MAURÍCIO ORTIZ CALVÃO

A RIQUEZA TERMODINÂMICA DAS COSMOLOGIAS DE ROBERTSON-WALKER: UMA ÓPERA EM TRÊS ATOS

TESE

DE

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1991

A Sandra,
com amor!

AGRADECIMENTOS

A meu orientador Salim, pela oportunidade de trabalho e pela paciência no convívio.

A meus colaboradores, não só científicos, Ivano, Tiomno, Teixeira, Waldemar, Marcelo e Ademir.

Aos colegas do "Pequeno Seminário", pelo ambiente, críticas e sugestões: Novello, Luiz Alberto, Nami, Regina, Luciane, Sérgio Duque, Emília, Alexandre Velasco e Marta.

Aos colegas e professores da UFRJ, do CBPF e do LNCC, pelo companheirismo: Barcellos, Cassio, Marta, Carlos Eduardo, Ildeu, Bedran, Marília, Nicolsky, Penha, Yan, Pitanga, Joaquim, Lesche, Leandro; Artur Kós, Moreira, Galvão, Renato Portugal, Sasse, Vinicius, Miriam, Caruso, Lígia, Carlos Romero, Mário Assad, Filipe, Janilo, Joel, Guilherme, Eliane, Jussara, Beto, Sandra, Ignácio, Carla, Gilvan, Alberto, Lea, Soares, Zé Luís, "Tião", Colatto, Cambraia, Vera, Fatima, Myriam, Denise, Yara; Regina, Renato, Eduardo, Karam, Clemente, Márcio, Sérgio ...

Aos amigos do peito: Eloá, Alexandre Ortiz, Victor, Armando, João Torres, Nelson Pinto, Patrício Gaete, Henrique de Oliveira, Bartô, (Amélia) Cristina, Gerson, Mioco, Ioav, Emil ...

Àqueles que começaram esta jornada científica, porém, por diversas razões, acabaram seguindo outros rumos: Vander, Fernando ("o metódico"), Allan, Ismael, Rosângela ("Rosinha"), Cléber e Chaba ...

Ao CNPq, pela bolsa concedida.

RESUMO

Investigamos a potencialidade termodinâmica dos modelos cosmológicos espacialmente homogêneos e isotrópicos (modelos de Robertson-Walker). Para tanto, apresentamos modificações em três ingredientes básicos de uma abordagem fenomenológica qualquer: (i) num primeiro ato, tratamos de modelos termostáticos, mas adotamos uma equação de estado da forma $\rho = Mn + p/(\gamma - 1)$, mais geral que a comumente utilizada no contexto cosmológico; a seguir, começamos a examinar modelos fora de equilíbrio, de modo que (ii) num segundo ato, analisamos um sistema macroscópico no referencial de Landau-Lifshitz (com difusão de partículas) a partir do ponto de vista da termodinâmica estendida (causal) e (iii) num terceiro e último ato, determinamos as conseqüências da alteração da lei de balanço para o número de partículas, a fim de darmos conta do processo de criação de matéria.

ABSTRACT

We investigate the thermodynamic richness of spatially homogeneous and isotropic cosmological models (Robertson-Walker models). To that end, we alter three of the basic ingredients of any phenomenological approach: (i) in a first act, we restrict our treatment to thermostatic situations, governed, however, by the equation of state $\rho = Mn + p/(\gamma - 1)$, which equation is more general than the one usually adopted in the cosmological framework; afterwards, we start dealing with thermo*dynamical* aspects properly, in such a way that (ii) in a second act, the matter content of the model is analyzed from the standpoint of Landau-Lifshitz's frame by means of an extended (causal) thermodynamic theory, and (iii) in a *grand finale*, our batteries are aimed at the problem of matter creation, which is taken account of via a suitable modification of the particle number balance law.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

DEFINICÕES E CONVENCÕES*

. ASSINATURA DO TENSOR MÉTRICO

$$\eta_{\alpha\beta} := \mathrm{diag}\ (1,-1,-1,-1)$$

. DERIVADA COVARIANTE

$$V^{\alpha}{}_{;\beta} := V^{\alpha}{}_{,\beta} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \lambda \end{Bmatrix} V^{\lambda}$$

. TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} := \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \mu \end{Bmatrix}_{,\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \nu \end{Bmatrix}_{,\mu} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \lambda\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\ \mu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \lambda\ \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\ \nu \end{Bmatrix}$$

. TENSOR DE RICCI

$$R_{\alpha\beta} := R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta}$$

. ESCALAR DE CURVATURA

$$^{(4)}R := R^{\alpha}{}_{\alpha}$$

. TENSOR DE EINSTEIN

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - (1/2)\ ^{(4)}R\ g_{\alpha\beta}$$

. EQUAÇÕES DE EINSTEIN

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda\ g_{\alpha\beta} = -\ T_{\alpha\beta}$$

---

* Genericamente, seguimos a notação e convenções de Anderson (Ref. 78), exceto no que diz respeito ao sistema de unidades.

. SISTEMA DE UNIDADES

$$c = 1 \ (= 2{,}9979.10^{10} \ \mathrm{cm/s})$$

$$8\pi G = 1 \ (= 8\pi.6{,}6720.10^{-8} \ \mathrm{cm^3/g.s})$$

$$k_B = 1 \ (= 1{,}3807.10^{-16} \ \mathrm{erg/K})$$

CAPÍTULO 1

INTRODUCÃO

Por que o céu noturno é escuro?

O Universo existe desde todo o sempre? É eterno? Se não, quando começou? A 23 de outubro do ano 4004 antes de Cristo, como se dizia convencido o arcebispo de Usher? De qualquer maneira, por que existe algo em vez de nada?

Como a estruturação do Universo (galáxias, planetas, vida,...) pode ir ocorrendo, em aparente contradição com a tendência de sistemas isolados, abandonados a si mesmos se uniformizarem, se caotizarem?

Por que há mais matéria que antimatéria no Universo?

Por que me refiro sempre ao Universo, como se só houvesse um? Afinal, qual o sentido da cosmologia quântica?

Por que só há, pelo menos a nível da percepção sensorial humana, três dimensões ditas espaciais e uma única dita temporal?

Por que qualquer pessoa, "erudita" ou "leiga", se deixa enlevar por essas questões? De onde vem esse fascínio que elas exercem? Todas essas indagações e muitas outras, técnicas ou não, refletem o espírito das investigações cosmológicas. Diversas culturas antigas (egípcia, mesopotâmica, zapoteca, maia, chinesa, hindu, grega,...) dão-nos testemunho de um permanente interesse por, ou mesmo necessidade de, uma cosmovisão básica em qualquer sociedade.

A cosmologia padrão, cientificamente mais aceita, repousa numa abordagem relativística. O que isso significa? Qualquer modelo relativístico (completo) pode ser concebido como convenientemente definido quando dados: (i) a *variedade* $\mathcal{M}$ de base, que identifica os eventos, (ii) o *tensor métrico* g, que caracteriza os comprimentos, ângulos e intervalos de tempo, (iii) o *conteúdo material*, responsável pelo campo gravitacional, nomeadamente, os campos físicos não-geométricos (fluido, campo escalar, campo eletromagnético,...) e as correspondentes equações dinâmicas (equações de estado + "equações fenomenológicas", equação de Klein-Gordon, equações de Maxwell,...). Pois bem, a cosmologia padrão baseia-se num espaço-tempo ($\mathcal{M}$, g) de Robertson-Walker (espacialmente maximalmente simétrico) e num fluido perfeito como conteúdo material. Destarte, a única equação que entra em jogo, além das de Einstein, é uma particular equação de estado. Neste trabalho, à guisa de exploração da potencialidade da cosmologia relativística contemporânea, perscrutaremos, essencialmente, três aspectos fundamentais do enfoque macroscópico a essa disciplina, todos eles preservando a geometria de fundo de Robertson-Walker, mas alterando, de alguma maneira, o conteúdo material.

Nesse sentido, apresentamos, no Capítulo 2, os fundamentos geométricos e termodinâmicos para toda nossa exposição subseqüente. Através de motivações que nos parecem bem sugestivas, definimos, rigorosa e consistentemente, o que entendemos por um sistema de coordenadas e um referencial (sistema de referência). Mostramos a vantagem das definições escolhidas, por intermédio da aplicação explícita das mesmas na determinação da decomposição espaço-temporal de diversas grandezas físicas e da lei de transformação das correspondentes quantidades relativas. Desenvolvemos, a seguir, de maneira direta e geral, as teorias termodinâmicas de zeroésima, primeira e segunda ordens. Por fim, demonstramos a equivalência, no sentido da invariância da densidade de fonte de entropia, das formulações de Eckart e de Landau-Lifshitz.

Como primeiro ato propriamente dito da ópera, exploramos, no Capítulo 3, a termostática dos modelos tipo Robertson-Walker. Isto é, recorremos à determinação da evolução geometrotermodinâmica das cosmologias homogêneas e isotrópicas, quando da adoção de uma equação de estado de equilíbrio mais geral que a comumente utilizada. Podemos, antes da procura de soluções analíticas, proceder a uma investigação das propriedades qualitativas dos modelos, seja pelo estudo do potencial efetivo associado a uma integral primeira do sistema, seja pelo estudo do retrato de fase. A seguir, encontramos as soluções exatas para os modelos com seção espacial chata, o que nos permite calcular também os parâmetros de desaceleração e de Hubble.

Como segundo ato, no Capítulo 4, tratamos da primeira situação de um modelo tipo Robertson-Walker dissipativo (fora de equilíbrio); a saber, vemos quais as conseqüências do tratamento de um sistema termodinâmico do ponto de vista do referencial de Landau-Lifshitz. Ademais, escolhemos como teoria de base a chamada termodinâmica estendida, que evita os problemas clássicos da teoria de primeira ordem (acausalidade, instabilidade e problema de Cauchy mal posto). Mostramos que a existência de um vetor difusão de partículas é compatível com as simetrias geométricas do "background" cosmológico costumeiro. Recuperamos, com a escolha adequada de determinados parâmetros, as soluções inflacionárias e deflacionárias já obtidas por Barrow em um outro contexto.

Como terceiro e último ato, no Capítulo 5, expomos uma formulação puramente fenomenológica do processo de criação de partículas. Fazêmo-lo através de uma apresentação manifestamente covariante e, em particular, deduzimos a conseqüente lei de evolução da temperatura. A seguir, propomos uma "relação fenomenológica" específica entre a densidade de fonte de partículas e a pressão de criação, a partir do que podemos recuperar naturalmente e criticar alguns dos resultados recentes de Prigogine e colaboradores.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS E TERMODINÂMICOS

Neste capítulo, apresentamos os conceitos, princípios e resultados que servirão como base para as aplicações e desenvolvimentos específicos dos próximos capítulos. Na primeira seção, definimos sistema de coordenadas, sistema de referência (referencial), a relação de co-mobilidade (adaptação) entre um e outro, transformações internas de coordenadas. Na segunda seção, tratamos da decomposição espaço-temporal ortogonal (3+1) de objetos geométricos com respeito a um observador instantâneo genérico (ou um referencial genérico), decomposição esta que dá origem às grandezas relativas mais diretamente associadas com os processos de medição e observação. Na terceira seção, investigamos as leis de transformação, mediante um "boost" (transformação de referencial) genérico, dessas grandezas relativas associadas ao vetor fluxo de partículas e ao tensor energia-momento (simétrico), recuperando, como caso particular, alguns resultados de King & Ellis. Na quarta seção, as variáveis básicas da abordagem termodinâmica são apresentadas, definindo-se então os referenciais de Eckart e de Landau-Lifshitz, e as leis fundamentais desse enfoque são expostas, sob a forma de "equações de balanço" para a energia e o momento, o número de partículas e a entropia. Na quinta seção, definimos estados de equilíbrio termodinâmico, exibindo a expressão particular para as grandezas básicas nesse caso. Na sexta seção, estuda-se a termodinâmica propriamente dita (de processos dissipativos), tanto de primeira, como de segunda ordem. Na última seção, demonstramos a equivalência das formulações de Eckart e de Landau-Lifshitz, no sentido de a densidade de fonte de entropia ser invariante.

As contribuições originais deste capítulo constam:

(i) das Subseçs. 2.3.1 e 2.3.2, onde as leis de transformação, sob um "boost" qualquer, da densidade de partículas, do arraste de partículas, da densidade de energia, do fluxo de energia e do estresse anisotrópico são apresentadas, numa forma manifestamente covariante (independente de coordenadas);

(ii) da Seç. 2.7, onde realizamos uma demonstração simples, mas rigorosa, da equivalência das formulações termodinâmicas de Eckart e de Landau-Lifshitz. Esse resultado é uma conseqüência relativamente direta do primeiro.

2.1. SISTEMAS DE COORDENADAS E DE REFERÊNCIA

Consideremos uma variedade espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$ temporalmente orientada. Um *sistema de coordenadas* x^α sobre uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}$ é simplesmente uma carta sobre $\mathcal{U}$, ou seja, uma correspondência biunívoca e bicontínua de $\mathcal{U}$ em $\mathbb{R}^4$. Num dado espaço-tempo, existe uma classe distinta de sistemas de coordenadas, que estão mais diretamente relacionadas com o processo de medição de intervalos de tempo e de distância espacial: um *sistema de coordenadas fisicamente admissível*[1-4] é aquele no qual, sem perda de generalidade, as curvas coordenadas $x^0 = var$, por exemplo, são do tipo temporal e as subvariedades $x^0 = const$ são do tipo espacial, ou seja,

$$g_{00} > 0 \ , \tag{2.1a}$$

$$g_{ij}dx^i dx^j < 0 \ , \tag{2.1b}$$

sempre que nem todos os dx^i sejam simultaneamente zero.[1] De agora em diante, restringir-nos-emos a esse tipo de sistemas.

Passaremos agora ao tratamento da noção de sistema de referência ou referencial. Na literatura usual de relatividade, existem dois conceitos geralmente identificados com a noção de sistema de referência: (i) sistema de coordenadas e (ii) base de tétradas. Não utilizaremos aqui nenhum desses dois conceitos pelos seguintes motivos: (a) devem existir vários sistemas de coordenadas naturalmente associados a um dado referencial, (b) um referencial deve traduzir a idéia intuitiva de um corpo material de base, não necessariamente rígido.

Levando essas críticas em consideração, adotaremos a seguinte definição de sistema de referência ou referencial:[1,4-7] um *sistema de referência* **u** é um campo vetorial do tipo temporal orientado para o futuro e normalizado a um, ou seja, um campo de quadri-velocidades. Suas curvas integrais são os *observadores em* **u**. Um *observador instantâneo* (Z, **u**(Z)) é um par constituído pelo evento Z no qual ele se situa e pela quadri-velocidade **u**(Z) que identifica o seu estado de movimento. Com essa definição de referencial, cremos ser possível lançar, no mínimo, alguma luz, dentre outros, sobre os seguintes pontos: (i) os conceitos de covariância, invariância, princípios de relatividade, princípios de equivalência e a relação entre os mesmos,[8-10] (ii) o efeito Doppler, o desvio espectral gravitacional, o desvio espectral cosmológico e a relação entre os mesmos,[11-13] (iii) a equivalência entre as formulações de Eckart e de Landau-Lifshitz para a termodinâmica relativística (cf. Seç. 2.7),[14-16] (iv) a interpretação de modelos cosmológicos inclinados,[17-19] (v) a

---

[1] Um sistema de coordenadas x^α pode ter todas as quatro congruências de curvas coordenadas de qualquer tipo (temporal, nulo ou espacial); em particular, elas podem ter todas o mesmo tipo, como as coordenadas nulas do diagrama (bi-dimensional) de Kruskal.

não-invariância do conceito de vácuo em teoria quântica de campos em referenciais não-inerciais, seja no espaço-tempo de Minkowski, seja num outro com topologia e/ou curvatura não-triviais,[20-23] e (vi) os vínculos (desigualdades) sobre as grandezas dinâmicas provenientes das condições de energia.[24,25]

Apesar de distintos os conceitos de sistema de coordenadas e referencial, conforme adotados aqui, existe uma conexão íntima e natural entre os mesmos: diremos que um sistema de coordenadas x^α e um referencial **u** são *co-móveis* um com o outro ou estão *adaptados* um ao outro quando as componentes u^α do referencial relativamente ao sistema de coordenadas tiverem a forma[2]

$$u^\alpha = (g_{00})^{-1/2}\, \delta^\alpha_0 \,. \tag{2.2}$$

É fácil mostrar agora que, se um dado sistema de coordenadas x^α está adaptado a um referencial **u**, então um outro sistema de coordenadas x'^α, dado por

$$x'^0 = x'^0(x^\alpha) \ , \tag{2.3a}$$

$$x'^i = x'^i(x^j) \ , \tag{2.3b}$$

também estará adaptado ao mesmo referencial **u**. Essas transformações de coordenadas são ditas *transformações internas* ao referencial **u**. Elas refletem a liberdade de escolha da função tempo ao longo de qualquer observador em **u**, assim como a liberdade de rotulação dos pontos no espaço

[2]Nas exposições mais comuns da assim chamada teoria da relatividade restrita, essa relação é tomada como tácita.

(por exemplo, coordenadas cartesianas, esféricas ou cilíndricas, no caso chato). Vemos de (2.3) que uma transformação de coordenadas só *induz* uma transformação de referencial quando, conforme esperado, as novas coordenadas espaciais dependerem explicitamente da antiga coordenada temporal.

2.2 DECOMPOSIÇÃO ESPAÇO-TEMPORAL ORTOGONAL DE OBJETOS GEOMÉTRICOS

Dado um observador instantâneo (Z, u(Z)), o seu *eixo temporal local* T[u] é o subespaço vetorial do espaço tangente $T_Z\mathcal{M}$ gerado por u(Z), ao passo que o seu *espaço de repouso local* R[u] é o subespaço vetorial do espaço tangente ortogonal a u(Z). Então, $T_Z\mathcal{M}$ é a soma direta de T[u] e R[u]:[7]

$$T_Z\mathcal{M} = \mathrm{T}[\mathrm{u}] \oplus \mathrm{R}[\mathrm{u}] \ . \tag{2.4}$$

Essa representação do espaço tangente $T_Z\mathcal{M}$ é dita sua *decomposição espaço-temporal ortogonal*.

Podemos agora efetuar uma decomposição do mesmo espírito para um vetor V e um tensor (de posto dois) X arbitrários, obtendo, respectivamente:

$$\mathrm{V}^\alpha = A\mathrm{u}^\alpha + B^\alpha \ , \tag{2.5a}$$

com

$$A = A(\mathrm{u}) = \mathrm{V}^\alpha \mathrm{u}_\alpha \ , \tag{2.5b}$$

$$B^\alpha = B^\alpha(\mathrm{u}) = \mathrm{h}^{\alpha\beta}\mathrm{V}_\beta \ , \tag{2.5c}$$

e

$$X^{\alpha\beta} = Cu^{\alpha}u^{\beta} + Dh^{\alpha\beta} + E^{\alpha}u^{\beta} + F^{\beta}u^{\alpha} + G^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta} , \tag{2.6a}$$

com

$$C = C(u) = X^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta} , \tag{2.6b}$$

$$D = D(u) = (1/3)h^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta} , \tag{2.6c}$$

$$E^{\alpha} = E^{\alpha}(u) = h^{\alpha}{}_{\mu}u_{\nu}X^{\mu\nu} , \tag{2.6d}$$

$$F^{\alpha} = F^{\alpha}(u) = h^{\alpha}{}_{\mu}u_{\nu}X^{\nu\mu} , \tag{2.6e}$$

$$G^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}(u) = h^{(\alpha}{}_{\mu}h^{\beta)}{}_{\nu} X^{\mu\nu} - Dh^{\alpha\beta} , \tag{2.6f}$$

$$H^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta}(u) = h^{[\alpha}{}_{\mu}h^{\beta]}{}_{\nu} X^{\mu\nu} . \tag{2.6g}$$

Aqui introduzimos o *projetor* (sobre o espaço de repouso) $h^{\alpha\beta}$, definido por

$$h^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}(u) := g^{\alpha\beta} - u^{\alpha}u^{\beta} , \tag{2.7a}$$

e gozando das seguintes propriedades:

$$h^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta} = 0 , \tag{2.7b}$$

$$h^{\alpha}{}_{\beta} h^{\beta}{}_{\gamma} = h^{\alpha}{}_{\gamma} \ , \tag{2.7c}$$

$$h^{\alpha}{}_{\alpha} = 3 \ . \tag{2.7d}$$

Aplicaremos agora essas decomposições a alguns objetos específicos.

2.2.1. VETOR VELOCIDADE $\bar{u}$[17]

$$\bar{u}^{\alpha} = u^{\alpha}\cosh \beta + e^{\alpha}\mathrm{senh}\ \beta \ , \qquad \beta \geq 0 \ , \tag{2.8a}$$

com

$$\tanh \beta =: v \ , \qquad 0 \leq v < 1 \ , \tag{2.8b}$$

onde $v = v(\bar{u})$ é o módulo da tri-velocidade relativa (usual) do observador instantâneo $(Z,\ u(Z))$ com respeito ao observador instantâneo $(Z,\ \bar{u}(Z))$; além disso,

$$e^{\alpha} u_{\alpha} = 0 \tag{2.8c}$$

e

$$e^{\alpha} e_{\alpha} = -\ 1 \ , \tag{2.8d}$$

ou seja, $e^{\alpha} = e^{\alpha}(u)$ é um vetor que fornece a orientação relativa do "boost" de u para $\bar{u}$. A relação (2.8a) pode ser facilmente resolvida para u^{α}, obtendo-se

$$u^{\alpha} = \bar{u}^{\alpha}\cosh\beta - \bar{e}^{\alpha}\text{senh}\,\beta\ , \tag{2.9a}$$

com

$$\bar{e}^{\alpha}\bar{u}_{\alpha} = 0\ , \tag{2.9b}$$

e

$$\bar{e}^{\alpha}\bar{e}_{\alpha} = -1\ . \tag{2.9c}$$

Além disso, é fácil mostrar que

$$\bar{e}^{\alpha} = u^{\alpha}\text{senh}\,\beta + e^{\alpha}\cosh\beta \tag{2.10}$$

e

$$e^{\alpha} = -\bar{u}^{\alpha}\text{senh}\,\beta + \bar{e}^{\alpha}\cosh\beta\ . \tag{2.11}$$

É importante notar que

$$\bar{v} = v := \tanh\beta\ , \tag{2.12}$$

como esperávamos. Outrossim, vale ressaltar que o "boost" inverso, de $\bar{\mathbf{u}}$ para $\mathbf{u}$, pode ser obtido de (2.8) simplesmente fazendo as substituições $u^{\alpha} \to \bar{u}^{\alpha}$ e $e^{\alpha} \to -\bar{e}^{\alpha}$, como esperávamos também.

2.2.2. VETOR FLUXO DE PARTÍCULAS **N**

$$N^{\alpha} = nu^{\alpha} + j^{\alpha} , \qquad (2.13a)$$

com

$$j^{\alpha}u_{\alpha} = 0 . \qquad (2.13b)$$

Aqui $n = n(\mathbf{u})$ é a *densidade de partículas* e $j^{\alpha} = j^{\alpha}(\mathbf{u})$ é o *arraste (de partículas)*.

2.2.3. TENSOR ENERGIA-MOMENTO (SIMÉTRICO) T[3]

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha}u^{\beta} - Ph^{\alpha\beta} + h^{\alpha}u^{\beta} + h^{\beta}u^{\alpha} + \pi^{\alpha\beta} , \qquad (2.14a)$$

com

$$h^{\alpha}u_{\alpha} = 0 , \qquad (2.14b)$$

$$\pi^{\alpha}{}_{\alpha} = \pi^{[\alpha\beta]} = \pi^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0 . \qquad (2.14c)$$

Aqui $\rho = \rho(\mathbf{u})$ é a *densidade de energia (total)*, $P = P(\mathbf{u})$ é a *pressão dinâmica (escalar)*, $h^{\alpha} = h^{\alpha}(\mathbf{u})$ é o *fluxo de energia* e $\pi^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta}(\mathbf{u})$ é o *estresse anisotrópico (tensorial sem traço)*. Às vezes, é útil também introduzir-se o *estresse total (tensorial)* como

---

[3] Em determinadas situações é útil, ou até mesmo imprescindível, a adoção de um tensor energia-momento assimétrico.[26-29]

$$\Pi^{\alpha\beta} := h^{\alpha}{}_{\mu} h^{\beta}{}_{\nu} T^{\mu\nu}$$

$$= \pi^{\alpha\beta} - Ph^{\alpha\beta} . \qquad (2.14d)$$

2.2.4. TENSOR GRADIENTE DO REFERENCIAL ∇u[30,31]

$$u^{\alpha;\beta} = a^{\alpha}u^{\beta} + (1/3)\Theta h^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} , \qquad (2.15a)$$

com

$$a^{\alpha}u_{\alpha} = 0 , \qquad (2.15b)$$

$$\sigma^{\alpha}{}_{\alpha} = \sigma^{[\alpha\beta]} = \sigma^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0 , \qquad (2.15c)$$

$$\omega^{(\alpha\beta)} = \omega^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0 . \qquad (2.15d)$$

Aqui $a^{\alpha} = a^{\alpha}(u)$ é a *quadri-aceleração*, $\Theta = \Theta(u)$ é a (o *escalar de*) *expansão*, $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}(u)$ é o *cisalhamento* (também conhecido, peregrinisticamente, como "*shear*") e $\omega^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta}(u)$ é a *vorticidade (rotação)*.

