

CARLOS ALBERTO SANTOS DE ALMEIDA

PROPRIEDADES QUÂNTICAS E ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE MODELOS
COM SUPERSIMETRIA HETERÓTICA DO TIPO (2,0)

TESE DE DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS (CBPF)

RIO DE JANEIRO

1991

A minha espôsa
Rosa Livia e
aos meus filhas
Tássia Ivila e
Vitor

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para a minha formação e para a realização desta tese. Em particular, desejo mencionar especialmente:

- Prof. J. J. Giambiagi, pelo relacionamento pessoal aberto, pelo constante incentivo, pela amizade e pela confiança que em mim depositou, num momento em que dela muito necessitei.

- Prof. J. A. Helayël-Neto, pela grande contribuição à minha formação em Teoria de Campos, pelas discussões esclarecedoras e pela interação enriquecedora que gerou os trabalhos que formam esta tese.

- Prof. R. Doria, pelo incentivo e pela colaboração.

- Os colegas Marco Aurélio, Sebas(tião) e Álvaro, pelas discussões e sugestões que influenciaram esta tese.

- Os colegas do DCP, Patrício, Collato e José Luiz, pelas discussões e pelo apoio.

- O Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

- O pessoal da " infra-estrutura " do CBPF, Vera, Myriam e Rosangela.

- O PICD/CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Métodos de superespaço são empregados para realizar investigações em teorias de campos bidimensionais que apresentam supersimetria do tipo $(2,0)$. Renormalizabilidade e propriedades quânticas de modelos de matéria e de gauge são discutidas com o auxílio de técnicas de supergráficos- $(2,0)$. Regras de Feymann para ambos os modelos são incluídas.

Uma versão- $(2,0)$ do modelo de Schwinger vetorial é construída e, neste modelo, obtém-se geração dinâmica de massa para os supercampos de gauge.

O *gauging* das isometrias e o acoplamento aos supermultipletos de Yang-Mills são obtidos para modelos- σ $(2,0)$, tanto na ausência quanto na presença de torção.

ABSTRACT

Superspace methods are employed to pursue the investigation of two-dimensional field-theoretical models that exhibit supersymmetry of the $(2,0)$ -type. The renormalisation and quantum-mechanical properties of matter and gauge models are discussed with the help of $(2,0)$ -supergraphs technics. Superfield Feynman rules for these models are presented.

A $(2,0)$ -version of the vector Schwinger model is built up and we check that a dynamical mass generation for gauge superfields take place in this model.

The gauging of the isometries and the coupling to Yang-Mills supermultiplets are carried out for $(2,0)$ σ -models in the absence as well as in the presence of torsion.

ÍNDICE

Agradecimentos	iii
Resumo	i ^{as}
Abstract	^{as}
Índice	^{as} i
Introdução	1
Capítulo I - SUPERSIMETRIA (2,0) - D=2	8
1.1 - INTRODUÇÃO À SUPERSIMETRIA	8
1.2 - SUPERSIMETRIA-(1,0)	13
1.3 - SUPERSIMETRIA-(2,0)	16
1.4 - QUANTIZAÇÃO NO SUPERESPAÇO-(2,0) DOS SUPERCAMPOS DE MATÉRIA	22
1.4.1 - Superpropagadores	22
1.4.2 - Contagem de potências	31
1.4.3 - Teorema de Não-Renormalização	33
Capítulo II - TEORIAS DE GAUGE (2,0) - SUPERSIMÉTRICAS	35
2.1 - SUPERMULTIPELO DE GAUGE (2,0)	35
2.1.1 - Formalismo das superderivadas covariantes de gauge	36
2.1.2 - Formalismo de covariantização da ação ...	40
2.1.3 - Formalismo de covariantização da ação com o relaxamento de certos vínculos	46
2.2 - QUANTIZAÇÃO DO SUPERMULTIPELO DE GAUGE (2,0) ...	49
2.2.1 - Termo de fixação de gauge e a simetria BRST	50
2.2.2 - Propagadores de Gauge	53
Capítulo III - GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA PARA SUPERCAMPOS DE GAUGE ABELIANOS (2,0)	56

3.1 - CONTAGEM DE POTÊNCIAS	56
3.2 - ANÁLISE DOS GRÁFICOS	60
3.3 - GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA	61
3.3.1 - Cálculo dos supergráficos no superespaço- (2,0)	62
3.4 - SUPERGRÁFICOS QUE CONTRIBUEM PARA A AÇÃO EFETIVA A 1-LOOP	67
3.4.1 - Anomalias no superespaço-(2,0)	72
 Capítulo IV - MODELOS-SIGMA NÃO-LINEARES COM SUPERSIMETRIA- (2,0)	77
4.1 - INTRODUÇÃO AOS MODELOS- σ NÃO-LINEARES	77
4.2 - MODELOS- σ NÃO-LINEARES COM SUPERSIMETRIA-(2,0) ..	81
4.3 - FORMULAÇÃO DOS MODELOS- σ NO SUPERESPAÇO-(2,0) ...	87
4.4 - SUPERSIMETRIA X GEOMETRIA DO ESPAÇO-ALVO	91
 Capítulo V - ISOMETRIAS LOCAIS EM MODELOS-SIGMA COM SUPERSIMETRIA-(2,0)	93
5.1 - MODELOS- σ (2,0) KÄHLERIANOS INVARIANTES SOB ISOMETRIAS LOCAIS	93
5.1.1 - <i>Gauging</i> do subgrupo de isotropia	97
5.1.2 - <i>Gauging</i> do subgrupo de isometria	100
5.2 - MODELOS- σ (2,0) COM TORÇÃO INVARIANTES SOB ISOMETRIAS LOCAIS	106
 Conclusões Gerais	111
Apêndice	115
Referências	118

INTRODUÇÃO

A linha condutora deste trabalho será a supersimetria do tipo (p,q) [1], com especial ênfase à supersimetria $(2,0)$, definida em um espaço-tempo bidimensional. Como se sabe, duas dimensões atraíram bastante as atenções na década passada, basicamente devido ao fato de que modelos bidimensionais apresentam interessantes propriedades como solubilidade, confinamento, finitude, cancelamento de anomalias, entre outras, além da possibilidade de utilização da técnica chamada bosonização [2]. Modelos em Teoria Quântica de Campos que podem ser resolvidos completa e consistentemente não são muito freqüentes. Por esta razão, o desenvolvimento de técnicas para a obtenção de soluções, a discussão de questões conceituais ou métodos de aproximação que não dependam das dimensões espaço-temporais, podem nos trazer importantes subsídios para a solução de problemas ainda em aberto em quatro dimensões.

Assim sendo, o estudo de modelos bidimensionais tem-se revelado bastante útil no aprimoramento do nosso entendimento das teorias de campos em geral. Podemos citar o confinamento [3], a liberdade assintótica [4] e os fenômenos críticos [5] como importantes marcos da teoria quântica de campos bidimensionais que contribuíram para o entendimento de fenômenos físicos mais gerais.

No âmbito dos modelos bidimensionais, ocupar-nos-emos com particular atenção das teorias de gauge. Uma série bastante extensa de trabalhos [6-8] está centrada no estudo dos chamados modelos de Schwinger vetorial e quirial [9]. Discutem-se, especialmente, suas propriedades quânticas, e em particular, a

questão das anomalias, da geração dinâmica de massa e, em última instância, a própria validade do modelo em sua versão quirai.

O fenômeno da geração dinâmica de massa, característica de vários modelos bidimensionais [10], é bastante interessante, uma vez que é um mecanismo que permite que bósons de gauge desenvolvam uma massa física não-nula sem, contudo, violar a invariância de gauge.

Em princípio, sempre se deseja extrair previsões físicas das teorias quânticas de campos. Em particular, a determinação de pelo menos parte do espectro de estados físicos da teoria é uma importante contribuição para o entendimento e para a consistência de um modelo em teoria quântica de campos, colocando em confronto suas previsões em relação aos fenômenos observados. Neste quadro, mecanismos de geração de massa para os campos, como o mecanismo de Higgs e a geração dinâmica de massa, adquirem uma especial relevância.

Uma outra classe de modelos bidimensionais bastante interessantes são os chamados modelos- σ não-lineares. Uma de suas propriedades peculiares é a semelhança que apresentam com as teorias de gauge em quatro dimensões [11]. Por outro lado, estes modelos são renormalizáveis [12] e, quando acoplados a férmions quirais apresentam anomalias, as quais podem ser canceladas por mecanismos incomuns [13]. Todavia, mais recentemente, sua importância maior revelou-se no contexto de modelos conformes e, especialmente, nas teorias de cordas, como veremos a seguir.

Modelos bidimensionais supersimétricos definidos na superfície de universo de objetos unidimensionais apareceram inicialmente em conexão com o estudo de modelos duais [14,15]. Com o advento, a partir de 1984, das teorias de supercordas [16,17] em sua versão, digamos, atual, esses modelos, e de maneira geral os modelos bidimensionais, tiveram um verdadeiro renascimento.

Como já mencionado, em duas dimensões podemos definir as supersimetrias do tipo (p,q) , onde p representa o número de geradores de Majorana com quiralidade *left-handed*, enquanto que q denota o número de geradores com quiralidade *right-handed* [17-20]. Estas supersimetrias com o número de geradores *left* e *right* desbalanceados, bem como a sua importância para as teorias de supercordas, serão introduzidas e analisadas no Capítulo I.

Entretanto, a seguir, antecipamos alguns comentários.

A demonstração do cancelamento das anomalias gravitacional e de Yang-Mills efetuada por Green e Schwarz [16] deu ensejo ao surgimento de diversas teorias de supercordas. Uma delas, a chamada supercorda heterótica [17], parece ter o grupo de gauge mais aceitável do ponto de vista fenomenológico. A esta teoria estão associados modelos- σ não-lineares com supersimetria global do tipo $(p,0)$ [18-21].

Numa corda fechada, as oscilações *right* e *left-moving* são independentes. Daí, a supersimetria definida na superfície de universo descrita pela corda ao se propagar dever ser do tipo (p,q) . Sob certas circunstâncias, a supersimetria da superfície de universo gera uma supersimetria do espectro quadridimensional, ou seja, gera uma supersimetria no espaço-tempo ordinário. Pode-se mostrar que uma supersimetria do tipo $(2,0)$ na superfície de universo, de fato um modelo- σ $(2,0)$, é suficiente para garantir uma supersimetria $N=1$ em quatro dimensões [18].

Basicamente, modelos- σ com supersimetria dos tipos $(1,0)$, $(1,1)$ [21], $(2,0)$ [22], $(2,2)$, $(4,0)$ e $(4,4)$ já foram estudados, sendo que apenas os dois últimos não possuem uma formulação no superespaço (Na realidade, para estes modelos existem formulações onde os supercampos são definidos no chamado superespaço harmônico [23]). Inclusive já foi demonstrado que o modelo- σ supersimétrico $(4,4)$ em duas dimensões é finito em todas as ordens de teoria de perturbação [24].

Voltando ao contexto das teorias de cordas, modelos de gauge com supersimetria do tipo (p,q) despertaram interesse a partir do estabelecimento da equivalência entre modelos contendo férmions acoplados a campos vetoriais não-dinâmicos definidos na superfície de universo e modelos- σ bosônicos definidos sobre variedades de grupos [25]. Baseando-se nesta equivalência, é possível calcular as dimensões críticas das teorias de cordas a nível clássico [26].

Recentemente, a introdução de campos de gauge como graus de liberdade dinâmicos da superfície de universo foi investigada [27]. Especificamente, foi proposto um mecanismo para obter modelos de cordas com a simetria de gauge espontaneamente quebrada. Constata-se, também, que estes modelos de gauge podem, em certos casos, ser vistos como cordas de Thirring [28].

Adicionalmente, através da introdução de campos de gauge na superfície de universo, pode-se implementar o chamado esquema de quebra de simetria por redução dimensional de Scherk-Schwarz [29].

Os modelos- σ supersimétricos bidimensionais tem uma importante aplicação em teorias de campos conformes. De fato, sob condições específicas sobre a geometria do espaço-alvo, um modelo- σ não-linear supersimétrico define uma teoria de campos conformalmente invariante. Uma importante classe de teorias de campos conformes é constituída pelos modelos- σ supersimétricos definidos em espaços de Kähler *Ricci-flat* ou em variedades chamadas de hiper-Kähler [18,19,30]. Em particular, modelos- σ heteróticos com supersimetria-(1,0) ou (2,0) definidos sobre variedades *Ricci-flat*, tem sido bastante discutidos em conexão com o problema das configurações clássicas de supercordas [17,19,31,32].

Podemos também mencionar os recentes estudos da álgebra de Kač-Moody em modelos- σ (1,0) e (2,0) conformalmente invariantes. Estes modelos podem se tornar importantes na construção de novas teorias de cordas.

Ainda no quadro de modelos conformes, especula-se sobre a possibilidade de se construir novas teorias de campos conformes a partir do acoplamento de campos de gauge a modelos- σ [33], obtido através do chamado *gauging* das isometrias (que passam a ser *locais*) dos mesmos, conforme discutido em detalhes nesta tese.

O *gauging* de modelos- σ supersimétricos foi inicialmente realizado por Bagger e Witten [34-35] para o modelo- σ com supersimetria $N=1$ em quatro dimensões, no formalismo de campos componentes. Posteriormente, em um interessante trabalho, C. M. Hull e colaboradores obtiveram o modelo- σ invariante sob isometrias locais no superespaço $N=1$, onde o espaço-alvo é uma variedade de Kähler [36] (Aplicações fenomenológicas podem ser encontradas nas refs. [37] e [38]).

No contexto de aplicações à supergravidade estão os trabalhos de R. D'Auria e colaboradores, os quais utilizando uma variedade de Kähler especial (variedade de Hodge), realizam o acoplamento da supergravidade $N=2 - D=4$ com um multipletto vetorial, através do *gauging* das isometrias desta variedade [39].

Quanto aos modelos- σ bidimensionais, na ref. [32] é realizado

o *gauging* do modelo- σ (1,0) com termo de Wess-Zumino (que corresponde à inclusão de torção na variedade-alvo) acoplado à supergravidade, embora no formalismo de componentes.

Recentemente, foi estudado o modelo- σ bosônico bidimensional com termo de Wess-Zumino. Independentemente, C. M. Hull e B. Spence de um lado, e I. Jack e colaboradores de outro, encontraram as condições para se obter a versão invariante sob isometrias locais deste modelo [33,40].

Tendo em vista a relevância que os modelos do tipo (2,0) desempenham no contexto das supersimetrias (p,q) em duas dimensões, deveremos neste trabalho considerar os supermultipletos de matéria (modelo de Wess-Zumino] e de gauge no superespaço-(2,0), quantizá-los através do formalismo da integral de trajetória e, usando técnicas de superespaço, estudar algumas de suas propriedades quânticas como renormalizabilidade e finitude. Supergráficos divergentes a nível de contagem de potências serão calculados explicitamente. Considerando o modelo de supercampos de gauge-(2,0) acoplados a supercampos de matéria, analisaremos em particular sua versão Abelian e investigaremos uma possível geração dinâmica de massa para o setor de gauge, além da ocorrência eventual de anomalias.

Consideraremos, também, modelos- σ não-lineares com supersimetria-(2,0) e transformaremos em simetrias *locais* as isometrias da variedade-alvo destes modelos, tanto no caso de uma variedade sem torção (variedade de Kähler), como no caso mais genérico em que se inclui torção, realizando desta forma o acoplamento dos supercampos dos modelos- σ com supercampos de gauge-(2,0), o que nos fornece a teoria (2,0)-supersimétrica renormalizável mais geral possível.

Esta tese está organizada da seguinte forma:

Capítulo I

Inicialmente, apresenta-se uma revisão de supersimetria de maneira geral e, a seguir, introduz-se a supersimetria do tipo (p,q). A partir da supersimetria-(1,0), constrói-se a supersimetria-(2,0) nos superespaços-(1,0) e (2,0). Obtém-se, então, a ação no superespaço-(2,0) para supercampos de matéria e procede-se à sua quantização, utilizando o formalismo de integrais

de trajetória, onde obtém-se os superpropagadores de matéria. Daí, procede-se a uma análise das divergências do modelo a nível de contagem de potências e discute-se a sua renormalizabilidade, considerando, inclusive, um teorema de não-renormalização válido para o setor de matéria da ação (2,0)-supersimétrica.

Capítulo II

Constróem-se os supermultipletos de Yang-Mills com supersimetria-(2,0), utilizando dois formalismos: superderivadas covariantes de gauge e o formalismo da covariantização direta da ação. Adicionalmente, discute-se este último formalismo, modificando-o através do relaxamento de certos vínculos na álgebra das derivadas covariantes. Em seguida, estuda-se a quantização do modelo de gauge-(2,0), sugerindo um termo de fixação de gauge e um termo de *fantasmas de Faddeev Popov*, definindo ainda a simetria BRST do modelo no superespaço. Neste processo, obtém-se também os superpropagadores para os supercampos de gauge.

Capítulo III

Investigam-se, inicialmente, as divergências superficiais, a nível de contagem de potências, do modelo de supercampos de gauge-(2,0) acoplados com o setor de matéria, considerando o caso Abelian. Mostra-se que este modelo só possui divergências a 1-loop. Utilizando técnicas para o cálculo de supergráficos no superespaço-(2,0), calcula-se explicitamente as expressões para os diagramas divergentes. Em primeiro lugar, são calculados aqueles que contribuem para a geração de massa do setor de gauge: mostra-se que as divergências se cancelam, o que resulta em um termo de massa finito (contribuição por correções quânticas) para os supercampos de gauge.

Posteriormente, calculam-se explicitamente os demais supergráficos (obtendo o cancelamento das divergências) e constrói-se a ação efetiva constituída por contribuições a 1-loop. A partir da ação efetiva, realizamos, *en passant*, um estudo sobre a possibilidade da ocorrência de uma anomalia de gauge do modelo, inclusive considerando a relação de consistência de Wess-Zumino para a mesma (utilizando as transformações de BRST). Por fim, são apresentados alguns comentários sobre a renormalizabilidade do

modelo.

Capítulo IV

Este capítulo é dedicado a uma revisão dos modelos- σ não-lineares bidimensionais. Inicialmente, estuda-se a sua versão bosônica, destacando suas simetrias. Em seguida, analisam-se as condições para se ter um modelo- σ com supersimetria-(2,0), mas descrito no superespaço-(1,0). Passa-se, então, para uma formulação do modelo no superespaço-(2,0), revendo alguns detalhes da geometria de variedades complexas que são pertinentes ao estudo da variedade-alvo do modelo- σ (2,0). Obtém-se também as condições para que este modelo seja invariante sob isometrias *globais*. No final, são apresentados os resultados que ilustram a relação entre a dimensionalidade do espaço-tempo, o número de supersimetrias e a geometria da variedade-alvo correspondente.

Capítulo V

Discute-se, inicialmente, o caso em que o modelo- σ (2,0) não envolve termo de Wess-Zumino, o que significa que a variedade do modelo é do tipo Kähler (não possui torção). Neste caso, considera-se o *gauging* do subgrupo de isotropia no superespaço-(2,0). Este subgrupo consiste das simetrias que deixam os pontos da variedade-alvo invariantes, sendo, portanto, um subgrupo de $SO(n)$ (grupo de estrutura da variedade-alvo) e tendo suas transformações linearmente realizadas.

Posteriormente, realiza-se o *gauging* de um subgrupo das isometrias, seja no formalismo de campos componentes, assim como no superespaço-(2,0). Finalizando, realiza-se o acoplamento dos supermultipletos-(2,0) de Yang-Mills com o modelo- σ definido numa variedade com torção, utilizando o procedimento de tornar locais suas transformações de isometria.

Terminando, seguem-se algumas Conclusões Gerais e um breve Apêndice, onde são apresentadas as convenções adotadas no cálculo espinorial e com as coordenadas do cone-de-luz.

CAPÍTULO I

SUPERSIMETRIA (2,0) - D = 2

Abordaremos, neste capítulo, aspectos gerais das chamadas teorias supersimétricas heteróticas do tipo (p,q) . Em particular, discutimos a formulação clássica e aspectos quânticos do modelo para campos de matéria (modelo de Wess-Zumino bidimensional) com supersimetria $(2,0)$, na qual trabalhamos em toda esta tese.

Inicialmente, discutimos conceitos genéricos das teorias supersimétricas; posteriormente, introduzimos as supersimetrias (SUSY) $(1,0)$ e $(2,0)$, no formalismo do superespaço- $(1,0)$. A seguir, implementamos a supersimetria $(2,0)$ no próprio superespaço- $(2,0)$. Logo após, analisamos a quantização dos supermultipletos de matéria, utilizando técnicas de integral de caminho no superespaço- $(2,0)$, obtendo, em particular, os superpropagadores de matéria.

Finalmente, a partir da análise da contagem de potências estendida aos supergráficos primitivamente divergentes, discute-se a renormalizabilidade dos modelos- $(2,0)$ de matéria.

1.1. - INTRODUÇÃO À SUPERSIMETRIA.

Simetrias constituem-se num dos pilares-mor da teoria de campos e partículas e, por que não dizer, de toda a Física. Uma nova simetria sempre relaciona e unifica fenômenos anteriormente distintos. O intento de unificar todas as forças da Natureza leva-nos à procura de mais e mais simetrias ou, até, da simetria absoluta. As tentativas iniciais de implementar uma simetria entre férmions e bósons resultaram infrutíferas [41].

Em 1967, Coleman e Mandula [42], com base em um certo

conjunto de princípios fundamentais a serem obedecidos por uma teoria de campos não-trivial, estabeleceram um teorema *no-go*, o qual mostra que qualquer grupo de simetrias *basônicas* (do tipo grupos de Lie) da matriz-S em teorias de campos relativísticos resulta no produto direto do grupo de Poincaré por um grupo de simetria interna. Em outras palavras, as únicas quantidades conservadas (ou geradores) que se transformam tensorialmente sob o grupo de Lorentz são os geradores do grupo de Poincaré, P_μ e $M_{\mu\nu}$, e os geradores escalares de simetrias internas. Em conseqüência disso, todos os membros de um múltiplo irreduzível de um grupo de simetria interna devem ser degenerados em massa e spin.

Desta forma, a Supersimetria, que é uma simetria entre férmions (matéria) e bósons (interação), surgiu quando se passou a considerar grupos cujos geradores são fermiônicos, constituindo assim os chamados supergrupos (ou grupos graduados) de Lie.

Considerando o estabelecido por este teorema *no-go*, M. F. Sohnius comenta que a supersimetria é a única possibilidade de unificação não-trivial de bósons e férmions no contexto de uma teoria quântica de campos; o seu fracasso, portanto, implicaria necessariamente no abandono da idéia de unificação ou da própria teoria quântica de campos [43].

Embora alguns trabalhos nos anos sessenta tenham esboçado uma superálgebra de Lie num papel secundário, em um contexto essencialmente matemático [44], a primeira teoria de campos baseada em uma álgebra anticomutante foi construída por Golfand e Likhtman [45] e desenvolvida por Volkov e Akulov [46]. Paralelamente, a supersimetria foi introduzida como uma simetria bidimensional, no contexto das teorias de cordas, por Ramond [14] e Neveu e Schwarz [47]. No entanto, foi em 1974, quando Wess e Zumino [48,49] generalizaram a supersimetria para quatro dimensões, construindo um modelo no qual representações irreduzíveis misturavam férmions e bósons, que a supersimetria passou a ser amplamente conhecida e encontrou a sua plena aplicação em teorias de campos.

Na supersimetria, bósons e férmions são colocados no mesmo supermúltiplo. A álgebra de supersimetria é uma extensão graduada (envolve também anticomutadores) da álgebra de Lie. Suas relações são aquelas do grupo de Poincaré e mais:

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} Q_\alpha \quad , \quad (1.1a)$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = 0 \quad , \quad (1.1b)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad , \quad (1.1c)$$

onde $\sigma^{\mu\nu} = 1/4 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ e γ^μ são as matrizes de Dirac. A eq.(1.1a) implica que o gerador da supersimetria, Q_α , transforma-se como um espinor sob transformações de Lorentz. Como Q_α comuta com P_μ , os componentes do supermultiplete devem ter a mesma massa. Mas, contrariamente ao que ocorre com o grupo de Poincaré, o operador de spin generalizado, $v^2 = W^\mu W_\mu$, onde W^μ (vetor de Pauli-Lubanski) é dado por

$$W_\mu = -1/2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \quad , \quad (1.2)$$

não é mais um operador de Casimir do grupo, uma vez que ele não comuta com Q_α . Portanto, os componentes do supermultiplete podem ter diferentes spins.

A álgebra definida pelas relações (1.1) caracteriza a chamada supersimetria simples. Introduzindo-se geradores espinoriais adicionais, chegamos às chamadas supersimetrias estendidas. O número de geradores tem imediata e importante consequência no espectro de partículas. Denotando-os por Q_{α_i} ($i=1,2,\dots,N$), o estado de spin mais alto do multiplete fundamental da supersimetria estendida tem sua helicidade (λ) determinada por N . A álgebra de supersimetria implica, na realidade, que

$$\lambda_{\max} = \frac{N+1}{4} \quad , \quad \text{para } N \text{ ímpar} \quad , \quad (1.3a)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{N}{4} \quad , \quad \text{para } N \text{ par} \quad . \quad (1.3b)$$

Um dos aspectos mais importantes da supersimetria é a possibilidade que a mesma oferece de formular teorias finitas, uma vez que ela sempre atenua as divergências ultra-violetas das teorias convencionais [49]. Neste sentido,, em quatro dimensões espaço-temporais, já se demonstrou que a supersimetria estendida

com $N=2$ permite a construção de modelos de Yang-Mills em interação com matéria que, para grupos de gauge e representações unitárias convenientemente escolhidas, apresentam a propriedade de finitude em todas as ordens de teoria de perturbação [50]. Mais significativo ainda é o resultado de que [51] as teorias de Yang-Mills $N=4$ - supersimétricas são finitas a todas as ordens para grupos completamente arbitrários [52].

Em linhas gerais, a grande melhoria no comportamento ultra-violeta dos modelos supersimétricos pode ser compreendida se se leva em conta que a supersimetria introduz consigo certas simetrias globais que, através das correspondentes identidades de Ward, restringem significativamente o número e a forma dos possíveis contra-termos da teoria quantizada. Em alguns casos, as restrições são fortes o suficiente para que os contra-termos sejam triviais e a teoria seja, conseqüentemente, finita no regime ultra-violeta.

