é dada por:

$$\left[A_{\alpha\beta\mu}(x), \Pi^{\rho\sigma\lambda}(y)\right] = \frac{1}{3}\left(\delta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}\delta^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda\rho}_{\alpha\beta}\delta^{\sigma}_{\mu} + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\delta^{\sigma\lambda}_{\alpha\beta}\delta^{\rho}_{\mu} - \delta^{(\sigma}_{(\beta}\gamma_{\alpha)\mu}\gamma^{\rho)\lambda}\right) \delta^3(x-y) \tag{2.39}$$

onde,

$$\delta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} = \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\alpha}$$

Da mesma forma como fizemos a demonstração da relação (2.9a), podemos verificar, usando (2.39) e as equações para os coeficientes de Fourier generalizadas, a saber,

$$a_n(k) = g_{nn'} \int d^3x \, [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} \, e^{ikx} \, i\partial_0(e^{n}_{\alpha\beta\mu} \, A^{\alpha\beta\mu}) \tag{2.40a}$$

$$a^+_p(k') = g_{pp'} \int d^3x \, [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2} \, e^{-ikx} \, i\partial_0(e^{p}_{\alpha\beta\mu} A^{\alpha\beta\mu}) \tag{2.40b}$$

que a relação de comutação entre os operadores de aniquilação e criação é dada por:

$$[a_n(k), a^+_p(k')] = i g_{np}(2\pi)^3 2k_0 \delta^3(k-k') \tag{2.41}$$

Assim sendo a hamiltoniana (2.38), fica:

$$H = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} \left\{ \sum_{n=1}^{8} (-N_n) + \sum_{n=9}^{16} N_n \right\} \tag{2.42}$$

onde,

$$N_n = a^+_n(k) a_n(k) \tag{2.43}$$

é o operador número de partículas.

Portanto este sistema possui 16 tipos de quanta que correspondem aos 16 graus de liberdade de $\Lambda_{\alpha\beta\mu}$.

Seguindo o procedimento análogo ao utilizado na eletrodinâmica de Fermi para eliminar os graus de liberdade espúrios da teoria, vamos impor condições subsidiárias, não nos campos, mas sim sobre os estados quânticos $|\psi\rangle$.

Decomporemos os estados quânticos $|\psi\rangle$ num produto $|\psi_l\rangle \wedge |\psi_t\rangle$, de modo que,

$$\Lambda^{+\alpha\beta\mu}{}_{,\mu}|\psi_t\rangle = 0 \tag{2.44}$$

sendo $|\psi_t\rangle$, os estados que satisfazem a condição (2.44), e $|\psi_l\rangle$ os estados complementares do espaço de Hilbert H. Este procedimento, obviamente, diminui os graus de liberdade da teoria.

Usando a expansão em série de Fourier (2.34), a condição (2.44), torna-se,

$$(e^n_{010} + e^n_{013})a_n \;|\psi_t\rangle = 0 \tag{2.45a}$$

$$(e^n_{110} + e^n_{113})a_n \;|\psi_t\rangle = 0 \tag{2.45b}$$

Substituindo os tensores da base definidos em (2.37), as condições (2.45a e b) ficam:

$$(\sqrt{3}\; a_1 + 2a_{16} + a_4)\;|\psi_t\rangle = 0 \tag{2.46a}$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}\; a_{11} - \frac{1}{2}a_{16} - a_4)\;|\psi_t\rangle = 0 \tag{2.46b}$$

$$(\sqrt{3}\, a_2 + 2a_{15} - a_5)\ |\psi_t\rangle = 0 \tag{2.46c}$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}\, a_{10} + \frac{1}{2}\, a_{15} - a_5)\ |\psi_t\rangle = 0 \tag{2.46d}$$

$$(a_3 - a_{13})\ |\psi_t\rangle = 0 \tag{2.46e}$$

$$(a_9 + a_7)\ |\psi_t\rangle = 0 \tag{2.46f}$$

Utilizando as condições (2.46), o valor esperado da hamiltoniana (2.42) se reduz à:

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi_1|\int d^3k\ [(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}(-N_6 - N_8 + N_{12} + N_{14})\ |\psi_1\rangle}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} \tag{2.47}$$

Claro está, que este valor esperado deve ser equivalente ao obtido da hamiltoniana (2.15). Podemos verificar esta afirmativa calculando o operador de spin deste sistema na direção x^3.

Neste caso (veja apêndice A), temos que:

$$S_{\rho\sigma} = \int d^3x\ S^0_{\rho\sigma} =$$

$$\int d^3x \left[-\ 2\dot{A}_\rho{}^{\alpha\mu} A_{\sigma\alpha\mu} - \dot{A}^{\alpha\mu}{}_\sigma A_{\mu\alpha\rho} + 2\dot{A}^\alpha{}_\sigma{}^\mu A_{\alpha\rho\mu} + \dot{A}^{\alpha\mu}{}_\rho A_{\mu\alpha\sigma} \right] \tag{2.48}$$

Seguindo o procedimento anterior, substituimos as variáveis $A_{\alpha\beta\mu}$ e suas derivadas temporais pela expansão

(2.34). Assim sendo, o operador de spin na direção x^3, é dado por:

$$S_{12} = \frac{i}{2}\int d^3x \left[4e_2^{n\ \alpha\mu}\, e^{n'}_{1\alpha\mu} - 4e_1^{n\ \alpha\mu}\, e^{n'}_{2\alpha\mu} + 2e_1^{n\ \mu\alpha}\, e^{n'}_{2\alpha\mu} + \right.$$

$$\left. - 2e_2^{n\ \mu\alpha}\, e^{n'}_{1\alpha\mu}\right]\left[a_n^{+}(k)a_{n'}(k) - a_{n'}^{+}(k)a_n(k) + C\, g_{nn'}\right] \qquad (2.49)$$

onde, C é constante.

Podemos observar, que os 3º e 4º termos, não contribuem para o valor de S_{12}, pois o produto dos tensores da base (2.37), nos dão:

$$e^n_{\rho\mu\alpha}e^{n'\alpha\mu}_{\sigma} = 0 \qquad (2.50)$$

Isto implica que a expressão (2.49) reduz-se à:

$$S_{12} = 2i\int d^3k \left[a^{+}_{12}(k)a_{14}(k) - a^{+}_{14}(k)a_{12}(k)\right] +$$

$$+ \left[a^{+}_{8}(k)a_{6}(k) - a^{+}_{6}(k)a_{8}(k)\right] \qquad (2.51)$$

Definindo,

$$a^1_{(\pm)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{12} \mp ia_{14}) \qquad (2.52a)$$

$$a^2_{(\pm)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_{8} \mp ia_{6}) \qquad (2.52b)$$

temos:

$$[a_+^+, a_+] = [a_-^+, a_-] = 1 \qquad (2.53)$$

Nesta definição, o operador dado em (2.51) se escreve:

$$S_{12} = 2\int d^3k \left[a_+^{1+}(k)a_+^1(k) - a_-^{1+}(k)a_-^1(k)\right] + \left[a_+^{2+}(k)a_+^2(k) - a_-^{2+}(k)a_-^2\right] \qquad (2.54)$$

Isso significa que utilizando a condição de Lorentz generalizada sobre os estados quânticos, esta teoria passa a descrever o mesmo sistema que o representado pela hamiltoniana (2.15). São dois campos de spin 2 independentes cujas energias tem sinais opostos, i.e. a hamiltoniana não tem sinal positivo definido.

Seria interessante analisar mais profundamente este sistema. Porém sabemos que os sistemas físicos em geral devem ser representados por hamiltonianas com sinal definido. Se isto não ocorre, a parte que contribui com sinal negativo para a energia pode crescer mais do que aquela que contribui com o sinal positivo, fazendo com que o sistema como um todo passe a ter energia negativa. Além disso, admite-se que a gravitação deve ser descrita por apenas um campo de spin 2, o que sugere o procedimento de eliminação de um destes campos.

Visando esta redução, imporemos uma condição subsidiária extra sobre os estados quânticos fisicamente accessíveis, que vale (pois são equivalentes) tanto para a hamiltoniana (2.15) quanto para a (2.47).

Como critério para decidir qual condição deve ser aplicada, devemos examinar o comportamento dos campos de spin-2 sob reflexão espacial.

Estes dois campos são descritos pelas variáveis $A_{(ij)}^{\;\;0}$ e A_{ijk}, sendo este último, como vimos, associado a um campo de spin-2 com paridade negativa. Somos então induzidos a eliminar esta parte do campo uma vez que tanto a gravitação quanto a eletrodinâmica são descritas por campos que são verdadeiros tensores e não pseudo-tensores.

Esta condição toma a forma:

$$(E_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} A_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\rho,\beta} h^{\lambda}{}_{(\alpha} h^{\rho}{}_{\mu)} - \frac{1}{2} A^{\lambda}{}_{\gamma}{}^{\rho}{}_{,\sigma} h^{\gamma}{}_{(\alpha} h^{\sigma}{}_{\mu)} V_{\rho} V_{\lambda})^{+} |\psi > = 0 \tag{2.55}$$

onde,

$$h_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} - V_{\mu} V_{\nu}$$

é o operador projeção no tri-espaço ortogonal a V_{μ}.

No referencial em que $V_{\mu} = \delta^{0}_{\mu}$, esta condição se reduz à:

$$A_{ijk} |\psi > = 0 \tag{2.56}$$

Esta condição comuta com ela mesma e com a condição (1.3.26), da teoria "tipo Fermi".

A condição adicional (2.55), elimina de (2.15), os operadores B_1 e B_2, e de (2.47), N_6 e N_8. As hamiltonianas se reduzem às quantidades que contribuem com o valor da energia estritamente positivo e um campo de puro spin-2. Sendo assim a hamiltoniana do sistema "tipo Maxwell" reduz-se à:

$$H_1 = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} k_0(A_1 + A_3) \tag{2.57}$$

e, para a hamiltoniana "tipo Fermi", temos:

$$H_2 = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2k_0]^{1/2}} k_0(N_{12} + N_{14}) \tag{2.58}$$

Se impusermos ao invés da condição (2.55), a correspondente dual, isto é,

$$(B_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \overset{*}{A}{}^{\lambda\beta}{}_{\rho,\beta} h_{\lambda(\alpha} h^{\rho}{}_{\mu)} - \frac{1}{2} A^{\lambda}{}_{\gamma}{}^{\rho}{}_{,\sigma} h^{\gamma}{}_{(\alpha} h^{\sigma}{}_{\mu)} V_{\rho} V_{\lambda})^{+} |\psi> = 0 \tag{2.59}$$

eliminaremos , em ambos os casos (H_1 e H_2), a contribuição dos verdadeiros tensores.

Mostraremos agora a analogia entre esta teoria para um campo de spin-2 sem massa em termo das variáveis de Fierz, e a eletrodinâmica de Maxwell e a de Fermi-Gupta-Bleuler, em uma tabela que sintetiza os seus aspectos principais.

Lagrangiana	$L=-\frac{1}{4}F^2$	$L=\frac{1}{8}C^2$	$L=-\frac{1}{4}F^2-\frac{1}{2}(\partial A)^2$	$L=+\frac{1}{8}C^2+\frac{3}{4}(\partial A)^2$
Simetria de Gauge	$\delta A=\partial\Lambda$	$\delta A = dw$	–	–
Fixação de Gauge	$A_0=0$ $A^i{}_{,i}=0$	$\xi_i=0.\ \beta_{ij}=0$ $\alpha_i{}^j{}_{,j}=0.\ \Delta_i{}^j{}_{,j}=0$	–	–
Primeira Condição Subsidiária	–	–	$A^{+\mu}{}_{,\mu}\vert\psi\rangle=0$	$A^{+}_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{,\mu}\vert\psi\rangle=0$
Hamiltoniana	$H=\int d^3k$ (N_1+N_2)	$H=\int d^3k(A_1+A_3+$ $-B_1-B_3)$	$H=\int d^3k(N_1+$ $+N_2)$	$H=\int d^9k(-N_1-N_3+$ $N_6^2+N_8^2)$
Segunda Condição Subsidiária	-	1. Condição (48) 2. Condição (51)	-	1. Condição (48) 2. Condição (51)
Hamiltoniana	-	1. $H'=\int d^3k(A_1+A_3)$ 2. $H'=\int d^3k(-B_1-B_3)$	–	1. $H'=\int d^3k(N_6+N_8$ 2. $H'=\int d\ k(-N_1-$
Spin	1	2	1	2

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES NÃO-LINEARES PARA O POTENCIAL DE FIERZ

- INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores examinamos uma toeria linear para campos de spin-2, utilizando as variáveis de Fierz. O motivo desta escolha (como já foi dito na introdução) é estarmos interessados na representação das interações gravitacionais, e sabemos que estas são descritas por campos de spin-2[1]. No entanto, a equação que dá a dinâmica do campo gravitacional deve ser não-linear, pois este auto-interage.

Vários critérios podem ser adotados para a obtenção desta teoria não-linear. Uma das possibilidades seria através do método utilizado por Feymann[1], que demonstra que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é uma extensão a espaços-tempos curvos da variável $\varphi_{\mu\nu}$ que descreve um campo de spin-2 no espaço-tempo de Minkowski. Efetiva-se esta extensão somando-se uma série infinita (convergente). O primeiro termo desta série é a lagrangeana do campo $\overset{(0)}{\varphi}_{\mu\nu}$ da teoria linear no espaço-tempo plano,e os termos seguintes são termos de auto-interação, isto é,

$$L_E = L(\overset{(0)}{\varphi}_{\mu\nu}) + k\varphi_{\mu\alpha}\overset{(0)}{T}_{\nu}{}^{\alpha} + k^2\varphi_{\mu\alpha}\overset{(1)}{T}_{\nu}{}^{\alpha} + \ldots .$$

onde, o tensor $\overset{(0)}{T}_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da lagrangeana que contem apenas o campo $\overset{(0)}{\varphi}_{\mu\nu}$, e suas derivadas; $\overset{(1)}{T}_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da lagrangeana anterior mais o termo de interação, que é dado por:

$$L_1 = k\,\overset{(0)}{\varphi}_{\mu\nu}\overset{(0)}{T}{}^{\mu\nu}$$

e assim sucessivamente. A soma destas infinitas contribuições reproduz, no limite, lagrangeana de Einstein.

Este procedimento poderia ser usado também para as variáveis de Fierz. Com isto, deveríamos esperar que a soma desta série de interações em termo das variáveis de Fierz reproduzisse no limite as equações de Jordan--Lichnerowicz[10,11], tendo em vista que o tensor $A_{\alpha\beta\mu}$ se indentifica com o potencial de Lanczos $L_{\alpha\beta\mu}$[4], na teoria linear. Entretanto, vimos que a variável de Fierz possui dois campos de spin-2, o que inviabilizou este procedimento de forma direta.

Um outro critério poderia ser o adotado por Boillat para a eletrodinâmica não-linear[14], o qual impõe que as ondas associadas às partículas do campo sejam excepcionais.

Baseado na analogia que vimos traçando entre as teorias para o potencial $A_{\alpha\beta\mu}$ e as dos campos de spin-1, utilizaremos neste capítulo a condição de excepcionalidade para obter teorias não-lineares para a variável de Fierz.

Iremos apresentar a seguir, algumas definições e conceitos importantes para a compreenção da metodologia utilizada aqui, para o estudo de algumas lagrangeanas não-lineares em termo das variáveis de Fierz.

1- ONDAS EXCEPCIONAIS

Seja um campo $\vec{u}(x^{\alpha})$ que satisfaz ao seguinte conjunto de equações diferenciais parciais quase-lineares, i.e., o coeficiente da derivada de mais alta ordem só depende do campo, das coordenadas e das derivadas de ordem inferior[25],

$$\hat{A}^{\alpha}(\vec{u},x^{\beta})\partial_{\alpha}\vec{u} = \vec{f}(\vec{u},x^{\beta}) \qquad (3.1.1)$$

onde $\hat{A}^{\alpha}$, é uma matriz $n \wedge n$, sendo n referente à n-upla $\vec{u}$.