2.2.5. TENSOR CAMPO ELETROMAGNÉTICO F

$$F^{\alpha\beta} = E^{\alpha}u^{\beta} - E^{\beta}u^{\alpha} - \eta^{\alpha\beta\mu\nu}u_{\mu}B_{\nu} , \qquad (2.16a)$$

com

$$E^{\alpha}u_{\alpha} = 0 , \qquad (2.16b)$$

$$B^{\alpha}u_{\alpha} = 0 \; . \tag{2.16c}$$

Aqui $E^{\alpha} = E^{\alpha}(u)$ é o *campo eletromagnético*, $B^{\alpha} = B^{\alpha}(\mathbf{u})$ é a *indução magnética* e aparece o *tensor de Levi-Civita*

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} := (-\,g)^{-1/2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \; , \tag{2.17}$$

tal que $\varepsilon^{0123} = +\,1$.

2.3 LEIS DE TRANSFORMAÇÃO DAS GRANDEZAS RELATIVAS

Mediante uma transformação arbitrária de observador instantâneo ou referencial, conforme dada por (2.8), podemos agora investigar a mudança superveniente nas diversas grandezas relativas da decomposição espaço-temporal ortogonal de qualquer objeto geométrico.[4] Para nossos propósitos, deter-nos-emos somente nos seguintes objetos: o vetor fluxo de partículas **N** e o tensor energia-momento T.

2.3.1. VETOR FLUXO DE PARTÍCULAS N

a) densidade de partículas n:

$$\bar{n} := N^{\alpha}\bar{u}_{\alpha} \qquad \Rightarrow$$

[4] É fácil, tomando a expressão usual de uma transformação (de coordenadas) de Lorentz especial e adotando como referenciais aqueles adaptados aos sistemas de coordenadas x^{α} e x'^{α}, segundo (2.2), recuperar, por exemplo, a lei de transformação das grandezas relativas do tensor campo eletromagnético (campo elétrico e indução magnética).

$$\Rightarrow \qquad \bar{n} = \cosh\beta\, n + \mathrm{senh}\,\beta\, j^{\alpha}e_{\alpha} \; . \qquad (2.18)$$

b) <u>arraste de partículas j^{α}</u>:

$$\bar{j}^{\alpha} := N_{\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{j}^{\alpha} = j^{\alpha} - \cosh\beta\,\mathrm{senh}\,\beta\,(j^{\lambda}e_{\lambda}u^{\alpha} + ne^{\alpha}) +$$

$$- \mathrm{senh}^{2}\,\beta\,(nu^{\alpha} + j^{\lambda}e_{\lambda}e^{\alpha}) \; . \qquad (2.19)$$

2.3.2. TENSOR ENERGIA-MOMENTO T

a) <u>densidade de energia ρ</u>:

$$\bar{\rho} := T_{\alpha\beta}\bar{u}^{\alpha}\bar{u}^{\beta} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{\rho} = \rho + 2\cosh\beta\,\mathrm{senh}\,\beta\, h^{\lambda}e_{\lambda} +$$

$$+ \mathrm{senh}^{2}\,\beta\,(\rho + P + \pi^{\alpha\beta}e_{\alpha}e_{\beta}) \; . \qquad (2.20)$$

b) <u>pressão dinâmica (isotrópica) P</u>:

$$\bar{P} := -(1/3)T_{\alpha\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{P} = P + (2/3)\cosh\beta\,\mathrm{senh}\,\beta\, h^{\lambda}e_{\lambda} +$$

$$+ (1/3)\mathrm{senh}^2\,\beta\,(\rho + P + \pi^{\alpha\beta}e_\alpha e_\beta)\ . \qquad (2.21)$$

c) <u>fluxo de energia h^α</u>:

$$\bar{h}^\alpha := T_{\beta\gamma}\bar{h}^{\alpha\beta}\bar{u}^\gamma \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{h}^\alpha = \cosh\beta\ h^\alpha - \mathrm{senh}\,\beta\left[(\rho + P)e^\alpha + h^\lambda e_\lambda u^\alpha - \pi^{\alpha\lambda}e_\lambda\right] +$$

$$- \cosh\beta\ \mathrm{senh}^2\,\beta\left[(\rho + P + \pi^{\mu\nu}e_\mu e_\nu)u^\alpha + 2h^\lambda e_\lambda e^\alpha\right] +$$

$$- \mathrm{senh}^3\,\beta\left[(\rho + P + \pi^{\mu\nu}e_\mu e_\nu)e^\alpha + 2h^\lambda e_\lambda u^\alpha\right]\ . \qquad (2.22)$$

d) <u>estresse anisotrópico $\pi^{\alpha\beta}$</u>:

$$\bar{\pi}^{\alpha\beta} := T_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\mu}\bar{h}^{\beta\nu} + \bar{P}\bar{h}^{\alpha\beta} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{\pi}^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta} - 2\cosh\beta\ \mathrm{senh}\,\beta\left[- (1/3)h^\lambda e_\lambda h^{\alpha\beta} + h^{(\alpha}e^{\beta)} + \right.$$

$$\left. + \pi^{\lambda(\alpha}e_\lambda u^{\beta)}\right] +$$

$$+ \mathrm{senh}^2\,\beta\left[\pi^{\mu\nu}e_\mu e_\nu u^\alpha u^\beta + (1/3)(\rho + P + \pi^{\mu\nu}e_\mu e_\nu)h^{\alpha\beta} + \right.$$

$$\left. - 2h^{(\alpha}u^{\beta)} + (2/3)h^\lambda e_\lambda u^{(\alpha}e^{\beta)} + (\rho + P)e^\alpha e^\beta - 2\pi^{\lambda(\alpha}e_\lambda e^{\beta)}\right] +$$

$$+ (4/3)\cosh\beta\ \mathrm{senh}^3\,\beta\left[h^\lambda e_\lambda u^\alpha u^\beta + (\rho + P + \pi^{\mu\nu}e_\mu e_\nu)u^{(\alpha}e^{\beta)} + \right.$$

$$\left. + h^\lambda e_\lambda e^\alpha e^\beta\right] +$$

$$+ (2/3)\mathrm{senh}^4\,\beta\left[(\rho + P + \pi^{\mu\nu}e_\mu e_\nu)(u^\alpha u^\beta + e^\alpha e^\beta) + 4h^\lambda e_\lambda u^{(\alpha}e^{\beta)}\right] . \tag{2.23}$$

De posse dessas expressões, podemos recuperar alguns resultados interessantes de King & Ellis.[17] Suponhamos que, no referencial u inicial, as decomposições ortogonais de **N** e **T** sejam, respectivamente:

$$N^\alpha = nu^\alpha , \tag{2.24}$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - Ph^{\alpha\beta} . \tag{2.25}$$

Isso caracteriza o sistema descrito por **N** e **T** como um fluido perfeito (contanto que, além disso, $P \equiv p_{eq}$) (cf. Seçs. 2.4,5). Então, com respeito ao novo referencial $\bar{u}$, as decomposições desses objetos assumem as formas mais gerais possíveis [cf. (2.13a) e (2.14a)], com as grandezas relativas sendo agora dadas por:

$$\bar{n} = \cosh\beta\; n , \tag{2.26a}$$

$$\bar{j}^\alpha = -\,\mathrm{senh}\,\beta\; n\bar{e}^\alpha , \tag{2.26b}$$

$$\bar{\rho} = \rho + \mathrm{senh}^2\beta\;(\rho + P) , \tag{2.26c}$$

$$\bar{P} = P + (1/3)\mathrm{senh}^2\beta\;(\rho + P) , \tag{2.26d}$$

$$\bar{h}^\alpha = -\cosh\beta\;\mathrm{senh}\,\beta\;(\rho + P)\bar{e}^\alpha , \tag{2.26e}$$

$$\bar{\pi}^{\alpha\beta} = \operatorname{senh}^2 \beta \, (\rho + P) \left[\bar{e}^{\alpha} \bar{e}^{\beta} + (1/3) \bar{h}^{\alpha\beta} \right] . \tag{2.26f}$$

As fórmulas (2.26c-f) correspondem justamente às Eqs. (1.33b) da Ref. 17 (notem-se as diferenças de assinatura da métrica, parametrização do "boost" e notação para o fluxo de energia).

2.4. <u>PRINCÍPIOS GERAIS DA TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE FLUIDOS SIMPLES</u>

Na termodinâmica relativística de um fluido simples, consideramos três objetos como básicos ou primitivos:

i) o *vetor fluxo de partículas* N,[5] já introduzido na Subseç. 2.2.2, e doravante suposto sempre do tipo temporal e orientado para o futuro:

$$N^{\alpha} N_{\alpha} > 0 . \tag{2.27}$$

ii) o *tensor energia-momento* T, já introduzido na Subseç. 2.2.3, e doravante suposto admitir sempre um único autovetor (linearmente independente) do tipo temporal,[6] ou seja,

$$T^{\alpha\beta} v_{\beta} = \lambda v^{\alpha} , \tag{2.28a}$$

---

[5]Quando tratamos de misturas, reagentes ou não, introduzimos N vetores fluxos de partículas $N_{(A)}$, onde N é o número de espécies ou componentes (químicos, nucleares, etc) presentes.[16,32]

[6]Isso implica que o tipo de Segré desse tensor deve ser [1,111] (ou suas degenerescências), o que elimina a consideração de radiação pura (por exemplo, ondas eletromagnéticas planas).[33-35]

com

$$v^\alpha v_\alpha > 0 . \qquad (2.28b)$$

iii) o *vetor fluxo de entropia* s, introduzido agora pela primeira vez, e cuja decomposição ortogonal,

$$s^\alpha = snu^\alpha + I^\alpha , \qquad (2.29a)$$

com

$$I^\alpha u_\alpha = 0 , \qquad (2.29b)$$

permite definir a *entropia especifica (por partícula)* s e o *tri-fluxo de entropia* I^α.

A implementação da abordagem termodinâmica pressupõe o relacionamento entre essas grandezas básicas: suporemos, então, que s fica determinado quando forem dados **N** e T, ou seja, que existe uma função

$$s^\alpha = s^\alpha(N^\mu, T^{\mu\nu}) . \qquad (2.30)$$

Essa hipótese pode ser motivada pela teoria cinética relativística, onde mostra-se que, para estados próximos do equilíbrio termodinâmico (cf. Seç. 2.5), os primeiro e segundo momentos da função distribuição (de uma única partícula) fornecem justamente a informação necessária para a enumeração dos microestados do sistema.[16,28,36,37] Isso também indica a restrição do domínio de validade de nossas teorias fenomenológicas ao conjunto de estados convenientemente próximos do equilíbrio termodinâmico.

Com as condições acima apresentadas sobre **N** e **T**, podemos, num caso arbitrário, utilizá-los para atribuir ao sistema físico em consideração dois referenciais próprios naturais, em geral distintos:

i) o *referencial de Eckart* ou *de partículas* $\mathbf{u_N}$: [14,16,32,37] é aquele no qual as partículas se encontram, em média, em repouso; formalmente, é aquele referencial paralelo a **N**, ou seja,

$$u_N^\alpha \propto N^\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad j^\alpha(\mathbf{u_N}) = 0 \ . \tag{2.31}$$

ii) o *referencial de Landau-Lifshitz* ou *de energia* $\mathbf{u_E}$: [15,16,32,37] é aquele no qual a energia (total) se encontra, em média, em repouso; formalmente, é aquele referencial paralelo a um autovetor do tipo temporal de **T**, ou seja,

$$u_E^\alpha \propto T^\alpha{}_\beta u_E^\beta \qquad \Leftrightarrow \qquad h^\alpha(\mathbf{u_E}) = 0 \ . \tag{2.32}$$

Quando trabalhamos com o referencial de Eckart o fluxo de energia torna-se o que usualmente concebemos como o *fluxo de calor* q^α, ou seja,

$$q^\alpha := h^\alpha(\mathbf{u_N}) \ . \tag{2.33}$$

Por outro lado, quando trabalhamos com o referencial de Landau-Lifshitz, o arraste de partículas torna-se o que usualmente concebemos como a *difusão* c^α, ou seja,

$$c^\alpha := j^\alpha(\mathbf{u_E}) \ . \tag{2.34}$$

Vamos agora introduzir as leis que nos permitem determinar a evolução das grandezas básicas.[7] Em primeiro lugar, vemos que, ao adotarmos como teoria descritiva do campo gravitacional a teoria de Einstein, devemos, devido às correspondentes equações de campo ($8\pi G = 1$),

$$R^{\alpha\beta} - (1/2)Rg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = - T^{\alpha\beta} , \tag{2.35}$$

ter o tensor energia-momento (simétrico) sujeito à *lei de "conservação" da energia e momento*

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 . \tag{2.36}$$

Usando a decomposição (2.14) de $T^{\alpha\beta}$, podemos projetar tal equação no eixo temporal local e no espaço de repouso local do observador instantâneo (Z, u(Z)) para obter, respectivamente, a *lei de "conservação" da energia*

$$\dot{\rho} + (\rho + P)\Theta + h^{\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha}a_{\alpha} - \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.37}$$

e a *lei de "conservação" do momento*

$$(\rho + P)a^{\alpha} - h^{\alpha\beta}(P_{,\beta} - \dot{h}_{\beta} - \pi_{\beta}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}) + \left[(4/3)\Theta h^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta}\right]h_{\beta} = 0 . \tag{2.38}$$

Aqui e mais a frente, o ponto sobre uma grandeza X^{A} indica sua derivada

---

[7] Na teoria de meios contínuos, seja no espaço-tempo newtoniano, seja no minkowskiano em coordenadas pseudo-cartesianas, as equações de balanço na forma diferencial (local), conforme abaixo apresentadas, podem ser deduzidas a partir de equações de balanço na forma integral (global).[28,38-41] No caso de coordenadas não pseudo-cartesianas no espaço-tempo minkowskiano ou de espaços-tempos curvos, há uma ambigüidade na definição (covariante) de grandezas globais (integradas) não escalares e um conseqüente obscurecimento no significado das leis de conservação e balanço.

absoluta com respeito a u^α, ou seja, $\dot{X}^A := X^A{}_{;\alpha}u^\alpha$.

Em segundo lugar, como expressão da *segunda lei da termodinâmica*, [28,32,36] o vetor fluxo de entropia estará sujeito à lei de balanço

$$s^\alpha{}_{;\alpha} =: \Sigma \geq 0 \ , \tag{2.39a}$$

também conhecida como *desigualdade (lei) de Clausius-Duhem.* Aqui definimos a *densidade de fonte de entropia* Σ. É imediato, da decomposição (2.29) de s^α, que essa expressão é equivalente a

$$\Sigma = n\dot{s} + s(\dot{n} + n\Theta) + I^\alpha{}_{;\alpha} \geq 0 \ . \tag{2.39b}$$

Em terceiro lugar, como expressão da usual constância do número de partículas, o vetor fluxo de partículas estará sujeito à *lei de conservação do número de partículas*

$$N^\alpha{}_{;\alpha} = 0 \ . \tag{2.40a}$$

É imediato, da decomposição (2.13) de N^α, que essa equação é equivalente a

$$\dot{n} + n\Theta + j^\alpha{}_{;\alpha} = 0 \ . \tag{2.40b}$$

A equação (2.40) será modificada no Cap. 5 para dar conta do processo de criação de partículas.

2.5. TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE ZEROÉSIMA ORDEM (TERMOSTÁTICA RELATIVÍSTICA)

Os *estados de equilíbrio termodinâmico* são definidos como aqueles para os quais a densidade de fonte de entropia se anula, [16,28,32,36,37,42] ou seja,

$$s^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \ . \tag{2.41}$$

Para tais estados, o tensor energia-momento e o vetor fluxo de partículas estão relacionados por

$$T^{\alpha\beta} = [(\rho + P)/n^2]N^{\alpha}N^{\beta} - Pg^{\alpha\beta} \ , \tag{2.42}$$

de modo que os referenciais de Eckart e de Landau-Lifshitz coincidem ($\mathbf{u}_N \equiv \mathbf{u}_E =: \mathbf{u}$), com ρ, n e P sendo, respectivamente, a densidade de energia, a densidade de partículas e a pressão dinâmica com respeito a $\mathbf{u}$, ou, mais explicitamente,

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha}u^{\beta} - Ph^{\alpha\beta} \tag{2.43a}$$

e

$$N^{\alpha} = nu^{\alpha} \ . \tag{2.43b}$$

Existirá uma função *entropia específica de equilíbrio (por partícula)* $s_{eq}(\rho, n)$ tal que

$$s^{\alpha} = n s_{eq} u^{\alpha} \tag{2.44}$$

e

$$P \equiv p_{eq} := - \rho - n^2 T_{eq} (\partial s_{eq}/\partial n)_{\rho} \ , \tag{2.45a}$$

onde

$$1/T_{eq} := n(\partial s_{eq}/\partial \rho)_{n} \ . \tag{2.45b}$$

Vemos então que recuperamos a *relação de Gibbs* usual:

$$T_{eq} ds_{eq} = (1/n)d\rho - [(\rho + p_{eq})/n^2]dn$$

$$= du + p_{eq} dv \ , \tag{2.46a}$$

com a *energia interna específica (por partícula)* u e o *volume específico (por partícula)* v definidos por

$$u := \rho/n - m \tag{2.46b}$$

e

$$v := 1/n \ . \tag{2.46c}$$

Aqui m é a *massa (de repouso) das micropartículas constituintes do fluido.* As equações (2.46) são as chamadas *equações de estado (de equilíbrio)*[43] e definem a *temperatura de equilíbrio (termostática)* T_{eq} e a *pressão de equilíbrio (hidrostática)* p_{eq}.

Além disso, a variação espaço-temporal das variáveis relevantes será dada por

$$(u_{(\alpha}/T_{eq})_{;\beta)} = 0 \tag{2.47a}$$

e

$$(\mu_{eq}/T_{eq})_{,\alpha} = 0 \ , \tag{2.47b}$$

onde

$$\mu_{eq} := (\rho + p_{eq})/n - T_{eq}s_{eq} \tag{2.47c}$$

é o *potencial químico (relativístico).* Essas últimas condições implicam, por sua vez, em

$$\dot{n} = \dot{\rho} = 0 \tag{2.48a}$$

e

$$\Theta = \sigma^{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{2.48b}$$

Essas equações atestam que um estado global de equilíbrio só pode prevalecer num espaço-tempo estacionário, com o fluido sujeito a um movimento rígido. Ademais, todas as variáveis termodinâmicas serão, então, constantes ao longo dos observadores no referencial próprio **u**.

2.6. TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE ORDEM SUPERIOR

Para tratarmos de sistemas fora do equilíbrio, suporemos que o vetor fluxo de entropia é expansível em termos de grandezas que meçam o afastamento do equilíbrio. Tomaremos como estado de equilíbrio de comparação (fiducial) aquele com as mesmas densidade de energia ρ, densidade de partículas n e quadri-velocidade $\mathbf{u}$. Sendo assim, os desvios do equilíbrio serão caracterizados pelas grandezas $j^{\alpha}(\mathbf{u})$, $h^{\alpha}(\mathbf{u})$, conforme já definidas na Seç. 2.2, mais o *estresse viscoso total (tensorial)*:

$$\tau^{\alpha\beta} := \Pi^{\alpha\beta} + p_{eq} h^{\alpha\beta} . \tag{2.49}$$

Conforme já mencionado mais acima, esses *fluxos dissipativos* devem ser pequenos, ou seja,

$$|j(u)/n|, \ |h(u)/\rho|, \ \|\tau(u)/\rho\| \ll 1 , \tag{2.50a}$$

para um referencial u qualquer no qual estamos a construir a termodinâmica, contanto que ele difira pouco dos referenciais de Eckart e de Landau-Lifshitz reais do sistema, esses também estando, pois, próximos um do outro, ou seja,

$$|u - u_N|, \ |u - u_E| \ll 1 \ \Rightarrow \ |u_E - u_N| \ll 1 . \tag{2.50b}$$

2.6.1. TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE PRIMEIRA ORDEM

A primeira formalização da termodinâmica relativística de processos irreversíveis foi apresentada no trabalho, agora clássico, de Eckart[14] e continuou, mais tarde, com a obra de Landau & Lifshitz.[15] Estas primeiras versões são as análogas relativísticas da termodinâmica clássica de processos irreversíveis, baseada essencialmente nas "relações recíprocas", *algébricas* e *lineares*, de Onsager-Casimir e no cálculo explícito da densidade de fonte de entropia.[39-41,44-46] Formalmente, adota-se como *Ansatz* específico para o fluxo de entropia a expressão linear nos fluxos dissipativos[14,15,28,47-52]

$$s^{\alpha} = s^{\alpha}_{eq} + \beta h^{\alpha} - \Phi j^{\alpha} , \tag{2.51}$$

onde β e Φ são funções de zeroésima ordem, ou seja, só das variáveis de equilíbrio ρ e n, e serão fixadas mais adiante.

De posse dessa expressão, podemos calcular a densidade de fonte de entropia Σ, conforme dada por (2.39); obtemos

$$\Sigma = n\dot{s}_{eq} + s_{eq}(\dot{n} + n\Theta) + \beta_{,\alpha}h^{\alpha} + \beta h^{\alpha}_{;\alpha} - \Phi_{,\alpha}j^{\alpha} - \Phi j^{\alpha}_{;\alpha} . \tag{2.52}$$

Note-se que essa expressão é válida diretamente como decorrência do *Ansatz* (2.51) acima, independentemente das três leis gerais da Seç. 2.4. Substituindo agora, num primeiro momento, $\dot{s}_{eq}$ da relação de Gibbs (2.46) no primeiro termo do membro à direita, e, depois, na expressão assim obtida, $\dot{\rho}$ da lei de "conservação" da energia (2.37) e $\dot{n}$ da lei de conservação do número de partículas (2.40), chegamos à expressão final de interesse para a densidade de fonte de entropia, correta até primeira ordem nos fluxos dissipativos:

$$\Sigma = -\,(P - p_{eq})\Theta/T_{eq} + h^{\alpha}\left[\beta_{,\alpha} + a_{\alpha}/T_{eq}\right] - j^{\alpha}\Phi_{,\alpha} + \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/T_{eq} +$$

$$+ (\beta - 1/T_{eq})h^{\alpha}{}_{;\alpha} + \left[(\rho + p_{eq})/nT_{eq} - s_{eq} - \Phi\right]j^{\alpha}{}_{;\alpha} . \qquad (2.53)$$

A maneira mais simples de assegurarmos a validade da desigualdade de Clausius-Duhem (2.39) em qualquer estado é escolhermos

$$\beta = 1/T_{eq} , \qquad (2.54a)$$

$$\Phi = \mu_{eq}/T_{eq} , \qquad (2.54b)$$

$$\Pi := P - p_{eq} = - \zeta\Theta , \qquad (\zeta \geq 0) , \qquad (2.54c)$$

$$h^{\alpha} = \kappa h^{\alpha\beta}(T_{eq,\beta} - T_{eq}a_{\beta}) , \qquad (\kappa \geq 0) , \qquad (2.54d)$$

$$j^{\alpha} = \xi T^{2}_{eq} h^{\alpha\beta}\Phi_{,\beta} , \qquad (\xi \geq 0) , \qquad (2.54e)$$

$$\pi^{\alpha\beta} = 2\eta\sigma^{\alpha\beta} , \qquad (\eta \geq 0) . \qquad (2.54f)$$

Aqui definimos o *potencial químico de equilíbrio* μ_{eq} e a *pressão viscosa* Π. As expressões (2.54c-f) são as chamadas *equações (relações) fenomenológicas (constitutivas), de primeira ordem,* de um fluido relativístico simples. Obviamente, as grandezas fenomenológicas ζ, κ, ξ e η, chamadas, respectivamente, de *coeficiente de viscosidade volumar* (peregrinisticamente, *"bulk viscosity coefficient"*), *coeficiente de condutividade térmica*, *coeficiente de difusão* e *coeficiente de viscosidade cisalhante* (peregrinisticamente, *"shear viscosity coefficient"*) são funções de ordem zero.