Por outro lado, também em $D=10$, a supersimetria possui características bastante atraentes, especialmente no contexto da unificação das partículas elementares e da cosmologia, em particular na direção da formulação de teorias de supercordas consistentes [53]. De fato, a formulação de um modelo de cordas com supersimetria no espaço externo (espaço no qual as coordenadas da corda correspondente estão definidas) reduz a dimensão crítica de $D=26$ para $D=10$. O tratamento conjunto de modos fermiônicos e modos bosônicos, soluciona vários problemas que as cordas ordinárias contêm, como, por exemplo, o aparecimento de táquions no espectro e uma constante cosmológica não-nula [16].

Dos diversos tipos de teorias de supercordas já propostas, a que parece ser mais promissora é a chamada supercorda heterótica [54,31], para a qual a supersimetria da superfície de universo (superfície bidimensional descrita pela corda ao se propagar) deve ser do tipo (p,q) , onde p corresponde ao número de geradores de Majorana (cargas) com quiralidade "*left-handed*" e q dá o número de geradores de Majorana "*right-handed*". Tal categoria de supersimetrias somente pode ser realizada em espaços-tempo com dimensão do tipo $(8k+2)$ (e apenas uma coordenada do tipo tempo): apenas nestes espaços, espinores de Majorana com quiralidade definida (espinores de Majorana-Weyl) não-triviais podem ser

construídos.

Um aspecto bastante interessante é a relação que se pode estabelecer entre as supersimetrias presentes na superfície de universo e no espaço-tempo quadridimensional onde se define a teoria efetiva advinda da compactificação do modelo de cordas. Para o entendimento de tal questão, lembremo-nos de que a expansão em série de Fourier dos *campos bidimensionais* (coordenadas da supercorda) fornecem os osciladores que são usados para construir o espaço de Fock dos auto-estados de massa (as *partículas do mundo quadridimensional*). Assim, não nos é inesperado que, sob certas circunstâncias, a supersimetria da superfície de universo induza uma supersimetria do espectro quadridimensional (a chamada supersimetria do espaço-tempo).

Fazendo-se a contagem de graus de liberdade dos geradores fermiônicos, tem-se que estes perfazem um total $(p+q)$ no caso da SUSY (p,q) . Por outro lado, a presença de pelos menos uma supersimetria no espectro quadridimensional (gerada por uma carga de Majorana) requer pelo menos 2 graus de liberdade associados aos geradores. Assim sendo, a condição de que $(p+q) \geq 2$ resulta necessária para que a teoria efetiva quadri-dimensional advinda do processo de compactificação tenha supersimetria $N=1$. Com efeito, segundo os resultados apresentados na ref. [18], a condição de supersimetria $N=1 - D=4$ requer a presença da supersimetria $(2,0)$ local na superfície de universo.

O programa de compactificação [18] considera que o espaço-tempo de dez dimensões de uma supercorda é na verdade da forma $M^4 \times K$, onde M^4 é o espaço-tempo quadridimensional de Minkowski e K é um espaço compacto de seis dimensões.

Um dos aspectos mais interessantes deste esquema, é que a topologia e a geometria de K determinam boa parte da física de baixas energias. A propagação da supercorda na variedade compacta K é descrita por um modelo σ não-linear bidimensional, com uma variedade interna (*espaço-alvo*) K . Considerando o que já foi mencionado acima, este modelo- σ definido na superfície de universo deve ter uma SUSY $(2,0)$ no caso da supercorda heterótica [18,19]. Este requisito restringe a própria geometria do espaço-alvo do modelo- σ . Em particular, modelos com SUSY $(2,0)$ e $(2,2)$ (estes últimos relevantes para a supercorda de Green-Schwarz) sem termo

de Wess-Zumino, requerem que a variedade-alvo do modelo- σ seja do tipo Kähler [32].

Os modelos de matéria e de gauge com supersimetria-(2,0) e os modelos- σ não-linear (2,0)-supersimétricos são o principal objeto de estudo deste trabalho.

1.2. - SUPERSIMETRIA-(1,0)

As chamadas supersimetrias do tipo (p,q) são supersimetrias com p geradores "*left-handed*" e q geradores "*right-handed*", onde estes geradores são espinores de Majorana-Weyl. A álgebra da supersimetria (p,q) é dada por

$$\{Q_+^i, Q_+^j\} = 2\delta^{ij} P_{++}, \quad i, j = 1, \dots, p \quad (1.4a)$$

$$\{Q_-^{i'}, Q_-^{j'}\} = 2\delta^{i'j'} P_{--}, \quad i', j' = 1, \dots, q \quad (1.4b)$$

$$\{Q_+^i, Q_-^{j'}\} = 0 \quad (1.4c)$$

onde Q_+ e Q_- são geradores (cargas) e P_{++} (P_{--}) são componentes de cone-de-luz do momentum P_μ .

Em particular, consideremos a supersimetria-(1,0), isto é, uma supersimetria com apenas um gerador "*left-handed*" e nenhum "*right-handed*", a qual pode ser utilizada para construir qualquer supersimetria-(p,q). Tomemos $i=j=1$ em (1.1), de tal forma que a álgebra da supersimetria-(1,0) é definida por

$$\{Q_+^{(1)}, Q_+^{(1)}\} \equiv \{Q_+, Q_+\} = 2P_{++} = 2i\theta_{++} \quad (1.5a)$$

$$\{Q_+, P_{++}\} = 0 \quad (1.5b)$$

Adicionalmente, vamos construir o superspaço-(1,0) em $D=2$, que consiste das coordenadas usuais do espaço tempo, x^{++} e x^{--} , e de uma coordenada anticomutante, θ_- (espinor de M.W. "*right-handed*").

No espaço-tempo bidimensional, as coordenadas de cone-de-luz são definidas por

$$x^{++} = \sqrt{\frac{1}{2}} (x^0 + x^1) \quad , \quad (1.6a)$$

$$x^{--} = \sqrt{\frac{1}{2}} (x^0 - x^1) \quad , \quad (1.6b)$$

lembrando que a nossa métrica é diag (-1,+1).

Necessitamos de uma derivada covariante de supersimetria, a qual definimos como

$$D_+ = \frac{\partial}{\partial \theta_-} + i\theta_- \partial_{++} \quad , \quad (1.7)$$

e daí

$$D_+^2 = i\partial_{++} \quad , \quad (1.8)$$

onde

$$\partial_{++} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{++}} \quad . \quad (1.9)$$

Uma possível realização diferencial do gerador Q_+ é

$$Q_+ = i \left(\frac{\partial}{\partial \theta_-} - i\theta_- \partial_{++} \right) \quad . \quad (1.10)$$

No superespaço-(1,0) definimos supercampos que são funções das coordenadas x^{++} , x^{--} e θ_- , sujeitos a determinadas transformações. Os supercampos podem ser definidos por expansão na coordenada θ_- , ou por projeção em campos componentes. Por exemplo, consideremos o supercampo escalar, Φ :

$$\Phi(x, \theta) \equiv \varphi(x) + i\theta_- \eta_+(x) \quad , \quad (1.11)$$

que pode ser também definido da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} \quad (1.12a)$$

$$\eta_+(x) = -iD_+ \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} \quad , \quad (1.12b)$$

onde $\varphi(x)$ e $\eta_+(x)$ são campos escalar e espinorial, respectivamente.

Vale aqui um pequeno comentário sobre a integração em relação à variáveis Grassmanianas. Inicialmente, definimos

$$\int d\theta \theta = 1 \quad ; \quad \int d\theta = 0 \quad . \quad (1.13)$$

Desta forma, a integração de uma função $f(\theta)$ procede como: ($\theta^2=0$)

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (\alpha + \theta\beta) = = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \quad , \quad (1.14)$$

ou seja, a integração em θ é exatamente igual à derivação. Notemos, portanto, que, diferente do caso de dx , a dimensão canônica e a quiralidade de $d\theta$ são os mesmos do inverso de θ , ou ainda, os mesmos da derivada de supersimetria D . Por outro lado, podemos escrever que

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = Df \Big|_{\theta=0} \quad (1.15a)$$

ou, alternativamente, considerando que derivadas totais vão a zero:

$$\int d^2x d\theta_+ f(x, \theta) = \int d^2x \frac{\partial f}{\partial \theta_-} = \int d^2x D_+ \quad . \quad (1.15b)$$

Por outro, lado a função delta de Dirac para variáveis de Grassmann pode ser definida como

$$\int d\theta_+ \delta(\theta_- - \theta'_-) f(\theta_-) = f(\theta'_-) \quad . \quad (1.16a)$$

Daí, podemos escrever

$$\int d\theta_+ \delta(\theta_- - \theta'_-) = 1 = \frac{\partial}{\partial \theta_-} \delta(\theta_- - \theta'_-)$$

e, portanto,

$$\delta(\theta_- - \theta'_-) = \theta_- - \theta'_- \quad . \quad (1.16b)$$

Podemos também definir um supercampo espinorial

$$\Psi_-(x, \theta) \equiv \psi_-(x) + i\theta_- F(x) \quad , \quad (1.17)$$

onde $F(x)$ é um campo escalar e $\psi_-(x)$ um espinor de M.W. *right-handed*.

Uma ação no superespaço (1,0) tem uma forma genérica dada por

$$S = \int d^2x d\theta_+ \mathcal{L}_-(\Sigma, \partial_{++}\Sigma, D_+\Sigma) \quad , \quad (1.18)$$

onde $\Sigma(x, \theta)$ é um supercampo qualquer e \mathcal{L}_- é uma função local destes supercampos. Note que, devido ao peso de Lorentz da medida de integração ser (+1/2), a "Lagrangeana" deve ter peso de Lorentz (-1/2) para termos uma ação invariante sob transformações de Lorentz.

Podemos construir uma ação com n supercampos bosônicos e fermiônicos ($i=1, \dots, n$):

$$S = \int d^2x d\theta_- \left[(D_+ \Phi^i)(\partial_{--} \Phi_i) + \Psi_- (D_+ \Psi_-^i) + M_{ij} \Phi^i \Psi_-^j \right] \quad . \quad (1.19)$$

Esta ação é invariante sob as seguintes transformações de supersimetria:

$$\delta_1 \Phi^i = i\varepsilon_- Q_+ \Phi^i \quad (1.20)$$

$$\delta_1 \Psi_-^i = i\varepsilon_- Q_+ \Psi_-^i \quad , \quad (1.21)$$

onde ε_- é o parâmetro global da supersimetria-(1,0) e possui propriedades de um espinor Majorana-Weyl *right-handed*.

1.3. - SUPERSIMETRIA-(2,0)

Nosso interesse neste trabalho é considerar teorias com supersimetria-(2,0). Neste sentido, uma maneira de introduzi-la é impor a invariância da ação (1.19) sob um outro conjunto de transformações de supersimetria com gerador também *left-handed*. Uma vez que queremos construir uma supersimetria com dois geradores de mesma quiralidade, e não com quiralidades opostas (o que daria a supersimetria (1.1) ou N=1), devemos voltar à álgebra

estabelecida na eq. (1.1), tal que

$$\{Q_+^{(1)}, Q_+^{(1)}\} = 2 P_{++} \quad (1.22a)$$

$$\{Q_+^{(2)}, Q_+^{(2)}\} = 2 P_{++} \quad (1.22b)$$

$$\{Q_+^{(1)}, Q_+^{(2)}\} = 0 \quad (1.22c)$$

Considerando que

$$\{Q_+, D_+\} = 0 \quad (1.23a)$$

$$\{D_+, D_+\} = 2i\theta_{++} \quad (1.23b)$$

podemos escolher

$$Q_+^{(1)} = Q_+ \quad (1.24a)$$

e

$$Q_+^{(2)} = D_+ \quad (1.24b)$$

Em conseqüência, definimos a seguinte transformação dos supercampos-(1,0) sob a 2^a supersimetria:

$$\delta_{II} \Phi^i = f^{ij} \xi_{-D_+} \Phi^j \quad (1.25a)$$

$$\delta_{II} \Psi_-^i = g^{ij} \xi_{-D_+} \Psi_-^j \quad (1.25b)$$

onde ξ_- é o parâmetro global (espinorial) da segunda supersimetria e f^{ij} e g^{ij} são matrizes constantes, sobre as quais, posteriormente, teremos que impor determinados vínculos.

O comutador de duas diferentes supersimetrias sobre o supercampo escalar deve ser nulo. Ou seja,

$$[\delta_I, \delta_{II}] \Phi^i = 0 \quad (1.26)$$

Por outro lado, o comutador de duas supersimetrias com diferentes parâmetros, atuando no supercampo escalar, dá

$$[\delta_1^{(2)}, \delta_1^{(1)}] \phi^1 = 2i \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_{++} \phi^1, \quad (1.27)$$

onde utilizamos (1.4) e (1.20). Devemos, então, impor que

$$[\delta_{II}^{(2)}, \delta_{II}^{(1)}] \phi^1 = 2i \xi_1 \xi_2 \delta_{++} \phi^1. \quad (1.28)$$

As relações (1.25), (1.26) e (1.27), e suas análogas quando consideramos o supercampo fermiônico, além da invariância da ação (1.19) sob a segunda supersimetria, impõem condições nas matrizes f^1_j e g^1_j , ou seja

$$f^2 = -1 \quad (1.29a)$$

$$f^T = -f, \quad f \text{ real} \quad (1.29b)$$

$$g^2 = -1 \quad (1.29c)$$

$$g^T = -g, \quad g \text{ real} \quad (1.29d)$$

e ainda a seguinte restrição para a matriz de massa

$$fM + Mg = 0 \quad (1.30)$$

Poderíamos ir mais adiante nas discussões sobre a supersimetria-(2,0) implementada no superespaço-(1,0). No entanto, este formalismo não é o mais conveniente para tratar os problemas que consideramos neste trabalho. Desta forma, passamos agora a formular a supersimetria-(2,0) no próprio superespaço-(2,0). Isto é feito introduzindo mais uma coordenada fermiônica no superespaço-(1,0), ou seja, nosso superespaço agora é parametrizado pelas coordenadas $(x^{++}, x^{--}, \theta_{-(1)}, \theta_{-(2)})$, sendo que ambas as coordenadas são espinores de Majorana-Weyl *right-handed* independentes.

Alternativamente, podemos trabalhar com espinores de Weyl (espinores complexos) definidos como:

$$\theta_- \equiv \theta_{-(1)}^+ + i\theta_{-(2)} \quad (1.31a)$$

$$\bar{\theta}_- \equiv \theta_{-(1)}^- - i\theta_{-(2)} \quad (1.31b)$$

enquanto que temos agora duas derivadas covariantes de supersimetria:

$$D_+ \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_-} + i\bar{\theta}_- \partial_{++} \quad , \quad (1.32a)$$

$$\bar{D}_+ \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_-} + i\theta_- \partial_{++} \quad , \quad (1.32b)$$

as quais cumprem a álgebra :

$$\{D_+, D_+\} = 0 \quad , \quad (1.33a)$$

$$\{\bar{D}_+, \bar{D}_+\} = 0 \quad , \quad (1.33b)$$

$$\{D_+, \bar{D}_+\} = 2i\partial_{++} \quad . \quad (1.33c)$$

Um supercampo escalar complexo definido no superespaço-(2,0) pode ser escrito como:

$$\Phi(x, \theta_-, \bar{\theta}_-) = \varphi(x) + \theta_- \eta_+(x) + \bar{\theta}_- \beta_+(x) + \theta_- \bar{\theta}_- A_{++}(x) \quad . \quad (1.34)$$

O grau de liberdade vetorial é desnecessário num supermultiplete escalar, de tal forma que podemos eliminá-lo impondo o chamado vínculo de quiralidade:

$$\bar{D}_+ \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (1.35)$$

e seu conjugado complexo

$$D_+ \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad . \quad (1.36)$$

Assim, a expansão para o supercampo Φ fica:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \varphi(x) + \theta_- \eta_+(x) + i\theta_- \bar{\theta}_- \partial_{++} \varphi(x) \quad . \quad (1.37)$$

onde $\varphi(x)$ é um campo escalar complexo e $\eta_+(x)$ é um campo espinorial (espinor de Weyl) *left-handed*.

No superespaço-(2,0) a ação tem uma forma genérica dada por

$$S = \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \mathcal{L}_{--}(\Sigma, \partial_{++}\Sigma, D_+\Sigma, \bar{D}_+\Sigma) \quad (1.38)$$

A super-ação mais simples para supercampos de matéria é escrita como [22,55]:

$$S = - \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\bar{\Phi} \partial_{--} \Phi - (\partial_{--} \bar{\Phi}) \Phi \right] + \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\bar{\Psi}_- \Psi_- \right] \quad (1.39)$$

O supercampo espinorial complexo $\Psi_-(x, \theta, \bar{\theta})$ é *right-handed* e também obedece ao vínculo de quiralidade, ou seja,

$$\bar{D}_+ \Psi_-(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (1.40)$$

e de anti-quiralidade

$$D_+ \bar{\Psi}_-(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (1.41)$$

Portanto, sua expressão em campos componentes pode ser escrita como

$$\Psi_-(x, \theta, \bar{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{2}} \psi_-(x) + \theta_- F(x) + \sqrt{\frac{1}{2}} i \theta_{++} \psi_-(x) \quad (1.42)$$

onde $\psi_-(x)$ é campo espinorial complexo (espinor de Weyl) *right-handed* e $F(x)$ é um campo escalar (o fator $\sqrt{1/2}$ é introduzido para futura conveniência).

A este ponto, é interessante fazer uma análise rápida sobre a dimensão canônica dos campos envolvidos na teoria. Notemos que, devido a (1.33c), a derivada covariante de supersimetria deve ter dimensão de massa a 1/2 e, portanto a coordenada espinorial deve ter dimensão de massa a -1/2. Considerando, então, que o elemento de volume no superespaço-(2,0) tem dimensão de massa a -1, obtemos para os supercampos:

$$[\Phi] = 0 \quad (1.43a)$$

$$[\Psi_-] = 1/2 \quad (1.43b)$$

e para os campos componentes:

$$[\varphi] = 0 \quad (1.44a)$$

$$[\eta_+] = [\psi_-] = 1/2 \quad (1.44b)$$

$$[F] = 1 \quad (1.44c)$$

Observamos que a dimensão do campo escalar $F(x)$ é diferente da dimensão canônica de um campo escalar físico em duas dimensões. Isto sugere que o campo $F(x)$ seja um campo auxiliar. Estes campos auxiliares são bastante freqüentes nas teorias supersimétricas, sendo que sua presença é basicamente devido à necessidade do fechamento da álgebra de supersimetria *off-shell*, ou seja, sem recorrer às equações de movimento. Para campos auxiliares, é impossível escrever uma ação cinética canonicamente consistente e, portanto, estes são campos não-propagantes.

Para obtermos uma ação supersimétrica em termos dos campos componentes, basta utilizar a peculiaridade da integração em relação a variáveis fermiônicas. Assim, generalizando (1.17) para duas coordenadas Grassmannianas, podemos escrever:

$$S = \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \mathcal{L}_{--}(\Sigma) = \int d^2x D_+ \bar{D}_+ \mathcal{L}_{--} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \quad (1.45)$$

Assim procedendo, e considerando as expressões (1.34) e (1.42), a ação (1.39) torna-se:

$$S = \int d^2x \left[\bar{\varphi} \square \varphi - i\bar{\eta}_+ \partial_{--} \eta_+ - i\psi_- \partial_{++} \psi_- + \bar{F}F \right] \quad (1.46)$$

$$\text{onde } \square = -2\partial_{++} \partial_{--} \quad (1.47)$$

Podemos sugerir como termo de massa

$$S_m = m \int d^2x d\theta_+ \phi \Psi_- + m \int d^2x d\bar{\theta}_+ \bar{\phi} \bar{\Psi}_- \quad (1.48)$$

Notemos que estes dois termos não estão integrados no superespaço completo. Isto é devido ao fato de que, se tomarmos um produto constituído exclusivamente de supercampos quirais (ou anti-quirais) e integrá-lo no superespaço completo, obtém-se um

resultado identicamente nulo ao projetarmos este termo em componentes (veja eq.(1.45)). Por outro lado, combinações dos campos Φ e $\bar{\Psi}$ ou $\bar{\Phi}$ e Ψ não levam a termos quadráticos nos campos componentes.

Em componentes, a ação (1.48) lê-se:

$$S_m = m \int d^2x \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \eta_+ \psi_- + \varphi F - \sqrt{\frac{1}{2}} \bar{\eta}_+ \bar{\psi}_- + \bar{\varphi} \bar{F} \right] . \quad (1.49)$$

Podemos obter uma ação em componentes sem campo auxiliar, por meio da equação de movimento do mesmo, ou seja

$$F = -m\bar{\varphi} \quad (1.50)$$

Assim,

$$S = \int d^2x \left[\bar{\varphi} \square \varphi - i\eta_+ \partial_{--} \bar{\eta}_+ - i\bar{\psi}_- \partial_{++} \psi_- - m^2 \bar{\varphi} \varphi + \sqrt{\frac{1}{2}} m (\eta_+ \psi_- + \bar{\eta}_+ \bar{\psi}_-) \right] \quad (1.51)$$

1.4. - QUANTIZAÇÃO NO SUPERESPAÇO-(2,0) DOS SUPERCAMPOS DE MATÉRIA

A quantização de modelos supersimétricos diretamente no superespaço, ou seja, em termos dos supercampos, tem vantagens bastante relevantes. Além de simplificar bastante os cálculos, o uso dos gráficos de Feynman supersimétricos (ou "supergráficos"), leva à obtenção de resultados compactos, mais simples e que levam a conclusões mais claras e diretas do que no formalismo de componentes. Por exemplo, uma propriedade muito característica do superespaço, são os chamados teoremas de não-renormalização, que são essenciais no estudo perturbativo do comportamento ultra-violeta dos supergráficos [56].

É interessante mencionar ainda o cancelamento das divergências de diversos diagramas de campos componentes que constituem um só supergráfico.

O formalismo de quantização por integral de caminho sobre supercampos é completamente análogo ao caso de campos componentes. Consideramos ações de supercampos (super-ações) clássicas e usamos

métodos funcionais para construir o gerador funcional $Z[J]$ e a ação efetiva $\Gamma(\Sigma)$.

1.4.1. - SUPERPROPAGADORES

Antes de mais nada, precisamos definir a diferenciação com relação a "superfunções". Em primeiro lugar, tomemos um supercampo qualquer não-vinculado, o qual denotamos por Σ , definimos:

$$\frac{\delta \Sigma(x, \theta, \bar{\theta})}{\delta \Sigma(x', \theta', \bar{\theta}')} \equiv \delta^2(x - x') \delta(\theta - \theta') \delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \equiv \delta(z - z') \quad (1.52)$$

(consideramos um espaço-tempo bidimensional)

Por outro lado, quando consideramos supercampos quirais e anti-quirais, esta definição deve ser modificada. Tendo em vista o formalismo de integral de caminho, o termo de fontes deve ser (no caso de supercampos de matéria):

$$S_F = \int d^2x d\theta_+ \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) J_-(x, \theta, \bar{\theta}) + \int d^2x d\bar{\theta}_+ \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) \bar{J}_-(x, \theta, \bar{\theta}) + \\ + \int d^2x d\theta_+ \Psi_-(x, \theta, \bar{\theta}) \zeta(x, \theta, \bar{\theta}) + \int d^2x d\bar{\theta}_+ \bar{\Psi}_-(x, \theta, \bar{\theta}) \bar{\zeta}(x, \theta, \bar{\theta}) . \quad (1.53)$$

Este termo de fonte merece alguns comentários. Em primeiro lugar, notemos que a medida de integração não é feita em todo o superespaço, devido à quiralidade dos supercampos envolvidos, uma vez que a supercorrente externa que se acopla com supercampos quirais (anti-quirais) deve também ser quiral (anti-quiral). Em segundo lugar, como a medida de integração é fermiônica neste caso, as supercorrentes tem um caráter de Lorentz incomum, ou seja, a supercorrente $J_-(x, \theta, \bar{\theta})$ que se acopla ao supercampo escalar $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ deve ter caráter espinorial para manter a invariância de Lorentz, enquanto que a supercorrente $\zeta(x, \theta, \bar{\theta})$ que se acopla ao supercampo espinorial $\Psi_-(x, \theta, \bar{\theta})$ deve ser um escalar.

Vamos agora utilizar (1.53) para definir a diferenciação de supercampos. Impomos, inicialmente, que:

$$\frac{\delta}{\delta J_-(x, \theta, \bar{\theta})} \int d^2x' d\theta'_+ \Phi(x'; \theta'; \bar{\theta}') J_-(x'; \theta'; \bar{\theta}') = \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad , \quad (1.54)$$

ou seja,

$$\int d^2x' d\theta'_+ \phi(x'; \theta'; \bar{\theta}') \frac{\delta J_-(x'; \theta'; \bar{\theta}')}{\delta J_-(x, \theta, \bar{\theta})} = \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.55)$$

Mas, por outro lado, sabemos que

$$\int d^2x' d\theta'_+ d\bar{\theta}'_+ \delta^2(x'-x) \delta(\theta'_- - \theta_-) \delta(\bar{\theta}'_- - \bar{\theta}_-) \phi(x'; \theta'; \bar{\theta}') = \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.56)$$

ou ainda (pelo fato de que $\int d\bar{\theta}'_+ = \bar{D}'_+$ cu que $\int d^2x' \int d\bar{\theta}'_+ = \int d^2x' \bar{D}'_+$)

$$\int d^2x' d\theta'_+ \bar{D}'_+ [\delta^2(x'-x) \delta(\theta'_- - \theta_-) \delta(\bar{\theta}'_- - \bar{\theta}_-) \phi(x'; \theta'; \bar{\theta}')] = \phi(x, \theta, \bar{\theta})$$

Como $\bar{D}'_+ \phi = 0$, obtemos que

$$\int d^2x' d\theta'_+ \bar{D}'_+ [\delta^2(x'-x) \delta(\theta'_- - \theta_-) \delta(\bar{\theta}'_- - \bar{\theta}_-)] \phi(x'; \theta'; \bar{\theta}') = \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.57)$$

Comparando as equações (1.57) e (1.55), concluímos que

$$\frac{\delta J_-(x, \theta, \bar{\theta})}{\delta J_-(x'; \theta'; \bar{\theta}')} = \bar{D}'_+ \delta^2(x-x') \delta(\theta'_- - \theta_-) \delta(\bar{\theta}'_- - \bar{\theta}_-) \quad , \quad (1.58)$$

ou numa forma condensada:

$$\frac{\delta J_-(z_{--})}{\delta J_-(z'_{--})} = \bar{D}'_+ \delta(z_{--} - z'_{--}) \quad (1.59)$$

Devemos aqui ressaltar dois pontos. Primeiro: examinando o caráter de Lorentz da eq.(1.59), observamos que o lado direito é fermiônico; portanto, devemos impor que $\delta/\delta J_-$ pela medida de integração em (1.54) e não mudamos o sinal. Segundo ponto: devido à possibilidade de troca de sinais, a posição em que definimos as superfunções, como em (1.54) e em (1.56), pode mudar o resultado final. Assim, é sempre bom considerar estas equações, e outras mais, exatamente da forma em que foram definidas.