Vamos considerar o caso em que,

$$S:\ \varphi(x^{\alpha}) = 0 \qquad (3.1.2)$$

represente uma superfície característica. As derivadas de ordem mais alta do campo (que em 3.1.1 são de primeira ordem) são descontínuas através de S. Definiremos a seguinte notação para descontinuidade:

$$\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\right|_{0^+} - \left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\right|_{0^-} \equiv \left[\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\ \right] \qquad (3.1.3)$$

Note que 3.1.2 deve ser solução de uma equação característica dada, como veremos a seguir, pela condição determinantal:

$$|\ \hat{A}^{\alpha}\varphi_{\alpha}\ | = 0 \qquad (3.1.4)$$

onde,

$$\varphi_{\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha}\varphi$$

Então de (3.1.1) temos:

$$\hat{A}^{\alpha}(\vec{u},x^{\beta})\partial_{\alpha}\vec{u} = \hat{A}^{\alpha}(\vec{u},x^{\beta})\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi} = \vec{f}(\vec{u},x^{\beta})$$

A descontinuidade desta equação através da superfície característica se escreve:

$$\hat{A}^{\alpha}(\vec{u},x^{\beta})\partial_{\alpha}\varphi\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\right] = 0 \qquad (3.1.5)$$

dado que a matriz $\hat{A}^{\alpha}$, não depende das derivadas do campo.

A equação (3.1.5) é um sistema cujo número de equações é determinado pela dimensão do campo vetorial $\vec{u}$. Nesse caso, só existem soluções linearmente independente se (3.1.4) for satisfeita. Esta equação determinantal pode ainda ser escrita como:

$$|\hat{A}_{(n)} - \lambda I| = 0 \qquad (3.1.4')$$

onde,

$$\hat{A}_{n} = \hat{A}^{i}n_{i} \qquad , \qquad \hat{A}^{0} = I \qquad (3.1.6)$$

e,

$$\lambda = \frac{-\partial_t \varphi}{|\nabla\varphi|} \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\nabla\varphi|} \tag{3.1.7}$$

No caso de equações não-lineares, é possível a produção de ondas aceleradas, através de uma escolha conveniente das perturbações iniciais. Consequentemente a perturbação cessará de ser finita depois de um dado tempo crítico, tendendo ao que se chama de onda de choque. Neste momento as equações de campo deixam de ser válidas e devem ser substituidas por outras[14]. Entretanto, existem ondas para as quais este fenômeno não ocorre, isto é, não é possível nestes casos gerar ondas aceleradas por intermédio de uma certa escolha das perturbações iniciais. Este fato, que foi primeiramente notado por Lax[17], requer que o gradiente da velocidade λ com relação as componentes do campo, seja ortogonal a todos os autovetores da matriz A_n, a qual impondo-se que (3.1.1) seja um sistema hiperbólico (veja próxima seção), admite um conjunto completo de auto-vetores independentes. Escreveremos esta condição da seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial\lambda(\vec{u},\vec{n})}{\partial\varphi} \right] \equiv \nabla_u \lambda . \left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi} \right] \equiv 0 \tag{3.1.9}$$

Uma onda é dita excepcional se a equação (3.1.9) é satisfeita. Se todas as ondas do campo forem excepcionais, então o campo é dito completamente excepcional.

Se a equação do campo é covariante, a equação característica também o será, como por exemplo:

$$\psi = G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}\varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\mu\ldots\varphi_\nu = 0 \tag{3.1.10}$$

e a equação (3.1.9) escreve-se:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right] = \varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\mu\ldots\varphi_\nu\ [G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}] = 0 \tag{3.1.11}$$

onde, $[G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}]$ é a descontinuidade do tensor $G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}$, através da superfície S.

Podemos verificar (3.1.11), notando que:

$$\nabla\psi\cdot\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\right] = |\nabla\varphi|\ \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_0}\ \nabla_u\lambda = \varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\mu\ldots\varphi_\nu\ \nabla G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}\cdot\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\right] \tag{3.1.12}$$

sendo,

$$\nabla G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}\cdot\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial\varphi}\right] = [G^{\alpha\beta\mu\ldots\nu}] \tag{3.1.13}$$

A condição (3.1.11) aplicada a eletrodinâmica, resulta que a única lagrangeana não-linear excepcional, construida com os invariantes eletromagnetismo, é a lagrangeana de Born e Infeld[14,26], a saber,

$$L_{B-I} = \sqrt{2F - G^2 + 1} - 1$$

Na seção 4, dissertarei um pouco mais a respeito desta lagrangeana.

2- HIPERBOLICIDADE: UM EXEMPLO EM DUAS DIMENSÕES.

Consideremos a seguinte equação para um campo escalar real u(x,t),

$$au_{xx} + bu_{xt} + cu_{tt} = f \tag{3.2.1}$$

onde a, b, c e f são funções reais de x, t, u e suas derivadas de primeira ordem (u_x e u_t).

Esta equação pode representar uma onda, conforme definimos na seção anterior, se existe uma distinção precisa entre estados perturbados dados pela superfície,

$$S: \quad \varphi(x,t) = 0 \tag{3.2.2}$$

Chamaremos esta superfície de "Frente de Onda", e examinaremos a hipótese de que através dela as derivadas de ordem mais alta de u(x,t) sejam descontínuas.

Com o intuito de examinar a equação para $\varphi(x,t)$, podemos fazer uma transformação de coordenadas na equação (3.2.1) que leve x e t nas coordenadas curvilíneas ξ e φ, onde o parâmetro ξ especifica o comprimento de arco da curva $\varphi(x,t) = 0$.

Nestas coordenadas a equação (3.2.1) assume a forma:

$$Q(\varphi,\varphi)u_{\varphi\varphi} + 2Q(\varphi,\xi)u_{\varphi\xi} + Q(\xi,\xi)u_{\xi\xi} + [L]\varphi\ u_{\varphi} + [L]\xi\ u_{\xi} = f' \tag{3.2.3}$$

onde,

$$Q(\varphi,\xi) = a\varphi_x\xi_x + \frac{1}{2}b(\varphi_x\xi_t + \varphi_t\xi_x) + \varphi_t\xi_t \tag{3.2.4}$$

e,

$$[L] = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + c\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.2.5}$$

Como estamos considerando que só derivadas de ordem mais alta são decontínuas através de φ, então,

$$[u_\varphi] = [u_\xi] = 0 \tag{3.2.6a}$$

$$[u_{\varphi\xi}] = [u_{\xi\xi}] = 0 \tag{3.2.6b}$$

$$[u_{\varphi\varphi}] \neq 0 \tag{3.2.6c}$$

e a equação (3.2.3) fica:

$$Q(\varphi,\varphi)[u_{\varphi\varphi}] = 0 \tag{3.2.7}$$

sendo assim,

$$Q(\varphi,\varphi) = a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_t + c\varphi_t^2 = 0 \tag{3.2.8}$$

que é a equação característica para $\varphi(x,t)$, correspondente à (3.1.4) do campo vetorial. Pode-se chegar a (3.2.8), de forma mais imediata através do método de Hadamard para equações características[27]. Faremos assim, pequeno resumo deste método antes de dar prosseguimento à análise anterior.

Suponhamos que u(x,t) seja contínuo através da superfície $\varphi(x,t)=0$, tendo derivada primeira descontínua. Então,

$$[u_{;\alpha}] \neq 0 \qquad e \qquad [u] = 0 \tag{3.2.9}$$

onde a derivada é dada num sistema de coordenadas arbitrário. Sendo a diferencial total de u(x,t) contínua, segue que:

$$[du] = (u_{;\alpha}\big|_{0^+} - u_{;\alpha}\big|_{0^-})dx^\alpha = [u_{;\alpha}]dx^\alpha = 0 \tag{3.2.10}$$

Como o gradiente de $\varphi(x,t)$ é ortogonal a superfície S, e dx^α é tangente a esta mesma curva, temos

$$\varphi_{,\alpha}\, dx^\alpha = 0 \tag{3.2.11}$$

De (3.2.10) e (3.2.11) podemos dizer que:

$$[u_{;\alpha}] \propto \varphi_{,\alpha} \tag{3.2.12}$$

isto é, a descontinuidade do campo através da superfície S, é proporcional a normal à esta superfície. Este raciocínio pode ser utilizado para campos tensoriais de ordem superior, contendo derivada de ordem mais alta do que a primeira e induzindo a generalização:

$$[u^{\varepsilon\sigma..\lambda}{}_{;\alpha;\beta;\ldots;\mu}] = C^{\varepsilon\sigma..\lambda}\ \varphi_\alpha\varphi_\beta\ldots\varphi_\mu \tag{3.2.13}$$

Daí segue,

$$[u_{xx}] = C\ \varphi_x\varphi_x \tag{3.2.14a}$$

Substituindo (3.2.14) em (3.2.1), obtemos novamente a equação (3.2.8), ou seja,

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_t + c\varphi_t^2 = 0 \qquad (3.2.15)$$

Voltemos agora a análise desta equação, examinando a questão da velocidade.

Dividindo a equação (3.2.15) por $(\varphi_x)^2$, obtemos:

$$c\left(\frac{\varphi_t}{\varphi_x}\right)^2 + b\frac{\varphi_t}{\varphi_x} + a = 0 \qquad (3.2.16)$$

A velocidade λ, é assim dada por:

$$\lambda = \frac{\varphi_t}{\varphi_x} = -\frac{dx}{dt} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \qquad (3.2.17)$$

A equação diferencial (3.2.1) é dita ser hiperbólica, se o discriminante de (3.2.17) for positivo, i.e.,

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \qquad (3.2.18)$$

A hiperbolicidade da equação original, ou melhor a condição (3.2.18), assegura que a velocidade de propagação da onda seja finita para todo tempo t[16,24].

Na primeira seção, descrevemos o formalismo que nos assegura a característica de excepcionalidade de uma dada onda. Não obstante, naquela etapa, omitimos a hipótese ulterior de que o conjunto de equações aos quais estávamos nos referindo, era o das equações hiperbólicas.

Devemos então frisar, a diferença fundamental, que existe entre as condições (3.2.18) e (3.1.9).

A primeira, restringe os sistemas àqueles cuja velocidade de propagação é finita; e a segunda, garante que não sendo esta velocidade perturbada, ela se manterá finita, independentemente da escolha das perturbações iniciais.

Exemplos de equações que determinam a dinâmica de vários sistemas físicos são dados por Taniuti[25].

Na próxima seção utilizaremos o critério de excepcionalidade, para selecionar lagrangeanas não-lineares para as variáveis de Fierz.

3- LAGRANGEANAS EXCEPCIONAIS I

Nós iremos apresentar nesta seção, exemplos de lagrangeanas não-lineares para campos de spin-2 na formulação de Fierz. Usaremos a estrutura do tensor do "tipo Riemann" contruido com $A_{\alpha\beta\mu}$, definido por:

$$S_{\alpha\beta\mu\nu} = A_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha;\beta]} \tag{3.3.1}$$

De posse deste tensor definimos os seguintes invariantes:

$$A = S_{\alpha\beta\mu\nu}S^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.3.2a}$$

$$B = S_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{**}{S}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.3.2b}$$

$$C = S_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{*}{S}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.3.2c}$$

Note que embora $S_{\alpha\beta\mu\nu}$ possua todas as simetrias do tensor de curvatura de Riemann, ele não deve ser identificado com este, pois como foi demonstrado por Bampi e Caviglia[9], o tensor de Riemann não é, em geral, escrito em função de um potencial.

A motivação deste nosso estudo provem de um trabalho feito por Boillat para a eletrodinâmica não-linear. Sabemos que com o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ só é possivel construir dois invariantes, a saber,

$$F = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.3.3a}$$

$$G = F^{\mu\nu}F^{*}_{\mu\nu} \tag{3.3.3b}$$

sendo G um invariante topológico.

Isto significa que uma lagrangeana mais geral para a eletrodinâmica envolve apenas estes dois invariantes.

Um dos problemas que encontramos ao passar para a formulação de campos de spin-2 está no fato de existirem 14 invariantes construidos com o tensor definido em (3.3.1). Esta dificuldade só apareceria se quiséssemos examinar a lagrangeana mais geral possível. Nosso problema seria decidir qual a combinação de invariantes deveríamos adotar.

Buscando uma analogia com o eletromagnetismo, examinaremos primeiramente uma lagrangeana construida apenas com os invariantes A e B, onde B é um invariante topológico. A razão para isto vamos encontrar na profunda identidade estrutural existente entre a presente teoria e a proposta por Born e Infeld para o campo eletromagnético.

estrutural existente entre a presente teoria e a proposta por Born e Infeld para o campo eletromagnético.

Seja L = L(A,B) uma lagrangeana arbitrária construida com os invariantes A e B.Então,

$$S = \int L(A,B)\, d^4x \qquad (3.3.4)$$

onde S é a ação do sistema.

A variação de S nas variáveis fundamentais $A_{\alpha\beta\mu}$, nos dá a seguinte equação de movimento:

$$\left(L_A \frac{\partial A}{\partial S_{\alpha\beta\mu\nu}} + L_B \frac{\partial B}{\partial S_{\alpha\beta\mu\nu}} \right)_{;\nu} = 0 \qquad (3.3.5a)$$

o que é equivalente a:

$$\left(L_A\, S^{\alpha\beta\mu\nu} + L_B\, S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu} \right)_{;\nu} = 0 \qquad (3.3.5b)$$

isto é,

$$L_{A;\nu}\, S^{\alpha\beta\mu\nu} + L_A\, S^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + L_{B;\nu}\, S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu} + L_B\, S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu}{}_{;\nu} = 0 \qquad (3.3.5c)$$

onde, $L_A = \frac{\partial L}{\partial A}$ e $L_B = \frac{\partial L}{\partial B}$

Na equação (3.3.5) suprimimos a derivada covariante devido a estarmos considerando a geometria do background contínua. Sendo assim, somente a derivada simples contribui para a para obtermos a forma geral da equação característica pois é de posse deste conhecimento que podemos impor (como vimos na primeira seção) a condição de excepcionalidade e obter, assim, a forma da lagrangeana.

Consideremos uma superfície

$$S: \quad \varphi(x^{\alpha}) = 0$$

através da qual, as derivadas de $A_{\alpha\beta\mu}$ são descontínuas.

Definiremos então,

$$\left[A_{\alpha\beta\mu,\nu} \right] = A_{\alpha\beta\mu,\nu}\Big|_{0^{(+)}} - A_{\alpha\beta\mu,\nu}\Big|_{0^{(-)}} = \varphi_{\alpha\beta\mu} k_{\nu} \qquad (3.3.6)$$

onde $\varphi_{\alpha\beta\mu}$ é o tensor que caracteriza a descontinuidade e k_{ν} é o vetor gradiente à superfície, ou seja,

$$k_{\nu} = \psi_{,\nu} \qquad (3.3.7)$$

Assim sendo temos que:

$$\left[S_{\alpha\beta\mu\nu} \right] = \left[A_{\alpha\beta[\mu;\nu]} \right] + \left[A_{\mu\nu[\alpha;\beta]} \right] =$$

$$= \varphi_{\alpha\beta[\mu} k_{\nu]} + \varphi_{\mu\nu[\alpha} k_{\beta]} \qquad (3.3.8)$$

onde usamos o fato de que a métrica é contínua através de S.

