

MARIO JOSÉ DELGADO ASSAD

COSMOLOGIAS ESPACIALMENTE HOMOGÊNEAS NUMA

VARIEDADE DE RIEMANN-CARTAN

TESE DE DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

1991

COSMOLOGIAS ESPACIALMENTE
HOMOGENEAS NUMA VARIEDADE DE



1991/19

A844

021396

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Jaime Tiomno, orientador dessa tese.

Aos colegas do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, pelo apoio e oportunidades concedidas para a realização desse trabalho.

À Tia Zilda pela carinhosa hospedagem, e à Daca pelo zelo afetuoso, durante a fase final desse estudo.

À CAPES pela concessão de bolsa de estudos.

ABSTRACT

We investigate the class of Bianchi universes within the framework of Einstein-Cartan Theory (ECT). We present a unified approach to the field equations by describing them in terms of the parameters (a, N^1, N^2, N^3) which determine the different Bianchi types. By considering the models spanned by a perfect fluid with spin described by the phenomenological energy momentum tensor, we analyze the admissible kinematics and the structures for the spin vector compatible with the underlying geometrical symmetries. Classes of perfect fluid diagonal Bianchi I models are exactly and simultaneously solved both in the ECT and in the General Relativity Theory (GRT). Non-singular and inflationary evolution occurs for the physically significant ECT models, and shear may damp this phase. The field equations are generalized, and its solution, real, continuous and multi-parametric, contains many classes of universes based on distinct interpretations for the cosmological substratum and its kinematics, enabling the comparison of the evolution of models within different classes. All these classes may be reduced to the simple harmonic oscillator dynamics. There exists a set of four

infinitely denumerable sequences of solutions described by elementary functions. Recurrence relations are used to construct the solutions in each of them. The unified spectrum of the Friedman-Robertson-Walker universes of GRT follows from the generalized solution and we discuss its properties. We show that other already known ECT Bianchi type-I cosmological solutions are inconsistent with the metric postulate of the theory, and lead to an incomplete analysis of the appearance of inflation in the models. The possibilities for accelerated expansion driven by spin effects are consistently exhibited. Classes of closed (Bianchi type IX), homogeneous and isotropic universes are generated by an unpolarized spinning perfect fluid. The models obtained, non-singular, pulsate around a static configuration in an endless number of cycles. All of them undergo periodic phases of inflationary expansion. Exact static cosmological solutions of the Bianchi types II , VIII and IX are generated by perfect fluids with aligned spins and source free electromagnetic null fields. Though not realistic, these are counter-examples to some known results prohibiting the existence of solutions for those Bianchi types.

RESUMO

Investigamos a classe de universos de Bianchi no contexto da Teoria de Einstein-Cartan (TEC). Apresentamos uma abordagem unificada para as equações de campo, descrevendo-as em termos dos parâmetros (a, N^1, N^2, N^3) que determinam os diferentes tipos de Bianchi. Considerando os modelos gerados por um fluido perfeito com spin, descrito pelo tensor de momento energia fenomenológico, analisamos as cinemáticas admissíveis e as estruturas para o vetor de spin compatíveis com as simetrias geométricas. Classes de modelos diagonais Bianchi I são, exata e simultaneamente, resolvidos tanto na TEC quanto na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Evolução não-singular e inflacionária ocorre nos modelos fisicamente significativos da TEC, e a deformação pode amortecer tal fase. As equações de campo são generalizadas, e sua solução, real contínua e multi-paramétrica, descreve várias classes de universos baseados em distintas interpretações para o substrato cosmológico e sua cinemática, permitindo a comparação da evolução de modelos em diferentes classes. Todas essas classes podem ser reduzidas à dinâmica do oscilador harmônico simples. Existe um conjunto de quatro sequências infinita-

mente denumeráveis de soluções descritas em termos de funções elementares. Relações de recorrência permitem construir as soluções em cada uma delas. O espectro unificado dos universos de Friedman-Robertson-Walker da TRG emerge da solução generalizada, e suas propriedades são exibidas. Mostramos que outras soluções cosmológicas Bianchi I conhecidas na TEC são inconsistentes com o postulado métrico da teoria, e conduzem à uma análise incompleta do surgimento da inflação nos modelos. As possibilidades para uma fase de expansão acelerada dirigida por termos de spin são consistentemente exibidas. Classes de universos homogêneos e isotrópicos fechados (Bianchi tipo IX), são gerados por fluido perfeito com spin não polarizado. Os modelos obtidos, não-singulares, pulsam em torno de uma configuração estática em um número interminável de ciclos. Todos eles passam por fases periódicas de expansão inflacionária. Soluções cosmológicas estáticas dos tipos de Bianchi II, VIII e IX, são geradas por fluido perfeito com spins alinhados e campo eletromagnético nulo sem fontes. Embora não realistas, contituem contra-exemplo para resultados conhecidos que proíbem a existência de soluções para aqueles tipos de Bianchi.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	<i>ii</i>
RESUMO	<i>iii</i>
ABSTRACT	<i>v</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>x</i>
LISTA DE TABELAS	<i>xi</i>
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN	
1.1 INTRODUÇÃO	8
1.2 A AÇÃO TOTAL EM U_4	9
1.3 PRINCÍPIO DE HILBERT EXTENDIDO À U_4	11
1.4 VARIAÇÃO DA DENSIDADE ESCALAR DE CURVATURA	14
1.5 EQUAÇÕES DE CAMPO	18
1.6 AMBIGUIDADES DA FORMULAÇÃO LAGRANGIANA CONVEN- CIONAL	24
CAPÍTULO 2 - FLUIDOS PERFEITOS COM SPIN CLÁSSICO	
2.1 INTRODUÇÃO	26

2.2 SPIN CLÁSSICO	26
2.3 TENSOR DE MOMENTO-ENERGIA FENOMENOLÓGICO	28
2.4 LEIS DE CONSERVAÇÃO	29

CAPÍTULO 3 - COSMOLOGIAS ESPACIALMENTE HOMOGÊNEAS EM VARIEDADES DE RIEMANN-CARTAN

3.1 INTRODUÇÃO	35
3.2 COSMOLOGIAS DE BIANCHI EM U_4	38
3.3 EQUAÇÕES DE CAMPO PARA UNIVERSOS DE BIANCHI EM U_4	43
3.4 ESTRUTURAS DO VETOR DE SPIN E CINEMÁTICAS ADMISSÍVEIS	50

CAPÍTULO 4 - CLASSES DE MODELOS COSMOLÓGICOS BIANCHI TIPO I NA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN E NA RELATIVIDADE GERAL

4.1 INTRODUÇÃO	54
4.2 AS EQUAÇÕES DE CAMPO	56
4.3 EXPANSÃO ACELERADA DIRIGIDA POR TERMOS DE SPIN.	60
4.4 A SOLUÇÃO GERAL	62
4.5 RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES	66
4.6 FORMA PARAMÉTRICA DAS SOLUÇÕES	70
4.7 OS MODELOS DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER	73
4.8 EVOLUÇÃO DE MODELOS DA TEC E DA TRG	78

CAPÍTULO 5 - SOBRE UMA CLASSE DE UNIVERSOS INFLACIONÁRIOS DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

5.1 INTRODUÇÃO	82
5.2 REVISÃO DOS TRABALHOS DE BFS	84
5.3 AS EQUAÇÕES DE CAMPO	87
5.4 ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DOS MODELOS	94
CAPÍTULO 6 - UNIVERSOS ETERNOS E PULSANTES NO ESPAÇO-TEMPO DE RIEMANN-CARTAN	
6.1 INTRODUÇÃO	96
6.2 MODELOS DE FRW COM DISTRIBUIÇÃO ALEATÓRIA DE SPINS	98
6.3 ANÁLISE QUALITATIVA DAS SOLUÇÕES	100
CAPÍTULO 7 - UNIVERSOS ESTÁTICOS COM MATÉRIA POLARIZADA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO NULO	
7.1 INTRODUÇÃO	105
7.2 NOTA SOBRE O ELETROMAGNETISMO EM U_4	106
7.3 MODELOS TIPO II, VIII E IX COM CAMPO ELETROMAG- NÉTICO	108
CONCLUSÕES	115
APÊNDICE A - A GEOMETRIA DE UMA VARIEDADE AFIM	119
APÊNDICE B - GEOMETRIAS DE BIANCHI EM U_4	143
REFERÊNCIAS	150

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
3.2.1 - Diagrama de especialização de geometrias de Bi- anchi	43
4.7.1 - Representação gráfica para $2T(\gamma)$	78
4.8.1 - Representação gráfica para $A(\gamma)$	80
6.3.1 - Curvas fechadas em torno de $x = x_0$	103
A.3.1 - Interpretação geométrica da torção	125

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
3.1.1 - Soluções Cosmológicas Espacialmente Homogêneas na TEC	37
3.2.1 - Classificação de Bianchi-Behr	40
3.4.1 - Configuração do vetor de spin e cinemática dos modelos classe A	51
3.4.2 - Configuração do vetor de spin e cinemática dos modelos classe B	52

INTRODUÇÃO

O espaço-tempo da Teoria da Relatividade Geral (TRG) é uma variedade 4-dimensional métrica, com conexão afim simétrica, quando descrita na base de coordenadas, sendo o tensor métrico covariantemente constante (condição de metricidade). Da adoção simultânea das hipóteses de simetria da conexão afim e da condição de metricidade, decorre ser nulo o tensor de torção da variedade, e a conexão afim unívocamente determinada em termos do tensor métrico na forma dos símbolos de Christoffel. As simetrias dos tensores de Riemann, Ricci e Einstein, seguem das hipóteses acima.

A interação gravitacional, segundo a TRG, modifica a estrutura do espaço-tempo, sendo representada pela evolução das componentes do tensor métrico. As equações de campo relacionam o tensor de Einstein ao tensor de momento-energia, que des-

creve a distribuição espaço-temporal da densidade de massa-energia tomada como fonte para o campo gravitacional. As identidades de Bianchi contraídas implicam a conservação automática desse tensor. Torna-se natural tomá-lo simétrico, o que assegura a conservação do momento angular (orbital) do sistema material.

Pode-se obter abordagens alternativas para a descrição do campo gravitacional através do relaxamento das hipóteses acerca da simetria da conexão afim e/ou da condição de metricidade, próprias à TRG. Uma revisão de problemas físicos que ocorrem em variedades afins é feita por Baekler et al^[1].

Em particular, E. Cartan^[2] propôs o abandono da hipótese de simetria da conexão afim, em 1922. Sua motivação era a tentativa de descrever "*o tensor momento-energia de cada elemento de volume do universo*", fortemente marcada por estudos anteriores de meios contínuos com graus internos de liberdade^[3], momento angular intrínseco em terminologia atual. Segundo ele, "*...é possível mostrar o profundo significado de generalizar aquela noção de espaço; ao mesmo tempo isso leva-nos a imagens do universo material mais ricas do que aquela que dispomos.*"

No mesmo trabalho, Cartan apresenta razões físicas que o levam a generalizar o conceito de transporte paralelo introduzido por Levi-Civita. Argumenta que a condição de metricidade não especifica completamente a conexão afim, mas tão somente a conexão de Levi-Civita, que é simétrica, deixando a parte antissimétrica da afinidade arbitrariamente indefinida.

Posteriormente, Cartan^[4] desenvolveu uma teoria métrica do espaço-tempo compatível com uma conexão linear assimétrica. Sugeriu que o tensor de torção, a parte antissimétrica

da afinidade, relacionava-se ao tensor de densidade de momento angular intrínseco das partículas do meio material. Tal sugestão fez-se antes do estabelecimento do moderno conceito de spin por Uhlenbeck, Goudsmit^[5], embora a noção de conexão afim assimétrica tenha sido já apresentada em 1921 por Eddington^[6].

De fato, o conceito de massa-energia é suficiente, na TRG, para a descrição do campo gravitacional em escala macroscópica. Entretanto, microscopicamente, a matéria é formada por partículas elementares, descritas pela Teoria da Relatividade Especial e pela Mecânica Quântica, e caracterizadas de forma independente por sua massa e spin. A distribuição de momento angular intrínseco é descrita pelo tensor de densidade de spin, semelhantemente à associação entre massa e o tensor de momento-energia. Em princípio, não há razão de natureza teórica para descartar a possibilidade de que massa e spin possam contribuir para a estrutura do campo de gravitação, desde que o spin possa ter representação geométrica. No contexto da TRG, não há objeto geométrico antissimétrico que possa ser associado ao tensor de densidade de spin da matéria, inexistindo qualquer relação fundamental entre o spin e a geometria.

A contribuição de Cartan permaneceu sem desdobramentos por aproximadamente três décadas. Nesse período, mostrou-se que o tensor de momento-energia de uma distribuição de matéria dotada de momento angular intrínseco é, em geral, assimétrico^[7,8,9]. Tal fato indicava possível insuficiência da TRG para descrever campos com spin^[10].

Pioneiramente, Kibble^[11] e Sciama^[12] retomaram a relação entre torção e spin, formalizando o que hoje se deno-

mina de Teoria de Einstein-Cartan (TEC), usando métodos da teoria de campos com o grupo de Poincaré como grupo de invariância local. No entanto, tal interpretação da TEC tem sido objeto de crítica nos últimos anos^[13].

Uma década após, a teoria teve sua formulação definitiva feita independentemente por Hehl^[14] e Trautman^[15], o último fazendo uso do cálculo exterior diferencial. O tensor canônico de momento-energia foi então variacionalmente associado ao tensor de Einstein do espaço-tempo com torção (U_4), e o tensor canônico de spin acoplado ao tensor de torção. Revisões extensas da evolução dos fundamentos físicos e matemáticos da TEC são encontradas em Hehl et al^[16] e Kuchowicz^[17].

As primeiras aplicações da TEC ao problema cosmológico tornaram-na atraente por prever a possibilidade de ser evitada a singularidade inicial, caso efeitos devidos ao spin predominem sobre termos de massa^[18-21]. Recentemente, as investigações conduzem ao estudo de novos cenários, tais como a expansão inflacionária dirigida por termos de spin^[22-27]; universos tipo Godel na TEC^[28-30]; universos da teoria escalar tensorial^[31]; uma descrição de estágios do universo pré-friedmaniano^[32]; e a obtenção de modelos espacialmente fechados, inflacionários, eternos e pulsantes^[33].

O presente trabalho tem por objetivo o estudo de cosmologias espacialmente homogêneas na TEC. Considerados atraentes, tanto do ponto de vista da motivação filosófica e física para seu estudo^[34], como por sua estrutura matemática, tais modelos tem sido objeto de investigação renovada na TRG^[35]. Esforços no sentido do estudo sistemático dessa classe de modelos

na TEC, visando estabelecer as estruturas da torção compatíveis com as simetrias geométricas^[36,37], ou as soluções possíveis para uma particular torção^[20], seguiram-se aos primeiros modelos exibidos por Trautman^[18] e Kopczinski^[19]. No entanto, tais investigações são ainda incompletas e contraditórias em muitos de seus aspectos. Por outro lado, é ainda reduzido o número de soluções exatas da TEC, e suas propriedades pouco discutidas.

Esta tese desenvolve-se da seguinte forma. O primeiro capítulo é dedicado ao estudo dos fundamentos da Teoria de Einstein-Cartan. Constroem-se as equações de campo por meio do Princípio de Hilbert para o procedimento variacional extendido à U_4 , que prescreve a métrica e a contorção como variáveis independentes. O desenvolvimento formal torna-se mais simples que o realizado por Hehl^[14], exibindo-se os termos de superfície omitidos na mesma referência.

O estudo de cosmologias na TEC exige hipóteses independentes tanto para a estrutura métrica, quanto para a torção do espaço-tempo. O segundo capítulo apresenta os princípios da teoria clássica de fluidos perfeitos com spin, discutindo-se a construção usual do tensor de momento-energia fenomenológico, e as leis de conservação para esse tensor. Dessa forma, justifica-se a torção induzida no espaço-tempo pelo próprio sistema físico tomado como fonte para o campo de gravitação.

Cosmologias espacialmente homogêneas na TEC são discutidas no Capítulo 3. As equações de campo obtidas descrevem simultaneamente todos os modelos de Bianchi com métrica diagonal, para uma estrutura de torção dependente do tempo cósmico. Pela seleção dos parâmetros que caracterizam as constantes de

estrutura da álgebra do grupo de simetrias, ou por deformações contínuas deles, passa-se de um tipo de Bianchi a outro. Tais equações parecem ser originais, representando ganho do ponto de vista operacional e do tratamento unificado dessa classe de modelos, tanto na TEC quanto na TRG. Apresenta-se uma tentativa de sistematizar possíveis modos de expansão de modelos de Bianchi diagonais, gerados pelo tensor de momento-energia fenomenológico para um fluido perfeito com spin.

A solução geral e unificada para a classe de universos Bianchi tipo I gerados por fluido perfeito de Weyssenhoff polarizado, descrito pelo tensor momento-energia fenomenológico e satisfazendo a equação de estado $p=(\gamma-1)\rho$, é exibida no Capítulo 4. Mostra-se, de forma geral, que uma fase inflacionária de evolução surge naturalmente no contexto da TEC, enquanto proibida na TRG (Assad^[26]). A abordagem utilizada permite o tratamento exato de outras classes de modelos construídos sob diferentes hipóteses para o espaço-tempo e suas fontes, e a comparação de seus modos de evolução. Mostra-se que todas as classes de modelos incluídos na solução geral são redutíveis à dinâmica de um oscilador harmônico simples. Uma aplicação às cosmologias homogêneas e isotrópicas da TRG decorre do formalismo geral apresentado (Assad, Sales de Lima^[39]).

Cosmologias inflacionárias, Bianchi tipo I, foram também discutidas por Bradas, Fenelly e Smalley^[24,25], geradas pelo tensor de momento-energia melhorado para um fluido perfeito com spin, devido a Ray, Smalley^[38]. Mostra-se, no quinto Capítulo, que tais modelos são inconsistentes com o postulado métrico da TEC, exibindo-se outras possibilidades para a inflação não

previstas nos trabalhos citados (Assad, Letelier^[27]).

Nos dois últimos capítulos discutem-se soluções cosmológicas para os tipos de Bianchi II, VIII e IX. Mostra-se, no Capítulo 6, que existe uma família de universos com seção espacial fechada (Bianchi tipo IX), isotrópicas, inflacionárias, eternas e pulsantes, geradas por fluidos perfeitos com spins não polarizados. Tal evolução é independente da forma adotada para o tensor de momento-energia, se o fenomenológico ou o de Ray-Smalley (Assad, Romero^[33]).

No último capítulo exibem-se classes de soluções Bianchi tipo II, VIII e IX, geradas por fluido perfeito polarizado e campo eletromagnético. Tais soluções são isotrópicas e estáticas. O campo eletromagnético, no entanto, é nulo e estacionário. Embora sejam soluções não realistas, constituem contra-exemplo para a impossibilidade de se compatibilizar as equações de campo da TEC com as simetrias dos tipos II, VIII e IX, sugerida na literatura (Assad^[40]).

Dois apêndices complementam a tese. No Apêndice A discute-se a geometria das variedades afins. O Apêndice B detalha o cálculo unificado de geometrias de Bianchi uti

CAPÍTULO 1

AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo demonstram-se as equações de campo da TEC por meio do formalismo lagrangiano, originalmente obtidas por Hehl^[14]. No entanto, o procedimento variacional aqui utilizado simplifica sua obtenção. Exibem-se também os termos de superfície (divergências totais que não contribuem para a variação da ação), omitidos na formulação original. Discutem-se certas ambiguidades da formulação convencional, que sugerem possível inconsistência no procedimento utilizado.

Admite-se conhecida a geometria da variedade de Riemann-Cartan (U_4), em particular, sua interpretação como extensão da variedade de Riemann (R_4). A geometria das variedades afins (A_4), e de seus casos particulares U_4 e R_4 , é tratada no

Apêndice A, considerado como suporte ao presente capítulo.

1.2 A AÇÃO TOTAL EM U_4

A obtenção das equações de campo da TEC por meio do formalismo lagrangiano convencional segue de forma análoga àquela da TRG. De fato, partindo de uma densidade lagrangiana no contexto da Teoria da Relatividade Especial (TRE), estende-se a formulação variacional para a TRG e a TEC através da aplicação do Princípio de Acoplamento Mínimo entre a matéria e a gravitação. Por essa prescrição, a métrica de Minkowski é substituída pela métrica g da variedade em estudo, e derivadas parciais presentes na densidade lagrangiana são levadas em derivadas covariantes com relação à conexão afim da variedade considerada.

Em U_4 a conexão afim é descrita na base de coordenadas sob a forma

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} - K_{ij}^k, \quad (2.1)$$

onde $\left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\}$ são os símbolos de Christoffel

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{km} \left(\bar{g}_{mi/j} + \bar{g}_{mj/i} - \bar{g}_{ij/m} \right),$$

a barra indicando a derivada usual, e K_{ij}^k é a contorção

$$K_{ij}^k = -T_{ij}^k - T_{ij}^k + T_{ji}^k, \quad (2.2)$$

satisfazendo $K_{1(jk)} = 0$. O tensor de torção é definido pela parte antissimétrica da conexão afim

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) = -K_{[ij]}^k. \quad (2.3)$$

A expressão da afinidade em bases arbitrárias, da qual (2.1) é caso particular, é apresentada no Apêndice A.

A aplicação do Princípio de Acoplamento Mínimo à densidade lagrangiana dos campos de matéria não apresenta problemas, desde que restrita à campos com massa de repouso não nula. Para campos com massa de repouso nula, como o campo eletromagnético, tal prescrição não é necessária e pode até mesmo ser considerada proibida, por poder levar à quebra da invariância de gauge da teoria eletromagnética^[14]. Tal aspecto será abordado no Capítulo 7.

Observada a restrição, o funcional total de ação para uma distribuição de matéria descrita pelo campo clássico $\psi(x)$, em interação com o campo gravitacional é

$$\begin{aligned} I_{\text{total}} &= I_{\text{mat}} + I_{\text{grav}} = \\ &= \int d^4x \left[\mathcal{L}(\psi, \partial\psi, g, \partial g, K) + \frac{1}{2\chi} \mathcal{R}(g, \partial g, K, \partial K) \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde χ é constante de acoplamento.

Analogamente à TRG, $\mathcal{L} = \sqrt{-g} L$ é a densidade lagrangiana dos campos de matéria (L é a lagrangiana) e $\mathcal{R} = \sqrt{-g} R$, onde R é o escalar de curvatura em U_4 . A diferença entre a ação

acima e a correspondente na TRG, reside na dependência que \mathcal{L} e \mathcal{R} têm do tensor de contorção K_{ij}^k e suas derivadas. Assim como na TRG, a interação entre os campos de matéria e o campo gravitacional está implícita devido à presença da métrica g no termo de matéria. Por outro lado, é desejável construir uma teoria que tenha a TRG como limite quando a torção, ou a contorção, se anule, o que leva a escolha de uma constante de acoplamento idêntica àquela da TRG. Em consequência, as intensidades dos acoplamentos entre momento-energia e curvatura, e spin e torção, são as mesmas, como mostrarão as equações de campo.

1.3 PRINCÍPIO DE HILBERT EXTENDIDO À U_4

Conexão afim e métrica são estruturas adicionais, em princípio independentes e não relacionadas, impostas sobre a estrutura de uma variedade diferenciável. A primeira relaciona-se com uma regra para transporte paralelo na variedade. A segunda define o produto escalar, correspondência entre vetores e 1-formas, ou ainda a distância infinitesimal entre dois pontos na variedade afim.

Em U_4 e R_4 impõe-se a condição de compatibilidade entre a conexão afim e a métrica, ou condição de metricidade, expressa pela exigência de que o tensor métrico seja covariantemente transportado, isto é:

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (3.1)$$

A relação acima permite a determinação da conexão afim em U_4 , expressa como função da métrica e da torção na forma

$$\Gamma_{(ij)}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} + 2 T_{(ij)}^k, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_{[ij]}^k = T_{[ij]}^k = -K_{[ij]}^k, \quad (3.3)$$

como mostrado na seção A.6.

O tensor de torção é variável geométrica independente da métrica, característica de U_4 , que determina unívocamente a parte antissimétrica da conexão afim. A geometria é, portanto, completamente descrita pelas 10 componentes independentes da métrica e pelas 24 componentes independentes do tensor de torção. Por outro lado, do ponto de vista do procedimento variacional, é irrelevante considerar-se a torção ou a contorção como a quantidade adequada para a variação. Tais quantidades guardam relações lineares entre si [c.f. (2.2,3)]. Basta usar a regra da cadeia para descrever a variação de uma delas em função da outra.

Considerando a variação da ação (2.4), pode-se adotar o Princípio de Hilbert estendido à U_4 , afirmando que a ação deve ser variada com relação à métrica e à contorção. Variações na métrica produzem variações na parte da conexão afim expressa pelos símbolos de Christoffel, não afetando a parte descrita pela contorção.

Nos trabalhos pioneiros de Hehl^[14] adota-se o Princípio de Palatini, fazendo-se a variação da ação com relação à métrica e a conexão afim completa. Argumenta ele que variações da métrica induzem uma nova conexão variada, mas métrica variada

e conexão variada devem ainda satisfazer o vínculo expresso pela condição de metricidade:

$$\Gamma + \delta\Gamma \nabla_k (g_{ij} + \delta g_{ij}) = 0 . \quad (3.4)$$

Usando (3.1), descartando termos quadráticos nas variações, permutando cíclicamente os índices e somando as relações resultantes na ordem e com os sinais que aparecem nos símbolos de Christoffel, Hehl obtém:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{kj}^m = \frac{1}{2} g^{mi} \left(\nabla_k \delta g_{ij} + \nabla_j \delta g_{ki} - \nabla_i \delta g_{jk} \right) - \\ - g^{mi} \left(\delta\Gamma_{[ki]r}^r \right) g_{jr} + \left(\delta\Gamma_{[kj]m}^m \right) - g^{mi} \left(\delta\Gamma_{[ij]r}^r \right) g_{kr} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Esta variação da afinidade é então levada na variação da densidade escalar de curvatura, inteiramente descrita em termos da conexão afim, conforme prescreve o Princípio de Palatini.

No entanto, abrindo as derivadas covariantes em (3.5), usando (2.2,3) e (3.2), verifica-se que a variação acima apenas esconde o fato que poderia ser inferido diretamente de (2.1), isto é:

$$\delta\Gamma_{ij}^k = \delta \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} - \delta K_{ij}^k . \quad (3.6)$$

Dessa forma, a variação da conexão afim em U_4 , compatível em termos de primeira ordem com a condição de metricidade, é constituída de duas variações independentes: a varia-

ção da conexão Riemanniana e a variação da contorção.

A relação (3.6) justifica firmemente o Princípio de Hilbert extendido à U_4 : métrica e contorção são variáveis independentes nas densidades lagrangianas para campos de matéria em interação com o campo gravitacional nas variedades de Riemann-Cartan.

Adotando-se esse princípio, obtém-se as equações de campo por meio de cálculos curtos e simples, em que termos de superfície, contendo variações da métrica e da contorção, aparecem naturalmente e diretamente, como se verá à seguir.

1.4 VARIAÇÃO DA DENSIDADE ESCALAR DE CURVATURA

Considere-se inicialmente a variação da ação para o campo gravitacional

$$\delta I_{\text{grav}} = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \delta \mathcal{R} = \frac{1}{2\chi} \int d^4x \delta \left(\sqrt{-g} R \right) . \quad (4.1)$$

Para descrever variações das componentes da métrica, e da raiz de seu determinante, usam-se as relações

$$\delta g^{im} = - g^{ip} g^{mq} \delta g_{pq} , \quad (4.2)$$

$$\delta g_{im} = - g_{ip} g_{mq} \delta g^{pq} , \quad (4.3)$$

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{pq} \delta g_{pq} , \quad (4.4)$$

obtendo-se

$$\delta \left(\sqrt{-g} g^{ij} \right) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{ij} g^{pq} - g^{ip} g^{jq} \right) \delta g_{pq} , \quad (4.5)$$

que permite escrever

$$\delta \left(\sqrt{-g} R \right) = - \sqrt{-g} G^{pq} \delta g_{pq} + \sqrt{-g} g^{ij} \left(\delta R_{ij} \right) , \quad (4.6a)$$

onde G^{pq} é o tensor de Einstein em U_4 . Deve-se notar que, devido ao fato de U_4 possuir métrica simétrica, a relação acima deve, rigorosamente, ser escrita na forma

$$\delta \left(\sqrt{-g} R \right) = - \sqrt{-g} G^{(pq)} \delta g_{pq} + \sqrt{-g} g^{ij} \left(\delta R_{(ij)} \right) , \quad (4.6b)$$

suprimindo-se de (4.6a) a identidade

$$\sqrt{-g} \left[- G^{[pq]} \delta g_{pq} + g^{ij} \left(\delta R_{[ij]} \right) \right] \equiv 0 . \quad (4.6c)$$

Como (4.6a) é o ponto de partida para a formulação original da TEC, será primeiramente adotada, deixando-se para a seção 1.6 a discussão das consequências de (4.6b,c).

Para obter a variação em (4.6a), considera-se que o tensor de Ricci em U_4 é escrito como correção do correspondente tensor em R_4 , denotado por R_{ij}^R , na forma [c.f. (A.6.20)]

$$R_{ij} = R_{ij}^R - \nabla_m^* \left(K_{ij}^m + \delta_i^m K_j \right) + 2 K_{mi}^{[r} K_{rj]}^m , \quad (4.7)$$

onde $K_j \equiv K_{mj}^m$ é o traço do tensor de contorção e

$$\overset{*}{\nabla}_k = \nabla_k - K_k = \nabla_k + 2T_k, \quad (4.8)$$

sendo $T_k \equiv T_{kl}^1$ o traço do tensor de torção.

A variação do tensor de Ricci presente em (4.6a) exige que, em todas as variações envolvendo a afinidade, faça-se uso da decomposição (2.1) e que variações dos símbolos de Christoffel sejam determinadas em termos de variações da métrica. As três parcelas, obtidas pelo uso de (4.7) no segundo termo à direita em (4.6a), serão determinadas separadamente:

$$I) \quad g^{ij} \left(\delta R_{ij}^R \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m (\sqrt{-g} V^m), \quad (4.9)$$

onde

$$V^m = g^{jk} \delta \left\{ \begin{matrix} m \\ j \ k \end{matrix} \right\} - g^{mk} \delta \left\{ \begin{matrix} j \\ j \ k \end{matrix} \right\}. \quad (4.10)$$

Trata-se de resultado da TRG, expressando a divergência de um termo contendo variações da métrica e suas derivadas^[41,42].