Fazendo um procedimento análogo para o supercampo ϕ ,

encontramos

$$\frac{\delta \bar{J}_-(z_{--})}{\delta \bar{J}_-(z'_{--})} = - D_+ \delta(z_- - z'_-) \quad (1.60)$$

No caso de supercampos fermiônicos, a manipulação de variáveis de Grassmann leva a pequenas diferenças. Definimos que:

$$\frac{\delta}{\delta \zeta(x, \theta, \bar{\theta})} \int d^2x' d\theta'_+ \Psi_-(x'; \theta'; \bar{\theta}') \zeta(x'; \theta'; \bar{\theta}') = \Psi_-(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.61)$$

e daí

$$\int d^2x' d\theta'_+ \Psi_-(x'; \theta'; \bar{\theta}') \frac{\delta \zeta(x'; \theta'; \bar{\theta}')}{\delta \zeta(x, \theta, \bar{\theta})} = \Psi_-(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.62)$$

Após alguns cálculos semelhantes ao caso escalar, concluímos:

$$\frac{\delta \zeta(x, \theta, \bar{\theta})}{\delta \zeta(x'; \theta'; \bar{\theta}')} = - \bar{D}_+ \delta^2(x_- - x'_-) \delta(\theta_- - \theta'_-) \delta(\bar{\theta}_- - \bar{\theta}'_-) \quad (1.63)$$

Analogamente, para o supercampo $\bar{\Psi}_-$, encontramos

$$\frac{\delta \bar{\zeta}(z_{--})}{\delta \bar{\zeta}(z'_{--})} = D_+ \delta(z_- - z'_-) \quad (1.64)$$

Novamente, como observamos da eq.(1.65), o operador $\delta/\delta \zeta$ tem caráter fermiônico, o que já foi assumido em toda análise anterior.

Vale lembrar que essas regras de diferenciação são válidas para qualquer superfunção quirral ou anti-quirral.

O funcional gerador das super-funções de Green dos supercampos de matéria é definido como:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\Phi D\bar{\Phi} D\Psi_- D\bar{\Psi}_- \exp \left[i(S_0 + S_{INT} + S_F) \right] \quad (1.65)$$

ou

$$Z[J_-, \zeta] = \exp \left[S_{\text{INT}} \left(\delta/\delta J_-, \delta/\delta \zeta \right) \right] Z_0[J_-, \zeta] \quad , \quad (1.66)$$

onde S_0 é dada pelas eqs. (1.39) e (1.48) e S_f foi definida na eq.(1.53), enquanto que $Z_0[J]$ é o funcional gerador das superfunções de Green para a teoria livre, o qual é dado pela eq.(1.65) sem termo de interação.

Nosso objetivo agora é construir as chamadas super-regras de Feynmann. Por conveniências posteriores, devemos reescrever as integrais quirais, que aparecem nos termos de massa e de fonte, como integrais sobre todo o superespaço. Isso é feito com o auxílio de operadores de projeção, definidos como:

$$P_L \equiv i \frac{\partial}{\square} \bar{D}_+ \bar{D}_+ \quad , \quad P_L^2 = 1 \quad (1.67a)$$

$$\bar{P}_L \equiv i \frac{\partial}{\square} D_+ D_+ \quad , \quad \bar{P}_L^2 = 1 \quad (1.67b)$$

Notemos que qualquer superfunção quiral pode ser escrita como

$$\Phi \equiv i \frac{\partial}{\square} \bar{D}_+ \bar{D}_+ \Phi = P_L \Phi \quad (1.68)$$

e qualquer superfunção anti-quiral como

$$\bar{\Phi} \equiv i \frac{\partial}{\square} D_+ D_+ \bar{\Phi} = \bar{P}_L \bar{\Phi} \quad (1.69)$$

Nos resultados, acima utilizamos uma relação básica da álgebra de supersimetria, a eq.(1.33c).

Portanto, se tomarmos uma integral quiral

$$I = \int d^2x d\theta_+ F G \quad , \quad (1.70)$$

onde F e G são expressões quirais arbitrárias, podemos reescrevê-la como

$$I = \int d^2x d\theta_+ \left[i \frac{\partial}{\square} \bar{D}_+ \bar{D}_+ F \right] G = \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[i \frac{\partial}{\square} D_+ F \right] G \quad (1.71)$$

Visto isso, podemos reescrever a nossa ação livre (com fontes) como:

$$\begin{aligned}
 S = \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left\{ -\frac{1}{2} \left[\bar{\Phi} \partial_{--} \Phi - (\partial_{--} \bar{\Phi}) \Phi \right] + \bar{\Psi}_- \Psi_- + i m \left(\frac{\partial_{--}}{\square} \bar{D}_+ \Phi \right) \Psi_- + \right. \\
 - i m \left(\frac{\partial_{--}}{\square} \bar{D}_+ \bar{\Phi} \right) \bar{\Psi}_- + i \left(\frac{\partial_{--}}{\square} D_+ J_- \right) \Phi - i \left(\frac{\partial_{--}}{\square} \bar{D}_+ \bar{J}_- \right) \bar{\Phi} + \\
 \left. + i \left(\frac{\partial_{--}}{\square} D_+ \zeta \right) \Psi_- - i \left(\frac{\partial_{--}}{\square} \bar{D}_+ \bar{\zeta} \right) \bar{\Psi}_- \right\} \quad (1.72)
 \end{aligned}$$

Esta ação pode ser escrita compactamente como:

$$S = i \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\frac{1}{2} \chi^\dagger \mathbf{M} \chi + \chi^\dagger \mathbf{J} \right] \quad (1.73)$$

onde

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} -\partial_{--} & 0 & 0 & -m\partial_{--}\bar{D}_+/\square \\ 0 & \partial_{--} & m\partial_{--}D_+/\square & 0 \\ 0 & m\partial_{--}\bar{D}_+/\square & -i & 0 \\ -m\partial_{--}D_+/\square & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \\ \Psi_- \\ \bar{\Psi}_- \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{J} \equiv \frac{\partial_{--}}{\square} \begin{pmatrix} -\bar{D}_+ \bar{J}_- \\ D_+ J_- \\ \bar{D}_+ \bar{\zeta} \\ -D_+ \zeta \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

Um lembrete técnico: uma integral quirral pode ser escrita

$$\begin{aligned}
 I = \int d^2x d\theta_+ \Phi \Psi_- = \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ \left[i \frac{\partial_{--}}{\square} \bar{D}_+ D_+ \Phi \right] \Psi_- + \\
 + \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ \left[i \frac{\partial_{--}}{\square} \bar{D}_+ D_+ \Psi_- \right] \Phi \quad ,
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$I = \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\left(i \frac{\partial}{\square} D_+ \Phi \right) \Psi_- + \left(i \frac{\partial}{\square} D_+ \Psi_- \right) \Phi \right] \quad (1.76)$$

Seguindo o procedimento habitual da teoria de campos ordinária, reescrevemos (1.73) como:

$$S = \int dz_{++} \left[\frac{1}{2} \chi^\dagger \mathbf{M} (\chi + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}) - \frac{1}{2} \mathbf{J}^\dagger \chi \right]$$

Definindo $\Lambda \equiv \chi - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}$, obtemos

$$S = \frac{1}{2} \int dz_{++} \left[\Lambda^\dagger \mathbf{M} \Lambda - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} \right] \quad (1.77)$$

Desta forma, podemos escrever o funcional gerador da teoria livre como (notemos que $\mathcal{D}\chi = \mathcal{D}\Lambda$):

$$Z_0[\mathbf{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Lambda \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int dz_{++} \left[\Lambda^\dagger \mathbf{M} \Lambda - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} \right] \right\} \quad (1.78)$$

Notemos que a ação deve entrar no funcional gerador sendo definida em todo o superspaço.

Realizando a integral gaussiana em Λ , como é feito habitualmente, obtemos:

$$Z_0[\mathbf{J}] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz_{++} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} \right\} \quad (1.79)$$

A partir de $Z_0[\mathbf{J}]$ podemos construir o gerador funcional das superfunções de Green conexas para a teoria livre, $W_0[\mathbf{J}]$, o qual se relaciona com $Z_0[\mathbf{J}]$ através da expressão:

$$Z_0[\mathbf{J}] = e^{iW_0[\mathbf{J}]} \quad (1.80)$$

No nosso caso, temos, então, que:

$$W_0[\mathbf{J}] = - \frac{i}{2} \int dz_{++} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J} \quad (1.81)$$

Calculando a matriz inversa, \mathbf{M}^{-1} , obtemos, após realizar várias

integrações por partes e outras simplificações:

$$W_0[J] = -\frac{i}{2} \int dz_{++} \left[2i\bar{J}_- \frac{1}{\square - m^2} J_- + 2\bar{\zeta} \frac{\partial}{\square - m^2} \zeta + \right. \\ \left. - 2J_- \frac{m\partial \bar{D}_+}{(\square - m^2)} \zeta + 2\bar{J}_- \frac{m\partial \bar{D}_+}{(\square - m^2)} \bar{\zeta} \right] \quad (1.82)$$

Os superpropagadores podem ser calculados diretamente desta expressão. Assim procedendo, concluímos que:

$$\bar{\Phi}(z)\Phi(z') \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta \bar{J}_-(z)\delta J_-(z')} \Bigg|_{\substack{J=0 \\ \bar{J}=0}} = -\frac{i}{\square - m^2} D_+ \bar{D}_+ \delta(z - z') \quad (1.83a)$$

$$\bar{\Psi}_-(z)\Psi_-(z') \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta \bar{\zeta}(z)\delta \zeta(z')} \Bigg|_{\substack{\zeta=0 \\ \bar{\zeta}=0}} = \frac{\partial}{\square - m^2} D_+ \bar{D}_+ \delta(z - z') \quad (1.83b)$$

$$\Phi(z)\Psi_-(z') \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta J_-(z)\delta \zeta(z')} \Bigg|_{\substack{J=0 \\ \zeta=0}} = -\frac{im}{\square - m^2} \bar{D}_+ \delta(z - z') \quad (1.83c)$$

$$\bar{\Phi}(z)\bar{\Psi}_-(z') \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta \bar{J}_-(z)\delta \bar{\zeta}(z')} \Bigg|_{\substack{\bar{J}=0 \\ \bar{\zeta}=0}} = \frac{im}{\square - m^2} D_+ \delta(z - z') \quad (1.83d)$$

Devido ao fato dos supercampos bosônicos terem dimensão de massa zero e caráter de Lorentz escalar, existem muitas possibilidades de termos de interação nesta teoria. De uma forma geral podemos sugerir:

$$S_{INT} = i\lambda \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\Phi^m \bar{\Phi}^t \bar{\Phi}(\partial_{--} \Phi) - C.C. \right] + \\ + \beta \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\Phi^k \bar{\Phi}^s \bar{\Psi}_- \Psi_- + C.C. \right] + \alpha \int d^2x d\theta_+ \Phi^r \Phi \Psi_- + \\ + \alpha \int d^2x d\bar{\theta}_+ \bar{\Phi}^r \bar{\Phi} \bar{\Psi}_- \quad (1.84)$$

onde λ e β são constantes de acoplamento adimensionais, enquanto que α tem dimensão de massa, o que sugere que as interações "quirais" possam levar a teorias super-renormalizáveis. Para efeito de ilustração vamos considerar apenas vértices de interação de tres supercampos.

A chamada ação efetiva, $\Gamma(\Phi, \Psi)$, o gerador funcional dos super-gráficos irreduzíveis de uma partícula (1-PI), é definida fazendo-se uma transformada funcional de Legendre em $W [J]$:

$$\Gamma(\Phi, \Psi) \equiv W [J(\Phi, \Psi), \zeta(\Phi, \Psi)] - \int d^2x d\theta_+ [\Phi J_- + \Psi_- \zeta] + \\ - \int d^2x d\bar{\theta}_+ [\bar{\Phi} \bar{J}_- + \bar{\Psi}_- \bar{\zeta}] \quad (1.85)$$

(na expressão acima $W[J, \zeta]$ indica dependência em todas as supercorrentes),

onde os supercampos são tomados como configurações clássicas na presença de fontes. A ação efetiva, que a nível de árvore corresponde à ação clássica, pode ser usada para se obter diretamente os vértices.

Observando as expressões para a diferenciação de supercorrentes, e tendo em vista a eq. (1.66b), notamos que podemos formular de uma maneira alternativa nossas super-regras de Feynman. Uma vez que cada linha quiral (anti-quiral) bosônica de um vértice tem um fator \bar{D} ($-D$) agindo nela e cada linha quiral (anti-quiral) fermiônica tem um fator $- \bar{D}$ (D), podemos usar uma destas derivadas covariantes para ser absorvida no volume de integração quiral ou anti-quiral e assim termos uma integração em todo o superespaço. Conseqüentemente, apenas duas das linhas de um tri-vértice quiral ou anti-quiral carregarão fatores derivativos. Em contrapartida, os superpropagadores devem ser tomados diretamente de (1.82), sem considerar fatores derivativos nas supercorrentes. Desta forma os superpropagadores chamados "improved" são dados por:

$$\bar{\Phi}(z)\Phi(z') = - \frac{i}{\square - m^2} \delta(z-z') \quad (1.86a)$$

$$\bar{\Psi}_-(z)\Psi_-(z') = \frac{\partial}{\square - m^2} \delta(z - z') \quad (1.86b)$$

$$\Phi(z)\Psi_-(z') = \frac{m\partial}{(\square - m^2)^+} D \delta(z - z') \quad (1.86c)$$

$$\bar{\Phi}(z)\bar{\Psi}_-(z') = - \frac{m\partial}{(\square - m^2)^+} \bar{D} \delta(z - z') \quad (1.86d)$$

De posse de todos os resultados anteriores, podemos, então, considerar as contribuições quânticas para a ação clássica e realizar todo o cálculo perturbativo da ação efetiva Γ .

Estes não são, contudo, os superpropagadores em cuja expansão podem-se ler os propagadores dos campos componentes. Só no cálculo explícito dos gráficos, mediante a inserção dos fatores de vértices, é que os propagadores usuais do formalismo de campos componentes fazem a sua aparição.

1.4.2. - CONTAGEM DE POTÊNCIAS

No estudo da renormalização de uma teoria, o comportamento ultra-violeta dos gráficos de Feynman (momenta internos dos gráficos indo para infinito), ou seja, a análise das divergências é de fundamental importância. Neste contexto, é interessante obter o grau superficial de divergência dos supergráficos através de uma contagem de potências. Vamos considerar vértices dos tipos:

$$\Phi \dots \bar{\Phi} \dots \delta \dots \Phi \equiv V_{\Phi} \text{ (com } n \text{ supercampos envolvidos)}$$

$$\Phi \dots \bar{\Phi} \dots \bar{\Psi} \Psi \equiv V_{\Psi} \text{ (com } p \text{ supercampos envolvidos)}$$

$$\bar{\Phi} \dots \Phi \dots \Psi \equiv V_{\Phi\Psi} \text{ (com } q \text{ supercampos envolvidos)}$$

Considerando ainda o comportamento ultra-violeta dos propagadores dados nas eqs.(1.86), obtemos o seguinte grau de divergência superficial para um supergráfico genérico:

$$\delta = 1 - I_{\Phi\Psi} - I_{\bar{\Phi}\bar{\Psi}} - \frac{1}{2} (E_{\Psi} + E_{\bar{\Psi}}) - V_{\Phi\Psi} \quad (1.87)$$

onde I indica linhas internas e E indica linhas externas. Por outro lado, deixando explícito o número de loops L, temos:

$$\delta = 2 - L + \frac{1}{3} (I_{\bar{\Phi}\Phi} + I_{\bar{\Psi}\Psi}) - \frac{2}{3} (I_{\Phi\Psi} + I_{\bar{\Phi}\bar{\Psi}}) - \frac{1}{3} (E_{\Phi} + E_{\bar{\Phi}}) + \frac{5}{6} (E_{\Psi} + E_{\bar{\Psi}}) - V_{\Phi\Psi} \quad (1.88)$$

É interessante observar que nossa expressão final para a contagem de potências não depende das linhas escalares (quirais e anti-quirais) externas, ao contrário do que ocorre com as linhas fermiônicas externas. Por outro lado, a presença do vértice $V_{\Phi\Psi}$ (quiral ou anti-quiral) com sinal negativo indica que sua presença nos supergráficos torna-os mais convergentes.

Apesar de aparentemente muito convergentes, devido à subtração de linhas internas do tipo $\Phi\Psi$, externas espinoriais e vértices (quirais e anti-quirais), os supergráficos envolvendo exclusivamente linhas escalares ($\bar{\Phi}$ e Φ) externas são potencialmente divergentes e induzem renormalização da função de onda dos escalares e da constante de acoplamento λ , como vemos nos exemplos abaixo:

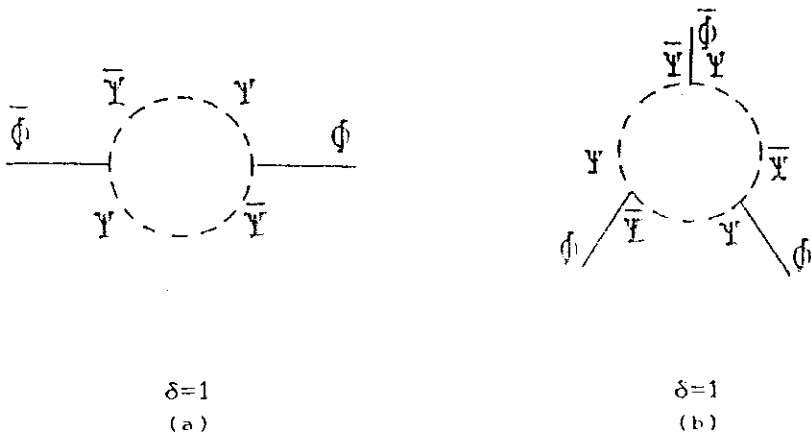


Fig. 1.1

SUPERGRÁFICOS DIVERGENTES COM LINHAS EXTERNAS ESCALARES

Há ainda que acrescentar que estas não são as únicas renormalizações necessárias: ocorre também renormalização da função de onda do supercampo Ψ e do vértice associado à constante de acoplamento β . Esta última renormaliza-se efetivamente através do contra-termo ao vértice e através das renormalizações das funções de onda de Φ e Ψ . Por outro lado não são geradas divergências que requeiram renormalização do acoplamento α . Como exemplos de renormalização da função de onda do supercampo espinorial Ψ e da constante de acoplamento β , citamos os seguintes supergráficos:

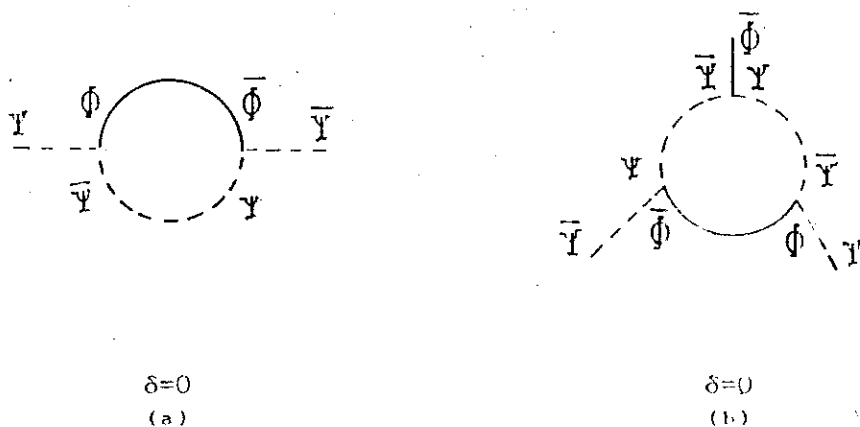


Fig. 1.2

EXEMPLOS DE SUPERGRÁFICOS QUE CORRIGEM FUNÇÃO DE ONDA
E CONSTANTE DE ACOPLAMENTO

1.4.3. - TEOREMA DE NÃO-RENORMALIZAÇÃO

Uma das conseqüências mais celebradas das teorias supersimétricas, no que diz respeito ao comportamento de sua série perturbativa, são os teoremas de não-renormalização [56]. Em quatro dimensões, por exemplo, a supersimetria $N = 1$ é fundamental para a resolução do problema da naturalidade [57] e da hierarquia de gauge [58], uma vez que se verifica que as divergências quadráticas introduzidas pelo setor de supercampos escalares são automaticamente eliminadas. Na verdade, a essência do teorema de não-renormalização da supersimetria $N = 1$ em $D = 4$ é que todo o setor de matéria não requer renormalizações independentes para as massas e as constantes de acoplamento, mas requer simplesmente

renormalizações de função de onda.

No caso da supersimetria-(2,0) que estamos tratando em D=2, um resultado muito similar ocorre, e já da expressão para a contagem de potências, o mesmo segue: os termos de massa para a matéria, *que são quirais* e do tipo $\Phi\Psi$, e as constantes de acoplamento dos termos de interação entre os supercampos escalares e espinoriais de mesma quiralidade, não induzem *qualquer renormalização independente*, mesmo à ordem de 1-loop. As renormalizações de tais parâmetros ocorrem apenas via renormalização da função de onda dos supercampos. Enfatizamos portanto que, de forma idêntica ao caso de N=1 - D=4, os termos da ação que não estão definidos em todo o superespaço é que são completamente finitos e, em conseqüência, não requerem contra-termos infinitos. Contudo, como já mencionado acima, as constantes de acoplamento associadas à auto-interação dos supercampos Φ induzem renormalização independente. Tais resultados podem ser sumarizados através das relações abaixo entre os chamados parâmetros "bare" e renormalizados:

$$\Phi_B = Z_\Phi^{1/2} \Phi_R \quad (1.89a)$$

$$\Psi_B = Z_\Psi^{1/2} \Psi_R \quad (1.89b)$$

$$\lambda_B = Z_1 Z_\Phi^{-n/2} \lambda_R \quad (1.89c)$$

$$\beta_B = Z_2 Z_\Phi^{-(p-2)/2} Z_\Psi^{-1} \beta_R \quad (1.89d)$$

$$\alpha_B = Z_\Phi^{-(q-1)/2} Z_\Psi^{-1/2} \alpha_R \quad , \quad (1.89e)$$

onde Z_1 é o fator de renormalização induzido pelo vértice puramente escalar V_Φ , Z_2 é o fator de renormalização do vértice com constante de acoplamento β (V_Ψ) e Z_Φ e Z_Ψ são os fatores de renormalização das funções de onda de Φ e Ψ , respectivamente.

CAPÍTULO II

TEORIAS DE GAUGE (2,0)-SUPERSIMÉTRICAS

Neste capítulo, abordaremos a versão (2,0)-supersimétrica das teorias de *YANG-MILLS*. Inicialmente, construímos o supermultiplete de gauge e a sua ação, mediante a imposição de determinados vínculos. Através de um dos formalismos utilizados para a construção do supermultiplete, realizamos o seu acoplamento a supercampos de matéria. Passamos, então, a estudar a parte quântica do modelo, executamos o procedimento de Faddeev-Popov e definimos um termo de fixação de gauge no superespaço-(2,0). Apresentamos uma simetria de BRST para os supercampos de gauge e encontramos os seus correspondentes superpropagadores.

2.1. - SUPERMULTIPLETO DE GAUGE (2,0)

Para introduzir os supercampos de gauge, podemos seguir dois formalismos diferentes. Um deles consiste em definir superderivadas covariantes de gauge, a partir das derivadas usuais do espaço-tempo e das derivadas de supersimetria. Em seguida, devemos analisar a álgebra destas superderivadas covariantes e impor vínculos sobre esta álgebra, de modo a obter o espectro de campos componentes desejados. O segundo formalismo é feito em conjunto com a construção do acoplamento do supermultiplete de gauge aos supercampos de matéria. Ou seja, as superconexões de gauge são definidas tendo em vista tornar invariante por transformações de gauge a ação dos supercampos de matéria no superespaço. Como uma variação deste último formalismo, apresentamos ainda, uma formulação menos vinculada.

2.1.1. - FORMALISMO DAS SUPERDERIVADAS COVARIANTES DE GAUGE

Começamos por introduzir superconexões que "covariantizam" as derivadas já conhecidas. As derivadas covariantes de Yang-Mills são definidas como :

$$\nabla_+ \equiv D_+ - ig\Gamma_+ \quad , \quad (2.1a)$$

$$\bar{\nabla}_+ \equiv \bar{D}_+ + ig\bar{\Gamma}_+ \quad , \quad (2.1b)$$

$$\nabla_{++} \equiv \partial_{++} - ig\Gamma_{++} \quad , \quad (2.1c)$$

$$\nabla_{--} \equiv \partial_{--} - ig\Gamma_{--} \quad , \quad (2.1d)$$

onde g é uma constante de acoplamento com dimensão de massa , Γ_+ e $\bar{\Gamma}_+$ são superconexões de natureza espinorial (de fato são espinores de Weyl *right-handed*) e Γ_{++} , Γ_{--} são superconexões vetoriais.

Estas superconexões, ou simplesmente supercampos de gauge, fornecem, em princípio, uma abundância de campos componentes. Entretanto, considerando que basicamente desejamos um campo de gauge e seus parceiros supersimétricos, algumas restrições devem ser impostas nestes supercampos.

A maneira mais simples de realizar tal intento é impondo-se condições sobre os supercampos intensidade-de-campo da teoria. E tais supercampos são definidos a partir da álgebra das superderivadas covariantes de gauge, cuja estrutura geral é dada por

$$[\nabla_A, \nabla_B] = T_{AB}^C \nabla_C - igW_{AB} \quad , \quad (2.2)$$

onde ∇_A entende-se por ∇_+ , ∇_{++} , ∇_{--} ou ainda seus conjugados hermiteanos. Portanto, A simboliza os índices do superespaço $(+, ++, --)$. T_{AB}^C e W_{AB} são, respectivamente, a torção e os supercampos intensidade-de-campo. O símbolo $\{ \}$ denota o comutador (quando pelo menos uma das derivadas é de natureza bosônica) ou o

anticomutador (quando as duas derivadas são de natureza fermiônica).