Temos ainda,

$$[\, L_{A,\nu} \,] = [\, L_{A} \,]\, k_{\nu} \qquad (3.3.9a)$$

$$[\,L_{B,\nu}\,] = [\,L_B\,]\,k_\nu \tag{3.3.9b}$$

Podemos verificar que impondo a condição de Fierz para que $A_{\alpha\beta\mu}$ represente um único campo de spin-2 (1.3.26), obtemos que,

$$S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{3.3.10}$$

Assim sendo, a equação de descontinuidade da superfície de propagação (frente de onda) , reduz-se à expressão:

$$[\,L_A\,]\,S^{\alpha\beta\mu\nu}k_\nu + L_A\,[\,S^{\alpha\beta\mu\nu}]\,k_\nu + [\,L_B\,]\,S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu}k_\nu = 0 \tag{3.3.11}$$

Da igualdade (3.3.8) temos que:

$$[\,S^{\alpha\beta\mu\nu}\,]k_\nu = \varphi^{\alpha\beta\mu}\,k^2 - \varphi^{\alpha\beta\nu}\,k^\mu k_\nu + \varphi^{\mu\nu\alpha}\,k^\beta k_\nu - \varphi^{\mu\nu\beta}\,k^\alpha k_\nu \tag{3.3.12}$$

Da condição de Fierz citada acima ($A^{\overset{*}{\alpha}\beta\mu}{}_{,\beta} = 0$), segue que:

$$A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\mu} = 0 \tag{3.3.13}$$

o que em termo da descontinuidade se escreve,

$$\varphi^{\alpha\beta\mu}k_\mu = 0 \tag{3.3.14}$$

Como $\varphi^{\alpha\beta\mu}$ tem as mesmas simetrias que o tensor de Fierz, então a propriedade (1.2.1b) implica em:

$$\varphi^{\alpha\beta\mu} + \varphi^{\mu\alpha\beta} + \varphi^{\beta\mu\alpha} = 0 \qquad (3.3.15)$$

logo,

$$\varphi^{\mu\nu\alpha} = - (\varphi^{\alpha\mu\nu} + \varphi^{\nu\alpha\mu}) \qquad (3.3.16a)$$

$$\varphi^{\mu\nu\beta} = - (\varphi^{\beta\mu\nu} + \varphi^{\nu\beta\mu}) \qquad (3.3.16b)$$

Multiplicando as equações (3.3.16a e b) por $K^{\beta}K_{\nu}$ e $K^{\alpha}K_{\nu}$ respectivamente, e subtraindo-as, temos:

$$(\varphi^{\mu\nu\alpha}K^{\beta} - \varphi^{\mu\nu\beta}K^{\alpha})K_{\nu} = (- \varphi^{\nu\alpha\mu} + \varphi^{\nu\beta\mu})K_{\nu} \qquad (3.3.17)$$

A condição de Fierz em termo das descontinuidades se escreve:

$$\varphi^{\nu\alpha\mu}K^{\beta} + \varphi^{\beta\nu\mu}K^{\alpha} + \varphi^{\alpha\beta\mu}K^{\nu} = 0 \ . \qquad (3.3.18)$$

Isto é,

$$\varphi^{\alpha\beta\mu}K^{\nu} = - \varphi^{\nu\alpha\mu}K^{\beta} + \varphi^{\nu\beta\mu}K^{\alpha} \qquad (3.3.19)$$

Então, (3.3.17) reduz-se a:

$$(\varphi^{\mu\nu\alpha}k^{\beta} - \varphi^{\mu\nu\beta}k^{\alpha})k_{\nu} = \varphi^{\alpha\beta\mu} \ k^2 \qquad (3.3.20)$$

sendo, $\quad k^2 = k^{\nu}k_{\nu}$,

Substituindo (3.3.20) e (3.3.14) em (3.3.12), obtemos:

$$[\ S^{\alpha\beta\mu\nu}\ ]k_\nu = 2\varphi^{\alpha\beta\mu}\ k^2 \tag{3.3.21}$$

Com isto, a equação da descontinuidade (3.3.11) torna-se:

$$[\ L_A\ ]\ S^{\alpha\beta\mu\nu}k_\nu + L_A\ 2\varphi^{\alpha\beta\mu}k^2 + [\ L_B\ ]\ S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu}k_\nu = 0 \tag{3.3.22}$$

Defininmos os tensores $U^{\alpha\beta\mu}$ e $V^{\alpha\beta\mu}$, pelas expressões,

$$U^{\alpha\beta\mu} \equiv S^{\alpha\beta\mu\nu}k_\nu \tag{3.3.23a}$$

$$V^{\alpha\beta\mu} \equiv S^{\overset{*}{\alpha}\beta\overset{*}{\mu}\nu}k_\nu \tag{3.3.23b}$$

De posse destas definições, podemos reescrever a equação (3.3.22) de modo compacto:

$$\varphi^{\alpha\beta\mu} = p\ U^{\alpha\beta\mu} + q\ V^{\alpha\beta\mu} \tag{3.3.24}$$

onde,

$$2L_A\ K^2p + [L_A] = 0 \tag{3.3.25a}$$

$$2L_A\ K^2q + [L_B] = 0 \tag{3.3.25a}$$

É preciso então calcularmos as descontinuidades $[L_A]$ e $[L_B]$ para que possamos obter a equação característica.

Usando a regra de Leibniz, tem-se:

$$[L_A] = L_{AA}[A] + L_{AB}[B] \tag{3.3.26a}$$

$$[L_B] = L_{BA}[A] + L_{BB}[B] \tag{3.3.26b}$$

Mas,

$$[A] = 2S_{\alpha\beta\mu\nu}\left[S^{\alpha\beta\mu\nu}\right] = 8S_{\alpha\beta\mu\nu}\ \varphi^{\alpha\beta\mu}\ k^{\nu}$$

identidade esta que, usando a definição (3.3.23), se escreve:

$$[A] = 8U_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu} \qquad (3.3.27a)$$

Utilizando o mesmo procedimento para obter a descontinuidade de B, tem-se:

$$[B] = 8V_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu} \qquad (3.3.27b)$$

Subistituindo (3.3.27) em (3.3.26), obtemos :

$$[L_A] = 8\left\{L_{AA}U_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu} + L_{AB}V_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu}\right\} \qquad (3.3.28a)$$

$$[L_B] = 8\left\{L_{BA}U_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu} + L_{BB}V_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu}\right\} \qquad (3.3.28b)$$

Utilizando a decomposição de $\varphi^{\alpha\beta\mu}$ dada em (3.3.24), as equações (3.3.28a e b) tornam-se:

$$[L_A]=8\left\{pL_{AA}U_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu}+ qL_{AA}U_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu}+ pL_{AB}V_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu}+qL_{AB}V_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu}\right\}$$
(3.3.29a)

$$[L_B]=8\left\{pL_{BA}U_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu}+ qL_{BA}U_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu}+ pL_{BB}V_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu}+qL_{BB}V_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu}\right\}$$
(3.3.29b)

Para calcular os produtos escalares $U_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu}$, $V_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu}$ e

$U_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu}$ usaremos as propriedades dos tensores $S_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $S^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{*}$ dadas no apêndice B. Temos:

$$U_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu} = S^{\alpha\beta\mu\nu}S_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{\nu}k^{\lambda} \tag{3.3.30}$$

De (B.17) temos:

$$S^{\alpha\beta\mu\nu}S_{\alpha\beta\mu\lambda} = \frac{1}{4}(A - \tau)g^{\nu}{}_{\lambda} + \tau^{\nu}{}_{\lambda} \tag{3.3.31}$$

onde definimos

$$\tau_{\nu\lambda} = 2\ S_{\nu\sigma\lambda\beta}S^{\sigma\beta} + 2\ S_{\nu\beta}S_{\lambda}{}^{\beta} - S\ S_{\nu\lambda} \tag{3.3.32}$$

cujo traço é dado por:

$$\tau = 4\ S^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} - S^{2} \tag{3.3.33}$$

Temos então,

$$U_{\alpha\beta\mu}U^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{4}(A - \tau)k^{2} + Q \tag{3.3.34}$$

onde pusemos

$$Q = \tau^{\nu}{}_{\lambda}\ k_{\nu}k^{\lambda} \tag{3.3.35}$$

Usando o mesmo procedimento para os outros produtos, um cálculo direto, porém longo, nos leva as expressões:

$$V_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{4}(A - \tau)k^{2} - Q \tag{3.3.36}$$

$$U_{\alpha\beta\mu}V^{\alpha\beta\mu} = -\frac{1}{4}(A - \tau)k^{2} \tag{3.3.37}$$

Finalmente, as equações (3.3.29a e b) reduzem-se a:

$$[L_A] = p\left\{ 2k^2\left[(A - \tau)L_{AA} - (A - \tau)L_{AB}\right] + 8QL_{AA} \right\} +$$

$$+ q\left\{ 2k^2\left[(A + \tau)L_{BA} - (A - \tau)L_{AA}\right] - 8QL_{AB} \right\} \qquad (3.3.38a)$$

$$[L_B] = p\left\{ 2k^2\left[(A - \tau)L_{BA} - (A - \tau)L_{BB}\right] + 8QL_{BA} \right\} +$$

$$+ q\left\{ 2k^2\left[(A + \tau)L_{BB} - (A - \tau)L_{BA}\right] - 8QL_{BB} \right\} \qquad (3.3.38b)$$

Assim, o sistema (3.3.25) toma a forma:

$$p\left\{L_A + (A-\tau)L_{AA} - (A-\tau)L_{AB} + \mu L_{AA}\right\} + q\left\{(A + \tau)L_{AB} - (A-\tau)L_{AA} - \mu L_{AB}\right\} = 0 \qquad (3.3.39a)$$

$$p\left\{(A-\tau)L_{BA} - (A-\tau)L_{BB} + \mu L_{BA}\right\} + q\left\{L_A + (A + \tau)L_{BB} - (A-\tau)L_{BA} - \mu L_{BB}\right\} = 0 \qquad (3.3.39b)$$

onde definimos,

$$\mu = \frac{4Q}{k^2} \qquad (3.3.40)$$

O sistema (3.3.39) só admite soluções linearmente independentes se,

$$\left[L_A + (A-\tau)L_{AA} - (A-\tau)L_{AB} + \mu L_{AA}\right]\left[L_A + (A + \tau)L_{BB} - (A-\tau)L_{BA} - \mu L_{BB}\right] +$$

$$- \left[(A + \tau)L_{AB} - (A-\tau)L_{AA} - \mu L_{AB}\right]\left[(A-\tau)L_{BA} - (A-\tau)L_{BB} + \mu L_{BA}\right] = 0 \qquad (3.3.41)$$

Esta é equação determinantal equivalente a (3.1.4), e nada mais é do que uma equação de 2º grau em μ:

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0 \tag{3.3.42}$$

onde a, b e c são dados por:

$$a = L_{AB}^2 - L_{AA}L_{BB} \tag{3.3.43a}$$

$$b = L_A(L_{AA} - L_{BB}) - 2a\tau \tag{3.3.43b}$$

$$c = L_A^2 + (A-\tau)(L_{BB}+L_{AA})L_A + (A-\tau)(L_{AA}-2L_{BA})L_A - 2a\tau(A-\tau) \tag{3.3.43c}$$

Para que a solução desse sistema seja única, vamos admitir que o discriminante de (3.3.42) é nulo, ou seja,

$$\Delta = b^2-4ac = 0 \tag{3.3.44}$$

Note que (3.3.44), é uma equação diferencial parcial altamente não linear, entretanto ela admite uma solução que, surpreendentemente, é muito semelhante a solução de Born e Infeld[25] para a eletrodinâmica, a saber,

$$L(A,B) = \sqrt{B^2-2nA + n^2} \tag{3.3.45}$$

onde n é uma constante abitrária.

Para que esta lagrangeana seja excepcional, é necessário, comforme (3.1.11), que a descontinuidade da equação característica se anule, ou seja,

$$[G_{\mu\nu}]\, k^{\mu}k^{\nu} = 0 \tag{3.3.46}$$

De (3.3.40) temos que:

$$G_{\mu\nu} = 4\tau_{\mu\nu} - \mu g_{\mu\nu} \tag{3.3.47}$$

já que

$$Q = 4\tau_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \tag{3.3.48}$$

Com isto a equação (3.3.46) torna-se:

$$4\,[\tau_{\mu\nu}]k^{\mu}k^{\nu} - [\mu]k^{2} = 0 \tag{3.3.49}$$

Utilizando a definição,

$$A_{\mu\nu} \equiv S_{\alpha\beta\lambda\mu}S^{\alpha\beta\lambda}{}_{\nu} \tag{3.3.50}$$

temos:

$$[\tau_{\mu\nu}] = [A_{\mu\nu}] - \frac{1}{4}[A]g_{\mu\nu} + \frac{1}{4}[\tau]g_{\mu\nu} \tag{3.3.51}$$

Sabendo que (veja apêndice B),

$$B^{\lambda}{}_{\nu} = S^{\alpha\beta\mu\lambda}\overset{*}{S}{}^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{4}(A - \tau)g^{\lambda}{}_{\nu} \tag{3.3.52}$$

podemos verificar que o traço de (3.3.51) nos dá:

$$\tau = A + B \tag{3.3.53}$$

Então,

$$[A] - [\tau] = -[B] \qquad (3.3.54)$$

Substituindo (3.3.54) no termo de descontinuidade de $\tau_{\mu\nu}$, obtemos:

$$[\tau_{\mu\nu}] = [A_{\mu\nu}] + \frac{1}{4}[B]g_{\mu\nu} \qquad (3.3.55)$$

Temos ainda que:

$$[A_{\mu\nu}]k^{\mu}k^{\nu} = 2R_{\alpha\beta\lambda\mu}[R^{\alpha\beta\lambda}{}_{\nu}]k^{\mu}k^{\nu} =$$

$$= 2(U_{\alpha\beta\lambda}(\varphi^{\alpha\beta\lambda}\ k^2 + \varphi^{\lambda\nu\alpha}\ k^{\beta}k_{\nu} - \varphi^{\lambda\nu\beta}k^{\alpha}k_{\nu})) \qquad (3.3.56)$$

Usando (3.3.20), a equação acima fica:

$$[A_{\mu\nu}]\ k^{\mu}k^{\nu} = 4U_{\alpha\beta\lambda}\varphi^{\alpha\beta\lambda}\ k^2 \qquad (3.3.57)$$

Para verificar se a descontinuidade da equação característica (3.3.49) se anula identicamente para o sistema cuja dinâmica é dada pela lagrangeana (3.3.45), resta-nos calcular a descontinuidade de μ.

Como μ é solução de (3.3.44) e estamos no caso em que $\Delta = 0$, então,

$$[\mu] = \left[\frac{-b}{2a}\right] = [n - 2A - B]$$

o que implica em:

$$[\mu] = 2[A] + [B] \tag{3.3.58}$$

Substituindo (3.3.55), (3.3.57) e (3.3.58) na equação (3.3.49), obtemos que:

$$16\, U_{\alpha\beta\lambda}\varphi^{\alpha\beta\lambda}\, k^2 + [B]k^2 - 2[A]k^2 - [B]k^2 = 0$$

ou melhor,

$$16\, U_{\alpha\beta\lambda}\varphi^{\alpha\beta\lambda}\, k^2 - 2[A]k^2 = 0 \tag{3.3.59}$$

Mas de (3.3.27a), temos,

$$[A] = 8U_{\alpha\beta\mu}\varphi^{\alpha\beta\mu}$$

Assim sendo, a equação (3.3.59), se anula identicamente, ou seja, a lagrangeana (3.3.45), é completamente excepcional, como queríamos encontrar.

Esta teoria se revela então de extrema elegância do ponto de vista formal e também do ponto de vista físico. O primeiro, visto que a equação diferencial (3.3.42) não admite solução analítica trivial, devido ao seu alto grau de não-linearidade; e o segundo porque, partindo de uma lagrangeana geral para dois invariantes construidos com $A_{\alpha\beta\mu}$, obtivemos uma solução análoga a sugerida por Born e Infeld para a eletrodinâmica e que é, também, completamente excepcional.