A partir das equações fenomenológicas (2.54c-f), podemos reescrever a expressão para a densidade de fonte de entropia na forma manifestamente não-negativa

$$\Sigma = \Pi^2/\zeta T_{eq} - h^{\alpha}h_{\alpha}/\kappa T_{eq}^2 - j^{\alpha}j_{\alpha}/\xi T_{eq}^2 + \pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}/2\eta T_{eq} \ . \qquad (2.55)$$

Obteremos agora, a título de ilustração do formalismo e para aplicação e modificação posteriores, uma equação de evolução da temperatura. Para tanto, lembrando que T_{eq} é função de ρ e n e utilizando as expressões para $\dot{\rho}$ e $\dot{n}$ provenientes, respectivamente, das leis de "conservação" da energia (2.37) e da "conservação" do número de partículas (2.40b), podemos escrever

$$\dot{T}_{eq} = - \left[(\rho + p_{eq})(\partial T_{eq}/\partial \rho)_n + n(\partial T_{eq}/\partial n)_\rho\right]\Theta +$$
$$(\partial T_{eq}/\partial \rho)_n \left[- \Pi\Theta - h^{\alpha}{}_{;\alpha} + h^{\alpha}a_{\alpha} + \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right] - (\partial T_{eq}/\partial n)_\rho \, j^{\alpha}{}_{;\alpha} \ . \qquad (2.56)$$

Lançando mão da relação auxiliar[8]

$$n(\partial T_{eq}/\partial n)_\rho = T_{eq}(\partial p_{eq}/\partial \rho)_n - (\rho + p_{eq})(\partial T_{eq}/\partial \rho)_n \ , \qquad (2.57)$$

chegamos, então, à *lei de evolução da temperatura (de equilíbrio)* procurada:

$$\dot{T}_{eq} = - T_{eq}(\partial p_{eq}/\partial \rho)_n\Theta - (\partial T_{eq}/\partial \rho)_n \left[\Pi\Theta + h^{\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha}a_{\alpha} - \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right] +$$

---

[8]Esta fórmula pode ser deduzida diretamente da lei de Gibbs (2.46), levando-se em conta que a diferencial ds é exata, ou seja, $\partial^2 s_{eq}/\partial\rho\partial n = \partial^2 s_{eq}/\partial n\partial\rho$.

$$- (\partial T_{eq}/\partial n)_{\rho}\, j^{\alpha}{}_{;\alpha} \,. \qquad (2.58)$$

Um caso particular bem relevante dessa expressão é o que prevalece na termostática (processos não dissipativos), quando ela se reduz simplesmente a

$$\dot{T}/T = -\, (\partial p_{eq}/\partial \rho)_{n} \Theta \,. \qquad (2.59)$$

O *Ansatz* de primeira ordem (2.51) para o fluxo de entropia s^{α} conduz a uma teoria termodinâmica que apresenta uma série de deficiências, a saber:

i) *acausalidade*, ou seja, propagação de flutuações viscosas, térmicas ou difusivas com velocidade superior à da luz no vácuo. Isso se deve ao fato de que, sob certas condições restritivas, as equações que regem o comportamento dessas flutuações são equações diferenciais parciais parabólicas;[53,54]

ii) *instabilidade dos estados de equilíbrio*, ou seja, divergência exponencial de pequenos desvios do equilíbrio espacialmente localizados. Esse resultado é obtido pela análise de Fourier de perturbações de um fluido dissipativo no "background" de Minskowski. Cada componente de Fourier evolui como uma onda plana cuja freqüência está sujeita a uma relação de dispersão, que contém sempre modos exponencialmente crescentes. Essa instabilidade ocorre para todas as escalas de comprimento e o tempo característico para tal crescimento é absurdamente pequeno (10^{-34} s para a água em condições normais de temperatura e pressão);[52]

iii) *ausência de um problema de valores iniciais bem-posto*, ou seja, as equações que governam as perturbações constituem um sistema misto (hiperbólico-parabólico-elíptico) de equações diferenciais parciais, cujo problema de Cauchy não é muito bem conhecido.[52,55]

Assim, procuraram-se novas formulações isentas desses reveses, o que nos leva às teorias de segunda ordem.

2.6.2. TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE SEGUNDA ORDEM

As desvantagens acima listadas da teoria de primeira ordem se devem ao truncamento da expansão do fluxo de entropia somente até termos lineares nos fluxos dissipativos, conforme primeiramente observado, no contexto clássico (não-relativístico), por Müller[56] e, no contexto relativístico, por Israel.[16]

Existem diversas formulações para a termodinâmica relativística de segunda ordem.[16,28,37,55,57-60] Na literatura, as mais utilizadas são a de Israel & Stewart[16,37] e a de Pavón, Jou & Casas-Vázquez.[57] No nosso caso, seguiremos de perto o enfoque de Pavón, Jou & Casas-Vázquez,[29,54,57,61] que distingue-se, essencialmente, do de Israel & Stewart pela introdução explícita de uma lei de Gibbs modificada e equações de estado de não equilíbrio.

Adota-se uma *lei de Gibbs generalizada* da forma

$$Tds = (1/n)d\rho - [(\rho + p)/n^2]dn + (\alpha_0\Pi/n)d\Pi +$$

$$+ (\alpha_1 h^\alpha/n)dh_\alpha + (\alpha_2 j^\alpha/n)dj_\alpha + (\alpha_3\pi^{\alpha\beta}/n)d\pi_{\alpha\beta} , \qquad (2.60)$$

onde os coeficientes α_λ são funções de ordem zero, a serem fixadas mais tarde. Esse *Ansatz* obviamente já indica que haverá correções nas equações de estado de equilíbrio, correções essas sempre quadráticas (ou de ordem superior) nos fluxos dissipativos, conforme veremos mais abaixo (cf. também com o Apêndice B da Ref. 54).

A seguir, adota-se como expressão para o tri-fluxo de entropia I^{α} a equação

$$I^{\alpha} = (1/T)h^{\alpha} - (\mu/T)j^{\alpha} + \beta_0 \Pi h^{\alpha} + \beta_1 \Pi j^{\alpha} + \beta_2 \pi^{\alpha\beta} h_{\beta} + \beta_3 \pi^{\alpha\beta} j_{\beta} , \tag{2.61}$$

onde os coeficientes β_{λ} são funções de ordem zero.

Destarte, a densidade de fonte de entropia, conforme apresentada em (2.39) fica

$$\begin{aligned}
\Sigma = \Pi & \left[(-\Theta + \alpha_0 \dot{\Pi})/T + \gamma_0 \beta_{0,\alpha} h^{\alpha} + \beta_0 h^{\alpha}{}_{;\alpha} + \gamma_1 \beta_{1,\alpha} j^{\alpha} + \beta_1 j^{\alpha}{}_{;\alpha}\right] + \\
& + h^{\alpha} \left[(- T_{,\alpha}/T + a_{\alpha} + \alpha_1 \dot{h}_{\alpha})/T + \overset{*}{\gamma}_0 \beta_{0,\alpha} \Pi + \beta_0 \Pi_{,\alpha} + \right. \\
& \qquad \left. + \gamma_2 \beta_{2,\lambda} \pi_{\alpha}{}^{\lambda} + \beta_2 \pi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}\right] + \\
& + j^{\alpha} \left[- (\mu/T)_{,\alpha} + (\alpha_2/T)\dot{j}_{\alpha} + \overset{*}{\gamma}_1 \beta_{1,\alpha} \Pi + \beta_1 \Pi_{,\alpha} + \right. \\
& \qquad \left. + \gamma_3 \beta_{3,\lambda} \pi_{\alpha}{}^{\lambda} + \beta_3 \pi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}\right] + \\
& + \pi^{\alpha\beta} \left[(u_{\alpha;\beta} + \alpha_3 \dot{\pi}_{\alpha\beta})/T + \overset{*}{\gamma}_2 \beta_{2,\alpha} h_{\beta} + \beta_2 h_{\alpha;\beta} + \right. \\
& \qquad \left. + \overset{*}{\gamma}_3 \beta_{3,\alpha} j_{\beta} + \beta_3 j_{\alpha;\beta}\right] .
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Aqui introduzimos os coeficientes de ordem zero γ_{λ} para efetuar convenientemente a distribuição dos termos cruzados (Πh^{α}, Πj^{α}, $\pi^{\alpha\beta} h_{\beta}$, $\pi^{\alpha\beta} j_{\beta}$); note-se que

$$\gamma_\lambda + \overset{*}{\gamma}_\lambda = 1 \ . \tag{2.63}$$

A maneira mais simples de assegurarmos a validade da desigualdade de Clausius-Duhem (2.39) é escolhermos

$$\tau_0 \dot{\Pi} + \Pi = - \zeta \Big[\Theta + T(\gamma_0 \beta_{0,\alpha} h^\alpha + \beta_0 h^\alpha{}_{;\alpha} + \gamma_1 \beta_{1,\alpha} j^\alpha + $$

$$+ \beta_1 j^\alpha{}_{;\alpha}) \Big] \ , \qquad (\tau_0 := - \zeta \alpha_0 \geq 0) \ , \tag{2.64a}$$

$$\tau_1 h^{\alpha\beta} \dot{h}_\beta + h^\alpha = \kappa h^{\alpha\beta} \Big[T_{,\beta} - T a_\beta - T^2 (\overset{*}{\gamma}_0 \beta_{0,\beta} \Pi + \beta_0 \Pi_{,\beta} + $$

$$+ \gamma_2 \beta_{2,\lambda} \pi_\beta{}^\lambda + \beta_2 \pi_\beta{}^\lambda{}_{;\lambda}) \Big] \ , \qquad (\tau_1 := \kappa \alpha_1 T \geq 0) \ , \tag{2.64b}$$

$$\tau_2 h^{\alpha\beta} \dot{j}_\beta + j^\alpha = \xi T^2 h^{\alpha\beta} \Big[\Phi_{,\beta} - \overset{*}{\gamma}_1 \beta_{1,\beta} \Pi - \beta_1 \Pi_{,\beta} - \gamma_3 \beta_{3,\lambda} \pi_\beta{}^\lambda + $$

$$- \beta_3 \pi_\beta{}^\lambda{}_{;\lambda} \Big] \ , \qquad (\tau_2 := \xi \alpha_2 T \geq 0) \ , \tag{2.64c}$$

$$\tau_3 \langle \dot{\pi}^{\alpha\beta} \rangle + \pi^{\alpha\beta} = 2\eta \Big\langle u^{\alpha;\beta} + T(\overset{*}{\gamma}_2 \beta_2{}^{,\alpha} h^\beta + \beta_2 h^{\alpha;\beta} + \overset{*}{\gamma}_3 \beta_3{}^{,\alpha} j^\beta + $$

$$+ \beta_3 j^{\alpha;\beta}) \Big\rangle \ , \qquad (\tau_3 := - 2\eta \alpha_3 \geq 0) \ , \tag{2.64d}$$

onde

$$\langle X^{\alpha\beta} \rangle := h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu X^{(\mu\nu)} - (1/3) h^{\alpha\beta} h_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \ . \tag{2.64e}$$

Aqui τ_0, τ_1, τ_2 e τ_3 são denominados, respectivamente, *tempo de relaxação viscosa volumar*, *tempo de relaxação térmica*, *tempo de relaxação difusiva* e *tempo de relaxação viscosa cisalhante.* As expressões (2.64a-d) são as *equações (relações) fenomenológicas (constitutivas), de segunda ordem,* de um fluido relativístico simples. Note-se que elas são, agora, equações *diferenciais*, o que justamente permite assegurar a propagação com velocidade finita (menor que $c = 1$) das flutuações, contanto que os tempos de relaxação recém-mencionados sejam tomados positivos.

A partir das novas equações fenomenológicas (2.64a-d), podemos reescrever a expressão para a densidade de fonte de entropia na forma manifestamente não-negativa:

$$\Sigma = \Pi^2/\zeta T - h^{\alpha}h_{\alpha}/\kappa T^2 - j^{\alpha}j_{\alpha}/\xi T^2 + \pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}/2\eta T \quad , \qquad (2.65)$$

idêntica, até termos de segunda ordem, a (2.55).

Da lei de Gibbs generalizada, (2.60), podemos agora determinar a correção, de segunda ordem nos fluxos dissipativos, não só da entropia específica, como também da temperatura e pressão termodinâmica. Assim, temos, primeiro,

$$s = s_{eq} - (1/2nT_{eq})(\tau_0\Pi^2/\zeta - \tau_1 h_{\alpha}h^{\alpha}/\kappa T_{eq} - \tau_2 j_{\alpha}j^{\alpha}/\xi T_{eq} +$$

$$+ \tau_3\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}/2\eta) \ . \qquad (2.66)$$

Aqui substituímos T por T_{eq}, já que isto só acarreta uma modificação na expressão em termos de ordem superior à segunda nos fluxos dissipativos.

A seguir, de posse dessa expressão para s, podemos estabelecer as *equações de estado de não-equilíbrio*, ou seja,

$$1/nT = (\partial s/\partial\rho)_{n,\Pi,h_{\alpha},j_{\alpha},\pi_{\alpha\beta}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad T = T_{eq} + (T_{eq}^2/2)\ \Big[\Pi^2\Big[\partial(\tau_0/\zeta T_{eq})/\partial\rho\Big]_n - h_\alpha h^\alpha\Big[\partial(\tau_1/\kappa T_{eq}^2)/\partial\rho\Big]_n +$$

$$- j_\alpha j^\alpha\Big[\partial(\tau_2/\xi T_{eq}^2)/\partial\rho\Big]_n + (1/2)\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}\Big[\partial(\tau_3/\eta T_{eq})/\partial\rho\Big]_n\Big] \qquad (2.67a)$$

e

$$- (\rho + p)/n^2 T = (\partial s/\partial n)_{\rho,\Pi,h_\alpha,j_\alpha,\pi_{\alpha\beta}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad p = p_{eq} + (1/2)(\rho + p_{eq})T_{eq}\ \Big[\Pi^2\Big[\partial(\tau_0/\zeta T_{eq})/\partial\rho\Big]_n +$$

$$- h_\alpha h^\alpha\Big[\partial(\tau_1/\kappa T_{eq}^2)/\partial\rho\Big]_n - j_\alpha j^\alpha\Big[\partial(\tau_2/\xi T_{eq}^2)/\partial\rho\Big]_n +$$

$$+ (1/2)\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}\Big[\partial(\tau_3/\eta T_{eq})/\partial\rho\Big]_n\Big] +$$

$$+ (1/2)n^2 T_{eq}\ \Big[\Pi^2\Big[\partial(\tau_0/\zeta n T_{eq})/\partial n\Big]_\rho +$$

$$- h_\alpha h^\alpha\Big[\partial(\tau_1/\kappa n T_{eq}^2)/\partial n\Big]_\rho - j_\alpha j^\alpha\Big[\partial(\tau_2/\xi n T_{eq}^2)/\partial n\Big]_\rho +$$

$$+ (1/2)\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}\Big[\partial(\tau_3/\eta n T_{eq})/\partial n\Big]_\rho\Big]. \qquad (2.67b)$$

A temperatura de não equilíbrio (2.67a) pode ser relacionada à eficiência de um ciclo de Carnot no qual troca-se calor entre o sistema e os reservatórios através de curtos pulsos de calor; o termo entre colchetes representa a perda de eficiência devida à entropia produzida.[62]

2.7. EQUIVALÊNCIA DAS FORMULAÇÕES DE ECKART E DE LANDAU-LIFSHITZ

Mostraremos agora que as teorias termodinâmicas acima construídas, seja a de primeira ordem, seja a de segunda ordem, nos referenciais de Eckart e de Landau-Lifshitz são equivalentes, no sentido de que, até primeira ordem na tri-velocidade relativa desses referenciais e nos fluxos dissipativos, a densidade de fonte de entropia Σ é invariante.[9]

Consideremos então, primeiramente, as decomposições espaço-temporais de $\mathbf{N}$ e $\mathbf{T}$, relativamente ao referencial de Eckart $\mathbf{u}_{\mathbf{N}} =: \mathbf{u}$:

$$N^{\alpha} = nu^{\alpha} \,, \qquad j^{\alpha} \equiv 0 \tag{2.68a}$$

e

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha} u^{\beta} - Ph^{\alpha\beta} + q^{\alpha} u^{\beta} + q^{\beta} u^{\alpha} + \pi^{\alpha\beta} \,, \qquad q^{\alpha} := h^{\alpha}(\mathbf{u}) \,. \tag{2.68b}$$

Consideremos, a seguir, essas mesmas decomposições para o referencial de Landau-Lifshitz $\mathbf{u}_{\mathbf{E}} =: \bar{\mathbf{u}}$:

$$N^{\alpha} = \bar{n}\bar{u}^{\alpha} + c^{\alpha} \,, \qquad c^{\alpha} := j^{\alpha}(\bar{\mathbf{u}}) \tag{2.69a}$$

e

$$T^{\alpha\beta} = \bar{\rho}\bar{u}^{\alpha}\bar{u}^{\beta} - \bar{P}\bar{h}^{\alpha\beta} + \bar{\pi}^{\alpha\beta} \,, \qquad \bar{h}^{\alpha} \equiv 0 \,. \tag{2.69b}$$

---

[9] Esse será o único aspecto da equivalência entre essas duas formulações considerado aqui. É sabido que, no sentido amplo, particularmente no que diz respeito à estabilidade, a formulação de Landau-Lifshitz é mais vantajosa do que a de Eckart.[25,52,63]

As correspondentes expressões para a densidade de fonte de entropia são

$$\Sigma = \Pi^2/\zeta T_{eq} - q^{\alpha}q_{\alpha}/\kappa T^2_{eq} + \pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}/2\eta T_{eq} \tag{2.70}$$

e

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Pi}^2/\bar{\zeta}\bar{T}_{eq} - c^{\alpha}c_{\alpha}/\xi\bar{T}^2_{eq} + \bar{\pi}^{\alpha\beta}\bar{\pi}_{\alpha\beta}/2\bar{\eta}\bar{T}_{eq} \; . \tag{2.71}$$

Atentemos agora para as leis de transformação das grandezas n, ρ, P e $\pi^{\alpha\beta}$, ou seja, as Eqs. (2.18), (2.20), (2.21) e (2.23). Vemos que, considerando desprezíveis termos do tipo β^2 e $|\beta q/\rho|$ (ou seja, $\ll 1$), tais grandezas são invariantes. Em particular, então, a entropia específica $s_{eq}(\rho, n)$, a temperatura $T_{eq}(\rho, n)$, a pressão termostática $p_{eq}(\rho, n)$ e os coeficientes de viscosidade $\zeta(\rho, n)$ e $\eta(\rho, n)$ também são invariantes. Sendo assim, as primeiras e terceiras parcelas dos membros direitos das duas últimas equações são iguais (nessa aproximação) e só precisamos comparar as suas segundas parcelas.

Para tanto, utilizamos agora as expressões (2.19) e (2.22), para as transformações do arraste de partículas e do fluxo de energia, respectivamente, obtendo, na mesma aproximação,

$$c^{\alpha} \simeq - \beta n e^{\alpha} \tag{2.72}$$

e

$$q^{\alpha} \simeq \beta(\rho + p_{eq})e^{\alpha} \; . \tag{2.73}$$

Logo,

$$q^{\alpha} \simeq - [(\rho + p_{eq})/n]c^{\alpha} \tag{2.74}$$

e

$$u_E^{\alpha} \simeq u_N^{\alpha} + (\rho + p_{eq})^{-1} q^{\alpha} \; . \tag{2.75}$$

Com a expressão (2.74), é imediato mostrar que, através da identificação

$$\xi = \kappa \; [n/(\rho + p_{eq})]^2 \; , \tag{2.76}$$

as segundas parcelas dos membros à direita de (2.70) e (2.71) se tornam iguais (até primeira ordem) e, *ipso facto*, também as densidades de fonte de entropia, ou seja,

$$\Sigma \simeq \bar{\Sigma} \; , \tag{2.77}$$

como queríamos demonstrar.

CAPÍTULO 3

GEOMETROTERMODINÂMICA FRIEDMANNIANA I: O PAPEL DAS EQUACÕES DE ESTADO

Neste capítulo, começamos a explorar a riqueza dos modelos tipo Friedmann-Robertson-Walker através da escolha de uma equação de estado (de equilíbrio) diferente da comumente utilizada em cosmologia. Na primeira seção, optamos por um ponto de vista razoavelmente conservador, na medida em que supomos que os dados observacionais conduzem à adoção de um "background" geométrico de Robertson-Walker, gerado por um conteúdo material adaptado a suas isometrias (cf. Cap. 4); desse modo, em particular, o tensor energia-momento assume a expressão típica de um fluido perfeito. Frisamos aí a necessidade matemática de, na alternativa mais simples, recorrermos a uma relação adicional entre as variáveis independentes. A segunda seção é consagrada à apresentação de algumas equações de estado (de equilíbrio) básicas, com a indicação dos sistemas para os quais elas são válidas. Na terceira seção, proporcionamos uma motivação para a admissão da equação $p_{eq} = (\gamma - 1)(\rho - mn)$, cujas conseqüências são investigadas no resto do capítulo. Na quarta seção, determinamos algumas propriedades termodinâmicas de um fluido com essa equação de estado, a saber, as expressões de evolução da temperatura e da velocidade do som. Na quinta seção, estabelecemos a equação de Friedmann generalizada para o fator de escala. Na sexta seção, investigamos as propriedades qualitativas do conjunto de soluções da equação de Friedmann, tanto pela análise do correspondente potencial efetivo, como pela do retrato de fase. Na sétima seção, encontramos soluções exatas para os modelos com tri-curvatura nula ($\varepsilon = 0$). Na última seção, calculamos algumas propriedades cinemáticas do fluido material, quais sejam, o parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração.

Este capítulo se baseia no trabalho original da Ref. 64, estendendo-o no que diz respeito à Seç. 6.

3.1. O PALCO

Baseados nas mais recentes observações astrofísicas, astronômicas e cosmológicas e em alguns "preconceitos" e expectativas teóricos e filosóficos,[47,65-77] assumiremos que nosso universo pode ser descrito por um espaço-tempo espacialmente maximalmente simétrico (homogêneo e isotrópico), gerado por um fluido cósmico que tem como espaço de repouso justamente as hipersuperfícies maximalmente simétricas; dito de outra forma, o referencial do conteúdo material é ortogonal às hipersuperfícies maximalmente simétricas, de modo que, para os seus observadores, de fato são manifestas (explícitas) as isometrias do "background". Destarte, existirá um sistema de coordenadas co-móvel com a matéria, no qual o elemento de linha adquirirá a forma[13,47,65-68,71,78,79]

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[(1 - \varepsilon r^2)^{-1}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2)] \ , \qquad (3.1)$$

onde $R(t)$ é o chamado *fator de escala* e $\varepsilon = 0, \pm 1$ é o parâmetro de curvatura das seções espaciais maximalmente simétricas $t = const.$[10] As equações de Einstein exigem, então, que, relativamente ao referencial co-móvel,

---

[10] É, no mínimo, capcioso chamar os modelos com $\varepsilon = 0, \pm 1$ de plano, esférico (fechado) e hiperbólico (aberto), respectivamente, já que a geometria absolutamente não determina univocamente a topologia.[65,78,80,81]

$$u^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{0} , \tag{3.2}$$

o tensor energia-momento tenha a decomposição

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha} u^{\beta} - P h^{\alpha\beta} , \tag{3.3}$$

com

$$\rho = 3(\dot{R}^2 + \varepsilon)/R^2 - \Lambda , \tag{3.4a}$$

$$- 6\ddot{R}/R = \rho + 3P - 2\Lambda . \tag{3.4b}$$

Em particular, vemos que as variáveis ρ e P só podem depender do tempo cosmológico.

Com as expressões acima para u e T, a lei de "conservação" da energia (2.37) fica

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\dot{R}/R = 0 . \tag{3.5}$$

Pode-se mostrar facilmente que essa equação, junto com a (3.4a), constitui um sistema equivalente ao (3.4).

Conforme se apresenta, esse sistema (3.4) está indeterminado, já que ele se constitui de duas equações para três incógnitas: R, ρ e P (estamos supondo Λ dado). Matematicamente, isso pode ser corrigido apelando-se a uma equação complementar *qualquer* do tipo

$$f(\rho, P, R, \dot{R}, \ddot{R}, t) = 0 . \tag{3.6}$$

Fisicamente, trataremos dessa questão justamente na seção a seguir.

3.2. EQUAÇÕES DE ESTADO

Conforme visto na Seç. 2.5, as equações de estado (de equilíbrio) para um certo sistema são as relações

$$T_{eq} = T_{eq}(\rho,\ n) \tag{3.7a}$$

e

$$p_{eq} = p_{eq}(\rho,\ n)\ , \tag{3.7b}$$

que fornecem a temperatura (de equilíbrio) e a pressão (de equilíbrio) como funções das variáveis básicas ρ e n. É o exato conhecimento dessas duas funções que fixa totalmente a termostática do sistema, no sentido de permitirem, por integração, a determinação da relação fundamental $s_{eq} = s_{eq}(\rho,\ n)$.[43] Genericamente, portanto, deveríamos, para o estudo das propriedades termostáticas de nosso sistema, fornecer sempre ambas as equações supracitadas.[11]

Para certos materiais ou fluxos (movimentos), porém, pode bastar a

---

[11] Como referência sobre equações de estado em geral, gostaríamos de citar, especificamente, em ordem de generalidade decrescente, os trabalhos de Truesdell & Toupin,[38] Menikoff & Plohr,[82] Landsberg[83-85] e Huang,[86] que são particularmente claros, precisos e fecundos, fontes de inspiração! Gostaríamos também de chamar a atenção para o trabalho de Parker & Wang,[87] onde, por intermédio de uma equação de estado mais complicada e, supostamente, realista, esses autores conseguem exibir soluções não singulares.

adoção de uma única "equação de estado" degenerada ou incompleta, que relacione somente P e ρ [cf. (3.6)]:

$$g(\rho,\ P) = 0\ , \tag{3.8}$$

como é o caso nas aplicações cosmológicas mais usuais. Essa expressão é comumente designada como uma *equação de estado barotrópica* ou *piezotrópica*, devido à sua semelhança com as homônimas da termodinâmica clássica (aqui comete-se um certo abuso de terminologia).[36] Note-se que, em princípio, P não precisa ser identificada com nehuma das pressões de natureza termodinâmica das Seçs. 2.5 ou 2.6 (p_{eq} ou p).

Como aplicação de equações de estado barotrópicas, citaremos dois exemplos. Primeiramente, apresentamos a equação

$$\rho + P = \gamma\rho^{\lambda}\ , \qquad \gamma \neq 0,\ \lambda = const\ , \tag{3.9}$$

introduzida *ad hoc* por Barrow[88] para simular, fenomenologicamente, certos campos escalares.