Observamos, ainda, que nas equações (2.1) , (2.2) e em todo o resto deste capítulo, supercampos de gauge e os supercampos intensidade-de-campo são definidos de tal forma que

$$\Gamma_A \equiv \Gamma_A^a T_a \quad ; \quad W_{AB} \equiv W_{AB}^a T_a \quad , \quad (2.3)$$

onde os T_a 's indicam os geradores anti-hermiteanos do grupo de gauge e a é um índice da representação adjunta do grupo de gauge.

Vamos estudar o caso $\nabla_A = \nabla_+$ e $\nabla_B = \bar{\nabla}_+$:

$$\{\nabla_+, \bar{\nabla}_+\} = T_{++}^+ \nabla_+ + T_{++}^+ \bar{\nabla}_+ + T_{++}^{++} \nabla_{++} + T_{++}^{--} \nabla_{--} - igW_{++} \quad . \quad (2.4)$$

Lembrando do caso com invariância global,

$$\{D_+, \bar{D}_+\} = 2i\delta_{++} \quad , \quad (2.5)$$

obtemos que

$$T_{++}^{++} = 2i \quad , \quad (2.6)$$

com todas as outras componentes da torção sendo nulas, inclusive as componentes que aparecem quando tomamos o comutador de derivadas espinoriais, e de derivadas espaciais entre si. Impondo que estas componentes da torção não devem mudar no caso de invariância local, escrevemos:

$$\{\nabla_+, \bar{\nabla}_+\} = 2i\nabla_{++} - igW_{++} \quad , \quad (2.7a)$$

$$\{\nabla_+, \nabla_+\} = -igF_{++} \quad , \quad (2.7b)$$

$$[\nabla_+, \nabla_{++}] = -igW_{+++} \quad , \quad (2.7c)$$

$$[\nabla_+, \nabla_{--}] = -ig\bar{W}_- \quad , \quad (2.7d)$$

$$[\nabla_{++}, \nabla_{--}] = -igZ \quad . \quad (2.7e)$$

Resta agora impor vínculos nesta álgebra para obtermos um

conjunto de campos componentes desejado. Um guia para esta tarefa é a análise dos campos componentes das superconexões. Seguindo Brooks e outros [55], impomos os vínculos:

$$\{\nabla_+, \bar{\nabla}_+\} = 2i\nabla_{++} \quad , \quad (2.8a)$$

$$\{\nabla_+, \nabla_+\} = 0 \quad , \quad (2.8b)$$

$$[\nabla_+, \nabla_{++}] = 0 \quad , \quad (2.8c)$$

$$[\nabla_+, \nabla_{--}] = -ig\bar{W}_- \quad , \quad (2.8d)$$

$$[\nabla_{++}, \nabla_{--}] = -igZ \quad . \quad (2.8e)$$

O primeiro vínculo, (2.6a), é o chamado vínculo convencional, cuja consequência é tornar a superconexão Γ_{++} dependente das outras, ou seja,

$$\Gamma_{++} = -\frac{i}{2} [D_+\bar{\Gamma}_+ + \bar{D}_+\Gamma_+ - ig\{\Gamma_+, \bar{\Gamma}_+\}] \quad . \quad (2.9)$$

Desta forma, eliminamos um potencial de gauge indesejado.

O segundo vínculo elimina um campo componente de spin-3/2, o qual, se presente numa teoria de campos de gauge, não permite a propagação do campo eletromagnético [59].

Por outro lado, sabemos que no caso da teoria de gauge descrita por derivadas covariantes, as identidades de Bianchi são exatamente as identidades de Jacobi, cuja versão no superespaço é:

$$[\nabla_{[A}, [\nabla_B, \nabla_C]] = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Aqui o símbolo $\{\}$ significa anti-simetrização "graduada", ou seja, o mesmo que anti-simetrização, mas com um fator extra de (-1) para cada par de índices fermiônicos trocados.

Em princípio, estas identidades não trazem nenhuma informação. Contudo, uma vez que impusemos vínculos em alguns supercampos intensidade-de-campo, as identidades de Bianchi implicam vínculos em outros. Em particular, notemos que os vínculos (2.8 a,b) levam ao terceiro vínculo, quando consideramos

a seguinte identidade de Bianchi:

$$[\nabla_+, \{\nabla_+, \bar{\nabla}_+\}] + [\nabla_+, \{\bar{\nabla}_+, \nabla_+\}] + [\bar{\nabla}_+, \{\nabla_+, \nabla_+\}] = 0 \quad (2.11)$$

É importante observar que, da equação (2.8a) ou da equação (2.9), concluímos que a conexão Γ_{++} deve ser hermiteana. Um requerimento adicional é que Γ_{--} deve também ser hermiteano; do contrário, teríamos mais de um potencial de gauge associado a uma única simetria de gauge. Uma teoria com esta característica será formulada na próxima sub-seção.

Das identidades de Bianchi, considerando os vínculos (2.8), obtemos facilmente relações entre os diferentes supercampos intensidade-de-campo, ou seja,

$$\nabla_+ W_- + \bar{\nabla}_+ \bar{W}_- = 2iZ \quad (2.12a)$$

$$\nabla_{++} \bar{W}_- = \nabla_+ Z \quad (2.12b)$$

$$\nabla_+ W_- = 0 \quad (2.12c)$$

Considerando todas as possíveis identidades de Bianchi, não obtemos nenhuma informação nova. Portanto concluímos que temos apenas dois supercampos intensidade-de-campo independentes, escolhidos como W_- e \bar{W}_- , os quais envolvem tres conexões de gauge independentes, a saber, Γ_+ , $\bar{\Gamma}_+$ e Γ_{--} . Podemos, agora, construir uma ação para os supercampos de Yang-Mills, através dos supercampos intensidade-de-campo, ou seja,

$$S_G = \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \text{Tr } \bar{W}_- W_- \quad (2.13a)$$

onde

$$\text{Tr } T^a T_b = \delta^a_b \quad (2.13b)$$

e os supercampos intensidade-de-campo podem ser obtidos a partir das definições (2.1) e dos vínculos (2.8), dando

$$\bar{W}_- = D_+ \Gamma_{--} - \partial_{--} \Gamma_+ - ig[\Gamma_+, \Gamma_{--}] \quad (2.13c)$$

Os vínculos (2.8) levam-nos a escrever as seguintes

expansões em campos componentes para as superconexões:

$$\Gamma_+ = \frac{1}{g} \rho_+ + i\bar{\theta}_-(A_{++} + iU_{++}) - \frac{1}{g} \theta_- \bar{\theta}_- \partial_{++} \rho_+ \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{--} = A_{--} + i\theta_- \bar{\gamma}_- + i\bar{\theta}_- \gamma_- + \theta_- \bar{\theta}_- B \quad (2.15)$$

onde ρ_+ e γ_- são respectivamente espinores de Weyl *left-* e *right-handed*, B é um campo escalar real e A_{++} , A_{--} , U_{++} são componentes de cone-de-luz de campos vetoriais. Posteriormente, vamos mostrar que o campo U_{++} não é um campo de gauge verdadeiro, no sentido de que não contém graus de liberdade físicos.

2.1.2. - FORMALISMO DE COVARIANTIZAÇÃO DA AÇÃO

A segunda maneira de introduzir os supercampos de gauge da SUSY-(2,0) é através da covariantização da ação no superespaço dos supercampos de matéria. Reescrevemos aqui a referida ação:

$$S = - \frac{i}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ [\bar{\Phi} \partial_{--} \Phi - (\partial_{--} \bar{\Phi}) \Phi] + \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \bar{\Psi}_- \Psi_- \quad (2.16)$$

Vamos supor que os supercampos Φ e Ψ transformam-se sob o grupo de gauge como:

$$\Phi' = e^{i\Lambda} \Phi \quad ; \quad \bar{\Phi}' = e^{-i\bar{\Lambda}} \bar{\Phi} \quad (2.17a)$$

$$\Psi'_- = e^{i\Lambda} \Psi_- \quad ; \quad \bar{\Psi}'_- = \bar{\Psi}_- e^{-i\bar{\Lambda}} \quad (2.17b)$$

onde $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})$ é um supercampo escalar, que é a extensão natural para o superespaço de um parâmetro de gauge numa teoria ordinária. Além disso, Λ deve obedecer ao mesmo vínculo de quiralidade de Φ e Ψ , para que os supercampos transformados mantenham este vínculo. Portanto,

$$\bar{D}_+ \Lambda = D_+ \bar{\Lambda} = 0 \quad (2.18)$$

e, como consequência óbvia, Λ deve ser complexo.

Devido ao fato de Λ ser complexo, a simples covariantização da derivada do espaço-tempo ∂_{--} não é suficiente para tornar a ação

(2.17) invariante sob transformações de gauge. Portanto, em estreita semelhança com o caso das teorias de Yang-Mills supersimétricas com N=1 em quatro dimensões, introduzimos um supercampo escalar, V. Desta forma, a ação (2.17) covariantizada lê-se:

$$S_{M-G} = - \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\bar{\Phi} e^{GV} \nabla_{--} \Phi - (\nabla_{--} \bar{\Phi}) e^{GV} \Phi \right] +$$

$$+ \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \bar{\Psi} e^{GV} \Psi \quad , \quad (2.19)$$

onde o supercampo escalar V transforma-se como

$$e^{GV'} = e^{i\bar{\Lambda}} e^{GV} e^{-i\Lambda} \quad , \quad V \equiv V^a T_a \quad (2.20)$$

e a derivada covariante ∇_{--} como

$$(\nabla_{--} \Phi)' = e^{i\Lambda} (\nabla_{--} \Phi) \quad , \quad (2.21)$$

onde G é uma constante de acoplamento com dimensão de massa e a derivada covariante ∇_{--} é aquela definida em (2.1d).

No caso em que o grupo de gauge é Abeliano, (2.20) pode ser escrita como

$$V' = V + \frac{i}{G} (\bar{\Lambda} - \Lambda) \quad , \quad (2.22)$$

o que mostra que este supercampo deve ser real. Como conseqüência, este supercampo não é vinculado, ou seja, não obedece ao vínculo de quiralidade imposto a Φ , Ψ e Λ . Desta forma, ele apresenta um dos seus campos componentes como sendo um campo de gauge e, portanto, é chamado também de supercampo de gauge, embora este não seja uma conexão no sentido usual, visto que não aparece na covariantização de uma derivada qualquer.

O supercampo escalar real V é também chamado de prepotencial, uma vez que algumas superconexões ou superpotenciais de gauge podem ser escritos em termos de V, como veremos mais adiante.

A expansão em campos componentes para V pode ser escrita como

$$V = C + i\theta_- \lambda_+ + i\bar{\theta}_- \bar{\lambda}_+ + \theta_- \bar{\theta}_- A_{++} \quad , \quad (2.23)$$

onde C é um campo escalar real, λ_+ é um espinor complexo *left-handed* e A_{++} um campo vetorial real.

Lembremos que no primeiro formalismo tínhamos os supercampos de gauge $\bar{\Gamma}_+$, Γ_+ e Γ_{--} , e agora temos V e Γ_{--} . A relação entre estes dois formalismos fica clara quando, para construirmos supercampos intensidade-de-campo, assim como uma ação para o setor de gauge livre, devemos novamente recorrer à álgebra das derivadas covariantes, as quais devem incluir Γ_+ , $\bar{\Gamma}_+$ e Γ_{++} que, embora não apareçam na ação (2.19), são necessárias para o fechamento da álgebra. Neste ponto, repete-se toda a análise levada a efeito no formalismo anterior.

No entanto, no formalismo de supercampos de gauge acoplados com supercampos de matéria, ficam mais evidentes as propriedades de transformação dos supercampos de gauge, como veremos a seguir.

Construímos derivadas que são covariantes de gauge com relação às transformações Λ

$$\nabla_A \equiv D_A - i g \Gamma_A = (\nabla_+, \nabla_{++}, \nabla_{--}) \quad , \quad (2.24)$$

as quais são definidas tal que

$$(\nabla_A \Phi)' = e^{i\Lambda} (\nabla_A \Phi) \quad , \quad (2.25)$$

ou seja,

$$\nabla_A' = e^{i\Lambda} \nabla_A e^{-i\Lambda} \quad (2.26)$$

ou ainda,

$$\delta \nabla_A = i[\Lambda, \nabla_A] \quad . \quad (2.27)$$

Os conjugados hermiteanos dessas derivadas transformam-se segundo $\bar{\Lambda}$ como

$$\bar{\nabla}'_A = e^{i\bar{\Lambda}} \bar{\nabla}_A e^{-i\bar{\Lambda}} \quad (2.28)$$

onde

$$\bar{\nabla}_A = \bar{D}_A + ig\bar{\Gamma}_A = (\bar{\nabla}_+, \bar{\nabla}_{++}, \bar{\nabla}_{--}) \quad (2.29)$$

Como discutido no primeiro formalismo, vínculos impostos na álgebra das derivadas covariantes exigem a hermiticidade de ∇_{++} e ∇_{--} .

Um ponto importante é que as derivadas covariantes ∇_+ e $\bar{\nabla}_+$ podem ser alternativamente definidas como

$$\nabla_+ \equiv e^{-gV} D_+ e^{gV} \quad (2.30)$$

$$\bar{\nabla}_+ \equiv e^{-gV} \bar{D}_+ e^{gV} \quad (2.31)$$

uma vez que estas definições respeitam a transformação (2.20) para o prepotencial.

Assim, podemos escrever:

$$\Gamma_+ = \frac{i}{g} e^{-gV} (D_+ e^{gV}) \quad (2.32)$$

$$\bar{\Gamma}_+ = \frac{i}{g} e^{-gV} (\bar{D}_+ e^{gV}) \quad (2.33)$$

e fica clara, portanto, a relação entre os dois formalismos a nível de supercampos de gauge.

Após (2.32) e (2.33), para termos consistência entre as expansões (2.23) e (2.14), devemos reescrever (2.23). Portanto

$$V = C - \frac{i}{g} \theta_- \rho_+ - \frac{i}{g} \bar{\theta}_- \bar{\rho}_+ + \theta_- \bar{\theta}_- A_{++} \quad (2.34)$$

sendo que, no caso Abeliano

$$U_{++} = \delta_{++} C \quad (2.35)$$

e onde consideramos ainda que

$$G = g \quad (2.36)$$

Cabe ressaltar aqui a equação (2.35), a qual mostra que o campo vetorial U_{++} não é um componente de cone-de-luz de um campo de gauge, mas simplesmente a derivada de um campo escalar, o qual não introduz na teoria nenhum grau de liberdade físico, como mostraremos posteriormente.

Para sabermos o real papel desempenhado pelo campos componentes, ou em outras palavras, conhecermos os campos que carregam graus de liberdade físicos, vamos considerar agora as transformações de gauge para os supercampos de gauge e os seus campos componentes.

Da transformação genérica (2.26), podemos escrever para os supercampos Γ_+ e Γ_{--} :

$$\delta\Gamma_+ = \frac{1}{g} [D_+, \Lambda] + i [\Lambda, \Gamma_+] \quad , \quad (2.37)$$

$$\delta\Gamma_{--} = \frac{1}{g} [\partial_{--}, \Lambda] + i [\Lambda, \Gamma_{--}] \quad . \quad (2.38)$$

A equação (2.38) mostra a natureza intrinsecamente complexa de Γ_{--} . No entanto, como já discutimos anteriormente esta conexão deve ser hermiteana e, portanto, devemos mudar a equação (2.38) para

$$\delta\Gamma_{--} = \frac{1}{g} [\partial_{--}, \Lambda + \bar{\Lambda}] + i [\Lambda + \bar{\Lambda}, \Gamma_{--}] \quad . \quad (2.39)$$

Tomando as expressões (2.37) e (2.39) em componentes, considerando as expansões (2.14) e (2.15) para Γ_+ e Γ_{--} e definindo a expansão para o supercampo parâmetro de gauge Λ como

$$\Lambda = \frac{\alpha}{2} + \theta_- \beta_+ + \frac{i}{2} \theta_- \bar{\theta}_- \delta_{++} \alpha \quad , \quad (2.40)$$

concluimos que, no caso Abelian, as transformações de gauge para os campos componentes são:

$$\delta\rho_+ = \beta_+ \quad , \quad (2.41a)$$

$$\delta U_{++} = \frac{1}{g} \partial_{--} \text{Im}\alpha \quad , \quad (2.41b)$$

$$\delta \bar{\gamma}_- = - \frac{1}{g} \partial_{--} \beta_+ \quad , \quad (2.41c)$$

$$\delta B = - \frac{1}{g} \partial_{++} \partial_{--} \text{Im} \alpha \quad , \quad (2.41d)$$

$$\delta A_{++} = \frac{1}{g} \partial_{++} \text{Re} \alpha \quad . \quad (2.41e)$$

A transformação para o campo escalar C pode ser obtida de (2.41b), devido à relação (2.35). Assim

$$\delta C = \frac{1}{g} \text{Im} \alpha \quad . \quad (2.42)$$

Os campos que se transformam sem derivadas são chamados campos compensadores, ou campos de puro gauge e não carregam nenhum grau de liberdade físico, uma vez que podem ser zerados por uma escolha adequada dos parâmetros da transformação de gauge (o chamado gauge de Wess-Zumino). No nosso caso, vemos que ρ_+ e C são campos compensadores, assim como U_{++} , devido à relação (2.35). Vemos também que A_{++} e A_{--} são verdadeiramente componentes de cone-de-luz de um campo de gauge A_μ . Por outro lado, podemos utilizar os campos compensadores para redefinir os campos γ_- e B, para torná-los invariantes de gauge no caso Abelian:

$$\gamma_- \rightarrow \gamma_- - \frac{i}{g} \partial_{--} \rho_+ \quad , \quad (2.43a)$$

$$B \rightarrow B - \partial_{++} \partial_{--} C \quad . \quad (2.43b)$$

Daí, Γ_{--} admite a expansão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{--} = & A_{--} + i\theta_- (\bar{\gamma}_- - \frac{i}{g} \partial_{--} \rho_+) + i\bar{\theta}_- (\gamma_- + \frac{i}{g} \partial_{--} \bar{\rho}_+) + \\ & + \theta_- \bar{\theta}_- (B - \partial_{--} \partial_{++} C) \quad . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Desta feita, o campo espinorial complexo γ_- é o campo do fotino em duas dimensões, ou seja, o férmion parceiro do bóson de gauge. Uma análise rápida da dimensão canônica dos campos e da constante de acoplamento revela-nos que o campo escalar B tem

dimensão de massa, enquanto que um campo escalar físico em duas dimensões deve ser adimensional. Portanto, não é possível construir um termo cinético para B; este não se propaga (não é um campo físico) e é comumente chamado de campo auxiliar.

Podemos obter, rapidamente, a ação (2.19) em componentes no gauge de Wess-Zumino, isto é, com $\rho_+ = C = U_{++} = 0$. Assim

$$S_G = \int d^2x \left[-\frac{1}{2} F_a F^a + i\gamma_-^{(a)} D_{++} \gamma_{-(a)} - \frac{1}{2} B^2 \right] \quad , \quad (2.45)$$

onde

$$F^a \equiv \partial_{++} A_{--}^a - \partial_{--} A_{++}^a + g f_{bc}^a A_{++}^b A_{--}^c \quad , \quad (2.46)$$

$$D_{++} \gamma_-^a \equiv \partial_{++} \gamma_-^a + g f_{bc}^a A_{++}^b \gamma_-^c \quad , \quad (2.47)$$

e

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c \quad . \quad (2.48)$$

É interessante notar ainda que, em completa analogia com a teoria de Yang-Mills supersimétrica N=1 em quatro dimensões, podemos construir aqui uma ação supersimétrica que é invariante sob um grupo (ou subgrupo) Abeliano, ou seja

$$S = \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \xi \Gamma_{--} \quad . \quad (2.49)$$

A invariância de gauge é evidente, uma vez que no caso Abeliano, Γ_{--} se transforma como a soma de um supercampo quirral e um anti-quirral. Em componentes, (2.49) torna-se

$$S = \xi \int d^2x [B + i\partial_{++} A_{--}] \quad . \quad (2.50)$$

Assim sendo, a ação (2.49) é o análogo na supersimetria-(2,0) do termo de Fayet-Iliopoulos na supersimetria N=1 - D=4 [60].

2.1.3. - FORMALISMO DE COVARIANTIZAÇÃO DA AÇÃO COM O RELAXAMENTO DE CERTOS VÍNCULOS

Tendo em vista que a conexão Γ_{--} , devido à (2.38), é

intrinsecamente complexa, podemos propor uma formulação alternativa que nos leva a um diferente conjunto de campos componentes.

Consideremos as derivadas covariantes definidas pelos símbolos ∇_+ e $\bar{\nabla}_+$ que, em princípio, são derivadas diversas daquelas definidas em (2.24) e (2.28). Suas covariâncias são ditadas pelas transformações:

$$(\bar{\nabla}_+ \Phi)' = e^{i\Lambda} \bar{\nabla}_+ \Phi \quad , \quad (2.51a)$$

$$(\nabla_+ \bar{\Phi})' = e^{-i\Lambda} \nabla_+ \bar{\Phi} \quad , \quad (2.51b)$$

ou ainda

$$\nabla_+' = e^{-i\Lambda} \nabla_+ e^{i\Lambda} \quad . \quad (2.52)$$

Podemos escolher (numa espécie de escolha de representação), estas derivadas definidas como

$$\bar{\nabla}_+ = \bar{D}_+ \quad (2.53a)$$

e

$$\nabla_+ = e^{-gV} \bar{D}_+ e^{gV} \quad , \quad (2.53b)$$

as quais cumprem os requisitos (2.51). Tomando uma definição para ∇_+ e $\bar{\nabla}_+$ como

$$\nabla_+ = D_+ - ig\Gamma_+ \quad , \quad (2.54a)$$

e

$$\bar{\nabla}_+ = \bar{D}_+ - ig\bar{\Gamma}_+ \quad , \quad (2.54b)$$

a escolha assimétrica (2.53) equivale a

$$\bar{\Gamma}_+ = 0 \quad (2.55a)$$

e

$$\Gamma_+ = \frac{i}{g} e^{-gV} (D_+ e^{gV}) \quad (2.55b)$$

(naturalmente, neste gauge, $\bar{\Gamma}_+$ não é o complexo conjugado de Γ_+). Um procedimento análogo é desenvolvido para a teoria de Yang-Mills supersimétrica N=1 em D=4 (Ver referência [56], pg. 164 e no contexto de modelos com SUSY-(2,0), ver a referência [55]).

Podemos tomar aqui a covariantização da ação dos supercampos de matéria (2.19), apenas com a diferença que na derivada

$$\nabla_{--} = \partial_{--} - ig\Gamma_{--} \quad ,$$

o supercampo de gauge Γ_{--} é complexo. Levando em conta ainda, para efeito de fechamento da álgebra, a derivada covariante ∇_{++} já definida na seção anterior, podemos repetir os vínculos (2.8), com a ressalva de que deixamos de impor o vínculo de hermiticidade sobre Γ_{--} e que as derivadas ∇_+ e $\bar{\nabla}_+$ são dadas por (2.53).

Considerando os comentários acima, o supercampo Γ_{--} neste formalismo deve ser escrito como

$$\Gamma_{--} = (A_{--} + iM_{--}) + i\theta\bar{\gamma}_{--} + i\bar{\theta}\Sigma_{--} + \theta\bar{\theta}(B + iS) \quad . \quad (2.56)$$

O prepotencial V pode ainda ser escrito como em (2.33). Em relação ao formalismo da seção (2.1.2), aparecem adicionalmente, no espectro dos campos componentes, um campo vetorial M_{--} , um campo espinorial complexo Σ_{--} e um escalar real S. Utilizando a transformação de gauge (2.38), obtemos que estes campos variam (no caso abeliano) segundo as expressões:

$$\delta M_{--} = \frac{1}{g} \partial_{--} \text{Im}\alpha \quad , \quad (2.57a)$$

$$\delta \Sigma_{--} = 0 \quad , \quad (2.57b)$$

$$\delta S = \frac{1}{g} \partial_{--} \partial_{++} \text{Re}\alpha \quad . \quad (2.57c)$$

Desta forma, como não existe nenhuma restrição adicional sobre o campo componente M_{--} , a transformação (2.57a) sugere que temos, além do campo A_{μ} , um segundo potencial de gauge. Por outro lado, temos também outro campo espinorial invariante de gauge.

Considerando que $G = 2g$, podemos escrever a ação para os supercampos de Yang-Mills, de forma idêntica a (2.13a), sendo que

$$W_- = \frac{1}{g} [\bar{\nabla}_+, \bar{\nabla}_{--}] = \frac{1}{g} [\bar{D}_+, \partial_{--} - ig\bar{\Gamma}_{--}] = \bar{D}_+ \bar{\Gamma}_{--} \quad , \quad (2.58a)$$

$$\bar{W}_- = \frac{1}{g} [\nabla_+, \nabla_{--}] = \frac{1}{g} [e^{-2gV} \bar{D}_+ e^{2gV}, \partial_{--} - ig\Gamma_{--}] \quad . \quad (2.58b)$$

Por outro lado, a ação para o acoplamento de supercampos de matéria e gauge fica ligeiramente modificada:

$$S_{M-G} = - \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\bar{\phi} e^{GV} \bar{\nabla}_{--} \phi - (\bar{\nabla}_{--} \bar{\phi}) e^{GV} \phi \right] + \\ + \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \bar{\Psi}_- e^{GV} \Psi_- \quad . \quad (2.59)$$

Vamos tomar a conexão complexa Γ_{--} em termos de duas conexões reais, ou seja,

$$\Gamma_{--} = H_{--} + iG_{--} \quad . \quad (2.60)$$

Podemos reescrever a parte de supercampos escalares como

$$S_{esc} = - \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\bar{\phi} e^{GV} \partial_{--} \phi - (\partial_{--} \bar{\phi}) e^{GV} \phi + \right. \\ \left. - 2ig\bar{\phi} e^{GV} H_{--} \phi \right] \quad . \quad (2.61)$$

Da equação, acima notamos que a conexão G_{--} desacopla-se da matéria carregada, ao contrário de H_{--} e V . Da expansão (2.56), observamos que a componente do campo de gauge A_{--} está contida em H_{--} , enquanto que o potencial de gauge extra M_{--} está contido em G_{--} . Concluimos, portanto, que este campo não se acopla com a matéria [61]. No entanto, quando consideramos o acoplamento dos supercampos de gauge definidos neste formalismo menos vinculado com modelos- σ não-lineares, verificamos o acoplamento do potencial de gauge extra com os campos escalares do modelo- σ [62].