O mesmo procedimento poderia ser utilizado para examinar como se propagam as pertubações de outras teorias contruidas envolvendo combinações dos invariantes do tipo (A,C) e (B,C). Entretanto nestes casos, as equações caracteristicas são muito envolvidas e sua explicitação não permite uma análise simples e direta como acima.

4- LAGRANGEANAS EXCEPCIONAIS II

Passemos agora a analisar lagrangeanas construidas com o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, definido em (1.2.2). No presente caso o método de Boillat deve ser complementado pela argumentação de Born e Infeld, para a escolha apropriada da teoria

Os invariantes de 2ª ordem possiveis são:

$$D = C_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.4.1a}$$

$$E = C_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3.4.1b}$$

Construimos uma lagrangeana arbitrária L(D,E), cuja equação de movimento é dada por:

$$(L_D C^{\alpha\beta\mu\nu} + L_E \overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu})_{;\nu} = 0 \tag{3.4.2}$$

que se reduz a

$$L_{D;\nu}C^{\alpha\beta\mu\nu} + L_D C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + L_{E;\nu}\overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} =0 \tag{3.4.3}$$

pois,

$$\overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{3.4.4}$$

devido a condição de Fierz dada em (1.3.26)

Como o procedimento será o mesmo que foi utilizado na seção anterior, abordarei apenas as passagens relevantes.

A equação de descontinuidade se escreve:

$$[L_D]k_\nu C^{\alpha\beta\mu\nu} + L_D[C^{\alpha\beta\mu\nu}]k_\nu + [L_E]k_\nu \overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \tag{3.4.5}$$

Com

$$[C^{\alpha\beta\mu\nu}]k_\nu = 3\varphi^{\alpha\beta\mu}k^2 \tag{3.4.6}$$

Definindo as quantidades $Y_{\alpha\beta\mu}$ e $Z_{\alpha\beta\mu}$ pelas relações

$$Y^{\alpha\beta\mu} = C^{\alpha\beta\mu\nu}k_\nu \tag{3.4.7a}$$

$$Z^{\alpha\beta\mu} = \overset{*}{C}{}^{\alpha\beta\mu\nu}k_\nu \tag{3.4.7b}$$

podemos reescrever a equação (3.4.5) como:

$$\varphi^{\alpha\beta\mu} = aY^{\alpha\beta\mu} + bZ^{\alpha\beta\mu} \tag{3.4.8}$$

onde,

$$3k^2 aL_D + [L_D] = 0 \tag{3.4.9a}$$

$$3k^2 bL_D + [L_E] = 0 \tag{3.4.9b}$$

Da regra de Leibniz, tem-se:

$$[L_D] = L_{DD}[D] + L_{DE}[E] \qquad (3.4.10a)$$

$$[L_E] = L_{ED}[D] + L_{EE}[E] \qquad (3.4.10b)$$

Utilizando as identidades do apêndice B, um cálculo direto permite-nos escrever:

$$[E] = 2(aE - bD)k^2 \qquad (3.4.11a)$$

$$[D] = 2(aD + bE)k^2 \qquad (3.4.11b)$$

sendo assim, (3.4.10) se escreve:

$$[L_D] = 2\left\{ a(E\ L_{DE} + D\ L_{DD}) + b(E\ L_{DD} - D\ L_{ED}) \right\} k^2 \qquad (3.4.12a)$$

$$[L_E] = 2\left\{ a(E\ L_{EE} + D\ L_{DE}) + b(E\ L_{DE} - D\ L_{EE}) \right\} k^2 \qquad (3.4.12b)$$

Substituindo (3.4.12) no sistema (3.4.9), obtemos:

$$\left\{(3L_D + 2E\ L_{DE} + 2D\ L_{DD})a + (2E\ L_{DD} - 2D\ L_{DE})b \right\} k^2 = 0 \qquad (3.4.13a)$$

$$\left\{(2E\ L_{EE} + 2D\ L_{ED})a + (3L_D + 2E\ L_{DE} - 2D\ L_{EE})b \right\} k^2 = 0 \qquad (3.4.13b)$$

Este sistema admite soluções linearmente independentes, se a correspodente equação determinantal for satisfeita:

$$k^4\left\{9L_D^2 + 6D\, L_D(L_{DD}-L_{EE}) + 12L_D L_{DE}E + 4(D^2+ E^2)(L_{DE}^2-L_{DD}L_{EE})\right\}=0$$

(3.4.14)

Podemos assim verificar que, a equação característica que é daí decorre é dada por:

$$g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 0 \qquad (3.4.15)$$

Assim sendo o sistema não determina univocamente a lagrangeana excepcional. Com efeito de (3.4.14) se infere que, existem várias lagrangeanas L(D,E), capazes de satisfazer a condição,

$$9L_D^2 + 6D\, L_D(L_{DD}- L_{EE}) + 12L_D L_{DE}E + 4(D^2+ E^2)(L_{DE}^2- L_{DD}L_{EE}) \neq 0$$

(3.4.16)

resultando então que o vetor de propagação k_{μ} é do tipo nulo, i.e.,

$$k^2 = g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 0$$

Temos, neste caso, um conjunto de lagrangeanas excepcionais pois, aplicando a condição (3.1.11) na equação característica (3.4.15), segue que :

$$[g_{\mu\nu}]k^{\mu}k^{\nu} = 0 \qquad (3.4.17)$$

uma vez que $g_{\mu\nu}$ é contínuo.

Uma solução possível que satisfaz a condição (3.4.16) é novamente uma lagrangeana "tipo Born-Infeld":

$$L = \sqrt{E^2 - 2qD + q^2} - 1 \qquad (3.4.18)$$

que tem como primeira ordem da expansão

$$L = q\ D = q\ C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} \qquad (3.4.19)$$

que nada mais é do que a lagrangeana (cap.1) (a menos de um fator de proporcionalidade).

Claro está que devemos nos perguntar o porque de escolhermos esta solução se ela não é única. Para entendermos melhor esta questão é mister irmos um pouco além do caráter de excepcionalidade da teoria, utilizando a argumentação dada por Born e Infeld[28] em sua proposta de uma lagrangeana não-linear para a eletrodinâmica.

Estes autores utilizam, como princípio básico, a idéia de que os campos devem ser limitados em todo o espaço-tempo, assim como na mecânica de Einstein onde existe uma velocidade extremal dada pela constante "c".Sendo assim, buscaram contruir uma lagrangeana para os campos de forma análoga à lagrangeana de Einstein da partícula material $L = mc^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} \right\}$.

A lagrangeana de Born e Infeld para a eletrodinâmica não-linear, realmente remove a singularidade na origem que aparece no campo de Maxwell[29].

Não obstante,é importante notar que, no nosso caso envolvendo o objeto $S_{\alpha\beta\mu\nu}$, não é apenas a forma da lagrangeana que garantiria a limitação dos campos. Podemos verificar, que embora a lagrangeana (3.3.45) tenha a mesma forma que a de B-I, ela não limita os campos da teoria pois o tensor $S^{\alpha\beta\mu\nu}$ possui traço não nulo, i.e., os invariantes A e B são limitados pela constante q mas $S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ e S não o são.

Isto significa que, apesar de termos obtido uma lagrangeana excepcional univocamente determinada para os invariantes A e B (seção 3), ela não satisfaz completamente ao Princípio de Campo Finito, ao contrário da lagrangeana (3.4.18).

CAPÍTULO 4

UNIFICAÇÃO ELETRO-FRACA: A CONTRAPARTIDA GRAVITACIONAL (O MODELO DE M. NOVELLO E E. ELBAZ)

- INTRODUÇÃO

Montamos nos capítulos anteriores um quadro formal bastante amplo para campos de spin-2 em termo das variáveis de Fierz no qual é evidente a semelhança com o formalismo para campos de spin-1. A extrapolação desta analogia nos sugere consequências importantes, como por exemplo supor que, em contrapartida à força gravitacional, existe uma força de curto alcance. Esta idéia está baseada (como diz o título deste capítulo) na existência da contrapartida da força eletromagnética: a força fraca.

Embora o caminho mais natural para implementarmos esta idéia fosse utilizando as variáveis de Fierz, não o seguiremos aqui. A principal razão para isto é não conhecermos ainda a relação ponte entre as variáveis de Fierz e $g_{\mu\nu}$, no caso de campo forte. Assim, neste capítulo nos limitaremos a mostrar a coerência do modêlo de Novello-Elbaz para uma unificação "eletro-fraca-gravitacional" em termo da variável padrão.

Utiliza-se para isto a teoria desenvolvida por Deser, Grishchuk e outros[20,29], que descreve o campo gravitacional através de um tensor simétrico $\varphi_{\mu\nu}$ num "background" (fictício) arbitrário (veja apêndice C).

Na primeira seção mostraremos a compatibilidade da descrição de campos de spin-2 cujas interações são mediadas por campos de gauge de spin-1, sem massa. Em seguida introduziremos um outro campo de spin-2, sem interação com os anteriores. Uma certa combinação que é dada a seguir, envolvendo um dos campos de gauge, representa o campo gravitacional. Na segunda e última seção, utilizaremos o mecanismo de Higgs para introduzir massa ao sistema e verificar qual destes campos pode descrever a gravitação representado por um campo de spin-2 sem massa. Os outros campos são bosons massivos de spin-2 constituindo uma analogia formal ao modelo de Glashow, Weinberg e Salam para a interação eletrofraca.

1- FORMALISMO

Sejam $\varphi^{(i)}_{\mu\nu}$ três campos de spin-2 que são componentes de um verdadeiro vetor do grupo SU(2). Este grupo é não-Abeliano e suas simetrias no espaço interno são, em primeira ordem, rotações neste espaço. Num formalismo típico de Yang-Mills, a generalização destas rotações globais para transformações dependentes de posição no espaço-tempo requer a introdução de campos compensatórios - os chamados campos de gauge que, no nosso caso, seguirá o modelo convencional constituido por uma triada de vetores $W_{\mu}^{(i)}$.

A lagrangeana para os campos de spin-2 será dada de forma análoga a de Grishchuk, Petrov e Popova[20] porém limitada a sua expressão linear, i.e.,

$$L_{\varphi} = \sqrt{-\gamma}\ \left\{ \gamma^{\mu\nu}\ (\vec{K}.\vec{K})_{\mu\nu} + \vec{\varphi}^{\mu\nu}.(D_{\alpha}\vec{K}^{\alpha}_{\mu\nu} + D_{(\mu}\vec{K}_{\nu)}) \right\} \tag{4.1.1}$$

onde,

$$(\vec{K}.\vec{K})_{\mu\nu} = \vec{K}^{\alpha}_{\mu\nu}.\vec{K}_{\alpha} + \vec{K}^{\lambda}_{\mu\alpha}.\vec{K}^{\alpha}_{\lambda\nu} \tag{4.1.2}$$

e

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + ig\ \vec{W}_{\alpha}\wedge \tag{4.1.3}$$

que é a expressão da derivada covariante neste grupo[30].

Sabemos que existe uma grande dificuldade no acoplamento de campos de spin (> 1) , com outros sistemas. Deser e Aragone[6] mostraram que no caso de um campo de puro spin-2 com a gravidade, a dificuldade fundamental (tanto no caso massivo como no não massivo) está relacionada com à não-comutatividade da derivada covariante introduzir uma dependência das relações de compatibilidade com a curvatura. Entretanto Deser, ao examinar[6] o caso de acoplamento de um campo de spin-2 ($\varphi_{\mu\nu}$) com o campo eletromagnético, evidênciou que as equações de compatibilidade, neste caso específico, só dependem de derivadas de primeira ordem dos campos. Assim sendo este sistema será compatível se uma escolha adequada das condições iniciais for exibida.

Para empreendermos esta metodologia sugerida por Deser, devemos calcular as relações de comutação das derivadas covariantes definidas em (4.1.3).

Temos de (4.1.3):

$$D_\mu D_\nu \vec{A} = (\partial_\mu - ig \vec{W}_\mu \wedge)(\partial_\nu - ig \vec{W}_\nu \wedge) \vec{A}$$

o que implica em,

$$D_\mu D_\nu \vec{A} = \partial_\mu \partial_\nu \vec{A} - ig\, \partial_\mu (\vec{W}_\nu \wedge \vec{A}) - ig\, \vec{W}_\mu \wedge \partial_\nu \vec{A} - g^2\, \vec{W}_\mu \wedge (\vec{W}_\nu \wedge \vec{A})$$

e também,

$$D_\nu D_\mu \vec{A} = \partial_\nu \partial_\mu \vec{A} - ig\, \partial_\nu (\vec{W}_\mu \wedge \vec{A}) - ig\, \vec{W}_\nu \wedge \partial_\mu \vec{A} - g^2\, \vec{W}_\nu \wedge (\vec{W}_\mu \wedge \vec{A})$$

Subtraindo as equações acima obtemos a relação de comutação:

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\vec{A} = &- ig \left[\partial_\mu (\vec{W}_\nu \wedge \vec{A}) - \partial_\nu (\vec{W}_\mu \wedge \vec{A}) \right] + \\ &- ig \left[\vec{W}_\mu \wedge \partial_\nu \vec{A} - \vec{W}_\nu \wedge \partial_\mu \vec{A} \right] + \\ &- g^2 \left[\vec{W}_\mu \wedge (\vec{W}_\nu \wedge \vec{A}) - \vec{W}_\nu \wedge (\vec{W}_\mu \wedge \vec{A}) \right]\end{aligned}$$

Então,

$$[D_\mu, D_\nu]\vec{A} = - \left[ig \, (\partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu) + g^2 \, (\vec{W}_\mu \wedge \vec{W}_\nu) \right] \wedge \vec{A} \tag{4.1.4}$$

Para simplificar a notação, vamos definir a seguinte quantidade:

$$\vec{F}_{\mu\nu} \equiv - \left[(\partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu) - ig \, (\vec{W}_\mu \wedge \vec{W}_\nu) \right] \tag{4.1.5}$$

Reescrevendo a equação (4.1.4) a partir desta definição, obtemos:

$$[D_\mu, D_\nu]\vec{A} = ig\, \vec{F}_{\mu\nu} \wedge \vec{A} \qquad (4.1.6)$$

Obteremos agora a equação de movimento do sistema, variando independentemente $\vec{\varphi}_{\mu\nu}$ e $\vec{K}^{\alpha}_{\mu\nu}$, na lagrangeana (4.1.1), a saber,

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{\varphi}_{\mu\nu}} = D_\alpha \vec{K}^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_{(\mu}\vec{K}_{\nu)} = 0 \qquad (4.1.7a)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{K}^{\alpha}_{\mu\nu}} = - D_\alpha \vec{\varphi}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\rho \vec{\varphi}^{\,\rho(\nu}\gamma^{\mu)}{}_{\alpha} + \gamma^{\mu\nu} \vec{K}_\alpha + \frac{1}{2} \gamma^{\varepsilon\rho} \vec{K}^{(\mu}_{\varepsilon\rho}\gamma^{\nu)}{}_{\alpha} +$$

$$- \gamma^{\varepsilon\nu} \vec{K}^{\mu}_{\varepsilon\alpha} - \gamma^{\mu\varepsilon} \vec{K}^{\nu}_{\varepsilon\alpha} = 0 \qquad (4.1.7b)$$

Multiplicando (4.1.7b) por $\gamma^{\alpha}{}_{\mu}$ obtemos:

$$D_\mu \vec{\varphi}^{\mu\nu} = - \gamma^{\mu\varepsilon} \vec{K}^{\nu}_{\varepsilon\mu} \qquad (4.1.8)$$

o que implica que (4.1.7b) se reescreve:

$$- D_\alpha \vec{\varphi}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\vec{K}_\alpha + \vec{K}^{(\mu}_{\varepsilon\alpha}\gamma^{\nu)\varepsilon} = 0 \qquad (4.1.9)$$

Seguindo o mesmo procedimento de Grishchuk e outros, escreveremos uma equação que só dependa de $\vec{\varphi}_{\mu\nu}$ utilizando o seguinte artifício.