Segundamente,[89] apresentamos a famosa "lei gama",

$$P = (\gamma - 1)\rho\ , \qquad \gamma = const \in [0,\ 2]\ , \tag{3.10}$$

que é a equação de estado ordinariamente empregada em cosmologia. Sua aplicação se justifica em pelo menos quatro importantes casos:

(i) <u>pseudovácuo:</u> $\gamma = 0$

Seja um campo clássico (real) $\Phi(x^{\alpha})$, cuja dinâmica é governada pelo princípio usual de ação mínima associado à densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = (1/2)A(\Phi)g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} - V(\Phi) , \qquad A(\Phi) > 0 . \tag{3.11}$$

É fácil mostrar, então, que o tensor energia-momento canônico (e automaticamente simétrico) vale

$$T_{\alpha\beta} = A(\Phi)\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} - (1/2)A(\Phi)\Phi^{,\mu}\Phi_{,\mu}g_{\alpha\beta} + V(\Phi)g_{\alpha\beta} . \tag{3.12}$$

Assim o correspondente estado de *(pseudo)vácuo* (densidade de energia ou hamitoniana mínima) ocorre quando

$$\Phi_{,\alpha} \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi = \Phi_0 = const \tag{3.13a}$$

e

$$(dV/d\Phi)(\Phi_0) = 0 . \tag{3.13b}$$

Substituindo essas condições na expressão do tensor energia-momento, obtemos que

$$T_{\alpha\beta}(\Phi_0) = V(\Phi_0)g_{\alpha\beta} . \tag{3.14}$$

É óbvio, então, que esse estado de pseudovácuo não privilegia nenhum referencial, já que qualquer vetor é autovetor de $\mathbf{T}(\Phi_0)$ [com autovalor $V(\Phi_0)$][12] e as únicas grandezas dinâmicas diferentes de zero (ρ e P) são

[12] Isso equivale a dizer que o tipo de Segré do tensor energia-momento é [(1,111)].[33,34,90]

invariantes por um "boost" qualquer: $\rho = \bar{\rho}$ e $P = \bar{P}$ (cf. Seç. 2.3) com

$$P = - \rho \tag{3.15}$$

e $\rho = V(\Phi_0)$. Note-se que essa invariância decorre do fato de o tensor energia-momento ser proporcional à métrica, mesmo que o fator de proporcionalidade seja uma função $\Lambda = \Lambda(x^\alpha)$ (tipo, por exemplo, um termo cosmológico variável nas equações de Einstein. *Ipso facto*, justifica-se o tratamento da "constante" cosmológica como a densidade de energia do "vácuo".[69,90-92]

Para mais algumas considerações interessantes sobre esse tipo de "matéria", remetemos o leitor à Ref. 93.

(ii) <u>poeira (matéria incoerente)</u>: $\gamma = 1$

A poeira é um tipo de matéria "gasosa", na qual toda a energia, no referencial próprio, provém somente da massa de repouso das "partículas" constituintes (moléculas, galáxias, etc). Microscopicamente, essas "partículas" apresentam um movimento perfeitamente *coerente*, todas com a mesma velocidade (em módulo, direção e sentido), de modo que a energia interna específica u (cf. Seç. 2.5) e a pressão P, relacionadas com movimentos microscópicos aleatórios (residuais) e interações interparticulares, são nulas (ou, aproximativamente, $nm \gg nu$, P), isto é, suas "equações de estado" se escrevem como:

$$\rho = mn \tag{3.16a}$$

e

$$P = 0\ . \tag{3.16b}$$

Queremos frisar que, se levássemos às últimas conseqüências a interpretação *cinética* desse material, deveríamos atribuir-lhe sempre uma temperatura igual a zero!

(iii) radiação isotrópica (matéria relativística): $\gamma = 4/3$

Esse sistema pode ser concebido como um "gás" perfeitamente isotrópico[13] de partículas ultra-relativísticas ou de massa nula (fótons, neutrinos,...), ou seja, com energia cinética (ou tri-momento) efetivamente muito maior que sua massa de repouso e eventual energia de interação intercorpuscular. Num desenvolvimento de teoria cinética, é óbvio, então, que sua "equação de estado" é dada por[14]

$$P = (1/3)\rho\ . \tag{3.17}$$

Para um "gás" de fótons, esse resultado pode ser facilmente obtido, lembrando-se que o traço do tensor energia-momento de um campo eletromagnético qualquer tem de ser zero.

---

[13] É claro que, se estivessemos tratando de um campo de *radiação pura*, cujo tensor energia-momento, por definição, é dado por $T^{\alpha\beta} = \Phi^2 k^\alpha k^\beta$, com $k^\alpha k_\alpha = 0$, [35] não teríamos mais (devido à anisotropia induzida pelo vetor de onda k^α) a validade da (3.17) a seguir.

[14] Basta lembrar que $T^\alpha{}_\alpha = \int f(x,\ p) p^\alpha p_\alpha d\pi$, onde $f(x,\ p)$ é a função de distribuição (de uma única partícula), p^α o (quadri-)momento de cada partícula e $d\pi$ o elemento de volume da camada de massa.

(iv) matéria rígida (peregrinisticamente, "stiff matter"): $\gamma = 2$

Esse sistema é o relativisticamente mais rígido, no sentido de que nele o som se propaga (adiabaticamente) com velocidade igual à da própria luz (no vácuo). Sua "equação de estado" é dada por

$$P = \rho \ . \tag{3.18}$$

Zel'dovich[94] construiu um modelo específico de interação de bárions estacionários através de um campo vetorial com massa (campo de Proca), do qual resultava a equação acima.[15] Esse tipo de matéria já encontrou algumas aplicações explícitas em cosmologia.[97,98]

3.3 A EQUAÇÃO DE ESTADO $\rho = Mn + (\gamma - 1)^{-1}p$[16]

Seja um gás ideal clássico, cuja termostática é regida pelas seguintes equações de estado ($k_B = 1$)

$$pv = T \tag{3.19a}$$

e

$$u = u(T) \ . \tag{3.19b}$$

---

[15] Esse modelo clássico foi criticado por Harrison,[95] mas uma versão em teoria quântica de muitos corpos desenvolvida por Walecka[96] confirmou a equação (3.18) no limite de altas densidades.

[16] Agora, e a seguir, neste capítulo, omitiremos os sub-índices "eq" das diversas grandezas termodinâmicas, visto que restringir-nos-emos somente a processos de equilíbrio.

Dessa forma, o *calor específico a volume constante*, fica, devido à lei de Gibbs (2.46), igual a

$$c_v := T(\partial s/\partial T)_v = du/dT \; . \qquad (3.20)$$

Com isso, é fácil, substituindo a (3.19a) novamente na lei de Gibbs, obter a por vezes denominada *relação de Mayer*,

$$c_p - c_v = 1 \; , \qquad (3.21)$$

que fornece o *calor específico a pressão constante* [$c_p := T(\partial s/\partial T)_p$] em termos de c_v.

Admitiremos agora que esses calores específicos, em princípio funções (só) da temperatura, são, de fato, constantes:

$$c_v \, , \, c_p = \mathit{const} \; . \qquad (3.22)$$

Também só investigaremos doravante os *processos politrópicos*, ou seja, aqueles que se desenrolam a calor específico c constante:[31,99,100]

$$Tds = cdT \; , \qquad c = \mathit{const} \; . \qquad (3.23)$$

Esses processos são suficientemente gerais para incluir os seguintes casos particulares: (i) *processos adiabáticos* ($c = 0$), (ii) *processos isotérmicos* ($c = \pm\,\infty$), (iii) *processos isobáricos* ($c = c_p$) e (iv) *processos isocóricos* ($c = c_v$). Para essa classe de processos, a relação de Gibbs pode ser reescrita, tomando como variáveis básicas *p* e *v*, da forma

$$(c - c_v)vdp = - (c - c_p)pdv \ , \tag{3.24}$$

que é facilmente integrada, fornecendo

$$p = Kv^{-\gamma^*}$$

$$= Kn^{\gamma^*} \ , \qquad K = const \ . \tag{3.25a}$$

Aqui definimos o *índice* (ou *expoente*) *politrópico*

$$\gamma^* := (c - c_p)/(c - c_v) \ . \tag{3.25b}$$

Nos quatro casos particulares de processos politrópicos acima citados, esse índice assume os valores: (i) $\gamma^* = \gamma := c_p/c_v$ [para processos adiabáticos, quando é chamado, especificamente, de *índice* (ou *expoente*) *adiabático*], (ii) $\gamma^* = 1$ (para processos isotérmicos), (iii) $\gamma^* = 0$ (para processos isobáricos) e (iv) $\gamma^* = \pm \infty$ (para processos isocóricos).

Para obtermos uma expressão explícita para a densidade de energia em tais processos, consideraremos agora que nosso fluido de fato é perfeito ($\Pi = 0$), ou seja

$$P = p \ , \tag{3.26}$$

de modo que seu fluxo é sempre adiabático,

$$\dot{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n\dot{\rho} = (\rho + p)\dot{n} \ , \tag{3.27}$$

como se comprova da lei de "conservação" da energia (3.5) e da lei de conservação do número de partículas

$$\dot{n} + 3n\dot{R}/R = 0 \ . \tag{3.28}$$

Assim, podemos substituir $\dot{n}$ de (3.27) na derivada da expressão (3.25a) (com $\gamma^* = \gamma = const$) e chegar à equação diferencial homogênea

$$\gamma p(d\rho/dp) - \rho = p \ , \tag{3.29}$$

que integra-se facilmente para obter[17]

$$\rho = Mn + (\gamma - 1)^{-1}p \ , \qquad \gamma \neq 1 \ , \tag{3.30}$$

onde M é uma constante arbitrária de dimensão de massa, suposta não negativa. Quando identificamos M com a massa m das partículas constituintes do fluido, essa é justamente a expressão usual para a densidade de energia de um gás ideal clássico (não relativístico) com $f = 2/(\gamma - 1)$ graus de liberdade por partícula, acrescida da energia de repouso.[18]

[17] Se $\gamma := c_p/c_v = 1$, a solução é $\rho = p \ln (p/K)$, com K uma constante arbitrária. Fisicamente, essa solução não tem muito sentido, já que ela violaria a relação de Mayer (3.21).

[18] Pode-se investigar um gás relativístico de partículas pontuais (ou seja, só com três graus de liberdade) via teoria cinética, encontrando-se que: (i) continua válida a equação de estado (3.19a), $p = nT$, e (ii) a sua energia interna específica passa a ser uma função transcendente da temperatura, mas de modo tal que, no limite não relativístico ($m \gg T$), $\rho \simeq mn + (3/2)nT$.[32,99,101-103] Para artigos excelentes de revisão sobre teoria cinética em espaços-tempos curvos, queira ver as Refs. 104 e 105 e também o livro da Ref. 106.

Formalmente, podemos, agora, recuperar todas as "equações de estado" da seção precedente, bastando, para tanto, fazer $M = 0$ e γ assumir os valores ali expostos; observemos, de novo, no entanto, o caráter singular da poeira nesse contexto, já que a dedução de (3.30), aqui apresentada, a rigor, só vale para $\gamma \neq 1$.

3.4. A EVOLUÇÃO DA TEMPERATURA E A VELOCIDADE DO SOM

Recorrendo à Eq. (2.59), tomando como relação entre p, ρ e n a equação de estado recém apresentada, (3.30), deduzimos diretamente que

$$T = T_0(R_0/R)^{3(\gamma-1)} , \qquad (3.31)$$

onde $T_0 := T(R_0)$. Assim, a temperatura do modelo se comporta justamente como no caso padrão. No entanto, como veremos agora, a velocidade do som passa a ser uma grandeza dependente do tempo, como deveria.

De fato, sabemos que a velocidade (isentrópica) do som é dada por[47,85]

$$v_s^2 = (\partial p/\partial \rho)_s , \qquad (3.32)$$

Assim, como $(\partial p/\partial \rho)_s = \partial(p, s)/\partial(\rho, s)$, é imediato, tendo em vista (3.30), que[100]

$$v_s^2 = \gamma p/(\rho + p) .$$

$$= \gamma(\gamma - 1)p/[(\gamma - 1)Mn + \gamma p] . \qquad (3.33)$$

Se M = 0, a velocidade constante $v_s^2 = \gamma - 1$ dos modelos padrões de FRW é recuperada.

3.5. A EQUAÇÃO DE FRIEDMANN GENERALIZADA

A partir de agora investigaremos o novo sistema completo de quatro equações [(3.4a), (3.4b), (3.28) e (3.30)] e quatro incógnitas (ρ, n, p e R).

Primeiro, integramos (3.28) para obter

$$n = N/R^3 , \tag{3.34}$$

onde N é uma constante de integração, que suporemos, assim como R, positiva (nisso não há nenhuma perda de generalidade, visto que o sistema citado no parágrafo acima é invariante sob a transformação $R \to - R$). Dessa forma, substituindo (3.34) em (3.30), segue que as variáveis ρ e p podem ser eliminadas de (3.4), fornecendo uma *equação de Friedmann* generalizada para o fator de escala $R(t)$,

$$R\ddot{R} + A\dot{R}^2 + A\varepsilon - (\gamma - 1)B/R - (1/2)\gamma\Lambda R^2 = 0 , \tag{3.35a}$$

onde

$$A := (3\gamma - 2)/2 \tag{3.35b}$$

e

$$B := MN/2 \geq 0 . \tag{3.35c}$$

Um tipo de equação semelhante a essa foi estudado extensivamente nas Refs. 107-109.

A seguinte integral primeira para a (3.35), com γ, Λ = *const*, é facilmente encontrada:[19]

$$\dot{R}^2 = \alpha/R^{2A} - \varepsilon + 2B/3R + \Lambda R^2/3 \,, \tag{3.36}$$

onde α é uma constante arbitrária.

Assim, podemos expressar a densidade de energia e a pressão como funções só de *R*:

$$\rho = (3\alpha/R^{3\gamma}) \left[1 + (2B/3\alpha)R^{3(\gamma-1)}\right] \tag{3.37a}$$

e

$$p = 3\alpha(\gamma - 1)/R^{3\gamma} \,. \tag{3.37b}$$

Note-se que a dependência funcional de *p* com relação a *R* permanece a mesma que nos modelos de Friedmann-Robertson-Walker usuais, conforme esperado tendo em vista (3.25a) e (3.34), que são válidas (pelo menos implicitamente) em ambos os contextos. Se B = 0, as Eqs. (3.35)-(3.37) reduzem-se àquelas dos modelos padrões de Friedmann-Robertson-Walker. Nesse caso, as soluções unificadas de (3.35) para todos os valores (constantes) de ε e γ, com $\Lambda = 0$, foram recentemente encontradas por Assad & Lima[107] em termos de funções

---

[19]Basta reduzi-la a uma equação de primeira ordem em $w(R) := \dot{R}^2$, equação essa que resulta linear e ,portanto, diretamente integrável.

hipergeométricas.

3.6. ANÁLISE QUALITATIVA DOS MODELOS SEM CONSTANTE COSMOLÓGICA

Antes de procedermos à integração analítica da Eq. (3.36), investigaremos as propriedades qualitativas do seu conjunto de soluções particulares, recorrendo, para tanto, a dois métodos: (i) o do *potencial efetivo* e (ii) o do *retrato de fase*.

3.6.1. O POTENCIAL EFETIVO

A integral primeira (3.36), com $\Lambda = 0$, pode ser reescrita como

$$\dot{R}^2 + V(R) = - \varepsilon \ , \tag{3.38a}$$

onde

$$V(R) := - \alpha/R^{2A} - 2B/3R \tag{3.38b}$$

será, sugestivamente, chamado de *potencial efetivo* do modelo. Vemos imediatamente que uma condição necessária para a existência de uma solução particular fisicamente admissível é que

$$V(R) \leq - \varepsilon \ . \tag{3.39}$$

Outra restrição a ser cumprida é, obviamente, a condição de energia fraca, que, em termos do potencial efetivo, fica simplesmente [cf. (3.4a) com $\Lambda = 0$]:

$$V(R) \leq 0 \ . \tag{3.40}$$

Então, quando: (i) $\varepsilon = 1$, prevalece $V(R) \leq -1$; (ii) $\varepsilon = 0, -1$, prevalece $V(R) \leq 0$.

Aqui consideraremos somente os modelos fisicamente mais relevantes, com $1 < \gamma \leq 2$.[20]

a) $\underline{\alpha \geq 0}$:

Um gráfico típico de $V(R)$ é mostrado na Fig. 3.1.

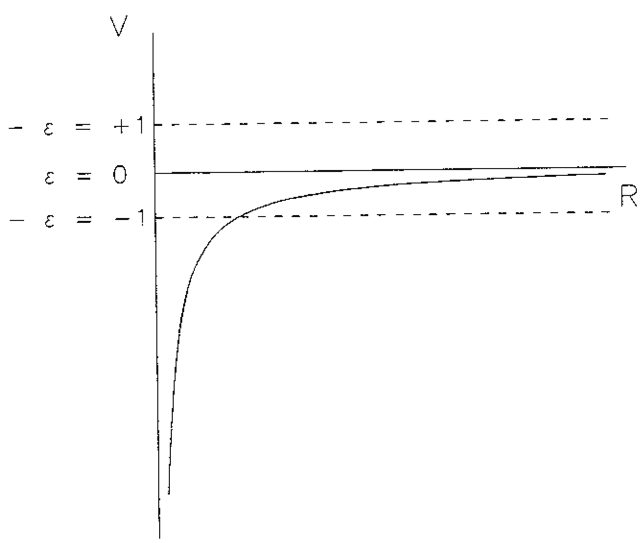

Figura 3.1. Gráfico do potencial efetivo $V(R)$ quando $\alpha \geq 0$.

[20]A análise para $0 \leq \gamma \leq 1$ é inteiramente análoga e já foi realizada também.

b) $\underline{\alpha < 0}$:

Nesse caso, a função *V(R)* sempre possui um mínimo caracterizado por

$$(R_c, V_c) = ((-3\alpha A/B)^{1/3(\gamma-1)}, -3(\gamma - 1)|\alpha|^{1/3(\gamma-1)}/(3A/B)^{2A/(2A-1)}) . \tag{3.41}$$

Teremos agora três sub-casos, dependendo do valor de α:

b1) $\alpha^* < \alpha < 0$:

Definimos

$$\alpha^* := - [3(\gamma - 1)]^{3(\gamma-1)}/(3A/B)^{3\gamma-2} . \tag{3.42}$$

Um gráfico típico de *V(R)* é mostrado na Fig. 3.2.

b2) $\alpha = \alpha^* < 0$:

Nesse caso, o ponto de mínimo é dado por

$$(R_c, V_c) = ((\gamma - 1)B/A, -1) . \tag{3.43}$$

Um gráfico típico correspondente se apresenta na Fig. 3.3.

b3) $\alpha < \alpha^* < 0$:

Na Fig. 3.4 mostramos um gráfico típico de *V(R)* associado a esse caso.

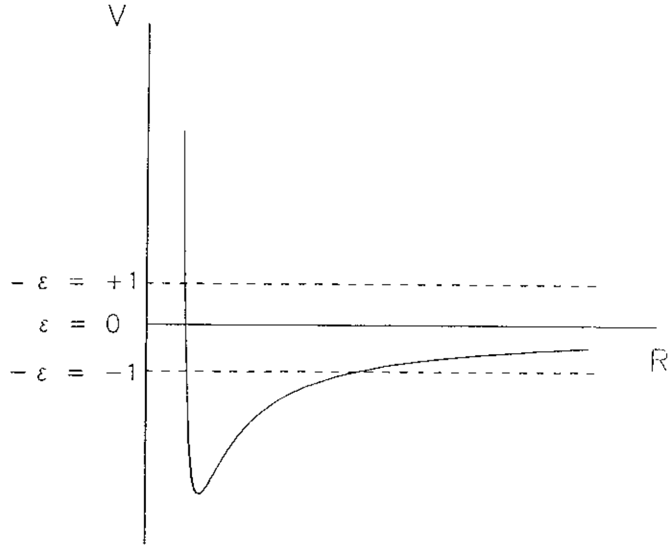

Figura 3.2. Gráfico do potencial efetivo $V(R)$ quando $\alpha_* < \alpha < 0$.

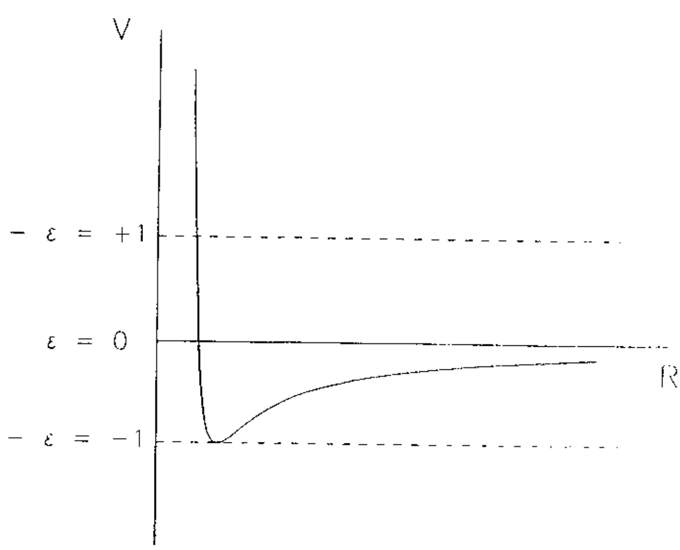

Figura 3.3. Gráfico do potencial efetivo $V(R)$ quando $\alpha = \alpha_* < 0$.

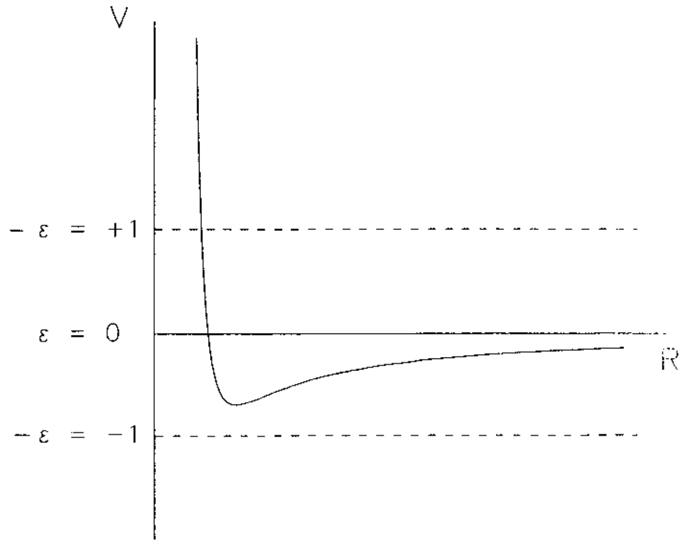

Figura 3.4. Gráfico do potencial efetivo $V(R)$ quando $\alpha < \alpha_* < 0$.

As principais conclusões são que:

i) para $\varepsilon = -1$, todas as soluções fisicamente admissíveis são singulares e apresentam um fator de escala sem limite superior;

ii) para $\varepsilon = 0, 1$, temos soluções fisicamente admissíveis tanto singulares como *não singulares*;

iii) para $\varepsilon = 0$, todas as soluções fisicamente admissíveis possuem um fator de escala sem limite superior;

iv) para $\varepsilon = 1$, as soluções fisicamente admissíveis singulares apresentam um fator de escala superiormente limitado e as soluções fisicamente admissíveis *não singulares* são *periódicas*;

v) só há soluções *estacionárias* quando $\varepsilon = 1$ e, nesse caso, o fator de escala possui o valor (constante):

$$R = (\gamma - 1)B/A \ . \tag{3.44}$$

3.6.2. O RETRATO DE FASE[110-114]

Com a introdução das novas variáveis

$$x := R \tag{3.45a}$$

e

$$y := \dot{R} \tag{3.45b}$$

podemos reduzir a equação de Friedmann generalizada (3.35), com $\Lambda = 0$, a um sistema autônomo plano da forma

$$\dot{x} = y =: F(x,\ y) \tag{3.46a}$$

e

$$\dot{y} = -\ Ay^2/x - A\varepsilon/x + C/x^2 =: G(x,\ y) \ . \tag{3.46b}$$

onde definimos

$$C := (\gamma - 1)B \ . \tag{3.46c}$$

Consideraremos agora só $B > 0$ [cf. (3.35b)] e índices adiabáticos tais que $0 \le \gamma \le 2$.

A existência e natureza dos pontos críticos depende essencialmente dos valores de ε e γ (cf. Tab. 3.1). Haverá um ponto crítico (estacionário ou de equilíbrio) na *região finita* do plano de fase, dado por

$$(x,\ y) = (C/A\varepsilon,\ 0)\ , \tag{3.47}$$

sempre que $C/A\varepsilon$ for finito e positivo.

γ	A	C	C/A
[0, 2/3)	[-1, 0)	[-B, -B/3)	[B, ∞)
2/3	0	-B/3	$\pm\infty$
(2/3, 1	(0, 1/2)	(-B/3, 0)	($-\infty$, 0)
1	1/2	0	0
(1, 2]	(1/2, 2]	(0, B]	(0, B/2]

Tabel 3.1. Intervalo de valores admissíveis para as grandezas γ, A, C e C/A.