2.2. - QUANTIZAÇÃO DO SUPERMULTIPLÉTO DE GAUGE (2,0)

O procedimento de quantização por integrais de caminho

definidas no superespaço para o caso dos supercampos de gauge é análogo ao caso dos supercampos de matéria, mas com uma relevante diferença. Como no caso das teorias de gauge ordinárias (puramente bosônicas), o operador que aparece entre os campos no termo cinético não é inversível. Portanto, como nas teorias de gauge ordinárias, devemos fixar o gauge. Em busca de um procedimento mais rigoroso, utilizamos o método de *Faddeev-Popov*, que também nos dá o termo dos *superfantasmas* de *Faddeev-Popov*. Adicionalmente, definimos uma simetria de BRST para o supermultiplete de gauge (2,0). Feito isso, passaremos à obtenção dos superpropagadores de gauge. Lembramos que, neste processo de quantização e em todo o seguimento deste trabalho, consideraremos o supermultiplete de gauge introduzido pelos formalismos equivalentes das sub-seções 2.1.1 e 2.1.2, ou seja, sem a presença do potencial de gauge extra M_{--} .

2.2.1. - TERMO DE FIXAÇÃO DE GAUGE E A SIMETRIA BRST.

Em linhas gerais, o método de *Faddeev-Popov* para o supermultiplete de gauge (2,0) segue o procedimento habitual que é tomado para teorias que envolvem supercampos quirais, como por exemplo, o modelo de super-Yang-Mills $N = 1$ em quatro dimensões, cujo estudo detalhado pode ser visto na seção 6.2.b, pg. 343 da ref. [56]. Portanto, vamos partir do ponto em que a análise dos dois modelos se diferencia.

Utilizando a ação (2.13a) para os supercampos de gauge, definimos a integral funcional :

$$Z = \int \mathcal{D}\Gamma_{--} \mathcal{D}\Gamma_{+} \mathcal{D}\bar{\Gamma}_{+} \exp i \left\{ \frac{1}{2} \int dz_{++} \text{Tr } \bar{W} W \right\} \quad (2.62)$$

Executando o procedimento de *Faddeev-Popov*, o funcional acima torna-se:

$$Z = \int \mathcal{D}\Gamma_{--} \mathcal{D}\Gamma_{+} \mathcal{D}\bar{\Gamma}_{+} \mathcal{D}C \mathcal{D}C' \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}\bar{C}' \exp i \left[S_{\text{INV}} + S_{\text{FG}} + S_{\text{FP}} \right] \quad (2.63a)$$

onde S_{INV} é a ação (2.13a),

$$S_{FG} = - \frac{1}{2\alpha} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \bar{F}_- F_- \quad (2.63b)$$

α é um parâmetro constante arbitrário e

$$S_{FP} = \int d^2x d\theta_+ C' \left[\frac{\delta F_-}{\delta \Lambda} C + \frac{\delta F_-}{\delta \bar{\Lambda}} \bar{C} \right] + \int d^2x d\bar{\theta}_+ \bar{C}' \left[\frac{\delta \bar{F}_-}{\delta \Lambda} C + \frac{\delta \bar{F}_-}{\delta \bar{\Lambda}} \bar{C} \right] \quad (2.63c)$$

Na equação acima, os supercampos escalares C e C' (\bar{C} e \bar{C}') que correspondem ao supercampo quirral (anti-quirral) parâmetro de gauge Λ ($\bar{\Lambda}$), são também quirrais (anti-quirrais). Estes supercampos são chamados de superfantasma de Faddeev-Popov e apresentam o caráter inusitado de serem escalares anti-comutantes.

Podemos introduzir na integral funcional o fator:

$$\int D\sigma_- D\bar{\sigma}_- \exp \frac{1}{2} \left[\alpha \bar{\sigma}_- \sigma_- \right] \quad (2.64)$$

onde σ_- é um supercampo espinorial de Weyl *left-handed*. Após a redefinição

$$\sigma_- = \Pi_- - \frac{1}{\alpha} F_- \quad ; \quad \bar{\sigma}_- = \bar{\Pi}_- + \frac{1}{\alpha} \bar{F}_- \quad (2.65)$$

obtemos

$$S_{FG} = - \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\frac{2}{\alpha} \bar{F}_- F_- - \alpha \bar{\Pi}_- \Pi_- + \bar{\Pi}_- F_- - \bar{F}_- \Pi_- \right] \quad (2.66)$$

Escolhemos como condição de fixação de gauge

$$F_- = -\bar{D}_+ \Gamma_{--} + \delta_{--} \bar{\Gamma}_+ \quad ; \quad \bar{F}_- = D_+ \Gamma_{--} + \delta_{--} \Gamma_+ \quad (2.67)$$

a qual, quando expressa em campos componentes, torna-se a conhecida condição de Lorentz colocada em termos de coordenadas de cone-de-luz:

$$S_{FG} = - \frac{1}{2\alpha} \int d^2x \left[(\partial_{++} A_{--} + \partial_{--} A_{++})^2 + \begin{array}{l} \text{parceiros} \\ \text{supersimetricos} \end{array} \right] \quad (2.68)$$

A exemplo do que é feito para o supermultiplo de gauge (1,0) na ref. [63], consideremos as transformações de BRST [64,65] para os supercampos de gauge (2,0). Estas podem ser obtidas substituindo-se $\Lambda^a \rightarrow i\lambda C^a$ e $\bar{\Lambda}^a \rightarrow i\lambda \bar{C}^a$ nas equações (2.36) e (2.38), sendo que λ é um parâmetro *global anti-comutante* ($\lambda^2=0$):

$$\delta_B \Gamma_{--}^a = \frac{i}{g} \lambda \partial_{--} (C^a + \bar{C}^a) + i f_{bc}^a \lambda (C^b + \bar{C}^b) \Gamma_{--}^c \quad , \quad (2.69a)$$

$$\delta_B \Gamma_{+}^a = - \frac{i}{g} \lambda D_{+} C^a + i f_{bc}^a \lambda C^b \Gamma_{+}^c \quad , \quad (2.69b)$$

$$\delta_B \bar{\Gamma}_{+}^a = \frac{i}{g} \lambda \bar{D}_{+} \bar{C}^a - i f_{bc}^a \lambda \bar{C}^b \bar{\Gamma}_{+}^c \quad , \quad (2.69c)$$

$$\delta_B C'^a = \lambda D_{+} \Pi_{-}^a \quad ; \quad \delta_B \bar{C}'^a = \lambda \bar{D}_{+} \bar{\Pi}_{-}^a \quad , \quad (2.69d)$$

$$\delta_B C^a = \frac{i}{2} \lambda f_{bc}^a C^b C^c \quad ; \quad \delta_B \bar{C}^a = \frac{i}{2} \lambda f_{bc}^a \bar{C}^b \bar{C}^c \quad , \quad (2.69e)$$

$$\delta_B \Pi_{-}^a = 0 \quad ; \quad \delta_B \bar{\Pi}_{-}^a = 0 \quad . \quad (2.69f)$$

Pode-se mostrar que $\delta_B^2 = 0$, quando atuando em qualquer dos supercampos acima. Esta transformação é portanto *nilpotente*. Neste último aspecto, é que aparece a relevância do supercampo auxiliar σ , o qual permite que as transformações de BRST possam ser definidas *off-shell*, ou seja, sem recorrer às equações de movimento.

Por simplicidade, consideremos agora o caso Abeliano. Com as condições de fixação de gauge (2.67), o termo de Faddeev-Popov lê-se:

$$S_{FG} = \frac{2}{g} \int d^2x d\theta_{+} d\bar{\theta}_{+} \left[C' \partial_{--} \bar{C} + \bar{C}' \partial_{--} C \right] \quad (2.70)$$

Podemos mostrar ainda que as ações (2.70) e (2.66) (com F_{-} e \bar{F}_{-} dados por (2.67)) são invariantes sob as transformações de BRST, a menos de uma derivada total. E, como a parte invariante de

gauge também é invariante de BRST (pois simplesmente reparametrizamos os supercampos parâmetro de gauge), concluímos que toda a ação é invariante sob transformações de BRST.

A partir da invariância da ação sob transformações de BRST, pode-se mostrar que o funcional gerador $Z[J]$ também o será. Este fato nos levará às identidades de Slavnov-Taylor, as quais são essenciais para o estudo de renormalizabilidade das teorias de super-Yang-Mills.

2.2.2. - SUPERPROPAGADORES DE GAUGE.

O funcional gerador das superfunções de Green para o multipletto de gauge pode ser definido como

$$Z[J, \Omega] = \int \mathcal{D}\Gamma_{--} \mathcal{D}\Gamma_{+} \mathcal{D}\bar{\Gamma}_{+} \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp i \left[S_{INV} + S_{FG} + S_{FP} + S_{Fonte} \right], \quad (2.71)$$

onde S_{INV} , S_{FG} e S_{FP} são dadas pelas equações (2.13a), (2.63b) e (2.63c), respectivamente, e onde podemos considerar a fixação de gauge dada por (2.67). Novamente, por uma questão de simplicidade, consideramos o caso Abelian, de tal forma que, conforme vemos da eq. (2.70), os superfantasma não se acoplam com os supercampos de gauge e, sendo quadráticos, podem ser eliminados por uma integração Gaussiana.

O termo de fontes é definido da seguinte forma

$$S_{Fonte} = \int d^2x d\theta_{+} d\bar{\theta}_{+} \left[\Gamma_{--} J + \bar{\Omega}_{---} \Gamma_{+} + \bar{\Gamma}_{+} \Omega_{---} \right], \quad (2.72)$$

onde J representa uma supercorrente escalar real, e Ω_{---} é uma supercorrente espinorial complexa.

Considerando apenas os termos quadráticos, a ação total incluindo o termo de fontes, após integrações por partes, pode ser reescrita como:

$$S_T = \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_{+} d\bar{\theta}_{+} \left\{ \frac{\alpha-1}{\alpha} \Gamma_{--} D_{+} \bar{D}_{+} \Gamma_{--} + \frac{\alpha+1}{\alpha} \Gamma_{--} \partial_{--} D_{+} \bar{\Gamma}_{+} \right. \\ \left. - \frac{\alpha+1}{\alpha} \Gamma_{+} \partial_{--} \bar{D}_{+} \Gamma_{--} - \frac{\alpha-1}{\alpha} \Gamma_{+} \partial_{--} \partial_{--} \bar{\Gamma}_{+} \right.$$

$$+ 2 \left[\Gamma_{--} J + \bar{\Omega}_{--} \Gamma_{+} + \bar{\Gamma}_{+} \Omega_{--} \right] \} \quad (2.73)$$

Esta ação pode ser colocada em forma compacta:

$$S_T = \frac{1}{2} \int d^2x d\theta_{+} d\bar{\theta}_{+} \left[\chi^{\dagger} M \chi + 2\chi^{\dagger} \eta \right] \quad (2.74)$$

onde

$$\chi = \begin{pmatrix} \Gamma_{--} \\ \Gamma_{+} \\ \bar{\Gamma}_{+} \end{pmatrix} ; \quad \eta = \begin{pmatrix} J \\ \Omega_{--} \\ -\bar{\Omega}_{--} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Podemos expressar a matriz M em termos dos projetores definidos no Capítulo I (Eqs. 1.67, sec. 1.4.1.). Portanto

$$M = \begin{pmatrix} i \frac{\alpha-1}{\alpha} \theta_{++} (\bar{P}_L - P_L) & \frac{\alpha+1}{2\alpha} \theta_{--} \bar{D}_+ \bar{P}_L & \frac{\alpha+1}{2\alpha} \theta_{--} D_+ P_L \\ - \frac{\alpha+1}{2\alpha} \theta_{--} D_+ P_L & \frac{\alpha-1}{2\alpha} \theta_{--}^2 & 0 \\ - \frac{\alpha+1}{2\alpha} \theta_{--} \bar{D}_+ \bar{P}_L & 0 & - \frac{\alpha-1}{2\alpha} \theta_{--}^2 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Repetindo todo o procedimento do capítulo anterior, e considerando que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} - \frac{\alpha-1}{2i} \frac{\theta_{--}}{\square} (P_L - \bar{P}_L) & \frac{\alpha+1}{2i} \frac{1}{\square} (\bar{D}_+ \bar{P}_L \quad D_+ P_L) \\ - \frac{\alpha+1}{2i} \frac{1}{\square} \begin{pmatrix} D_+ P_L \\ \bar{D}_+ \bar{P}_L \end{pmatrix} & \frac{8\alpha}{\alpha-1} \frac{\theta_{++}^2}{\square^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha} \bar{P}_L & 0 \\ 0 & -1 + \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha} P_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

obtemos os seguintes superpropagadores para as conexões de gauge:

$$\langle \Gamma_{--}(z) \Gamma_{--}(z') \rangle = -i \frac{\alpha-1}{2} \frac{\partial_{--}^2}{\square^2} [\bar{D}_+ D_+ - D_+ \bar{D}_+] \delta(z - z')_{--} \quad , \quad (2.78a)$$

$$\langle \Gamma_{--}(z) \Gamma_+(z') \rangle = \frac{\alpha+1}{2} \frac{D_+}{\square} \delta(z - z')_{--} \quad , \quad (2.78b)$$

$$\langle \bar{\Gamma}_+(z) \Gamma_+(z') \rangle = -i \frac{\alpha-1}{2} \frac{\partial_{++}^2}{\square^2} \delta(z - z')_{--} \quad . \quad (2.78c)$$

Neste caso, é interessante lembrar que as supercorrentes não são vinculadas e, portanto, não carregam derivadas de supersimetria quando são diferenciadas funcionalmente.

Dos superpropagadores acima, podemos obter os propagadores dos campos componentes. Considerando as projeções:

$$D_+ \bar{D}_+ \delta(z - z')_{--} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -\delta^2(x - x') \quad (2.79a)$$

$$\bar{D}_+ D_+ \delta(z - z')_{--} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \delta^2(x - x') \quad , \quad (2.79b)$$

chegamos, no gauge de Wess-Zumino, aos seguintes resultados:

$$\langle A_{--}(x) A_{--}(x') \rangle = -i \frac{\alpha-1}{2} \frac{\partial_{--}^2}{\square^2} \delta^2(x - x') \quad , \quad (2.80a)$$

$$\langle A_{++}(x) A_{++}(x') \rangle = -i \frac{\alpha-1}{2} \frac{\partial_{++}^2}{\square^2} \delta^2(x - x') \quad , \quad (2.80b)$$

$$\langle A_{++}(x) A_{--}(x') \rangle = i \frac{\alpha+1}{2} \frac{1}{\square} \delta^2(x - x') \quad . \quad (2.80c)$$

Os superpropagadores acima obtidos, junto àqueles para os supercampos de matéria, serão úteis quando estudarmos algumas propriedades quânticas do modelo onde acoplamos supercampos de gauge e de matéria, o que será amplamente discutido no capítulo que segue.

CAPÍTULO III

GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA PARA SUPERCAMPOS DE GAUGE

ABELIANOS (2,0)

Um interessante ponto de contato dos modelos de gauge supersimétricos bidimensionais com os modelos bosônicos ordinários é o modelo de Schwinger [9,66]. Quando restringimos o nosso modelo de gauge supersimétrico estudado no Capítulo II ao caso Abeliano, essencialmente estamos diante de uma generalização supersimétrica-(2,0) do modelo de Schwinger vetorial ou se assim preferirem, da Eletrodinâmica Quântica bidimensional com supersimetria-(2,0).

O modelo de Schwinger ordinário, já exaustivamente estudado na literatura, apresenta como um dos seus aspectos mais interessantes (e didáticos) o chamado fenômeno da geração dinâmica de massa [6,8]. Neste capítulo, começaremos discutindo o comportamento ultra-violeta dos supergráficos da teoria de gauge com SUSY-(2,0), através do procedimento mais genérico que é a contagem de potências. Em seguida, analisamos e passamos ao cálculo explícito daqueles que são relevantes para a geração de massa.

Logo após, discutiremos brevemente a questão da anomalia e teceremos alguns comentários sobre a renormalizabilidade do modelo.

3.1. - CONTAGEM DE POTÊNCIAS

Um gráfico de Feynman pode apresentar divergências quando seus momenta internos tendem a infinito (divergências ultra-violeta). O grau de divergência superficial de um gráfico 1-PI (Irreduzível uma Partícula), que fornece um limite superior

para a divergência do gráfico, pode ser encontrado através de uma contagem das potências de momentum dos propagadores e vértices que o constituem. Eventuais simetrias internas podem contribuir para uma redução deste grau de divergência por meio das correspondentes identidades de Ward.

No caso de teorias supersimétricas formuladas no superespaço, o procedimento para obter o grau de divergência superficial de um supergráfico, é basicamente o mesmo que no caso de teorias ordinárias. Consideremos, no entanto, que devido à relação no espaço de momenta,

$$\{ D_+, \bar{D}_+ \} = - 2 p_{++} \quad (3.1)$$

as derivadas covariantes de supersimetria, D_+ e \bar{D}_+ , deverão contribuir com $p^{1/2}$ cada uma na contagem de potências, sempre que os superpropagadores ou os vértices as contiverem. Por outro lado, na resolução de supergráficos, aparecem fatores envolvendo estas derivadas, as quais podem ser suprimidas aos pares no interior de cada *loop*, com base na relação:

$$\delta(\theta_- - \theta'_-) \delta(\bar{\theta}_- - \bar{\theta}'_-) D_+ \bar{D}_+ \delta(\theta_- - \theta'_-) \delta(\bar{\theta}_- - \bar{\theta}'_-) = \delta(\theta_- - \theta'_-) \delta(\bar{\theta}_- - \bar{\theta}'_-) \quad (3.2)$$

(esta relação pode ser mostrada por inspeção direta).

Assim sendo, para cada *loop*, um par de derivadas $D_+ \bar{D}_+$ é eliminado; conseqüentemente, cada *loop* diminui uma potência de momentum.

Tendo em vista os superpropagadores de matéria obtidos na seção 1.4.1 do Capítulo I, os superpropagadores de gauge e os vértices de interação gauge-matéria, obtidos no Capítulo II, fornecemos abaixo suas contribuições em potências de momentum:

Superpropagadores

$$\begin{array}{ll} \langle \bar{\Phi} \Phi \rangle \sim p^{-1} & \langle \Gamma_- \Gamma_- \rangle \sim p^{-1} \\ \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \sim p^0 & \langle \Gamma_- V \rangle \sim p^{-2} \\ \langle \Phi \Psi \rangle \sim p^{-3/2} & \langle VV \rangle \sim p^{-3} \end{array} \quad (3.3)$$

Vértices

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi} e^{-gV} \partial_{--} \phi &\sim p^1 \\
 \bar{\phi} e^{-gV} \Gamma_{--} \phi &\sim p^0 \\
 \bar{\psi} e^{-gV} \psi &\sim p^0
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Consideremos agora um supergráfico genérico 1-PI com L loops, $I_{\phi\phi}$ superpropagadores do tipo $\langle\bar{\phi}\phi\rangle$, $I_{\phi\psi}$ ($I_{\bar{\phi}\bar{\psi}}$) superpropagadores do tipo $\langle\phi\psi\rangle$ ($\langle\bar{\phi}\bar{\psi}\rangle$), $I_{\psi\psi}$ superpropagadores do tipo $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, $I_{\Gamma\Gamma}$ do tipo $\langle\Gamma_{--}\Gamma_{--}\rangle$, $I_{\Gamma V}$ do tipo $\langle\Gamma_{--}V\rangle$, I_{VV} do tipo $\langle VV\rangle$, possuindo ainda E_ϕ , E_ψ , E_Γ e E_V linhas externas e os vértices $V_{\phi V}$, $V_{\psi V}$, $V_{\Gamma V}$.

Devemos observar que a nossa notação para os vértices é bastante sintética. Na realidade, como temos interações do tipo exponencial, o número de vértices de interação com o supercampo V é infinito. Desta forma, os símbolos que usamos para vértices na verdade subentendem um somatório de vértices. Ou seja

$$V_{\phi V} \equiv \sum_{n=1} V_{\phi V_n}
 \tag{3.5a}$$

$$V_{\psi V} \equiv \sum_{n=1} V_{\psi V_n}
 \tag{3.5b}$$

$$V_{\Gamma V} \equiv \sum_{n=0} V_{\phi\Gamma V_n}
 \tag{3.5c}$$

Na última equação, o somatório engloba o tri-vértice de interação dos supercampos escalares de matéria e do supercampo de gauge Γ_{--} ($n=0$) e os vértices envolvendo os supercampos de matéria e os n ($n \neq 0$) supercampos V .

Visto tudo isso, o máximo grau de divergência superficial apresentado por um supergráfico 1-PI será:

$$\delta = L - I_{\bar{\phi}\phi} - \frac{3}{2} I_{\phi\psi} - \frac{3}{2} I_{\bar{\phi}\bar{\psi}} - I_{\Gamma\Gamma} - 2I_{\Gamma V} - 3I_{VV} + V_{\phi V} \quad (3.6)$$

Considerando que

$$L = \sum I - \sum V + 1 \quad , \quad (3.7)$$

e tomando as seguintes relações topológicas (em particular necessitamos das relações 3.8a,b e c)

$$E_{\phi} + E_{\bar{\phi}} + I_{\phi\psi} + I_{\bar{\phi}\bar{\psi}} + 2I_{\bar{\phi}\phi} = 2 \sum_{n=1} V_{\phi V_n} + 2 \sum_{n=0} V_{\phi\Gamma V_n} \quad (3.8a)$$

$$E_{\psi} + E_{\bar{\psi}} + 2I_{\bar{\psi}\psi} + I_{\bar{\phi}\bar{\psi}} + I_{\phi\psi} = 2 \sum_{n=1} V_{\psi V_n} \quad (3.8b)$$

$$E_{\Gamma} + I_{\Gamma V} + 2I_{\Gamma\Gamma} = 2 \sum_{n=0} V_{\phi\Gamma V_n} \quad (3.8c)$$

$$E_V + 2I_{VV} + 2I_{V\Gamma} = n \sum_{n=1} V_{\phi V_n} + n \sum_{n=0} V_{\phi\Gamma V_n} + n \sum_{n=1} V_{\psi V_n} \quad , \quad (3.8d)$$

obtemos que

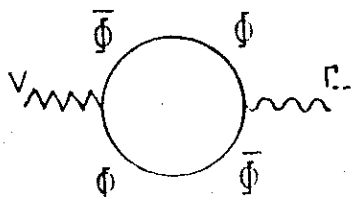
$$\delta = 3 - 2L - I_{\phi\psi} - I_{\bar{\phi}\bar{\psi}} - \frac{1}{2} (2E_{\Gamma} + 2E_{\phi} + 2E_{\bar{\phi}} + 3E_{\psi} + 3E_{\bar{\psi}}) \quad (3.9)$$

Desta relação inferimos que apenas supergráficos a 1-loop poderão apresentar divergências superficiais, uma vez que apenas para $L=1$ temos possibilidade de obter $\delta \geq 0$. Tal resultado é característico de um modelo super-renormalizável, o que é devido essencialmente ao fato de termos uma constante de acoplamento com dimensão de massa. Por outro lado, deve-se mencionar que o modelo de Schwinger é super-renormalizável e, portanto, sua versão supersimétrica obrigatoriamente também deve ser, considerando-se que uma versão supersimétrica sempre melhora (torna mais convergente) o comportamento ultra-violeta do modelo.

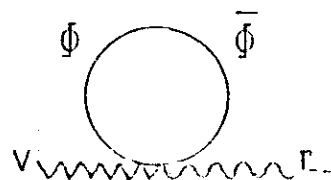
3.2. - ANÁLISE DOS GRÁFICOS

Dentro do propósito deste capítulo, vamos analisar os supergráficos a 1-loop com pernas externas de supercampos de gauge.

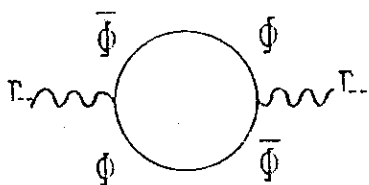
Da análise da expressão (3.9), concluímos que os supergráficos que podem apresentar divergências superficiais são os esboçados na Fig. (3.1).



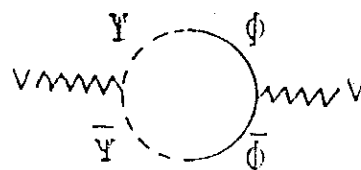
(a)



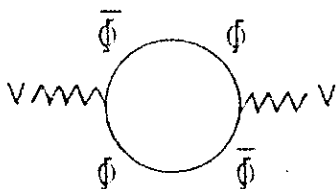
(b)



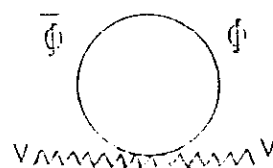
(c)



(d)



(e)



(f)

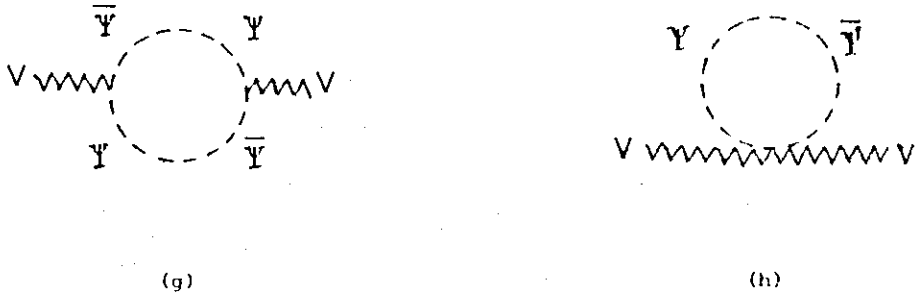


FIG. 3.1-SUPERGRÁFICOS SUPERFICIALMENTE DIVERGENTES QUE CONTRIBUEM PARA A AUTO-ENERGIA DOS SUPERCAMPOS DE GAUGE

3.3. - GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA

Um eventual termo de massa para campos vetoriais em duas dimensões deve do tipo $m^2 \Lambda_\mu \Lambda^\mu$, ou em coordenadas de cone-de-luz, algo proporcional a $m^2 \Lambda_{++} \Lambda_{--}$. Considerando, então, que o campo componente Λ_{--} só está presente no supercampo de gauge Γ_{--} e o campo componente Λ_{++} apenas no supercampo escalar de gauge V , podemos inferir que os supergráficos que contribuem para um termo de massa efetivo devem ter somente duas pernas externas, uma correspondente ao supercampo Γ_{--} e outra ao supercampo V . A rigor, um termo de massa para supercampos de gauge no superespaço-(2,0), cuja projeção em componentes seja compatível com uma Eletrodinâmica Quântica bidimensional, deve ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 S_H &= -1^2 \int d^2x \, d\theta_+ \, d\bar{\theta}_+ \, V \Gamma_{--} = m^2 \int d^2x \left[\Lambda_{++} \Lambda_{--} + \bar{\lambda}_+ \bar{\chi}_- - \lambda_+ \chi_- \right] = \\
 &= m^2 \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \Lambda^\mu \Lambda_\mu + \bar{\lambda}_+ \bar{\chi}_- - \lambda_+ \chi_- \right] \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Portanto devemos considerar apenas os supergráficos 3.1a (tipo *self-energy*) e 3.1b (tipo *tadpole*) da Figura 3.1, se queremos nos restringir a termos que contribuem para a massa na ação efetiva.