Seja $\vec{H}_{\alpha\beta\mu}$ a quantidade definida pela relação:

$$\vec{H}_{\alpha\mu\nu} = - D_\alpha \vec{\varphi}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}\vec{K}_\alpha - \vec{K}_{\mu\varepsilon\alpha}\,\gamma^\varepsilon{}_\nu - \vec{K}_{\nu\varepsilon\alpha}\,\gamma^\varepsilon{}_\mu \qquad (4.1.10)$$

Derivando uma dada relação cíclica construida com esta quantidade, i.e.,

$$D_\tau \left(\vec{H}_{\mu\nu}{}^\tau + \vec{H}_{\nu\mu}{}^\tau - \vec{H}^\tau{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\vec{H}^{\tau\alpha}{}_\alpha\,\gamma_{\mu\nu} \right) = 0 \qquad (4.1.11)$$

Obtemos uma equação diferencial de segunda ordem só para $\varphi_{\mu\nu}$, a saber.

$$\vec{G}_{\mu\nu} \equiv - D_\tau D_\mu \varphi_\nu{}^\tau - D_\tau D_\nu \varphi_\mu{}^\tau + D_\tau D^\tau \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\tau D^\tau \varphi\,\gamma_{\mu\nu} = 0$$

$$(4.1.12)$$

A condição de compatibilidade é dada aqui pela divergência de $G_{\mu\nu}$, ou seja,

$$D_\nu\, \vec{G}^{\mu\nu} = 0 \qquad (4.1.13)$$

que em termo de $\varphi_{\mu\nu}$ se escreve:

$$- D_\nu D_\tau D^\mu\, \vec{\varphi}^{\nu\tau} - D_\nu D_\tau D^\nu\, \vec{\varphi}^{\mu\tau} + D_\nu D_\tau D^\tau\, \vec{\varphi}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\nu D_\tau D^\tau\, \vec{\varphi}\,\gamma^{\mu\nu} = 0$$

$$(4.1.14)$$

usando a definição (4.1.5) no segundo termo da equação acima podemos verificar que:

$$D_\nu D_\tau D_\nu \vec{\varphi}^{\mu\tau} = (D_\tau D_\nu + \vec{F}_{\nu\tau} \wedge) D_\nu \vec{\varphi}^{\mu\tau}$$

Logo,

$$- D_\nu D_\tau D_\mu \vec{\varphi}_\nu{}^\tau + ig \vec{F}_{\tau\nu} \wedge D^\nu \vec{\varphi}_\mu{}^\tau - \frac{1}{2} D_\nu D_\tau D^\tau \vec{\varphi} \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.15)$$

Note que o traço de (4.1.12), nos dá que:

$$\frac{1}{2} D_\tau D^\tau \vec{\varphi}_{\mu\nu} = - D_\alpha D_\beta \vec{\varphi}^{\alpha\beta} \quad (4.1.16)$$

Então, utilizando (4.1.16) e novamente (4.1.5), a equação de compatibilidade se escreve:

$$-ig \vec{F} \wedge D_\tau \vec{\varphi}^{\nu\tau} - ig D_\nu (\vec{F}_{\tau\mu} \wedge \vec{\varphi}^{\nu\tau}) + ig \vec{F}_{\tau\nu} \wedge D^\nu \vec{\varphi}_\mu{}^\tau = 0 \quad (4.1.17)$$

Assim sendo, a divergência de $\vec{G}_{\mu\nu}$ realmente pode ser escrita em função apenas dos campos e de suas derivadas de primeira ordem. Istosignifica que o sistema será compatível se fizermos uma escolha adequada das condições iniciais dos campos $\varphi_{\mu\nu}^{(1)}$.

Com o propósito de seguirmos o mesmo procedimento da unificação eletro-fraca, torna-se conveniente introduzirmos um quarto campo de spin-2 ($\psi_{\mu\nu}$). Com isto escreveremos a lagrangeana correspondente sob forma:

$$L_\psi = \sqrt{-\gamma} \Big\{ \gamma^{\mu\nu} (QQ)_{\mu\nu} + \sqrt{K_E}\, \psi^{\mu\nu} (Q^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - Q_{\mu;\nu}) +$$

$$+ \frac{k_b}{K_E} \sqrt{k_b} \; \psi^{\mu\nu} (QQ)_{\mu\nu} \Big\} \qquad (4.1.19)$$

A lagrangeana total que vamos examinar, será a lagrangeana para os campos de gauge $\varphi^{(1)}_{\mu\nu}$ mais a lagrangeana do campo $\psi_{\mu\nu}$.

$$L_t = L_\varphi + L_\psi \qquad (4.1.20)$$

2- INTRODUÇÃO DA MASSA UTILIZANDO O MECANISMO DE HIGGS

Seguindo os caminhos da unificação Glashow-Weinberg--Salam *, iremos introduzir um doublet, (doublet de Higgs) dado por:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \qquad (4.2.1)$$

onde ϕ^+ é um campo escalar complexo eletricamente carregado e ϕ^0 neutro.

O mecanismo convencional de quebra espontânea de simetria, usa o valor mínimo deste campo escalar (de Higgs) que permite reduzir ϕ ao estado fundamental dado por:

---

*Note: Na teoria GWS este mecanismo é indispensável pois ele tem a função de garantir a renormalizabilidade da teoria. Aqui, no caso correspondente de spin-2, ele passa a desenvolver um papel menos fundamental devido a não-renormalizabilidade da própria teoria do campo de spin-2 sem massa (Einstein).

$$< \phi > = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4.2.2)$$

que faz $\phi^{+} = 0$ e $\phi^{0} = 1/\sqrt{2}\ (\ v + \kappa(x)\ )$

A lagrangeana que acopla os campos de gauge $\varphi^{(1)}_{\mu\nu}$ e o campo $\psi_{\mu\nu}$ com o campo escalar de Higgs é dada por:

$$L_{\phi} = |\ (\ a\psi_{\mu\nu}I + b\vec{\tau}.\varphi_{\mu\nu}\ )\phi\ |^{2} \qquad (4.2.3)$$

sendo I a matriz identidade e $\vec{\tau}$ as matrizes de Pauli, i.e.,

$$\tau^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (4.2.4)$$

Então,

$$\vec{\tau}.\vec{\varphi}_{\mu\nu} = \tau^{1}\varphi^{1}_{\mu\nu} + \tau^{2}\varphi^{2}_{\mu\nu} + \tau^{3}\varphi^{3}_{\mu\nu}$$

ou melhor,

$$\vec{\tau}.\vec{\varphi}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varphi^{3}_{\mu\nu} & \varphi^{1}_{\mu\nu} - i\varphi^{2}_{\mu\nu} \\ \varphi^{1}_{\mu\nu} + i\varphi^{2}_{\mu\nu} & \varphi^{3}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (4.2.5)$$

Reescrevendo (4.2.3), temos:

$$L_\phi = \left| \begin{pmatrix} b\varphi^3_{\mu\nu} + a\psi_{\mu\nu} & b\varphi^- \\ b\varphi^+_{\mu\nu} & a\psi_{\mu\nu} - b\varphi^3_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right|^2 \qquad (4.2.6)$$

onde fizemos as seguintes redefinições:

$$\varphi^+_{\mu\nu} = \varphi^1_{\mu\nu} + i\varphi^2_{\mu\nu} \qquad e \qquad \varphi^-_{\mu\nu} = \varphi^1_{\mu\nu} - i\varphi^2_{\mu\nu} \qquad (4.2.7)$$

Prosseguindo, temos

$$L_\phi = \left| \begin{pmatrix} b\lambda\varphi^- \\ \lambda a\psi_{\mu\nu} - \lambda b\varphi^3_{\mu\nu} \end{pmatrix} \right|^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} b\lambda\varphi^+_{\mu\nu} & \lambda a\psi_{\mu\nu} - b\lambda\varphi^3_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b\lambda\varphi^- \\ \lambda a\psi_{\mu\nu} - \lambda b\varphi^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \; [\; b^2\varphi^-_{\mu\nu}\varphi^{+\mu\nu} + (\; a\psi_{\mu\nu} - b\varphi^3_{\mu\nu}\;)^2 \;]$$

Finalmente L_ϕ reduz-se à forma:

$$L_\phi = \lambda^2 \; (b^2\varphi^-_{\mu\nu}\varphi^{+\mu\nu} + a^2\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} + b^2\varphi^3_{\mu\nu}\varphi^{3\mu\nu} - 2ab\psi_{\mu\nu}\varphi^{3\mu\nu}) \qquad (4.2.8)$$

Chegando neste ponto e por razões que ficarão claras a seguir, iremos fazer uma mudança de representação, aplicando uma rotação η sobre os campos $\varphi^3_{\mu\nu}$ e $\psi_{\mu\nu}$. Isto é possível posto que uma simples mudança de representação não altera a compatibilidade do sistema.

Definiremos uma combinação linear dos campos $\varphi^3_{\mu\nu}$ e $\psi_{\mu\nu}$ através da rotação abaixo:

$$\begin{pmatrix} \varphi^3_{\mu\nu} \\ \psi_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\mathrm{sen}\eta \\ \mathrm{sen}\eta & \cos\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mu\nu} \\ \phi_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (4.2.9)$$

isto é,

$$\varphi^3_{\mu\nu} = Z_{\mu\nu} \cos\eta - \phi_{\mu\nu} \,\mathrm{sen}\eta \qquad (4.2.10a)$$

$$\psi_{\mu\nu} = Z_{\mu\nu} \,\mathrm{sen}\eta + \phi_{\mu\nu} \cos\eta \qquad (4.2.10b)$$

o que, inversamente, nos dá:

$$Z_{\mu\nu} = \varphi^3_{\mu\nu} \cos\eta + \psi_{\mu\nu} \,\mathrm{sen}\eta \qquad (4.2.11a)$$

$$\phi_{\mu\nu} = -\varphi^3_{\mu\nu} \,\mathrm{sen}\eta + \psi_{\mu\nu} \cos\eta \qquad (4.2.11b)$$

Vamos agora reescrever L_ϕ, dada por (4.2.8), na nova representação. Temos:

$$\begin{aligned} L_\phi = {} & \lambda^2 b^2 \varphi^-_{\mu\nu}\varphi^{+\mu\nu} + \lambda^2 a^2 (Z_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}\eta + \phi_{\mu\nu}\cos\eta)^2 + \\ & + \lambda^2 a^2 (Z_{\mu\nu}\cos\eta - \phi_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}\eta)^2 + \\ & - \lambda^2 2ab (Z_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}\eta + \phi_{\mu\nu}\cos\eta)(Z_{\mu\nu}\cos\eta - \phi_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}\eta) = \end{aligned}$$

$$= \lambda^2 b^2 \varphi^-_{\mu\nu}\varphi^{+\mu\nu} + \lambda^2 (a^2 \mathrm{sen}^2\eta + b^2\cos^2\eta - 2ab\,\mathrm{sen}\eta\cos\eta)\, Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} +$$

$$\lambda^2 (a^2\cos^2\eta + b^2\mathrm{sen}^2\eta + 2ab\,\mathrm{sen}\eta\cos\eta)\, \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} +$$

$$\lambda^2 [2(a^2-b^2)\mathrm{sen}\eta\cos\eta + 2ab(\mathrm{sen}^2\eta - \cos^2\eta)]\, \phi_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}$$

Como a, b e η são constantes arbitrárias, é possível selecionar dentre os campos de spin-2 aquele que tenha massa nula. Escolhendo, por exemplo, $\phi_{\mu\nu}$ como sendo precisamente aquele que teria massa nula devemos impor:

$$\lambda^2(a^2\cos^2\eta + b^2\text{sen}^2\eta + 2ab\ \text{sen}\eta\ \cos\eta) = 0$$

isto é,

$$m_\phi = \lambda^2(a\ \cos\eta + b\ \text{sen}\eta)^2 = 0 \qquad (4.2.13)$$

que implica em,

$$a = -\ \text{tg}\eta \qquad (4.2.14)$$

Impondo que a igualdade acima seja satisfeita, o termo de interação ($\phi_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}$) da lagrangeana dada em (4.2.12) se anula identicamente.

Sendo assim, a lagrangeana L_ϕ reduz-se à:

$$L_\phi = m_\varphi\ \varphi^-_{\mu\nu}\varphi^{+\mu\nu} + M^2\ Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \qquad (4.2.15)$$

onde,

$$m^2_\varphi = \lambda^2 b^2 \qquad (4.2.16a)$$

$$M^2 = \lambda^2(a\ \text{sen}\eta - b\ \cos\eta)^2 \qquad (4.2.16b)$$

A lagrangeana total agora será dada pela soma de L_φ, L_ψ e L_ϕ , na nova representação, sendo a última a parte dos campos massivos.

Por coerência, uma rotação de η deve ser igualmente aplicada sobre os tensores $Q^{\alpha}_{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$. Assim,

$$\begin{pmatrix} K^{3\alpha}_{\mu\nu} \\ Q^{\alpha}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\eta & -\mathrm{sen}\eta \\ \mathrm{sen}\eta & \cos\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{\alpha}_{\mu\nu} \\ V^{\alpha}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{4.2.17}$$

Então,

$$K^{3\alpha}_{\mu\nu} = U^{\alpha}_{\mu\nu} \cos\eta - V^{\alpha}_{\mu\nu} \mathrm{sen}\eta \tag{4.2.18a}$$

$$Q^{\alpha}_{\mu\nu} = V^{\alpha}_{\mu\nu} \cos\eta + U^{\alpha}_{\mu\nu} \mathrm{sen}\eta \tag{4.2.18b}$$

e ainda,

$$K^{+\alpha}_{\mu\nu} = K^{1\alpha}_{\mu\nu} + i\, K^{2\alpha}_{\mu\nu} \tag{4.2.19a}$$

$$K^{-\alpha}_{\mu\nu} = K^{1\alpha}_{\mu\nu} - i\, K^{2\alpha}_{\mu\nu} \tag{4.2.19a}$$

que correspondem a $\varphi^{+\mu\nu}$ e $\varphi^{-}_{\mu\nu}$ respectivamente.

Por simplificação, iremos apresentar a seguir a alteração de representeção de cada lagrangeana separadamente. Começaremos por L_φ.

$$L_\varphi = \sqrt{-\gamma} \left\{ \gamma^{\mu\nu} (\vec{K}.\vec{K})_{\mu\nu} + \vec{\varphi}^{\mu\nu}.(D_\alpha \vec{K}^{\alpha}_{\mu\nu} + D_{(\mu}\vec{K}_{\nu)}) \right\}$$

$$(\vec{K}.\vec{K})_{\mu\nu} = (K^1K^1)_{\mu\nu} + (K^2K^2)_{\mu\nu} + (K^3K^3)_{\mu\nu} \tag{4.2.20}$$

onde,

$$(K^1K^1)_{\mu\nu} = K^{1\alpha}_{\mu\nu} K^1_\alpha + K^{1\lambda}_{\mu\alpha} K^{1\alpha}_{\lambda\nu} \tag{4.2.21}$$

onde não se deve somar nos índices repetidos do mesmo andar.