É conveniente, então, fazer a seguinte classificação:

a) $\underline{\varepsilon = +\ 1}$:

a1) $0 \leq \gamma < 2/3$:

Existe um único ponto crítico, dado por (3.47), que é uma *sela*.

a2) $2/3 \leq \gamma \leq 1$:

Não existe ponto crítico.

a3) $1 < \gamma \leq 2$:

Existe um único ponto crítico, dado por (3.47), que é um *centro*.

b) $\underline{\varepsilon = 0}$:

b1) $0 \leq \gamma \leq 2$ e $\gamma \neq 1$:

Não existe ponto crítico.

b2) $\gamma = 1$:

Qualquer ponto da reta $y = 0$ é um ponto crítico.

c) $\underline{\varepsilon = -1}$:

c1) $0 \leq \gamma \leq 2/3$:

Não existe ponto crítico.

c2) $2/3 < \gamma < 1$:

Existe um único ponto crítico, dado por (3.47), que é um *centro*.

c3) $1 \leq \gamma \leq 2$:

Não existe ponto crítico.

Para construirmos o retrato de fase completo, que nos dê informação exaustiva sobre todos os tipos de soluções particulares, é necessário efetuar uma análise dos pontos críticos no *infinito*. Essa análise é bastante mais complexa, mas de qualquer maneira já foi realizada para o caso em que $\varepsilon = 1$ e $1 < \gamma \leq 2$, fornecendo o retrato de fase da Fig. 3.5, que está, obviamente, de acordo com os resultados provenientes da subseção anterior.

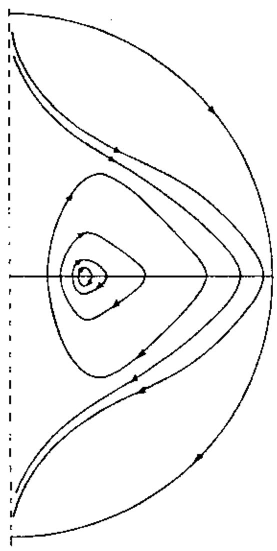

Figura 3.5. Retrato de fase dos modelos com tri-curvatura positiva ($\varepsilon = +1$) e $1 < \gamma \leq 2$.

3.7. AS SOLUÇÕES EXATAS NO CASO ESPACIALMENTE CHATO E SEM CONSTANTE COSMOLÓGICA

Por questão de simplicidade, ater-nos-emos somente aos modelos espacialmente chatos ($\varepsilon = 0$) e com constante cosmológica nula ($\Lambda = 0$). Nesse caso, a equação de Friedmann (3.35) correspondente pode ser colocada, com ajuda da respectiva integral primeira (3.36), na forma canônica de uma equação hipergeométrica

$$z(1 - z)(d^2t/dz^2) + (1/2)[1 - (2\gamma - 3)/(\gamma - 1)z](dt/dz) = 0 , \qquad (3.48a)$$

onde definimos

$$z := 1 + (2B/3R_0)(R/R_0)^{3(\gamma-1)} \tag{3.48b}$$

e

$$R_0^{2A} := \alpha \,. \tag{3.48c}$$

Com a escolha $t_0 := t(R_0)$, a solução geral de (3.48) pode ser dada como

$$t - t_0 = [2R_0/3(\gamma - 1)][1 + 2B/3R_0]^{1/2} f(R_0) +$$

$$-[2R_0/3(\gamma - 1)] \; (R/R_0)^{3\gamma/2} \left[1 + (2B/3R_0)(R/R_0)^{3(\gamma-1)}\right]^{1/2} f(R) \;, \tag{3.49a}$$

com f(r) a função hipergeométrica

$$f(R) := F\left[(2\gamma - 1)/2(\gamma - 1),\ 1;\ 3/2;\ 1 + (2B/3R_0)(R/R_0)^{3(\gamma-1)}\right] . \tag{3.49b}$$

Deve-se notar que, tomando o limite em que $B \to 0$ e usando a identidade[115]

$$F(a,\ b;\ c;\ 1) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\ \Gamma(c - b)} \;, \tag{3.50}$$

a Eq. (3.49) fornece o resultado esperado,

$$R = R_0 \left[1 + 3\gamma(t - t_0)/2R_0\right]^{2/3\gamma} \;, \tag{3.51}$$

dos modelos usuais de Friedmann-Robertson-Walker com a equação de estado da "lei gama" (3.10).[107]

Podemos obter ainda uma parametrização mais conveniente dessas soluções, recorrendo a um novo tempo adimensional τ dado por

$$dt = R_0 (R/R_0)^{3/2} d\tau \tag{3.52}$$

e um fator de escala auxiliar S definido como

$$S := R_0 (R/R_0)^{3(\gamma-1)/2} . \tag{3.53}$$

Com isso, a Eq. (3.35) pode ser reescrita (para $\varepsilon = \Lambda = 0$) como

$$S'' - \omega^2 S = 0 , \tag{3.54a}$$

onde uma plica indica derivada em relação a τ e

$$\omega := (3B/2R_0)^{1/2} |\gamma - 1| . \tag{3.54b}$$

Para $\gamma \neq 1$, a solução geral de (3.54), válida também no limite $\omega \to 0$, é

$$S = S_0 (\operatorname{senh} \omega\tau)/\omega , \tag{3.55a}$$

onde já escolhemos $S(\tau = 0) = 0$. A constante S_0 pode ser fixada usando-se a integral primeira (3.36) (para $\varepsilon = \Lambda = 0$):

$$S_0 = 3R_0 |\gamma - 1|/2 . \tag{3.55b}$$

A forma paramétrica final das soluções será então

$$R(\tau) = R_0(3|\gamma - 1|/2)^{2/3(\gamma-1)}[(\text{senh } \omega\tau)/\omega]^{2/3(\gamma-1)} , \tag{3.56a}$$

com o tempo cósmico t proveniente da substituição de (3.56a) em (3.49), ou seja,

$$t(\tau) - t_0 = [2R_0/3(\gamma - 1)]\left[1 + 4\omega^2/9(\gamma - 1)^2\right]^{1/2} f(R_0) +$$

$$- [2R_0/3(\gamma - 1)](3|\gamma - 1|/2)^{\gamma/(\gamma-1)} [(\text{senh } \omega\tau)/\omega]^{\gamma/(\gamma-1)} \cosh \omega\tau \, g(\tau) , \tag{3.56b}$$

onde $g(\tau) := f(R(\tau))$, conforme dado por (3.49b) e (3.56a). Observemos que, tomando o limite $B \to 0$ em (3.56), as soluções paramétricas dos modelos FRW padrões são estabelecidas em uma coordenada temporal incomum (não conforme).

3.8. OS PARÂMETROS CINEMÁTICOS DE DESACELERAÇÃO E DE HUBBLE

Para ilustrar algumas predições observacionais do presente modelo, computemos, primeiramente, o parâmetro de desaceleração

$$q := - R\ddot{R}/\dot{R}^2 . \tag{3.57}$$

Usando (3.35) e (3.36), com $\varepsilon = \Lambda = 0$, encontramos que

$$q = q_{FRW} - \frac{(\gamma - 1)B}{R_0[(R_0/R)^{3(\gamma-1)} + 2B/3R_0]} , \tag{3.58a}$$

onde

$$q_{FRW} = (3\gamma - 2)/2 := A \tag{3.58b}$$

é justamente o valor do parâmetro q no caso dos modelos usuais de FRW chatos e sem constante cosmológica (B = 0). Valendo-se da expressão paramétrica (3.56a), podemos obter uma fórmula explícita para $q(\tau)$,

$$q = (3\gamma - 2)/2 - (3/2)(\gamma - 1) \tanh^2 \omega\tau \ . \tag{3.59}$$

Na Fig. 3.6, apresentamos q como função de τ para vários valores representativos de γ. Note-se que o valor atual, $q \cong 1$, obtido a partir da relação distância de luminosidade *versus* desvio para o vermelho pode ser conseguido para vários dos valores fisicamente mais realistas de γ ($\gamma \geq 1$).

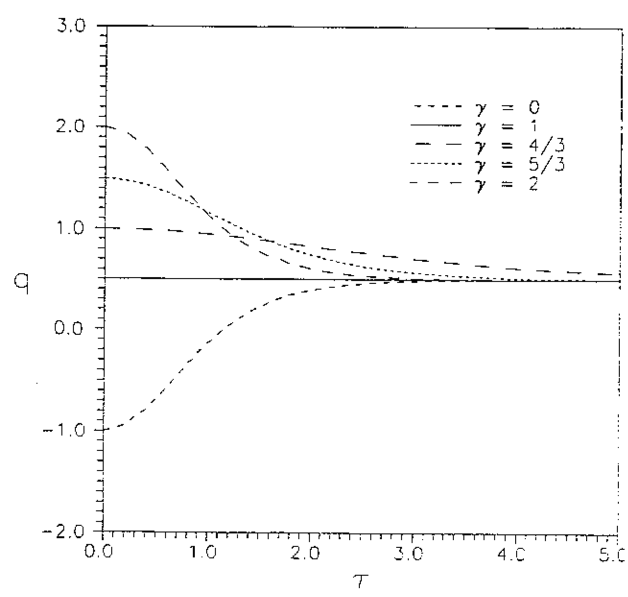

Figura 3.6. Gráficos do parâmetro de desaceleração $q(\tau)$ para diversos valores de γ.

Finalmente, podemos calcular o parâmetro de Hubble atual, cujo inverso, em condições de gravitação somente atrativa, fornece um limite superior para a idade do universo. Na verdade, como os modelos tendem rapidamente a uma fase dominada pela poeira, esperamos que sua idade (ou parâmetro de Hubble) não difira muito daquela fornecida pela solução de Einstein-de Sitter. Com efeito, a partir de (3.36) com ε, $\Lambda = 0$ e $\alpha = R_0^{2A}$ [cf. (3.48c)], obtemos, para o parâmetro de Hubble atual o valor

$$H_0^2 = H_{FRW,0}^2(1 + \Delta) , \qquad (3.60a)$$

onde

$$\Delta := 2BH_{FRW,0}/3 \qquad (3.60b)$$

e

$$H_{FRW,0} = 1/R_0 , \qquad (3.60c)$$

o parâmetro de Hubble atual dos modelos usuais de Friedmann-Robertson-Walker ($B = 0$). Como $B = Mn_0R_0^3/2$ [cf. (3.35c)], podemos tomar $Mn_0 \simeq \rho_c \simeq \simeq 3,1.10^{-31}$ g/cm^3 (densidade de massa nas galáxias) e $H_0 \simeq \simeq 75$ (km/s)/Mpc[47,73,76] para estimar, grosseiramente, que $\Delta \simeq 0,03$.

CAPÍTULO 4

GEOMETROTERMODINÂMICA FRIEDMANNIANA II: O PAPEL DO REFERENCIAL PRÓPRIO

O enfoque fenomenológico dos modelos cosmológicos exige a adoção de uma quadri-velocidade (referencial) macroscópica representativa do fluxo do contínuo. Genericamente, temos duas especificações naturais para esse campo hidrodinâmico refletindo: (i) o fluxo médio das partículas constituintes do fluido (referencial de Eckart ou de partículas) ou (ii) o fluxo médio da energia total (referencial de Landau-Lifshitz ou de energia). Esses referenciais já foram formalmente definidos na Seç. 2.4.

As cosmologias usuais podem ser divididas em duas classes disjuntas: (i) os modelos de equilíbrio (não dissipativos), tais como os modelos padrões de Friedmann-Robertson-Walker, onde ambos os referenciais coincidem e (ii) os modelos de não equilíbrio (dissipativos), onde o reeferencial de Eckart é sempre (pelo menos implicitamente) adotado. Além disso, a última classe de modelos é comumente examinada por intermédio de uma teoria termodinâmica de primeira ordem acausal,[18,19,47,116-118] que, como já mencionamos na Subseç. 2.6.1, apresenta diversas desvantagens.

Neste capítulo, investigamos modelos tipo FRW no contexto de uma teoria termodinâmica estendida de segunda ordem no referencial de Landau-Lifshitz. Na verdade, esse tipo de teoria já foi aplicado em algumas questões cosmológicas,[119-123] mas *sempre* no referencial de Eckart.

Na próxima seção, apresentamos nossas hipóteses básicas relativas à geometria e à termodinâmica. Na terceira seção, obtemos a equação de Friedmann generalizada para o fator de escala e deduzimos algumas soluções exatas para o caso espacialmente chato ($\varepsilon = 0$). Na quarta e última seção, analisamos algumas propriedades termodinâmicas dos modelos, dedicando especial atenção à aplicação da segunda lei generalizada.

Este capítulo se baseia no trabalho original da Ref. 124.

4.1. HIPÓTESES BÁSICAS

Nesta seção, exporemos nossas suposições fundamentais de caráter termodinâmico (decomposição das grandezas básicas, equação fenomenológica para a difusão, equações de estado de equilíbrio e de não equilíbrio, etc).

Restringiremos nossa atenção a um fluido simples dissipativo com

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha} u^{\beta} - p h^{\alpha\beta} \tag{4.1a}$$

e

$$N^{\alpha} = n u^{\alpha} + c^{\alpha} , \qquad c^{\alpha} u_{\alpha} = 0 , \tag{4.1b}$$

de modo que a única fonte de dissipação é a difusão c^{α}. A ausência do termo de fluxo de energia na decomposição de $T^{\alpha\beta}$ e a presença do termo c^{α} na decomposição de N^{α} caracterizam o uso do referencial de Landau-Lifshitz.

A lei de conservação do número de partículas fica

$$(n u^{\alpha})_{;\alpha} = - c^{\alpha}{}_{;\alpha} . \tag{4.2}$$

Investigaremos esse sistema com a termodinâmica estendida de segunda ordem da Subseç. 2.6.2. Em particular, queremos coligir aqui a expressão explícita que diversas fórmulas daquela subseção assumem no caso acima especificado.

A lei de Gibbs generalizada (2.60), base para tal teoria, fica

$$nTds = d\rho - [(\rho + p)/n]dn + (\tau_2 c^{\alpha}/\xi T_{eq})dc_{\alpha} \; . \tag{4.3}$$

Com isso, a equação diferencial fenomenológica (2.64c) para $c^{\alpha} := j^{\alpha}(u_N)$ reduz-se a

$$\tau_2 h^{\alpha\beta}\dot{c}_{\beta} + c^{\alpha} = \xi T^2 h^{\alpha\beta}(\mu/T)_{,\beta} \tag{4.4}$$

e a densidade de fonte de entropia (2.65) a

$$\Sigma = - c^{\alpha}c_{\alpha}/\xi T^2 \; . \tag{4.5}$$

Podemos, então, reescrever a entropia específica (2.66) como

$$s = s_{eq} + \tau_2 c_{\alpha}c^{\alpha}/2\xi nT^2_{eq} \; , \tag{4.6}$$

de onde deduzem-se as equações de estado de não equilíbrio [cf. (2.67)]:

$$T = T_{eq} - (T^2_{eq}/2n^2)\left(\partial[\tau_2(\rho + p_{eq})^2/\kappa T^2_{eq}]/\partial\rho\right)_n c_{\alpha}c^{\alpha} \tag{4.7a}$$

e

$$p = p_{eq} - (T_{eq}/2n^2)\left[(\rho + p_{eq})\left(\partial[\tau_2(\rho + p_{eq})^2/\kappa T^2_{eq}]/\partial\rho\right)_n + \right.$$

$$\left. + n^4\left(\partial[\tau_2(\rho + p_{eq})^2/\kappa n^3 T^2_{eq}]/\partial n\right)_{\rho}\right]c_{\alpha}c^{\alpha} \; . \tag{4.7b}$$

Aqui preferimos utilizar o coeficiente de condutividade térmica κ ao coeficiente de difusão ξ; essas grandezas se relacionam, de acordo com (2.76), por

$$\xi = \kappa[n/(\rho + p_{eq})]^2 . \tag{4.8}$$

Como sempre, estaremos interessados em geometrias de Friedmann-Robertson-Walker, mas, desta vez, só com tricurvatura nula ($\varepsilon = 0$), ou seja, de modo que o elemento de linha fica

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2)] . \tag{4.9}$$

O referencial u constante das decomposições (4.1) continuará sendo tomado como ortogonal às hipersuperfícies maximalmente simétricas:

$$u^\alpha := \delta^\alpha_0 . \tag{4.10}$$

Urge notar, entretanto, que a isotropia *geométrica* do "background" não se reflete numa correspondente isotropia *material*, devido à presença da difusão c^α (vetor do tipo espacial). Falaremos mais sobre isso posteriormente.

As equações de Einstein correspondentes são equivalentes a [cf. (3.4)]:

$$\rho = 3(\dot{R}/R)^2 \tag{4.11a}$$

e

$$p = -(2R\ddot{R} + \dot{R}^2)/R^2 . \tag{4.11b}$$

Como equações de estado de equilíbrio, adotaremos as expressões mais usuais [cf. Seçs. 3.2 e 3.3]:

$$p_{eq} = nT_{eq} \tag{4.12a}$$

e

$$p_{eq} = (\gamma - 1)\rho \ . \tag{4.12b}$$

4.2. AS SOLUÇÕES EXATAS

As variáveis dinâmicas relevantes de nosso sistema são R, n e c^{α} sujeitas às equações (4.2), (4.4) e (4.11), sendo p dado por (4.7b).

Supondo que o gradiente espacial de μ/T se anule (compatível com a homogeneidade de ρ e p) e já que o fluxo é geodésico, (4.4) reduz-se a

$$\tau_2 \dot{c}^{\alpha} + c^{\alpha} = 0 \ . \tag{4.13}$$

Assumiremos agora também, baseados em considerações dimensionais, que

$$\tau_2 = \beta H^{-1} = \sqrt{3}\beta\rho^{-1/2} \ , \tag{4.14a}$$

onde H é o parâmetro de Hubble,

$$H := \dot{R}/R \ , \tag{4.14b}$$

e β é uma constante adimensional não negativa. Essa hipótese possui uma motivação adicional pelo fato de que existe uma escala de tempo natural fornecida pela evolução cósmica, a saber, o tempo de Hubble. Assim, (4.13) torna-se imediatamente integrável (lembre-se que $\dot{c}^{\alpha} = c^{\alpha}{}_{;\lambda}u^{\lambda}$):

$$c^{\alpha} = (0,\ c^{i}) \ , \tag{4.15a}$$

com

$$c^{i} := c_{0}^{i}(\vec{x})\ R^{-(1+\beta)/\beta} \ . \tag{4.15b}$$

Aqui $c_{0}^{i}(\vec{x})$ é um campo tri-vetorial espacial arbitrário. Supondo agora que este campo tem a forma

$$c_{0}^{i} = bK^{i} \ , \tag{4.16}$$

onde b é uma constante e $K^{i}(\vec{x})$ um campo vetorial de Killing das hipersuperfícies maximalmente simétricas normalizado a $-R^{2} = g_{ij}K^{i}K^{j}$, podemos garantir, como mostraremos a seguir, que p depende só de t. Com essa escolha a divergência de c^{α} se anula,

$$c^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \ , \tag{4.17}$$

e sua norma fica

$$c^{\alpha}c_{\alpha} = -\ b^{2}R^{-2/\beta} \ . \tag{4.18}$$

A solução de (4.2) é agora imediata:

$$n = N/R^3 , \tag{4.19}$$

com N uma constante não negativa.

Para estabelecermos a equação de Friedmann generalizada, temos que, em vista de (4.7b), suprir não só as equações de estado de equilíbrio (4.12), como também um "Ansatz" para o coeficiente de condutividade térmica; escolheremos

$$\kappa = \lambda\rho^{m} , \tag{4.20}$$

com λ e m constantes ($\lambda \geq 0$). Destarte, a pressão de não equilíbrio reulta ser

$$p = (\gamma - 1)\rho - (1/3)BR^{-(2-3\beta)/\beta}\, \rho^{1/2-m} , \tag{4.21a}$$

onde

$$B := \frac{3\sqrt{3}\beta\gamma^2 b^2}{2\lambda N(\gamma-1)} [(m + 1/2)\gamma + 1] . \tag{4.21b}$$

De agora em diante, por simplicidade matemática, restringir-nos-emos ao caso $\beta = 2/3$. A lei de "conservação" da energia fica então

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = BH\rho^{1/2-m} . \tag{4.22}$$

Com as escolhas m = - 3/2 e $3B = \alpha/\pi\upsilon$, onde $\upsilon \cong 10^{-3}M_P^2$ é a tensão da corda ("string") fundamental em unidades da massa de Planck M_P e α é a dimensão fractal da corda, podemos modelar fenomenologicamente a produção quântica de cordas fundamentais.[125]

A fim de procurarmos soluções exatas, usamos as equações de Einstein (4.11) e a pressão de não equilíbrio (4.21) para obter a equação de Friedmann generalizada em termos de H:

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - CH^{1-2m} = 0 , \tag{4.23a}$$

com

$$C := 3^{-1/2-m}B . \tag{4.23b}$$

Uma solução imediata de (4.23) é a solução de de Sitter $R = R_0 \exp (H_0 t)$, com R_0 uma constante arbitrária e

$$3\gamma H_0^{2m+1} := C . \tag{4.24}$$

A Eq. (4.23) pode ser reescrita como

$$2RdH/dR + 3\gamma H - CH^{-2m} = 0 , \tag{4.25}$$

e foi estudada por Barrow[126] no caso distinto de dissipação devida à pressão viscosa. Ele obteve três classes de soluções exatas, das quais só apresentaremos as mais elucidativas e fisicamente relevantes. A Eq. (4.25) pode ser integrada para gerar

$$R^{-3\gamma(2m+1)/2} = (H/H_0)^{2m+1} - 1\ , \qquad (H/H_0)^{2m+1} > 1\ ; \tag{4.26}$$

ou

$$R^{-3\gamma(2m+1)/2} = 1 - (H/H_0)^{2m+1}\ , \qquad (H/H_0)^{2m+1} < 1\ . \tag{4.27}$$

Como $H := \dot{R}/R$, da integral (4.26) vemos que para $2m > -1$ e $H > H_0$ temos $R \to t^{2/3\gamma}$ e $t \to 0$ conforme $H \to \infty$, ao passo que temos $R \to \exp\,(H_0 t)$ e $t \to \infty$ conforme $H \to H_0$ por cima; as soluções desse tipo exibem uma singularidade friedmanniana inicial ($t = 0$) e então inflam até um estágio de de Sitter ($t \to \infty$). Quando $2m < -1$ e $H < H_0$, (4.26) mostra que temos $R \to \exp\,(H_0 t)$ e $t \to -\infty$ conforme $H \to H_0$ por baixo, ao passo que $R \to t^{2/3\gamma}$ e $t \to \infty$ conforme $H \to 0$; as soluções desse tipo começam de um estágio remoto de de Sitter ($t \to -\infty$) e então desinflam até uma era friedmanniana ($t \to \infty$). Em qualquer desses dois casos, vemos, de (4.1b) e (4.18), que a difusão extingue-se assintoticamente, de modo que ocorre uma isotropização (material) espontânea do modelo, com $N^\alpha \to nu^\alpha$ conforme $t \to \infty$. O caso (4.27) implica no comportamento peculiar de que $R(t)$ seja limitado superiormente pela unidade quando $2m < -1$ e $H > H_0$, e limitado inferiormente pela unidade quando $2m > -1$ e $H < H_0$.

Se (i) $2m > -1$ e $H > H_0$ ou (ii) $2m < -1$ e $H < H_0$, então (4.26) vale e, depois da substituição

$$\operatorname{senh}\theta := R^{-3\gamma(2m+1)/4}\ , \tag{4.28}$$

ela fornece

$$-(3/4)(2m + 1)H_0t = \int \frac{\cosh^{(2m-1)/(2m+1)} \theta}{\operatorname{senh} \theta} d\theta , \tag{4.29}$$

cuja solução pode ser encontrada analiticamente quando *(2m - 1)/(2m + 1)* for um inteiro. Assim, somos levados aos seguintes quatro tipos de soluções fisicamente relevantes, conforme:

a) $(2m - 1)/(2m + 1) = 2r, \; r \in \mathbb{Z}^+$:

$$- (3/4)(2m + 1)\gamma H_0t = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left[1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right]^{k-1/2}}{2k - 1} +$$

$$+ \ln \left[\left(1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right)^{1/2} - 1\right] + (3/4)(2m + 1)\gamma \ln R ; \tag{4.30a}$$

b) $(2m - 1)/(2m + 1) = 2r + 1, \; r \in \mathbb{Z}^+$:

$$- (3/4)(2m + 1)\gamma H_0t = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left[1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right]^{k}}{2k} +$$

$$- \ln \left[\left(1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right)^{1/2} - 1\right] - (3/4)(2m + 1)\gamma \ln R ; \tag{4.30b}$$

c) $(1 - 2m)/(2m + 1) = 2r, \; r \in \mathbb{Z}^+$:

$$- (3/4)(2m + 1)\gamma H_0t = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left[1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right]^{k-r-1/2}}{2r - 2k + 1} +$$

$$+ \ln \left[\left[1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right]^{1/2} - 1 \right] + (3/4)(2m + 1)\gamma \ln R \; ; \qquad (4.30c)$$

d) $(1 - 2m)/(2m + 1) = 2r + 1, \; r \in \mathbb{Z}^{+}$:

$$- (3/4)(2m + 1)\gamma H_0 t = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left[1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right]^{k-r-1}}{2r - 2k + 1} +$$

$$- \ln \left[\left[1 + R^{-3\gamma(2m+1)/2}\right]^{1/2} - 1 \right] - (3/4)(2m + 1)\gamma \ln R \; . \qquad (4.30d)$$

Qualquer um desses quatro conjuntos de fórmulas inclui ambos os tipos de soluções inflacionárias e deflacionárias acima mencionadas. Para maiores informações sobre essas soluções, remetemos o leitor às Refs. 123 e 126.