3.3.1. - CÁLCULO DOS SUPERGRÁFICOS NO SUPERESPAÇO-(2,0)

Nosso procedimento para calcular explicitamente os supergráficos é simplesmente tomar os termos na ação de interação que contribuem para o supergráfico e compô-los através do uso do teorema de Wick, efetuando as contrações dos supercampos envolvidos e utilizando as expressões para os superpropagadores obtidos nos Capítulos I e II.

Alternativamente, podemos utilizar as chamadas super-regras de Feynman para montar as expressões explícitas para os supergráficos. No entanto, no superespaço-(2,0), assim como no (1,0), existem muitos fatores de natureza Grassmanniana e que levam a certas ambiguidades de sinais. Desta forma, fica mais prático trabalhar usando o teorema de Wick.

Calculemos inicialmente o supergráfico da Fig.3.1a. Procedemos, como comentado acima, realizando as transformadas de Fourier nas coordenadas do espaço-tempo dos superpropagadores e dos supercampos das pernas externas. Em seguida, passamos à integração das funções delta no espaço de momenta e chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{g^2}{2} \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 d\theta_2 d\bar{\theta}_2 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \right. \\
 & \cdot \left[\left[D_1(k_{++} - p_{++}) \bar{D}_1(k_{++} - p_{++}) \delta_{12} \right] \left[D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) k_{--} \delta_{21} \right] + \right. \\
 & + (k_{--} - p_{--}) \left[D_1(k_{++} - p_{++}) \bar{D}_1(k_{++} - p_{++}) \delta_{12} \right] \\
 & \cdot \left. \left. \left[D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21} \right] \right] V^{(1)}(p) \Gamma_{--}^{(2)}(-p) \right\} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Na expressão acima $\delta_{12} \equiv \delta(\theta_1 - \theta_2) \delta(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)$ e

$$D_1(k_{++}) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \bar{\theta}_1 k_{++} \quad ; \quad \bar{D}_2(k_{++}) \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_2} - \theta_2 k_{++}$$

Os índices de Lorentz das coordenadas θ foram omitidos para não sobrecarregar a notação. Por outro lado, os índices 1 e 2 assinalam os diferentes vértices, uma vez que, como as coordenadas θ não são submetidas a transformação de Fourier, é relevante manter a distinção. É importante ressaltar ainda que, embora nas expressões acima e em todas as posteriores, seja explicitada apenas a dependência nos momenta externos, os supercampos de gauge dependem também das variáveis Grassmannianas $\theta_1, \bar{\theta}_1$ e $\theta_2, \bar{\theta}_2$.

O próximo passo consiste em liberar as funções delta nas variáveis fermiônicas, sobre as quais atuam derivadas covariantes. Isto é feito realizando integrações por partes no superespaço e recorrendo às seguintes relações, as quais são facilmente demonstráveis por inspeção direta:

$$\delta_{12} \delta_{12} = \delta_{21} \delta_{21} = 0 \quad , \quad (3.12a)$$

$$\delta_{12} D_1 \bar{D}_1 \delta_{12} = \delta_{12} D_2 \bar{D}_2 \delta_{12} = -\delta_{12} \quad , \quad (3.12b)$$

$$\delta_{12} \bar{D}_1 D_1 \delta_{12} = \delta_{12} \bar{D}_2 D_2 \delta_{12} = \delta_{12} \quad , \quad (3.12c)$$

$$\delta_{12} D_1 \delta_{12} = \delta_{12} \bar{D}_1 \delta_{12} = \delta_{12} D_2 \delta_{12} = \delta_{12} \bar{D}_2 \delta_{12} = 0 \quad , \quad (3.12d)$$

$$\delta_{12} D_1 \bar{D}_1 D_1 \delta_{12} = \delta_{12} D_2 \bar{D}_2 D_2 \delta_{12} = 0 \quad , \quad (3.12e)$$

$$\delta_{12} \bar{D}_1 D_1 \bar{D}_1 \delta_{12} = \delta_{12} \bar{D}_2 D_2 \bar{D}_2 \delta_{12} = 0 \quad , \quad (3.12f)$$

$$\delta_{12} D_1(k_{++}) \bar{D}_1(k_{++}) D_1(k_{++}) \bar{D}_1(k_{++}) \delta_{12} = 2k_{++} \delta_{12} \quad , \quad (3.12g)$$

$$\delta_{12} D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{12} = 2k_{++} \delta_{12} \quad . \quad (3.12h)$$

Utilizamos também as chamadas regras de transferência:

$$D_1(p_{--}^{(1)}, \theta_1, \bar{\theta}_1) \delta_{12} = -D_2(-p_{--}^{(2)}, \theta_2, \bar{\theta}_2) \delta_{12} \quad , \quad (3.13a)$$

$$\bar{D}_1(p_{--}^{(1)}, \theta_1, \bar{\theta}_1) \delta_{12} = -\bar{D}_2(-p_{--}^{(2)}, \theta_2, \bar{\theta}_2) \delta_{12} \quad . \quad (3.13b)$$

Uma vez que as funções δ_{12} estejam livres, elas podem ser usadas de tal forma a realizar as integrações sobre θ_2 , $\bar{\theta}_2$, por exemplo. Assim, a integral anterior torna-se:

$$- g^2 \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \cdot \left[(k^2 + p_{--}k_{++})V(p)\Gamma_{--}(-p) - (k_{--} - p_{--}/2)[\bar{D}_1(p)D_1(p)V(p)]\Gamma_{--}(-p) \right] \right\} \quad (3.14)$$

Podemos de antemão notar, por contagem de potências, que somente a parte da expressão acima independente de derivadas covariantes é divergente quando k tende para infinito (neste caso, logaritmicamente divergente).

A parte divergente pode ser explicitada se escrevermos:

$$\frac{k^2 + p_{--}k_{++}}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} = \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2]} + \frac{p_{--}k_{++} - m^2}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \quad (3.15)$$

A expressão completa acima pode ser regularizada pelo chamado método de regularização por redução dimensional [67], o qual é perfeitamente consistente para supergráficos a 1-loop (na realidade, para gráficos até 3-loops). Assim procedendo, a integral (3.14) torna-se:

$$- \frac{ig^2}{4\pi} \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ \left[\frac{p^2}{4} I_x + m^2 I_x + \mathcal{O}(0) \right] V(p)\Gamma_{--}(-p) + \frac{1}{2} \left[p_{--} I_x - p_{--} I_x \right] [\bar{D}_1(p)D_1(p)V(p)]\Gamma_{--}(-p) \right\} \quad (3.16)$$

Na expressão, acima o símbolo \mathcal{O} indica a conhecida função gama, comumente denotada por Γ . Esta é evitada neste contexto para não ocorrer confusão com o supercampo Γ_{--} . Devemos lembrar que a

função gama tem pólos para zero e inteiros negativos, portanto a divergência está explícita neste termo. Em (3.16), temos também que:

$$I_x \equiv \int_0^1 dx \frac{1}{p^2 x - p^2 x^2 + m^2} \quad (3.17)$$

Resolvendo a integral acima e tomando o primeiro termo de sua expansão, a expressão (3.16) adquire a forma:

$$- \frac{ig^2}{4\pi} \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ \left[\mathcal{G}(0) - 1 \right] V(p) \Gamma_{--}(-p) \right\} \quad (3.18)$$

Dever-se-ia tecer aqui alguns comentários sobre o segundo termo da expressão (3.16). Em primeiro lugar, como comentamos no início da seção 3.3, a projeção em campos componentes deste termo não fornece um termo de massa. Por outro lado, este termo depende explicitamente do momentum externo p_{--} e, portanto, se anula quando tomamos o limite no qual os momenta externos vão a zero. Desta forma, não pôde se constituir numa contribuição a um termo de massa.

O supergráfico da fig.3.1b. nos dá, após a eliminação das funções delta nas coordenadas θ , a seguinte expressão:

$$ig^2 \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{[(p-k)^2 + m^2]} \right] V(p) \Gamma_{--}(-p) \quad (3.19)$$

Neste cálculo, fez-se uso da relação:

$$D_{11} \bar{D}_{11} \delta_{12} \Big|_{1=2} = -1 \quad , \quad (3.20)$$

onde a barra indica que se está identificando os pontos 1 e 2.

Após regularização, a expressão (3.19) torna-se

$$- \frac{g^2}{4\pi} \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\mathcal{G}(0) \right] V(p) \Gamma_{--}(-p) \quad (3.21)$$

Considerando os fatores na expansão da matriz S , observamos que os termos divergentes das figs. 3.1a e 3.1b cancelam-se, restando um termo finito dado por:

$$- \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{g^2}{4\pi} \right] V(p) \Gamma_{--}(-p) \quad (3.22)$$

Esta contribuição é do tipo termo de massa, e comparando-a com (3.10), pode-se estabelecer que o fator $g^2/4\pi$ desempenha o papel de massa ao quadrado [68]. Em outras palavras, embora a nível de árvore (ação clássica) não exista um termo de massa para os supercampos de gauge, por correções quânticas verifica-se o aparecimento de um termo do tipo termo de massa, caracterizando a chamada geração dinâmica de massa, já bastante conhecida na versão original do modelo de Schwinger vetorial.

A este ponto, valeria a pena ressaltar que, contrariamente ao que a formulação no superespaço deixa transparecer, o modelo que estamos discutindo *naa* é a versão-(2,0) do modelo de Schwinger quirral. Embora esteja presente apenas um supercampo espinorial de quirralidade bem definida, Ψ , a nível de componentes pode-se verificar que o potencial de gauge se acopla efetivamente a um espinor de Dirac, cujas duas componentes de quirralidades opostas provêm uma do supercampo escalar Φ e a outra do supercampo Ψ . Isso torna-se mais claro quando consideramos a projeção em campos componentes da ação de acoplamento gauge-matéria (2.19), introduzida no capítulo anterior, a saber:

$$S_{H-G} = \int d^2 x \left[-i\bar{\psi}_- \partial_{++} \psi_- - i\bar{\eta}_+ \partial_{--} \eta_+ - \frac{g}{2} \left(\bar{\psi}_- A_{++} \psi_- + \bar{\eta}_+ A_{--} \eta_+ \right) + \dots \right] \quad (3.23)$$

onde ... representam termos que não são relevantes para esta análise. Se definirmos um espinor de Dirac como

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} \psi_- \\ \eta_+ \end{pmatrix} ,$$

e considerando uma particular representação das matrizes γ (ver apêndice A), a expressão (3.23) pode ser reescrita na forma:

$$S_{M-G} = \frac{1}{2} \int d^2x \left[\bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi - (\partial_\mu \bar{\chi}) \gamma^\mu \chi - 2ig \bar{\chi} \gamma^\mu A_\mu \chi + \dots \right] \quad (3.24)$$

a qual mostra claramente o acoplamento do campo de gauge com um férmion de Dirac, o que caracteriza o modelo de Schwinger vetorial.

É importante também mencionar que o fato de estarmos lidando com uma generalização supersimétrica do modelo de Schwinger não implica necessariamente na geração dinâmica de massa. Na realidade, o tipo de supersimetria imposto ao modelo original interfere na possibilidade de geração de massa. Por exemplo, enquanto a versão (1,0)-supersimétrica deste modelo apresenta idêntico fenômeno [69,70], a versão N=1 (ou (1,1)) não exhibe deslocamento do pólo do propagador de $k^2=0$ para $k^2=\mu^2 \neq 0$ [71] .

3.4. - SUPERGRÁFICOS QUE CONTRIBUEM PARA A AÇÃO EFETIVA A 1-LOOP

Nesta seção, apresentaremos os cálculos explícitos dos outros supergráficos divergentes apresentados na seção 3.2. Nosso objetivo aqui é mostrar que, apesar de divergentes a nível de *power-counting*, a contribuição somada de todos estes gráficos a 1 loop é finita.

Consideremos o supergráfico da

fig. 3.1c

$$- g^2 \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 d\theta_2 d\bar{\theta}_2 \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \right. \\ \left. \left[D_1(k_{++}, -p_{++}) \bar{D}_1(k_{++}, -p_{++}) \delta_{12} D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21} \right] \Gamma_{--}^{(1)}(p) \Gamma_{--}^{(2)}(-p) \right\} \quad (3.25a)$$

Após liberar as funções delta e realizar a regularização, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{ig^2}{4\pi} \int d\theta \, d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{4}{p^2 + 4m^2} \left[p_{++} \Gamma_{--}(p) \Gamma_{--}(-p) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - [\bar{D}(p) D(p) \Gamma_{--}(p)] \Gamma_{--}(-p) \right] \right\} \quad (3.25b)
 \end{aligned}$$

Notemos que esta expressão é finita por si mesma.

fig. 3.1d

$$\begin{aligned}
 & \frac{m^2 g^2}{2} \int d\theta_1 \, d\bar{\theta}_1 \, d\theta_2 \, d\bar{\theta}_2 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \right. \\
 & \left. \left[\underset{(1)}{k_{--}} \underset{(2)}{D_2(k_{++}, -p_{++})} \delta_{21} \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21} + (k-p)_{--} D_2(k_{++}, -p_{++}) \delta_{21} \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21} \right] \right. \\
 & \left. \cdot V(p) V(-p) \right\} \quad (3.26a)
 \end{aligned}$$

No final, esta expressão torna-se

$$- \frac{im^2 g^2}{4\pi} \int d\theta \, d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[p_{--} I_x - p_{--} I_x \right] V(p) V(-p) = 0 \quad (3.26b)$$

Portanto este gráfico anula-se identicamente.

fig. 3.1e

$$\begin{aligned}
 & - \frac{g^2}{4} \int d\theta_1 \, d\bar{\theta}_1 \, d\theta_2 \, d\bar{\theta}_2 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \right. \\
 & \left[2(k+p)_{--} k_{--} [D_1(k_{++}, -p_{++}) \bar{D}_1(k_{++}, -p_{++}) \delta_{12}] [D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21}] + \right. \\
 & \left. + k_{--}^2 [D_1(k_{++}, -p_{++}) \bar{D}_1(k_{++}, -p_{++}) \delta_{12}] [D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21}] + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ (k+p)_{--}^2 [D_1(k_{++}, -p_{++}) \bar{D}_1(k_{++}, -p_{++}) \delta_{12}] [D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21}] \left. \vphantom{[D_1(k_{++}, -p_{++}) \bar{D}_1(k_{++}, -p_{++}) \delta_{12}] [D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21}]} \right\}^{(1) (2)} V(p)V(-p) \quad (3.27)$$

Após liberar as funções delta e integrá-las, obtemos

$$- g^2 \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \right. \\ \left. \left[\left(k_{--}^2 p_{--} + k_{--}^2 k_{--} - \frac{1}{2} k_{++} p_{--}^2 \right) V(p)V(-p) + \right. \right. \\ \left. \left. - \left(k_{--}^2 + k_{--} p_{--} + \frac{1}{2} p_{--}^2 \right) [\bar{D}(-p)D(-p)V(-p)]V(p) \right] \right\} \quad (3.28)$$

A divergência ficará explícita se utilizarmos a relação:

$$\frac{-2k_{--}^2 p_{--} - 2k_{--}^2 k_{--} + p_{--}^2 k_{++}}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} = \frac{2m^2(k+p)_{--} + p_{--}^2 k_{++}}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} + \\ - \frac{2(k+p)_{--}}{[(k-p)^2 + m^2]} \quad (3.29)$$

Após regularização, chegamos a

$$+ \frac{g^2}{2} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{i}{4\pi} p_{--} \left(\frac{p^2 + 4m^2}{4} \right) V(p)V(-p) + \right. \\ \left. - p_{--}^2 \left[\frac{i}{8\pi} \left(\frac{p^2 + 4m^2}{p^2} \right) I_x - \frac{i}{2\pi p^2} \right] [\bar{D}(-p)D(-p)V(-p)]V(p) \right\} \quad (3.30)$$

Considerando o primeiro termo na expansão de I_x , obtemos

$$\frac{ig^2}{8\pi} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[p_{--} V(p)V(-p) \right] \quad (3.31)$$

Notemos que após regularização este gráfico resulta finito.

fig. 3.1f

$$- \frac{g^2}{2} \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{(k-p)_{--}}{(k-p)^2 + m^2} D_1(k-p) \bar{D}_1(k-p) \delta_{12} \right] \Big|_{1=2} V(p)V(-p) \quad (3.32)$$

Daí obtemos

$$\frac{g^2}{2} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{(k-p)_{--}}{(k-p)^2 + m^2} \right] V(p)V(-p) \quad (3.33)$$

e após regularização

$$\frac{ig^2}{8\pi} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[p_{--} \mathcal{G}(0) - p_{--} \mathcal{G}(0) \right] = 0 \quad (3.34)$$

fig. 3.1g

$$g^2 \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 d\theta_2 d\bar{\theta}_2 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{k_{--}(k-p)_{--}}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \cdot \left(D_1(k_{++}-p_{++}) \bar{D}_1(k_{++}-p_{++}) \delta_{12} D_2(k_{++}) \bar{D}_2(k_{++}) \delta_{21} \right) V^{(1)}(-p)V^{(2)}(p) \right\} \quad (3.35)$$

Liberamos as funções delta e obtemos

$$g^2 \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \left[k^2(k-p)_{--} V(p)V(-p) + \right. \right. \\ \left. \left. - (k-p)_{--} k_{--} [\bar{D}(-p)D(-p)V(-p)] V(p) \right] \right\} \quad (3.36)$$

Utilizamos a relação

$$\frac{-k^2(k-p)_{--}}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} = \frac{m^2(k-p)_{--}}{[(k-p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} +$$

$$-\frac{(k-p)_{--}}{[(k-p)^2 + m^2]} \quad (3.37)$$

Após regularização chegamos a

$$\frac{ig^2}{4\pi} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\left(\frac{1}{2} m^2 p_{--} I_x \right) V(p)V(-p) + \right.$$

$$\left. - \frac{p_{--}^2}{p^2} \left(m^2 I_x - 1 \right) [\bar{D}(-p)D(-p)V(-p)]V(p) \right] \quad (3.38)$$

Considerando o primeiro termo na expansão de I_x , obtemos

$$\frac{ig^2}{4\pi} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{p_{--}}{p^2 + 4m^2} \left(2m^2 V(p)V(-p) + p_{--} [\bar{D}(-p)D(-p)V(-p)]V(p) \right) \right] \quad (3.39)$$

Fig. 3.1h

$$\frac{ig^2}{2} \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{(k-p)_{--}}{(k-p)^2 + m^2} D_1(k-p) \bar{D}_1(k-p) \delta_{12} \right] \Bigg|_{1=2} V(p)V(-p) \quad (3.40)$$

Da qual obtemos

$$-\frac{ig^2}{2} \int d\theta d\bar{\theta} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{(k-p)_{--}}{(k-p)^2 + m^2} \right] V(p)V(-p) = 0 \quad (3.41)$$

Como já vimos, após regularização, esta expressão anula-se identicamente.

Desta forma, consideramos todos os supergráficos a 1-loop com duas pernas externas de supercampos de gauge e que apresentam divergência a nível de contagem de potências. Verificamos que todos eles dão resultados finitos ou nulos, tendo para isto procedido com o uso da regularização por redução dimensional.

Vamos agora adicioná-los para escrever a contribuição total para o setor quadrático nos supercampos de gauge:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{eff}}^{(1)} = & -\frac{g^2}{4\pi} \int d\theta_+ d\bar{\theta}_+ + \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ V(p)\Gamma_{--}(-p) - \frac{4p_{++}}{p^2+4m^2} \Gamma_{--}(p)\Gamma_{--}(-p) + \right. \\ & + \frac{4}{p^2+4m^2} \left[\bar{D}(-p)D(-p)\Gamma_{--}(-p) \right] \Gamma_{--}(p) - \frac{1}{2} p_{--} V(p)V(-p) + \\ & \left. + \frac{2m^2 p_{--}}{p^2+4m^2} V(p)V(-p) + \frac{p_{--}^2}{p^2+4m^2} \left[\bar{D}(-p)D(-p)V(-p) \right] V(p) \right\} \quad (3.42) \end{aligned}$$

3.4.1. - ANOMALIAS NO SUPERESPAÇO-(2,0)

Consideremos brevemente o que vem a ser uma anomalia em Teoria Quântica de Campos. Seja $\Gamma[A_\mu]$ a ação efetiva para o campo de gauge A_μ obtida após integração sobre todos os demais campos inicialmente presentes [72].

A corrente que se acopla minimamente ao dado campo A_μ é definida em termos da ação efetiva Γ como :

$$J^\mu = \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} \quad (3.43)$$

Consideremos uma transformação de gauge de natureza Abelianas:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha \quad (3.44)$$

A variação induzida na ação efetiva Γ por esta transformação é

$$G = \delta_\alpha \Gamma[A_\mu] = \int dx \partial_\mu \alpha \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma[A_\mu] = \int dx (\partial_\mu \alpha) J^\mu \quad (3.45)$$

Integrando-se por partes:

$$G = - \int dx \alpha \partial_{\mu} J^{\mu} \quad (3.46)$$

Portanto, $G=0$ se a corrente de gauge é conservada, ou seja, se

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \quad (3.47)$$

Por outro lado, quando $G \neq 0$, a corrente de gauge não é realmente conservada e temos uma anomalia. Em outras palavras, temos uma anomalia quando uma corrente que é conservada a nível clássico deixa de sê-lo por efeito de correções quânticas.

A luz da breve discussão acima, gostaríamos de passar agora a uma discussão das anomalias no âmbito de modelos de gauge (2,0)-supersimétricos.

No superespaço-(2,0) duas supercorrentes compõem o supermultiplete das correntes de gauge, como vimos no Cap. II. O termo de fontes dos supercampos de gauge pode ser reescrito como:

$$S_F = \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\Gamma_{--} J + V J_{--} \right] \quad (3.49)$$

Desta forma, podemos definir

$$J = \frac{\delta \Gamma_{\text{eff}}}{\delta \Gamma_{--}} \quad J_{--} = \frac{\delta \Gamma_{\text{eff}}}{\delta V} \quad (3.50)$$

as quais fornecem as eventuais correções quânticas às supercorrentes.

Em vista disso, a variação de gauge da ação efetiva toma a forma:

$$\begin{aligned} \delta_{\Lambda} \Gamma_{\text{eff}} &= \int dz_{++} \left[\frac{\delta \Gamma_{\text{eff}}}{\delta \Gamma_{--}} \delta \Gamma_{--} + \frac{\delta \Gamma_{\text{eff}}}{\delta V} \delta V \right] = \int dz_{++} \left[J \delta \Gamma_{--} + J_{--} \delta V \right] = \\ &= \frac{1}{g} \int dz_{++} \left[J \delta_{--} (\Lambda + \bar{\Lambda}) - i J_{--} (\Lambda - \bar{\Lambda}) \right] = \\ &= - \frac{1}{g} \int dz_{++} \left[(\Lambda + \bar{\Lambda}) \partial_{--} J + i J_{--} (\Lambda - \bar{\Lambda}) \right] \quad (3.51) \end{aligned}$$

onde levamos em conta que

$$\delta\Gamma_{--} = \frac{1}{g} \partial_{--} (\Lambda + \bar{\Lambda}) \quad (3.52)$$

e

$$\delta V = \frac{i}{g} (\Lambda - \bar{\Lambda}) \quad (3.53)$$

Considerando a ação efetiva (3.42) no espaço de configurações, simplificada para o caso em que $m=0$, obtemos

$$J = -\frac{g^2}{4\pi} V + \dots \quad ; \quad J_{--} = -\frac{g^2}{4\pi} \Gamma_{--} + \dots \quad (3.54)$$

e concluímos, então, que

$$G \equiv \delta_{\Lambda} \Gamma_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{g}{4\pi} \int dz_{++} \left[(\Lambda + \bar{\Lambda}) \partial_{--} V - i(\bar{\Lambda} - \Lambda) \Gamma_{--} \right] \quad (3.55)$$

A projeção em componentes da expressão acima nos dá

$$\delta_{\Lambda} \Gamma_{\text{eff}}^{(1)} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = -\frac{g}{4\pi} \int d^2x \left[(\alpha + \bar{\alpha}) (\partial_{++} A_{--} + \partial_{--} A_{++}) + \text{parceiros supersim.} \right] \quad (3.56)$$

a qual pode ser escrita em notação covariante, como

$$\delta_{\Lambda} \Gamma_{\text{eff}}^{(1)} \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{g}{4\pi} \int d^2x \left[2\text{Re}\alpha \partial_{\mu} A^{\mu} + \text{parceiros supersimétricos} \right] \quad (3.57)$$

Podemos considerar, em princípio, em conexão com a expressão (3.46), que a componente multiplicada por α nos dá uma anomalia de gauge do modelo de Schwinger ordinário. No entanto, a expressão (3.55) não é verdadeiramente a forma integrada de uma anomalia.

Podemos concluir isto com base em diversos argumentos. Inicialmente, relembremos que usamos a regularização por redução dimensional, a qual, como se sabe, não quebra a invariância de gauge e é compatível com a supersimetria, pelo menos em cálculos até 3 loops [67]. Em consequência, este modelo assim regularizado não deve apresentar anomalia de gauge.

Na realidade, esta questão já foi largamente estudada,

especialmente em conjunto com a chamada anomalia quiral, tanto no caso do modelo ordinário [72-74], quanto no caso da supersimetrização N=1 do modelo de Schwinger [71]. A conclusão destes trabalhos é que, dependendo do esquema de regularização escolhido, podemos ter diferentes resultados para as anomalias do modelo. Em particular, no caso da supersimetrização N=1, mostrou-se que, utilizando a regularização dimensional, obtém-se anomalia apenas na corrente quiral, enquanto que a corrente de gauge é conservada. Todavia, utilizando-se o processo de integração simétrica, conclui-se que as duas correntes são simultaneamente anômalas.