Usando (4.2.19), podemos verificar que:

$$(K^1K^1)_{\mu\nu} + (K^2K^2)_{\mu\nu} = (K^+K^-)_{\mu\nu} \tag{4.2.22}$$

e de (4.2.18), temos:

$$(K^3K^3)_{\mu\nu} = K^{3\alpha}_{\mu\nu} K^3_\alpha + K^{3\lambda}_{\mu\alpha} K^{3\alpha}_{\lambda\nu} =$$

$$= (U^\alpha_{\mu\nu} \cos\eta - V^\alpha_{\mu\nu} \operatorname{sen}\eta)(U_\alpha \cos\eta - V_\alpha \operatorname{sen}\eta) +$$

$$- (U^\alpha_{\mu\beta} \cos\eta - V^\alpha_{\mu\beta} \operatorname{sen}\eta)(U^\beta_{\nu\alpha} \cos\eta - V^\beta_{\nu\alpha} \operatorname{sen}\eta) =$$

$$= (UU)_{\mu\nu} \cos^2\eta + (VV)_{\mu\nu} \operatorname{sen}^2\eta - (UV)_{\mu\nu} \operatorname{sen}\eta \cos\eta \tag{4.2.23}$$

onde,

$$(UV)_{\mu\nu} = U^\alpha_{\mu\nu}V_\alpha + V^\alpha_{\mu\nu}U_\alpha - U^\alpha_{\mu\beta}V^\beta_{\nu\alpha} - V^\alpha_{\mu\beta}U^\beta_{\nu\alpha} \tag{4.2.24}$$

Sendo assim, o primeiro termo de L_φ se escreve:

$$\gamma^{\mu\nu}\left\{(K^+K^-)_{\mu\nu} + (UU)_{\mu\nu} \cos^2\eta + (VV)_{\mu\nu} \operatorname{sen}^2\eta - (UV)_{\mu\nu} \operatorname{sen}\eta \cos\eta\right\} \tag{4.2.25}$$

No segundo termo além das equações (4.2.18) e (4.2.19), usando (4.2.7) e (4.2.10), obtemos:

$$\vec{\varphi}^{\mu\nu}\cdot(D_\alpha \vec{K}^\alpha_{\mu\nu} + D_{(\mu}\vec{K}_{\nu)}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \varphi^{+\mu\nu}(D_\alpha K^{-\alpha}_{\mu\nu} + D_{(\mu}K^{-}_{\nu)}) + + \varphi^{+\mu\nu}(D_\alpha K^{-\alpha}_{\mu\nu} + D_{(\mu}K^{-}_{\nu)}) \right\} +$$

$$+ Z^{\mu\nu}\left\{ (D_\alpha U^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu U_\mu)\cos^2\eta - (D_\alpha V^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu V_\mu)\operatorname{sen}\eta \cos\eta \right\} +$$

$$+ \phi^{\mu\nu}\left\{ (D_\alpha V^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu V_\mu)\operatorname{sen}^2\eta - (D_\alpha U^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu U_\mu)\operatorname{sen}\eta \cos\eta \right\}$$

(4.2.26)

Finalmente, L_φ , na nova representação, se escreve como:

$$L_\varphi = \sqrt{-\gamma} \left\{ \gamma^{\mu\nu}\left[(K^+K^-)_{\mu\nu} + (UU)_{\mu\nu} \cos^2\eta + (VV)_{\mu\nu} \operatorname{sen}^2\eta + \right.\right.$$

$$\left. - (UV)_{\mu\nu}\operatorname{sen}\eta \cos\eta \right] + \frac{1}{2} \left[\varphi^{+\mu\nu}(D_\alpha K^{-\alpha}_{\mu\nu} + D_{(\mu}K^{-}_{\nu)}) + \varphi^{-\mu\nu}(D_\alpha K^{+\alpha}_{\mu\nu} + \right.$$

$$\left. + D_{(\mu}K^{+}_{\nu)})\right] + Z^{\mu\nu}\left[(D_\alpha U^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu U_\mu)\cos^2\eta - (D_\alpha V^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu V_\mu)\operatorname{sen}\eta \cos\eta\right] +$$

$$+ \phi^{\mu\nu} \left[(D_\alpha V^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu V_\mu)\operatorname{sen}^2\eta - (D_\alpha U^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu U_\mu)\operatorname{sen}\eta \cos\eta \right]$$

(4.2.27)

Resta reescrevermos L_ψ na nova representação.

$$L_\psi = \sqrt{-\gamma}\left\{ \gamma^{\mu\nu}(QQ)_{\mu\nu} + \sqrt{K_E}\ \psi^{\mu\nu}(Q^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - Q_{\mu;\nu}) + \right.$$

$$\left. + \frac{K_b}{K_E}\sqrt{K_b}\,\psi^{\mu\nu}(QQ)_{\mu\nu} \right\}$$

Usando a equação (4.2.18) e (4.2.10), assim como na demonstração de (4.2.23), podemos verificar que:

$$(QQ)_{\mu\nu} = (UU)_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}^2\eta + (VV)_{\mu\nu}\cos^2\eta + (UV)_{\mu\nu}\mathrm{sen}\eta\,\cos\eta \tag{4.2.28}$$

e,

$$\sqrt{K_E}\;\psi^{\mu\nu}(Q^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - Q_{\mu;\nu}) + \frac{K_b}{K_E}\sqrt{K_b}\,\psi^{\mu\nu}(QQ)_{\mu\nu} =$$

$$= Z^{\mu\nu}\left\{\sqrt{K_E}\left[(U^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - U_{\mu;\nu})\mathrm{sen}^2\eta + (V^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - V_{\mu;\nu})\cos\eta\,\mathrm{sen}\eta\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{K_b}{K_E}\sqrt{K_b}\left[(UU)_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}^3\eta+(VV)_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}\eta\,\cos^2\eta+(UV)_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}^2\eta\,\cos\eta\right]\right\}+$$

$$+\;\phi^{\mu\nu}\left\{\sqrt{K_E}\left[(U^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - U_{\mu;\nu})\mathrm{sen}\eta\,\cos\eta + (V^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - V_{\mu;\nu})\cos^2\eta\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{K_b}{K_E}\sqrt{K_b}\left[(UU)_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}^2\eta\,\cos\eta+(VV)_{\mu\nu}\cos^3\eta+(UV)_{\mu\nu}\,\mathrm{sen}\eta\,\cos^2\eta\right]\right\} \tag{4.2.29}$$

Assim sendo, a lagrangeana total para os campos $\varphi^{\pm\mu\nu}$, $Z_{\mu\nu}$ e $\phi_{\mu\nu}$ é dada por:

$$L_T = \sqrt{-\gamma}\Big\{\gamma^{\mu\nu}\Big[(K^+K^-)_{\mu\nu} + (UU)_{\mu\nu} + (VV)_{\mu\nu}\Big] + \frac{1}{2}\varphi^{\pm\mu\nu}(D_\alpha K^{\mp\alpha}_{\mu\nu} +$$

$$+ D_{(\mu}K^{\mp}_{\nu)}) + Z^{\mu\nu}\Big[(D_\alpha U^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu U_\mu)\cos^2\eta + (U^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - U_{\mu;\nu})\operatorname{sen}^2\eta +$$

$$+ (-D_\alpha V^\alpha_{\mu\nu} + D_\nu V_\mu + V^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - V_{\mu;\nu})\operatorname{sen}\eta\cos\eta\Big] +$$

$$+ K_b\sqrt{K_b}\Big[(UU)_{\mu\nu}\operatorname{sen}^3\eta + (VV)_{\mu\nu}\operatorname{sen}\eta\cos^2\eta + (UV)_{\mu\nu}\operatorname{sen}^2\eta\cos\eta\Big] +$$

$$+ \phi^{\mu\nu}\Big[(D_\alpha V^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu V_\mu)\operatorname{sen}^2\eta + (V^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - V_{\mu;\nu})\cos^2\eta +$$

$$(-D_\alpha U^\alpha_{\mu\nu} + D_\nu U_\mu + U^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - U_{\mu;\nu})\operatorname{sen}\eta\cos\eta\Big] +$$

$$+ K_b\sqrt{K_b}\Big[(UU)_{\mu\nu}\operatorname{sen}^2\eta\cos\eta + (VV)_{\mu\nu}\cos^3\eta + (UV)_{\mu\nu}\operatorname{sen}\eta\cos^2\eta\Big]\Big\}$$

(4.2.30)

onde consideramos $K_E = 1$.

Se tomarmos ainda

$$K_b\sqrt{K_b} = (\cos^3\eta)^{-1} \tag{4.2.31}$$

podemos verificar que a lagrangeana total (4.2.30) contêm uma parte referente a lagrangeana livre do campo $\phi^{\mu\nu}$ dada por:

$$L_{livre} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu})\Big\{(VV)_{\mu\nu} + (V^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - V_{\mu;\nu})\Big\}$$

(4.2.32)

que tem a mesma forma da lagrangeana do campo gravitacional na teoria de Grishuck, Petrov e Popova. Deve-se notar porém que, na lagrangeana (4.2.30), não existem termos de interação entre os campos $\varphi^{\pm\mu\nu}$ e o campo $\phi_{\mu\nu}$, o que a princípio comprometeria o caráter de universalidade da gravitação. Podemos ainda argumentar que, sendo estes ($\varphi^{\pm}_{\mu\nu}$) campos quânticos, nada podemos afirmar a respeito de uma possível interação destes com a gravitação.

CONCLUSÃO

Em praticamente todo este trabalho examinamos vários aspectos concernentes à representação de campos de spin-2 em termo das variáveis de Fierz, motivados por alguns aspectos expostos na introdução.

No primeiro capítulo fizemos uma breve revisão da dinâmica das variáveis de Fierz utilizando a lagrangeana proposta por Novello e Neto[4] buscando traçar um quadro semelhante ao da eletrodinâmica de Maxwell. Construimos, também baseados nesta analogia, uma teoria similar à de Fermi para o campo de spin-1. Eliminamos com isto, o problema de vínculos no formalismo hamiltoniano e obtivemos uma teoria manifestamente covariante.

No capítulo 2 apresentamos a quantização das teorias formuladas no capítulo 1 (tipo Maxwell e tipo Fermi). No caso da quantização à Fermi, obtivemos uma hamiltoniana correspondente a um sistema de 16 quanta independentes. Assim, para obtermos a hamiltoniana equivalente a da teoria de calibre impomos condições sobre os estados quânticos do espaço de Hilbert. Mais uma vez, esta situação é semelhante a que ocorre no eletromagnetismo de Fermi. Não obstante, no nosso problema, a teoria "Maxwelliana" descreve dois campos de spin-2 com paridades e energias com sinais opostos. Assim, é mister impormos uma condição subsidiária suplementar sobre os estados físicos para eliminarmos um destes campos e obter uma hamiltoniana com sinal definido.

É importante frisar que a teoria que descreve dois campos deveria ainda ser examinada como tal, tendo em vista uma possível analogia com a teoria para campos de spin-1, que admite a existência de monopólos magnéticos.

No capítulo 3 construimos duas teorias não lineares para as variáveis de Fierz, utilizando o critério de Boillat[14], o qual impõe a condição de excepcionalidade para selecionar entre as teorias não lineares aquelas que melhor representam os fenômenos físicos.

Embora estas teorias sejam bastante elegantes, por serem excepcionais e terem uma estreita semelhança estrutural com a eletrodinâmica de Born-Infeld, devemos lembrar que a motivação para construirmos tais teorias foi a de descrever de forma alternativa interações gravitacionais. Assim, uma extensão natural e necessária deste trabalho seria a de verificar se estas teorias estão de acordo com os resultados observacionais da gravitação. Vimos também que apenas a segunda lagrangeana (3.4.18) admite como primeira aproximação a lagrangeana da teoria linear construída no capítulo 1 (1.7). Uma outra extensão necessária, seria encontrar a relação-ponte entre as variáveis de Fierz e a variável fundamental da TRG de Einstein, o tensor métrico.

Finalmente, no quarto e último capítulo mostramos a coerência de uma teoria "tipo Glashow-Weinberg-Salam" para campos de spin-2. Analisamos o modelo proposto por M. Novello e E. Elbaz, que utilizam a formulação de Grishchuk, Petrov e Popova da gravitação. Como dissemos anteriormente, neste último capítulo utilizamos a variável padrão devido a não conhecermos ainda a relação entre a variável de Fierz e o tensor métrico para campos fortes. Entretanto, para campos fracos, toda a análise feita neste capítulo é perfeitamente válida para o tensor de Fierz, bastando para isto utilizar as relações (1.1.1).

APÊNDICE A

CÁLCULO CLÁSSICO DO MOMENTO ANGULAR

Supomos que a integral da ação

$$S = \int L(\psi^{\alpha\beta\mu}(x^\sigma), \psi^{\alpha\beta\mu}{}_{,\mu}(x^\sigma))\ d^4x \qquad (A.1)$$

é inveriante sob transformações de Lorentz infinitesimais, i.e.,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu}\ x_\nu \qquad (A.2)$$

com,

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\ \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (A.3)$$

(A.2), pode também ser escrita como,

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\, f^\mu{}_{\alpha\beta}\ \varepsilon^{\alpha\beta} \qquad (A.4)$$

sendo,

$$f^\mu{}_{\alpha\beta} = \delta^\mu{}_{[\alpha}\eta_{\beta]}x^\nu \qquad (A.5)$$

A transformação no campo se expressa da seguinte forma:

$$\psi^{\alpha\beta\mu}(x^\sigma) \rightarrow \psi'^{\alpha\beta\mu}(x'^\sigma) = \psi^{\alpha\beta\mu}(x^\sigma) + \frac{1}{2}\, F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma}\ \varepsilon^{\rho\sigma} \qquad (A.6)$$

mas,

$$\psi'^{\alpha\beta\mu}(x'^{\sigma}) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma}) \qquad (A.7)$$

Expandindo $\psi'^{\alpha\beta\mu}(x'^{\sigma})$ em torno do ponto x^{σ} e tomando os termos de primeira ordem em $\varepsilon^{\alpha\beta}$, obtemos:

$$\psi'^{\alpha\beta\mu}(x'^{\sigma}) = \psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2} f^{\alpha}_{ab,\tau}\varepsilon^{ab}\, \delta^{\mu}_{\rho}\, \delta^{\beta}_{\lambda}\, \psi^{\tau\lambda\rho}(x^{\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{2} f^{\beta}_{ab,\tau}\varepsilon^{ab}\, \delta^{\mu}_{\rho}\, \delta^{\alpha}_{\lambda}\, \psi^{\tau\lambda\rho}(x^{\sigma}) + 0(\varepsilon^{2}) \qquad (A.8)$$

De (A.5) tira-se:

$$f^{\mu}{}_{\alpha\beta,\tau} = \delta^{\mu}{}_{[\alpha}\eta_{\beta]}\delta^{\beta}_{\tau} \qquad (A.9)$$

Substituindo (A.9) na expansão de $\psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma})$, obtemos:

$$\psi'^{\alpha\beta\mu}(x'^{\sigma}) = \psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2} (\delta^{\alpha}_{a}\, \eta_{b\tau} - \delta^{\alpha}_{b}\, \eta_{a\tau})\, \varepsilon^{ab}\, \psi^{\tau\beta\mu}(x^{\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\delta^{\beta}_{a}\eta_{b\tau} - \delta^{\beta}_{b}\eta_{a\tau})\varepsilon^{ab}\psi^{\alpha\tau\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2} (\delta^{\mu}_{a}\eta_{b\tau} - \delta^{\mu}_{b}\eta_{a\tau})\varepsilon^{ab}\psi^{\alpha\beta\tau}(x^{\sigma}) =$$

$$= \psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha}{}_{\tau}\, \psi^{\tau\beta\mu}(x^{\sigma}) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\tau}{}^{\alpha}\, \psi^{\tau\beta\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta}{}_{\tau}\, \psi^{\alpha\tau\mu}(x^{\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_{\tau}{}^{\beta}\, \psi^{\alpha\tau\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu}{}_{\tau}\, \psi^{\alpha\beta\tau}(x^{\sigma}) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\tau}{}^{\mu}\, \psi^{\alpha\beta\tau}(x^{\sigma}) =$$

$$= \psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha\tau} - \varepsilon^{\tau\alpha})\psi_{\tau}{}^{\beta\mu}(x^{\sigma}) + \frac{1}{2} (\varepsilon^{\beta\tau} - \varepsilon^{\tau\beta})\psi^{\alpha}{}_{\tau}{}^{\mu}(x^{\sigma}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\varepsilon^{\mu\tau} - \varepsilon^{\tau\mu})\psi^{\alpha\beta}{}_{\tau}(x^{\sigma})$$

então,

$$\psi'^{\alpha\beta\mu}(x'^{\sigma}) = \psi^{\alpha\beta\mu}(x^{\sigma}) + \varepsilon^{\alpha\tau}\psi_{\tau}{}^{\beta\mu}(x^{\sigma}) + \varepsilon^{\beta\tau}\psi^{\alpha}{}_{\tau}{}^{\mu}(x^{\sigma}) + \varepsilon^{\mu\tau}\psi^{\alpha\beta}{}_{\tau}(x^{\sigma}) \tag{A.10}$$