II) Observando que a condição de metricidade, a regra de Leibniz e (4.2), permitem escrever

$$\delta \left(g^{ij} \overset{*}{\nabla}_m K_{ij}^m \right) = - g^{ip} g^{jq} \left(\delta g_{pq} \right) \overset{*}{\nabla}_m K_{ij}^m + g^{ij} \left(\delta \overset{*}{\nabla}_m K_{ij}^m \right),$$

obtem-se

$$\begin{aligned} & g^{ij} \left[\delta \overset{*}{\nabla}_m \left(K_{ij}^m + \delta_i^m K_j \right) \right] = \\ & - \left[\overset{*}{\nabla}_m \left(\mathcal{J}^{pqm} + \mathcal{J}^{mpq} - \mathcal{J}^{qmp} \right) \right] \delta g_{pq} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m \left[\sqrt{-g} \left(2\delta K^m + K^m g^{pq} \delta g_{pq} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde foi utilizada a relação entre a torção modificada, definida por

$$\mathcal{T}_{ij}^m = T_{ij}^m + 2 \delta_{[i}^m T_{j]} , \quad (4.12)$$

e a contorção [c.f. (A.6.27,28)]

$$K_{jk}^i = - \mathcal{T}_{jk}^i - \mathcal{T}_{kj}^i + \mathcal{T}_{jk}^i + 2 \delta_{[j}^i \mathcal{T}_{k]} . \quad (4.13)$$

III) Novamente utilizando (4.13) e dedicando atenção às simetrias dos objetos envolvidos, verifica-se que

$$2g^{ij} \left(\delta K_{mi}^{lr} K_{rj}^{ml} \right) = - 2 \mathcal{T}_r^{im} \delta K_{mi}^r . \quad (4.14)$$

Coletando os termos em (4.19), (4.11) e (4.14), a variação (4.1) toma a forma

$$\begin{aligned} \delta I_{\text{grav}} &= \\ &= \frac{1}{2\chi} \left\{ \int d^4x \left[\left(\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta g_{ij}} \right) \delta g_{ij} + \left(\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta K_{mi}^r} \right) \delta K_{mi}^r \right] + \int d^4x \partial_m P^m \right\} , \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta g_{ij}} \right) = - G^{ij} + \frac{*}{\nabla_m} \left(\mathcal{T}^{ijm} + \mathcal{T}^{mij} - \mathcal{T}^{jmi} \right) , \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta K_{mi}^r} \right) = - 2 \mathcal{T}_r^{im} , \quad (4.17)$$

$$P^m = \sqrt{-g} \left(V^m - 2 \delta K^m - K^m g^{pq} \delta g_{pq} \right) . \quad (4.18)$$

A última integral em (4.15), realizada num volume 4-dimensional, não contribui para a variação da ação. Via teorema de Gauss, é transformada no fluxo de P^m através do volume de integração. Entretanto, ao se fazer a variação δI_{grav} , admite-se a priori que as variações δg_{ij} e δK_{mi}^r anulam-se sobre a hipersuperfície contorno do volume de integração.

Deve-se notar que somente o traço da contorção, e a variação de seu traço, contribuem para os termos adicionados ao termo puramente Riemanniano de P^m . Nos casos em que é nulo o traço da contorção, recai-se automaticamente na exigência de que apenas as variações da métrica se anulem na hipersuperfície contorno do volume de integração, como ocorre na TRG.

Do ponto de vista operacional, a adoção do princípio de que métrica e contorção são as variáveis adequadas ao processo variacional, em lugar do Princípio de Palatini, representa ganho em simplicidade de cálculo na variação da densidade escalar de curvatura. Para comparação entre um e outro procedimento, pode-se consultar Linhares^[43], que detalha os cálculos originais de Hehl^[14]. Provavelmente, na medida do que conhece o autor, a abordagem apresentada é original, constituindo procedimento simplificador, útil ao iniciante nessa área de estudo. Tem a vantagem de diretamente exibir os termos de superfície, omitidos nas referências citadas.

1.5 EQUAÇÕES DE CAMPO

A variação da ação total (2.4) fornece as equa-

ções de evolução dos campos de matéria

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = 0 , \quad (5. 1)$$

e dois conjuntos de equações de campo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ij}} = - \frac{1}{2 \chi} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta g_{ij}} , \quad (5. 2)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{mi}^r} = - \frac{1}{2 \chi} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta K_{mi}^r} . \quad (5. 3)$$

O tensor de momento-energia métrico, ou dinâmico, associado aos campos de matéria é definido por^[44, 45]

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ij}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\text{métrico}}^{ij} , \quad (5.4)$$

que é simétrico.

Por outro lado, Sciama^[12] observou que a rotação de um campo de tetradas, paralelamente transportado em U_4 , é medida por duas partes independentes: a primeira proporcional aos coeficientes de rotação de Ricci (que transporta informação sobre a estrutura métrica), e outra parte proporcional à contorção [c.f. (A.6.9)]. Dessa forma, um campo de tetradas exhibe novos graus de liberdade, caracterizados por rotações adicionais não especificadas pela estrutura métrica e intrínseca à U_4 .

Sabe-se também que, entre as propriedades do tensor de spin para campos de matéria no espaço de Minkowski, está a de que esse tensor, como tensor de momento angular, possui

três índices sendo antissimétrico em dois deles. Deverá, portanto, estar associado com algum tensor de terceira ordem de caráter geométrico. Por tais motivos, Sciama^[12] propôs a seguinte definição do tensor dinâmico de densidade de spin:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{ml}^r} = \sqrt{-g} S_r^{im} , \quad (5.5)$$

devendo ser observado que, como $K_{(ml)}^r = 0$, tem-se $S_r^{(im)} = 0$.

Levando (4.16,17), (5.4,5) em (5.2,3), obtém-se as equações de campo da TEC

$$G^{ij} - \nabla_m^* \left(\mathcal{T}^{ijm} + \mathcal{T}^{mij} - \mathcal{T}^{jmi} \right) = \chi T_{\text{métrico}}^{ij} , \quad (5.6)$$

$$\mathcal{T}_r^{im} = \chi S_r^{im} . \quad (5.7)$$

Usando (5.7) em (5.6), pode-se escrever esta última equação nas seguintes formas alternativas:

$$\text{I) } G^{ij} = \chi \left(T_{\text{simétrico}}^{ij} + \nabla_m^* S^{ijm} \right) , \quad (5.8)$$

$$T_{\text{simétrico}}^{ij} = T_{\text{métrico}}^{ij} + 2 \nabla_m^* S^{m(ij)} ; \quad (5.9)$$

$$\text{II) } G^{ij} = \chi T_{\text{canônico}}^{ij} , \quad (5.10)$$

justificando-se posteriormente a denominação "canônico" dada à

$$\begin{aligned}
T_{\text{canonico}}^{ij} &= T_{\text{simetrico}}^{ij} + \nabla_m^* S^{ijm} = \\
&= T_{\text{metrico}}^{ij} + \nabla_m^* \left(S^{ijm} + S^{mij} - S^{jmi} \right) ;
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

$$\text{III) } G^{(ij)} = \chi T_{\text{simetrico}}^{ij} ,
\tag{5.12}$$

$$G^{[ij]} = \chi T_{\text{canonico}}^{[ij]} = \chi \nabla_m^* S^{ijm} .
\tag{5.13}$$

Tais formas serão particularmente úteis no Capítulo 5 da tese.

As equações (5.10) e (5.7) constituem a forma mais simples e sugestiva das equações de campo da TEC. A segunda, de caráter algébrico, estabelece que a torção modificada é proporcional ao spin. Em consequência, o campo de torção existe apenas nas regiões do espaço-tempo preenchidas por matéria com spin, não se propagando através do vazio. Dito de outra forma, a interação spin-spin presente na teoria é uma interação de contato, que não se propaga para fora das fontes.

Tal relação algébrica entre o spin e a torção decorre do acoplamento mínimo entre a matéria e a gravitação, admitido a priori, e da escolha da densidade lagrangiana para o campo de gravitação proporcional ao escalar de curvatura em U_4 . Essa escolha é a mais simples entre todos os objetos escalares que podem ser construídos com a curvatura. Outras escolhas possíveis (por exemplo $R + R^2$) levam a teorias para o campo gravitacional em U_4 com propagação da torção, mas diferentes da TRG mesmo no limite em que a torção se anula.

As equações (5.10) são formalmente idênticas às

equações de campo da TRG. Deve-se observar, no entanto, que G^{ij} é o tensor de Einstein em U_4 e que o tensor momento-energia é o tensor canônico. Usando a expressão para o tensor de Einstein dada em (A.6.22) e (5.7), é possível escrever (5.10) na forma quase-Einsteiniana

$$G^{ij} = \chi T_{\text{metrico}}^{ij} + \chi^2 \tau^{ij}, \quad (5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau^{ij} = & S^{mp1} S_{mp}^j - 2 S^{imp} S_{mp}^j - 4 S_{[p}^{im} S_{m]}^{jp} + \\ & + \frac{1}{2} g^{ij} \left(S^{mpr} S_{mpr} + 4 S_{r[p}^m S_{m]}^{rp} \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

e G^{ij} é o tensor de Einstein da variedade de Riemann.

O termo τ^{ij} representa uma correção ao tensor momento-energia métrico que considera a contribuição da presença de spin para a geometria do espaço-tempo. Interpretada como originária de uma interação de contato spin-spin, tal correção é extremamente fraca por ser proporcional ao quadrado da constante de acoplamento, $\chi^2 = 64\pi^2 G^2/c^8$. Dessa forma, mesmo considerando que a torção não se propaga para o exterior das fontes, a presença de spin altera a estrutura de fontes para o campo gravitacional por gerar o tensor momento-energia corrigido em (5.14).

A equação (5.13) representa a lei de balanço para o momento angular intrínseco na TEC,

$$G^{[ij]} = \chi \nabla_m^* S^{ijm}, \quad (5.16)$$

sendo consistente com identidades geométricas em U_4 , como se verifica por (A.6.14).

O balanço de energia-momento na TEC, assim como na TRG, decorre das identidades de Bianchi contraídas. Usando (A.6.16), (5.10) e (5.7), encontra-se

$$\nabla_j T_{i \text{ canónico}}^j = S_{jk}^r R_{ir}^{jk}, \quad (5.17)$$

onde ∇_j é um operador que atua sobre objetos possuindo apenas um índice covariante, de forma [c.f. (A.6.17)]

$$\nabla_j \Psi_i \equiv \nabla_j \Psi_i^* + 2 T_{ji}^k \Psi_k^* .$$

As expressões anteriores são obtidas via teorema de Noether, e o grupo geral de transformações de coordenadas associado à densidade lagrangiana para os campos de matéria. Denotando por A^{ij} os elementos da matriz de representação do grupo de Lorentz associado ao campo ψ , mostra-se que^[14,43,46]

$$\sqrt{-g} T_{j \text{ canónico}}^i = \mathcal{L} \delta_j^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi)} \nabla_j \psi, \quad (5.18)$$

$$\sqrt{-g} S^{ijk} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \psi)} A^{[ij]k} \psi .$$

Por esse motivo, tanto o tensor dinâmico de densidade de spin definido em (5.5), como o denominado de tensor momento-energia canônico em (5.11), são os respectivos tensores canônicos definidos com a ajuda do teorema de Noether na TRE,

covariantemente estendidos para U_4 . Dessa forma, (5.11) constitui extensão natural do processo de simetrização de Belinfante-Rosenfeld.

1.6 AMBIGÜIDADES DA FORMULAÇÃO LAGRANGIANA CONVENCIONAL

Fazendo-se o desenvolvimento da variação da ação para o campo gravitacional por meio da relação (4.6b), apenas a parte simétrica das equações de campo dada por (5.12), a relação algébrica entre a torção modificada e o spin, descrita em (5.7), e os termos de fronteira (4.17), emergem do procedimento variacional. Toda a informação acerca da parte antissimétrica das equações de campo dada em (5.13) está apagada na variação (4.6b).

Por outro lado, usando (4.7), encontra-se a identidade geométrica em U_4 , $R_{[1]J} = \nabla_m^* \mathcal{T}_{1J}^m$, que permite reescrever (4.6c) na forma

$$\left(G^{[1]J} - \nabla_m^* \mathcal{T}^{1Jm} \right) \delta g_{1J} \equiv 0, \quad (6.1)$$

obtida por mera manipulação de identidades, associada ao uso da regra de Leibniz e da condição de metricidade. Portanto, a parte antissimétrica do tensor de Einstein em U_4 é construída por manipulação redundante de uma identidade geométrica, convenientemente acrescida à (4.6b). Tal fato confere à identidade geométrica caráter suplementar ao princípio variacional, posto que dele não é rigorosamente obtida.

Porém, considerando que (5.7) decorre genuinamente da variação (4.6b), pode-se tomar sua derivada

$$\nabla_m^* \mathcal{T}^{ijm} = \nabla_m^* S^{ijm}, \quad (6.2)$$

que conduz à (5.13) através da identificação do lado esquerdo com a parte antissimétrica do tensor de Einstein, o que é garantido pela identidade geométrica de U_4 .

Por tais motivos, pode-se argumentar que apenas parte das equações de campo da TEC é direta, e consistentemente, obtida do princípio variacional. A construção da equação de campo (5.13) recorre, no mínimo em parte, ao uso da identidade geométrica de U_4 .

Outra ambigüidade na formulação variacional, já apontada^[17], decorre de (5.6) e (5.10), que permitem argumentar ser impossível decidir qual o tensor de momento-energia genuíno: se o simétrico ou o canônico.

Entretanto, as questões aqui apresentadas têm solução interessante ao formular-se variacionalmente a teoria por meio do formalismo de formas exteriores diferenciais, como realizado por Trautman^[15], simultaneamente à formulação variacional convencional. Livre das dificuldades aqui discutidas, parece ser o procedimento consistente para a obtenção das equações de campo da TEC, tendo sido apresentada em detalhes por Galvão^[47].

CAPÍTULO 2

FLUIDOS PERFEITOS COM SPIN CLÁSSICO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a descrição clássica para o spin e constroi-se o tensor de momento energia fenomenológico para um fluido perfeito com spin. Discute-se a forma assumida pelas leis de balanço da TEC sob a descrição clássica adotada. Verifica-se que, para a classe de cosmologias estudadas nessa tese, a conservação do spin é automática.

2.2 SPIN CLÁSSICO

O fluido perfeito com spin clássico, ou simplesmente fluido de Weyssenhoff ideal, é um meio contínuo cujos ele-

mentos, além de energia e momento, possuem momento angular intrínseco proporcional ao volume. De acordo com Weyssenhoff-Raabe^[8], postula-se que a densidade de spin da matéria é descrita por um tensor antissimétrico de segunda ordem,

$$S_{ij} = - S_{ji} . \quad (2. 1)$$

Suas três componentes espaciais formam o vetor $\vec{S} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$ que é igual, no sistema de coordenadas em que o fluido está momentaneamente em repouso, à densidade de momento angular intrínseco no 3-espaço de repouso local. As três componentes espaço-temporais desse tensor também constituem um vetor tridimensional, $\vec{Q} = \{S^{01}, S^{02}, S^{03}\}$, e admite-se que \vec{Q} se anula no espaço de repouso do fluido.

Os vetores \vec{S} e \vec{Q} transformam-se como as intensidades dos campos magnético e elétrico, ou seus respectivos momentos de dipolo. Análogamente ao sistema eletromagnético, o momento de dipolo elétrico é nulo no referencial de repouso, onde o momento é puramente magnético.

A formulação 4-dimensional é obtida decompondo-se o tensor de terceira ordem de densidade de spin na forma

$$S_{ij}{}^k = S_{ij} u^k , \quad (2. 2)$$

onde u^k é a 4-velocidade. A suposição de que são nulas as componentes espaço-temporais do tensor de densidade de spin no referencial local é expressa pelo vínculo

$$S_{ij}{}^j = S_{ij} u^j = 0 , \quad (2.3)$$

também denominado de condição de Frenkel.

Pode-se ainda descrever o tensor de densidade de momento angular intrínseco S_{ij} em termos do pseudo-vetor de spin S^k , obtendo-se as relações

$$S_{ij} = \varepsilon_{ijk} u^k S^m , \quad (2.4a)$$

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u^j S^{km} , \quad (2.4b)$$

onde ε_{ijk} é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita, com $\varepsilon_{0123} = 1$.

2.3 TENSOR DE MOMENTO-ENERGIA FENOMENOLÓGICO

O tensor de momento-energia para um fluido perfeito com spin é construído com o auxílio da lei de balanço para o momento angular intrínseco em U_4 . Considerando-se a descrição clássica anteriormente discutida, postula-se que o tensor de momento-energia para o fluido perfeito com spin tem a forma

$$T_{ij} = h_i u_j - p g_{ij} , \quad (3.1)$$

onde p é a pressão isotópica e h_i é o vetor de entalpia, de forma que

$$\rho = T_{ij} u^i u^j , \quad (3.2)$$

é a densidade de energia do fluido.

A descrição fenomenológica é obtida substituindo (3.1) em (1.5.13), o que fornece

$$h_i u_j - h_j u_i = 2 \nabla_m^* S_{ij}^m . \quad (3.3)$$

Contraíndo com a 4-velocidade, suposta tipo-tempo e normalizada ($u^i u_i = 1$), e usando (3.2), tem-se

$$h_i = (\rho + p) u_i + 2 \left(\nabla_m^* S_{ik}^m \right) u^k , \quad (3.4)$$

que permite obter a expressão para o tensor fenomenológico

$$T_{ij} = (\rho + p) u_i u_j - p g_{ij} + 2 \left(\nabla_m^* S_{ik}^m \right) u^k u_j . \quad (3.5)$$

A teoria variacional para um fluido perfeito com spin, que leva aos tensores de spin de Weyssenhoff-Raabe e ao tensor (3.5), foi desenvolvida por Obukhov, Korotky^[48]. Seus detalhes, no entanto, não serão discutidos nessa tese.

2.4 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Substituindo (3.4) em (3.3), obtém-se a equação de movimento para o spin

$$\nabla_m^* S_{ij}^m = \left(\nabla_m^* S_{ik}^m \right) u^k u_j - \left(\nabla_m^* S_{jk}^m \right) u^k u_i . \quad (4.1)$$

A relação acima é expressa de forma mais conveniente por meio da derivada substancial

$$\dot{\varphi}_A = \nabla_m^* (u^m \varphi_A) , \quad (4. 2)$$

definida para qualquer densidade tensorial φ_A , e de (2.2), tomando a forma

$$\dot{S}_{ij} = - 2u_{[i} \dot{S}_{j]k} u^k . \quad (4. 3)$$

Nas aplicações cosmológicas da TEC é usual usar, em lugar da equação de movimento (4.3), a lei de conservação do spin

$$\dot{S}_{ij} = \nabla_m^* S_{ij}^m = 0 . \quad (4. 4)$$

Embora todas as soluções de (4.4) sejam soluções de (4.3), o inverso não é sempre verdadeiro. Um critério para se decidir quando (4.4) é correta, foi obtido por Obukhov, Korotky^[48] na forma da seguinte proposição:

"Seja S_{ij}^k o tensor de densidade de spin de um fluido de Weyssenhoff neutro com densidade de spin não trivial $S_{ij}^k \neq 0$, satisfazendo (2.2,3), e movendo-se em U_4 de acordo com (4.3). O spin é conservado se, e apenas se, os elementos do fluido movem-se sem aceleração em todos os pontos de U_4 , isto é,

$$a^i = u^m \nabla_m u^i = 0 ."$$

A prova é imediata. Suponha que o fluido satisfaz

(2.2). Então

$$\dot{S}_{ik} u^k = \left(\nabla_m^m \right) (S_{ik} u^k) + u^m \nabla_m (S_{ik} u^k) + 2T_m u^m (S_{ik} u^k) - S_{ik} a^k .$$

Admitindo a condição de Frenkel (2.3), tem-se

$$\dot{S}_{ik} u^k = - S_{ik} a^k , \quad (4.5)$$

e (4.3) toma a forma

$$\dot{S}_{ij} = 2 u_{[i} S_{j]k} a^k . \quad (4.6)$$

Portanto, se (2.2,3) são satisfeitas não trivialmente, o spin é conservado, $\dot{S}_{ij} = 0$, se $a^k = 0$. Suponha $a^k \neq 0$, e $\dot{S}_{ij} = 0$. Então (4.6) implica em $S_{jk} = u_j S_{ik} u^k = 0$, a solução trivial, o que contradiz a hipótese inicial.

Embora o tensor de densidade de spin não seja, em geral, conservado, a densidade escalar de spin

$$S^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} , \quad (4.7)$$

é sempre conservada. De fato, contraindo (4.6) com S^{ij} , verifica-se que $\dot{S}_{ij} S^{ij} = 0$, devido à condição de Frenkel, o que conduz à

$$(S^2)^\cdot = \nabla_m^* S^2 u^m = 0 . \quad (4.8)$$

Deve-se observar que é essencial para os resultados acima que o fluido seja descrito pelo modelo de Weyssenhoff,

com a condição de Frenkel exercendo papel fundamental. Em princípio não há restrições sobre a estrutura métrica de U_4 . No entanto, ao se adotar um sistema de coordenadas comovente, $u^i = \delta^i_0$, a condição de aceleração nula, necessária para a conservação do spin, é equivalente a $\Gamma_{00}^i = 0$. Este é o caso das cosmologias de Bianchi ortogonais em U_4 , com torção induzida por spin clássico, discutidas nesse trabalho [c.f. (B.7a)].

A lei de balanço de energia-momento em U_4 , dada por (1.5.17), determina o movimento translacional do fluido com spin. Explicitamente

$$\nabla_j T_i^j + 2T_j T_i^j - 2T_{ij}^k T_k^j = S_{jk}^r R_{ir}^{jk} . \quad (4.9)$$

Usando (2.2,3), (3.5), (4.5), (1.4.12), (1.5.7), verifica-se que

$$\mathcal{T}_i = T_i = 0 , \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{T}_{ij}^k = T_{ij}^k = \chi S_{ij}^k = \chi S_{ij} u^k , \quad (4.10b)$$

$$T_{ij}^k T_k^j = 0 , \quad (4.10c)$$

reduzindo-se (4.9) à forma

$$\nabla_j T_i^j + u^r R_{ri}^{jk} S_{jk} = 0 , \quad (4.11)$$

onde o último termo à esquerda é usualmente chamado de força generalizada de Mathisson-Papapetrou. Contraíndo com u^i tem-se

$$u^i \nabla_j T_i^j = 0 . \quad (4.12)$$

Usando (3.5) e (4.5), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \nabla_j T_i^j &= \left[\nabla_j (\rho + p) \right] u_i u^j + (\rho + p) a_i + \\ &+ (\rho + p) u_i \nabla_j u^j - 2 \nabla_j \left(S_{ik} a^k u^j \right) . \end{aligned} \quad (4.13)$$

A expressão acima, levada em (4.12), fornece

$$u^j \nabla_j \rho + (\rho + p) \nabla_j u^j = 0 , \quad (4.14)$$

verificando-se que, na TEC, a energia do fluido é conservada da mesma da mesma forma que na TRG. A presença de spin da matéria não modifica a equação de continuidade satisfeita pelo fluido.

Substituindo (4.13,14) em (4.11), a última toma a forma da equação de Euler que descreve o movimento translacional do fluido

$$\begin{aligned} (\rho + p) a_i + (-\delta_j^i + u_i u^j) \nabla_j p - \\ - 2 \nabla_j \left(S_{ik} a^k u^j \right) + u^r R_{ri}{}^{jk} S_{jk} = 0 , \end{aligned} \quad (4.15)$$

e ocorrendo a conservação do spin, $a^i = 0$, obtém-se

$$(-\delta_j^i + u_i u^j) \nabla_j p = u^r R_{ri}{}^{jk} S_{jk} . \quad (4.16)$$

Torna-se evidente que a conservação do spin impõe

restrições sobre a curvatura de U_4 . O spin acopla-se com a curvatura na expressão da força de Mathiesson-Papapetrou, gerando um gradiente de pressão. Na ausência do último, o lado esquerdo de (3.16) é idênticamente nulo, indicando a presença de vínculos impostos sobre a curvatura.

CAPÍTULO 3

COSMOLOGIAS ESPACIALMENTE HOMOGÊNEAS EM VARIEDADES

DE RIEMANN-CARTAN

3.1 INTRODUÇÃO

Aplicada à Cosmologia, a TEC torna-se particularmente interessante por prever que a interação spin-spin, de caráter repulsivo, pode prestar-se como mecanismo para evitar as singularidades características dos modelos cosmológicos da TRG. Tal conjectura, devida à Trautman^[18], é atestada por inúmeras soluções conhecidas na literatura. Recentemente, mostrou-se que uma fase inflacionária pode existir em estágios primitivos da evolução do Universo, dirigida por termos de spin^[22-27].

Entretanto, a literatura conhecida apresenta um número reduzido de soluções cosmológicas exatas, e poucos resultados de caráter geral. Tal quadro é insatisfatório, sob o ponto de vista da melhor compreensão de aspectos específicos da TEC, e

sua comparação com a TRG, uma vez que as duas teorias devem diferir em suas previsões nas regiões preenchidas de matéria.

Cosmologias espacialmente homogêneas foram extensamente estudadas na TRG^[49]. Nesses modelos, o espaço-tempo tem seção tipo-espaço, homogênea sobre a ação de algum grupo de Lie 3-dimensional de isometrias, simplesmente transitivo sobre a seção de homogeneidade^[50]. Da mesma forma, a maioria das soluções cosmológicas da TEC foram construídas admitindo-se que o espaço-tempo é espacialmente homogêneo. O campo gravitacional tem por fonte um fluido perfeito com spin, descrito pelo tensor de momento-energia fenomenológico apresentado no Capítulo 2.

Nesse contexto, uma tentativa de sumarizar resultados conhecidos na literatura é exibida na Tabela 3.1.1, onde, além das soluções com fluido perfeito e campos magnético ou eletromagnético, incluiu-se as soluções tipo Kantowski-Sachs. Soluções exatas explícitas (SE) são conhecidas apenas nos casos I, VI₀, VII₀, IX, V e III. Nesses casos o fluido satisfaz uma equação de estado da forma $p = (\gamma - 1)\rho$, $1 \leq \gamma \leq 2$, para algum valor de γ (em geral 1, 4/3 ou 2).

Para o caso II há resultado negativo (RN) indicando a impossibilidade de existência de soluções para modelos ortogonais. No entanto, prova-se a existência de soluções (PES) em modelos tipo II inclinados (I), com campo eletromagnético. É importante notar que uma solução espacialmente homogênea inclinada ainda está para ser explicitamente exibida, assim como soluções para vários dos modelos de Bianchi não inclinados.

Em Gasperini^[22], e Assad, Letelier^[27], usa-se o tensor momento-energia de Ray-Smalley para o fluido perfeito com

TABELA 3.1.1

Soluções Cosmológicas Espacialmente Homogêneas na TEC

Fonte Tipo → ↓	Fluido Perfeito	Campo Magnetico	Campo Eletromagnetico	
A	I	Trautman ¹⁸ (SE) Kopczinski ¹⁹ (SE) Tafel ^{20,51} (SE) Kuchowicz ⁵²⁻⁵³ (SE) Demianski ²³ (SE) Gasperini ²² (RS) Assad ²⁶ (SE) Assad, Letelier ²⁷ (RS)	Raychaudhury ⁵⁷ (SE) Kuchowicz ⁵⁸ (SE) Tsoubelis ⁵⁹ (SE) Berman ⁶⁰ (SE)	Lorenz ⁶³ (SE)
	II	Tafel ²⁰ (RN)		Lorenz ⁶⁴ (I,PES)
	VI ₀	Tsoubelis ⁵⁴ (SE)	Tsoubelis ⁵⁹ (SE)	
	VII ₀	Tafel ²⁰ (SE) Tsoubelis ⁵⁴ (SE)	Tsoubelis ⁵⁹ (SE)	
	VIII	Tafel ²⁰ (PES)		Lorenz ⁶³ (PES)
	IX	Tafel ²⁰ (PES) Kuchowicz ⁵⁵ (SE) Nurgaliev, Ponomariev ³² (SE) Assad, Romero ³³ (PES)	Teixeira ⁶¹ (SE)	Lorenz ⁶³ (PES) Assad ⁴⁰ (SE)
	V	Tafel ^{20,51} (SE) Batakis, Tsoubelis ⁵⁶ (SE)		Lorenz ⁶⁵ (SE)
	III		Tsoubelis ⁵⁹ (SE)	
	IV	Tafel ²⁰ (PES)		
	VI _h	Tafel ²⁰ (PES)		
VII _h	Tafel ²⁰ (PES)			
Kant/ Sachs	Kuchowicz ⁵³ (PES)	Lorenz ⁶² (SE)		

spin (RS). Em geral, supõem-se os spins alinhados com alguma das direções espaciais. Exceção feita à Gasperini^[22], Nurgaliev, Ponomariev^[32], Assad, Romero^[33] e Kuchowicz^[55], que admitem uma distribuição aleatória de spins.

Nesse capítulo apresenta-se, à seguir, uma breve revisão de procedimentos utilizados no estudo de cosmologias de Bianchi em U_4 . Na seção 3.3, constroem-se as equações de campo unificadas para geometrias de Bianchi nessa variedade, discutindo-se, na seção 3.4, as possibilidades para orientação do vetor de spin, compatíveis com as simetrias geométricas e os modos possíveis de evolução dos modelos. As expressões para o tensor de Ricci obtidas, tanto quanto conhece o autor, não foram ainda, completa e corretamente, mostradas na literatura.

3.2 COSMOLOGIAS DE BIANCHI EM U_4

No estudo de modelos cosmológicos da TEC adotam-se procedimentos comuns aos utilizados na TRG, a saber:

a) Os observadores fundamentais movimentam-se com os elementos de volume do substrato material admitido no modelo. Movem-se ao longo das linhas de universo do substrato, supostas tipo-tempo e descritas por um campo de velocidades normalizado:

$$u^A u_A = 1, \quad (2.1)$$

$$u^A = \delta_0^A. \quad (2.2)$$

b) A cinemática do substrato material é descrita

pela expansão θ , pelo tensor de deformação (shear) σ_{AB} e a deformação $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{AB} \sigma^{AB}$, pelo tensor de rotação ω_{AB} e a rotação $\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{AB} \omega^{AB}$. As expressões obtidas na TRG para a expansão e a deformação não se alteram em presença de conexão assimétrica no espaço-tempo^[66]. Mostra-se^[67] que a rotação em U_4 satisfaz $\omega_{AB}^{TEC} = \omega_{AB}^{TRG} + S_{AB}$, onde S_{AB} é o tensor de densidade de spin.

As seguintes convenções são adotadas: índices latinos maiúsculos referem-se à base ortonormal, obedecendo a convenção de soma se repetidos e assumindo valores 0,1,2,3; índices gregos referem-se à seção espacial, somando sobre 1,2,3 quando repetidos; índices latinos minúsculos referem-se à uma particular direção espacial (1,2 ou 3), não somando se repetidos. Adota-se o sistema de unidades em que $c = 8\pi G = 1$.

Pode-se ainda, tanto na TEC como na TRG, adotar hipóteses específicas para a estrutura métrica do espaço-tempo:

c) Os modelos considerados são espacialmente homogêneos, admitindo um grupo de isometrias simplesmente transitivo sobre hipersuperfícies tipo espaço tridimensionais. Os possíveis espaços homogêneos a três dimensões são descritos na classificação de Bianchi-Behr^[68]. Nesses espaços existe uma base de 1-formas invariantes $\{\omega^\lambda\}$, duais aos geradores de isometrias, ou vetores de Killing (para os quais uma representação é dada, por exemplo em Ryan, Sheppley^[50a]), tais que

$$d\omega^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^\lambda \omega^\mu \wedge \omega^\nu, \quad (2.3)$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu}{}^\lambda$ são as constantes de estrutura da álgebra do grupo de isometrias. Existe uma base para o espaço vetorial de Killing em

que as constantes de estrutura assumem a forma canônica^[35,69]:

$$\epsilon_{\mu\nu}^{\lambda} = \epsilon_{\mu\nu\rho} M^{\rho\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda} A_{\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda} A_{\mu} . \quad (2.4)$$

Acima, $M^{\rho\lambda}$ é matriz simétrica e A_{μ} é um vetor, tais que

$$M^{\rho\lambda} = \text{diag} (N^1, N^2, N^3) , \quad (2.5)$$

$$A_{\mu} = (a, 0, 0) , \quad (2.6)$$

sujeitos à restrição $N_1 a = 0$, imposta pela identidade de Jacobi.

Distintos espaços homogêneos são obtidos pela seleção de distintos conjuntos de quatro parâmetros (a, N^1, N^2, N^3) apresentados na Tabela 3.2.1. Denominam-se de modelos classe A aqueles para os quais $\epsilon_{\alpha\beta}^{\beta} = 0$, e de classe B se $\epsilon_{\alpha\beta}^{\beta} \neq 0$.