Por outro lado, podemos facilmente ver que a expressão (3.55) é simplesmente a variação de gauge de um funcional local (do tipo $V\Gamma_{--}$). Isto indica que a "anomalia" pode ser cancelada por uma simples integração por partes.

A questão da ocorrência de anomalias em teorias de gauge pode também ser analisada segundo o formalismo introduzido por Becchi, Rouet e Stora [65] e desenvolvido posteriormente por vários autores [75-77]. Para isto, recordemos as transformações de BRST do modelo de gauge (2,0), apresentadas na seção 2.2.1 do capítulo anterior. Considerando o caso Abelian, e definindo $\delta_G \equiv \lambda S$, onde S é o operador das transformações de BRST e possui propriedades anticomutantes, podemos escrever:

$$\begin{aligned} S\Gamma_{--} &= \frac{i}{g} \delta_{--} (C + \bar{C}) & ; & \quad SC = S\bar{C} = 0 & \quad ; & \quad S\Pi_{-} = S\bar{\Pi}_{-} = 0 \\ SV &= \frac{1}{g} (C - \bar{C}) & \quad ; & \quad SC' = D_{+} \Pi_{-} & \quad ; & \quad S\bar{C}' = D_{+} \bar{\Pi}_{-} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Assinalando ainda que os superparâmetros de gauge foram redefinidos como $\Lambda = i\lambda C$ e $\bar{\Lambda} = i\lambda\bar{C}$, a expressão (3.55) torna-se

$$G = \frac{\lambda g}{4\pi} \int d^2x d\theta_{+} d\bar{\theta}_{+} \left[(\bar{C} - C)\Gamma_{--} + i(\bar{C} + C)\delta_{--}V \right] \quad (3.59)$$

Aplicando o operador S à expressão acima obtemos

$$SG = \frac{i\lambda}{4\pi} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[(C + \bar{C}) \partial_{--} (C - \bar{C}) - (C - \bar{C}) \partial_{--} (C + \bar{C}) \right] \quad (3.60)$$

Podemos ver facilmente que o lado direito da expressão acima pode ser escrito como uma divergência, ou seja,

$$SG = \frac{i\lambda}{2\pi} \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\partial_{--} (C \bar{C}) \right] \quad (3.61)$$

Portanto, a conhecida condição de consistência de Wess-Zumino, [7]

$$SG = 0 \quad (3.62)$$

só é obtida a menos de uma divergência total, o que revela o caráter *local* de G ou, em outros termos, mostra que G pode ser escrito como a variação de um funcional local (como discutido acima). Isto indica, então, que este termo não se constitui numa genuína anomalia, uma vez que sempre podemos redefinir uma ação, adicionando contra-termos *locais* à teoria, sem contudo modificá-la a nível de matriz-S [78].

Para finalizar nosso estudo do modelo de gauge com supersimetria-(2,0), vamos comentar sobre a sua renormalizabilidade.

Como discutimos na seção 3.1, este modelo é super-renormalizável e só apresenta divergências a 1-loop. Mostramos através de cálculos explícitos no superespaço-(2,0) que, apesar de divergentes a nível de contagem de potências, certos supergráficos tornam-se finitos após regularização, enquanto que contribuições divergentes eventuais, que subsistem mesmo após regularização, cancelam-se mutuamente.

Desta forma, o modelo é finito a todas as ordens e não existe a necessidade de adicionar contra-termos infinitos.

CAPÍTULO IV

MODELOS SIGMA NAO-LINEARES COM SUPERSIMETRIA-(2,0)

Neste capítulo, vamos nos reportar ao estudo dos modelos- σ não-lineares. Inicialmente, faremos uma revisão dos modelos em sua versão não-supersimétrica, considerando em particular, dada a sua importância neste contexto, a geometria que lhes é intrínseca.

Em seguida implementaremos a supersimetria (1,0) na formulação dos modelos- σ , adotando o formalismo de superespaço, e analisaremos as condições para termos supersimetria-(2,0), partindo, então, para uma formulação inerente a esta supersimetria.

Posteriormente, esboçaremos um quadro geral dos modelos- σ em duas e quatro dimensões, enfatizando sobre a geometria definida por cada modelo.

4.1. - INTRODUÇÃO AOS MODELOS- σ NAO-LINEARES

Modelos não-lineares são modelos de teoria de campos onde a interação não aparece adicionando-se um Lagrangeano de interação ao Lagrangeano dos campos livres, mas sim de uma maneira puramente geométrica. O modelo- σ não-linear é o protótipo da teoria de campos não-linear. Aprender como quantizá-lo e como tratar suas interessantes propriedades possibilita-nos lidar melhor com teorias não-lineares mais gerais.

O modelo- σ é uma teoria de campos escalares no qual estes tomam valores numa variedade M , chamada de espaço alvo (*target space*).

Em quatro dimensões, os modelos- σ não são renormalizáveis; no entanto, como teorias efetivas descrevem o comportamento a baixas energias de mésons escalares, e aparece naturalmente em teorias de

supergravidade. Mas é no espaço-tempo bidimensional que estes modelos são mais amplamente aplicados. Em duas dimensões, eles são renormalizáveis [79] e tornam-se bastante relevantes para a teoria de cordas. Por outro lado, apresentam em muitos aspectos analogias marcantes com teorias de gauge não-Abelianas em D=4, sendo assim usado como laboratório para cálculos mais simples do que em dimensões superiores [80].

Neste trabalho, vamos nos restringir basicamente ao modelo σ bidimensional. Sua ação lê-se

$$S_{\sigma} = \frac{1}{2} \int d^2x g_{ij}(\varphi) \partial^{\mu} \varphi^i \partial_{\mu} \varphi^j \quad , \quad (4.1)$$

onde os índices gregos $\mu, \nu = 0, 1$ denotam o espaço-tempo de Minkowski e os índices latinos $i, j = 1, \dots, n$ denotam uma variedade n-dimensional M, cujas coordenadas são os campos φ^i e cuja métrica é o tensor simétrico $g_{ij}(\varphi)$.

Consideremos a seguinte transformação

$$\delta \varphi^i = \lambda^{\alpha} k_{\alpha}^i(\varphi) \quad , \quad (4.2)$$

onde λ^{α} é um parâmetro constante e k_{α}^i é um vetor da variedade. A variação da ação (4.2) sob esta transformação é escrita como

$$\delta S_{\sigma} = \int d^2x \left[\lambda_{\alpha} \nabla_{(i} k_{j)}^{\alpha} \partial^{\mu} \varphi^i \partial_{\mu} \varphi^j \right] \quad , \quad (4.3)$$

Os parenteses indicam que os índices devem ser tomados simetricamente e a derivada covariante ∇_i da variedade é definida como

$$\nabla_i k_j^{\alpha} \equiv \partial_i k_j^{\alpha} - \Gamma_{ij}^k(\varphi) k_k^{\alpha} \quad , \quad (4.4)$$

onde Γ_{ij}^k é a conexão (símbolo) de Christoffel no espaço alvo, e que pode ser escrito em termos da métrica como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}) \quad . \quad (4.5)$$

Na expressão anterior usamos a seguinte convenção

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \quad (4.6)$$

Desta forma, a ação (4.1) é invariante sob as transformações (4.2) apenas se k_i são vetores de Killing, ou seja, se satisfazem à equação de Killing

$$\nabla_i k_j + \nabla_j k_i = 0 \quad (4.7)$$

Portanto as transformações (4.2) são isometrias e os vetores de Killing são os geradores do grupo de isometria G . As invariâncias do modelo- σ são, portanto, as simetrias da métrica, ou seja, as transformações que deixam a métrica invariante (isometrias da métrica). A álgebra de Lie dos geradores é dada por

$$[k_\alpha, k_\beta]^i \equiv \mathcal{L}_\alpha(k)_\beta^i = f_{\alpha\beta}^\gamma k_\gamma^i \quad (4.8)$$

onde $\alpha, \beta = 1, \dots, \dim(G)$ e $f_{\alpha\beta}^\gamma$ são as constantes de estrutura do grupo G . $\mathcal{L}_\alpha(k)$ é a derivada de Lie na direção do vetor de Killing, definida como

$$\mathcal{L}_\alpha k_\beta^i = k_\alpha^j \partial_j k_\beta^i - k_\beta^j \partial_j k_\alpha^i \quad (4.9)$$

Um modelo- σ mais geral é obtido quando adicionamos à ação (4.1), o chamado termo de Wess-Zumino, a saber

$$S_{WZ} = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} b_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j \quad (4.10)$$

(Nossa convenção é $\epsilon_{01} = -\epsilon^{01} = +1$; $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$)

O objeto b_{ij} é um tensor de segunda ordem anti-simétrico.

Para entender o significado geométrico do termo de Wess-Zumino, vamos considerar a soma das ações (4.3) e (4.10) expressas nas coordenadas do cone-de-luz [81]:

$$S_{\sigma+WZ} = \int dx^{++} dx^{--} [g_{ij}(\varphi) + b_{ij}(\varphi)] \partial_{++} \varphi^i \partial_{--} \varphi^j \quad (4.11)$$

A equação de movimento para a ação acima é

$$\partial_{++} \partial_{--} \varphi^i + [\Gamma_{jk}^i(\varphi) + T_{jk}^i(\varphi)] \partial_{++} \varphi^j \partial_{--} \varphi^k = 0 \quad , \quad (4.12)$$

onde T_{jk}^i é um tensor de terceira ordem totalmente anti-simétrico, definido em termos do tensor b_{ij} como

$$T_{ijk}^i(\varphi) \equiv \frac{1}{2} (\partial_k b_{ij} + \partial_i b_{jk} + \partial_j b_{ki}) \quad . \quad (4.13)$$

A equação (4.12) pode ser reescrita na forma

$$\partial_{++} \partial_{--} \varphi^i + \hat{\Gamma}_{jk}^i(\varphi) \partial_{++} \varphi^j \partial_{--} \varphi^k = 0 \quad , \quad (4.14)$$

onde o tensor $\hat{\Gamma}_{jk}^i$ é definido por

$$\hat{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i \pm T_{jk}^i \quad . \quad (4.15)$$

A equação acima indica que o tensor anti-simétrico T_{jk}^i é a torção da variedade, sendo a parte anti-simétrica (nos índices inferiores) da conexão afim $\hat{\Gamma}_{jk}^i$. Desta forma torna-se clara a significação geométrica do termo de Wess-Zumino: o rotacional do tensor de Wess-Zumino (b_{ij}) adiciona uma torção à variedade M do modelo σ . O sinal em (4.15) é diferente conforme a conexão afim atue em vetores $(++)$ ou $(--)$. O tensor b_{ij} é, às vezes, chamado de potencial de torção por óbvias razões.

Para futura utilização, notemos que o termo de Wess-Zumino é invariante sob a seguinte transformação de " gauge " [82,83]:

$$\delta b_{ij} = \partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i \quad , \quad (4.16a)$$

onde ω_i são vetores globalmente definidos no espaço alvo. Vale a pena mencionar ainda que o vetor ω_i é definido a menos de alguma função arbitrária h_i que obedeça à restrição

$$\partial_i h_j - \partial_j h_i = 0 \quad , \quad (4.16b)$$

de tal forma que ω_i pode ser sempre redefinida como

$$a_1 \rightarrow a_1 + h_1$$

mantendo-se, mesmo assim, a invariância do termo de Wess-Zumino.

Sob transformações de isometria (4.2), o termo de Wess-Zumino transforma-se como

$$\delta S_{WZ} = \frac{1}{2} \int d^2x \lambda^\alpha (\mathcal{L}_{\alpha ij}) \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j, \quad (4.17)$$

onde a atuação da derivada de Lie em um tensor de segunda ordem é dada por

$$\mathcal{L}_{\alpha ij} b_{ij} = b_{ik} \partial_j k^k_\alpha + b_{kj} \partial_i k^k_\alpha + k^k_\alpha \partial_k b_{ij} \quad (4.18)$$

Notemos que, se tomarmos

$$\mathcal{L}_{\alpha ij} b_{ij} = \partial_i a_{\alpha j} - \partial_j a_{\alpha i}, \quad (4.19)$$

invocando a invariância da ação de Wess-Zumino sob a transformação (4.16), vamos concluir que a condição (4.19) é suficiente para a invariância desta ação sob isometrias.

Como consequência da equação (4.19), temos que

$$\mathcal{L}_{\alpha ij} T_{ijk} \equiv T_{ijl} \partial_k k^l_\alpha + T_{ilk} \partial_j k^l_\alpha + T_{ljk} \partial_i k^l_\alpha + k^l_\alpha \partial_l T_{ijk} = 0 \quad (4.20)$$

Portanto, para que a ação de Wess-Zumino seja invariante sob isometrias é necessário que a derivada de Lie da torção seja nula.

4.2. - MODELOS- σ NÃO-LINEARES COM SUPERSIMETRIA-(2,0)

É interessante introduzir a generalização (2,0)-supersimétrica do modelo- σ não-linear a partir de condições impostas ao modelo com supersimetria-(1,0). Desta maneira ficam mais evidentes alguns aspectos geométricos que envolvem aquele modelo.

A formulação do modelo- σ no superespaço (1,0) é dada pela ação seguinte [84,24]

$$S_{\sigma} = i \int d^2x d\theta_+ \left[g_{ij}(\Phi) + b_{ij}(\Phi) \right] D_+ \Phi^i \partial_{--} \Phi^j \quad (4.21)$$

Lembramos que as nossas convenções sobre o superespaço (1,0) foram introduzidas na seção 1.2 do Capítulo I. Aqui, novamente, o tensor simétrico g_{ij} e o tensor anti-simétrico b_{ij} são respectivamente a métrica e o termo responsável pela torção na variedade M ou espaço alvo, enquanto que os supercampos Φ^i são as suas coordenadas.

Usando as definições para a projeção dos supercampos (1,0) apresentadas no Cap. I, podemos projetar a ação (4.21) em campos componentes, a saber

$$S_{\sigma} = \int d^2x \left\{ [g_{ij}(\varphi) + b_{ij}(\varphi)] \partial_{++} \varphi^i \partial_{--} \varphi^j + i g_{i1} \eta_+^i \hat{\Gamma}_{kj}^1 \eta_+^k \partial_{--} \varphi^j + i g_{ij} \eta_+^i \partial_{--} \eta_+^j \right\} \quad (4.22)$$

Vamos analisar agora as condições para que a ação (1,0)-supersimétrica (4.21) admita mais uma supersimetria do tipo *left-handed* e seja portanto (2,0)-supersimétrica. Vamos proceder de maneira análoga ao que foi feito na seção 1.2 do Capítulo I, no contexto do modelo de Wess-Zumino.

A forma mais geral que uma transformação de supersimetria adicional deve ter, após considerações dimensionais e submetida ao vínculo de invariância de Lorentz, é [24,19]

$$\delta_2 \Phi^i = \epsilon_2 J^i_j(\Phi) D_+ \Phi^j \quad (4.23)$$

onde J^i_j é um tensor em M.

Por construção, uma vez que os supercampos Φ^i são supercampos (1,0), vemos imediatamente que a segunda supersimetria comuta com a primeira, ou seja

$$\left[\delta_1, \delta_2 \right] \Phi^i = 0 \quad (4.24)$$

Por outro lado, o comutador de duas transformações (4.23) deve

gerar uma translação no espaço-tempo, portanto

$$\left[\delta_2, \delta'_2 \right] \phi^1 = -2i \epsilon_2 \epsilon'_2 \partial_{++} \phi^1 \quad (4.25)$$

Para que a condição (4.25) seja satisfeita é necessário e suficiente que J^1_j satisfaça as seguintes restrições:

$$J^1_j J^j_k = -\delta^1_k \quad (4.26a)$$

$$N^1_{1j} \equiv J^m_1 \partial_m J^1_j + J^1_k \partial_j J^k_1 - (1 \leftrightarrow j) = 0 \quad (4.26b)$$

A equação (4.26a) implica que J^1_j é uma estrutura quase complexa enquanto que o fato do chamado tensor de Nijenhuis N^1_{1j} ser igual a zero é a condição para J^1_j ser integrável, o que a assegura como uma estrutura complexa em M [19,85]. Além disso, a estrutura complexa exige que a variedade seja par [81].

A invariância da ação do modelo $\sigma(1,0)$ sob a transformação (4.23), ou seja, sob a segunda supersimetria, leva a vínculos adicionais sobre a estrutura complexa J^1_j . Estes vínculos são:

$$\xi_{1j} J^1_k J^j_1 = g_{k1} \quad (4.27a)$$

$$\hat{\nabla}^1 J^j_k \equiv \partial_1 J^j_k + \hat{\Gamma}^j_{11} J^1_k - \hat{\Gamma}^1_{1k} J^j_1 = 0 \quad (4.27b)$$

onde o símbolo $\hat{}$ indica que o objeto contém um termo de torção.

Notemos que no caso de uma variedade alvo sem torção as condições (4.26b) e (4.27b) não são independentes. No entanto na presença de torção, elas podem ser combinadas para dar uma restrição nos coeficientes da torção, ou seja

$$T^1_{jk} - T^1_{lm} J^l_j J^m_k + T^m_{j1} J^j_m J^1_k + T^m_{1k} J^1_m J^j_j = 0 \quad (4.28)$$

A equação (4.27a) indica que a métrica da variedade é Hermiteana. Lembramos aqui que a hermiticidade é uma restrição feita à métrica e não à variedade [86]. Na realidade, define-se uma variedade complexa como Hermiteana quando ela é dotada de uma métrica Hermiteana. Por outro lado a equação (4.27b) implica que a

estrutura complexa é covariantemente constante em relação à conexão afim. Um estudo detalhado das variedades complexas pode ser encontrado nas referências [86,87].

É importante assinalar a notável influência que a imposição de uma segunda supersimetria exerce sobre a variedade do modelo- σ . Enquanto este é invariante apenas sob supersimetria-(1,0), a variedade M é arbitrária, mas quando invariante sob uma supersimetria adicional a variedade é muito restringida. No caso em que a variedade não possui torção ($b_{ij} = 0$), as condições (4.26) e (4.27) implicam que a variedade é do tipo Kähler, enquanto que para $b_{ij} \neq 0$, é uma variedade Hermiteana com torção [85].

A integrabilidade da estrutura complexa J^i_j implica que podemos escolher coordenadas complexas holomórficas (supercampos quirais) e anti-holomórficas (supercampos anti-quirais)

$$\Phi^i \rightarrow (\Phi^\alpha, \bar{\Phi}^{\bar{\beta}}) \quad ; \quad \text{com } \alpha, \bar{\beta} = 1, \dots, n/2 \quad \text{e} \quad (\Phi^\alpha)^* = \bar{\Phi}^{\bar{\alpha}}$$

tal que a estrutura complexa seja constante e escolhida como [24]:

$$J^i_j = \begin{pmatrix} J^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & J^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & -i\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \end{pmatrix} \quad . \quad (4.29)$$

A condição de hermiticidade (4.27a) implica que, neste sistema de coordenadas holomórficas, a métrica tem a seguinte forma

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & g_{\alpha\bar{\beta}} \\ g_{\bar{\rho}\lambda} & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (4.30)$$

Uma palavra sobre a nossa convenção de índices. Por questões de utilização dos índices gregos em outros contextos, deste ponto em diante voltamos aos índices latinos para designar os

supercampos (coordenadas) no sistema de coordenadas holomórficas. Se acaso surgir uma aplicação diferente será explicitamente assinalada.

Nestas coordenadas as conexões de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2} g^{i\bar{p}} (\partial_j g_{k\bar{p}} + \partial_k g_{j\bar{p}}) \\ \Gamma_{jk}^{\bar{i}} &= \Gamma_{kj}^{\bar{i}} = \frac{1}{2} g^{i\bar{p}} (\partial_k g_{j\bar{p}} - \partial_p g_{jk}) \\ \Gamma_{jk}^{\bar{i}} &= \Gamma_{kj}^{\bar{i}} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

e seus respectivos complexos conjugados.

Por outro lado, do vínculo (4.28) obtemos que

$$T_{jk}^{\bar{i}} = g^{\bar{i}l} T_{ljk} = 0 \quad (4.32)$$

Seguindo o formalismo do cálculo exterior apresentado na ref. [83], concluímos que

$$T_{ljk}^{\bar{i}} = \frac{1}{2} (\partial_l g_{jk}^{\bar{i}} - \partial_j g_{lk}^{\bar{i}}) \quad (4.33)$$

Por outro lado, como a torção é o rotacional de um potencial de torção, temos que

$$T_{ljk}^{\bar{i}} = \frac{1}{2} (\partial_k b_{lj}^{\bar{i}} + \partial_l b_{jk}^{\bar{i}} + \partial_j b_{kl}^{\bar{i}}) \quad (4.34)$$

Da equação (4.32) concluímos que

$$T_{ljk}^{\bar{i}} = \frac{1}{2} (\partial_k b_{lj}^{\bar{i}} + \partial_l b_{jk}^{\bar{i}} + \partial_j b_{kl}^{\bar{i}}) = 0 \quad (4.35)$$

a qual implica que $b_{ij}^{\bar{i}}$ deve ser uma forma exata:

$$b_{ij}^{\bar{i}} = \partial_i \xi_j^{\bar{i}} - \partial_j \xi_i^{\bar{i}} \quad (4.36)$$

onde $\xi_i^{\bar{i}}(\Phi, \bar{\Phi})$ é um vetor definido na variedade. Colocando (4.36) na equação (4.34) e igualando a (4.33), obtemos

$$\partial_i (g_{jk}^- - b_{jk}^- - \partial_k \xi_j) - (i \leftrightarrow j) = 0 \quad , \quad (4.37)$$

cuja solução é

$$g_{jk}^- - b_{jk}^- - \partial_k \xi_j = \partial_j K_{-k}(\Phi, \bar{\Phi}) \quad , \quad (4.38)$$

onde $K_{-k}(\Phi, \bar{\Phi})$ é um vetor da variedade e lembrando a nossa convenção segundo a qual $(K_{-k})^* = \bar{K}_{-k} \equiv K_{-k}$.

Uma vez que o potencial de torção é definido a menos de uma transformação de gauge (Ver eq. (4.16)), podemos escolher um gauge. Por exemplo, consideremos o vetor ξ_j como um vetor holomórfico, ou seja, função apenas da coordenada Φ . Desta forma obtemos que

$$g_{jk}^- - b_{jk}^- = \partial_j K_{-k}(\Phi, \bar{\Phi}) \quad , \quad (4.39)$$

E ainda

$$g_{jk}^- = \frac{1}{2} \left(\partial_j K_{-k}(\Phi, \bar{\Phi}) + \partial_k K_{-j}(\Phi, \bar{\Phi}) \right) \quad , \quad (4.40a)$$

$$b_{jk}^- = \frac{1}{2} \left(\partial_j K_{-k}(\Phi, \bar{\Phi}) - \partial_k K_{-j}(\Phi, \bar{\Phi}) \right) \quad . \quad (4.40b)$$

De tal forma que a geometria do modelo- σ (2,0) é completamente determinada pelo vetor K_{-k} [83]. Observemos ainda que para essa escolha de gauge, podemos escrever a equação (4.33) como

$$T_{ijk}^- = \frac{1}{2} (\partial_i b_{jk}^- - \partial_j b_{ik}^-) \quad . \quad (4.41)$$

No caso em que não existe torção (sem termo de Wess-Zumino), temos uma variedade de Kähler, como já foi mencionado. Neste caso, da equação (4.33) vemos que

$$\partial_i g_{jk}^- - \partial_j g_{ik}^- = 0 \quad . \quad (4.42)$$

Notemos que a equação acima mostra que existe uma função escalar $K(\Phi, \bar{\Phi})$ definida localmente tal que

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} K \quad (4.43)$$

A função $K(\Phi, \bar{\Phi})$ é chamada de potencial de Kähler.

4.3. - FORMULAÇÃO DOS MODELOS- σ NO SUPERESPAÇO-(2,0)

Na seção anterior, os supercampos eram sempre do tipo (1,0). Assim, tínhamos uma ação no superespaço-(1,0) e, portanto, explicitamente invariante sob a supersimetria-(1,0). Impondo condições adicionais nestes supercampos e na ação, conseguimos mostrar a invariância desta ação-(1,0) sob outra supersimetria, o que levava a uma invariância (2,0) desta ação. No entanto, esta invariância (2,0) era colocada numa formulação de superespaço-(1,0).

Nesta seção, iremos formular o modelo- σ (2,0) supersimétrico no próprio superespaço-(2,0) e será esta a formulação usada no próximo capítulo.

Nossas convenções sobre a supersimetria e o superespaço-(2,0) foram introduzidas na seção 1.3 do Capítulo I, onde consideramos o modelo para supercampos de matéria (modelo de Wess-Zumino) no superespaço-(2,0).

A ação do modelo- σ manifestamente invariante sob a supersimetria-(2,0) é a seguinte

$$S_{\sigma} = i \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[K_1(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_{--} \Phi^1 - K_{\bar{1}}(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_{--} \bar{\Phi}^{\bar{1}} \right] \quad (4.44)$$

onde o vetor $K_1(\Phi, \bar{\Phi})$, algumas vezes chamado de prepotencial [83], é definido no espaço alvo, cujas coordenadas são os supercampos escalares $\Phi, \bar{\Phi}$ do superespaço (2,0). Vale lembrar que estes supercampos são "quirais", no sentido que obedecem aos vínculos

$$D_+ \bar{\Phi}^{\bar{1}} = 0 \quad ; \quad \bar{D}_+ \Phi^1 = 0$$

Utilizando-se as expansões em $\theta, \bar{\theta}$ para os supercampos Φ^i e $\bar{\Phi}^{\bar{i}}$ (definidas na seção 1.3 do Cap. I), obtemos a versão em campos componentes da ação acima, ou seja

$$S_{\sigma} = \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ [g_{i\bar{j}} + b_{i\bar{j}}] \partial_{++} \varphi^i \partial_{--} \bar{\varphi}^{\bar{j}} + g_{i\bar{j}} \eta_{+}^i D_{--} \bar{\eta}_{+}^{\bar{j}} + \text{conjugado complexo} \right\} \quad (4.45)$$

onde

$$D_{--} \bar{\eta}_{+}^{\bar{j}} = \partial_{--} \bar{\eta}_{+}^{\bar{j}} + \left[\bar{\Gamma}_{k\bar{i}}^{\Lambda\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) \partial_{--} \bar{\varphi}^{\bar{i}} \right], \quad (4.46a)$$

$$g_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) \equiv \frac{1}{2} \left[K_{i,\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) + K_{\bar{j},i}(\varphi, \bar{\varphi}) \right], \quad (4.46b)$$

$$b_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) \equiv \frac{1}{2} \left[K_{i,\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) - K_{\bar{j},i}(\varphi, \bar{\varphi}) \right]. \quad (4.46c)$$

Nas expressões, acima o tensor $\hat{\Gamma}_{jk}^i$ é a conexão afim do espaço alvo e utilizamos a convenção seguinte:

$$K_{i,\bar{j}} \equiv \partial_{\bar{j}} K_{i1} \quad ; \quad K_{\bar{j},i} \equiv \partial_i K_{\bar{j}} \quad (4.47)$$

Notemos que as expressões (4.46) explicitam o conteúdo geométrico do modelo que foi introduzido na seção anterior.