4.3. A SEGUNDA LEI GENERALIZADA

Dentre as soluções encontradas acima existem algumas que se aproximam de uma era de de Sitter assintótica, conforme $t \to \infty$ ($2m > -1$ e $H > H_0$). Em tais casos, ocorrem horizontes de eventos (*não* astrofísicos, mas *sim* cosmológicos),[67,68,127] aos quais se pode associar uma entropia e uma temperatura dadas por[128]

$$S_H = 2\pi A \qquad (4.31)$$

e

$$T_H = H/2\pi \ , \tag{4.32}$$

respectivamente. Aqui, $A := 4\pi/H^2$, a área do horizonte de eventos. Para modelos desse tipo, é natural generalizar a segunda lei da termodinâmica, no mesmo espírito que para buracos negros,[129] de modo a exigir que a soma da entropia gravitacional (do horizonte) e da entropia da matéria não possa decrescer com o tempo. Em particular, Davies conseguiu demonstrar sua validade para espaços quase-de Sitter[130,131] e Barrow utilizou essa generalização como um critério excludente contra algumas soluções patológicas de (4.25).[126] No entanto, esses cálculos foram todos executados com ajuda da teoria termodinâmica de Eckart de primeira ordem. Esses resultados só podem, pois, serem considerados fidedignos para soluções estacionárias, mas não para os modelos acima apresentados, que são transientes ou evolucionários. No caso de um fluido viscoso, Pavón já retificou a abordagem do problema com ajuda da termodinâmica estendida.[123,132] Procedemos agora a uma análise semelhante no contexto de nossos modelos difusivos.

A produção de entropia do fluido via difusão toma a forma

$$\begin{aligned} \dot{S}_F &= -\ (R^3/\chi T_{eq}^2)c^\alpha c_\alpha \\ &= \frac{b^2\gamma^2\rho^2}{\kappa n^2 T_{eq}^2} \ . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Usando a expressão acima de S_H, podemos determinar a produção de entropia gravitacional (do horizonte)

$$\dot{S}_H = -16\pi^2\dot{H}/H^3$$

$$= 8\pi^2[\gamma\rho - (1/3)B\rho^{1/2-m}]/H^3 . \qquad (4.34)$$

O fluido está em contato térmico com o horizonte, de modo que sua temperatura deve coincidir com T_H. Levando isso em contato, a segunda lei generalizada requer que

$$\dot{S} = \dot{S}_H + \dot{S}_F$$

$$= \frac{4\pi^2 b^2\gamma^2\rho^2}{\kappa n^2 H^2} + 8\pi^2[\gamma\rho - (1/3)B\rho^{1/2-m}]/H^3 \geq 0 . \qquad (4.35)$$

Para os modelos inflacionários ($2m > -1$ e $H > H_0$), a geração de entropia no estágio assintótico de de Sitter é dominada pela contribuição do horizonte, que pode ser reescrita como

$$\dot{S}_H = (24\pi^2\gamma/H)\left[1 - (H/H_0)^{-(2m+1)}\right] . \qquad (4.36)$$

Nessa era, podemos supor que

$$H \cong H_0(1 + \delta) , \qquad 0 < \delta \ll 1 , \qquad (4.37)$$

de modo que

$$\dot{S}_H \cong 24\pi^2\gamma\delta(2m + 1)/H_0 > 0 . \qquad (4.38)$$

A segunda lei generalizada (SLG) não restringe de nenhuma maneira esses modelos. De fato, sempre que a condição de energia dominante (CED) for satisfeita,

$$\rho + p = - (1/3)B\rho^{1/2-m} \geq 0 \ , \tag{4.39}$$

$\dot{S}_H$ por si só já é não negativo, e, como tal, também o será $\dot{S}$. Contudo, é possível que, devido à difusão, a CED seja violada numa outra época e que a entropia associada ao horizonte decresça com o tempo. Nessas condições, a validade da SLG não pode ser assegurada *a priori* e, se a mesma for tomada como postulado, ela poderia desempenhar o papel de um princípio seletor para modelos fisicamente admissíveis sob outros aspectos.

Convém enfatizar que, na medida em que os modelos deflacionários ($2m < -1$ e $H < H_0$) não possuem horizonte de eventos, não há absolutamente nenhum sentido em aplicar-lhes a SLG (como feito na Ref. 126), conforme já observado por Raychaudhuri.[133]

CAPÍTULO 5

GEOMETROTERMODINÂMICA FRIEDMANNIANA III: O PAPEL DAS EQUACÕES DE BALANCO

"No princípio criou Deus os céus e a terra.
A terra, porém, era sem forma e vazia;
havia trevas sobre a face do abismo,
e o Espírito de Deus pairava por sobre as águas.
Disse Deus: Haja luz; e houve luz."[134]

A gênese do Universo, em particular, da matéria aqui presente, é, indubitavelmente, um dos maiores, mais instigantes e recorrentes enigmas da cosmologia e do saber humano em geral. É claro que, como toda profunda questão, ela nos conduz a meandros não só científicos, como filosóficos e teológicos.[21] Uma das primeiras, mais perenes e, quiçá no mundo ocidental, mais representativas considerações sobre esse tema é apresentada, em forma canônica, no Livro do Gênesis da Bíblia,[134] de onde retiramos a epígrafe acima.

No contexto relativístico, a primeira abordagem dessa questão se deve a Dirac,[140,141] que, formulando a hipótese dos grandes números (variação das "constantes" fundamentais), conclui da variação do número de partículas no Universo.[142] A seguir, temos os trabalhos de Bondi & Gold[143] e Hoyle,[144-145] que, ao implementarem o *princípio cosmológico perfeito*, levando em conta a expansão do universo, foram levados a admitir a

[21] O diálogo entre as culturas científica e teológica conta com a participação de vários pensadores renomados, antigos e contemporâneos; recomendamos, só como uma amostragem completamente despretensiosa, as Refs. 135-139.

existência de um campo C responsável pela criação de matéria. Essa chamada *teoria do estado estacionário* não goza atualmente de muito prestígio, principalmente frente a suas dificuldades em explicar a abundância dos elementos leves (D, ^{3}He, ^{4}He e ^{7}Li) e a presença da radiação cósmica de fundo em microondas; no entanto, ela possui algumas características bastante satisfatórias, tais como a incorporação do princípio de Mach e a migração do universo para uma época inflacionária de de Sitter, independentemente das condições iniciais (teorema da "calvície" cósmica).[142]

No contexto quântico, a idéia básica de que o Universo fora criado como uma flutuação do vácuo foi originalmente proposta por Tryon[146] e independentemente por Fomin.[147] Tryon argumentou que, se o valor total ("líquido") de todas as grandezas conservadas do Universo, em particular sua energia total (material *mais* gravitacional), for zero, então um universo cuja duração está condicionada pela relação de incerteza $\Delta E\ \Delta t \geq \hbar/2$ poderia ter emergido de uma flutuação quântica do vácuo.[22]

Mais tarde, Brout, Englert & Gunzig[149] sugeriram um cenário concreto que provia uma geração simultânea de matéria e curvatura a partir de uma flutuação quântica do vácuo do espaço-tempo de Minkowski. Nesse modelo, depois de um primeiro estágio de criação, o Universo entra numa era de de Sitter, na qual os problemas cosmológicos usuais (isotropia, chateza, etc) são solucionados, e, finalmente, o sistema atinge a atual fase friedmanniana adiabática.

Algumas tentativas de um enfoque fenomenológico para o modelo acima também apareceram na literatura.[150-155] Estamos particularmente interessados nas Refs. 153-155, onde os autores aplicam a termodinâmica de

---

[22]Para uma exposição bem didática desse e de outros pontos relacionados com a "criação *ex nihilo* (a partir do nada)", queira consultar a Ref. 148.

sistemas abertos à cosmologia, permitindo produção tanto de entropia como de partículas. Esses trabalhos poderiam sugerir, *inter alia,* que, às custas da energia gravitacional, somente *criação* de matéria poderia ocorrer, sendo o processo inverso (destruição de matéria) termodinamicamente proibido. Como veremos neste capítulo, esse não é o caso.

Este capítulo está dividido em duas seções; na primeira delas, apresentamos a formulação manifestamente covariante que dá conta do processo de criação de partículas, na presença de um campo gravitacional arbitrário, qualquer que seja o mecanismo responsável por essa criação. Deduzimos aí também a expressão para a correspondente lei de evolução da temperatura, que será utilizada na próxima seção. Na segunda seção, propomos um *Ansatz* entre a pressão de criação e a densidade de fonte de partículas, a partir do qual podemos recuperar naturalmente e criticar alguns resultados obtidos por Prigogine *et alii*.

Este capítulo se baseia no trabalho original das Refs. 156 e 157.

5.1. TERMODINÂMICA E CRIAÇÃO DE MATÉRIA EM UM FLUIDO SIMPLES

Nesta seção, apresentaremos a formulação manifestamente covariante, em contraste com aquela adotada por Prigogine e colaboradores,[153-155] necessária para o tratamento do processo de criação de partículas em um fluido simples.

Recordemos as características fundamentais de um fluido simples em regime termostático (cf. Seç. 2.6).

Suas variáveis básicas assumem a forma

$$T^{\alpha\beta}_{eq} = \rho u^{\alpha} u^{\beta} - p_{eq} h^{\alpha\beta} , \qquad (5.1)$$

$$N^{\alpha}_{eq} = nu^{\alpha} \tag{5.2}$$

e

$$s^{\alpha}_{eq} = ns_{eq}u^{\alpha} \ . \tag{5.3}$$

Esses objetos estão sujeitos, respectivamente, às leis

$$T^{\alpha\beta}_{eq;\beta} = 0 \ , \tag{5.4}$$

$$N^{\alpha}_{eq;\alpha} = 0 \tag{5.5}$$

e

$$s^{\alpha}_{eq;\alpha} = 0 \ , \tag{5.6}$$

e a entropia específica s_{eq} satisfaz a lei de Gibbs

$$T_{eq}ds_{eq} = d(\rho/n) + p_{eq}d(1/n) \ . \tag{5.7}$$

Vejamos agora quais as modificações mínimas que devem ser introduzidas para descrever consistentemente um processo puro de criação de partículas. A primeira modificação óbvia diz respeito à Eq. (5.5), que deve ser transformada numa verdadeira equação de balanço, posto que não há mais conservação do número de partículas. Por outro lado, a fim de não introduzirmos um processo difusivo complicador, manteremos a expressão (5.2) para o fluxo de partículas. Assim, temos

$$N^{\alpha}{}_{;\alpha} = \Psi \, , \qquad (5.8)$$

onde Ψ é a *densidade de fonte de partículas* e

$$N^{\alpha} = nu^{\alpha} \, . \qquad (5.9)$$

Com relação às Eqs. (5.3) e (5.6), não há absolutamente nehuma razão para serem alteradas, visto que (5.6) já é uma equação de balanço genérica e (5.3) deve representar justamente o fluxo de entropia na ausência de fenômenos dissipativos vetoriais e tensoriais (h^{α}, j^{α}, $\pi^{\alpha\beta}$), pelo menos até primeira ordem. Logo, mantemos

$$s^{\alpha} = ns_{eq}u^{\alpha} \qquad (5.10)$$

e

$$s^{\alpha}{}_{;\alpha} = \Sigma \geq 0 \qquad (5.11)$$

Resta-nos considerar as Eqs. (5.1), (5.4) e (5.7). A Eq. (5.7) é válida mesmo para um sistema aberto,[43,46] ou seja, através de cuja fronteira há um arraste de partículas, e considerá-la-emos igualmente procedente quando houver uma efetiva criação de matéria. Quanto às duas outras equações [(5.1) e (5.4)], é fácil mostrar que, por coerência com o balanço de energia, devemos, mesmo supondo ausentes outros processos dissipativos que não a criação de partículas, considerar uma pressão dinâmica efetiva P distinta de p_{eq}. De fato, consideremos um universo em expansão no qual há criação de matéria; devemos esperar, então, que a energia em um volume co-móvel decresça mais lentamente do que na situação ordinária. Pode-se efetivar isso por meio de uma diminuição da pressão dinâmica. Formalmente, consideramos um tensor energia-momento

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^{\alpha} u^{\beta} - P h^{\alpha\beta} , \tag{5.12a}$$

com

$$P = p_{eq} + \Pi , \tag{5.12b}$$

sujeito à lei de "conservação" da energia (não modificada)

$$d(\rho\Delta V)/dt = - P d(\Delta V)/dt . \tag{5.13}$$

Supondo que $d(\Delta V)/dt > 0$ (expansão), devemos ter $P < p_{eq}$, de modo que $\rho\Delta V$ caia mais lentamente que no regime termostático.

A pressão Π assim originada, essencialmente ligada ao processo de variação do número de partículas, pode sugestivamente ser denominada de *pressão de criação*. Ela goza do mesmo caráter escalar que a pressão viscosa usual, mas sua origem "microscópica" é diversa.[23]

A partir dessas equações, é fácil mostrar que

---

[23] Um gás relativístico simples de partículas pontuais fracamente interagentes não se expande adiabaticamente. Podemos explicar esse fenômeno se imaginarmos o gás como uma mistura de duas componentes com calores específicos distintos, cada uma das quais expandindo-se adiabaticamente durante um tempo da ordem do livro tempo médio. Cada componente resfriará a uma taxa diferente, produzindo assim uma espécie de "gradiente microscópico de temperatura" sobre distâncias da ordem do livre caminho médio. O "fluxo de calor" que tende a reequalizar as temperaturas é o mecanismo de dissipação que, neste contexto, se identifica com a viscosidade volumar.[158,159] Outrossim, a viscosidade volumar também pode ser encarada como surgindo devido ao fato de que, numa expansão ou contração de um gás

$$\Sigma = - (\Pi\Theta + \mu_{eq}\Psi)/T_{eq} \; , \tag{5.14}$$

relação essa primeiramente obtida por Calvão, Lima & Waga.[156,157]

Podemos também determinar facilmente (cf. Subseç. 2.6.1) a nova lei de evolução da temperatura, encontrando

$$\dot{T}_{eq} = - T_{eq}(\partial p_{eq}/\partial \rho)_n \Theta - (\partial T_{eq}/\partial \rho)_n \Pi\Theta + (\partial T_{eq}/\partial n)_\rho \Psi \; . \tag{5.15}$$

5.2. UM *ANSATZ* PARA A PRESSÃO DE CRIAÇÃO E CRÍTICA DE ALGUNS RESULTADOS DE PRIGOGINE *ET ALII*

É óbvio que, quando a densidade de fonte de partículas for nula ($\Psi = 0$), ou seja, houver conservação do número de partículas, esperamos que a pressão de criação Π também se anule, assim como a densidade de fonte de entropia Σ. Expressaremos isso pela admissão de um *Ansatz* fenomenológico do tipo

$$\Pi = - \alpha\Psi/\Theta \; , \tag{5.16}$$

onde α é positivo, de modo a garantir que, como argumentado acima, no caso $\Psi > 0$ e $\Theta > 0$, teremos $\Pi < 0$. Com essa escolha, a densidade de fonte de entropia (5.14) se reescreve como

---

clássico de partículas estruturadas, o trabalho realizado pela pressão altera a energia translacional imediatamente, mas afeta a energia interna das partículas (através de colisões inelásticas) só depois de um certo lapso temporal.[160]

$$\Sigma = (\alpha - \mu_{eq})\Psi/T_{eq} \ , \tag{5.17a}$$

ou ainda

$$\Sigma = s_{eq}\Psi + \left[\alpha - (\rho + p_{eq})/n\right](\Psi/T_{eq}) \ . \tag{5.17b}$$

Note-se, de (5.17a), que Σ só será não negativo quando o coeficiente fenomenológico α satisfizer: (i) $\alpha \geq \mu_{eq}$ se $\Psi > 0$, ou (ii) $\alpha \leq \mu_{eq}$ se $\Psi < 0$. Também é conveniente comparar (5.17b) com a expressão obtida por derivação covariante de (5.10),

$$\Sigma = \Psi s_{eq} + n\dot{s}_{eq} \ , \tag{5.18}$$

de onde segue

$$\dot{s}_{eq} = \left[\alpha - (\rho + p_{eq})/n\right](\Psi/nT_{eq}) \ . \tag{5.19}$$

Examinaremos agora o trabalho da Ref. 155. Prigogine e colaboradores atacaram, como nós, do ponto de vista puramente fenomenológico, o problema da criação de matéria em cosmologia e chegaram, entre outras, às quatro seguintes conclusões:

(i) "...space-time can produce matter, while the reverse process is thermodynamically forbidden." [pág. 770];

(ii) "..., creation of matter corresponds to a supplementary pressure p_c [nosso Π], which must be considered as part of the phenomenogical pressure $\tilde{p}$ [nosso P], (...) where p [nosso p_{eq}] is the true thermodynamical pressure and (...) then

$p_c = - [(\rho + p)/3nH] (\dot{n} + 3Hn)$ (13)..." [pág. 771];

(iii) "This implies that, in the presence of matter creation, the usual Einstein's equations [em nossas unidades $\kappa = 1$ e k é o nosso ε]

$$\kappa\rho = 3H^2 + k/R^2 \qquad\qquad (14)$$
$$\dot{\rho} = -\ 3H(\rho + p)$$

become

$$\kappa\rho = 3H^2 + k/R^2 \qquad\qquad (15)\ldots\text{" [pág. 771];}$$
$$\dot{\rho} = (\rho + p)\ \dot{n}/n$$

(iv) "Only an *expanding de Sitter universe is thermodynamically possible.*" [pág. 772].

Como veremos agora, *nenhum desses resultados* é *genericamente representativo*, valendo *somente* para processos a entropia específica constante, isto é, com

$$\dot{s}_{eq} = 0\ , \tag{5.20}$$

restrição essa absolutamente não necessária *a priori*.

Nesse caso, contudo, (5.19) implica que α coincide com a *entalpia específica*,

$$\alpha = (\rho + p_{eq})/n =:\ h_{eq}\ , \tag{5.21}$$

e a pressão de criação assume a forma

$$\Pi = -\ \Psi h_{eq}/\Theta\ , \tag{5.22}$$

que recupera o resultado (ii) acima citado.

Da condição (5.20), obtemos ainda que

$$\dot{S}/S = \dot{N}/N = \Psi/n \, , \tag{5.23}$$

onde S é a entropia total e N o número total de partículas num volume co-móvel ΔV. Posto que S e n são positivos, e que a entropia total não pode decrescer (pois não há tri-fluxo de entropia!), devemos ter $\Psi \geq 0$ e, nesse caso, como concluíram os autores da Ref. 155, o espaço-tempo só pode criar matéria, sendo termodinamicamente proibido o processo inverso [resultado (i) supracitado]. Entretanto, esse resultado só vale *se* $\dot{s}_{eq} \leq 0$. Com efeito, a partir de (5.18), vemos que a segunda lei da termodinâmica exige somente que

$$\Psi \geq - n\dot{s}_{eq}/s_{eq} \, , \tag{5.24}$$

que é compatível com destruição de matéria ($\Psi < 0$) contanto que $\dot{s}_{eq} > 0$!

No tocante ao resultado (iii) acima mencionado, basta verificar que, valendo (5.20) e, portanto, (5.21), então podemos combinar a lei de Gibbs (5.7), a lei de "conservação" da energia (5.13) e a lei de balanço do número de partículas (5.8) para obter

$$\dot{\rho} = h_{eq}\dot{n} \, , \tag{5.25}$$

justamente a segunda das "novas" equações de Einstein do item (iii) apresentado mais acima. Fica claro, no entanto, que essa equação só vale para $s_{eq} = const.$ Somente então ρ e n determinam a pressão de equilhbrio p_{eq}. De fato, a partir dessa equação, temos, por exemplo, que

$$\rho = mn \qquad \Rightarrow \qquad p_{eq} = 0 \tag{5.26a}$$

e

$$\rho = aT_{eq}^4 \ , \ n = bT_{eq}^3 \qquad \Rightarrow \qquad p_{eq} = (1/3)\rho \ . \tag{5.26b}$$

No caso geral, contudo, o que vale é a lei de Gibbs (5.7), e $\dot{s}_{eq}$ também deve ser conhecido para que a pressão termostática seja fixada.

Finalmente, é fácil ver, das "novas" equações de Einstein mostradas no item (iii) precedente, que universos de de Sitter com $\dot{\rho}$, $\dot{n} = 0$, pressão termostática p_{eq} arbitrária e pressão de criação $\Pi = - nh_{eq}$ são possíveis, tornando-se "reabilitados" no sentido de serem "agora compatíveis com a existência de matéria dotada de uma equação de estado usual" [pág. 772]. No caso de um desses universos, vemos, de (5.25) e $\Psi \geq 0$, que só pode haver expansão e não contração ($H \geq 0$).

Passemos agora à obtenção de alguns resultados novos decorrentes da lei de evolução de temperatura nesse contexto ($s_{eq} = const$). Levando em conta (2.57), é imediato verificar que (5.15) assume a forma mais simples

$$\dot{T}_{eq}/T_{eq} = (\partial p_{eq}/\partial \rho)_n \ \dot{n}/n \ , \tag{5.27}$$

que é a mesma equação obedecida por um fluido simples em equilíbrio (número de partículas conservado) [cf. (2.59)]. Como aplicação dessa equação, consideremos um meio com equação de estado da Seç. 3.3, isto é,

$$\rho = mn + (\gamma - 1)^{-1} p_{eq} \ . \tag{5.28}$$

Nesse caso, a solução de (5.27) é

$$T_{eq} n^{1-\gamma} = const \ , \tag{5.29}$$

que deve ser contrastada com a lei adiabática usual $T_{eq}V^{\gamma-1} = const$, obtida com número fixo de partículas. Vale destacar que, no caso de radiação isotrópica (m = 0, γ = 4/3), (5.25) e (5.29) acarretam que n e ρ variam, respectivamente, como T^3_{eq} e T^4_{eq} , a mesma dependência que para radiação em equilíbrio. No entanto, a lei usual do modelo padrão, $RT_{eq} = const$, deve agora ser substituída por $RT_{eq}N^{-1/3} = const$.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Nesse ensaio, procuramos dar uma amostra da potencialidade e riqueza termodinâmicas dos modelos cosmológicos relativísticos de Robertson-Walker. Esperamos ter atingido esse objetivo seja explorando suas equações de estado, seu referencial macroscópico próprio, ou suas leis de balanço. Relembraremos agora os principais resultados obtidos, assim como apresentaremos algumas perspectivas naturais de pesquisa posterior.

6.1. PRINCIPAIS RESULTADOS

Nosso trabalho dividiu-se em duas grandes partes: i) *fundamentação*, onde expusemos os conceitos e princípios básicos, através dos quais nos norteamos ao longo de todo o desenvolvimento subseqüente.
ii) *aplicação*, onde lançamos mão das idéias da primeira parte para ilustrar, por intermédio de exemplos concretos, três modos naturais de enriquecimento da geometrotermodinâmica de Friedmann-Robertson-Walker convencional.

A *fundamentação* se constituiu no Capítulo 2, onde, num primeiro momento, apresentamos uma definição rigorosa e bem motivada de referencial, distinta de sistema de coordenadas, que pôde ser utilizada para determinar as leis de transformação manifestamente covariantes para as grandezas relativas do vetor fluxo de partículas (densidade de partículas e arraste de partículas) e do tensor energia-momento (densidade de energia, pressão dinâmica, fluxo de energia e estresse), em termos dos parâmetros de um "boost" qualquer; num segundo momento, desenvolvemos as teorias termodinâmicas relativísticas de zeroésima, primeira e segunda ordem, válidas em qualquer referencial; num terceiro momento, demonstramos, com ajuda dos formalismos anteriormente expostos, a equivalência, no sentido da invariância (numérica) da densidade de fonte de entropia, das teorias elaboradas no referencial de Eckart e no de Landau-Lifshitz.

A *aplicação* consistiu dos Capítulos 3, 4 e 5. No Capítulo 3, investigamos as modificações induzidas na evolução de modelos cosmológicos de Robertson-Walker em equilíbrio quando a equação de estado de equilíbrio passa a ser $\rho = mn + (\gamma - 1)^{-1} p_{eq}$. Essa equação é mais geral que a lei gama ordinariamente empregada em cosmologia e, certamente, descreve melhor a época próxima ao desacoplamento e à recombinação ($t \simeq 1,4.10^{3}$ anos, $T_{eq} \simeq 5,5$ eV), quando a poeira e a radiação são, em densidade de energia, igualmente relevantes.Como a equação de Friedmann generalizada para o fator de escala admitia uma integral primeira do tipo $\dot{R}^2 + V(R) = -\varepsilon$, pudemos executar uma análise das propriedades qualitativas dos modelos, tanto pelo estudo do potencial efetivo *V(R)* como pelo estudo do retrato de fase. Determinamos então que: para $\varepsilon = +1$, temos, além das soluções usuais, outras que são não singulares e periódicas; para $\varepsilon = 0$, temos, além das soluções usuais, soluções não singulares; para $\varepsilon = -1$, só temos as soluções usuais. A seguir, encontramos as soluções exatas, em termos de funções hipergeométricas, para os modelos com seção espacial chata; uma de suas características mais notáveis, em comparação com os modelos padrão, era um parâmetro de desaceleração dependente do tempo(decrescente para $\gamma > 1$), tendendo assintoticamente para o valor 1/2.