TABELA 3.2.1

Classificação de Bianchi-Behr

Classe →	A						B				
Tipo Parametros → ↓	I	II	VI ₀	VII ₀	VIII	IX	V	IV	III	VI _h	VII _h
a	0	0	0	0	0	0	+	+	+	$\sqrt{-h}$	\sqrt{h}
N^1	0	+	0	0	-	+	0	0	0	0	0
N^2	0	0	-	+	+	+	0	0	-	-	+
N^3	0	0	+	+	+	+	0	+	+	+	+

d) Existe uma base de 1-formas $\{\theta^A\}$, que definem

o referencial inercial local, tal que

$$\theta^0 = \omega^0 = dt \quad (2.7)$$

$$\theta^i = R_i(t)\omega^i \equiv (R\omega)^i \quad (2.8)$$

onde $\{\omega^i\}$ é uma base de 1-formas invariantes de algum espaço homogêneo a três dimensões, satisfazendo (2.3). Devido à homogeneidade espacial, as três funções R_i dependem apenas do tempo cósmico t .

d) No referencial inercial local dado em (2.7,8), a métrica toma a forma

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B, \quad (2.9)$$

onde $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski.

O estudo de cosmologias da TEC requer hipóteses independentes tanto para a estrutura métrica, quanto para a torção do espaço-tempo. Adotando-se a descrição clássica de spin, apresentada na seção 2.2, encontram-se as seguintes componentes não nulas dos tensores de torção modificada, torção e spin:

$$\mathcal{T}_{ij}^0 = T_{ij}^0 = S_{ij}^0 = \varepsilon_{ij\alpha} S^\alpha(t). \quad (2.10)$$

No referencial local (2.7,8), a quadrivelocidade é ortogonal às superfícies de homogeneidade, e o vetor de spin é tipo-espaço. Supõe-se, nesse trabalho, que suas componentes dependam apenas do tempo cósmico t . Dessa forma, garante-se que os

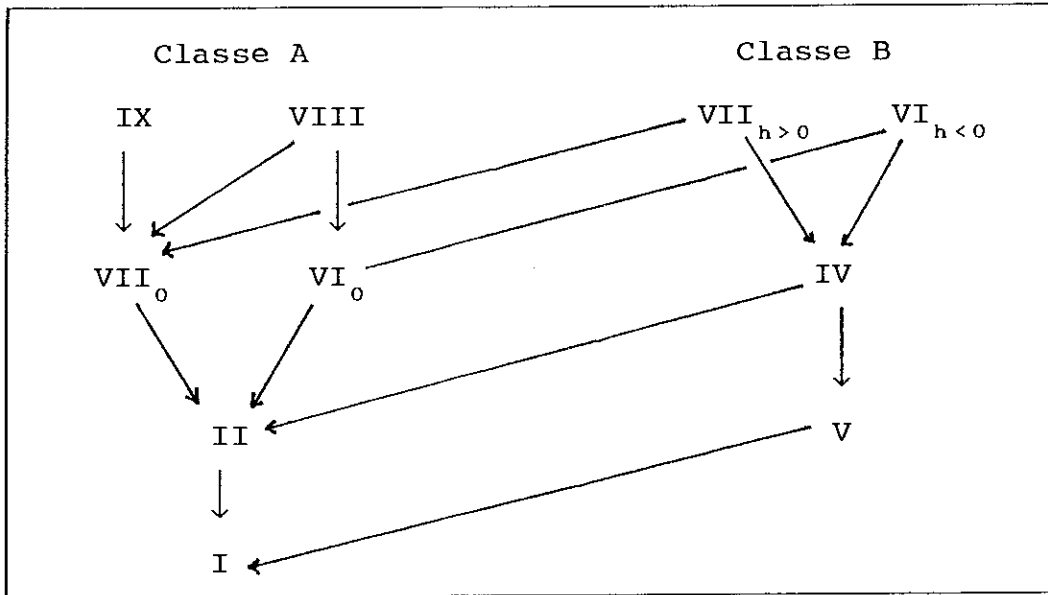
vetores de Killing da métrica são também geradores de simetrias dos tensores de spin e torção. Alternativamente, e de forma mais geral, pode-se supor que os vetores de Killing da métrica o são também para a torção. Da solução das equações de Killing para a torção, $\frac{\ell}{k} T = 0$, obtém-se as componentes não nulas do tensor de torção e sua dependência com as coordenadas espaciais, compatíveis com as simetrias da métrica. Tal abordagem foi utilizada para a discussão de problemas da TEC com simetria esférica e cilíndrica, por Kuchowicz^[36,37].

Admitindo-se a existência de três funções de escala $R_i(t)$ distintas, não há razão para se supor que o vetor de spin possua apenas uma componente, alinhada ao longo de uma das tetradas espaciais, como se faz na maioria dos trabalhos conhecidos. Pode-se admitir, em princípio, que o vetor de spin tem três componentes não nulas no referencial local, deixando que as equações de campo restrinjam as componentes compatíveis com as simetrias geométricas dos tipos de Bianchi.

As equações de estrutura de Cartan permitem a determinação unificada das geometrias de Bianchi em U_4 , no sentido de que as componentes do tensor de Ricci são descritas em função dos parâmetros (a, N^1, N^2, N^3) , que definem as constantes de estrutura. O cálculo detalhado das curvaturas é apresentado no Apêndice B. Pela seleção de um dado conjunto de seus valores, conforme a Tabela 3.2.1, obtém-se automaticamente as curvaturas da geometria escolhida. Por outro lado, pode-se também tratá-los em conjunto, passando-se de um tipo de Bianchi a outro por deformações contínuas nos parâmetros, como mostra o diagrama de especialização na Figura 3.2.1, devido a Jantzen^[70].

FIGURA 3.2.1

Diagrama de especialização de geometrias de Bianchi



3.3 EQUAÇÕES DE CAMPO PARA UNIVERSOS DE BIANCHI EM U_4

Antes de discutir o sistema de equações de campo, informações de interesse são obtidas por meio das leis de conservação da TEC. Como discutido na seção 2.3, ocorre a conservação da conservação do spin sempre que os elementos de volume do fluido movimentam-se em todo o espaço-tempo com aceleração nula. De fato, esse é o caso para todas os modelos de Bianchi ortogonais em U_4 , com torção da forma (2.10), pois $\Gamma_{001} = 0$, como determinado no Apêndice B. Dessa forma, o tensor momento-energia fenomenológico para o fluido perfeito com spin, dado em (2.3.5), toma a forma conhecida

$$T_{AB} = \text{diag} (\rho, p, p, p) , \quad (3. 1)$$

onde, devido a hipótese de homogeneidade, ρ e p são funções apenas do tempo cósmico t .

A lei de conservação do spin (2.4.4) torna-se

$$\dot{S}^m + S^m (\ln R_1 R_2 R_3) \dot{} = 0 , \quad (3. 2)$$

que tem por solução

$$S^m = \frac{S_0^m}{R_1 R_2 R_3} , \quad S_0^m = \text{constante.} \quad (3. 3)$$

É importante observar que, em certos trabalhos que discutem soluções para os tipos I e IX, admite-se que a lei de conservação do spin pode ser violada^[53,55], impondo-se, em lugar de (3.3), uma relação da forma $S^m \propto R^{-\delta}$, $\delta \neq 3$. Tais soluções são inconsistentes com as equações de campo.

O balanço de energia dado em (2.4.14), permite escrever

$$\dot{\rho} + (\ln R_1 R_2 R_3) \dot{} (\rho + p) = 0 , \quad (3. 4)$$

e admitindo uma equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, obtém-se

$$\rho = \frac{\rho_0}{(R_1 R_2 R_3)^\gamma} , \quad \rho_0 = \text{constante.} \quad (3. 5)$$

Verificando que o lado esquerdo de (2.4.16) é nulo, pois $p = p(t)$ e $u^A = \delta_0^A$, encontra-se

$$R^{(mj)}_{0i} S^i = 0 . \quad (3. 6)$$

As relações algébricas (3.6) são vínculos necessários entre a torção e a curvatura para que, simultâneamente, o spin seja conservado e não existam gradientes de pressão.

A título de exemplo, considere-se a forma assumida por (3.6) no caso dos modelos da classe A [c.f.(B.14,21)]

$$N^i S_0^i (H_j + H_m - 2H_1) R_1^2 + S_0^i (H_m - H_j) (R_m^2 N^m - R_j^2 N^j) = 0, \quad (3.7)$$

idênticamente satisfeitas se a) $N^i S_0^i = 0$; b) $S_0^i (H_m - H_j) = 0$.

Tais relações indicam restrições sobre: a) as componentes do vetor de spin compatíveis com as simetrias específicas de cada tipo de Bianchi; b) as componentes admissíveis do vetor de spin e a cinemática do fluido. São relações originadas do acoplamento entre o spin e a curvatura na equação de Euler da TEC, e melhor detalhadas através das equações de campo, discutidas à seguir.

As expressões das componentes do tensor de Ricci, determinadas no referencial local (2.7,8), são [c.f. (B.20,24)]:

$$R_{00} = - (\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 2S^2) , \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} R_{11} = & \dot{H}_1 + H_1 (H_1 + H_j + H_m) + \\ & + \frac{1}{2 (R_1 R_j R_m)^2} \left[(N^i R_1^2)^2 - (N^j R_j^2 - N^m R_m^2)^2 \right] - \\ & - 2 \left[\left(\frac{A_1}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{A_j}{R_j} \right)^2 + \left(\frac{A_m}{R_m} \right)^2 \right] , \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$R_{0i} = R_{i0} = \frac{N^i S^i R_i}{R_j R_m} - (2H_i - H_j - H_m) \frac{A_i}{R_i} + \varepsilon_{ijm} \left(S^j \frac{A_m}{R_m} - S^m \frac{A_j}{R_j} \right), \quad (3.10)$$

$$R_{ij} = \varepsilon_{ijm} [\dot{S}^m + S^m (2H_i + H_m)] + \frac{A_m}{R_m} \left(\frac{N^m R_m}{R_i R_j} - \frac{N^i R_i}{R_j R_m} - \frac{N^j R_j}{R_i R_m} \right), \quad (3.11)$$

$$R_{ji} = \varepsilon_{jim} [\dot{S}^m + S^m (2H_j + H_m)] + \frac{A_m}{R_m} \left(\frac{N^m R_m}{R_i R_j} - \frac{N^i R_i}{R_j R_m} - \frac{N^j R_j}{R_i R_m} \right). \quad (3.12)$$

É importante notar que

$$R_{ij} - R_{ji} = 2 \varepsilon_{ijm} [\dot{S}^m + S^m (H_i + H_j + H_m)]. \quad (3.13)$$

Nas expressões acima $S^2 = -S^\alpha S_\alpha$, e os parâmetros de Hubble são definidos por

$$H_i = \frac{\dot{R}_i}{R_i}. \quad (3.14)$$

Cálculos abrangentes dessa natureza existentes na literatura têm forma mais complexa por envolverem a manipulação dos coeficientes de conexão, como se verifica em Heckman, Schuking^[71] ou em Roque, Ellis^[72]. Expressões semelhantes foram apresentadas por Lorenz^[63] e Lorenz-Petzold^[73], para modelos de Bianchi classe A na TEC e na TRG, respectivamente. Ressalte-se, no entanto, que

na Ref. [63] a expressão para R_{0i} está incorreta.

Tomando o traço das equações de campo da TEC, devido a forma simples assumida pelo tensor fenomenológico, pode-se escrever (1.5.10) na forma

$$R_{00} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) , \quad (3.15a)$$

$$R_{1i} = -\frac{1}{2} (\rho - p) , \quad (3.15b)$$

$$R_{0i} = 0 , \quad (3.16a)$$

$$R_{ij} = 0 , \quad (3.16b)$$

$$R_{ij} - R_{ji} = 0 . \quad (3.17)$$

que constituem um conjunto de treze equações acopladas.

As quatro equações (3.15) são equações diferenciais de segunda ordem, envolvendo três funções de escala $R_i(t)$, a densidade de energia $\rho(t)$ e a pressão isotrópica $p(t)$, se conhecido o quadrado do vetor densidade de spin. Uma equação de estado, suposta da forma $p = (\gamma - 1)\rho$, torna-se necessária para solucionar o problema. Tais equações são reescritas como abaixo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33}) = \\ &= H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3 - \frac{3a^2}{R_1^2} + \frac{S_0^2}{(R_1 R_2 R_3)^2} + \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$+ \frac{1}{4(R_1 R_2 R_3)^2} \left[2N^1 N^2 (R_1 R_2)^2 + 2N^1 N^3 (R_1 R_3)^2 + 2N^2 N^3 (R_2 R_3)^2 - (N^1 R_1^2)^2 - (N^2 R_2^2)^2 - (N^3 R_3^2)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6} (3R_{00} - R_{11} - R_{22} - R_{33}) = \\ &= -\frac{2}{3} [\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2] - \frac{1}{3} [H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3] + \\ &+ \frac{a^2}{R_1^2} + \frac{S_0^2}{(R_1 R_2 R_3)^2} - \frac{1}{12(R_1 R_2 R_3)^2} \left[2N^1 N^2 (R_1 R_2)^2 + \right. \\ &\left. + 2N^1 N^3 (R_1 R_3)^2 + 2N^2 N^3 (R_2 R_3)^2 - (N^1 R_1^2)^2 - (N^2 R_2^2)^2 - (N^3 R_3^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} R_{11} - R_{22} &= \dot{H}_1 - \dot{H}_2 + (H_1 - H_2)\theta + \\ &+ \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left[(N^1 R_1^2)^2 - (N^2 R_2^2)^2 - N^1 N^3 (R_1 R_3)^2 + N^2 N^3 (R_2 R_3)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.18c)$$

$$\begin{aligned} R_{22} - R_{33} &= \dot{H}_2 - \dot{H}_3 + (H_2 - H_3)\theta + \\ &+ \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left[(N^2 R_2^2)^2 - (N^3 R_3^2)^2 - N^1 N^2 (R_1 R_2)^2 + N^1 N^3 (R_1 R_3)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.18d)$$

onde a expansão θ é dada por

$$\theta = H_1 + H_2 + H_3 . \quad (3.19)$$

As três equações (3.17) reproduzem a lei de conservação do momento angular intrínseco na TEC, permitindo a so-

lução das funções $S^m(t)$ na forma (3.3) [c.f. (3.2) e (3.13)].

Finalmente, as equações (3.16) contituem conjunto de seis equações algébricas, relacionando três parâmetros de Hubble H_i e três componentes do vetor densidade de spin $S^i(t)$, para cada conjunto de parâmetros (a, N^1, N^2, N^3) que caracterizam os diferentes tipos de Bianchi. Explicitamente, fazendo uso de (3.12) em (3.10,11), encontra-se

$$R_{01} = (H_2 + H_3 - 2H_1) \frac{a}{R_1} + \frac{N^1 S^1 R_1}{R_2 R_3} = 0 , \quad (3.20a)$$

$$R_{02} = S^3 \frac{a}{R_1} + \frac{N^2 S^2 R_2}{R_1 R_3} = 0 , \quad (3.20b)$$

$$R_{03} = - S^2 \frac{a}{R_1} + \frac{N^3 S^3 R_3}{R_1 R_2} = 0 , \quad (3.20c)$$

$$R_{12} = S^3 (H_1 - H_2) = 0 , \quad (3.21a)$$

$$R_{13} = - S^2 (H_1 - H_3) = 0 , \quad (3.21b)$$

$$R_{23} = S^1 (H_2 - H_3) - \frac{a}{R_1^2} \left(N^2 \frac{R_2}{R_3} + N^3 \frac{R_3}{R_2} \right) = 0 . \quad (3.21c)$$

que são consistentes com (3.7) para os modelos da classe A.

Claramente, as relações (3.20) evidenciam que uma dada estrutura de simetrias geométricas, isto é, um dado conjunto de parâmetros (a, N^1, N^2, N^3) , restringe as possíveis componentes do vetor de spin compatíveis com aquela simetria. Por outro lado, as relações (3.21) evidenciam que, dada uma estrutura para

o vetor de spin compatível com a simetria geométrica, as cinemáticas admissíveis para o fluido são restritas. Em consequência, a análise desse conjunto de vínculos deve preceder a solução do sistema de equações diferenciais (3.18), que determina a forma final das soluções.

3.4 ESTRUTURAS DO VETOR DE SPIN E CINEMÁTICAS ADMISSÍVEIS

Os parâmetros cinemáticos de interesse são a expansão θ dada por (3.19), as componentes do tensor de deformação

$$\sigma_{11} = \frac{1}{3} (H_j + H_m - 2H_1) , \quad (4. 1)$$

e a deformação

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - H_1H_2 - H_1H_3 - H_2H_3) . \quad (4. 2)$$

As consequências das equações (3.20,21) são detalhadas separadamente para os modelos classe A e B, nas Tabelas 3.4.1 e 3.4.2, respectivamente.

Com relação à Tabela 3.4.1, pode-se observar que:

a) nem todas as possibilidades podem ser realizadas, pois ainda resta satisfazer o conjunto de equações (3.18) que, por exemplo, não é compatível com os modelos tipo II, dado que as equações (3.18c,d) implicam $R_1 = 0$, impedindo a existência de soluções geradas por fluido perfeito com spin; b) todas as soluções anisotrópicas são localmente rotacionalmente simétricas, com o ve-

tor de spin alinhado na direção de anisotropia; c) soluções tipo VIII/IX não são compatíveis com uma distribuição de spins alinhados, devendo-se, para obter soluções da TEC nessa classe de modelos, adotar como fonte um fluido perfeito com distribuição aleatória de spins, como se mostra no Capítulo 6, ou introduzir algum mecanismo compensador ao alinhamento de spins, como um campo eletromagnético, discutido no Capítulo 7.

TABELA 3.4.1

Configuração do vetor de spin e cinemática dos modelos classe A

Tipo	Vetor de spin	Parâmetros de Hubble	Parâmetros Cinemáticos
I	$s^1 \neq 0, s^2 \neq 0, s^3 \neq 0$ $s^1 = 0, s^j \neq 0, s^m \neq 0$ $s^1 \neq 0, s^j = 0, s^m = 0$	$H_1 = H_2 = H_3 = H$	$\theta = 3H$ $\sigma^2 = 0$
	$s^1 \neq 0, s^j = 0, s^m = 0$	$H_1 \neq H_j = H_m = H$	$\theta = H_1 + 2H$ $\sigma^2 = 1/3 (H_1 - H)^2$
II	$s^1 = 0, s^2 \neq 0, s^3 \neq 0$ $s^1 = 0, s^2 \neq 0, s^3 = 0$ $s^1 = 0, s^2 = 0, s^3 \neq 0$	$H_1 = H_2 = H_3 = H$	$\theta = 3H$ $\sigma^2 = 0$
	$s^1 = s^2 = 0, s^3 \neq 0$ $s^1 = s^3 = 0, s^2 \neq 0$	$H_1 = H_2 = H \neq H_3$ $H_1 = H_3 = H \neq H_2$	$\theta = H_1 + 2H, 1=2,3$ $\sigma^2 = 1/3 (H_1 - H)^2$
VI ₀ VII ₀	$s^1 \neq 0, s^2 = s^3 = 0$	$H_1 = H_2 = H_3 = H$	$\theta = 3H$ $\sigma^2 = 0$
		$H_1 \neq H_2 = H_3 = H$	$\theta = H_1 + 2H$ $\sigma^2 = 1/3 (H_1 - H)^2$
VIII IX	$s^1 = s^2 = s^3 = 0$		

Com relação à Tabela 3.4.2, deve-se observar que sugere serem isotrópicos todos os modelos de Bianchi tipo V. No

entanto, um contra-exemplo é exibido por Batakis, Tsoubelis^[56], que fazem uso de de uma forma particular da matriz de automorfismos associada ao grupo Bianchi tipo V. Um automorfismo, de forma rudimentar, consiste de uma transformação da base para o

TABELA 3.4.2

Configuração do vetor de spin e cinemática dos modelos classe B

Tipo	Vetor de spin	Parâmetros de Hubble	Parâmetros Cinemáticos
V	$s^1 \neq 0, s^2 = s^3 = 0$	$H_1 = H_2 = H_3 = H$	$\theta = 3H$ $\sigma^2 = 0$
IV	$s^1 \neq 0, s^2 = s^3 = 0$	$H_2 + H_3 = 2H_1$ $H_2 - H_3 = \frac{aN^3 R_3^2}{s_0^1 R_1}$	$\theta = 3H_1$ $\sigma_{11} = 0$ $\sigma_{22} = -\sigma_{33} = \frac{-aN^3 R_3^2}{2s_0^1 R_1}$
III VI _h	$s^1 \neq 0, s^2 = s^3 = 0$	$H_2 + H_3 = 2H_1$ $H_2 - H_3 = \frac{aN^3}{s_0^1 R_1} (N^3 R_3^2 - N^2 R_2^2)$	$\theta = 3H_1$ $\sigma_{11} = 0$ $\sigma_{22} = -\sigma_{33} = \frac{-aN^3}{2s_0^1 R_1} (N^3 R_3^2 - N^2 R_2^2)$
VII _h	$s^1 \neq 0, s^2 = s^3 = 0$	$H_1 = H_2 = H_3 = H$	$\theta = 3H$ $\sigma^2 = 0$
		$H_2 + H_3 = 2H_1$ $H_2 - H_3 = \frac{aN^3}{s_0^1 R_1} (N^3 R_3^2 - N^2 R_2^2)$	$\theta = 3H_1$ $\sigma_{11} = 0$ $\sigma_{22} = -\sigma_{33} = \frac{-aN^3}{2s_0^1 R_1} (N^3 R_3^2 - N^2 R_2^2)$

espaço vetorial de Killing que preserva a álgebra do grupo de simetrias. Para o caso Bianchi V, as 1-formas invariantes em

(2.8) satisfazem $d\omega^1 = 0$, $d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^3$. Uma nova base, definida por $\overset{*}{\omega}^1 = \omega^1$, $\overset{*}{\omega}^2 = \omega^2 + \alpha\omega^3$, $\overset{*}{\omega}^3 = \omega^3$, como na Ref. [56], satisfaz a mesma álgebra. Um automorfismo dependente do tempo consiste numa transformação da base para o espaço de vetores de Killing que preserva os coeficientes de conexão espaciais^[70,72], ao preservar a álgebra do grupo em cada instante t .

A análise contida nas Tabelas 3.4.1 e 3.4.2 não é, portanto, a mais geral, constituindo objeto de trabalho em desenvolvimento^[74].

CAPÍTULO 4

CLASSES DE MODELOS COSMOLÓGICOS BIANCHI TIPO I NA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN E NA RELATIVIDADE GERAL

4.1 INTRODUÇÃO

Entre os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos mais extensivamente estudados, tanto na Teoria da Relatividade Geral (TRG) como na Teoria de Einstein-Cartan (TEC), está a classe de modelos de Bianchi tipo I. Tal fato se deve à estrutura plana de sua seção espacial e à forma comparativamente simples adquirida pelas equações de campo.

Tomando um fluido perfeito (sem spin) como fonte da curvatura, com a densidade de energia ρ e a pressão p relacionadas por uma equação de estado $p = (\gamma-1) \rho$, todos os modelos com um grupo de simetrias de seis parâmetros do tipo I ($G_6 I$) foram resolvidos na TRG^[75]. Soluções com $G_4 I$ foram discutidas por Stewart, Ellis^[76] e Vajk, Eltgroth^[77]. Tais trabalhos mostram

soluções paramétricas para os fatores de escala, representando a correspondente solução para o tempo cosmológico por meio de uma integral não resolvida para valores arbitrários de γ . Modelos com G_3I foram exibidos por Jacobs^[78], para valores de γ contidos numa sequência infinitamente denumerável. As soluções com G_4I são uma especialização daquelas admitindo G_3I ^[49].

No contexto da TEC, os modelos de Bianchi tipo I constituíram a maioria das soluções exatas exibidas na literatura. Os primeiros resultados obtidos previam a eliminação da singularidade cósmica, caso contribuições dos termos de spin predominem sobre os termos de massa-energia, em estágios iniciais da evolução do universo. Soluções admitindo G_6I geradas por fluido perfeito foram construídas por Trautman^[18] para poeira com spin ($\gamma = 1$) e por Demianski et al.^[23], que estenderam a solução plana de De Sitter ($\gamma = 0$) para a TEC. Kopczynski^[19] e Tafel^[51] estabeleceram a solução com G_4I para poeira com spin, enquanto Kuchowicz^[52,53] determinou-as para sequências denumeráveis de valores de γ (não coincidentemente, como mostrado na seção 4.5, as mesmas sequências examinadas por Jacobs^[78]). Soluções com G_3I , sobre S_3 não são permitidas em presença de spins alinhados, como se verifica na tabela 3.4.1.

Investigações posteriores conduziram à evidências para a ocorrência de expansão inflacionária dirigida por termos de spin. Gasperini^[22] demonstrou-a para um fluido perfeito com distribuição aleatória de spins. Bradas et al.^[24,25] e o autor deste trabalho^[26], mostraram-na para uma distribuição de spins polarizados. No entanto, como se discute no Capítulo 5, as solu-

ções de Bradas et al fazem uso do tensor de Ray-Smalley e não são compatíveis com o postulado métrico da TEC^[27]. Portanto, a previsão de uma fase inflacionária na evolução de modelos Bianchi I, que admitem um fluido perfeito com spins polarizados, é consistentemente demonstrada nessa tese.

Neste capítulo, constroem-se todas as soluções exatas do tipo Bianchi I com métrica diagonal, tanto na TEC como na TRG, geradas por um fluido perfeito que satisfaz a equação de estado $p = (\gamma - 1) \rho$. A solução geral é unificada para o problema contém quatro parâmetros reais e contínuos. Dois deles relacionados à propriedades físicas do fluido: o fator de proporcionalidade entre a pressão e a densidade, e um parâmetro associado ao spin das partículas. Dois outros parâmetros determinam a dimensão do grupo de simetrias. Assim, o subconjunto da solução geral fisicamente significativo é aquele em que $1 \leq \gamma \leq 2$. Se o parâmetro ligado ao spin é nulo, obtém-se as soluções da TRG.

Soluções exatas continuamente parametrizadas fornecem uma visão unificada de diferentes classes de modelos, evidenciando suas propriedades físicas, e permitindo comparar a evolução de modelos em diferentes classes.

4.2 AS EQUAÇÕES DE CAMPO

Para modelos Bianchi tipo I, $N^1 = N^2 = N^3 = a = 0$, e as equações de campo (3.3.18) reduzem-se ao conjunto de equações acopladas:

$$\rho = H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3 + S^2 , \quad (2. 1)$$

$$p = - \frac{2}{3} (\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) - \quad (2. 2)$$

$$- \frac{1}{3} (H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3) + S^2 ,$$

$$\dot{H}_1 - \dot{H}_2 + (H_1 - H_2) \theta = 0 , \quad (2. 3)$$

$$\dot{H}_2 - \dot{H}_3 + (H_2 - H_3) \theta = 0 . \quad (2. 4)$$

As equações (3.3.20) são idênticamente satisfeitas e de (3.3.21) são obtidas as relações:

$$(H_1 - H_j) S^m = 0 . \quad (2. 5)$$

Se apenas uma componente do vetor de spin existe, por exemplo S^1 , tem-se $H_1 = H_j = H_m$ ou $H_1 \neq H_j = H_m$, enquanto $H_1 \neq H_j \neq H_m$ não é permitida em presença de spins alinhados. Assim, soluções diagonais com $G_3 I$ são proibidas na TEC, e o alinhamento do vetor de spin ao longo de uma dada direção implica na aquisição de simetria rotacional em torno daquela direção.

Introduzindo o fator de escala principal

$$R^3 = R_1 R_2 R_3 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 3 \frac{\dot{R}}{R} , \quad (2. 6)$$

segue-se de (2.3) e (2.4) que

$$H_1 - H_2 = \frac{a}{R^3} , \quad (2.7)$$

$$H_2 - H_3 = \frac{b}{R^3} , \quad (2.8)$$

onde a e b são parâmetros reais. As soluções da TEC, no entanto, requerem que pelo menos um desses parâmetros seja nulo. Uma vez determinado o fator principal de escala, as equações acima permitem o cálculo dos fatores de escala métricos:

$$R_1 = R \exp \left(\frac{b + 2a}{3} \right) \int \frac{dt}{R^3} , \quad (2.9a)$$

$$R_2 = R \exp \left(\frac{b - a}{3} \right) \int \frac{dt}{R^3} , \quad (2.9b)$$

$$R_3 = R \exp - \left(\frac{2b + a}{3} \right) \int \frac{dt}{R^3} . \quad (2.9c)$$

As equações de campo restantes resolvem a densidade de energia ρ e a pressão p nas formas

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{\mu}{R^6} , \quad (2.10)$$

$$p = - 2 \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{\mu}{R^6} , \quad (2.11)$$

onde o sinal da constante

$$\mu = \left[\sum_{i=1}^3 (S_o^i)^2 \right] - \left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{3} \right) = (S^2 - \sigma^2) R^6 , \quad (2.12)$$

mede a predominância dos efeitos de spin sobre aqueles devidos ao escalar de deformação σ^2 , dado em (3.4.2), ou vice-versa. Embora ambos decresçam com R^{-6} , o comportamento das soluções depende do sinal de μ .

Para que as equações (2.10,11) constituam um conjunto completo com relação às funções ρ e R , torna-se necessária uma equação de estado $p = p(\rho)$. Adotando $p = (\gamma-1)\rho$, a equação diferencial que determina o fator principal de escala é

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{\gamma - 2}{2}\right)\frac{\mu}{R^4} = 0, \quad (2.13)$$

que tem por primeira integral

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma-2} \left[1 - \frac{\mu}{3R_0^4} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(2-\gamma)}\right], \quad (2.14)$$

onde $p_0^2 = R_0^{3\gamma-2}$ é uma constante de integração específica para cada conteúdo material tomado como fonte para os modelos.

Usando (2.10) e (2.14) a densidade de energia é escrita como.

$$\rho = \frac{3}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \quad (2.15)$$

sendo positiva para todo valor de γ se R é uma função real e positiva. As condições de energia da TRG^[79], $\rho > 0$ e $|p| < \rho$, são satisfeitas pela adequada seleção do domínio de γ .

Note que modelos da TEC são obtidos introduzindo-se quantidades efetivas $\rho_{ef} = (\rho - \mu/R^6)$ e $p_{ef} = (p - \mu/R^6)$, nas e-

quações para os modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) planos da TRG [c.f. (2.10,11)]. Segue-se que ρ_{ef} pode ser negativa se $\mu > 0$ e $\gamma < 2$, permitindo evitar as singularidades características dessa teoria. O fator principal de escala apresenta um mínimo, enquanto a densidade tem um valor máximo, dados por

$$R_{\min} = \left(\frac{\mu}{3 R_0^{3\gamma-2}} \right)^{\frac{1}{3(2-\gamma)}},$$

$$\rho_{\max} = \left(\frac{3 R_0^{3\gamma-2}}{\mu^{\gamma/2}} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}.$$
(2.16)

4.3 EXPANSÃO ACELERADA DIRIGIDA POR TERMOS DE SPIN

Pode-se estudar o comportamento da expansão cósmica inicial, tomando a expressão

$$\frac{\ddot{R}}{R} = - \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{3\gamma - 2}{2} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + \frac{2\mu}{3R^6} > 0, \quad (3.1)$$

se $\mu > 0$, $\gamma < 2$. Uma expansão não-singular e inflacionária ocorre, em época suficientemente primitiva da história do universo, se o conteúdo de energia é dominado por termos de spin. A evolução dos modelos passa por três diferentes fases inflacionárias: a) uma fase de super-inflação ($\ddot{R} > 0$, $\dot{H} > 0$), $R_{\min} < R < R_{\text{crit}}$, $\rho_{\max} > \rho > \rho_{\text{crit}}$, onde os valores críticos são alcançados quando $\dot{H} = 0$, respectivamente dados por

$$R_{\text{crit}} = \left(\frac{2 \mu}{3 \gamma R_0^{3\gamma-2}} \right)^{\frac{1}{3(2-\gamma)}}, \quad (3. 2)$$

$$\rho_{\text{crit}} = 3R_0^{3\gamma-2} \left(\frac{3 R_0^{3\gamma-2}}{2 \mu} \right)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}};$$

b) um período de inflação exponencial ($\dot{R} > 0$, $\dot{H} = 0$) então ocorre; c) a fase inflacionária cessa quando os valores

$$R_{\text{final}} = \left(\frac{4 \mu}{3(3\gamma-2) R_0^{3\gamma-2}} \right)^{\frac{1}{3(2-\gamma)}}, \quad (3. 3)$$

$$\rho_{\text{final}} = 3R_0^{3\gamma-2} \left(\frac{3(3\gamma-2) R_0^{3\gamma-2}}{4 \mu} \right)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}},$$

são atingidos, ocorrendo inflação tipo lei de potência ($\dot{R} > 0$, $\dot{H} < 0$) se $R_{\text{crit}} < R < R_{\text{final}}$, $\rho_{\text{crit}} > \rho > \rho_{\text{final}}$. Se $R > R_{\text{final}}$, ocorre evolução não-inflacionária ($\dot{R} < 0$, $\dot{H} < 0$).