Comparando a equação acima com (A.6), verificamos que:

$$\frac{1}{2} F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma}\, \varepsilon^{\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\tau}\psi_{\tau}{}^{\beta\mu}(x^{\nu}) + \varepsilon^{\beta\tau}\psi^{\alpha}{}_{\tau}{}^{\mu}(x^{\nu}) + \varepsilon^{\mu\tau}\psi^{\alpha\beta}{}_{\tau}(x^{\nu}) =$$

$$= (\psi_{\tau}{}^{\beta\mu}(x^{\nu})\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma} + \psi^{\alpha}{}_{\tau}{}^{\mu}(x^{\nu})\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma} - \psi^{\alpha\beta}{}_{\rho}(x^{\nu})\delta^{\mu}_{\sigma})\varepsilon^{\rho\sigma} \tag{A.11}$$

logo,

$$\frac{1}{2} F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} = \psi_{\tau}{}^{\beta\mu}(x^{\nu})\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma} + \psi^{\alpha}{}_{\tau}{}^{\mu}(x^{\nu})\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma} - \psi^{\alpha\beta}{}_{\rho}(x^{\nu})\delta^{\mu}_{\sigma} \tag{A.12}$$

A lei de transformação, correspondente a invariancia sob a transformação (A.6) é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda}} F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} + (T^{\lambda}{}_{\sigma}x_{\rho} - T^{\lambda}{}_{\rho}x_{\sigma}) \right] = 0 \tag{A.13}$$

onde $T^{\lambda}{}_{\sigma}$ é o tensor momento energia.

A equação (A.13), expressa a conservação do momento angular total. O primeiro termo dentro do parêntese corresponde a densidade de momento angular de spin, e o segundo termo, a densidade de momento angular orbital.

Define-se:

$$M^{\lambda}_{\rho\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda}} F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} + (T^{\lambda}{}_{\sigma}x_{\rho} - T^{\lambda}{}_{\rho}x_{\sigma}) \tag{A.14}$$

então,

$$M_{\rho\sigma} = \int d^3x\, M^0_{\rho\sigma} \tag{A.15}$$

representa um momento angular correspondente a uma rotação no plano $\rho\sigma$.

Calcularemos a expressão clássica do momento angular intrínseco, para a lagrangeana "tipo Fermi" (1.4.4)

$$L = \frac{1}{2}\,(A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda})^2 + (\text{div.}) \tag{A.16}$$

De (A.14) e (A.12), temos que:

$$S^{\lambda}_{\rho\sigma} = \frac{\partial L}{\partial A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\lambda}}\, F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} \tag{A.17}$$

sendo,

$$F^{\alpha\beta\mu}_{\rho\sigma} = A_{\tau}{}^{\beta\mu}(x^{\nu})\,\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma} + A^{\alpha}{}_{\tau}{}^{\mu}(x^{\nu})\,\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\tau}_{\sigma} - A^{\alpha\beta}{}_{\rho}(x^{\nu})\,\delta^{\mu}_{\sigma} \tag{A.18}$$

então,

$$S^{\lambda}_{\rho\sigma} = A^{\alpha\beta\mu,\lambda}\,(A_{\sigma\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\rho} + A_{\alpha\sigma\mu}\delta^{\beta}_{\rho} + A_{\beta\alpha\rho}\delta^{\mu}_{\sigma} + A_{\beta\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma} - A_{\alpha\rho\mu}\delta^{\beta}_{\sigma} - A_{\beta\alpha\sigma}\delta^{\mu}_{\rho}) \tag{A.19}$$

o que implica em

$$S_{\rho\sigma} = \int d^3x\, S^0_{\rho\sigma} = \int d^3x \left[\dot{A}_{\rho}{}^{\beta\mu} A_{\sigma\beta\mu} + \dot{A}^{\alpha}{}_{\rho}{}^{\mu} A_{\alpha\sigma\mu} + \dot{A}^{\alpha\beta}{}_{\sigma} A_{\beta\alpha\rho} + \right.$$
$$\left. - \dot{A}_{\sigma}{}^{\beta\mu} A_{\rho\beta\mu} - \dot{A}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\mu} A_{\alpha\rho\mu} - \dot{A}^{\alpha\beta}{}_{\rho} A_{\beta\alpha\sigma} \right] \tag{A.20}$$

Isto é, o momento angular intrínseco, na direção ortogonal ao plano definido por $\rho\sigma$, é:

$$S_{\rho\sigma} = \int d^3x \left[2\dot{A}_{\rho}{}^{\alpha\mu} A_{\sigma\alpha\mu} + \dot{A}^{\alpha\mu}{}_{\sigma} A_{\mu\alpha\rho} - 2\dot{A}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\mu} A_{\alpha\rho\mu} - \dot{A}^{\alpha\mu}{}_{\rho} A_{\mu\alpha\sigma}\right] \tag{A.21}$$

APÊNDICE B

PROPRIEDADES DO TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN E DO TENSOR DE WEYL

O objetivo deste apêndice é fazer uma listagem de várias propriedades do tensor de curvatura de Riemann e do tensor de Weyl, utilizadas no desenvolvimento do capítulo 3.

Usando as definições de $g_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ dadas na página de notações, obtemos algumas relações entre estes tensores e também como eles operam com os tensores de Riemann e de Weyl.

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\sigma}{}^{\beta\mu\nu} = -2g_{\alpha\beta\sigma\nu}g^{\beta\nu} = -6g_{\alpha\sigma} \tag{B.1a}$$

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = -24 \tag{B.1b}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\mu\nu\rho\sigma} = 2g_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} \tag{B.1c}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\sigma}{}^{\beta\mu\nu} = 6g_{\alpha\sigma} \tag{B.1d}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\alpha\beta\mu\nu} = 24 \tag{B.1e}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}R_{\sigma}{}^{\beta\mu\nu} = g_{\alpha\beta\mu\nu}R_{\sigma\lambda}{}^{\mu\nu}g^{\beta\lambda} = 2R_{\alpha\sigma} \tag{B.1f}$$

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = 2R \tag{B.1g}$$

$$g_{\alpha\mu}W^{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \tag{B.1h}$$

Podemos escrever $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ em termo das sua partes irredutíveis, sob a forma,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + H_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6} R\, g_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{B.2}$$

onde,

$$H_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{ R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} + R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu} \right\} \tag{B.3}$$

Usando (D.1) e (D.3) temos:

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} = 2H_{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{B.4a}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\sigma}{}^{\beta\mu\nu} = 2H_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\sigma\mu} = 2\left[R_{\alpha\sigma} + \frac{1}{2} Rg_{\alpha\sigma}\right] \tag{B.4b}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\alpha\beta\mu\nu} = 6R \tag{B.4c}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}H^{\alpha\beta\mu\nu} = R^2 + 2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.4d}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}R_{\sigma}{}^{\beta\mu\nu} = R_{\sigma}{}^{\mu}R_{\mu\alpha} + R_{\alpha\beta\sigma\mu}R^{\beta\mu} \tag{B.4e}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.4f}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}W_{\sigma}{}^{\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\sigma\nu}R^{\beta\nu} \tag{B.4g}$$

$$H_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \tag{B.4h}$$

$$\mathring{H}_{\alpha\beta\mu\nu}R_{\sigma}^{\ \beta\mu\nu} = \mathring{R}_{\alpha\beta\sigma\nu}R^{\beta\nu} \tag{B.41}$$

Vejamos como nós podemos calcular uma relação do tipo $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu}{}_{\sigma}$, a partir das relações dadas acima:

Seja,

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} = (W_{\mu\alpha\beta\sigma} + H_{\mu\alpha\beta\sigma} - \frac{1}{6} R\ g_{\mu\alpha\beta\sigma})R_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma}$$

$$= W_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} + H_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} - \frac{1}{6} R\ g_{\mu\alpha\beta\sigma} \tag{B.5}$$

mas,

$$W_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} = W_{\mu\alpha\beta\sigma}W_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} + W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.6}$$

e,

$$W_{\mu\alpha\beta\sigma}W_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4} Dg_{\mu\nu} \qquad \text{(ref.32)} \tag{B.7}$$

onde,

$$D = W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu}$$

então,

$$W_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}^{\ \alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4} Dg_{\mu\nu} + W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.8}$$

o que implica que:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{B.9}$$

Voltando a equação (D.5) obtemos:

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}Dg_{\mu\nu} + W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + H_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} - \frac{1}{3}R\,R_{\mu\nu} \tag{B.10}$$

Usando (D.4), obtemos:

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}Dg_{\mu\nu} + W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\mu\alpha}R_{\nu}{}^{\alpha} + R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R\,R_{\mu\nu} \tag{B.11}$$

mas,

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} &= W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + H_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{6}Rg_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \\ &= W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}R\,R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - R_{\mu\alpha}R_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{R}{6}(Rg_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}) \\ &= W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{2}{3}R\,R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - R_{\mu\alpha}R_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{R^2}{6}g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{B.12}$$

Substituindo (B.12) em (B.11), obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}Dg_{\mu\nu} &+ 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + 2R_{\mu\alpha}R_{\nu}{}^{\alpha} - R\,R_{\mu\nu} + \\ &- \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{R^2}{6}g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{B.13}$$

Vamos tirar o traço desta equação, para escrevê-la, convenientemente, na forma utilizada no capítulo 3.

$$A = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = D + 2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \tag{B.14}$$

Substituindo (B.14) em (B.13), obtemos:

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \left(\frac{1}{4}A - R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}R^{2}\right) g_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + 2R_{\mu\alpha}R_{\nu}{}^{\alpha} - R\,R_{\mu\nu} \tag{B.15}$$

Para reescrever (B.15) de forma concisa, vamos definir a seguinte quantidade:

$$\tau_{\mu\nu} = 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + 2R_{\mu\alpha}R_{\nu}{}^{\alpha} - R\,R_{\mu\nu} \tag{B.16}$$

cujo traço é dado por:

$$\tau = 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^{2} \tag{B.17}$$

Então a forma final de (B.15) torna-se:

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}(A - \tau)g_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \tag{B.18}$$

Faremos uma tabela de propriedades análogas a (B.18), que são obtidas utilizando-se o mesmo procedimento da demonstração anterior.

TABELA DE PROPRIEDADES PARA $R_{\mu\alpha\nu\beta}$ E $W_{\mu\alpha\nu\beta}$

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}(A - \tau)g_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \tag{B.19}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}\overset{**}{R}_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = -\frac{1}{4}(A - \tau)g_{\mu\nu} \tag{B.20}$$

$$R^{*}_{\mu\alpha\beta\sigma}\overset{*}{R}_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = -\frac{1}{4}(A - \tau)g_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \tag{B.21}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}\overset{\bullet}{R}_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}\, C\ g_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.22}$$

onde, $C = R_{\mu\alpha\beta\sigma}R^{\overset{\bullet}{\mu}\alpha\beta\sigma}$

$$R_{\mu\alpha\overset{\bullet}{\beta}\sigma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}\, C\ g_{\mu\nu} \tag{B.23}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}W_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}\, D\ g_{\mu\nu} + W_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.24}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\sigma}\overset{\bullet}{W}_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}\, C\ g_{\mu\nu} + \overset{\bullet}{W}_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.25}$$

$$R_{\overset{\bullet}{\mu}\alpha\overset{\bullet}{\beta}\sigma}W_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = -\frac{1}{4}\, D\ g_{\mu\nu} \tag{B.26}$$

$$R_{\overset{\bullet}{\mu}\alpha\overset{\bullet}{\beta}\sigma}\overset{\bullet}{R}_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = -\frac{1}{4}\, C\ g_{\mu\nu} + 2\overset{\bullet}{R}_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.27}$$

$$R_{\overset{\bullet}{\mu}\alpha\beta\sigma}W_{\nu}{}^{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{4}\, C\ g_{\mu\nu} - \overset{\bullet}{W}_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} \tag{B.28}$$

APÊNDICE C

EQUIVALÊNCIA ENTRE UMA TEORIA DE CAMPO DE SPIN-2 EM UM "BACKGROUND" ARBITRÁRIO E A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL (TRG) DE EINSTEIN

Neste apêndice, vamos apresentar uma teoria da gravitação,elaborada por Deser[30]. Não obstante, a formulação que utilizaremos aqui, será a desenvolvida por Grishchuk, Petrov e Popova[20]. Esta teoria é equivalente a teoria de Einstein da relatividade geral, porém numa formulação de teoria de campo.

Usaremos a seguinte notação:

$\gamma_{\mu\nu}(x)$: tensor métrico no espaço de Minkowski escrito num sistema de coordenadas arbitrário.

$g_{\mu\nu}(x)$: tensor métrico no espaço Riemanniano.

$\gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ é o símbolo de Christoffel da métrica $\gamma_{\mu\nu}$.

$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ é o símbolo de Christpffel da métrica $g_{\mu\nu}$.

Os índices serão levantados e abaixados com a métrica $\gamma_{\mu\nu}$, exceto $g_{\mu\nu}$, que denotaremos:

$$g^{(-1)}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad g_{\mu\lambda}\, g^{\nu\lambda} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{C.1}$$

$\varphi_{\mu\nu}(x)$: campo gravitacional (spin-2,sem massa).