No Capitulo 4, mostramos que, a despeito de ojerizas de caráter estético, modelos geometricamente simétricos não são necessariamente materialmente simétricos, o que aliás já era conhecido na literatura.

Especificamente, estudamos, pela primeira vez, um sistema dissipativo no referencial de Landau-Lifshitz com a termodinâmica estendida, de segunda ordem. Obtivemos soluções exatas que, no entanto, acabam, em situações razoavelmente genéricas, por se isotropizarem materialmente, ou seja, a difusão de partículas tende assintoticamente a zero.

No Capítulo 5, estudamos a termodinâmica da criação de matéria em cosmologia. Nossa abordagem pretendeu ser clara e direta, adotando, desde o início, alterações mínimas nos postulados e uma formulação manifestamente covariante. Mostramos que, diferentemente do que poderia ter ficado, pelo menos, implícito nos trabalhos de Prigogine e colaboradores, termodinamicamente não há restrição para a destruição de matéria ou para um universo de de Sitter em contração.

6.2. PERSPECTIVAS

Tal qual um palimpsesto, a cosmologia, mesmo a padrão, é inesgotável, inexaurível, não no sentido depreciativo de sua incorroborabilidade ou irrefutabilidade observacional, mas sim no sentido positivo da inquisição e dissecação de seus fundamentos. Por outro lado, não será essa uma "prerrogativa" imanente a qualquer proposta de sistematização ou axiomatização do conhecimento em geral (cf. teoremas de Gödel)?

De qualquer maneira, acho que a busca de conhecimento científico deve pressupor um equilíbrio, talvez fugaz, entre ciência normal (paradigmática) e ciência revolucionária, mas a última é sempre mais inebriante (sem implicar qualquer juízo de valor). Despretensiosamente, creio ter sido assim que foi adquirindo corpo essa tese, onde os problemas surgiam pela reflexão, muitas vezes inconsciente, sobre os fundamentos da geometrotermodinâmica, seus postulados e conceitos primitivos. Para retomar a busca daquele equilíbrio fugaz, algumas veredas naturais se apresentam:

(i) investigação de modelos de equilíbrio com outras equações de estado;

(ii) adoção do referencial de Landau-Lifshitz para o tratamento termodinâmico de sistemas astrofísicos ou cosmológicos mais complexos;

(iii) estudo da criação de partículas com um modelo, fenomenológico ou quântico, específico para a densidade de fonte de partículas.

Arrivederci!

REFERÊNCIAS EM ORDEM DE ENTRADA

[1] CATTANEO, C. - "General relativity: relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference", *Nuovo Cimento* **10**, 318-337 (1958).

[2] FOCK, V. - *The Theory of Space, Time and Gravitation.* Pergamon, London, England, 1959.

[3] REICHENBACH, H. - *Axiomatization of the Theory of Relativity.* University of California, Berkeley, USA, 1969.

[4] MØLLER, C. - *The Theory of Relativity.* Oxford University, Oxford, England, 1972.

[5] SYNGE, J. L. - *Relativity: The Special Theory.* North-Holland, Amsterdam, Holland, 1956.

[6] DEHNEN, H. - "The frame of reference in relativistic theories", *Int. J. Theor. Phys.* **3**, 509-511 (1970).

[7] SACHS, R. K. & WU, H. - *General Relativity for Mathematicians.* Springer-Verlag, New York, USA, 1977.

[8] EARMAN, J. - "Covariance, invariance and the equivalence of frames", *Found. Phys.* **4**, 267-289 (1974).

[9] FRIEDMAN, M. - *Foundations of Space-Time Theories. Relativistic Physics and Philosophy of Science.* Princeton University, Princeton, USA, 1983.

[10] TORRETTI, R. - *Relativity and Geometry.* Pergamon, Oxford, England, 1983.

[11] PAPAPETROU, A. - *Lectures on General Relativity.* Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.

[12] EARMAN, J. & GLYMOUR, C. - "The gravitational red shift as a test of general relativity: history and analysis", *Stud. Hist. Phil. Sci.* **11**, 49-85 (1980).

[13] WALD, R. M. - *General Relativity*. University of Chicago, Chicago, USA, 1984.

[14] ECKART, C. - "The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid", *Phys. Rev.* **58**, 919-924 (1940).

[15] LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. - *Fluid Mechanics*. Pergamon, Oxford, England, 1959.

[16] ISRAEL, W. - "Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory", *Ann. Phys. (N. Y.)* **100**, 310-331 (1976).

[17] KING, A. R. & ELLIS, G. F. R. - "Tilted homogeneous cosmological models", *Commun. Math. Phys.* **31**, 209-242 (1973).

[18] COLEY, A. A. & TUPPER, B. O. J. - "Exact viscous fluid FRW cosmologies: the case of general *k*", *Phys. Lett. A* **100**, 495-498 (1984).

[19] COLEY, A. A. & TUPPER, B. O. J. - "Two-fluid Friedmann-Robertson-Walker cosmologies and their numerical predictions", *Can. J. Phys.* **64**, 204-209 (1986).

[20] FULLING, S. A. - "Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time", *Phys. Rev. D* **7**, 2850-2862 (1973).

[21] LETAW, J. R. & PFAUTSCH, J. D. - "Quantized scalar field in the stationary coordinate systems of flat spacetime", *Phys. Rev. D* **24**, 1491-1498 (1981).

[22] LETAW, J. R. & PFAUTSCH, J. D. - "The stationary coordinate systems in flat spacetime", *J. Math. Phys.* **23**, 425-431 (1982).

[23] BIRRELL, N. D. & DAVIES, P. C. W. - *Quantum Fields in Curved Space.* Cambridge University, Cambridge, England, 1982.

[24] KOLASSIS, C. A. ; SANTOS, N. O. & TSOUBELLIS, D. - "Energy conditions for an imperfect fluid", *Class. Quantum Grav.* **5**, 1329-1338 (1988).

[25] HISCOCK, W. A. & OLSON, T. S. - "Effects of frame choice on nonlinear dynamics in relativistic heat-conducting fluid theories", *Phys. Lett. A* **141**, 125-130 (1989).

[26] HALBWACHS, - *Théorie Relativiste des Fluides à Spin. Recherches sur la Dynamique du Corpuscule Tournant Relativiste et l'Hydrodynamique Relativiste des Fluides Dotés d'une Densité de Moment Angulaire Interne.* Gauthiers-Villars, Paris, France, 1960.

[27] HEHL, F. W. - "On the energy tensor of spinning massive matter in classical field theory and general relativity", *Rep. Prog. Phys.* **9**, 55-82 (1976).

[28] DIXON, W. G. - *Special Relativity. The Foundation of Macroscopic Physics.* Cambridge University, Cambridge, England, 1978.

[29] DE OLIVEIRA, H. P. - *Fluidos com Spin em Relatividade Geral: Formulação Variacional, Aspectos Termodinâmicos e Modelos Cosmológicos.* Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1991.

[30] ELLIS, G. F. R. - "Relativistic cosmology", in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XLVII: General Relativity and Cosmology, Varenna, 1969*, edited by R. K. Sachs. Academic, New York, USA, 1971.

[31] ELLIS G. F. R. - "Relativistic cosmology", in *Cargèse Lectures in Physics, Vol. 6, Cargèse, 1971*, edited by E. Schatzman. Gordon and Breach, New York, USA, 1973.

[32] DE GROOT, S. R.; VAN LEEUWEN, W. A. & VAN WEERT, Ch. G. - *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1980.

[33] HALL, G. S. - "The structure of the energy-momentum tensor in general relativity", *Arab. J. Sci. Engin.* 9, 87-96 (1984).

[34] HALL, G. S. & NEGM, D. A. - "Physical structure of the nergy-momentum tensor in general relativity", *Int. J. Theor. Phys.* 25, 405-423 (1986).

[35] KRAMER, D.; STEPHANI, H.; MACCALLUM, M. & HERLT, E. -*Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambrige University, Cambridge, England, 1980.

[36] STEWART, J. M. - "Non-equilibrium relativistic kinetic theory", in *Lecture Notes in Physics, Vol. 10*, edited by J. Ehlers, K. Hepp and H. A. Weidenmüller. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1971.

[37] ISRAEL, W. & STEWART, J. M. - "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory", *Ann. Phys. (N. Y.)* **118**, 341-372 (1979).

[38] TRUESDELL, C. & TOUPIN, R. A. - "The classical field theories", in *Encyclopedia of Physics, Vol. III/1: Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, edited by S. Flügge. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1960.

[39] GYARMATI, I. - *Non-Equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1970.

[40] GLANSDORFF, P. & PRIGOGINE, I. - *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Wiley-Interscience, New York, USA, 1971.

[41] KREUZER, H. J. - *Nonequilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations*. Oxford University, Oxford, England, 1981.

[42] DIXON, W. G. - "Relativistic foundations for thermostatics", *Arch. Rational Mech. Anal.* 69, 293-322 (1979).

[43] CALLEN, H. B. - *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics.* John Wiley & Sons, New York, USA, 1985.

[44] WOODS, L. C. - *The Thermodynamics of Fluid Systems.* Oxford University, Oxford, England, 1975.

[45] YOURGRAU, W.; VAN DER MERWE, A. & RAW, G. - *Treatise on Irreversible and Statistical Thermophysics. An Introduction to Nonclassical Thermodynamics.* Dover, New York, USA, 1982.

[46] DE GROOT, S. R. & MAZUR, P. - *Non-Equilibrium Thermodynamics.* Dover, New York, USA, 1984.

[47] WEINBERG, S. - *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley & Sons, New York, USA, 1972.

[48] NEUGEBAUER, G. - *Relativistische Thermodynamik.* Vieweg & Sohn, Braunschweig, Deutschland, 1980.

[49] STEPHANI, H. - *General Relativity. An Introduction to the Theory of the Gravitational Field.* Cambridge University, Cambridge, England, 1982.

[50] STRAUMANN, N. - *General Relativity and Relativistic Astrophysics.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1984.

[51] DEMIANSKI, M. - *Relativistic Astrophysics.* Pergamon, Oxford, England, 1985.

[52] HISCOCK, W. A. & LINDBLOM, L. - "Generic instabillities in first-order dissipative relativistic fluid theories", *Phys. Rev. D* **31**, 725-733 (1985).

[53] HISCOCK, W. A. & LINDBLOM, L. - "Linear plane waves in dissipative relativistic fluids", *Phys. Rev. D* **35**, 3723-3732 (1987).

[54] DE OLIVEIRA, H. P. - *Um Estudo em Cosmologia e Termodinâmica Causal*. Tese de Mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1986.

[55] GEROCH, R. & LINDBLOM, L. - "Dissipative relativistic fluid theories of divergence type", *Phys. Rev. D* **41**, 1855-1861 (1990).

[56] MÜLLER, I. - "Zum Paradoxon der Wärmeleitungstheorie", *Z. Phys.* **198**, 329-344 (1967).

[57] PAVÓN, D.; JOU, D. & CASAS-VÁZQUEZ, J. - "On a covariant formulation of dissipative phenomena", *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **36**, 79-88 (1982).

[58] HISCOCK, W. A. & LINDBLOM, L. - "Stability and causality in dissipative relativistic fluids", *Ann. Phys. (N. Y.)* **151**, 466-496 (1983).

[59] MÜLLER, I. - *Thermodynamics*. Pitman, London, England, 1985.

[60] LIU, I.-S.; MÜLLER, I. & RUGGERI, T. - "Relativistic thermodynamics of gases", *Ann. Phys. (N. Y.)* **169**, 191-219 (1986).

[61] JOU, D.; CASAS-VÁZQUEZ, J. & LEBON, G. - "Extended irreversible thermodynamics", *Rep. Prog. Phys.* **51**, 1105-1179 (1988).

[62] JOU, D. & CASAS-VÁZQUEZ, J. - "Carnot cycles and a non-equilibrium absolute temperature", *J. Phys. A* **20**, 5371-5378 (1987).

[63] OLSON, T. S. - "Stability and causality in the Israel-Stewart energy frame theory", *Ann. Phys. (N. Y.)* **199**, 18-36 (1990).

[64] CALVÃO, M. O. & LIMA, J. A. S. - "Nonstandard big bang models", *Phys. Lett. A* **141**, 229-232 (1989).

[65] HAWKING, S. W. & ELLIS, G. F. R. - *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University, Cambridge, England, 1973.

[66] MISNER, C. W.; THORNE, K. S. & WHEELER, J. A. - *Gravitation*. Freeman, San Francisco, USA, 1973.

[67] RINDLER, R. - *Essential Relativity. Special, General and Cosmological.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977.

[68] HEIDMANN, J. - *Relativistic Cosmology. An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1980.

[69] ZEL'DOVICH, Ya. B. & NOVIKOV, I. D. - *Relativistic Astrophysics II: The Structure and Evolution of the Universe.* University of Chicago, Chicago, USA, 1983.

[70] ELLIS, G. F. R.; NEL, S. D.; MAARTENS, R.; STOEGER, W. R. & WHITMAN, A. P. - "Ideal observational cosmology", *Phys. Rep.* **124**, 315-417 (1985).

[71] ELLIS, G. F. R. - "Standard cosmology", in *Proceedings of the Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, 1987*, edited by M. Novello. World Scientific, Singapore, Singapore, 1987.

[72] STOEGER, W. R. (ed.) - *Theory and Observational Limits in Cosmology.* Vatican Observatory, Vatican, Vatican, 1987.

[73] BÖRNER, G. - *The Early Universe. Facts and Fiction.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1988.

[74] ELLIS, G. F. R. & WILLIAMS, R. M. - *Flat and Curved Space-Times.* Oxford University, Oxford, England, 1988.

[75] HARRISON, E. R. - *Cosmology. The Science of the Universe.* Cambridge University, Cambridge, England, 1988.

[73] KOLB, E. W. & TURNER, M. - *The Early Universe.* Addison-Wesley, Reading, USA, 1990.

[76] KOLB, E. W. & TURNER, M. - *The Early Universe.* Addison-Wesley, Reading, USA, 1990.

[77] PEEBLES, P. J. E.; SCHRAMM, D. N.; TURNER, E. L. & KRON, R. G. - "The case for the hot big bang cosmology", FERMILAB Preprint 91/35-A (1991) (submetido a *Nature*).

[78] ANDERSON, J. L. - *Principles of Relativity Physics.* Cambrige University, Cambrige, England, 1967.

[79] ROBERTSON, H. P. & NOONAN, T. W. - *Relativity and Cosmology.* Saunders, Philadelphia, USA, 1968.

[80] WOLF, J. - *Spaces of Constant Curvature.* McGraw-Hill, New York, USA, 1967.

[81] ELLIS, G. F. R. - "Topology and cosmology", *Gen. Relativ. Gravit.* **2**, 7-21 (1971).

[82] MENIKOFF, R. & PLOHR, B. J. - "The Riemann problem for fluid flow of real materials", *Rev. Mod. Phys.* **61**, 75-130 (1989).

[83] LANDSBERG, P. T. - *Thermodynamics with Quantum Statistical Illustrations.* Wiley-Interscience, New York, USA, 1961.

[84] LANDSBERG, P. T. - "Definition of the perfect gas", *Am. J. Phys.* **29**, 695-698 (1961).

[85] LANDSBERG, P. T. - *Thermodynamics and Statistical Mechanics.* Oxford University, Oxford, England, 1978.

[86] HUANG, Y. K. - "A special class of ideal quantum gases", *Am. J. Phys.* **40**, 1261-1263 (1972).

[87] PARKER, L. & WANG, Y. - "Avoidance of singularities in relativity through two-body interactions", *Phys. Rev. D* **42**, 1877-1883 (1990).

[88] BARROW, J. D. - "Graduated inflationary universes", *Phys. Lett. B* **235**, 40-43 (1990).

[89] FREIRE, L. - *Grande e Novissimo Dicionário da Lingua Portuguesa.* Livraria José Olympio, Rio de Janeiro, Brasil, 1954.

[90] GLINER, E. B. - "Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter", *Sov. Phys. JETP* **22**, 378-382 (1966).

[91] WEINBERG, S. - "The cosmological constant problem", *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1-23 (1989).

[92] ZEL'DOVICH, Ya. B. - "Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology", *Sov. Phys. Usp.* **24**, 216-230 (1981).

[93] DIÓSI, L. ; LUKÁCS, B.; MARTINÁS, K. & PAÁL, G. - "The thermodynamics of the vacuum", *Astrophys. Space Sci.* **122**, 371-386 (1986).

[94] ZEL'DOVICH, Ya. B. - "The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations", *Sov.Phys. JETP* **14**, 1143-1147 (1962).

[95] HARRISON, E. R. - "Equation of state of matter at supernuclear density", *Astrophys. J.* **142**, 1643-1645 (1965).

[96] WALECKA, J. D. - "Equation of state for neutron matter at finite T in a relativistic mean-field theory" , *Phys. Lett. B* **59**, 109-112 (1975).

[97] BELINSKII, V. A. & KHALATNIKOV, I. M. - "Effect of scalar and vector fields on the nature of the cosmological singularity", *Sov. Phys. JETP* **36**, 591-597 (1973).

[98] BARROW, J. D. - "Quiescent cosmology", *Nature* **272**, 211-215 (1978).

[99] CHANDRASEKHAR, S. - *An Introduction to the Study of Stellar Structure.* Dover, New York, USA, 1958.

[100] TOOPER, R. F. - "Adiabatic fluid spheres in general relativity", *Astrophys. J.* **142**, 1541-1562 (1965).

[101] JÜTTNER, F. - "Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie", *Ann. Phys. (Leipzig)* **34**, 856-882 (1911).

[102] PAULI, W. - *Theory of Relativity.* Pergamon, London, England, 1958.

[103] TER HAAR, D. - *Elements of Thermostatistics.* Holt, Rinehart and Winston, New York, USA, 1966.

[104] SACHS, R. K. & EHLERS, J. - "Kinetic theory and cosmology", in *Proceedings of the Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics: Astrophysics and General Relativity, 1968,* edited by M. Chrétien, S. Deser and J. Goldstein. Gordon and Breach, New York, USA, 1971.

[105] EHLERS, J. - "General relativity and kinetic theory", in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XLVII: General Relativity and Cosmology, Varenna, 1969*, edited by R. K. Sachs. Academic, New York, USA, 1971.

[106] BERNSTEIN, J. - *Kinetic Theory in the Expanding Universe.* Cambrigde University, Cambridge, England, 1988.

[107] ASSAD, M. J. D. & LIMA, J. A. S. - "General and unified solution for perfect fluid homogeneous and isotropic cosmological models", *Gen. Relativ. Gravit.* 20, 527- (1988).

[108] LIMA, J. A. S. - *Propriedades Geometrotermodinâmicas de Modelos Cosmológicos.* Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1990.

[109] ASSAD, M. J. D. - *Cosmologias Espacialmente Homogêneas numa Variedade de Riemann-Cartan.* Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1991.

[110] KAPLAN, W. - *Ordinary Differential Equations.* Addison-Wesley, Reading, USA, 1958.

[111] SANSONE, G. & CONTI, R. - *Non-linear Differential Equations.* MacMillan, New York, USA, 1964.

[112] ANDRONOV, A. A.; LEONTOVICH, E. A.; GORDON, I. I. & MAIER, A. G. - *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems.* John Wiley & Sons (Halsted), New York, USA, 1973.

[113] BOGOYAVLENSKY, O. I. - *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dyamics.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1985.

[114] JORDAN, D. W. & SMITH, P. - *Nonlinear Ordinary Differential Equations.* Oxford University, Oxford, England, 1987.

[115] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. - *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover, New York, USA, 1972.

[116] WEINBERG, S. - "Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe", *Astrophys. J.* 168, 175-194 (1971).

[117] MURPHY, G. L. - "Big-bang model without singularities", *Phys. Rev. D* 8, 4231-4233 (1973).

[118] DENG, Y. & MANNHEIM, P. D. - "Shear-free spherically symmetric inhomogeneous cosmological model with heat flow and bulk viscosity", *Phys. Rev. D* 42, 371-383 (1990).

[119] BELINSKII, V. A.; NIKOMAROV, E. S. & KHALATNIKOV, I. M. - "Investigation of the cosmological evolution of viscoelastic matter with causal thermodynamics", *Sov. Phys. JETP* 50, 213-221 (1979).

[120] FUSTERO, X. & PAVÓN, D. - "Relaxation terms and entropy production in a cosmological model", *Lett. Nuovo Cimento* 35, 427-429 (1982).

[121] DE OLIVEIRA, H. P. & SALIM, J. M. - "Non-equilibrium Friedman cosmologies", *Acta Phys. Pol. B* 19, 649-657 (1988).

[122] NOVELLO, M.; DE OLIVEIRA, H. P.; SALIM, J. M. & TORRES, J. -"Viscous causal cosmologies", *Acta Phys. Pol. B* 21, 571-579 (1990).

[123] PAVÓN, D.; BAFALUY, J. & JOU, D. - "Causal Friedmann-Robertson-Walker cosmology", *Class. Quantum Grav.* 8, 347-360 (1991).

[124] CALVÃO, M. O. & SALIM, J. M. - "Extended thermodynamics of Friedmann-Robertson-Walker models in the Landau-Lifshitz frame", *Class. Quantum Grav.* (1991) (aceito para publicação).

[125] TUROK, N. - "String-driven inflation", *Phys. Rev. Lett.* **60**, 549-552 (1988).

[126] BARROW, J. D. - "String-driven inflationary and deflationary cosmological models", *Nucl. Phys. B* **310**, 743-763 (1988).

[127] RINDLER, W. - "Visual horizons in world models", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **116**, 662-677 (1956).

[128] GIBBONS, G. W. & HAWKING, S. W. - "Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation", *Phys. Rev. D* **15**, 2738-2751 (1977).

[129] HAWKING, S. W. - "Particle creation by black holes", *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975).

[130] DAVIES, P. C. W. - "Cosmological horizons and entropy", *Class. Quantum Grav.* 5, 1349-1355 (1988).

[131] DAVIES, P. C. W. - "Cosmological dissipative structure", *Int. J. Theor. Phys.* 9, 1051-1066 (1989).

[132] PAVÓN, D. - "The generalised second law and extended thermodynamics", *Class. Quantum Grav.* 7, 487-491 (1990).

[133] RAYCHAUDHURI, A. K. - "Cosmological models and entropy", *Class. Quantum Grav.* 7, 265-267 (1990).

[134] *A Bíblia Sagrada.* Sociedade Bíblica do Brasil, Brasília, Brasil, 1969.

[135] MUNITZ, M. K. - *Space, Time and Creation.* Dover, New York, USA, 1981.

[136] DAVIES, P. C. W. - *God and the New Physics.* Simon and Schuster, New York, USA, 1983.

[137] GAL-OR, B. - *Cosmology, Physics, and Philosophy.* Springer-Verlag, New York, USA, 1987.

[138] REALE, G. & ANTISERI, D. - *Historia del Pensamiento Filosófico y Científico.* Herder, Barcelona, España, 1988.

[139] RUSSELL, R. J.; STOEGER, W. R. & COYNE, G. V. - *Physics, Philosophy and Theology. A Common Quest for Understanding.* University of Notre Dame, Notre Dame, USA, 1988.

[140] DIRAC, P. A. M. - "The cosmological constants", *Nature* **139**, 323 (1937).

[141] DIRAC, P. A. M. - "A new basis for cosmology", *Proc. R. Soc. London A* **165**, 199-208 (1938).

[142] NARLIKAR, J. V. - "Nonstandard cosmologies", in *Proceedings of the Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, 1987*, edited by M. Novello. World Scientific, Sinngapore, Singapore, 1987.

[143] BONDI, H. & GOLD, T. - "The steady state theory of the expanding universe", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **108**, 252-270 (1948).

[144] HOYLE, F. - "A new model for the expanding universe", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **108**, 372-382 (1948).

[145] HOYLE, F. - "On the cosmological problem", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **109**, 365- (1949).

[146] TRYON, E. P. - "Is the Universe a vacuum fluctuation?", *Nature* **246**, 396-397 (1973).

[147] FOMIN, P. I. - " ? ", *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR A* 9, 831-? (1975).

[148] STENGER, V. J. - "The Universe: the ultimate free lunch", *Eur. J. Phys.* **11**, 236-243 (1990).

[149] BROUT, R.; ENGLERT, F. & GUNZIG, E. - "The creation of the Universe as a quantum phenomenon", *Ann. Phys. (N. Y.)* **115**, 78-106 (1978).

[150] GÉHÉNIAU, J. & PRIGOGINE, I. - "The birth of time", *Found. Phys.* 16, 437-443 (1986).

[151] PRIGOGINE, I. & GÉHÉNIAU, J. - "Entropy, matter, and cosmology", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 83, 6245-6249 (1986).

[152] GUNZIG, E.; GÉHÉNIAU, J. & PRIGOGINE, I. - "Entropy and cosmology", *Nature* 330, 621-624 (1987).

[153] PRIGOGINE, I.; GÉHÉNIAU, J.; GUNZIG, E. & NARDONE, P. - "Thermodynamics of cosmological matter creation", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 85, 7428-7432 (1988).

[154] PRIGOGINE, I. - "Thermodynamics and cosmology", *Int. J. Theor. Phys.* 28, 927-933 (1989).