A evolução dos modelos considerados, que admitem matéria com spins polarizados, coincide com a obtida por Gasperini^[22], para modelos planos com matéria não polarizada. Numa distribuição aleatória de spins, $\langle S^1 \rangle = 0$, $\langle S^2 \rangle \neq 0$, e (2.5) é identidade, restando apenas as médias quadráticas em (2.1,2).

Uma expansão inflacionária fisicamente interessante requer um fator de inflação $R_{\text{final}}/R_{\text{min}} \geq 10^{30}$ para resolver os problemas do modelo padrão da TRG^[80]. Assim como no trabalho de Gasperini, tal condição exige que $\frac{4}{3\gamma-2} \geq 10^{90(2-\gamma)}$, satisfeita apenas no intervalo $2/3 < \gamma < 1$. Conclui-se que uma fase inflacionária realista não é obtida mesmo quando a distri-

buição de spins é polarizada, respondendo-se negativamente à sugestão da Ref. [22] para superar as dificuldades lá encontradas.

4.4 A SOLUÇÃO GERAL

Com o intuito de preservar a generalidade e enfatizar analogias na estrutura da evolução de modelos gerados por diferentes distribuições de matéria, isto é, diferentes concepções para o substrato cosmológico e sua cinemática, é conveniente generalizar as equações. (2.13,14) para as formas:

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma - 2}{2} \right) \dot{R}^2 + B(q_1)R^m = 0, \quad (4.1)$$

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma-2} \left[1 - \frac{2B(q_1)R_0^m}{3\gamma + m - 2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2-m-3\gamma} \right], \quad (4.2)$$

onde $B(q_1)$ é uma função de parâmetros presentes em cada modelo, e m é um expoente característico de cada caso. A evolução temporal do fator de escala para diversas classes universos é determinada por uma equação diferencial da forma (4.1). Alguns exemplos, entre outros porventura existentes, são:

a) Os modelos de FRW da TRG, com parâmetro de curvatura $k = 0, \pm 1$, onde $B(\gamma, k) = \left(\frac{3\gamma - 2}{2} \right)k$ e $m = 0$, a serem discutidos na seção 4.6;

b) Os modelos de FRW planos ($k = 0$) da TRG, com fluido perfeito e constante cosmológica (Λ), já completamente resolvi-

dos^[49], para os quais $B(\gamma, \Lambda) = -\frac{\gamma}{2} \Lambda$ e $m = 2$;

c) Os modelos do tipo Bianchi I da TRG ($S^1=0$), onde $B(\gamma, a, b) = \left(\frac{\gamma - 2}{2}\right) \left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}\right)$, $m = -4$, que admitem $G_6 I$ se $a = b = 0$, $G_4 I$ se $a = 0$ ou $b = 0$, e $G_3 I$ se $a \neq 0$ e $b \neq 0$;

d) Os modelos de FRW planos na TEC ($\sigma^2 = 0$), para os quais $B(\gamma, S_0^1) = \left(\frac{\gamma - 2}{2}\right) \left[\sum_{i=1}^3 (S_0^i)^2\right]$ e $m = -4$;

e) Modelos Bianchi tipo I na TEC, caracterizados por $B(\gamma, \mu) = \left(\frac{\gamma - 2}{2}\right) \mu$ e $m = -4$, que levam a diferentes classes de modelos conforme μ seja positivo, negativo ou nulo.

f) Soluções para a evolução da seção bidimensional de modelos de Szekeres na TRG, com fluido perfeito e campo magnético^[81], são obtidas com $B(\gamma, m_0) = -\frac{1}{2} m_0^2$, e $m = -2$.

g) Soluções cosmológicas da TRG, tendo por fonte fluidos que seguem termodinâmica não usual^[82], são obtidas caso $B(\gamma, B_0) = (1 - \gamma) B_0$ e $m = -1$.

h) Soluções para cosmologias de Wesson^[83], são obtidas de equações diferenciais na forma (4.1).

A determinação da solução geral de (4.1) é feita introduzindo-se o "fator de escala auxiliar"

$$Y = 1 - \frac{2B(q_1)R_0^m}{3\gamma + m - 2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2-m-3\gamma}, \quad (4.3)$$

e considerando o problema inverso da determinação de $t(Y)$. De (4.2) tem-se

$$\frac{dt}{dY} = C(m, q_1) Y^{A-1} (1 - Y)^{-1/2}, \quad (4.4)$$

onde

$$A(\gamma, m) = \frac{1}{2} \frac{3\gamma}{3\gamma + m - 2}, \quad (4.5)$$

e

$$C(m, q_1) = \frac{R_0^{1-mA}}{3\gamma + m - 2} \left(\frac{3\gamma + m - 2}{2B(q_1)} \right)^A. \quad (4.6)$$

Sob a condição inicial $Y_0 = 0$, e garantindo que $Y < 1$, (4.4) é integrada sob a forma de uma função beta incompleta, expressa por funções hipergeométricas de Gauss^[84]

$$\begin{aligned} t(Y) &= C \int_0^Y Y^{A-1} (1 - Y)^{-1/2} dY = \\ &= \frac{C}{A} Y^A F\left(\frac{1}{2}, A; A + 1; Y\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

A expressão acima é a forma restrita da solução geral, pois para $(1-A) = n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, a função hipergeométrica F não é definida. Em particular, essa forma da solução já fora determinada para cosmologias fechadas de FRW^[69].

Entretanto, a solução geral é obtida direta e independentemente da escolha de condições iniciais ao se verificar que (4.2) é integral primeira para a equação hipergeométrica

$$Y(1 - Y) \frac{d^2 t}{dY^2} + [c - (a + b + 1)Y] \frac{dt}{dY} - ab t = 0, \quad (4.8)$$

com parâmetros $a = 0$, $b = \frac{1}{2} - A$, $c = 1 - A$.

As soluções de (4.8) são ^[84-86]:

$$t(Y) = \alpha_0 + \beta_0 Y^A F\left(\frac{1}{2}, A; A + 1; Y\right), \quad 1 - A \neq n, \quad (4.9a)$$

$$t(Y) = \sigma_{(n)} + \delta_{(n)} \left(- \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(n - 1/2)_{-\nu}}{\nu (n)_{-\nu}} Y^\nu + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n - 1/2)_\nu}{\nu (n)_\nu} Y^\nu + \ln Y \right), \quad 1 - A = n, \quad (4.9b)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$, $\sum_{\nu=1}^{n-1} = 0$ se $n = 1$, e $\alpha_0, \sigma_{(n)}$ são constantes arbitrárias associadas à uma escolha qualquer para a origem da escala de tempo. Determinam-se as constantes β_0 e $\delta_{(n)}$ pela condição de que (4.4) é a derivada de (4.9a,b), obtendo-se

$$\beta_0 = \frac{C}{A}, \quad \gamma \neq \gamma_n = \frac{2}{3} \frac{(n-1)(2-n)}{(2n-1)}, \quad (4.10)$$

$$\delta_{(n)} = 2^{2(1-n)} \frac{[2(n-1)]!}{[(n-1)!]^2} C, \quad \gamma = \gamma_n.$$

As extensões analíticas da solução acima são:

I) A substituição $Y' = 1 - Y$ transforma (4.8) numa equação hipergeométrica com parâmetros $a = 0$, $b = \frac{1}{2} - A$, e $c = \frac{1}{2}$. A solução correspondente é

$$t(Y) = \alpha_1 + \beta_1 (1 - Y)^{1/2} F\left(1 - A, 1/2; 3/2; 1 - Y\right), \quad (4.11)$$

onde α_1 é uma constante arbitrária e

$$\beta_1 = - 2 C; \quad (4.12)$$

II) A substituição $Y' = \frac{1}{Y}$ transforma (4.8) numa equação hipergeométrica com $a = 0$, $b = A$ e $c = A + \frac{1}{2}$, cuja solução é

$$t(Y) = \alpha_2 + \beta_2 Y^{(2A-1)/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1-2A}{2}; \frac{3-2A}{2}; \frac{1}{Y}\right), \quad A \neq n + \frac{1}{2}, \quad (4.13a)$$

$$t(Y) = \bar{\sigma}_{(n)} + \bar{\delta}_{(n)} \left[- \sum_{\nu=1}^n \frac{(n+1/2)_{-\nu}}{\nu(n+1)_{-\nu}} \left(\frac{1}{Y}\right)^{-\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n+1/2)_{\nu}}{\nu(n+1)_{\nu}} \left(\frac{1}{Y}\right)^{\nu} + \ln \frac{1}{Y} \right], \quad A = n + \frac{1}{2}, \quad (4.13b)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$, α_2 , $\sigma_{(n)}$ são constantes arbitrárias e (4.4) determina as constantes complexas

$$\beta_2 = \frac{2i}{2A-1} C, \quad \gamma \neq \gamma_n = \frac{(2n+1)(2-m)}{6n}, \quad (4.14)$$

$$\bar{\delta}_{(n)} = \frac{-i}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} C, \quad \gamma = \gamma_n.$$

Como a solução (4.11) está definida em todo o domínio real para o parâmetro γ , em particular para $1 \leq \gamma \leq 2$, será denominada de solução geral e unificada.

4.5 RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA ENTRE AS SOLUÇÕES

A integral de (4.4) é expressa por meio de funções elementares se A é um número inteiro ou semi-inteiro^[87].

Tal condição gera as seguintes seqüências de valores para γ :

$$\begin{aligned}
 A = p & \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{(n)}^{(a)} = \frac{2-m}{3} \left(\frac{2n}{2n-1} \right), & n = 1, 2, 3, \dots \\ \gamma_{(n)}^{(b)} = \frac{2}{3} (2-m) \left(\frac{1-n}{1-2n} \right), & p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \\
 & \hspace{15em} (5.1) \\
 A = p + \frac{1}{2} & \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{(n)}^{(c)} = \frac{2-m}{6} \left(\frac{2n+1}{n} \right), & n = 1, 2, 3, \dots \\ \gamma_{(n)}^{(d)} = \frac{2-m}{6} \left(\frac{2n-1}{n} \right). & p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

com todas as seqüências satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{(n)}^{a_1} = \frac{2-m}{3}$, onde a_1 é o primeiro valor de γ em cada seqüência. Assim $1 \leq \gamma_n^1 \leq 2$ e $0 \leq \gamma_n^0 \leq 2$ são as seqüências de interesse ao se estudar modelos Bianchi tipo I na TEC ($\mu \neq 0$, $m = -4$). Kuchowicz^[52,53] exibiu tais soluções na TEC, exceto $\gamma = 0$, enquanto Jacobs^[78] determinou-as na TRG. Para quaisquer outros valores de γ não relacionados acima, as soluções são descritas por funções hipergeométricas que podem ser, ou não, uma representação para alguma outra função especial. As últimas não são conhecidas na literatura.

Um mecanismo de recorrência pode ser construído para exibir todas as soluções descritas por funções elementares. Para quaisquer dois valores consecutivos de γ em uma seqüência, os valores de A associados diferem de uma unidade e as soluções correspondentes são descritas por duas funções hipergeométricas contíguas. Entre quaisquer duas dessas funções existe uma relação linear com coeficientes que são funções lineares do argumento da hipergeométrica^[84]. Um critério para selecionar a relação adequada, dentre as quinze relações construídas por Gauss, con-

siste em tomar aquela em que: a) o terceiro parâmetro decresce em uma unidade; b) o primeiro ou o segundo parâmetro aumenta (diminui) de uma unidade se ele toma valores decrescentes (crescentes) numa dada sequência.

A aplicação à uma delas torna o procedimento auto evidente. Para a sequência $\gamma_n^1 = \frac{2n-1}{n}$, existente para os modelos da TEC ($m = -4$), a solução (4.11) torna-se:

$$t(Y) = \alpha_1 + \beta_{1(n)} \left(1 - Y_{(n)}\right)^{1/2} F\left(n + \frac{1}{2}, 1/2; 3/2; 1 - Y_{(n)}\right),$$

com

$$Y_{(n)} = \frac{\mu}{3R_0^4} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3/n},$$

$$\beta_{1(n)} = \frac{2n}{3^{1/2+n} R_0^{4n-3}} \mu^{n-1/2}.$$

O mecanismo de recorrência é fornecido pelas relações de contiguidade na forma^[84]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + n\right) F\left(n + \frac{1}{2}, 1/2; 3/2; 1 - Y_{(n)}\right) = \\ & = (1 - n) F\left(n - \frac{1}{2}, 1/2; 3/2; 1 - Y_{(n)}\right) - \frac{1}{2} Y_{(n)}^{1/2 - n}, \end{aligned}$$

seguinte-se que

a) se $n = 1$ a relação acima é uma identidade, pois

$$F\left(\frac{3}{2}, 1/2; 3/2; 1 - Y_{(1)}\right) = Y_{(1)}^{-1/2};$$

b) se $n = 2$,

$$F\left(\frac{5}{2}, 1/2; 3/2; 1 - Y_{(2)}\right) = \frac{2}{3} \left(Y_{(2)}^{-1/2} + \frac{1}{2} Y_{(2)}^{-3/2} \right);$$

c) se $n = 3$,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{7}{2}, 1/2; 3/2; 1 - Y_{(3)}\right) &= \\ &= \frac{2}{5} \left[\frac{4}{3} \left(Y_{(3)}^{-1/2} + \frac{1}{2} Y_{(3)}^{-3/2} \right) + \frac{1}{2} Y_{(3)}^{-5/2} \right]. \end{aligned}$$

Tomando-se $\alpha_1 = 0$, as primeiras três soluções nessa sequência são:

a) $n = 1$, $\gamma = 1$, $p = 0$ (Trautman^[18], Kopczynski^[19])

$$t(R) = \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - \frac{\mu}{3R_0^4} \right]^{1/2};$$

b) $n = 2$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{2} \rho$

$$t(R) = \frac{8}{27 R_0^3} \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} - \frac{\mu}{3R_0^4} \right]^{1/2} \left[\mu + \frac{3}{2} R_0^4 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} \right];$$

c) $n = 3$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $p = \frac{2}{3} \rho$

$$t(R) = \frac{4R_0}{5} \left(\frac{R}{R_0} - \frac{\mu}{3R_0^4} \right)^{1/2} \left[\frac{4\mu^2}{27R_0^8} + \frac{2\mu R}{9R_0^5} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right].$$

4.6 FORMA PARAMÉTRICA DAS SOLUÇÕES

Em geral, não é possível obter a função inversa que descreve $R(t)$, a partir da solução geral $t(R)$. Entretanto, soluções paramétricas acopladas $R(\eta)$, $t(\eta)$ podem ser descritas por meio da definição adequada de um parâmetro temporal η .

Fazendo a transformação

$$Q = R^{\frac{2-m}{2}}, \quad m \neq 2, \quad (6.1)$$

e definindo a nova coordenada temporal

$$dt = Q d\eta, \quad (6.2)$$

a equação diferencial (4.1) é escrita na forma

$$QQ'' + (\Omega - 1)(Q')^2 + \left(\frac{2-m}{2}\right)B(q_1)Q^2 = 0, \quad m \neq 2, \quad (6.3)$$

onde

$$\Omega = \frac{3\gamma + m - 2}{2 - m}, \quad m \neq 2, \quad (6.4)$$

e $Q' = dQ/d\eta$. A primeira integral (4.2) é transformada em

$$\left(\frac{Q'}{Q}\right) = \left(\frac{2-m}{2}\right)^2 R_0^{3\gamma-2} Q^{-2\Omega} \left[1 - \frac{2B(q_1)R_0^{2-3\gamma}}{(2-m)\Omega} Q^{2\Omega}\right]. \quad (6.5)$$

Introduzindo as variáveis^[88]

$$Z = Q^\Omega, \quad (\Omega \neq 0, m \neq 2) \tag{6.6}$$

$$Z = \ln Q, \quad (\Omega = 0, m \neq 2)$$

a equação diferencial (6.3) toma as formas

$$Z'' + \left(\frac{2 - m}{2} \right) B(q_1) \Omega Z = 0, \tag{6.7a}$$

$$Z'' + \left(\frac{2 - m}{2} \right) B(q_1) = 0, \tag{6.7b}$$

que representam o movimento de uma partícula clássica sob a ação de uma força linear (atractiva ou repulsiva), ou uma força constante, respectivamente. Entretanto, as "constantes de força" são específicas para o conteúdo material presente em cada modelo.

A analogia entre a evolução dos modelos FRW e a de partículas clássicas em movimento harmónico é conhecida^[89]. Particularmente, esse resultado foi utilizado no contexto de uma das abordagens para a quantização de modelos cosmológicos^[90]. Entretanto, a extensão da mesma analogia para outras classes de modelos, devido a (6.7), é facto puramente formal. Um período de expansão, seguido de contração, é uma propriedade dos modelos de FRW na TRG no intervalo físico $1 \leq \gamma < 2$. Para outras classes de modelos tal comportamento para $R(t)$ pode ocorrer num intervalo de γ não significativo, como se discutirá na secção 8.

Especializada para o caso das soluções Bianchi I na TEC (ou na TRG), a solução geral de (6.7a) é

$$Z(\eta) = Z_0 \frac{\sin(\sqrt{\mu} \omega \eta + \delta)}{\sqrt{\mu}}, \quad \gamma \neq 2, \quad (6.8)$$

onde

$$\omega = \sqrt{3} \left| \frac{\gamma - 2}{2} \right|, \quad (6.9)$$

é a frequência do movimento harmônico na variável Z para $\mu > 0$, enquanto Z_0 e δ são constantes. A "conservação da energia", obtida pelo uso de (6.6) em (6.5), é escrita na forma

$$\frac{1}{2} (Z')^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 Z^2 = \frac{3}{2} \omega^2 R_0^{3\gamma-2}, \quad \gamma \neq 2, \quad (6.10)$$

que permite determinar $Z_0 = \sqrt{3} R_0^{1/2(3\gamma-2)}$.

A solução $R(\eta)$, tomando-se $\delta = 0$, é dada por:

$$R = \left[\sqrt{3} R_0^{1/2(3\gamma-2)} \frac{\sin \sqrt{\mu} \omega \eta}{\sqrt{\mu}} \right]^{\frac{2}{3(\gamma-2)}}. \quad (6.11)$$

Uma vez que, de (6.1) e (6.2), tem-se $d\eta = dt/R^3$, os fatores de escala métricos (2.9) são prontamente obtidos na forma

$$R_1 = R(\eta) \exp \left(\frac{b + 2a}{3} \right) (\eta - \eta_0), \quad (6.12a)$$

$$R_2 = R(\eta) \exp \left(\frac{b - a}{3} \right) (\eta - \eta_0), \quad (6.12b)$$

$$R_3 = R(\eta) \exp - \left(\frac{2b + a}{3} \right) (\eta - \eta_0). \quad (6.12c)$$

Quando comparadas com as soluções paramétricas

obtidas por Vajk, Eltgroth^[77] para os modelos com $G_4 I$ ($\mu < 0$, $S^1 = 0$, $m = -4$), constata-se enorme ganho em simplicidade. Naquele trabalho, define-se o parâmetro temporal $dt = R d\eta$, formalmente análogo ao tempo conforme, que é naturalmente sugerido pela métrica de FRW. No contexto de modelos anisotrópicos tal parametrização não tem a mesma interpretação nem permite a simplificação das soluções. A definição (6.2), embora não dispondo de interpretação geométrica, parece mais adequada ao tratamento de modelos mais gerais.

O tempo cosmológico $t(\eta)$ é obtido de (6.1), (6.2) e (6.8) na forma

$$t = 3^{1/(\gamma-2)} R_0^{(3\gamma-2)/(\gamma-2)} \int \left(\frac{\sin \sqrt{\mu} \omega \eta}{\sqrt{\mu}} \right)^{2/(\gamma-2)} d\eta + \text{constante} \quad (6.13)$$

Verifica-se diretamente que a integral acima é a integral de (4.4) se a variável auxiliar Y é dada por

$$Y = \cos^2 \sqrt{\mu} \omega \eta . \quad (6.14)$$

Portanto, as soluções da equação hipergeométrica (4.11) são representações para (6.13), ao se fazer a substituição definida em (6.14), permitindo resolver exatamente o tempo cosmológico $t(\eta)$.

4.7 OS MODELOS DE FRIEDMAN-ROBERTSON-WALKER

O formalismo geral apresentado aplica-se ao caso

das cosmologias homogêneas e isotrópicas da TRG^[39], cujo elemento de linha tem a forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi) \left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right) \right] , \quad (7. 1)$$

e a função $\sigma(\chi)$ é dada por^[91]

$$\sigma(\chi) = \frac{\text{sen}\sqrt{k} \chi}{\sqrt{k}} , \quad (7. 2)$$

onde k é o parâmetro de curvatura da seção espacial: se positivo, nulo ou negativo, está associado a modelos fechados, planos ou abertos, respectivamente.

As equações de campo são obtidas de (3.18) tomando-se $N^1=a=S_0=0$ para o caso plano ($k=0$, Bianchi I); $N^1=S_0=0$, $a=1$ para o caso aberto ($k=-1$, Bianchi V); $N^1=N^2=N^3=2$, $a=S_0=0$ para o caso fechado ($k=1$, Bianchi IX). Explicitamente

$$\rho = \frac{3}{R^2} (\dot{R}^2 + k) ,$$

$$p = - 2 \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{k}{R^2} ,$$

que tomam a forma de (4.1) definindo-se $B = \left(\frac{3\gamma - 2}{2} \right) k$ e $m = 0$. Portanto, a solução geral para os modelos de FRW é da forma (4.9), (4.11) ou (4.13), tomando-se

$$Y = k \left(\frac{R}{R_0} \right)^{(3\gamma-2)} ,$$

(7. 3)

$$A = \frac{1}{2} \frac{3\gamma}{3\gamma - 2} .$$

Se $k = 0$, e/ou $\gamma = 2/3$, tais definições não têm significado, mas os correspondentes limites da solução geral são bem definidos.

Assim, definindo-se a escala de tempo sob a condição $t(a_0) = t_0$, o limite de (4.11) quando $k \rightarrow 0$ é dado por

$$a(t) = a_0 \left[1 + \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{t - t_0}{a_0} \right) \right]^{2/3\gamma} . \quad (7. 4)$$

Com a escolha $t_0 = 2a_0/3\gamma$ a forma restrita das soluções planas, como usualmente apresentada na literatura, é recuperada^[92]. No entanto, informação adicional é fornecida por (7.4). Ela tem a função exponencial como limite quando $\gamma \rightarrow 0$, contendo, portanto, a solução de De Sitter plana^[93]. Além disso, como γ e k são parâmetros independentes, dois limites sucessivos comutam. Assim, tomando $\gamma = 0$ ($A = 0$), obtém-se de (4.11)

$$t - t_0 = a_0 \ln \frac{\left(\frac{a}{a_0} \right) \sqrt{\left(\frac{a}{a_0} \right) - k}}{1 + \sqrt{1 - k}} , \quad (7. 5)$$

que unifica as soluções de De Sitter. Finalmente, considere o caso $\gamma \rightarrow 2/3$ ($A \rightarrow \infty$), facilmente obtido de (4.9.a) na forma

$$a(t) = a_0 + \sqrt{1 - k} (t - t_0) , \quad (7. 6)$$

que reproduz o universo estático de Einstein se $k = 1$.

As sequências de soluções descritas por funções elementares são

$$\begin{aligned} \gamma_{(n)}^0 &= \frac{4}{3} \left(\frac{1-n}{1-2n} \right), & \gamma_{(n)}^{1/3} &= \frac{1}{3} \left(\frac{2n-1}{n} \right), \\ \gamma_{(n)}^1 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1+2n}{n} \right), & \gamma_{(n)}^{4/3} &= \frac{4}{3} \left(\frac{n}{2n-1} \right), \end{aligned} \quad (7.7)$$

cada uma delas partindo de uma solução conhecida, e todas satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{(n)} = \frac{2}{3}$. Portanto, as soluções para as sequências γ_n^0 e $\gamma_n^{1/3}$ são consistentes com a condição de energia dominante ($|p| \leq \rho$), enquanto aquelas associadas a γ_n^1 e $\gamma_n^{4/3}$ satisfazem a condição forte de energia ($\rho + 3p \geq 0$). Para valores de γ não contidos acima, as soluções são descritas por funções hipergeométricas que, assim como as soluções com $n \neq 1$ acima, não haviam sido exibidas.

A forma conforme das soluções é obtida de (6.7):

a) Se $\gamma = \frac{2}{3}$

$$a(\eta) = a_0 \exp [\sqrt{1-k} (\eta - \eta_0)] ,$$

(7.8)

$$t(\eta) = t_0 + \frac{a_0}{\sqrt{1-k}} \{ \exp [\sqrt{1-k} (\eta - \eta_0)] - 1 \} ;$$

b) Se $\gamma \neq \frac{2}{3}$

$$a(\eta) = a_0 \left[\frac{\text{sen} \sqrt{k} \left| \frac{3\gamma - 2}{2} \right| \eta}{\sqrt{k}} \right]^{\frac{2}{3\gamma - 2}} , \quad (7.9)$$

com $t(\eta)$ dado pelas especializações de (6.13) e (6.14).

A analogia entre modelos fechados e osciladores harmônicos enfatiza a característica desses modelos de expandir

e contrair entre duas singularidades. Embora não se possa "atravessar a singularidade" e, portanto, um único meio ciclo de movimento seja fisicamente permitido, a "direção" de movimento muda no instante do tempo conforme $\bar{\eta} = \frac{\pi}{|3\gamma - 2|}$, ($\gamma \neq \frac{2}{3}$). Na coordenada tempo cosmológico o fator de escala apresenta um máximo em $a = a_0$, se $\gamma > \frac{2}{3}$, e o fator de escala auxiliar assume o valor $Y = 1$, [cf. (4.3)]. Assim, a solução (4.9a) fornece a metade do intervalo de tempo cosmológico entre as duas singularidades dos modelos de FRW fechados^[69] na forma:

$$T = \left(\frac{2A - 1}{2} \right) a_0 \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(A + 1/2)}, \quad \gamma > \frac{2}{3}, \quad (7.10)$$

onde Γ representa a função gama^[84].

Se a condição forte de energia ($\rho + 3p \geq 0$) substitui o requerimento mais restritivo de positividade tanto da energia quanto da pressão^[94], o tempo de vida dos modelos pode crescer indefinidamente no domínio de pressões negativas, como mostra o gráfico da figura 4.7.1.

O tempo de vida dos modelos fechados diminui com o aumento da massa gravitacional efetiva. Usando a analogia sugerida em (6.7), a "constante de mola" $K = \left(\frac{3\gamma - 2}{2} \right)^2$ aumenta com o crescimento da relação ρ/p , encurtando o tempo necessário para completar meio ciclo de movimento num conjunto de sistemas massa (unitária)-mola igualmente alongados.

A característica de série de potências da solução geral fornece os termos de correção para a análise dos diferentes modelos na vizinhança da singularidade. De (4.9a) tem-se

$$t \approx \frac{2a_0}{3\gamma} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{(3\gamma-2)} \left[1 + \frac{kA}{2(A+1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{(3\gamma-2)} \right]. \quad (7.11)$$

Na abordagem usual da vizinhança da singularidade^[79], os modelos são indistinguíveis em k , uma vez que apenas o primeiro termo aparece.

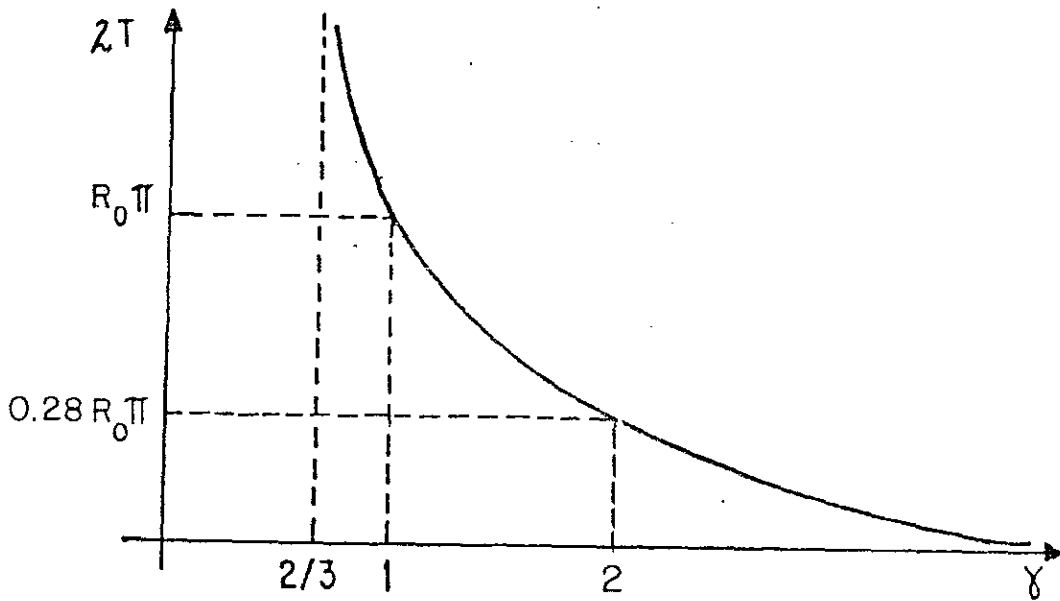


FIGURA 4.7.1: Representação gráfica para $2T(\gamma)$

A solução apresentada permite comparar a evolução de modelos correspondentes a quaisquer dois valores de γ , por deformações contínuas de um valor em outro, e que sua separação no espaço de soluções seja precisamente determinada. Recupera-se a unidade do espectro das soluções para cosmologias homogêneas e isotrópicas da TRG, perdida ao se explorar as soluções para valores particulares do par (γ, k) , tanto na literatura especiali-

zada como em livros texto^[79,91,95]. Por outro lado, exibe-se formalmente a conjectura de que modelos como os de Einstein e De Sitter "podem ser pensados como interessantes limites dos modelos de Friedmann"^[71].

4.8 EVOLUÇÃO DE MODELOS DA TEC E DA TRG

Uma característica importante da solução geral é a de que o fator de escala auxiliar Y e o parâmetro A transportam toda a informação acerca das hipóteses próprias aos modelos. O fator de escala auxiliar Y atua como um núcleo, específico para cada teoria e/ou classe de modelos, que se repete de acordo com o padrão de série de potências de uma função hipergeométrica determinado pelo parâmetro A . Tal parâmetro determina a estrutura da solução. Modelos caracterizados por distintas funções $Y(R)$ com acesso a um intervalo comum do domínio de A , apresentarão evoluções semelhantes.