$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$: tensor de curvatura da métrica $g_{\mu\nu}$

$\overset{(0)}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$: tensor de curvatura do backgroud $\gamma_{\mu\nu}$

Vamos definir a ação do campo na forma:

$$S = -\frac{1}{2k}\int d^4x\, L_g \tag{C.2}$$

onde,

$$L_g = \sqrt{-\gamma}\left\{(\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu})\right\} \tag{C.3}$$

sendo,

$$(KK)_{\mu\nu} = K_{\alpha}K^{\alpha}_{\mu\nu} - K^{\alpha}_{\mu\beta}K^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{C.4a}$$

$$K_{\alpha} = K^{\varepsilon}_{\alpha\varepsilon} \tag{C.4b}$$

$$K^{\alpha}_{\mu\nu} = K^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{C.4c}$$

O tensor $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ é um funcional de $\varphi^{\mu\nu}$ e será obtido via uma variação independente de $\varphi^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$, isto é, usando o método de Palatini(ref.). Esta variação resulta:

$$\frac{\delta L_g}{\delta\varphi_{\mu\nu}} = K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} - \frac{1}{2}K_{(\mu;\nu)} + (KK)_{\mu\nu} = 0 \tag{C.5}$$

$$\frac{\delta L_g}{\delta K^{\alpha}_{\mu\nu}} = -\varphi^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\varphi^{\rho(\nu}{}_{;\rho}\,\gamma^{\mu)}{}_{\alpha} + \gamma^{\mu\nu}K_{\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^{\varepsilon\rho}K^{(\mu}_{\varepsilon\rho}\,\gamma^{\nu)}{}_{\alpha} - \gamma^{\varepsilon(\nu}K^{\mu)}_{\varepsilon\alpha} +$$

$$+(\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})K_{\alpha} + (\gamma^{\rho\sigma} + \varphi^{\rho\sigma})K^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\alpha} - (\gamma^{\rho\nu} + \varphi^{\rho\nu})K^{\mu}_{\rho\alpha} - (\gamma^{\rho\mu} + \varphi^{\rho\mu})K^{\nu}_{\rho\alpha} \tag{C.6}$$

Multiplicando a equação (C.6) por $\gamma^{\mu}{}_{\alpha}$, obtemos:

$$-\varphi^{\mu\nu}{}_{;\mu} + 2\varphi^{\rho\nu}{}_{;\rho} + \frac{1}{2}\varphi^{\rho\mu}{}_{;\rho}\gamma^{\nu}{}_{\mu} + \gamma^{\mu\nu}K_{\mu} + \frac{1}{2}\gamma^{\varepsilon\rho}K^{(\mu}_{\varepsilon\rho}\,\gamma^{\nu)}{}_{\mu} - \gamma^{\varepsilon\nu}K^{\mu}_{\varepsilon} +$$

$$-\gamma^{\varepsilon\rho}K^{\nu}_{\varepsilon\rho} + \gamma^{\varepsilon\rho}K^{\nu}_{\varepsilon\rho} = 0$$

o que implica em:

$$\frac{3}{2}\varphi^{\rho\nu}{}_{;\rho} + \frac{3}{2}\gamma^{\varepsilon\rho}K^{\nu}_{\varepsilon\rho} = 0 \tag{C.7}$$

Substituindo (C.7) em (C.6), obtemos:

$$-\varphi^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\mu\nu}K_{\alpha} - \gamma^{\varepsilon(\nu}K^{\mu)}_{\varepsilon\alpha} + (\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})K_{\alpha} + (\gamma^{\rho\sigma} + \varphi^{\rho\sigma})K^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\alpha} +$$

$$-(\gamma^{\rho\nu} + \varphi^{\rho\nu})K^{\mu}_{\rho\alpha} - (\gamma^{\rho\mu} + \varphi^{\rho\mu})K^{\nu}_{\rho\alpha} = 0 \tag{C.8}$$

Para obter uma equação de $2^{\underline{a}}$ ordem para $\varphi_{\mu\nu}$, vamos utilizar o seguinte artifício:

Vamos definir,

$$H_{\alpha\beta\mu} \equiv -\varphi^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\mu\nu}K_{\alpha} - \gamma^{\varepsilon(\nu}K^{\mu)}_{\varepsilon\alpha} + (\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})K_{\alpha} + (\gamma^{\rho\sigma} +$$

$$+ \varphi^{\rho\sigma}) K^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\alpha} - (\gamma^{\rho\nu} + \varphi^{\rho\nu})K^{\mu}_{\rho\alpha} - (\gamma^{\rho\mu} + \varphi^{\rho\mu})K^{\nu}_{\rho\alpha} = 0 \tag{C.9}$$

onde,

$$K_{\nu\varepsilon\alpha} = \gamma_{\lambda\nu} K^{\lambda}_{\varepsilon\alpha} \tag{C.10}$$

e com esta quantidade a seguinte equação:

$$(H_{\mu\nu}{}^{\tau} + H_{\nu\mu}{}^{\tau} - H^{\tau}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} H^{\tau\alpha}{}_{\alpha}\, \gamma_{\mu\nu})_{;\tau} = 0 \tag{C.11}$$

Utilizando a definição (C.9), equação (C.11) se escreve:

$$\varphi_{\mu\nu}{}^{;\tau}{}_{;\tau} - \varphi_{(\mu}{}^{\tau}{}_{;\nu);\tau} - \frac{1}{2}\varphi^{;\tau}{}_{;\tau}\,\gamma_{\mu\nu} + \Big[\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}K^{\tau}_{\rho\sigma} - \varphi_{\mu\nu}K^{\tau} + \varphi_{(\mu}{}^{\tau}K_{\nu)} +$$

$$- \varphi^{\rho\tau}K^{\sigma}_{(\mu\rho}\gamma_{\sigma\nu)} - \varphi_{\mu}{}^{\rho}(K^{\tau}_{\nu\rho} - K^{\sigma}_{\rho\varepsilon}\gamma^{\varepsilon\tau}\gamma_{\sigma\nu}) - \varphi_{\nu}{}^{\rho}(K^{\tau}_{\mu\rho} - K^{\sigma}_{\rho\varepsilon}\gamma^{\varepsilon\tau}\gamma_{\sigma\mu})\Big]_{;\tau} +$$

$$+ (KK)_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(KK)\gamma_{\mu\nu} = 0 \tag{C.12}$$

Defininddo as seguintes quantidades,

$$G_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}{}^{;\tau}{}_{;\tau} - \varphi_{(\mu}{}^{\tau}{}_{;\nu);\tau} - \frac{1}{2}\varphi^{;\tau}{}_{;\tau}\,\gamma_{\mu\nu} \tag{C.13}$$

e,

$$P_{\mu\nu} = \Big[- \gamma_{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}K^{\tau}_{\rho\sigma} + \varphi_{\mu\nu}K^{\tau} - \varphi_{(\mu}{}^{\tau}K_{\nu)} + \varphi^{\rho\tau}K^{\sigma}_{(\mu\rho}\gamma_{\sigma\nu)} +$$

$$+ \varphi_{\mu}{}^{\rho}(K^{\tau}_{\nu\rho} - K^{\sigma}_{\rho\varepsilon}\gamma^{\varepsilon\tau}\gamma_{\sigma\nu}) + \varphi_{\nu}{}^{\rho}(K^{\tau}_{\mu\rho} + K^{\sigma}_{\rho\varepsilon}\gamma^{\varepsilon\tau}\gamma_{\sigma\mu}) \Big]_{;\tau} \tag{C.14}$$

podemos redefinir (C.12) de maneira compacta, como segue:

$$G_{\mu\nu} = - (KK)_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (KK)\gamma_{\mu\nu} + P_{\mu\nu} \qquad (C.15)$$

Vejamos agora, como se dá a equivalência desta teoria com a teoria de Einstein. Para isto, é necessário conhecermos, o tensor momento-energia do sistema referente a lagrangeana (C.3).

O tensor momento-energia à Einstein, é obtido através da seguinte variação:

$$T_{\mu\nu} = - (-\gamma)^{1/2} \frac{\delta L}{\delta\gamma^{\mu\nu}} \qquad (C.16)$$

Note que:

$$K^{\alpha}_{\mu\nu;\sigma} = K^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma} + \gamma^{\alpha}_{\lambda\sigma} K^{\lambda}_{\mu\nu} + \gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} K^{\alpha}_{\lambda\nu} - \gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} K^{\alpha}_{\mu\lambda} \qquad (C.17)$$

onde,

$$\gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\varepsilon} (\gamma_{\lambda\varepsilon,\mu} + \gamma_{\mu\varepsilon,\lambda} - \gamma_{\lambda\mu,\varepsilon}) . \qquad (C.18)$$

Então, através de um cálculo direto, porém longo, podemos verificar que:

$$kT_{\mu\nu} = (KK)_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (KK)\gamma_{\mu\nu} - P_{\mu\nu} . \qquad (C.19)$$

Assim sendo, a equação (C.15) reduz-se à:

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \tag{C.20}$$

Mostraremos agora, que (C.20) é realmente a equação de Einstein da Relatividade Geral, fazendo a interpretação geométrica desta teoria.

Vamos definir o seguinte objeto:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\; (\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}) \tag{C.21}$$

e, por simplificação, adotaremos a seguinte notação:

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\; \gamma^{\mu\nu} \tag{C.22}$$

$$\tilde{\varphi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\; \varphi^{\mu\nu} \tag{C.23}$$

Assim como a conexão do espaço de Minkowski (C.18) é obtida tomando,

$$\gamma^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0 \tag{C.24}$$

chamemos $\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$,a conexão obtida a partir da métrica $g_{\mu\nu}$, isto é,

$$g^{\alpha\beta}{}_{//\lambda} = g^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\, g^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\, g^{\alpha\mu} = 0 \tag{C.25}$$

Da definição (C.1), temos:

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\varepsilon}(\, g_{\lambda\varepsilon,\mu} + g_{\mu\varepsilon,\lambda} - g_{\lambda\mu,\varepsilon}\,) \tag{C.26}$$

Podemos relacionar (C.18) e (C.26), se tomarmos a derivada de $g_{\mu\nu}$ métrica $\gamma_{\mu\nu}$, i.e.,

$$g_{\lambda\mu;\nu} = g_{\lambda\mu,\nu} - \gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda} - \gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu} \qquad \text{(C.27a)}$$

$$g_{\lambda\nu;\mu} = g_{\lambda\nu,\mu} - \gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda} - \gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} \qquad \text{(C.27b)}$$

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu} - \gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}g_{\sigma\mu} \qquad \text{(C.27c)}$$

Assim sendo, podemos reescrever (C.26) da seguinte forma:

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\, g_{\lambda\varepsilon;\mu} + g_{\mu\varepsilon;\lambda} - g_{\lambda\mu;\varepsilon}\,) + \gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}g^{\alpha\lambda} \qquad \text{(C.28)}$$

isto é,

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = K^{\alpha}_{\lambda\mu} + \gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} \qquad \text{(C.29)}$$

onde,

$$K^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(\, g_{\lambda\varepsilon;\mu} + g_{\mu\varepsilon;\lambda} - g_{\lambda\mu;\varepsilon}\,) \qquad \text{(C.30)}$$

é um verdadeiro tensor.

O tensor de curvatura na geometria $g_{\mu\nu}$ é então dado por:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} =$$

$$= \overset{(0)}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + K^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - K^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} + K^{\alpha}_{\nu\lambda}K^{\lambda}_{\beta\mu} - K^{\alpha}_{\mu\lambda}K^{\lambda}_{\beta\nu} \qquad \text{(C.31)}$$

onde,

De (C.31), podemos notar que se a geometria do "background" for "Ricci-flat" o tensor de Ricci da métrica $g_{\mu\nu}$ será dado por:

$$R_{\mu\nu} = K_{\mu;\nu} - K^{\lambda}_{\mu\nu;\lambda} + K^{\alpha}_{\mu\lambda}K^{\lambda}_{\alpha\nu} - K^{\alpha}_{\nu\lambda}K^{\lambda}_{\alpha\mu} \qquad (C.32)$$

Neste caso, a lagrangeana (C.3), pode ser reescrita como:

$$- 2L_g = \sqrt{-\gamma}\ \left\{(\gamma^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu})\right\} =$$

$$= \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\ R_{\mu\nu} \qquad (C.33)$$

Com efeito, a lagrangeana (C.3) é equivalente à lagrangeana de Einstein para a TRG, isto é,

$$- 2\ L_g = \sqrt{-g}\ R \qquad (C.34)$$

Uma análise mais detalhada pode ser encontrada, pelo leitor interessado em se aprofundar no assunto, no artigo de Grishchuk, Petrov e Popova[20], onde se examina a interação com a matéria, "background" cuja curvatura é não "Ricci-flat", invariância de gauge e leis de conservação. Coube-nos aqui, sumarizar esta teoria, com o propósito de elucidar algumas alusões feitas no capítulo 4.

Esta elegante teoria é equivalente a TRG de Einstein, e possui o mérito de admitir o tratamento usual de teoria de campo.

REFERÊNCIAS

1 - R. P. Feynman, "Lectures on Gravitation", Caltech (1962).

2 - A. Einstein, "The Principle of Relativity", Dover Publications, Inc. (1952)

3 - K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics", Lecture Notes in Physics 169, Springer, Berlin (1982).

4 - N. P. Neto, "Teoria da Gravitação em Termo das Variáveis de Fierz-Lanczos", Tese de Doutorado, CBPF/ CNPq, RJ, (1989).

5 - M. Fierz, "Über die relativistische Theorie kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin", Hev. Phys. Acta, 12 , 3, (1939).

6 - C. Aragone e S. Deser, "Constraints on Gravitatinally Coupled Tensor Fields", Nuovo Cim., 3A , 709, (1971).

7 - A. Salam quote A. Einstein, "Nature is not economical of strutures: only of principles of fundamental applicability" , in Nobel Lectures, Rev. of Mod. Physics, 52 , 525, (1980).

8 - C. Lanczos, "The Splitting of the Riemann Tensor", Rev. Mod. Phys., 34 , 379, (1962).

9 - E. Bampi, G. Caviglia, "Third-Order Tensor Potencials for Riemann and Weyl Tensor", GRG, 15 , 375, (1983).

10 - P. Jordan, J. Ehlers e R. Sacks, "Exact solutions of the field equations of general relativity, II:

Contributions to the theory of pure gravitational radiation", Aad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math. - Nat. Kl. 1, 3, (1961).

11 - A. Lichnerowicz, "Onde et radiations életromagnétiques et gravitationelles en relativité générale", Ann. Math. Pura et Appl., 50 , 1, (1960).

12 - K. Nishijima, "Fields and Particles", ed. John David Jackson and David Pines, (1969).

13 - P. A. M. Dirac, "Lectures in Quantum Mechanics, Yeshiva Univ. Press, New York, (1962).

14 - M. Guy Boillat, "NonLinear Eletrodynamics: Lagrangeans and Equations of Motions", J. Math. Phys., 11 , n°3, 941, (1970).

15 - M. Guy Boillat, "Trajetoires de particules dans des champs hyperboliques; champs absolus életrodynamiques", C. R. Acad. Sc. Paris, 263A , 646, (1966).

16 - R. Courant e D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics II, Intercience Publishers, Inc., N.Y., (1962)

17 - P. D. Lax, "Hyperbolic Systems of Conservation Law II", Comm. on Pure and Apl. Math., X , 537, (1957).

18 - F. Halzen e Alan D. Martin, "Quarks and Leptons", ed. Wiley, (1984)

19 - M. Novello e E. Elbaz, "Electrodynamics, Gravity and Corresponding Short-Range Fermi Forces", preprint, Institut de Physique Nucléaire de Lyon, Université Claude Bernard, (1987).

20 - L. P. Grishchuk, A. N. Petrov and A. D. Popova, "Exact Theory of the (Einstein) Gravitational Field in an

Arbitrary Background Space-Time", Comm. Math. Phys , 94 , 379, (1984).

21 - R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, "Introduction to General Relativity", ed. Mc Graw-Hill, U.S.A., (1965).

22 - J. L. Anderson, "Principles of Relativity Physics", Acad. Press., N.Y., (1980).

23 - S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity", ed. John Wiley and Sons, (1972).

24 - M. Novello; Luciane R. de Freitas; N. P. Neto; N. F. Svaiter, "Quantization of Spin-Two Field in Terms of Fierz Variable -Linear Case-", Fortschritte Der Physik, nº12, 39 , (1991).

25 - Tosiya Taniuti, "On Wave Propagation in Non-Linear Fields", Progr. Theor. Phys., supl. 9, 69, (1958).

26 - M. Born and L. Infeld, "Foundations of the New Field Theory", Nature, 133 , 63, (1934).

27 - J. Hadamard, "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", N.Y., Chelsea Publ., (1949)

28 - M. Born and L. Infeld, "Foundations of the New Field Theory", Nature, 134 , 1004, (1933).

29 - M. Born and L. Infeld, "Modified Field Equations with a Finite Radius of the Electron", Nature, 132 , 282, (1933).

30 - S. Deser, GRG Journal, 1 , 9, (1970)

31 - Lewis H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cabridge Univ. Press., (1985)

"CAMPOS DE SPIN-2, VARIÁVEIS FUNDAMENTAIS:

A PROPOSTA DE FIERZ"

LUCIANE RANGEL DE FREITAS

Tese de Doutorado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Mário Novello - Presidente

Nelson Pinto Neto - Co-orientador

João Barcelos Neto

Marcos Duarte Maia

Ivano Damião Soares

Alexander Willian Smith

Rio de Janeiro, 07 de junho de 1991