[155] PRIGOGINE, I.; GÉHÉNIAU, J.; GUNZIG, E. & NARDONE, P. - "Thermodynamics and cosmology", *Gen. Relativ. Gravit.* 31, 767-776 (1989).

[156] LIMA, J. A. S.; CALVÃO, M. O. & WAGA, I. - "Cosmology, thermodynamics and matter creation", in *Frontier Physics. Essays in Honour of Jayme Tiomno*, edited by S. MacDowell, H. M. Nussenzveig & R. Salmeron. World Scientific, Singapore, Singapore, 1991.

[157] CALVÃO, M. O.; LIMA, J. A. S. & WAGA, I. - "On the thermodynamics of matter creation in cosmology" (1991) (submetido para publicação).

[158] UDEY, N. & ISRAEL, W. - "General relativistic radiative transfer: the fourteen-moment approximation", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **199**, 1137-1147 (1982).

[159] LIMA, J. A. S. & WAGA, I. - "Eckart temperature and dissipative effects in Friedmann universes", *Phys. Lett. A* **144**, 432-436 (1990).

[160] CHAPMAN, S. & COWLING, T. G. - *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge University, Cambridge, England, 1970.

REFERÊNCIAS EM ORDEM ALFABÉTICA DE AUTORES

[134] *A Bíblia Sagrada.* Sociedade Bíblica do Brasil, Brasília, Brasil, 1969.

[115] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. A. - *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover, New York, USA, 1972.

[78] ANDERSON, J. L. - *Principles of Relativity Physics.* Cambrige University, Cambrige, England, 1967.

[112] ANDRONOV, A. A.; LEONTOVICH, E. A.; GORDON, I. I. & MAIER, A. G. - *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems.* John Wiley & Sons (Halsted), New York, USA, 1973.

[109] ASSAD, M. J. D. - *Cosmologias Espacialmente Homogêneas numa Variedade de Riemann-Cartan.* Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1991.

[107] ASSAD, M. J. D. & LIMA, J. A. S. - "General and unified solution for perfect fluid homogeneous and isotropic cosmological models", *Gen. Relativ. Gravit.* 20, 527- (1988).

[97] BARROW, J. D. - "Quiescent cosmology", *Nature* 272, 211-215 (1978).

[126] BARROW, J. D. - "String-driven inflationary and deflationary cosmological models", *Nucl. Phys. B* 310, 743-763 (1988).

[88] BARROW, J. D. - "Graduated inflationary universes", *Phys. Lett. B* 235, 40-43 (1990).

[98] BELINSKII, V. A. & KHALATNIKOV, I. M. - "Effect of scalar and vector fields on the nature of the cosmological singularity", *Sov. Phys. JETP* 36, 591-597 (1973).

[119] BELINSKII, V. A.; NIKOMAROV, E. S. & KHALATNIKOV, I. M. - "Investigation of the cosmological evolution of viscoelastic matter with causal thermodynamics", *Sov. Phys. JETP* 50, 213-221 (1979).

[106] BERNSTEIN, J. - *Kinetic Theory in the Expanding Universe.* Cambrigde University, Cambridge, England, 1988.

[23] BIRRELL, N. D. & DAVIES, P. C. W. - *Quantum Fields in Curved Space.* Cambridge University, Cambridge, England, 1982.

[113] BOGOYAVLENSKY, O. I. - *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dyamics.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1985.

[143] BONDI, H. & GOLD, T. - "The steady state theory of the expanding universe", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 108, 252-270 (1948).

[73] BÖRNER, G. - *The Early Universe. Facts and Fiction.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1988.

[149] BROUT, R.; ENGLERT, F. & GUNZIG, E. - "The creation of the Universe as a quantum phenomenon", *Ann. Phys. (N. Y.)* 115, 78- 106 (1978).

[43] CALLEN, H. B. - *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics.* John Wiley & Sons, New York, USA, 1985.

[64] CALVÃO, M. O. & LIMA, J. A. S. - "Nonstandard big bang models", *Phys. Lett. A* **141**, 229-232 (1989).

[124] CALVÃO, M. O. & SALIM, J. M. - "Extended thermodynamics of Friedmann-Robertson-Walker models in the Landau-Lifshitz frame", *Class. Quantum Grav.* (1991) (aceito para publicação).

[157] CALVÃO, M. O.; LIMA, J. A. S. & WAGA, I. - "On the thermodynamics of matter creation in cosmology" (1991) (submetido para publicação).

[1] CATTANEO, C. - "General relativity: relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference", *Nuovo Cimento* 10, 318-337 (1958).

[99] CHANDRASEKHAR, S. - *An Introduction to the Study of Stellar Structure.* Dover, New York, USA, 1958.

[160] CHAPMAN, S. & COWLING, T. G. - *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases.* Cambridge University, Cambridge, England, 1970.

[18] COLEY, A. A. & TUPPER, B. O. J. - "Exact viscous fluid FRW cosmologies: the case of general k", *Phys. Lett. A* 100, 495-498 (1984).

[19] COLEY, A. A. & TUPPER, B. O. J. - "Two-fluid Friedmann-Robertson-Walker cosmologies and their numerical predictions", *Can. J. Phys.* 64, 204-209 (1986).

[136] DAVIES, P. C. W. - *God and the New Physics.* Simon and Schuster, New York, USA, 1983.

[130] DAVIES, P. C. W. - "Cosmological horizons and entropy", *Class. Quantum Grav.* 5, 1349-1355 (1988).

[131] DAVIES, P. C. W. - "Cosmological dissipative structure", *Int. J. Theor. Phys.* 9, 1051-1066 (1989).

[46] DE GROOT, S. R. & MAZUR, P. - *Non-Equilibrium Thermodynamics.* Dover, New York, USA, 1984.

[32] DE GROOT, S. R.; VAN LEEUWEN, W. A. & VAN WEERT, Ch. G. - *Relativistic Kinetic Theory.* North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1980.

[6] DEHNEN, H. - "The frame of reference in relativistic theories", *Int. J. Theor. Phys.* 3, 509-511 (1970).

[51] DEMIANSKI, M. - *Relativistic Astrophysics.* Pergamon, Oxford, England, 1985.

[118] DENG, Y. & MANNHEIM, P. D. - "Shear-free spherically symmetric inhomogeneous cosmological model with heat flow and bulk viscosity", *Phys. Rev. D* 42, 371-383 (1990).

[54] DE OLIVEIRA, H. P. - *Um Estudo em Cosmologia e Termodinâmica Causal*. Tese de Mestrado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1986.

[29] DE OLIVEIRA, H. P. - *Fluidos com Spin em Relatividade Geral: Formulação Variacional, Aspectos Termodinâmicos e Modelos Cosmológicos*. Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1991.

[121] DE OLIVEIRA, H. P. & SALIM, J. M. - "Non-equilibrium Friedman cosmologies", *Acta Phys. Pol. B* 19, 649-657 (1988).

[93] DIÓSI, L. ; LUKÁCS, B.; MARTINÁS, K. & PAÁL, G. - "The thermodynamics of the vacuum", *Astrophys. Space Sci.* 122, 371-386 (1986).

[140] DIRAC, P. A. M. - "The cosmological constants", *Nature* 139, 323 (1937).

[141] DIRAC, P. A. M. - "A new basis for cosmology", *Proc. R. Soc. London A* 165, 199-208 (1938).

[28] DIXON, W. G. - *Special Relativity. The Foundation of Macroscopic Physics*. Cambridge University, Cambridge, England, 1978.

[42] DIXON, W. G. - "Relativistic foundations for thermostatics", *Arch. Rational Mech. Anal.* 69, 293-322 (1979).

[8] EARMAN, J. - "Covariance, invariance and the equivalence of frames", *Found. Phys.* 4, 267-289 (1974).

[12] EARMAN, J. & GLYMOUR, C. - "The gravitational red shift as a test of general relativity: history and analysis", *Stud. Hist. Phil. Sci.* 11, 49-85 (1980).

[14] ECKART, C. - "The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid", *Phys. Rev.* 58, 919-924 (1940).

[105] EHLERS, J. - "General relativity and kinetic theory", in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XLVII: General Relativity and Cosmology, Varenna, 1969*, edited by R. K. Sachs. Academic, New York, USA, 1971.

[30] ELLIS, G. F. R. - "Relativistic cosmology", in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course XLVII: General Relativity and Cosmology, Varenna, 1969*, edited by R. K. Sachs. Academic, New York, USA, 1971.

[81] ELLIS, G. F. R. - "Topology and cosmology", *Gen. Relativ. Gravit.* **2**, 7-21 (1971).

[31] ELLIS G. F. R. - "Relativistic cosmology", in *Cargèse Lectures in Physics, Vol. 6, Cargèse, 1971*, edited by E. Schatzman. Gordon and Breach, New York, USA, 1973.

[71] ELLIS, G. F. R. - "Standard cosmology", in *Proceedings of the Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, 1987*, edited by M. Novello. World Scientific, Singapore, Singapore, 1987.

[74] ELLIS, G. F. R. & WILLIAMS, R. M. - *Flat and Curved Space-Times.* Oxford University, Oxford, England, 1988

[70] ELLIS, G. F. R.; NEL, S. D.; MAARTENS, R.; STOEGER, W. R. & WHITMAN, A. P. - "Ideal observational cosmology", *Phys. Rep.* **124**, 315-417 (1985).

[2] FOCK, V. - *The Theory of Space, Time and Gravitation.* Pergamon, London, England, 1959.

[147] FOMIN, P. I. - " ? ", *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR A* 9, 831-? (1975).

[89] FREIRE, L. - *Grande e Novíssimo Dicionário da Língua Portuguesa.* Livraria José Olympio, Rio de Janeiro, Brasil, 1954.

[9] FRIEDMAN, M. - *Foundations of Space-Time Theories. Relativistic Physics and Philosophy of Science.* Princeton University, Princeton, USA, 1983.

[20] FULLING, S. A. - "Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time", *Phys. Rev. D* 7, 2850-2862 (1973).

[120] FUSTERO, X. & PAVÓN, D. - "Relaxation terms and entropy production in a cosmological model", *Lett. Nuovo Cimento* 35, 427-429 (1982).

[137] GAL-OR, B. - *Cosmology, Physics, and Philosophy.* Springer-Verlag, New York, USA, 1987.

[150] GÉHÉNIAU, J. & PRIGOGINE, I. - "The birth of time", *Found. Phys.* **16**, 437-443 (1986).

[55] GEROCH, R. & LINDBLOM, L. - "Dissipative relativistic fluid theories of divergence type", *Phys. Rev. D* **41**, 1855-1861 (1990).

[128] GIBBONS, G. W. & HAWKING, S. W. - "Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation", *Phys. Rev. D* **15**, 2738-2751 (1977).

[40] GLANSDORFF, P. & PRIGOGINE, I. - *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations.* Wiley-Interscience, New York, USA, 1971.

[90] GLINER, E. B. - "Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter", *Sov. Phys. JETP* **22**, 378-382 (1966).

[152] GUNZIG, E.; GÉHÉNIAU, J. & PRIGOGINE, I. - "Entropy and cosmology", *Nature* 330, 621-624 (1987).

[39] GYARMATI, I. - *Non-Equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1970.

[26] HALBWACHS, - *Théorie Relativiste des Fluides à Spin. Recherches sur la Dynamique du Corpuscule Tournant Relativiste et l'Hydrodynamique Relativiste des Fluides Dotés d'une Densité de Moment Angulaire Interne.* Gauthiers-Villars, Paris, France, 1960.

[33] HALL, G. S. - "The structure of the energy-momentum tensor in general relativity", *Arab. J. Sci. Engin.* 9, 87-96 (1984).

[34] HALL, G. S. & NEGM, D. A. - "Physical structure of the nergy-momentum tensor in general relativity", *Int. J. Theor. Phys.* **25**, 405-423 (1986).

[95] HARRISON, E. R. - "Equation of state of matter at supernuclear density", *Astrophys. J.* 142, 1643-1645 (1965).

[75] HARRISON, E. R. - *Cosmology. The Science of the Universe.* Cambridge University, Cambridge, England, 1988.

[129] HAWKING, S. W. - "Particle creation by black holes", *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975).

[65] HAWKING, S. W. & ELLIS, G. F. R. - *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge University, Cambridge, England, 1973.

[27] HEHL, F. W. - "On the energy tensor of spinning massive matter in classical field theory and general relativity", *Rep. Prog. Phys.* 9, 55-82 (1976).

[68] HEIDMANN, J. - *Relativistic Cosmology. An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1980.

[58] HISCOCK, W. A. & LINDBLOM, L. - "Stability and causality in dissipative relativistic fluids", *Ann. Phys. (N. Y.)* **151**, 466-496 (1983).

[52] HISCOCK, W. A. & LINDBLOM, L. - "Generic instabillities in first-order dissipative relativistic fluid theories", *Phys. Rev. D* **31**, 725-733 (1985).

[53] HISCOCK, W. A. & LINDBLOM, L. - "Linear plane waves in dissipative relativistic fluids", *Phys. Rev. D* 35, 3723-3732 (1987).

[25] HISCOCK, W. A. & OLSON, T. S. - "Effects of frame choice on nonlinear dynamics in relativistic heat-conducting fluid theories", *Phys. Lett. A* **141**, 125-130 (1989).

[144] HOYLE, F. - "A new model for the expanding universe", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 108, 372-382 (1948).

[145] HOYLE, F. - "On the cosmological problem", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 109, 365-378 (1949).

[86] HUANG, Y. K. - "A special class of ideal quantum gases", *Am. J. Phys.* **40**, 1261-1263 (1972).

[16] ISRAEL, W. - "Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory", *Ann. Phys. (N. Y.)* 100, 310-331 (1976).

[37] ISRAEL, W. & STEWART, J. M. - "Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory", *Ann. Phys. (N. Y.)* **118**, 341-372 (1979).

[114] JORDAN, D. W. & SMITH, P. - *Nonlinear Ordinary Differeential Equations.* Oxford University, Oxford, England, 1987.

[62] JOU, D. & CASAS-VÁZQUEZ, J. - "Carnot cycles and a non-equilibrium absolute temperature", *J. Phys. A* **20**, 5371-5378 (1987).

[61] JOU, D.; CASAS-VÁZQUEZ, J. & LEBON, G. - "Extended irreversible thermodynamics", *Rep. Prog. Phys.* **51**, 1105-1179 (1988).

[101] JÜTTNER, F. - "Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie", *Ann. Phys. (Leipzig)* **34**, 856-882 (1911).

[110] KAPLAN, W. - *Ordinary Differential Equations.* Addison-Wesley, Reading, USA, 1958.

[17] KING, A. R. & ELLIS, G. F. R. - "Tilted homogeneous cosmological models", *Commun. Math. Phys.* 31, 209-242 (1973).

[24] KOLASSIS, C. A. ; SANTOS, N. O. & TSOUBELLIS, D. - "Energy conditions for an imperfect fluid", *Class. Quantum Grav.* **5**, 1329-1338 (1988).

[76] KOLB, E. W. & TURNER, M. - *The Early Universe.* Addison-Wesley, Reading, USA, 1990.

[35] KRAMER, D.; STEPHANI, H.; MACCALLUM, M. & HERLT, E. -*Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* Cambrige University, Cambridge, England, 1980.

[41] KREUZER, H. J. - *Nonequilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations.* Oxford University, Oxford, England, 1981.

[15] LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. - *Fluid Mechanics.* Pergamon, Oxford, England, 1959.

[83] LANDSBERG, P. T. - *Thermodynamics with Quantum Statistical Illustrations.* Wiley-Interscience, New York, USA, 1961.

[84] LANDSBERG, P. T. - "Definition of the perfect gas", *Am. J. Phys.* **29**, 695-698 (1961).

[85] LANDSBERG, P. T. - *Thermodynamics and Statistical Mechanics.* Oxford University, Oxford, England, 1978.

[21] LETAW, J. R. & PFAUTSCH, J. D. - "Quantized scalar field in the stationary coordinate systems of flat spacetime", *Phys. Rev. D* **24**, 1491-1498 (1981).

[22] LETAW, J. R. & PFAUTSCH, J. D. - "The stationary coordinate systems in flat spacetime", *J. Math. Phys.* 23, 425-431 (1982).

[108] LIMA, J. A. S. - *Propriedades Geometrotermodinâmicas de Modelos Cosmológicos.* Tese de Doutorado. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), Rio de Janeiro, Brasil, 1990.

[159] LIMA, J. A. S. & WAGA, I. - "Eckart temperature and dissipative effects in Friedmann universes", *Phys. Lett. A* **144**, 432-436 (1990).

[156] LIMA, J. A. S.; CALVÃO, M. O. & WAGA, I. - "Cosmology, thermodynamics and matter creation", in *Frontier Physics. Essays in Honour of Jayme Tiomno*, edited by S. MacDowell, H. M. Nussenzveig & R. Salmeron. World Scientific, Singapore, Singapore, 1991.

[60] LIU, I.-S.; MÜLLER, I. & RUGGERI, T. - "Relativistic thermodynamics of gases", *Ann. Phys. (N. Y.)* 169, 191-219 (1986).

[82] MENIKOFF, R. & PLOHR, B. J. - "The Riemann problem for fluid flow of real materials", *Rev. Mod. Phys.* **61**, 75-130 (1989).

[66] MISNER, C. W.; THORNE, K. S. & WHEELER, J. A. - *Gravitation*. Freeman, San Francisco, USA, 1973.

[4] MØLLER, C. - *The Theory of Relativity*. Oxford University, Oxford, England, 1972.

[56] MÜLLER, I. - "Zum Paradoxon der Wärmeleitungstheorie", *Z. Phys.* **198**, 329-344 (1967).

[59] MÜLLER, I. - *Thermodynamics*. Pitman, London, England, 1985.

[135] MUNITZ, M. K. - *Space, Time and Creation*. Dover, New York, USA, 1981.

[117] MURPHY, G. L. - "Big-bang model without singularities", *Phys. Rev. D* **8**, 4231-4233 (1973).

[142] NARLIKAR, J. V. - "Nonstandard cosmologies", in *Proceedings of the Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, 1987*, edited by M. Novello. World Scientific, Sinngapore, Singapore, 1987.

[48] NEUGEBAUER, G. - *Relativistische Thermodynamik*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Deutschland, 1980.

[122] NOVELLO, M.; DE OLIVEIRA, H. P.; SALIM, J. M. & TORRES, J. -"Viscous causal cosmologies", *Acta Phys. Pol. B* **21**, 571-579 (1990).

[63] OLSON, T. S. - "Stability and causality in the Israel-Stewart energy frame theory", *Ann. Phys. (N. Y.)* **199**, 18-36 (1990).

[11] PAPAPETROU, A. - *Lectures on General Relativity*. Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.

[87] PARKER, L. & WANG, Y. - "Avoidance of singularities in relativity through two-body interactions", *Phys. Rev. D* **42**, 1877-1883 (1990).

[102] PAULI, W. - *Theory of Relativity*. Pergamon, London, England, 1958.

[132] PAVÓN, D. - "The generalised second law and extended thermodynamics", *Class. Quantum Grav.* **7**, 487-491 (1990).

[123] PAVÓN, D.; BAFALUY, J. & JOU, D. - "Causal Friedmann-Robertson-Walker cosmology", *Class. Quantum Grav.* 8, 347-360 (1991).

[57] PAVÓN, D.; JOU, D. & CASAS-VÁZQUEZ, J. - "On a covariant formulation of dissipative phenomena", *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 36, 79-88 (1982).

[77] PEEBLES, P. J. E.; SCHRAMM, D. N.; TURNER, E. L. & KRON, R. G. - "The case for the hot big bang cosmology", FERMILAB Preprint 91/35-A (1991) (submetido a *Nature*).

[154] PRIGOGINE, I. - "Thermodynamics and cosmology", *Int. J. Theor. Phys.* 28, 927-933 (1989).

[151] PRIGOGINE, I. & GÉHÉNIAU, J. - "Entropy, matter, and cosmology", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 11, 6245-6249 (1986).

[153] PRIGOGINE, I.; GÉHÉNIAU, J.; GUNZIG, E. & NARDONE, P. - "Thermodynamics of cosmological matter creation", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 85, 7428-7432 (1988).

[155] PRIGOGINE, I.; GÉHÉNIAU, J.; GUNZIG, E. & NARDONE, P. - "Thermodynamics and cosmology", *Gen. Relativ. Gravit.* 31, 767-776 (1989).

[133] RAYCHAUDHURI, A. K. - "Cosmological models and entropy", *Class. Quantum Grav.* 7, 265-267 (1990).

[138] REALE, G. & ANTISERI, D. - *Historia del Pensamiento Filosófico y Científico*. Herder, Barcelona, España, 1988.

[3] REICHENBACH, H. - *Axiomatization of the Theory of Relativity.* University of California, Berkeley, USA, 1969.

[127] RINDLER, W. - "Visual horizons in world models", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 116, 662-677 (1956).

[67] RINDLER, R. - *Essential Relativity. Special, General and Cosmological.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977.

[79] ROBERTSON, H. P. & NOONAN, T. W. - *Relativity and Cosmology.* Saunders, Philadelphia, USA, 1968.

[139] RUSSELL, R. J.; STOEGER, W. R. & COYNE, G. V. - *Physics, Philosophy and Theology. A Common Quest for Understanding.* University of Notre Dame, Notre Dame, USA, 1988.

[104] SACHS, R. K. & EHLERS, J. - "Kinetic theory and cosmology", in *Proceedings of the Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics: Astrophysics and General Relativity, 1968*, edited by M. Chrétien, S. Deser and J. Goldstein. Gordon and Breach, New York, USA, 1971.

[7] SACHS, R. K. & WU, H. - *General Relativity for Mathematicians.* Springer-Verlag, New York, USA, 1977.

[111] SANSONE, G. & CONTI, R. - *Non-linear Differential Equations.* MacMillan, New York, USA, 1964.

[148] STENGER, V. J. - "The Universe: the ultimate free lunch", *Eur. J. Phys.* **11**, 236-243 (1990).

[49] STEPHANI, H. - *General Relativity. An Introduction to the Theory of the Gravitational Field.* Cambridge University, Cambridge, England, 1982.

[36] STEWART, J. M. - "Non-equilibrium relativistic kinetic theory", in *Lecture Notes in Physics, Vol. 10*, edited by J. Ehlers, K. Hepp and H. A. Weidenmüller. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1971.

[72] STOEGER, W. R. (ed.) - *Theory and Observational Limits in Cosmology.* Vatican Observatory, Vatican, Vatican, 1987.

[50] STRAUMANN, N. - *General Relativity and Relativistic Astrophysics.* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1984.

[5] SYNGE, J. L. - *Relativity: The Special Theory*. North-Holland, Amsterdam, Holland, 1956.

[103] TER HAAR, D. - *Elements of Thermostatistics*. Holt, Rinehart and Winston, New York, USA, 1966.

[100] TOOPER, R. F. - "Adiabatic fluid spheres in general relativity", *Astrophys. J.* **142**, 1541-1562 (1965).

[10] TORRETTI, R. - *Relativity and Geometry*. Pergamon, Oxford, England, 1983.

[146] TRYON, E. P. - "Is the Universe a vacuum fluctuation?", *Nature* **246**, 396-397 (1973).

[38] TRUESDELL, C. & TOUPIN, R. A. - "The classical field theories", in *Encyclopedia of Physics, Vol. III/1: Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, edited by S. Flügge. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1960.

[125] TUROK, N. - "String-driven inflation", *Phys. Rev. Lett.* **60**, 549-552 (1988).

[158] UDEY, N. & ISRAEL, W. - "General relativistic radiative transfer: the fourteen-moment approximation", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **199**, 1137-1147 (1982).

[13] WALD, R. M. - *General Relativity*. University of Chicago, Chicago, USA, 1984.

[96] WALECKA, J. D. - "Equation of state for neutron matter at finite T in a relativistic mean-field theory" , *Phys. Lett. B* 59, 109-112 (1975).

[116] WEINBERG, S. - "Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe", *Astrophys. J.* **168**, 175-194 (1971).

[47] WEINBERG, S. - *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley & Sons, New York, USA, 1972.

[91] WEINBERG, S. - "The cosmological constant problem", *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1-23 (1989).

[80] WOLF, J. - *Spaces of Constant Curvature.* McGraw-Hill, New York, USA, 1967.

[44] WOODS, L. C. - *The Thermodynamics of Fluid Systems.* Oxford University, Oxford, England, 1975.

[45] YOURGRAU, W.; VAN DER MERWE, A. & RAW, G. - *Treatise on Irreversible and Statistical Thermophysics. An Introduction to Nonclassical Thermodynamics.* Dover, New York, USA, 1982.

[94] ZEL'DOVICH, Ya. B. - "The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations", *Sov.Phys. JETP* **14**, 1143-1147 (1962).

[92] ZEL'DOVICH, Ya. B. - "Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology", *Sov. Phys. Usp.* **24**, 216-230 (1981).

[69] ZEL'DOVICH, Ya. B. & NOVIKOV, I. D. - *Relativistic Astrophysics II: The Structure and Evolution of the Universe.* University of Chicago, Chicago, USA, 1983.

"A RIQUEZA TERMODINÂMICA DAS COSMOLOGIAS DE ROBERTSON-WALKER:

UMA ÓPERA EM TRÊS ATOS"

MAURICIO ORTIZ CALVÃO

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:

José Martins Salim - Presidente

Marcos Duarte Maia

Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Mário Novello

Takeshi Kodama

Ivano Damião Soares - Suplente

Rio de Janeiro, 11 de outubro de 1991