A Figura 4.8.1 exibe os gráficos das funções $A(\gamma)$ para os casos dos modelos de FRW da TRG e Bianchi tipo I da TEC. Verifica-se diretamente que os últimos, quando definidos no intervalo $3 \leq \gamma \leq 6$, ou $3/4 \leq A \leq 3/2$, apresentam o mesmo comportamento para $t(Y)$ que os modelos de FRW da TRG definidos no intervalo $1 \leq \gamma \leq 2$. O sinal da constante μ tem papel análogo ao do parâmetro de curvatura. Em outras palavras, a evolução dos modelos de FRW fechados pode ser simulada por modelos Bianchi I da TEC, com $\mu > 0$, gerados por um fluido não realista.

Por outro lado, as soluções Bianchi tipo I da TEC consideradas físicas, $1 \leq \gamma \leq 2$, $-\infty \leq A \leq -\frac{1}{2}$, exibem evolução

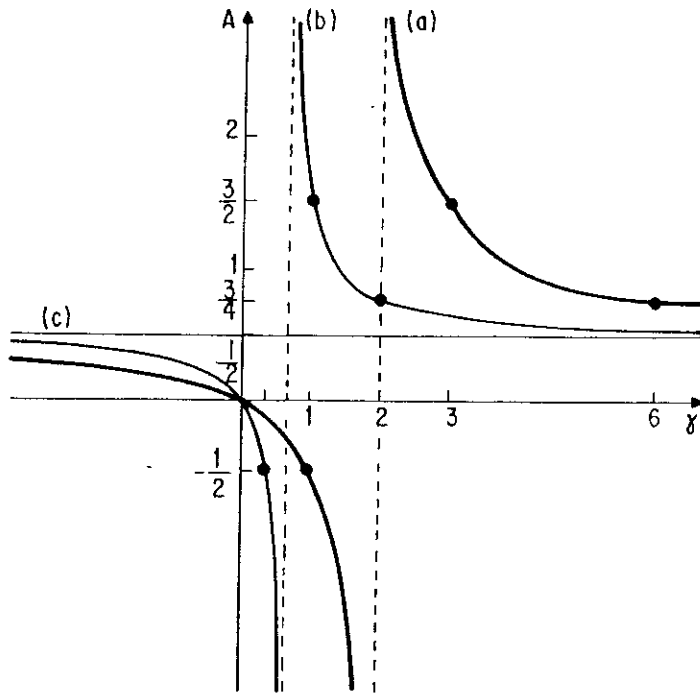


FIGURA 4.8.1: Representação gráfica para $A(\gamma)$:

(a) caso $m = -4$, (b) caso $m = 0$, (c) caso $m = 2$.

semelhante àquela das cosmologias homogêneas e isotrópicas da TRG definidas no intervalo $\frac{1}{3} \leq \gamma \leq \frac{2}{3}$, como se verifica por inspeção da Figura 4.8.1.

Esse é o principal aspecto a enfatizar. Sabe-se que o fator de escala para os modelos de FRW satisfaz a relação

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{1}{6} (\rho + 3p) ,$$

como se verifica de (2.14), com $\mu = 0$. Nesse contexto, a condi-

ção $\dot{R} > 0$ implica no aparecimento de pressões negativas, isto é, $p < -\rho/3$, ou $\gamma < 2/3$. Como, na TEC, a dependência funcional de $t(Y)$ no intervalo $1 \leq \gamma \leq 2$ é idêntica à dos modelos de FRW definidos no intervalo $\frac{1}{3} \leq \gamma \leq \frac{2}{3}$, as condições para ocorrência de um cenário inflacionário surgem naturalmente na TEC.

A evolução de modelos da TEC torna-se indistinguível da evolução dos modelos de FRW planos se efeitos devidos ao spin das partículas contrabalançam exatamente os devidos ao tensor de deformação, isto é, se $\mu = 0$. Toda a informação acerca da torção do espaço-tempo é apagada da solução geral.

Por outro lado, o limite de (4.9a) quando $\gamma \rightarrow 2$, $A \rightarrow \infty$, é

$$R^3 = 3R_0^2 \left(1 - \frac{\mu}{3 R_0^4} \right)^{-1/2} t ,$$

com $\mu \neq 0$, $m = -4$, e a interação repulsiva spin-spin não permite evitar a singularidade em modelos gerados por matéria ultrarrígida.

CAPÍTULO 5

SOBRE UMA CLASSE DE UNIVERSOS INFLACIONÁRIOS

DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

5.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior discutiu-se a solução geral para universos Bianchi tipo I com o tensor momento-energia fenomenológico para um fluido perfeito polarizado. Um estudo de cosmologias com seção espacial plana, baseadas na Teoria de Einstein-Cartan auto-consistente (Ray, Smalley^[38]), foi exibido em dois trabalhos de Bradas, Fennelly e Smalley^[24,25], designados doravante por BFS. Nesses trabalhos mostra-se que uma fase inflacionária natural, e inevitável, existe em modelos Bianchi tipo I na TEC, gerados pelo tensor momento-energia de Ray-Smalley (RS-EMT) para um fluido perfeito com spin. Os autores argumentam que o escalar de deformação (shear) não pode amortecer a fase inflacionária de forma efetiva.

Neste capítulo mostra-se que: a) O primeiro dos trabalhos de BFS contradiz o postulado métrico da TEC, i.e., a hipótese de que o tensor métrico é covariantemente constante, sendo consistente com aquela classe mais ampla de espaços-tempo em que a condição de metricidade não é satisfeita, a saber:

$$Q_{ABC} = - \nabla_A g_{BC} \neq 0, \quad (1. 1)$$

onde os índices latinos maiúsculos referem-se à base holônoma e Q_{ABC} é o tensor de não-metricidade; b) A conexão afim da variedade de Riemann-Cartan não é calculada corretamente na segunda dessas referências; c) Em consequência, alguns termos com interpretação física significativa estão ausentes da forma final das equações de campo apresentadas; d) Por tais motivos, segue-se uma interpretação errônea do aparecimento da inflação nos modelos (Assad, Letelier^[27]).

Adotou-se a notação daqueles trabalhos para facilitar a comparação de resultados. Uma base não-holônoma é definida por um conjunto de 1-formas $\omega^\lambda = E^\lambda_A dx^A$ tais que

$$d\omega^\lambda = - \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^\lambda \omega^\mu \wedge \omega^\nu, \quad (1. 2)$$

onde $C_{\mu\nu}^\lambda = - C_{\nu\mu}^\lambda$ são os coeficientes de estrutura da base ou objetos de não-holonomia. Define-se o campo de tetradas por

$$E_A^\mu E_{B\mu} = g_{AB},$$

$$E_\mu^A E_{A\nu} = \eta_{\mu\nu},$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e índices gregos referem-se ao sistema não-holônomo. Em tal sistema, (1.1) toma a forma

$$Q_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} , \quad (1.3)$$

onde $Q_{\mu\nu} \equiv Q_{ABC} E_{\mu}^B E_{\nu}^C E_{\lambda}^A \omega^{\lambda}$ são as 1-formas de não-metricidade, e $\omega_{\mu\nu}$ são as 1-formas de rotação.

5.2 REVISÃO DOS TRABALHOS DE BFS

Nos trabalhos considerados, a métrica de um espaço-tempo Bianchi tipo I é escrita na forma Minkowskiana

$$ds^2 = - (\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \quad (2.1)$$

onde as 1-formas $\omega^{\mu} = E^{\mu}_{\ A} dx^A$ são definidas pelo campo de tetradas

$$E^0_{\ A} = \delta^0_{\ A} , \quad (2.2)$$

$$E^{(\mu)}_{\ (\lambda)} = e^{\alpha} (e^B)^{(\mu)}_{\ (\lambda)} .$$

Nas definições acima $\alpha = \alpha(t)$, $(e^B)^{(\mu)}_{\ (\lambda)}$ é matriz 3x3 simétrica, de traço nulo, e (μ) , (λ) , referem-se a índices espaciais não-holonômos e holonômos, respectivamente. As expressões

$$\sigma_{(\mu)(\nu)} = (\dot{e}^B)^{(\mu)}_{\ (\lambda)} ((\mu) (e^{-B})_{\ (\nu)})_{\ (\lambda)} , \quad (2.3)$$

$$\tau_{(\mu)(\nu)} = (\dot{e}^B)_{(A)} [(\mu)(e^{-B})_{(\nu)}]_{(A)} , \quad (2.4)$$

estão relacionadas à deformação da congruência de normais às superfícies de homogeneidade e à rotação das tetradas, respectivamente. O ponto indica derivada em relação ao tempo cósmico. Supõe-se que um campo de torção na forma

$$T_{(\mu)(\nu)}^0 \neq 0 , \quad (2.5)$$

está presente no espaço-tempo.

Comentaremos inicialmente acerca dos objetos geométricos determinados por BFS em seu estudo de espaços-tempo Bianchi tipo I com torção. As 1-formas de rotação exibidas no primeiro de seus trabalhos são

$$\omega_{(\mu)}^0 = \left(\dot{\alpha} \delta_{(\mu)(\nu)} + \sigma_{(\mu)(\nu)} + \frac{1}{2} T_{(\mu)(\nu)}^0 \right) \omega^{(\nu)} , \quad (2.6)$$

$$\omega_{(\mu)0}^{(\mu)} = \left(\dot{\alpha} \delta_{(\mu)(\nu)} + \sigma_{(\mu)(\nu)} \right) \omega^{(\nu)} , \quad (2.7)$$

$$\omega_{(\nu)}^{(\mu)} = - \tau_{(\mu)(\nu)} dt . \quad (2.8)$$

Pode-se comentar inicialmente o seguinte: a) Este conjunto não é consistente com a primeira equação de estrutura de Cartan, indicando a existência de um erro de cálculo nesse trabalho; b) É também inconsistente com a condição de metricidade, uma vez que $\omega_{(\mu)}^0$ and $\omega_{(\mu)0}^{(\mu)}$ devem ser iguais a menos de um sinal [c.f. Eq. (1.3)]; c) Por esse motivo, um campo de não-metricidade na forma

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2} T_{(\mu)(\nu)}^0 \omega^{(\nu)}, \quad (2.9)$$

está presente no trabalho; d) A perda de uma das duas simetrias do tensor de Riemann na variedade de Riemann-Cartan se dá estritamente devido à presença de um campo de não-metricidade não nulo, e isto pode ser diretamente verificado ao se inspecionar as expressões para as componentes do tensor de curvatura, Equações (17a,c) do trabalho de BFS^[24], aqui reproduzidas:

$$R_{00(\nu)}^{(\mu)} = - R_{0(\nu)0}^{(\mu)} =$$

$$\ddot{\alpha}\delta_{(\mu)(\nu)} + \dot{\sigma}_{(\mu)(\nu)} + (\dot{\alpha} + \sigma)_{(\mu)(\nu)}^2 + (\sigma \cdot \tau)_{(\mu)(\nu)},$$

$$R_{(\mu)0(\nu)}^0 = - R_{(\mu)(\nu)0}^0 =$$

$$\ddot{\alpha}\delta_{(\mu)(\nu)} + \dot{\sigma}_{(\mu)(\nu)} + (\dot{\alpha} + \sigma)_{(\mu)(\nu)}^2 + (\sigma \cdot \tau)_{(\mu)(\nu)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\dot{T}_{(\mu)(\nu)}^0 + \dot{\alpha} T_{(\mu)(\nu)}^0 + \right.$$

$$\left. + (\sigma + \tau)_{(\rho)(\nu)} T_{(\mu)}^{(\rho)0} - T_{(\rho)(\nu)}^0 \tau^{(\rho)}_{(\mu)} \right);$$

e) Portanto, as soluções consideradas não são consistentes com o postulado métrico da TEC, porém, podem ser consistentes com um espaço-tempo afim mais geral.

De fato, o tensor de curvatura tem uma única e fundamental propriedade de simetria, decorrente de sua definição: a antissimetria em um de seus pares de índices. A antissimetria no outro par decorre da exigência de que a variedade sa-

tisfaça a condição de metricidade. Na variedade de Riemann-Cartan o tensor de curvatura, portanto, é antissimétrico em dois pares de índices, resultando possuir 36 componentes independentes, como discutido no Apêndice A.

A maioria dos detalhes acerca dos cálculos geométricos foram suprimidos do trabalho posterior de BFS^[25], e apenas as 1-formas mostradas anteriormente em (2.6) e (2.8) estão presentes. Pode-se considerar agora que: a) Este novo conjunto de 1-formas é ainda inconsistente com a primeira equação de estrutura de Cartan; b) Um erro propaga-se através do trabalho como um todo. No que se segue pretende-se analisar as consequências físicas de tal erro.

As 1-formas de conexão corretas têm a forma

$$\omega^0_{(\mu)} = \left(\dot{\alpha} \delta_{(\mu)(\nu)} + \sigma_{(\mu)(\nu)} - \frac{1}{2} T_{(\mu)(\nu)}^0 \right) \omega^{(\nu)}, \quad (2.10)$$

$$\omega^{(\mu)}_{(\nu)} = - \left(\tau^{(\mu)}_{(\nu)} - \frac{1}{2} T^{(\mu)}_{(\nu)0} \right) \omega^0. \quad (2.11)$$

Note que (2.8) e (2.11) diferem por um termo de torção.

5.3 AS EQUAÇÕES DE CAMPO

De acordo com a TEC auto-consistente, o tensor de densidade de spin é prescrito por

$$S_{AB}{}^C = S_{AB} u^C = \frac{1}{2} \rho s_{AB} u^C, \quad (3.1)$$

onde

$$s_{AB} = k (E_A^1 E_B^2 - E_B^1 E_A^2) , \quad (3. 2)$$

é o tensor de momento angular de spin específico, ρ é a densidade de matéria e k é uma função escalar. As tetradas são escolhidas identificando-se uma delas com a 4-velocidade da matéria:

$$u^A = E_0^A . \quad (3. 3)$$

Segue-se que o fluido obedece a condição de Frankel

$$s_{AB} u^B = 0 . \quad (3. 4)$$

No sistema de referência não-holônomo definido por (2.2), encontra-se, usando (3.3), que $s_{12} = -s_{21} = k$. Portanto, a função k é a componente s^3 do vetor de spin específico nesse referencial.

O que se denomina de forma auto-consistente das equações de campo da TEC com RS-EMT, para o caso em que é nulo o traço do tensor de torção, é

$$G_{AB} - \frac{1}{2} \nabla_C (T_{AB}^C + T_{AB}^C - T_{BA}^C) = T_{AB}^{(RS)} , \quad (3. 5)$$

isto é, a equação (1.5.6) com tensor momento-energia métrico igual ao RS-EMT. Entretanto, devido a (1.5.8-11), pode ser escrita na forma

$$G_{AB} = T_{AB}^{\text{canonico}} = T_{AB}^{(RS)} + 2 \nabla_C S_{(AB)}^C + \nabla_C S_{AB}^C . \quad (3. 6)$$

Como ocorre a conservação do spin, pode-se ainda escrever

$$T_{AB}^{\text{canonico}} = T_{AB}^{\text{simetrico}} = T_{AB}^{(RS)} + 2 \nabla_C S_{(AB)}^C . \quad (3. 7)$$

Num sistema de referênciã holônomo, o RS-EMT consiste da soma de uma parte correspondente a um fluido perfeito

$$T_F^{AB} = \rho(1 + \varepsilon + P/\rho)u^A u^B + g^{AB}P , \quad (3. 8)$$

e uma parte dependente do momento angular intrínseco

$$\begin{aligned} T_S^{AB} = & \rho u^{(A} s^{B)C} \dot{u}_C + \nabla_C [\rho u^{(B} s^{A)C}] - \\ & - \rho W^C (s^A s^B)_C + \rho u^{(A} s^{B)C} W_{CD} u^D . \end{aligned} \quad (3. 9)$$

Nas expressões acima ρ e P são a densidade e a pressão do fluido, respectivamente, ε a energia interna, u^A a 4-velocidade, s^{AB} o momento angular intrínseco específico. A velocidade angular de spin é $W_{AB} = \dot{E}^{\mu}_{\ A} E_{\mu B}$, onde um ponto é aqui utilizado (e apenas aqui) para indicar a derivada covariante (em U_4) com relação ao tempo próprio $\dot{E}^{\mu}_{\ A} = u^B \nabla_B E^{\mu}_{\ A}$.

A formulação variacional para o tensor acima foi obtida por Ray, Smalley^[38]. Difere fundamentalmente da formulação de Obukhov, Korotky^[48], para o tensor fenomenológico, pelo fato de que o vetor de spin está definido em termos das tetradas, como dado em (3.1,2). Na abordagem dos últimos autores, as três tetradas espaciais e as três componentes do vetor de spin são consideradas variáveis independentes no princípio variacional. Como afirmado anteriormente, tais questões não são objeto

dessa tese.

Substituindo (3.8,9) em (3.7), e usando (3.1), verifica-se que as divergências dos termos de spin em (3.7) cancelam-se. Por essa razão, o tensor de momento-energia canônico, que é igual ao simétrico no presente caso, pode ser escrito como a soma da parte de fluido perfeito (3.8) e uma parte efetiva de spin dada apenas pelos dois últimos termos da parte de spin do RS-EMT em (3.9).

Independentemente da descrição do tensor de momento-energia canônico, as equações de campo (1.5.10) para a métrica (2.1) são

$$G_{00} = 3\dot{\alpha}^2 - (1/2) \sigma_{(\mu)(\nu)} \sigma^{(\mu)(\nu)} + \quad (3.10)$$

$$+ (1/8) T_{(\mu)(\nu)}^{\circ} T^{(\mu)(\nu)\circ} = T_{00}$$

$$G_{(0)(\mu)} = 0 = T_{(0)(\mu)} \quad (3.11)$$

$$G_{(\mu)(\nu)} = - (2\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 + (1/2) \sigma_{(\mu)(\nu)} \sigma^{(\mu)(\nu)} - \quad (3.12)$$

$$- (1/8) T_{(\mu)(\nu)}^{\circ} T^{(\mu)(\nu)\circ}) \delta_{(\mu)(\nu)} +$$

$$+ \dot{\sigma}_{(\mu)(\nu)} + 3\dot{\alpha} \sigma_{(\mu)(\nu)} + [\sigma, \tau]_{(\mu)(\nu)} +$$

$$+ T_{(\rho)((\mu)}^{\circ} \sigma^{(\rho)}_{(\nu)}) = T_{(\mu)(\nu)}$$

$$G_{[(0)(\mu)]} = 0 \quad (3.13)$$

$$G_{[(\mu)(\nu)]} = \dot{T}_{(\mu)(\nu)}^0 + 3\dot{\alpha} T_{(\mu)(\nu)}^0 + \quad (3.14)$$

$$+ 2 T_{(\rho)}^0 [(\nu) \tau^{(\rho)}_{(\mu)}] = 0$$

A contração das equações (3.12) fornece

$$G^{(\mu)}_{(\mu)} = -6\ddot{\alpha} - 9\dot{\alpha}^2 - (3/2) \sigma_{(\mu)(\nu)} \sigma^{(\mu)(\nu)} + \quad (3.15)$$

$$+ (3/8) T_{(\mu)(\nu)}^0 T^{(\mu)(\nu)0} = T^{(\mu)}_{(\mu)}$$

Os termos de torção contraídos em (3.10), (3.12) e (3.15), representam uma interação de contato spin-spin de caráter repulsivo^[16]. Quando se usa o tensor fenomenológico para o fluido de Weyssenhoff, os modelos da TEC são obtidos dos correspondentes modelos da TRG pela substituição da densidade e da pressão do fluido sem spin pelas quantidades efetivas $(\rho-s^2)$ e $(p-s^2)$, respectivamente, onde

$$s^2 \equiv \frac{1}{2} T_{(\mu)(\nu)}^0 T^{(\mu)(\nu)0}.$$

Por essa razão, a interação de contato spin-spin pode criar as condições para que a singularidade inicial seja evitada. Os modelos de BFS não reproduzem tal resultado, como se pode verificar por inspeção da Tabela II da Ref. [24] e das Equações (8) da Ref. [25], de onde extraiu-se, por exemplo, a expressão para G_{00}

$$G_{00} = 3\dot{\alpha}^2 - (1/2) \sigma_{(\mu)(\nu)} \sigma^{(\mu)(\nu)} .$$

Admitindo que $T_{(\rho)}[(\nu)^0 \tau^{(\rho)}_{(\mu)}] = 0$, como BFS fizeram, isto é, que os vetores de vorticidade e spin são paralelos, verifica-se de (3.14) que as componentes do tensor de torção têm a forma

$$T_{(\mu)(\nu)}^0 = T_0 e^{-3\alpha}, \quad (3.16)$$

que reproduz apenas a conservação do spin (3.3.11), se $\alpha = \ln R$.

Considere-se agora a forma final das equações de campo da TEC quando acopladas às componentes do RS-EMT. No sistema de referência não holônomo definido em (2.2), as componentes da velocidade angular de spin são descritas por

$$W_{(\mu)(\nu)} = -\tau_{(\mu)(\nu)} + T_{(\mu)(\nu)}^0, \quad (3.17)$$

onde a presença do termo de torção decorre da prescrição de acoplamento mínimo que substitui a derivada covariante Riemanniana pela derivada que leva em conta a conexão em U_4 . Então, no mesmo sistema de referência as componentes do RS-EMT são

$$T_{00} = \rho (1 + \varepsilon), \quad (3.18)$$

$$T_{(\mu)(\nu)} = P \delta_{(\mu)(\nu)} + \rho \left[\tau_{(\alpha)((\mu)S(\nu))}^{(\alpha)} - T_{(\alpha)((\mu)^0 S(\nu))}^{(\alpha)} \right], \quad (3.19)$$

e

$$T_{(\mu)}^{(\mu)} = 3P - 2\rho \left[\tau_{(\alpha)(\mu)} S^{(\alpha)(\mu)} - T_{(\alpha)(\mu)}^0 S^{(\alpha)(\mu)} \right] \quad (3.20)$$

$$- T_{(\alpha)(\mu)}^0 s^{(\alpha)(\mu)} \Big] , \alpha < \mu .$$

Os termos de acoplamento spin-torção não estão presentes nas componentes do tensor de momento energia exibidas em BFS.

Fazendo a aproximação $\rho \approx \rho(1 - \varepsilon)$, supondo que o fluido satisfaz a equação de estado $P = \gamma\rho$, definindo $\alpha = \ln R$ e

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{(\mu)(\nu)} \sigma^{(\mu)(\nu)} ,$$

as equações (3.10), (3.13), (3.18) e (3.20) fornecem

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} = & - \left(\frac{3\gamma + 1}{6} \right) \rho + \frac{1}{3} (s^2 - \sigma^2) + \\ & + \frac{1}{3} \rho \left[\tau_{(\alpha)(\mu)} s^{(\alpha)(\mu)} - T_{(\alpha)(\mu)}^0 s^{(\alpha)(\mu)} \right] . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Comparando a equação da aceleração acima com a Eq. 52 da Ref. [24], ou a Eq. 10 da Ref. [25], cuja forma é

$$\frac{\dot{R}}{R} = - \left(\frac{3\gamma + 1}{6} \right) \rho - \frac{1}{3} \sigma^2 + \frac{1}{3} \rho \tau_{(\alpha)(\mu)} s^{(\alpha)(\mu)} , \quad (3.22)$$

verifica-se a ausência dos termos de acoplamento spin-torção e spin-spin.

Entretanto, do ponto de vista da física, tais termos são equivalentes. Dessa forma ocorre um reforço da interação de contato spin-spin de caráter repulsivo. No entanto, como se pode observar das expressões para o tensor de Einstein em (3.10-15), o termo spin-spin tem sua origem do lado esquerdo das equações da TEC. Com origem, portanto, na geometria e não no

termo de fonte, como ocorre com a totalidade dos modelos que fazem uso do tensor fenomenológico.

No presente estudo, os termos repulsivos, com origem no lado esquerdo das equações de campo, são acrescentados do termo equivalente de acoplamento spin-torção, cuja origem está no tensor de matéria. Na medida do que conhece o autor, tal propriedade do RS-EMT não foi ainda observada na literatura.

5.4 ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DOS MODELOS

BFS argumentam que o termo de acoplamento entre o spin e a vorticidade domina a expansão inicial do universo, e portanto, uma fase inflacionária necessária, e inevitavelmente, existe em universos anisotrópicos Bianchi tipo I da TEC com o RS-EMT. Seu argumento baseia-se em trabalho de Fennely^[96], onde se mostra que a vorticidade varia na forma $\tau_{\mu\nu} \propto R^{-3(3-\gamma)}$. Os termos de torção-torção, spin-torção, e o escalar de deformação variam com R^{-6} . O termo de acoplamento spin-vorticidade é dominante quando o fator de escala assume seus menores valores.

Esse é o caso ao se considerar a forma mais geral da métrica apresentada em (2.1) e (2.2). Entretanto, ao restringir-se a forma da métrica de modo a ter $\tau_{(\mu)(\nu)} = 0$, ou ao admitir campos de matéria com uma distribuição aleatória de spins, como estudado por Gasperini^[22], os resultados de BFS afirmam não ocorrer a fase inflacionária, como se constata diretamente de (3.22). Na realidade esse não é o caso, devido a presença dos termos de acoplamento torção-spin e spin-spin em (3.21).

A energia cinética de spin $K_s = \frac{1}{2} W_{\mu\nu} s^{\mu\nu}$ contém contribuições tanto do acoplamento spin-vorticidade quanto spin-torção [c.f. Eq. (3.17)]. Por tal motivo, pode-se considerar os casos em que $\tau_{(\mu)(\nu)} = 0$, sem que isso implique que K_s se anule.

A análise das possíveis cinemáticas para o fluido com spin, e seu efeito na expansão dos modelos, fornece:

a) $\tau_{(\mu)(\nu)} \neq 0$, $\sigma_{(\mu)(\nu)} \neq 0$ ou $\sigma_{(\mu)(\nu)} = 0$: uma fase inflacionária existe naturalmente, e inevitavelmente, em cosmologias Bianchi tipo I com o RS-EMT, como BFS afirmam.

b) $\tau_{(\mu)(\nu)} = 0$, $\sigma_{(\mu)(\nu)} \neq 0$: existe inflação em modelos Bianchi tipo I da TEC com o RS-EMT apenas se os efeitos de spin superam o escalar de deformação, i.e., a deformação pode efetivamente impedir ou amortecer a fase inflacionária, contrariamente ao que BFS afirmam.

c) $\tau_{(\mu)(\nu)} = 0$, $\sigma_{(\mu)(\nu)} = 0$ (modelos de FRW planos com distribuição alinhada de spins) inflação necessariamente existe em cosmologias com o RS-EMT, resultado que não é obtido por BFS.

Outros cenários inflacionários em universos Bianchi tipo I com torção são obtidos por:

d) Considerar-se uma distribuição aleatória de spins, como tratado por Gasperini^[22].

e) Considerar-se o tratamento fenomenológico do fluido de Weyssenhoff polarizado, como tratado no Capítulo 4.

Por tais motivos, conclui-se que a expansão cosmológica em modelos da TEC com o RS-EMT apresenta outras possibilidades para a inflação não consideradas nos trabalhos de BFS.

CAPÍTULO 6

UNIVERSOS ETERNOS E PULSANTES NO ESPAÇO-TEMPO

DE RIEMANN-CARTAN

6.1 INTRODUÇÃO

Apesar dos universos de FRW serem os mais estudados no contexto da TRG, as características da evolução dos modelos correspondentes na TEC são ainda pouco conhecidas. Excetuando-se o caso dos modelos planos, a evolução dos modelos fechados e abertos merece estudo mais aprofundado.

Foi Kerlick^[97] quem primeiro observou que não se pode incorporar um fluido perfeito polarizado como fonte para cosmologias fechadas (Bianchi tipo IX), como se verificou no Capítulo 3. Essa classe de modelos pode ser gerada apenas por um fluido em que os spins de suas partículas estão aleatoriamente orientados. Usando tal estrutura, Kuchowicz^[55] exibiu soluções exatas tipo FRW na TEC e, em particular, um modelo fechado que é

não singular e oscila entre raios máximo e mínimo. Entretanto a solução foi obtida sacrificando-se a lei de conservação do spin na TEC. Por outro lado, Nurgaliev, Ponomariev^[32] (NP) obtiveram uma classe de soluções fechadas, que são estáticas e estáveis sob perturbações infinitesimais homogêneas e isotrópicas.

Assim como nos trabalhos acima, a classe de modelos de FRW na TEC, gerada por fluido não polarizado, é aqui discutida. Aplicam-se métodos da teoria de sistemas dinâmicos para investigar as propriedades das soluções, mostrando-se que: a) As características essenciais da solução particular de Kuchowicz são compartilhadas por uma classe de soluções fechadas, obtidas sem a necessidade de violar a lei de conservação do spin; b) A classe de soluções estáticas de NP constitui solução representada no espaço de fase por um ponto de equilíbrio (um centro); c) As soluções infinitesimalmente perturbadas obtidas por NP correspondem, no diagrama de fase, a órbitas elípticas na vizinhança do ponto de equilíbrio; d) Para perturbações finitas da solução estática, as órbitas são ainda fechadas, mas não mais reproduzem o comportamento harmônico descrito por NP; e) Em ambos os casos, efeitos devidos à interação repulsiva spin-spin predominam sobre a atração gravitacional em estágios de alta densidade de matéria, evitando o colapso à singularidade e reacelerando o universo de volta à uma fase expansionária; f) Mostra-se que épocas inflacionárias cíclicas existem nessa classe de modelos.

Obtém-se estes resultados independentemente da descrição utilizada para o tensor de momento-energia do fluido perfeito com spin: se o fenomenológico, usado nas Refs. [32.55],

ou o de Ray-Smalley.

6.2 MODELOS DE FRW COM DISTRIBUIÇÃO ALEATÓRIA DE SPINS

As equações de campo da TEC para modelos de FRW, com o tensor momento-energia fenomenológico como fonte da gravitação, são obtidas de (3.3.18) tomando-se $N^1 = a = 0$, $S_0 \neq 0$ para o caso plano ($k = 0$, Bianchi I); $N^1 = 0$, $a = 1$, $S_0 \neq 0$ para modelos abertos ($k = -1$, Bianchi V); $N^1 = N^2 = N^3 = 2$, $a = 0$, $S_0 \neq 0$ para o caso fechado ($k = 1$, Bianchi IX). Explicitamente

$$\rho = \frac{3}{R^2} (\dot{R}^2 + k) + \frac{S_0^2}{R^6}, \quad (2.1)$$

$$p = -2\frac{\dot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{k}{R^2} + \frac{S_0^2}{R^6}. \quad (2.2)$$

Entretanto, as equações (3.3.20) proíbem o alinhamento de spins em modelos Bianchi tipo IX. Para superar essa restrição supõe-se que a fonte do campo gravitacional é um fluido perfeito não polarizado, em que a distribuição de spins flutua aleatoriamente. De acordo com a interpretação usual, as fontes de matéria para o campo gravitacional macroscópico são definidas pela média no espaço-tempo dos tensores de matéria no domínio microscópico. Embora a distribuição de spins seja aleatória, a média dos termos quadráticos de spin não é nula. Para um fluido não polarizado, pode-se escrever

$$\langle S_{AB} \rangle = 0,$$

(2.3)

$$S^2 = \frac{1}{2} \langle S_{AB} S^{AB} \rangle \neq 0.$$

A lei de conservação do spin, equação (2.4.4), consistentemente com as equações de campo (3.3.17), estabelece que os termos quadráticos de spin variam com R^{-6} . Portanto, supor que $S^2 = \frac{1}{2} \langle S_{AB} S^{AB} \rangle \propto R^{-2\delta}$, $\delta = 2$, como fêz Kuchowicz^[55] para obter uma solução pulsante, é inconsistente tanto com as equações de campo, como com a geometria não acelerada de FRW.

Antes de analisar as soluções de (2.1,2), discute-se a mesma classe de modelos na formulação auto-consistente da TEC. Conforme discutido na seção 5.3, pode-se escrever

$$\begin{aligned} T_{AB}^{\text{canonico}} &= T_{AB}^{\text{simetrico}} = T_{AB}^{(RS)} + 2 \nabla_C S_{(AB)}^C = \\ &= T_{AB}^F - \rho W^C (A S^B)_C + \rho u^{(A S^B)C} W_{CD} u^D, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde T_{AB}^F é o tensor de fluido perfeito na TRG e

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \dot{E}^\mu_A E_{\mu B} = u^C \left(\nabla_C E^\mu_A \right) E_{\mu B} = \\ &= u^C \left(\overset{R}{\nabla}_C E^\mu_A \right) E_{\mu B} + u^C K_{CA}^D E^\mu_D E_{\mu B}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

com $\overset{R}{\nabla}_C$ designando a parte riemanaiana da derivada covariante.

Substituindo (2.5) em (2.4), e aplicando (2.3), verifica-se que termos quadráticos no spin sobrevivem apenas de-

vido à presença dos termos de acoplamento entre o spin e a contorção (ou torção). Tais termos se adicionam ao termo existente em (2.1).

Admitindo que $p = (\gamma - 1)\rho$, $1 \leq \gamma \leq 2$, as equações (2.1) tornam-se

$$R \ddot{R} + \alpha \dot{R}^2 + \beta R^m + \Gamma = 0, \quad (2.6)$$

onde $\alpha = \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)$, $\beta = A\left(\frac{\gamma - 2}{2}\right)S_0^2$, e $\Gamma = \left(\frac{3\gamma - 2}{2}\right)k$. Para $m \neq -4$, abandona-se a lei de conservação do spin, no sentido anteriormente aludido. Tem-se que $A=1$, se o tensor momento-energia é o fenomenológico, e $A \neq 1$ se o RS-EMT. Uma primeira integral para (2.6) é

$$\dot{R}^2 = p_0^2 R^{-2\alpha} - \frac{2\beta}{2\alpha + m} R^m - \frac{\Gamma}{\alpha}, \quad (2.7)$$

onde p_0^2 é uma constante de integração positiva. Substituindo (2.7) em (2.6) obtém-se

$$\frac{\ddot{R}}{R} = - \frac{\alpha p_0^2}{R^{2\alpha}} + \beta \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha + m}\right) R^m. \quad (2.8)$$

Note que (2.8) não depende do parâmetro de curvatura k , reproduzindo essencialmente a equação (4.3.1). A mesma análise lá realizada, que leva a sucessivas fases de expansão acelerada, é repetida aqui.

6.3 ANÁLISE QUALITATIVA DAS SOLUÇÕES

Uma solução exata geral para (2.7) ainda não foi encontrada. Entretanto, definindo-se $R = x$ e $\dot{R} = y$, obtém-se de (2.6) o sistema autônomo plano

$$\dot{x} = y = F(x, y), \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{x} (\alpha y^2 + \beta x^m + \Gamma) = H(x, y).$$

O comportamento qualitativo das soluções de (3.1) é investigado construindo-se os diagramas de fase do sistema. As curvas integrais nesses diagramas representam modelos cosmológicos evoluindo no tempo. Entretanto, soluções especiais correspondentes à pontos de equilíbrio do sistema dinâmico, pontos do plano em que o lado direito de (3.1) anula-se simultaneamente, descrevem modelos estáticos.

Observa-se que tais soluções estáticas situam-se sobre o eixo x ($y = 0$), correspondendo às raízes da equação

$$x^m = -\Gamma/\beta. \tag{3.2}$$

Uma vez determinados os pontos de equilíbrio, sua natureza topológica é determinada pelos métodos da teoria de sistemas dinâmicos^[98]. Note que o sistema (3.1) não está definido para $x = 0$. Assim, posto que $x < 0$ não tem significado físico, restringe-se a análise à região $x > 0$.

Para $k = -1$, não existem pontos de equilíbrio e modelos estáticos com métrica aberta não são permitidas na TEC.

Considere-se o caso $k = 1$. Como mencionado anteriormente, a condição de conservação do spin implica que o único valor assumido pelo parâmetro m é -4 . Nesse caso, (3.2) tem uma única raiz real e positiva, a saber, $x_0 = (-\beta/\Gamma)^{1/4}$. A localização exata desse ponto sobre o eixo- x depende dos valores escolhidos para S_0^2 , assim como da equação de estado obedecida pelo fluido. É importante mencionar que esta solução é formalmente idêntica à solução estática de Einstein na TRG.

Para fazer a determinação da natureza topológica do ponto de equilíbrio x_0 é preciso avaliar o traço I e o determinante Δ da matriz

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x=x_0, y=0)} \quad (3.3)$$

avaliados em $x = x_0$ and $y = 0$. Cálculo direto mostra que, para m qualquer, $I=0$ e $\Delta = -(m\Gamma/x_0^2)$. Assim, para $m < 0$ e $k = 1$, tem-se $\Delta > 0$, caracterizando uma configuração de curvas fechadas em torno de x_0 (um centro). O diagrama de fase dessas soluções é apresentado na Figura 6.3.1, construído com o auxílio do programa numérico Phaser^[99].

Observando o diagrama da Figura 6.3.1, conclui-se que as curvas fechadas representam uma classe de universos cíclicos e eternos, cujos raios oscilam entre valores máximo e mí-

nimo, passando pelo valor intermediário $R_0 = x_0$ (que corresponde

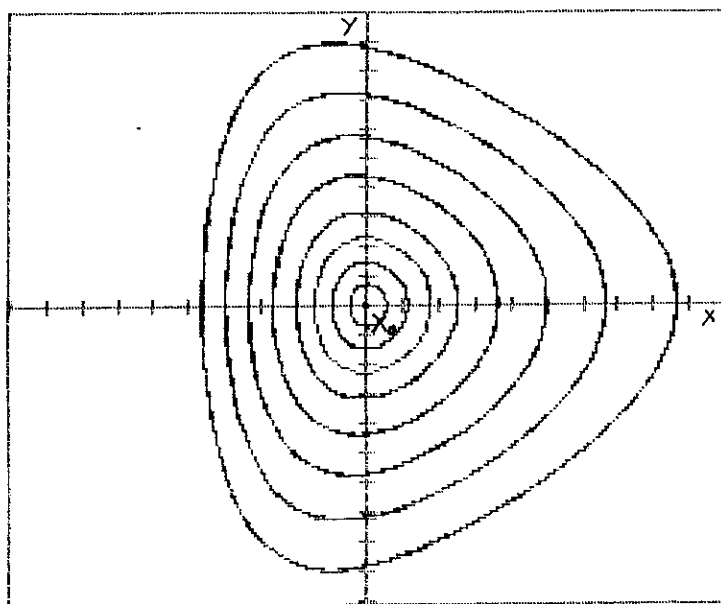


Figura 6.3.1: Curvas fechadas em torno de $x = x_0$

ao ao raio do universo estático). O cálculo explícito dos raios pode ser feito com o auxílio de (2.7). Uma solução típica dessa classe alterna eras de expansão e contração indefinidamente, em sequência infinitamente denumerável de ciclos. Note-se que esse efeito pulsante deve-se à presença de spin. De fato, anulando-se o spin, obtém-se os modelos de FRW fechados ($k = 1$) - universos que passam por não mais que um único ciclo, do *big bang* inicial ao colapso final.

A existência de fases aceleradas (ou inflacionárias) em cada uma das curvas da Figura 6.3.1 é vista considerando-se a região do plano de fase definida por $-\xi < y < \xi$ e $x^m < -\Gamma/\beta$. Se ξ é escolhido suficientemente pequeno, então $\ddot{R} = \dot{y} > 0$, e a

fase inflacionária ocorre imediatamente após o raio do universo atingir seu valor mínimo. Nesse estágio, a densidade de spin torna-se muito grande, e a interação repulsiva spin-spin predomina, sendo responsável pela expansão acelerada. Este efeito torna-se mais significativo quando se passa das curvas interiores para as mais externas, uma vez que, nesse processo o raio mínimo torna-se cada vez menor.

Finalmente, examina-se a estabilidade da solução estática sob perturbações métricas finitas e infinitesimais. Por perturbações finitas da solução tipo Einstein (representada pelo ponto de equilíbrio x_0), entende-se passar de x_0 para uma das curvas fechadas em torno de x_0 . Uma vez que o comportamento das soluções é periódico e oscilatório, porém, em geral não harmônico, conclui-se que a solução estática é estável sob perturbações finitas. Para estudar perturbações infinitesimais na solução estática ($x_0 \rightarrow x_0 + \delta x$), expande-se o lado direito de (3.1) em torno de x_0 , mantendo-se apenas os termos lineares, obtendo-se

$$(\delta x)'' + \omega^2 \delta x = 0 , \quad (3.4)$$

onde $\delta x = (x - x_0)$, e $\omega^2 = \beta m x_0^{m-2} > 0$. Conclui-se que o universo perturbado oscila harmonicamente em torno da configuração estática, como obtido por NP.

CAPÍTULO 7

UNIVERSOS DE BIANCHI ESTÁTICOS COM MATÉRIA POLARIZADA

E CAMPO ELETROMAGNÉTICO NULO

7.1 INTRODUÇÃO

Trabalhos conhecidos na literatura, nos quais se discute a existência de soluções cosmológicas da TEC para os tipos de Bianchi II, VIII e XI, parecem não conclusivos e controversos. De acordo com Tafel^[51], a equação de Raychaudhury sugere que modelos não singulares dos tipos de Bianchi I a VIII são possíveis. Em outro trabalho^[20], ele mostrou que não existem soluções do tipo II, mas modelos dos tipos VIII e IX podem existir. Lorenz^[63,64] afirma a existência de soluções dos tipos II, VIII e IX para as equações acopladas de Einstein-Cartan-Maxwell, sem exibir, no entanto, qualquer uma delas. Tsoubelis^[59] conclui que nenhuma solução do tipo II é possível para modelos com fluido com spin e campo magnético. Teixeira^[61] mostra uma so-

lução estática do tipo IX, gerada por fluido perfeito com spin e campo magnético de Proca, enfatizando que soluções com fluido e campo magnético de Maxwell parecem impossíveis para o tipo IX. Todos os trabalhos citados fazem uso do tensor fenomenológico para o fluido com spin. A mesma descrição é aqui adotada para discutir universos dos tipos II, VIII e IX, gerados por fluido perfeito polarizado e campo eletromagnético nulo.

7.2 NOTA SOBRE O ELETROMAGNETISMO EM U_4

No contexto da TRG, define-se o tensor do campo eletromagnético

$$F_{AB} = 2 \nabla_{[A}^R A_{B]} , \quad (2. 1)$$

onde A_B é o potencial vetor. A densidade lagrangiana para o campo se escreve

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{AB} F^{AB} , \quad (2. 2)$$

de onde são obtidas as equações de Maxwell (∇^R é a conexão riemanniana):

$$\nabla_{[C}^R F_{AB]} = 0 , \quad (2. 3)$$

$$\nabla_B^R F^{AB} = J^A , \quad (2. 4)$$

e o tensor de momento energia para o campo eletromagnético

$$E_{AB} = \frac{1}{4} g_{AB} F^{CD} F_{CD} - F_A^C F_{BC}. \quad (2.5)$$

Aplicando-se a prescrição de acoplamento mínimo ao passar para U_4 , (2.1) fornece o novo tensor

$$\tilde{F}_{AB} = 2V_{[A} A_{B]} = 2V_{[A}^R A_{B]} - T_{AB}^C A_C, \quad (2.6)$$

que é uma expressão dependente de uma transformação de gauge do tipo $A_B \rightarrow A_B + \partial_B \phi$. Assim sendo, parece ser apropriado proibir a aplicação do princípio de acoplamento mínimo ao campo eletromagnético, mantendo-se a expressão do tensor F_{AB} , dada em (2.1), e as equações de Maxwell (2.3,4). Conclui-se que um fóton não gera, nem é afetado pela torção do espaço-tempo^[14], mostrando-se também, que o princípio do acoplamento mínimo aplicado ao campo eletromagnético conduziria à violação do princípio da conservação da carga^[57].

Entretanto, Novello^[10] mostrou que, embora o fóton não se acople com a geometria mais geral de U_4 , pode interagir, sem o sacrifício da invariância de gauge da teoria eletromagnética e sem a violação da conservação da carga, com certas estruturas de torção. Em particular, com estruturas de torção que possuem apenas traço e pseudo-traço não nulos, sendo nula a parte sem traço da torção.

Como a torção induzida por spin clássico não se enquadra na geometria restrita de U_4 mencionada acima, adota-se

a prescrição de Hehl^[14] no que se segue.

7.3 MODELOS TIPO II, VIII E IX COM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Escrevendo as equações de campo da TEC na forma $G_{AB} = T_{AB}^F + E_{AB}$, e tomando seu traço, obtém-se

$$R_{00} = \frac{1}{2} (\rho + 3p) + E_{00} , \quad (3.1a)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} (\rho - p) + E_{11} , \quad (3.1b)$$

$$R_{01} = E_{01} , \quad (3.1c)$$

$$R_{1j} = E_{1j} , \quad (3.1d)$$

$$R_{1j} - R_{j1} = 0 . \quad (3.1e)$$

A última equação reproduz (3.3.2), enquanto as equações (3.1.c,d) constituem relações entre as componentes do vetor de spin, o tensor de campo eletromagnético e a expansão dos modelos, nas formas [c.f. (3.3.10,11)]

$$\frac{N^1 S_0^1}{(R_j R_m)^2} = E_{01} , \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{1jm} S^m (H_1 - H_j) = E_{1j} . \quad (3.3)$$

Na ausência do campo eletromagnético, (3.2) impede a existência de soluções tipo VIII e IX. Com o vetor de spin alinhado ao longo de alguma direção particular, (3.3) assegura que os modelos adquirem simetria rotacional em torno daquela direção. Para modelos do tipo II ($N^1 > 0$, $N^2 = N^3 = 0$), (3.2) impede o alinhamento do vetor de spin ao longo da direção 1. As equações de campo restantes, entretanto, são incompatíveis com tal escolha [c.f. (3.3.18c)]. Portanto, um fluido perfeito polarizado pode contribuir para gerar modelos tipo II, VIII e IX, apenas em presença de algum conteúdo material adicional que permita escrever $R_{01} = T_{01} \neq 0$. Por esse motivo, os resultados negativos encontrados na literatura são consistentemente explicados anulando-se o lado direito de (3.2,3).

Note que as componentes E_{ij} anulam-se com a escolha $s^m \neq 0$, $H_1 = H_j$, restando apenas as componentes E_{01} se $N^1 \neq 0$. Assim, pode-se tomar $s^1 \neq 0$, $H_2 = H_3 \neq H_1$, com o objetivo de discutir simultaneamente as soluções para os tipos II, VIII e IX. Escolhe-se ainda $N^2 = N^3 = N$, que é natural para o caso II.

Tomando $R_1 = S$, $R_2 = R_3 = R$, as equações de campo (3.1) são reescritas na forma [c.f. (3.3.18)]

$$\rho = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{S}}{S} \frac{\dot{R}}{R} \right) + \frac{(S_0^1)^2}{(SR^2)^2} +$$

$$+ \frac{N^1}{R^4} (NR^2 - \frac{N^1}{4} S^2) - E_{00} ,$$
(3.4a)

$$\begin{aligned}
p = & -\frac{2}{3}\left(\frac{\dot{S}}{S}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{S}\dot{R}}{SR}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \\
& + \frac{(S_0^1)^2}{(SR^2)^2} - \frac{N^1}{3R^4}(NR^2 - \frac{N^1}{4}S^2) - \frac{2}{3}E_{00} ,
\end{aligned} \tag{3.4b}$$

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right) - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right) + \left(\frac{\dot{S}\dot{R}}{SR}\right) - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \tag{3.4c}$$

$$+ \frac{N^1}{R^4} (N^1 S^2 - NR^2) = (E_{11} - E_{22}) ,$$

$$E_{22} = E_{33} , \tag{3.4d}$$

$$\frac{N^1 S_0^1}{R^4} = E_{01} , \quad 0 = E_{02} = E_{03} , \tag{3.4e}$$

$$0 = E_{ij} . \tag{3.4f}$$

As soluções das equações de Bianchi-Maxwell para modelos da classe A, na ausência dos termos de fontes, são dadas por^[101]

$$E_i = \frac{1}{R_j R_m} (a_i \sin N^1 \tau_i + b_i \sin N^1 \tau_i) , \tag{3.5a}$$

$$B_i = \frac{1}{R_j R_m} (-b_i \sin N^1 \tau_i + a_i \sin N^1 \tau_i) , \tag{3.5b}$$

onde $d\tau_i = \frac{R_i}{R_j R_m} dt$. Seis constantes a_i, b_i , determinam as componentes do campo eletromagnético, sendo as do tensor de momento

energia para o campo dadas por

$$E_{00} = \frac{1}{2} \left[\frac{a_1^2 + b_1^2}{(R_2 R_3)^2} + \frac{a_2^2 + b_2^2}{(R_1 R_3)^2} + \frac{a_3^2 + b_3^2}{(R_2 R_3)^2} \right] \quad (3.6a)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{a_j^2 + b_j^2}{(R_1 R_k)^2} + \frac{a_k^2 + b_k^2}{(R_1 R_j)^2} - \frac{a_1^2 + b_1^2}{(R_j R_k)^2} \right] \quad (3.6b)$$

$$E_{01} = \frac{\epsilon_{ijk}}{R_1^2 R_j R_k} \left[(a_j b_k - a_k b_j) \cos (N^j \tau_j - N^k \tau_k) - \right. \\ \left. - (a_j a_k + b_j b_k) \operatorname{sen} (N^j \tau_j - N^k \tau_k) \right] \quad (3.6c)$$

$$E_{1j} = - \frac{1}{R_1 R_j R_k^2} \left[(a_1 a_j + b_1 b_j) \cos (N^1 \tau_1 - N^j \tau_j) - \right. \\ \left. + (a_1 b_j - a_j b_1) \operatorname{sen} (N^1 \tau_1 - N^j \tau_j) \right] \quad (3.6c)$$

Observa-se que quatro das equações (3.4e,f) são idênticamente satisfeitas se $a_1 = b_1 = 0$. Usando as expressões acima, juntamente com (3.4d,f), as seguintes relações são obtidas:

$$a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2, \quad (3.7a)$$

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 = 0, \quad (3.7b)$$

implicando que

$$b_3 = k a_2, \quad a_3 = -k b_2, \quad k^2 = 1. \quad (3.7c)$$

Um campo eletromagnético nulo é compatível com as equações acopladas de Einstein-Cartan-Maxwell, sendo as componentes do tensor de energia momento dadas por

$$E_{00} = E_{11} = \frac{\Sigma^2}{(RS)^2} = \frac{1}{k} E_{01}, \quad (3.8)$$

onde a intensidade do campo eletromagnético é $\Sigma^2 = a_2^2 + b_2^2$. Segue-se de (3.4e) que $R = S$ se $\Sigma^2 = \frac{N^1 s_0^1}{k}$. A densidade de energia eletromagnética é positiva se $k = -1$ para o tipo VIII e $k = +1$ para os tipos II e IX. Uma mudança de fase nas componentes dos campos ocorre quando se passa dos modelos tipo VIII para os tipos II e IX.

O fator de escala é determinado de (3.4c) na forma

$$R = S = \sqrt{\frac{s_0^1}{k (N^1 - N)}}, \quad (3.9)$$

enquanto (3.4 a,b) resolvem a densidade de energia e a pressão:

$$\rho = \frac{k (N^1 - N)}{s_0^1} \left[N^2 - \frac{(N^1)^2}{4} \right], \quad (3.10)$$

$$p = \lambda \rho, \quad \lambda = \frac{2N - 3N^1}{2N + N^1}. \quad (3.11)$$

Contrariando os resultados negativos de Tafel^[20] e Tsoubelis^[59], parece possível compatibilizar a estrutura geométrica Bianchi tipo II no contexto das cosmologias da TEC. En-

tretanto, a condição $\rho < 0$, $\lambda = -3$, obtida de (3.10,11), mostra que uma solução consistente ainda não foi encontrada.

Para evitar mudança na assinatura da métrica e assegurar a positividade da densidade de energia, o parâmetro N^1 deve se restringir aos intervalos $0 > N^1 > -2N$ e $2N > N^1 > N$, com $N > 0$, para os modelos tipo VIII e IX, respectivamente. A condição $\lambda > 1$ deve ser observada para o tipo VIII [c.f. (3.12)].

A solução tipo IX, assim como a Ref. [61], mostram que distribuições de spin alinhados podem ser compatibilizados com a geometria de universos fechados. No caso em estudo, um tipo arbitrário de matéria, com $-1/3 > \lambda > -1$ ($|\rho| < \rho$) contribui para gerar uma solução estática, semelhante à solução de Einstein na TRG. Deve-se observar que a remoção da singularidade característica dos modelos da TRG é um efeito devido exclusivamente à presença de spin. Anulando-se o parâmetro de spin nas equações de campo (3.4), recai-se no estudo de modelos tipo II, VIII e IX com fluido perfeito e campo eletromagnético daquela teoria. Verifica-se, na TRG, que a presença do campo pode apenas afetar o intervalo de tempo entre as duas singularidades presentes nos modelos tipo IX, sem, no entanto, removê-las^[102].

Os modelos apresentados não apresentam expansão, sendo homogêneos no espaço-tempo. O campo eletromagnético fornece tensões adicionais necessárias para gerar a estrutura do campo gravitacional, que não pode ser obtida apenas em presença de fluido perfeito com spin. Entretanto, os campos gravitacional e eletromagnético não compartilham das mesmas simetrias ($\partial/\partial t$ não é um vetor de Killing para o campo eletromagnético, exceto

no caso II).

Para concluir, deve-se registrar que os modelos apresentados evidenciam apenas a possibilidade de compatibilizar-se as equações de campo da TEC com as estruturas geométricas dos tipos de Bianchi II, VIII e IX. Exigem esforços adicionais para serem compatibilizados com a lei de Hubble, gerados por fluidos realistas.

CONCLUSÕES

Este trabalho é dedicado ao estudo de soluções cosmológicas espacialmente homogêneas da Teoria de Einstein-Cartan. Os resultados obtidos podem ser sumarizados como se segue.

a) Demonstra-se que as equações de campo da TEC podem ser obtidas através do Princípio de Hilbert estendido à U_4 , que prescreve a métrica e a contorção como quantidades independentes no processo variacional.

b) Obtém-se, por meio desse procedimento, os termos de superfície omitidos na formulação variacional baseada no Princípio de Palatini. Verifica-se que apenas o traço da contorção e a variação de seu traço, contribuem para os termos que se adicionam ao termo de superfície puramente riemaniano.

c) As equações de campo para modelos de Bianchi na TEC, gerados pelo tensor de momento-energia fenomenológico

para o fluido perfeito com spin, são construídas em termos dos parâmetros que definem as diferentes geometrias dessa classe. Em princípio, se possível for, a solução geral do sistema apresentado constitui solução multiparamétrica que unifica todas as soluções geradas por fluido perfeito na TEC e na TRG. A especialização dessa solução geral para cada um dos tipos de Bianchi se fará por deformações contínuas dos parâmetros.

d) Analisam-se as estruturas possíveis para o vetor de spin e as cinemáticas admissíveis para os modelos de Bianchi na TEC. Verifica-se que todos os modelos da classe A adquirem simetria rotacional em torno da direção de alinhamento do vetor de spin. A análise feita não é, entretanto, a mais geral, que será obtida através de estudo que inclua os grupos de automorfismos dos grupos de Bianchi.

e) Constrói-se a solução geral e unificada para modelos de Bianchi tipo I na TEC e na TRG. Propositadamente escrita de forma generalizada, a mesma estrutura de solução presta-se ao estudo de outras classes de modelos na TEC e na TRG, baseados em diferentes hipóteses para o substrato cosmológico e sua cinemática.

f) Mostra-se que todas as classes de soluções contidas na solução generalizada são redutíveis à dinâmica de um oscilador harmônico simples. A estrutura generalizada da solução permite ainda a comparação dos modos de evolução de modelos em diferentes classes de soluções nela contidas.

g) Verifica-se a existência de uma fase de expansão acelerada no decorrer da evolução de modelos tipo I, gerados por fluido perfeito com spins alinhados. Entretanto, tal fase

não é realista, segundo o critério de Abbot e Wise^[80], sendo similar àquela demonstrada por Gasperini^[22], para uma distribuição aleatória de spins. Responde-se, portanto, de forma negativa à sugestão feita pelo último autor para resolver os problemas lá encontrados.

h) Uma aplicação importante da solução generalizada é feita às cosmologias de FRW da TRG. Constrói-se o espectro contínuo de soluções dessa classe, dependentes do par de parâmetros (γ, k) . Mostra-se que o período (intervalo de tempo entre duas singularidades) dos modelos fechados decresce com o aumento do conteúdo de massa-energia dos modelos.

i) Mostra-se que as soluções Bianchi tipo I da TEC, geradas pelo tensor de momento-energia de Ray-Smalley, e exibidas por Bradas, Fenneley e Smalley, são inconsistentes com o postulado métrico da TEC.

j) Mostra-se que os cenários inflacionários existentes em cosmologias Bianchi tipo I geradas pelo tensor de Ray-Smalley dependem do grau de generalidade da métrica adotada. Podem ocorrer três possibilidades distintas para a expansão acelerada, duas delas não apresentadas nos trabalhos citados.

k) Demonstra-se a existência de classes de universos fechados (Bianchi tipo IX) inflacionários, eternos e pulsantes, gerados por fluido perfeito com distribuição aleatória de spins. Tais classes existem independentemente da descrição utilizada para o tensor de momento-energia: se o fenomenológico ou o de Ray-Smalley.

l) As soluções estáticas existentes nessa classe de modelos, representadas por pontos de equilíbrio no diagrama

de fase do sistema, são estáveis tanto sob perturbações finitas como infinitesimais da métrica.

m) Exibem-se soluções estáticas, geradas por fluido perfeito com spins alinhados e campo eletromagnético nulo, para os tipos de Bianchi II, VII e IX. Tais soluções, embora não realistas, mostram que parece ser possível compatibilizar as estruturas geométricas desses tipos de Bianchi com o alinhamento de spins, contrariando resultados conhecidos na literatura.

APÊNDICE A

A GEOMETRIA DE UMA VARIEDADE AFIM

A.1 - Introdução

Este apêndice tem por objetivo o estudo da geometria das variedades afins, em particular, as variedades de Riemann-Cartan (U_n) e Riemann (R_n).

Objetos geométricos serão definidos de forma invariante, sem referência a um sistema de coordenadas particular. Como o uso de coordenadas, ou a escolha de uma base para o espaço tangente à variedade, é operacional, componentes de objetos geométricos serão explicitadas em bases arbitrárias.

Trata-se de assunto conhecido, encontrado em textos clássicos como Schouten^[103] e Tonnelat^[104], ou em abordagem invariante voltada para o interesse matemático apresentada por Spivak^[105]. Textos como Lovelock, Hund^[106], Schutz^[107] ou

Chandrasekhar^[108], via de regra privilegiam o tratamento da geometria de R_n , ou a base de coordenadas no estudo de U_n .

O tratamento invariante da geometria das variedades afins é útil por: a) precisar as simetrias adquiridas pelos objetos geométricos no processo de especialização de variedades, em particular pela curvatura; b) unificar algoritmos de determinação da geometria, isto é, o cálculo usual na base de coordenadas, e o cálculo na base tetrádica ou base ortonormal.

A.2 - Conexão Afim e Derivada Covariante

Considere uma variedade diferenciável M , de dimensão n . Em cada ponto $p \in M$, vetores do espaço tangente T_p são representados na forma $X = X^i e_i$, e têm estrutura de operadores diferenciais sobre funções em M :

$$X[f] \equiv X^i e_i [f] = X^i e_i^\alpha \partial_\alpha f,$$

onde $\partial_\alpha f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$. O conjunto $\{e_i\}$ é base para T_p , e a base $\{\partial_i\}$ denomina-se base de coordenadas ou base canônica para T_p .

Aplicações lineares sobre T_p com valores reais, $T_p^* : T_p \rightarrow \mathbb{R}$, definem o espaço dual T_p^* . Seus elementos são representados na forma $\omega = \omega_i e^i$, onde $\{e^i\}$ é base para T_p^* , satisfazendo a relação $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Como $e^i(X) = X^i$, $e_i(\omega) = \omega_i$, obtém-se a contração usual $\omega(X) = X^i \omega_i$.

Um tensor misto, r -contravariante, s -covariante,

é aplicação multilinear $T : \left(\prod_{n=1}^r T_{p(n)} \right) \times \left(\prod_{m=1}^s T_{p(m)}^* \right) \rightarrow \mathbb{R}$, denominado tensor tipo $\binom{r}{s}$. Tal conjunto tem estrutura de espaço vetorial, denotado por $I_s^r(T_p)$, e os n^{r+s} elementos

$$e^{j(1)} \otimes \dots \otimes e^{j(s)} \otimes e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(r)},$$

definem sua base. As quantidades

$$T^{i(1) \dots i(r)}_{j(1) \dots j(s)} \equiv T \left(e_{j(1)}, \dots, e_{j(s)}, e^{i(1)}, \dots, e^{i(r)} \right),$$

são as componentes do tensor na base $\{e_i\}$ e a base dual $\{e^j\}$. Discute-se tais conceitos nos textos modernos citados, podendo-se ainda consultar Assad⁽⁶⁹⁾, do qual este Apêndice é extensão.

Vetores, tensores, e respectivos espaços vetoriais surgem da estrutura diferenciável da variedade. A conexão afim é estrutura suplementar, associada a uma regra para transporte paralelo em M , que permite definir torção e curvatura.

Uma conexão afim ∇ em M associa a cada campo vetorial U um operador diferencial ∇_U , que mapeia um campo tensorial W em outro campo tensorial $\nabla_U W$, com as propriedades:

$$a) \nabla_{fU+gZ} W = f \nabla_U W + g \nabla_Z W, \quad (2.1)$$

$$b) \nabla_U (fW) = U[f] W + f \nabla_U W, \quad (2.2)$$

$$c) \nabla_U (W + Z) = \nabla_U W + \nabla_U Z, \quad (2.3)$$

$$d) \nabla_U f = U [f] , \quad (2.4)$$

onde f e g são funções. Estende-se a ação de ∇_U sobre tensores arbitrários e contrações através das regras de Leibniz

$$e) \nabla_U (A \otimes B) = \left(\nabla_U A \right) \otimes B + A \otimes \left(\nabla_U B \right) , \quad (2.5)$$

$$f) \nabla_U A(B) = \left(\nabla_U A \right) (B) + A \left(\nabla_U B \right) , \quad (2.6)$$

onde $A, B \in I_s^r$, com $r, s \geq 1$ em (2.6). Com essas propriedades, ∇_U é um operador que preserva o tipo tensorial, mostrando-se que:

$$\begin{aligned} g) \left(\nabla_U A \right) (X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &= \\ &= \nabla_U A(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^r A(X_1, \dots, \nabla_U X_i, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^s A(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \nabla_U \omega^j, \dots, \omega^s) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Em particular

$$\nabla_{e_i} e_j = \left(\nabla_{e_i} e_j \right)^k e_k \equiv \Gamma_{ij}^k e_k , \quad (2.8)$$

e usando (2.6)

$$\nabla_{e_i} e^j = - \Gamma_{ik}^j e^k . \quad (2.9)$$

As n^3 funções Γ_{ij}^k determinam a conexão afim ∇ em

M, podendo-se ainda escrever (2.8) na seguinte forma:

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k = \omega_j^k(e_i) e_k ,$$

onde as n^2 1-formas de conexão ω_i^k são definidas por

$$\omega_j^k = \Gamma_{rj}^k e^r . \quad (2.10)$$

Transformações da afinidade Γ_{ij}^k são obtidas de (2.1), (2.2) e (2.7). Se $\bar{e}_c = \phi_c^m e_m$ e $\bar{e}^a = \phi^a_k e^k$ são novas bases obtidas por meio da matriz de transformação ϕ , então:

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a = \left(\bar{e}_b[\phi_c^k] + \phi_b^i \phi_c^j \Gamma_{ij}^k \right) \phi_k^a .$$

Na base de coordenadas a expressão acima revela que a conexão afim não é um tensor, porém, objetos proporcionais à sua parte antissimétrica nos índices inferiores, terão caráter tensorial.

Com a ação de ∇ dada por (2.1-6), define-se a derivada covariante de um campo vetorial Y, denotada por ∇Y , como o campo tensorial tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que mapeia todo campo vetorial X em $\nabla_X Y$, através da contração

$$(\nabla Y)(X) = \nabla_X Y . \quad (2.11)$$

Em componentes, a relação acima escreve-se

$$\left(\nabla Y \right)_m^i \equiv \nabla_m Y^i = e_m[Y^i] + Y^k \Gamma_{mk}^i . \quad (2.12)$$

Na base de coordenadas $\left(\nabla Y\right)_m^i \equiv Y_{//m}^i$.

Similarmente, a derivada covariante de um tensor $A \in I_s^r$ é um tensor tipo $\left(\begin{smallmatrix} r \\ s+1 \end{smallmatrix}\right)$, que contraído com o campo vetorial X reproduz $\nabla_X A$. Assim, para $\omega \in T_p^*$

$$\left(\nabla \omega\right)_{im} \equiv \nabla_m \omega_i = e_m[\omega_i] - \omega_k \Gamma_{mi}^k. \quad (2.13)$$

Análogamente, definem-se derivadas covariantes consecutivas. A derivada covariante segunda de um vetor $Z \in T_p$, denotada por $(\nabla \nabla Z)$, é o tensor tipo $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ que mapeia todo vetor X em $\nabla_X (\nabla Z)$ - um tensor tipo $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ - através da contração

$$(\nabla \nabla Z)(X) \equiv \left(\nabla \nabla Z\right)_{jm}^i X^m e_i \otimes e^j = \nabla_X (\nabla Z). \quad (2.14)$$

Usando (2.5), e fazendo nova contração, obtém-se

$$\begin{aligned} \left((\nabla \nabla Z)(e_m)\right)(e_k) &= \left(\nabla \nabla Z\right)_{km}^i e_i = \\ &= \left(e_m[(\nabla Z)_k^i] + (\nabla Z)_k^r \Gamma_{mr}^i - (\nabla Z)_r^i \Gamma_{mk}^r\right) e_i. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Na base de coordenadas $\left(\nabla \nabla Z\right)_{km}^i \equiv Z_{//k//m}^i$.

Dados um tensor $A \in I_s^r$ e $X, Y \in T_p$, $\left(\nabla_X \nabla_Y A\right)$ é obtido através da seguinte contração [c.f.(2.6)]:

$$\nabla_X \nabla_Y A = \left((\nabla \nabla A)(X)\right)(Y) + (\nabla A) \left((\nabla Y)(X)\right). \quad (2.16)$$

A.3 - Torção

Define-se o vetor de torção por

$$T(X, Y) = \frac{1}{2} \left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \right) , \quad (3. 1)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

$$T(X, Y) = - T(Y, X) , \quad (3. 2)$$

$$T(fX, Y) = f T(X, Y) , \quad (3. 3)$$

onde $X, Y \in T_p$, $[X, Y] \equiv XY - YX$, e f é função em M .

O mapeamento $(X, Y, \omega) \rightarrow \omega \left(T(X, Y) \right)$ é função multilinear sobre $T_p \times T_p \times T_p^*$ em cada ponto e define o tensor de torção, com componentes

$$e^k \left(T(e_i, e_j) \right) \equiv T_{ij}{}^k = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{ij}{}^k - \Gamma_{ji}{}^k - C_{ij}{}^k \right) . \quad (3. 4)$$

$C_{ij}{}^k$ são as funções de estrutura, dadas por $[e_i, e_j] = C_{ij}{}^k e_k$. Na base de coordenadas $C_{ij}{}^k = 0$, e o tensor de torção é a parte antissimétrica da conexão afim.

tissimétrica da conexão afim.

A interpretação geométrica da torção é ilustrada na Figura A.3.1. Dados dois vetores X e Y , tangentes à curvas parametrizadas com parâmetros η e λ , respec-

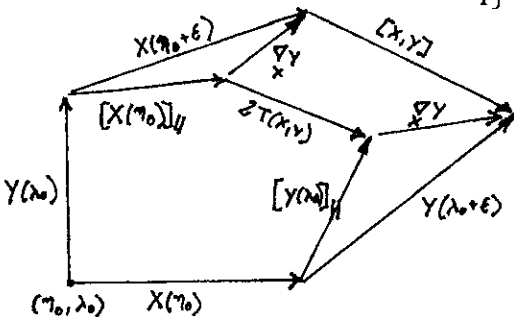


Figura A.3.1: Interpretacao geometrica da torcao

tivamente, não é possível fechar o paralelogramo gerado por $X(\eta_0)$, $Y(\lambda_0)$ e mesmos vetores paralelamente transportados, ainda que o comutador desses vetores seja nulo. O vetor de torção está associado ao deslocamento adicional necessário para fechar tal circuito na variedade afim.

A.4 - Curvatura

Dados $X, Y \in T_p$, define-se o operador sobre campos tensoriais arbitrários, denominado operador de curvatura, por

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - [\nabla_X, \nabla_Y] , \quad (4. 1)$$

possuindo as seguintes propriedades:

$$a) R(X, Y) = - R(Y, X) , \quad (4. 2)$$

$$b) R(fX, Y) [Q] = f R(X, Y) [Q] , \quad (4. 3)$$

$$c) R(X, Y) [fQ] = f R(X, Y) [Q] , \quad (4. 4)$$

$$d) R(X, Y) [P \otimes Q] = \left(R(X, Y) [P] \right) \otimes Q + \\ + P \otimes \left(R(X, Y) [Q] \right) , \quad (4. 5)$$

que seguem de (2.1-6), onde $P, Q \in I_s^r$ e f é função em M .

Usando (2.10), (2.16) e (3.1), verifica-se diretamente que, para qualquer tensor $Q \in I_s^r$ e $X, Y \in T_p$

$$\begin{aligned} & \left[(\nabla \nabla Q)(X) \right] (Y) - \left[(\nabla \nabla Q)(Y) \right] (X) = \\ & = R(X, Y) [Q] - 2 (\nabla Q) \left(T(X, Y) \right) . \end{aligned} \tag{4. 6}$$

Cálculo direto mostra que, dados $X, Y, Z \in T_p$

$$\begin{aligned} & R(X, Y) [Z] = \\ & = \left(2e_{[i} \left[\Gamma_{j]k}^m \right] + 2\Gamma_{[i[r} \Gamma_{j]k}^m - C_{ij}^r \Gamma_{rk}^m \right) X^i Y^j Z^k e_m . \end{aligned} \tag{4. 7}$$

Se $\omega \in T_p^*$, o mapeamento $(X, Y, Z, \omega) \rightarrow \omega \left(R(X, Y) [Z] \right)$ é forma multilinear sobre $T_p \times T_p \times T_p \times T_p^*$ em cada ponto, definindo o tensor de curvatura, cujas componentes numa base arbitrária são:

$$R_{ijk}^m \equiv e^m \left(R(e_i, e_j) [e_k] \right) = \tag{4. 8}$$

$$2e_{[i} \left[\Gamma_{j]k}^m \right] + 2\Gamma_{[i[r} \Gamma_{j]k}^m - C_{ij}^r \Gamma_{rk}^m ,$$

obtendo-se de (4.1-6): a) Se f é uma função

$$R(X, Y) [f] = 0 , \tag{4. 9}$$

$$(\nabla \nabla f)_{ij} - (\nabla \nabla f)_{ji} = 2 T_{ij}^k e_k [f] ;$$

b) Para $Z \in I_0^1$, tem-se

$$\left(\nabla \nabla Z\right)_{mk}^i - \left(\nabla \nabla Z\right)_{km}^i = -Z^r R_{mkr}^i + 2 T_{mk}^r \left(\nabla_r Z^i\right); \quad (4.10)$$

c) Para $\omega \in I_1^0$, encontra-se

$$\left(R(X, Y) [\omega]\right)_k = -X^i Y^j R_{ijk}^m \omega_m, \quad (4.11)$$

$$\left(\nabla \nabla \omega\right)_{ihm} - \left(\nabla \nabla \omega\right)_{imh} = R_{hmi}^k \omega_k + 2 T_{hm}^k \left(\nabla_k \omega_i\right),$$

d) Se $g \in I_2^0$

$$\left(\nabla \nabla g\right)_{ijmh} - \left(\nabla \nabla g\right)_{ijhm} = \quad (4.12)$$

$$= R_{mhi}^k g_{kj} + R_{hmj}^k g_{ik} + 2 T_{hm}^k \nabla_k g_{ij},$$

onde, na base de coordenadas, $\left(\nabla \nabla g\right)_{ijmh} \equiv g_{ij//m//h}$. Relações análogas à (4.9-12) podem ser escritas para tensores quaisquer.

Deve-se observar que o tensor de curvatura é antissimétrico em seus dois primeiros índices:

$$R(X, Y) = -R(Y, X) \Rightarrow R_{(ij)k}^m = 0. \quad (4.13)$$

Esta é a única, e fundamental, propriedade de simetria da curvatura em A_n . Outras simetrias exigem a imposição de restrições à variedade, tais como a condição de metricidade, como ocorre em U_n , e que, adicionalmente, a torção é nula, como ocorre em R_n .

Considere-se a permutação cíclica dos argumentos do operador de curvatura

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \left(R(X, Y) [Z] + R(Z, X) [Y] + R(Y, Z) [X] \right) = \\ &= \nabla_X T(Y, Z) + \nabla_Z T(X, Y) + \nabla_Y T(Z, X) + \\ &+ T(X, [Y, Z]) + T(Y, [Z, X]) + T(Z, [X, Y]) , \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde foi utilizada (3.1) e a Identidade de Jacobi. Numa base arbitrária, a expressão acima torna-se

$$R_{[i]jk}{}^m = 2 \nabla_{[i} T_{jk]}{}^m - 4 T_{[ij}{}^r T_{klr]}{}^m , \quad (4.15)$$

que, quando contraída, é colocada sob forma de uma divergência. Com esse intuito, define-se a torção modificada

$$\mathcal{J}_{ki}{}^m = T_{ki}{}^m + 2 \delta_{[k}^m T_{i]r}{}^r = - \mathcal{J}_{ik}{}^m , \quad (4.16)$$

e o operador

$$\nabla_m^* = \nabla_m + 2 T_{mr}{}^r , \quad (4.17)$$

obtendo-se

$$-\frac{3}{2} R_{[m]jk}{}^m = \nabla_m^* \mathcal{J}_{jk}{}^m . \quad (4.18)$$

Considere-se a ação de ∇_Z sobre $R(X, Y) [U]$. Usando (2.7) e denotando por $\{X, Y, Z\}$ a permutação cíclica desses vetores, obtém-se

$$\begin{aligned} \left\{ (\nabla_{\frac{V}{Z}} R) (X, Y) \right\} U &= \left\{ \nabla_{\frac{V}{Z}} R(X, Y) \right\} [U] - \left\{ R(\nabla_{\frac{V}{Z}} X, Y) \right\} [U] - \\ &- \left\{ R(X, \nabla_{\frac{V}{Z}} Y) \right\} [U] - \left\{ R(X, Y) [\nabla_{\frac{V}{Z}}] U \right\} . \end{aligned}$$

Mas, usando (3.1) e (4.1), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} 2 R\left\{ \left(T(X, Y), Z \right) \right\} [U] &= \\ = \left\{ R(\nabla_{\frac{V}{X}} Y, Z) \right\} [U] + \left\{ R(Z, \nabla_{\frac{V}{Y}} X) \right\} [U] - \left\{ R([X, Y], Z) \right\} [U] &= \\ = \left\{ R(\nabla_{\frac{V}{Z}} X, Y) \right\} [U] + \left\{ R(X, \nabla_{\frac{V}{Z}} Y) \right\} [U] - \left\{ R([X, Y], Z) \right\} [U] . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \left\{ (\nabla_{\frac{V}{Z}} R) (X, Y), U \right\} + 2 \left\{ R\left(T(X, Y), Z \right) \right\} [U] &= \\ = \left\{ \nabla_{\frac{V}{Z}} R(X, Y) \right\} [U] - \left\{ R(X, Y) [\nabla_{\frac{V}{Z}}] U \right\} - \left\{ R([X, Y], Z) \right\} [U] . \end{aligned}$$

Usando (4.1), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{V}{Z}} R(X, Y) [U] - R(X, Y) [\nabla_{\frac{V}{Z}}] U - R([X, Y], Z) [U] &= \\ = \left[\nabla_{\frac{V}{Z}}, \left[\nabla_{\frac{V}{X}}, \nabla_{\frac{V}{Y}} \right] \right] [U] + \left[[X, Y], Z \right] U . \end{aligned}$$

Ao se permutar cíclicamente os índices, a relação acima se anula, devido à Identidade de Jacobi. Dessa forma

$$\left\{ \left(\nabla_Z R \right) (X, Y), U \right\} + 2 \left\{ R \left(T(X, Y), Z \right) \right\} [U] = 0 \quad (4.19)$$

Numa base arbitrária, esta relação toma a forma

$$\nabla_{[i} R_{j]k]m}{}^s = 2 T_{[ij}{}^r R_{k]rm}{}^s, \quad (4.20)$$

que é a identidade de Bianchi em A_n .

A.5 - Tensor Métrico e Condição de Metricidade

Um produto escalar é uma regra que associa um número real a cada par de vetores de um dado espaço vetorial. Como aplicação linear em cada um de seus argumentos, define um tensor simétrico, tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, denominado tensor métrico:

$$g(U, V) = g(V, U) \equiv U \cdot V, \quad (5.1)$$

com componentes

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j, \quad (5.2)$$

Sob mudança de base $e_{i'} = \Lambda_{i'}^j e_j$ tem-se que

$$g_{i', j'} = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^m g_{km} = \Lambda_{i'}^k g_{km} \Lambda_{j'}^m,$$

ou simplesmente

$$g' = \Lambda^T g \Lambda. \quad (5.3)$$

Tal liberdade de transformação de bases permite a

escolha daquela que reduza a métrica à sua forma mais simples. Como Λ é matriz arbitrária, define-se $\Lambda = OD$, onde O é matriz ortogonal ($O^T = O^{-1}$) e D é matriz diagonal ($D^T = D$). Assim,

$$g' = D g_d D , \quad (5. 4)$$

onde

$$g_d = O^{-1} g O = \text{diag} (g_1, \dots, g_n) , \quad (5. 5)$$

pois toda matriz simétrica pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade definida por uma matriz ortogonal.

Como, por hipótese, $D = \text{diag} (d_1, \dots, d_n)$, então:

$$g' = \text{diag} (g_1 d_1^2, \dots, g_n d_n^2) , \quad (5. 6)$$

o que permite tomar $d_i \equiv |g_i|^{-1/2}$, de forma que g' é matriz diagonal cujos elementos são ± 1 . Por uma escolha adequada de O , pode-se fazer com que o tensor métrico assuma a forma canônica $g_{ij} = \text{diag} (-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$. Denomina-se de base ortonormal ou tetrádica aquela em que a métrica assume a forma canônica.

Do ponto de vista da álgebra tensorial, o tensor métrico é uma aplicação $g : I_s^r \rightarrow I_{s-1}^{r-1}$. Diz-se que $X \in T_p$ é o equivalente contravariante de $\omega \in T_p^*$ se, para todo $Y \in T_p$,

$$g(X, Y) = \omega(Y) . \quad (5. 7)$$

Assim, $g_{ij} X^i = \omega_j$, que define a aplicação $g : I_0^1 \rightarrow I_1^0$. Mostra-se que tal aplicação é inversível, isto é, existe $g^{-1} : I_1^0 \rightarrow I_0^1$.

Dados dois pontos infinitesimalmente próximos, o elemento de distância é dado por $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, justificando a denominação tensor métrico.

Numa variedade afim possuindo conexão ∇ e métrica g , define-se o tensor de não-metricidade por

$$Q_{ijk} \equiv \nabla_k g_{ij} = e_k[g_{ij}] - \Gamma_{ki}^r g_{rj} - \Gamma_{kj}^r g_{ir} = Q_{(ij)k} . \quad (5.8)$$

Conexão afim e métrica são ditas compatíveis se, para todo par (X,Y) , o produto interno $g(X,Y)$ é preservado por transporte paralelo ao longo das curvas integrais de qualquer outro campo Z . Logo, ∇ e g são compatíveis se é nula a derivada covariante do tensor métrico, anulando-se a não-metricidade.

A.6 - Determinação da afinidade e identidades geométricas em U_4

Permutando cíclicamente os índices nas Eqs. (3.4) e (5.8), e combinando adequadamente as seis equações resultantes, obtém-se:

$$\Gamma_{ijk} = [ij,k] + \gamma_{ijk} - K_{ijk} + N_{ijk} , \quad (6.1)$$

onde

$$[ij,k] = [ji,k] = \frac{1}{2} \left(e_j[g_{ki}] + e_i[g_{kj}] - e_k[g_{ij}] \right) , \quad (6.2)$$

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{i[jk]} = \frac{1}{2} \left(c_{ijk} + c_{kij} - c_{jki} \right) , \quad (6.3)$$

$$K_{ijk} = K_{i[jk]} = -T_{ijk} - T_{kij} + T_{jki} , \quad (6.4)$$

$$N_{ijk} = N_{(ij)k} = \frac{1}{2} \left(Q_{ijk} - Q_{kij} - Q_{jki} \right) . \quad (6.5)$$

A variedade de Riemann-Cartan (U_n) tem métrica compatível com a conexão afim ($N_{ijk} = 0$) e torção não nula. Nesse caso, a conexão afim na base de coordenadas tem a forma:

$$\Gamma_{ij}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} - K_{ij}^m , \quad (6.6)$$

onde

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mk} \left(g_{ki/j} + g_{kj/i} - g_{ij/k} \right) \quad (6.7)$$

são os símbolos de Christoffel de segundo tipo, e K_{ij}^k são as componentes do tensor de contorção, dado por (6.4). Deve-se observar que, nessa base,

$$\Gamma_{(ij)}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} + 2 T_{(ij)}^m , \quad (6.8a)$$

$$\Gamma_{[ij]}^m = T_{ij}^m . \quad (6.8b)$$

Na base ortonormal, a conexão afim tem a forma

$$\Gamma_{ij}^k = \gamma_{ij}^k - K_{ij}^k , \quad (6.9)$$

sendo γ_{ij}^k os coeficientes de rotação de Ricci dados em (6.3), e

$$\Gamma_{(ij)}^m = 2 \left(C_{(ij)}^m + T_{(ij)}^m \right) , \quad (6.10a)$$

$$\Gamma_{[ij]}^k = C_{ij}^k + T_{ij}^k, \quad (6.10b)$$

$$\Gamma_{[jkl]}^i = 0. \quad (6.10c)$$

(6.10c) expressa a condição de metricidade na base ortonormal.

De (4.12) e (4.13) encontram-se as duas propriedades de simetria do tensor de curvatura em U_n

$$R_{(ij)km} = 0, \quad (6.11)$$

$$R_{i j (km)} = 0, \quad (6.12)$$

e este tensor tem 36 componentes independentes em U_4 . Note que (6.11) decorre da definição (4.1) e (6.8b) decorre da exigência de compatibilidade entre a métrica e conexão afim. Além destas, o tensor de Riemann em U_n satisfaz as relações (4.15) e (4.20).

O tensor de Einstein é definido por

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R, \quad (6.13)$$

onde $R_{ik} \equiv R_{mik}^m$ é o tensor de Ricci e $R \equiv R_i^i$ é o escalar de curvatura em U_n . Usando (4.18), verifica-se diretamente que

$$G_{[ik]} = R_{[ik]} = \nabla_m^* g_{ik}^m. \quad (6.14)$$

A dupla contração das identidades de Bianchi dadas em (4.20) fornece

$$\nabla_j G_i^j = -2 T_{j1}^r R_r^j + T_{jk}^r R_{1r}^{jk}, \quad (6.15)$$

e usando (4.16) e (6.13) obtém-se

$$\nabla_j^+ G_i^j = \mathcal{F}_{jk}^r R_{1r}^{jk}, \quad (6.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla_j^+ \Psi_1^{\dots} &\equiv \nabla_j^* \Psi_1^{\dots} + 2 T_{j1}^k \Psi_k^{\dots} = \\ &\equiv \nabla_j \Psi_1^{\dots} + 4 T_{j(1}^k \Psi_{k)}^{\dots}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

é operador que atua sobre objetos possuindo apenas um índice covariante (o número de índices contravariantes é irrelevante).

Objetos geométricos de interesse em U_n , estão relacionados aos seus correspondentes em U_n^R , denotados por Ω :

a) Tensor de Riemann

$$R_{1jk}^m = \quad (6.18)$$

$$R_{1jk}^m = 2 \nabla_{[1} K_{j]k}^m + 2 K_{[1j]}^p K_{pk}^m - 2 K_{[1p]}^m K_{j]k}^p,$$

onde se fez uso de (4.8) e (6.1). O tensor de curvatura em R_n é descrito na base de coordenadas por

$$R_{1jk}^m = \partial_1 \left\{ \begin{matrix} m \\ j k \end{matrix} \right\} - \partial_j \left\{ \begin{matrix} m \\ 1 r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ 1 p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ j k \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ j p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} p \\ 1 k \end{matrix} \right\}, \quad (6.19a)$$

e na base ortonormal por

$${}^R R_{ijk}{}^m = 2e_{[i} [\gamma_{j]k}{}^m] + 2 \gamma_{[i][p][l}{}^m \gamma_{j]k}{}^p - C_{ij}{}^p \gamma_{pk}{}^m ; \quad (6.19b)$$

b) Tensor de Ricci

$$R_{jk} = R_{jk}^R - \nabla_m \left(K_{jk}{}^m + \delta_j^m K_k \right) + 2 K_{rj}^{[m} K_{mk}{}^{r]} ; \quad (6.20)$$

c) Escalar de Curvatura

$$R = R^R - 2 \nabla_m^* K^m + 2 K_{[m}{}^{sr} K_{r]s}{}^m ; \quad (6.21)$$

d) O tensor de Einstein é construído diretamente das duas últimas equações. Será útil, porém, expressá-lo em termos da torção modificada, obtendo-se:

$$\begin{aligned} G_{jk} &= G_{jk}^R + \nabla_m^* \left(\mathcal{J}_{jk}{}^m + \mathcal{J}_{jk}{}^m - \mathcal{J}_{k j}{}^m \right) - \\ &- \mathcal{J}_{j}{}^{mp} \mathcal{J}_{mpk} + 2 \mathcal{J}_j{}^{mp} \mathcal{J}_{kmp} + 4 \mathcal{J}_{jm}{}^{[p} \mathcal{J}_{kp}{}^{m]} - \\ &- \frac{1}{2} g_{jk} \left(\mathcal{J}^{mpr} \mathcal{J}_{mpr} + 4 \mathcal{J}_r{}^m{}_{[p} \mathcal{J}^{rp}{}_{m]} \right) . \end{aligned} \quad (6.22)$$

Na determinação das relações anteriores usou-se o fato de que torção, contorção, torção modificada e seus traços relacionam-se nas formas abaixo:

$$I) K_{ij}{}^k = - T_{ij}{}^k - T^k{}_{ij} + T_{j i}{}^k \Leftrightarrow T_{ij}{}^k = - K_{[ij]}{}^k , \quad (6.23)$$

$$II) K_i \equiv K_{mi}{}^m = - 2 T_{im}{}^m = - 2 T_i , \quad (6.24)$$

$$\text{III) } \mathcal{T}_{ij}^k = T_{ij}^k + 2\delta_{[i}^k T_{j]} \Leftrightarrow T_{ij}^k = \mathcal{T}_{ij}^k + \delta_{[i}^k \mathcal{T}_{j]} \quad , \quad (6.25)$$

$$\text{IV) } \mathcal{T}_i \equiv \mathcal{T}_{im}^m = -2 T_{im}^m = -2 T_i \quad , \quad (6.26)$$

$$\text{V) } K_{jk}^i = -\mathcal{T}_{jk}^i - \mathcal{T}_{kj}^i + \mathcal{T}_{jk}^i + 2\delta_{[j}^i \mathcal{T}_{k]} \Leftrightarrow \quad (6.27)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{T}_{ij}^k = -K_{[ij]}^k - \delta_{[i}^k K_{j]} \quad ,$$

$$\text{VI) } K_i \equiv K_{mi}^m = \mathcal{T}_{im}^m = \mathcal{T}_i \quad . \quad (6.28)$$

Usando-se as identidades

$$2 K_{[m}^{sr} K_{r]s}^m = -\mathcal{T}_r^{sm} K_{ms}^r \quad , \quad (6.29)$$

$$\partial_i \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{jk} \partial_i g_{jk} =$$

(6.30)

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{jk} \partial_i g^{jk} = \left\{ \begin{matrix} j \\ i \ j \end{matrix} \right\} \sqrt{-g} \quad ,$$

mostra-se que a densidade escalar de curvatura, $\mathcal{R} = \sqrt{-g} R$, tem a seguinte forma na base de coordenadas

$$\mathcal{R} = \overset{R}{\mathcal{R}} - \partial_m (2\sqrt{-g} K^m) - \sqrt{-g} \mathcal{T}_r^{sm} K_{ms}^r = \quad (6.31)$$

$$= \overset{R}{\mathcal{R}} - \partial_m (2\sqrt{-g} K^m) + 2\sqrt{-g} K_{[m}^{sr} K_{r]s}^m \quad .$$

A.7 - Equações de Estrutura de Cartan

Um tensor tipo $\binom{0}{r}$ é antissimétrico se

$$\begin{aligned} T(L_{(1)}, \dots, L_{(1)}, \dots, L_{(j)}, \dots, L_{(r)}) &= \\ &= - T(L_{(1)}, \dots, L_{(j)}, \dots, L_{(1)}, \dots, L_{(r)}) \quad , \end{aligned} \tag{7. 1}$$

onde $1 \leq i, j \leq r$. Tais tensores são denominados de formas exteriores de ordem r , ou r -formas. Se T_1 e T_2 são r -formas, sua combinação linear também é uma r -forma, e este conjunto é um subespaço de I_r^0 , denotado por Λ_r .

Define-se o operador de alternância A , sobre I_r^0 , tal que

$$A: I_r^0 \rightarrow \Lambda_r \tag{7. 2}$$

$$AT(L_1, \dots, L_r) = \frac{1}{r!} \sum_{(j_1, \dots, j_r)} \text{sgn}(j_1, \dots, j_r) T(L_{j_1}, \dots, L_{j_r}) \quad ,$$

onde a soma se faz sobre todas as permutações (j_1, \dots, j_r) e $\text{sgn}(j_1, \dots, j_r) = \pm 1$, respectivamente para as permutações pares ou ímpares dos r argumentos de T . O operador A associa a cada tensor $T \in I_r^0$, sua parte antissimétrica, podendo-se mostrar que

a) A é um projetor, $A^2 = A$, (7. 3)

b) T é antissimétrico se $AT = T$. (7. 4)

O produto exterior de $T \in \Lambda_r$ e $S \in \Lambda_s$ é, definido por

$$T \wedge S = A(T \otimes S) \quad , \tag{7. 5}$$

verificando-se diretamente que

$$T \wedge S = (-1)^{rs} S \wedge T . \quad (7.6)$$

Se $T \in \Lambda_r$, então $T = T_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$, e por (7.4) e (7.6) obtém-se

$$T = T_{j_1 \dots j_r} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} , \quad (7.7)$$

onde $j_1 < j_2 < \dots < j_r < \dim M$, e os $\binom{k}{r}$ elementos

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_r} , \quad (7.8)$$

são base para Λ_r .

O cálculo diferencial de r-formas é baseado no conceito de derivada exterior, que é aplicação $d : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_{r+1}$, expressa na base de coordenadas pela $(\Lambda + 1)$ forma

$$dT = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r} . \quad (7.9)$$

Seguem-se as seguintes propriedades da derivada exterior

a) $d(aT + bS) = a dT + b dS ; \quad (7.10)$

b) Se f é uma 0-forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i ; \quad (7.11)$$

c) Se T é r -forma

$$d(fT) = df \wedge T + f dT; \quad (7.12)$$

$$d) d^2T = d(dT) = 0; \quad (7.13)$$

e) Se $T \in \Lambda_r$, $S \in \Lambda_s$

$$d(T \wedge S) = dT \wedge S + (-1)^r T \wedge dS. \quad (7.14)$$

Se ω é uma 1-forma, $d\omega$ é a 2-forma que satisfaz a relação geral^[3,4]

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} \left(X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]) \right), \quad (7.15)$$

A 2-forma de^j é de particular interesse. Nesse caso, a relação acima torna-se

$$de^j = -\frac{1}{2} C_{km}^j e^k \wedge e^m. \quad (7.16)$$

Usando (3.1), pode-se escrever

$$\begin{aligned} 2T^m(X, Y) &= \left(X[e^m(Y)] - Y[e^m(X)] - [X, Y]^m \right) + 2A \omega_r^m \otimes e^r(X, Y) = \\ &= 2de^m(X, Y) + 2\omega_r^m \wedge e^r(X, Y), \end{aligned}$$

obtendo-se a primeira Equação de Estrutura de Cartan

$$T^m = de^m + \omega_r^m \wedge e^r, \quad (7.17)$$

onde T^m é a 2-forma de torção

$$T^m = T_{pq}^m e^p \wedge e^q \quad (7.18)$$

e ω_r^m são as 1-formas de conexão, definidas por (2.10).

Usando (4.1), (2.10) e (7.15) pode-se escrever

$$-\frac{1}{2}R(X,Y)[Z] = \Omega_j^r(X,Y) e^j(Z) e_r \quad (7.19)$$

onde a segunda Equação de Estrutura de Cartan, dada por

$$\begin{aligned} \Omega_j^r &= d\omega_j^r - \omega_j^m \wedge \omega_m^r = \\ &= d\omega_j^r + \omega_m^r \wedge \omega_j^m, \end{aligned} \quad (7.20)$$

define a 2-forma de curvatura

$$\Omega^r = \frac{1}{2} R_{ikj}^r e^i \wedge e^k. \quad (7.21)$$

APÊNDICE B

GEOMETRIAS DE BIANCHI EM U_4

Considere o referencial inercial local definido pela base de 1-formas $\{\theta^A\}$, tais que

$$\theta^0 = \omega^0 = dt , \quad (\text{B. 1})$$

$$\theta^i = R_i(t) \omega^i \equiv (R\omega)^i . \quad (\text{B. 2})$$

Acima, $\{\omega^i\}$ é uma base de 1-formas invariantes de algum espaço homogêneo a três dimensões, satisfazendo

$$d\omega^\lambda = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\mu\nu}{}^\lambda \omega^\mu \wedge \omega^\nu , \quad (\text{B. 3})$$

onde $\mathcal{E}_{\mu\nu}{}^\lambda$ são as constantes de estrutura da álgebra do grupo de isometrias. A métrica do espaço-tempo é $ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$, sendo a

métrica de Minkowski dada por $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

A derivada exterior de (B.1,2) fornece $d\theta^0 = 0$, e

$$d\theta^i = \theta^0 \wedge (H\theta)^i + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}^i \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad (\text{B.4})$$

onde $(H\theta)^i \equiv H_i \theta^i$. Os coeficientes de estrutura da base ortonormal são [c.f. (A.7.16)]:

$$C_{0i}^i = -H_i, \quad (\text{B.5a})$$

$$C_{jk}^i = -\tilde{\mathcal{C}}_{jk}^i, \quad j < k, \quad (\text{B.5b})$$

com os parâmetros de Hubble definidos por

$$H_i = \frac{\dot{R}_i}{R_i}, \quad (\text{B.5c})$$

e

$$\tilde{\mathcal{C}}_{jk}^i = \frac{R_i}{R_j R_k} \mathcal{C}_{jk}^i. \quad (\text{B.5d})$$

Um ponto indica derivada com relação ao tempo cósmico. Lembrando que índices latinos minúsculos não somam, as quantidades $\tilde{\mathcal{C}}_{jk}^i$ satisfazem as relações

$$\tilde{\mathcal{C}}_{jk}^i = -\tilde{\mathcal{C}}_{kj}^i, \quad (\text{B.5e})$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{[ij]}^\alpha \tilde{\mathcal{C}}_{k] \alpha}^m = \frac{R_m}{R_i R_j R_k} \mathcal{C}_{[ij]}^\alpha \mathcal{C}_{k] \alpha}^m = 0, \quad (\text{B.5f})$$

$$\dot{\tilde{\mathcal{C}}}_{jk}^i = (H_i - H_j - H_k) \tilde{\mathcal{C}}_{jk}^i. \quad (\text{B.5g})$$

Tomando por componentes do tensor de torção

$$T_{ij}^0 = \varepsilon_{ij\alpha} S^\alpha(t) , \quad (\text{B. 6})$$

a conexão afim em U_4 , $\Gamma_{ABC} = \Gamma_{A[BC]}$, definida na base ortonormal por (A.6.9), tem 24 componentes independentes nas formas:

$$\Gamma_{001} = 0 , \quad (\text{B.7a})$$

$$\Gamma_{0ij} = - \varepsilon_{ij\alpha} S^\alpha(t) , \quad i < j , \quad (\text{B.7b})$$

$$\Gamma_{10i} = - H_i , \quad (\text{B.7c})$$

$$\Gamma_{10j} = - \varepsilon_{ij\alpha} S^\alpha(t) , \quad i \neq j , \quad (\text{B.7d})$$

$$\Gamma_{ijk} = - \frac{1}{2} \left(\tilde{\zeta}_{ijk} + \tilde{\zeta}_{kij} - \tilde{\zeta}_{jki} \right) , \quad j < k . \quad (\text{B.7e})$$

Usando (B.7), constroem-se as 1-formas de conexão [c.f.(A.2.10)]

$$\omega_0^i = (H\theta)^i - \varepsilon_{\alpha\beta}^i S^\alpha \theta^\beta , \quad (\text{B.8a})$$

$$\omega_1^j = - \varepsilon_{i\alpha}^j S^\alpha \theta^0 - \frac{1}{2} \left(\tilde{\zeta}_{\alpha 1}^j + \tilde{\zeta}_{\alpha 1}^j - \tilde{\zeta}_{1\alpha}^j \right) \theta^\alpha . \quad (\text{B.8b})$$

As 1-formas acima satisfazem idênticamente a 1ª Equação de Estrutura de Cartan (A.7.17), com a torção definida por (B.6). Suas derivadas exteriores são:

$$d\omega_0^i = \left(\dot{H}_1 + H_1^2 \right) \theta^0 \wedge \theta^i - \varepsilon_{\alpha\beta}^i \theta^0 \wedge \left[\dot{S}^\alpha \theta^\beta + S^\alpha (H\theta)^\beta \right] +$$

(B.9a)

$$+ \frac{1}{2} \left(H_1 \tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^1 - \epsilon^1_{\alpha\beta} S^\alpha \tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^\beta \right) \theta^\mu \wedge \theta^\nu ,$$

$$\begin{aligned} d\omega_1^j = & - \frac{1}{2} \left[(H_j - H_1) \left(\tilde{\epsilon}_{\alpha 1}^j + \tilde{\epsilon}_{\alpha 1}^j \right) + \right. \\ & \left. + (H_1 + H_j) \tilde{\epsilon}_{1\alpha}^j \right] \theta^0 \wedge \theta^\alpha + \tilde{\epsilon}_{1\alpha}^j \theta^0 \wedge (H\theta^\alpha) - \end{aligned} \quad (B.9b)$$

$$- \frac{1}{4} \left(\tilde{\epsilon}_{\alpha 1}^j + \tilde{\epsilon}_{\alpha 1}^j - \tilde{\epsilon}_{1\alpha}^j \right) \tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^\nu .$$

A 2ª Equação de Estrutura de Cartan (A.7.20) determina as 2-forma de curvatura e as 36 componentes do tensor de Riemann em U_4 . Da expressão para Ω_0^1 abaixo,

$$\begin{aligned} \Omega_0^1 = & \left(\dot{H}_1 + H_1^2 + S^\eta S_\eta \right) \theta^0 \wedge \theta^1 - \left(\epsilon^1_{\alpha\beta} \dot{S}^\alpha - S^1 S_\beta \right) \theta^0 \wedge \theta^\beta - \\ & - 2\epsilon^1_{\alpha\beta} S^\alpha \theta^0 \wedge (H\theta)^\beta - \frac{1}{2} \left(\tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^1 + \tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^1 - \tilde{\epsilon}_{\nu\mu}^1 \right) \theta^\mu \wedge (H\theta)^\nu + \\ & + \frac{1}{2} \left[H_1 \tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^1 - \epsilon^1_{\alpha\beta} S^\alpha \tilde{\epsilon}_{\mu\nu}^\beta - \epsilon^\alpha_{\rho\mu} S^\rho \left(\tilde{\epsilon}_{\nu\alpha}^1 + \tilde{\epsilon}_{\nu\alpha}^1 - \tilde{\epsilon}_{\alpha\nu}^1 \right) \right] \theta^\mu \wedge \theta^\nu , \end{aligned} \quad (B.10)$$

após somar - como indicado por índices gregos - sobre índices latinos genéricos i, j e m , obtém-se:

$$R_{010}^1 = \dot{H}_1 + H_1^2 + S^j S_j + S^m S_m , \quad (B.11)$$

$$R_{0j0}^1 = \epsilon^1_{jm} \left(\dot{S}^m + 2H_j S^m \right) - S^1 S_j , \quad (B.12)$$

$$R_{1j0}^1 = (H_j - H_1) \tilde{\epsilon}_{j1}^1 - \quad (B.13)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \varepsilon^i{}_{jm} \left[S^j \left(\tilde{\mathcal{C}}_{ij}{}^m + \tilde{\mathcal{C}}^m{}_{ij} - \tilde{\mathcal{C}}^m{}_{ji} \right) + 2S^i \tilde{\mathcal{C}}_{mi}{}^j \right] , \\
R_{jmo}{}^i &= \frac{1}{2} \left[(2H_i - H_j - H_m) \tilde{\mathcal{C}}_{jm}{}^i + (H_j - H_m) \left(\tilde{\mathcal{C}}^i{}_{jm} + \tilde{\mathcal{C}}^i{}_{mj} \right) \right] - \\
& - \varepsilon^i{}_{jm} \left[S^i \left(\tilde{\mathcal{C}}_{ij}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}^m{}_{im} \right) + S^j \tilde{\mathcal{C}}_{jm}{}^m + S^m \tilde{\mathcal{C}}_{mj}{}^j \right] .
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Da expressão para $\Omega_i{}^j$ abaixo

$$\begin{aligned}
\Omega_i{}^j &= \tilde{\mathcal{C}}_i{}^j{}_\alpha \theta^0 \wedge (H\theta)^\alpha + \frac{1}{2} \left\{ (H_i - H_j) \left(\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha i}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha j}{}^i \right) - (H_i + H_j) \tilde{\mathcal{C}}_i{}^j{}_\alpha + \right. \\
& + S^\rho \left[\varepsilon_{\eta\rho}{}^j \left(\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha i}{}^\eta + \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha i}{}^\eta - \tilde{\mathcal{C}}_i{}^\eta{}_\alpha \right) - \varepsilon_i{}^\eta{}_\rho \left(\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\eta}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\eta}{}^j - \tilde{\mathcal{C}}_{\eta\alpha}{}^j \right) \right] \left. \right\} \theta^0 \wedge \theta^\alpha - \\
& - H_i H_j \theta^i \wedge \theta^j + H_j \varepsilon^i{}_{\alpha\mu} S^\alpha \theta^\mu \wedge \theta^j + H_i \varepsilon^j{}_{\alpha\nu} S^\alpha \theta^i \wedge \theta^\nu - \\
& - \frac{1}{4} \left[4\varepsilon^i{}_{\alpha\mu} \varepsilon^j{}_{\eta\nu} S^\alpha S^\eta + \left(\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha i}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha i}{}^j - \tilde{\mathcal{C}}_i{}^j{}_\alpha \right) \tilde{\mathcal{C}}_{\mu\nu}{}^\alpha + \right. \\
& + \left. \left(\tilde{\mathcal{C}}_{\mu i}{}^\alpha + \tilde{\mathcal{C}}_{\mu i}{}^\alpha - \tilde{\mathcal{C}}_i{}^\alpha{}_\mu \right) \left(\tilde{\mathcal{C}}_{\nu\alpha}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}_{\nu\alpha}{}^j - \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha\nu}{}^j \right) \right] \theta^\mu \wedge \theta^\nu ,
\end{aligned} \tag{B.15}$$

são obtidas as seguintes componentes da curvatura:

$$\begin{aligned}
R_{0ii}{}^j &= (H_j - H_i) \tilde{\mathcal{C}}_{ji}{}^i - \\
& - \frac{1}{2} \varepsilon_i{}^j{}_m \left[2S^i \tilde{\mathcal{C}}_{mi}{}^i - S^j \left(\tilde{\mathcal{C}}_{im}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}_{im}{}^j - \tilde{\mathcal{C}}_{mi}{}^j \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
R_{Om1}{}^j &= \frac{1}{2} \left[(H_i - H_j) \left(\tilde{\mathcal{C}}_{mi}{}^j + \tilde{\mathcal{C}}_{mi}{}^j \right) + (2H_m - H_i - H_j) \tilde{\mathcal{C}}_i{}^j{}_m \right] + \\
& + \varepsilon_i{}^j{}_m \left[S^i \tilde{\mathcal{C}}_{im}{}^m + S^j \tilde{\mathcal{C}}_{jm}{}^m \right] ,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
R_{iji}^j = & - H_i H_j + S^m S_m + \left[\left(\tilde{\mathcal{E}}_{ji}^i \right)^2 + \left(\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^j \right)^2 + \tilde{\mathcal{E}}_{mi}^i \tilde{\mathcal{E}}_{mj}^j \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left(\tilde{\mathcal{E}}_{im}^j \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^m + \tilde{\mathcal{E}}_{jm}^i \tilde{\mathcal{E}}_{ji}^m - \tilde{\mathcal{E}}_{mj}^i \tilde{\mathcal{E}}_{mi}^j \right) - \\
& - \frac{1}{4} \left[\left(\tilde{\mathcal{E}}_{mj}^i \right)^2 + \left(\tilde{\mathcal{E}}_{im}^j \right)^2 - 3 \left(\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^m \right)^2 \right] ,
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
R_{imi}^j = & - \varepsilon_{im}^j H_i S^i - S^j S_m + \tilde{\mathcal{E}}_{mi}^i \left(\tilde{\mathcal{E}}_{ji}^i - \tilde{\mathcal{E}}_{jm}^m \right) + \\
& + \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^j \tilde{\mathcal{E}}_{im}^j - \tilde{\mathcal{E}}_{im}^m \left(\tilde{\mathcal{E}}_{jm}^i - \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^m \right) .
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Tomando $S^2 = - S^\alpha S_\alpha$, escrevendo as constantes de estrutura na forma [c.f. (2.4,5,6)]

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\lambda = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} N^\lambda + \delta^\lambda_\alpha A_\beta - \delta^\lambda_\beta A_\alpha ,$$

o que permite escrever [c.f. (b.5d)]

$$\tilde{\mathcal{E}}_{ij}^m = \varepsilon_{ijm} \frac{N R_m}{R_i R_j} , \text{ e } \tilde{\mathcal{E}}_{ij}^j = - \frac{A_i}{R_i} ,$$

obtem-se as componentes do tensor de Ricci, $R_{AB} = R_{CAB}^C$:

$$R_{00} = - \left(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 2S^2 \right) , \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}
R_{ii} = & \dot{H}_i + H_i (H_i + H_j + H_m) + \\
& + \frac{1}{2 (R_i R_j R_m)^2} \left[(N^i R_i^2)^2 - (N^j R_j^2 - N^m R_m^2)^2 \right] -
\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$- 2 \left[\left(\frac{A_i}{R_i} \right)^2 + \left(\frac{A_j}{R_j} \right)^2 + \left(\frac{A_m}{R_m} \right)^2 \right] ,$$

$$R_{0i} = R_{10} = \frac{N^i S^i R_i}{R_j R_m} - (2H_i + H_j + H_m) \frac{A_i}{R_i} +$$

$$+ \varepsilon_{1jm} \left(S^j \frac{A_m}{R_m} - S^m \frac{A_j}{R_j} \right) ,$$
(B.22)

$$R_{1j} = \varepsilon_{1jm} [\dot{S}^m + S^m (2H_i + H_m)] +$$

$$+ \frac{A_m}{R_m} \left(\frac{N^m R_m}{R_i R_j} - \frac{N^i R_i}{R_j R_m} - \frac{N^j R_j}{R_i R_m} \right) ,$$
(B.23)

$$R_{j1} = \varepsilon_{j1m} [\dot{S}^m + S^m (2H_j + H_m)] +$$

$$+ \frac{A_m}{R_m} \left(\frac{N^m R_m}{R_i R_j} - \frac{N^i R_i}{R_j R_m} - \frac{N^j R_j}{R_i R_m} \right) .$$
(B.24)

REFERÊNCIAS

- [1] P. Baekler, F.W. Hehl, E.W. Mielke, Nonmetricity and Torsion: Facts and Fancies in Gauge Approaches to Gravity, preprint ICTP/86/54, Trieste.
- [2] E. Cartan, Sur une Généralisation de la Notion de Courbure de Riemann et les Espaces à Torsion, C.R. Acad. Sci. 174, 593 (1922).
- [3] E. Cosserat, E. Cosserat, Théorie des corps déformables, Hermann, Paris (1909).
- [4] E. Cartan, Sur les variétés à Connexion Affine et la Théorie de la Relativité Généralisée I-II, Ann. Ec. Norm. Sup. 40, 325 (1923); 41, 1(1924); 42, 17 (1925).
- [5] G.E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, Naturwiss. 13, 953 (1925).
- [6] A. Eddington, A Generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and Gravitational Fields, Proc. Roy. Soc. Lond. 99, 104 (1921).
- [7] O. Costa de Beauregard, Sur la Dynamique des Milieux Doués

- d'une Densité de Moment Cinétique Propre, C.R. Acad. Sci. 214, 904 (1942).
- [8] J. Weyssenhoff, A. Raabe, Relativistic Dynamics of Spin-Fluids and Spin-Particles, Acta Phys. Pol. 9, 7 (1947).
- [9] A. Papapetrou, Non-Symmetric Stress Energy Momentum Tensor and Spin Density, Phil. Mag. 40, 937 (1949).
- [10] D.W. Sciama, On a Non-Symmetric Theory of the Pure Gravitational Field, Proc. Camb. Phil. Soc. 54, 72 (1958).
- [11] T.W.B. Kibble, Lorentz Invariance and the Gravitational Field, J. Math. Phys. 2, 212 (1961).
- [12] D.W. Sciama, On the Analogy Between Charge and Spin in General Relativity, in Recent Developments in General relativity, Pergamon + PWN, Oxford (1962), p. 415.
- [13] D. Ivanenko, G. Sardanshvily, The Gauge Treatment of Gravity Phys. Rep. 94, 1 (1983).
- [14] F.W. Hehl, Spin and Torsion in General Relativity: I. Foundations, GRG 4, 333 (1973); Spin and Torsion in General Relativity: II. Geometry and Field Equations, GRG 5, 491 (1974).
- [15] A. Trautman, On the Einstein-Cartan Equations I-IV, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys., 20, 185, 503,895 (1972); 21, 345 (1973); On the Structure of the Einstein-Cartan Equations, Simposia Mathematica 12, 139 (1973).
- [16] F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick, J.M. Nester, General Relativity With Spin and Torsion: Foundations and Prospects, Rev. Mod. Phys. 48, 393 (1976).
- [17] B. Kuchowicz, Cosmology With Spin and Torsion, Part I, Physical and Mathematical Foundations, Acta Cosmologica 3, 109 (1975).

- [18] A. Trautman, Spin and Torsion May Avert Gravitational Singularities, *Nature (Phys. Sci.)* 242, 7 (1973).
- [19] W. Kopczinski, An Anisotropic Universe With Torsion, *Phys. Lett.* 43A, 63 (1973).
- [20] J. Tafel, A Class of Cosmological Models With Torsion and Spin, *Acta Phys. Pol.* B6, 537 (1975).
- [21] B. Kuchowicz, Cosmology With Spin and Torsion, Part II, Spatially Homogeneous ligned Spin Models With The Weyssenhoff Fluid, *Acta Cosmologica* 4, 66 (1976).
- [22] M. Gasperini, Spin Dominated Inflation in the Einstein-Cartan Theory, *Phys. Rev. Lett.* 56, 2873 (1986).
- [23] M. Demianski, R. de Ritis, G. Platania, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, Inflationary Models in ECSK Theory, *Phys. Lett.* A116, 13 (1986); Inflation in a Bianchi Type-I Einstein-Cartan Cosmological Model, *Phys. Rev.* D35, 1181 (1987).
- [24] J.C. Bradas, A.J. Fennelly, L.L. Smalley, Torsion as Source of Expansion in a Bianchi Type-I Universe in the Self-Consistent Einstein-Cartan Theory of a Perfect Fluid With Spin Density, *Phys. Rev.* D35, 2302 (1987).
- [25] J.C. Bradas, A.J. Fennelly, L.L. Smalley, Inflation in Einstein-Cartan Theory With Energy-Momentum With Spin, *Phys. Lett.* A129, 195 (1988).
- [26] M.J.D. Assad, Inflation in an EC Spacetime: Comparison With GR Models, apresentado em seminário do Departamento de Relatividade e Partículas do CBPF em 21/05/87, e na 12^a Conferência Internacional de Relatividade e Gravitação, Boulder (1989). Aceito para publicação em *Classical and Quantum Gravity* se modificado em sua forma.

- [27] M.J.D. Assad, P.S. Letelier, On a Class of Inflationary Universes of the Self-Consistent Einstein-Cartan Theory, Phys. Lett. A145, 74 (1990).
- [28] L.L. Smalley, Self-Consistent Godel Cosmology With Spin Density in Riemann-Cartan Spacetime, Phys. Lett. 113A, 463 (1986); Godel Cosmology in Riemann-Cartan Spacetime With Spin Density, Phys. Rev. D32, 3124 (1985).
- [29] J. Duarte de Oliveira, A.F.F. Teixeira, J. Tiomno, Homogeneous Cosmos of Weyssenhoff Fluid in Einstein-Cartan Space, Phys. Rev. D34, 3661 (1986).
- [30] H.H. Soleng, Godel Type Cosmologies With Spin Density, Phys. Lett. 137A, 326 (1989).
- [31] R. Jha, E.A. Lord, K.P. Sinha, A Singularity Free Cosmological model In ECSK Theory, GRG 20, 565 (1988).
- [32] I.S. Nurgaliev, W.N. Ponomariev, The earliest Evolutionary Stages of the Universe and Space-Time Torsion, Phys. Lett. 130B, 378 (1983).
- [33] M.J.D. Assad, C. Romero, Eternal and Pulsating Universes in a Riemann-Cartan Spacetime, preprint UFPB 03/89, apresentado na 12^a Conferência Internacional de Relatividade e Gravitação, Boulder (1989), submetido à Phys. Lett A.
- [34] H. Bondi, Cosmology, Cambridge University Press, Cambridge (1960).
- [35] M.A.H. MacCallum, Exact Solutions in Cosmology, in lecture Notes in Physics, vol. 205, Springer Verlag, Berlin (1984).
- [36] B. Kuchowicz, The Einstein-Cartan Equations in Astrophysically Interesting Situations. I. The case of Spherical Symmetry, Acta Phys. Pol. B6, 555 (1975).

- [37] B. Kuchowicz, The Einstein-Cartan Equations in Astrophysically Interesting Situations. II. Homogeneous Cosmological Models of Axial Symmetry, *Acta Phys. Pol.* B7, 81 (1976).
- [38] J.R. Ray, L.L. Smalley, Improved Perfect Fluid Energy Momentum Tensor With Spin in Einstein-Cartan Spacetime, *Phys. Lett.* 49, 1059 (1982); Perfect Fluids in the Einstein-Cartan Theory, *Phys. Rev.* D26, 2619 (1982); Spinning Fluids in the Einstein-Cartan Theory, D27, 1383 (1983).
- [39] M.J.D. Assad, J.A. Sales de Lima, General and Unified Solution for Perfect Fluids Homogeneous and Isotropic Cosmological Models, *GRG* 20, 535 (1988).
- [40] M.J.D. Assad, Bianchi Types II, VIII and IX Einstein-Cartan Cosmologies With Weyssenhoff Perfect Fluid and Electromagnetic Null Field, a ser submetido.
- [41] V. de Sabbata, M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific (1985).
- [42] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
- [43] C.A. Linhares, Modelos Estelares na Teoria Gravitacional de Einstein-Cartan, Tese de Mestrado, CBPF (1979).
- [44] D.E. Soper, *Classical Field Theory*, Wiley, N. York (1976).
- [45] E.M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, Blakie and Sons, Londres (1962).
- [46] F.W. Hehl, On the Energy Tensor of Spinning Massive Matter in Classical Field theory and General Relativity, *Rep. Math. Phys.* 9, 55 (1974).
- [47] C.A.P. Galvao, *Gravitação e Cosmologia em Espaços com Torção*, Tese de Doutorado, CBPF (1976).

- [48] Y.N. Obukhov, V.A. Korotky, The Weyssenhoff Fluid in Einstein-Cartan Theory, *Class. Quantum Grav.* **4**, 1633 (1987).
- [49] E. Schmutzer (Ed.), *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1980), capítulo 12.
- [50] Inúmeros livros e artigos abordam o assunto. Entre eles pode-se citar: a) M.P. Ryan, L.C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton University Press, Princeton (1975); b) M.A.H. MacCallum, *Kinematics of Anisotropic Spatially Homogeneous Homogeneous Cosmologies*, in *Physics of the Expanding Universe*, M. Demianski (Ed), Spriger Verlag, Berlin (1979); c) A. Krasinski, *Symmetries of Manifolds and Tensor Fields and the Bianchi Classification*, Preprint 192, Warsaw (1988).
- [51] J. Tafel, A Non-Singular Homogeneous Universe With Torsion, *Phys. Lett.* **45A**, 341 (1973).
- [52] B. Kuchowicz, Flat Anisotropic Models of the Universe With Torsion and Without Singularity, *J. Phys* **A8**, L29 (1975).
- [53] B. Kuchowicz, Some Cosmological Models With Spin and Torsion, I, *Astrophys. Space Sci.* **39**, 157 (1976).
- [54] D. Tsoubelis, Bianchi VI_0 , VII_0 Cosmological Models With Spin and Torsion, *Phys. Rev.* **D20**, 3004 (1979).
- [55] B. Kuchowicz, Friedmann-Like Cosmological Models Without Singularity, *GRG* **9**, 511 (1978).
- [56] N.A. Batakis, D. Tsoubelis, Study of a Bianchi type V Cosmological Model With Torsion, *Phys. Rev.* **D26**, 2611 (1982).
- [57] A.K. Raychaudhury, Einstein-Cartan Cosmologies With a Magnetic Field, *Phys. Rev.* **D12**, 952 (1975).
- [58] B. Kuchowicz, Some Cosmological Models With Spin and Tor-

- sion, II: Axially Symmetric Models With a Uniform Magnetic Field
Astrophys. Space Sci. **40**, 167 (1976).
- [59] D. Tsoubelis, Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Cosmological Models With Spinning Matter and Magnetic Field, Phys. Rev. **D23**, 823 (1981).
- [60] M.S. Berman, A Static Universe With Magnetic Field in Einstein-Cartan's Theory, Il Nuovo Cimento **105B**, 1373 (1990).
- [61] A.F.F. Teixeira, Homogeneous, Nonsingular, Closed Einstein-Cartan Cosmological Model, Phys. Rev. **D31**, 2132 (1985).
- [62] D. Lorenz, Kantowski-Sachs Cosmological Solution With Torsion, J. Phys. **A15**, 2809 (1982).
- [63] D. Lorenz, Einstein-Cartan-Maxwell-Bianchi Cosmologies, Acta Phys. Pol. **B12**, 939 (1981).
- [64] D. Lorenz, Einstein-Cartan-Maxwell-Bianchi type II Solutions Acta Phys. Pol. **B13**, 195 (1982).
- [65] D. Lorenz, Einstein-Cartan-Maxwell-Bianchi Type V Cosmological Models, GRG **14**, 691 (1982).
- [66] A discussão da cinemática de fluidos relativísticos na TRG é apresentada em detalhes por G.F.R. Ellis, Relativistic Cosmology, Cargèse Lectures in Physics, vol. 6, Gordon and Breach (1973); M. Novello, Notas da Segunda Escola Brasileira de Gravitacão e Cosmologia, CBPF (1980).
- [67] A.K. Raychaudhury, Theoretical Cosmology, Claredon Press (1979).
- [68] F.B. Estabrook, H.D. Wahlquist, C.G. Behr, Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models, J. Math. Phys. **9**, 497 (1978).
- [69] M.J.D. Assad, Modelos Cosmológicos Anisotrópicos Bianchi

VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético, Tese de Mestrado, CBPF (1980).

[70] R.T. Jantzen, *Spatially Homogeneous Dynamics: A Unified Picture*, Advance Series in Astrophysics, 1, (1985).

[71] O. Heckman, E. Schucking, in L. Witten (ed), *Gravitation*, Wiley, New York (1962), p. 460.

[72] W.L. Roque, G.F.R. Ellis, *The Automorphism Group and the Field Equations for Bianchi Universes*, in M.A.H. MacCallum (ed), *Aximetric Systems, Galaxies and Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[73] D. Lorenz-Petzold, in *Lecture Notes in Physics*, vol. 205, Springer Verlag, Berlin (1984), p. 403.

[74] M.J.D. Assad, J.B.S. D'Oliveira, trabalho em desenvolvimento.

[75] E.R. Harrison, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 137, 69 (1967).

[76] J.M. Stewart, G.F.R. Ellis, *Solutions of Einstein's Field Equations for a Fluid Which Exhibit Local Rotational Symmetry*, *J. Math. Phys.* 9, 1072 (1968).

[77] J.P. Vajk, P.G. Eltgroth, *J. Math. Phys.* 11, 2212 (1970).

[78] K.C. Jacobs, *Astrophys. J.* 153, 661 (1968).

[79] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).

[80] L.F. Abbot, M.B. Wise, *Constraints on Generalized Inflationary Cosmologies*, *Nucl. Phys.* B244, 541 (1984).

[81] M.A.S. Nobre, J.A.S. de Lima, *Inhomogeneous Two-Fluid Cosmologies With Electromagnetic Field*, *Class. Quantum. Grav.* 7, 399 (1990).

[82] M.O. Calvão, J.A.S. de Lima, *Non-Standard Big Bang Models*,

Phys. Lett. 141A, 229 (1989).

[83] J.A.S. de Lima, comunicação apresentada ao Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambú (1990).

[84] A. Erdelyi et al., Higher Transcendental functions, McGraw Hill, New York, (1953), vol I, p. 87.

[85] M. Abramowicz, I.A. Stegun (Eds), Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, (1965), p. 70.

[86] N.E. Norlund, The Logarithmic Solutions of the Hypergeometric Equation, Mat. Phys. Scr. Dan. Vid. Selsk. 2, n°5 (1963).

[87] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Product, Academic Press, New York, (1980), p. 71.

[88] E. Kamke, Differentialgleichungen Lösungs Methoden und Lösungen, B.G. Teubner, Stuttgart (1977), p. 574.

[89] A eq. (4.6.7a) foi exibida, no caso dos modelos de FRW, por J.D. Barrow, em Gravitation in Astrophysics, B. Carter, J.B. Hartle (Eds), Plenum Press (1987). Deve-se observar que $\gamma = \frac{2}{3}$ é omitido em seu tratamento.

[90] F.J. Tipler, The Wave Function of the Universe, Physics Reports 137, 231 (1986).

[91] J.L. Anderson, Principles of Relativity Physics, Academic Press, New York. (1967).

[92] Op. cit. 46, eq. (12.5), p. 144.

[93] F. Lucchin, S. Matarrese, Kinematical Properties of Generalized Inflation, Phys. Lett. 164B, 282 (1985).

[94] Já se provou que exigindo-se a positividade da pressão e da energia, sem considerar os detalhes de uma equação de estado, o tempo de vida dos modelos de FRW tem um limite superior dado por $2T = a_0 \pi$ (na notação deste trabalho). Veja R.C. Tolman, M. Ward,

Phys. Rev. 39, 385 (1932).

[95] Outros textos ilustrativos são: a) S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley (1972); b) L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields, Pergamon Press, Oxford (1975); c) H. Stephani, General Relativity, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[96] A.J. Fennelly, Observer Frame Rotation Rates and Magnetic Fields in Spatially Homogeneous Models, J. Math Phys. 22, 126 (1981).

[97] G.D. Kerlick, Spin and Torsion in General Relativity: Foundations, and Implications for Astrophysics and Cosmology, Doctoral Thesis, Princeton University, (1975).

[98] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, Qualitative Theory of Second Order Dynamical Systems, John Wiley & Sons, New York (1973).

[99] H. Koçak, Differential and Difference Equations Through Computer Experiments, with Diskettes Containing Phaser: an Animator/Simulator for Dynamical Systems for IBM Personal Computers Springer-Verlag, New York (1986).

[100] M. Novello, Scalar and Massless Vector Fields in Cartan Space, Phys. Lett. 59A, 105 (1976).

[101] D. Lorenz, Maxwell Equations in Homogeneous Cosmologies, Astrophys. and Space Sci. 83, 63 (1982).

[102] M.J.D. Assad, I.D. Soares, Anisotropic Bianchi Types VIII and IX Locally Rotationally Symmetric Cosmologies, Phys. Rev. D28, 1858 (1983).


[103] J.A. Schouten, Ricci Calculus (Springer Verlag, Berlin (1954).

- [104] M.A. Tonnelat, Les Theories Unitaires de L'Electromagnetisme et de la Gravitation, Gauthier-Villars (1965).
- [105] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish Inc., Berkeley (1979).
- [106] D. Lovelock, H. Hund, Tensors, Differential Forms and Variational Principles, John Wiley, New York (1975).
- [107] B. Schutz, Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, London (1980).
- [108] S. Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes, International Series of Monographs, Oxford University Press, Oxford (1983).

"COSMOLOGIAS ESPACIALMENTE HOMOGENEAS NUMA VARIEDADE DE
RIEMANN-CARTAN"

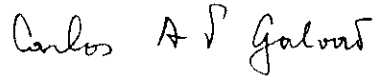
MÁRIO JOSÉ DELGADO ASSAD


Tese de Doutorado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

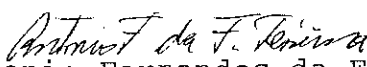

Jayme Tiomno - Presidente


Patricio Anibal Detelier Sottomayor


Ricardo Machado de Amorim


Carlos Augusto Pinto Galvão


Ivano Damião Soares


Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira
- Suplente

Rio de Janeiro, 29 de abril de 1991