Duas invariâncias de "gauge" estão presentes na ação (4.44), a saber

$$\delta K_{i1} = i \partial_i \Lambda(\Phi, \bar{\Phi}) \quad \text{com } \Lambda \text{ real} \quad (4.48)$$

$$\delta K_{i1} = F_{i1}(\Phi) \quad ; \quad \delta K_{\bar{j}} = F_{\bar{j}}(\bar{\Phi}) \quad \text{com } \partial_{\bar{j}} F_{i1} = \partial_{\bar{j}} F_{\bar{j}} = 0 \quad (4.49)$$

Como é afirmado na ref. [83], estas simetrias são remanescentes da simetria (4.16a). Adiante poderemos ver que estas invariâncias exercem um importante papel na demonstração da invariância sob isometria do modelo- σ no superespaço-(2,0).

Vamos analisar agora as condições para a invariância da ação (4.44) sob isometrias.

Inicialmente consideremos a seguinte transformação nos supercampos escalares:

$$\delta\Phi^1 = \lambda^\alpha k_\alpha^1(\Phi) \quad ; \quad \delta\bar{\Phi}^1 = \lambda^\alpha k_\alpha^1(\bar{\Phi}) \quad , \quad (4.50)$$

onde k^1 é um vetor do espaço alvo e λ^α é um parâmetro global. Estas equações são análogas à equação (4.2), apenas estão escritas no superespaço (2,0) e em coordenadas complexas. Vale lembrar que o vetor $k^1(\Phi)$ é uma função holomórfica e $k^1(\bar{\Phi})$ é uma função anti-holomórfica, no sentido de que dependem apenas de um supercampo quirral, no primeiro caso, e apenas de um supercampo anti-quirral no segundo.

Sob as transformações (4.50), o prepotencial $K_1(\Phi, \bar{\Phi})$ comporta-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta K_1 &\equiv K_1(\Phi, \bar{\Phi}') - K_1(\Phi, \bar{\Phi}) = (\partial_j K_1) \delta\Phi^j + (\partial_{\bar{j}} K_1) \delta\bar{\Phi}^{\bar{j}} = \\ &= (\partial_j K_1) \lambda^\alpha k_\alpha^j(\Phi) + (\partial_{\bar{j}} K_1) \lambda^\alpha k_\alpha^{\bar{j}}(\bar{\Phi}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

valendo, também, é claro, o conjugado complexo da equação acima.

Portanto, sob as transformações (4.50), a ação do modelo- σ transforma-se como

$$\begin{aligned} \delta S_\sigma &= i \int d^2x \, d\theta_+ \, d\bar{\theta}_+ \left[\delta K_1(\Phi, \bar{\Phi}) \delta_{--} \Phi^1 + K_1(\Phi, \bar{\Phi}) (\lambda^\alpha \partial_j k_\alpha^1) \delta_{--} \bar{\Phi}^1 - \text{C.C.} \right] = \\ &= i \int d^2x \, d\theta_+ \, d\bar{\theta}_+ \left[\lambda^\alpha (\mathcal{L}_\alpha K_1) \delta_{--} \Phi^1 - \text{C.C.} \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde $\mathcal{L}_\alpha K_1$ é a derivada de Lie do prepotencial na direção do vetor k^j e é definida como

$$\mathcal{L}_\alpha K_1 \equiv K_{1,j} k_\alpha^j + K_{1,\bar{j}} k_\alpha^{\bar{j}} + K_{j,1} \partial_j k_\alpha^1 \quad . \quad (4.53)$$

Notemos que, se

$$\mathcal{L}_\alpha K_1(\Phi, \bar{\Phi}) = F_1^\alpha(\Phi) \quad ; \quad \mathcal{L}_{\bar{1}} K_1(\Phi, \bar{\Phi}) = \bar{F}_1^\alpha(\bar{\Phi}) \quad (4.54)$$

onde $F_1^\alpha(\Phi)$ e $\bar{F}_1^\alpha(\bar{\Phi})$ são funções holomórfica e anti-holomórfica respectivamente, devido à quirralidade de Φ , a equação (4.52)

anula-se.

Na realidade, graças ao (anti-)holomorfismo de $F_1(\Phi)$ ($\bar{F}_1(\bar{\Phi})$), podemos generalizar (4.54), tal que

$$\mathcal{L}^\alpha_{K_1}(\Phi, \bar{\Phi}) = F_1^\alpha(\Phi) + i \partial_1 L^\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad , \quad (4.55a)$$

$$\mathcal{L}^\alpha_{K_1^-}(\Phi, \bar{\Phi}) = F_1^\alpha(\bar{\Phi}) - i \partial_1^- L^\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad , \quad (4.55b)$$

onde $L(\Phi, \bar{\Phi})$ é uma função escalar real.

Novamente, devido ao holomorfismo de $F_1(\Phi)$, podemos escrever

$$\varepsilon_j \mathcal{L}^\alpha_{K_1} = \mathcal{L}^\alpha_{K_{1,j}} = i \partial_1 \partial_j^- L \quad , \quad (4.56a)$$

$$\partial_1 \mathcal{L}^\alpha_{K_j^-} = \mathcal{L}^\alpha_{K_{j,1}} = -i \partial_j \partial_1^- L \quad . \quad (4.56b)$$

Considerando a expressão (4.46b) para a métrica, e a equação (4.46c) para o potencial de torção, concluímos que as equações acima implicam que

$$\mathcal{L}^\alpha g_{i\bar{j}} \equiv g_{i\bar{1}} \partial_j^- k^{\bar{1}} + g_{i\bar{j}} \partial_1 k^1 + g_{i\bar{j},1} k^1 + g_{i\bar{j},1}^- k^{\bar{1}} = 0 \quad , \quad (4.57)$$

$$\mathcal{L}^\alpha b_{i\bar{j}} \equiv b_{i\bar{1}} \partial_j^- k^1 + b_{i\bar{j}} \partial_1 k^1 + b_{i\bar{j},1} k^1 + b_{i\bar{j},1}^- k^{\bar{1}} = 2i \partial_1 \partial_j^- L \quad . \quad (4.58)$$

A equação de Killing em coordenadas complexas torna-se

$$\nabla_1 k_j^- + \nabla_j^- k_1 = 0 \quad . \quad (4.59)$$

Podemos verificar facilmente que esta equação é equivalente à equação (4.57). Ou seja, se a derivada de Lie da métrica é nula, temos que os vetores k^1 são vetores de Killing, e as transformações (4.50) são transformações de isometria. Desta forma, fica demonstrado que a ação (4.44) é invariante sob isometrias, desde que as condições (4.55) sejam satisfeitas.

Considerando em conjunto as equações (4.41) e (4.58), obtemos imediatamente que

$$\mathcal{L}_\alpha T_{ijk} = 0 \quad (4.60)$$

Ora, uma vez que

$$T_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_i b_{jk} - \partial_j b_{ik})$$

concluimos que a derivada de Lie do potencial de torção, pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}_\alpha b_{ij}(\Phi, \bar{\Phi}) = \partial_i \mathcal{L}_\alpha b_j - \partial_j \mathcal{L}_\alpha b_i \quad (4.61)$$

Lembremos que uma condição sobre o potencial de torção análoga a esta, é necessária para assegurar a invariância do termo de Wess-Zumino sob isometrias, conforme vimos na análise do modelo não-supersimétrico na seção 4.1.

É importante ressaltar a importância da introdução da função escalar $L(\Phi, \bar{\Phi})$ nas condições (4.55). Notemos que não considerar esta função equivale a tomar a equação (4.61) como igual a zero, o que se configura numa restrição muito mais forte e revela a quebra de uma simetria do potencial de torção.

Em resumo, vemos que a condição para a invariância sob isometria global do modelo σ no superespaço (2,0), que é dada pela equações (4.55), leva de um lado às condições (4.57) ou (4.59), as quais asseguram que k^1 é um vetor de Killing, e portanto que (4.50) são transformações de isometria. Por outro lado, levam à condição (4.61) que assegura a invariância do termo de Wess-Zumino sob isometrias. E como vimos na seção 4.1 estas são as condições requeridas para a ação não-supersimétrica (4.11) ser invariante sob isometrias.

4.4 - SUPERSIMETRIA x GEOMETRIA DO ESPACO-ALVO

No intuito de melhor ilustrar a relação entre a dimensionalidade do espaço-tempo, o número de supersimetrias e a variedade ou espaço alvo do modelo- σ , consideremos o esboço a seguir:

DIMENSAO \ SUPER SIMETRIA	D = 4	D = 2
M = (1, 0)	-	VARIIDADE RIEMANNIANA
N = (2, 0)	-	VARIIDADE HERMITEANA VARIIDADE DE KAHLER (SEM TORCAO)
N = (4, 0)	-	HIPER-KAHLER (SEM TORCAO)
N = (1, 1)	KAHLER (SEM TORCAO)	RIEMANNIANA
N = (2, 2)	HIPER-KAHLER (SEM TORCAO)	KAHLER (SEM TORCAO)
N = (4, 4)	-	HIPER-KAHLER (SEM TORCAO)

CAPÍTULO V

ISOMETRIAS LOCAIS EM MODELOS-SIGMA COM SUPERSIMETRIA-(2,0)

No capítulo anterior estudamos o modelo- σ com supersimetria-(2,0), analisando em particular suas invariâncias, especialmente as isometrias do espaço alvo. Naquele contexto, estas isometrias eram simetrias globais, no sentido de que o parâmetro da transformação foi mantido independente das coordenadas x^μ .

Neste capítulo, vamos elevar as isometrias à categoria de transformações locais. Desta forma, teremos o aparecimento de supercampos de gauge, e veremos portanto o acoplamento dos supercampos escalares do modelo- σ com estes supercampos de gauge.

O processo de *gauging* das isometrias será desenvolvido em duas etapas. Inicialmente, vamos considerar o modelo- σ definido num espaço alvo sem torção; no caso, uma variedade de Kähler tomada como variedade simétrica na forma G/H . Posteriormente, iremos tratar o caso de uma variedade com torção.

5.1. - MODELOS- σ (2,0) KÄHLERIANOS INVARIANTES SOB ISOMETRIAS LOCAIS

Uma variedade de Kähler é uma variedade Hermiteana, cuja métrica obedece as seguintes condições [87]:

$$\partial_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} - \partial_{\bar{i}} g_{k\bar{j}} = 0 \tag{5.1}$$

$$\partial_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} - \partial_{\bar{j}} g_{i\bar{k}} = 0$$

As equações acima nos asseguram que, localmente, a métrica pode

ser escrita como a derivada segunda de uma função escalar $K(\Phi, \bar{\Phi})$, chamada de potencial de Kähler. Ou seja,

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K(\Phi, \bar{\Phi}) \quad (5.2)$$

A ação do modelo- σ no superespaço-(2,0), definido em uma variedade de Kähler, é dada por

$$S_\sigma = i \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\partial_i K(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_{\bar{j}} \Phi^i - \partial_{\bar{i}} K(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_j \bar{\Phi}^{\bar{i}} \right] \quad (5.3)$$

Notemos que esta ação é invariante sob as chamadas transformações de gauge de Kähler ou simplesmente transformações de Kähler. A transformação é dada por

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) \longmapsto K'(\Phi, \bar{\Phi}) = K(\Phi, \bar{\Phi}) + F(\Phi) + \bar{F}(\bar{\Phi}) \quad , \quad (5.4)$$

onde $F(\Phi)$ é uma função holomórfica (quiral do ponto de vista da supersimetria-(2,0)) de Φ .

Esta invariância é devida ao caráter quirral (anti-quiral) dos escalares F (\bar{F}). Pois, como sabemos do Cap. I, a integração de termos puramente quirais ou anti-quirais no superespaço completo é nula.

Notemos ainda que, levando em conta a equação (5.2), esta é também uma invariância da métrica.

Esta invariância é, na realidade, um caso particular da invariância (4.49) mostrada para o caso mais geral, que inclui a torção. Como veremos adiante, ela desempenha um importante papel no *gauging* das isometrias.

Consideraremos uma variedade alvo não-compacta do tipo Kähler. Esta pode ser tomada topologicamente equivalente a um espaço simétrico da forma coset, G/H . G representa o grupo de isometria, o qual possui, em cada ponto Φ^i da variedade, um subgrupo de isotropia H . Este subgrupo consiste das simetrias que deixam o ponto Φ^i invariante, ou seja, H é um subgrupo de $SO(n)$, ($n = \dim G/H$), o grupo de estrutura de G/H .

Os geradores do grupo de isometrias G são denotados por Q_α ($\alpha = 1, \dots, \dim G$), enquanto que os geradores do subgrupo de isotropia H são denotados por $Q_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} = 1, \dots, \dim H$).

Coordenadas locais podem ser introduzidas tendo Φ^i como a origem, enquanto que as transformações infinitesimais do subgrupo de isotropia são linearmente realizadas e agem por multiplicação matricial, da mesma forma que em variedades planas [37]. Portanto

$$\delta\Phi^i = i\lambda^{\bar{\alpha}} (Q_{\bar{\alpha}}^-)^i_j \Phi^j \quad ; \quad \delta\bar{\Phi}^{\bar{i}} = -i\lambda^{\bar{\alpha}} (Q_{\bar{\alpha}}^-)^{\bar{i}}_{\bar{j}} \bar{\Phi}^{\bar{j}} \quad , \quad (5.5)$$

onde $(Q_{\bar{\alpha}}^-)^i_j$ denota os elementos de matriz dos geradores hermitianos do subgrupo H em alguma representação N-dimensional e $\lambda^{\bar{\alpha}}$ são parâmetros globais (independentes de x e Φ).

Estas simetrias deixam o ponto $\Phi^i=0$ invariante, porém as simetrias restantes em G movem este ponto e, portanto, devem ser realizadas não-linearmente. Portanto, a ação infinitesimal do grupo de isometria pode ser escrita como

$$\delta\Phi^i = \lambda^{\alpha} k^i_{\alpha}(\Phi) \quad ; \quad \delta\bar{\Phi}^{\bar{i}} = \lambda^{\alpha} k^{\bar{i}}_{\alpha}(\bar{\Phi}) \quad , \quad (5.6)$$

onde $k^i(\Phi)$ e $k^{\bar{i}}(\bar{\Phi})$ são respectivamente as componentes holomórficas e anti-holomórficas dos vetores de Killing definidos na variedade alvo, e geram separadamente a álgebra de Lie do grupo de isometria:

$$[k_{\alpha}, k_{\beta}]^i \equiv \mathcal{L}_{\alpha}(k) k^i_{\beta} = f^{\gamma}_{\alpha\beta} k^i_{\gamma} \quad , \quad (5.7a)$$

$$[\bar{k}_{\alpha}, \bar{k}_{\beta}]^{\bar{i}} \equiv \mathcal{L}_{\alpha}(\bar{k}) k^{\bar{i}}_{\beta} = f^{\gamma}_{\alpha\beta} k^{\bar{i}}_{\gamma} \quad . \quad (5.7b)$$

Notemos que, comparando (5.5) com (5.6), no caso do subgrupo linearmente realizado H, podemos escrever que

$$k^i_{\alpha}(\Phi) = i(Q_{\bar{\alpha}}^-)^i_{\alpha} \Phi^{\bar{i}} \quad ; \quad k^{\bar{i}}_{\alpha}(\bar{\Phi}) = -i(Q_{\bar{\alpha}}^-)^{\bar{i}}_{\alpha} \bar{\Phi}^{\bar{i}} \quad . \quad (5.8)$$

Exponenciando (5.6), obtemos transformações finitas do grupo de isometria, as quais podem ser escritas como

$$\Phi^i \longmapsto \Phi'^i = \exp(L_{\lambda, k}) \Phi^i \quad , \quad (5.9a)$$

$$\bar{\Phi}^{\bar{i}} \longmapsto \bar{\Phi}'^{\bar{i}} = \exp(L_{\lambda, \bar{k}}) \bar{\Phi}^{\bar{i}} \quad , \quad (5.9b)$$

onde $L_{\lambda.k}$ é a derivada de Lie na direção do vetor $\lambda^\alpha k_\alpha^1$, definida por

$$L_{\lambda.k} \Phi^1 \equiv \left[\lambda^\alpha k_\alpha^j \frac{\partial}{\partial \Phi^j}, \Phi^j \right] = \delta \Phi^1 \quad (5.9c)$$

Uma transformação de isometria ou isotropia induz conseqüentemente uma variação, δK , no potencial de Kähler:

$$\delta K \equiv \partial_1 K \delta \Phi^1 + \partial_{-1} K \delta \bar{\Phi}^1 \quad (5.10)$$

Como sabemos, uma transformação de isometria deixa a métrica invariante, portanto o potencial $K(\Phi, \bar{\Phi})$, cuja derivada segunda dá a métrica, também o será, a menos de uma transformação de Kähler. Em outras palavras, se a variação δK não for zero, deve ser no máximo igual à transformação de Kähler. Desta forma, podemos identificar

$$\delta K \equiv \partial_1 K \delta \Phi^1 + \partial_{-1} K \delta \bar{\Phi}^1 = F(\Phi) + \bar{F}(\bar{\Phi}) \quad (5.11)$$

No caso isotrópico existem gauges, chamados gauges de Kähler [37], nos quais a função F pode ser tomada nula, tal que o potencial de Kähler pode sempre ser escolhido invariante sob H . Isto assegura a invariância da ação (5.3) sob o grupo de isotropia.

Por outro lado, o mesmo geralmente não é verdadeiro para o grupo de isometria. Considerando as transformações de isometria dadas em (5.6), a variação δK torna-se

$$\delta K \equiv \lambda^\alpha \left[(\partial_1 K) k_\alpha^1 + (\partial_{-1} K) k_\alpha^{\bar{1}} \right] = \lambda^\alpha \left[F_\alpha(\Phi) + \bar{F}_\alpha(\bar{\Phi}) \right] \quad (5.12)$$

onde reparametrizamos as funções holomórfica e anti-holomórfica, F e \bar{F} , para tornar explícito o parâmetro da transformação.

Devido ao holomorfismo da função F , ela é determinada a menos de uma quantidade puramente imaginária, de modo que podemos escrever

$$(\partial_1 K) k_\alpha^1 \equiv F_\alpha + i M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad (5.13a)$$

o mesmo valendo para \bar{F}

$$(\partial - K)_1 k_\alpha^{\bar{1}} \equiv \bar{F}_\alpha - i M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad (5.13b)$$

As funções M_α são escalares reais cuja existência é crucial para transformar as isometrias em simetrias locais, conforme veremos mais adiante.

Finalmente, tendo em vista a equação (5.12) e, em virtude dos vínculos sobre Φ e $\bar{\Phi}$, segue-se imediatamente que a ação no superespaço (5.3) é invariante sob isometrias globais.

5.1.1 - GAUGING DO SUBGRUPO DE ISOTROPIA

As transformações locais de um subgrupo do grupo de isotropia da métrica, são escritas como

$$\Phi^i \longmapsto \Phi'^i = e^{i\Lambda} \Phi^i \quad ; \quad \bar{\Phi}^{\bar{i}} \longmapsto \bar{\Phi}'^{\bar{i}} = \bar{\Phi}^{\bar{i}} e^{-i\bar{\Lambda}} \quad , \quad (5.14)$$

onde $\Lambda \equiv \Lambda^{\bar{\alpha}}(x; \theta, \bar{\theta}) Q_{\bar{\alpha}}$ é um supercampo escalar parâmetro de gauge e que obedece ao vínculo de quiralidade ($\bar{D}_+ \Lambda^{\bar{\alpha}} = 0$).

O gauging do subgrupo de isotropia pode ser imediatamente realizado se efetuamos a redefinição de supercampos

$$\bar{\Phi}^{\bar{i}} \longmapsto \tilde{\Phi}^{\bar{i}} \equiv \bar{\Phi}^{\bar{j}} (e^{gV})^{\bar{i}}_{\bar{j}} \quad , \quad (5.15)$$

uma vez que $\tilde{\Phi}$ transforma-se como

$$\tilde{\Phi}^{\bar{i}} \longmapsto \tilde{\Phi}'^{\bar{i}} = \tilde{\Phi}^{\bar{i}} e^{-i\Lambda} \quad (5.16)$$

Lembramos que consideramos o supercampo V transformando-se sob uma transformação de gauge de tal forma que

$$e^{gV'} = e^{i\bar{\Lambda}} e^{gV} e^{-i\Lambda}$$

O supercampo escalar V toma valores na álgebra de Lie de H , $V \equiv \bar{V}^{\bar{\alpha}}(x; \theta, \bar{\theta}) Q_{\bar{\alpha}}$, e os geradores do subgrupo que estamos

tornando local são escritos em uma representação n-dimensional. Naturalmente, o supercampo V é um supercampo de gauge, embora não apareça devido à covariantização de uma derivada, o que está em perfeita analogia com o procedimento adotado na introdução de uma ação no superespaço (2,0) invariante sob Yang-Mills, apresentado na seção 2.1.2 do Cap. II.

A troca (5.15) garante que a função escalar $K(\Phi, \Phi)$ é localmente invariante, uma vez que $K(\Phi, \bar{\Phi})$ foi escolhido para ser globalmente invariante. Ou em outras palavras, como $\tilde{\Phi}^i$ e Φ^i transformam-se sob transformações locais da mesma forma que $\bar{\Phi}^i$ e Φ^i transformam-se sob transformações globais com o parâmetro constante λ trocado pelo supercampo quiral Λ , e uma vez que o potencial de Kähler $K(\Phi, \bar{\Phi})$ não contém derivadas dos supercampos, a invariância local de $K(\Phi, \tilde{\Phi})$ segue-se imediatamente da invariância global de $K(\Phi, \bar{\Phi})$.

Resta-nos agora implementar a covariantização de gauge padrão da derivada $\partial_{--} \Phi^i$:

$$\partial_{--} \Phi^i \longmapsto \nabla_{--} \Phi^i \equiv \partial_{--} \Phi^i - ig \Gamma_{--}^{\bar{\alpha}} (Q_{\alpha}^-)^i \Phi^j \quad (5.17)$$

onde Γ_{--} é um supercampo " vetorial " de gauge.

Portanto, finalmente temos que a ação

$$S_{\sigma-C} = i \int d^2x d\theta_+ d\bar{\theta}_+ \left[\partial_i K(\Phi, \tilde{\Phi}) \nabla_{--} \Phi^i - \partial_i K(\Phi, \tilde{\Phi}) \nabla_{--} \bar{\Phi}^i \right] \quad (5.18)$$

é invariante sob transformações de Yang-Mills locais geradas por qualquer subgrupo do grupo de isotropia H.

Seria oportuno, agora, obter a ação (5.18) em termos dos campos componentes. Para isso, vamos relembrar aqui as expansões em campos componentes dos supercampos de matéria e de gauge, apresentadas respectivamente nas seções 1.3 do Cap. I e 2.1 do Cap. II. A saber

$$\Phi^i(x; \theta, \bar{\theta}) = \varphi^i(x) + \theta \eta_+^i(x) + i\theta \bar{\theta} \partial_+ \varphi^i(x) \quad , \quad (5.19a)$$

$$\Gamma_{--}(x; \theta, \bar{\theta}) = A_{--}(x) + i\theta \bar{\gamma}_-(x) + i\bar{\theta} \gamma_-(x) + \theta \bar{\theta} B(x) \quad , \quad (5.19b)$$

$$V(x; \theta, \bar{\theta}) = C(x) - \frac{i}{g} \theta \rho_+(x) - \frac{i}{g} \bar{\theta} \bar{\rho}_+(x) + \theta \bar{\theta} A_{++}(x) \quad . \quad (5.19c)$$

Naturalmente, os campos de gauge tomam valores na álgebra de Lie de H, ou seja, $A_{++} \equiv A_{++}^{\bar{\alpha}} Q_{\bar{\alpha}}^-$, e da mesma forma os campos γ_- , ρ_+ , C e B.

Utilizando o gauge de Wess-Zumino, onde $\rho_+ = \bar{\rho}_+ = C = 0$, a ação (5.18) pode ser escrita em termos dos campos componentes na forma seguinte:

$$\begin{aligned}
 S_{\sigma-C} = i \int d^2x \left\{ g_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^{\bar{j}} \tilde{\nabla}_{--} \eta_+^i + g_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^j \tilde{\nabla}_{--} \eta_+^{\bar{i}} + \right. \\
 + ig_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \mathcal{D}_{++} \varphi^{\bar{j}} \mathcal{D}_{--} \varphi^i + ig_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \mathcal{D}_{++} \varphi^j \mathcal{D}_{--} \varphi^{\bar{i}} + \\
 + g g_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^{\bar{j}} \bar{\gamma}_- \varphi^i - g g_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^j \gamma_- \varphi^{\bar{i}} + \\
 \left. - g (\partial_{++} A_{--}) \left[\partial_i K(\varphi, \bar{\varphi}) \varphi^i - \partial_{\bar{i}} K(\varphi, \bar{\varphi}) \varphi^{\bar{i}} \right] + \right. \\
 \left. + ig (\partial_i K(\varphi, \bar{\varphi})) \varphi^i B + ig (\partial_{\bar{i}} K(\varphi, \bar{\varphi})) \varphi^{\bar{i}} B \right\} \quad , \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

onde

$$g_{ij}^-(\varphi, \bar{\varphi}) \equiv \partial_i \partial_{\bar{j}} K(\varphi, \bar{\varphi}) \quad , \quad (5.21a)$$

$$\tilde{\nabla}_{--} \eta_+^i \equiv \partial_{--} \eta_+^i + \Gamma_{jk}^i \partial_{--} \varphi^j \eta_+^k \quad , \quad (5.21b)$$

$$\mathcal{D}_{++} \varphi^{\bar{j}} \equiv \partial_{++} \varphi^{\bar{j}} + ig A_{++} \varphi^{\bar{j}} \quad ; \quad \mathcal{D}_{--} \varphi^i \equiv \partial_{--} \varphi^i + ig A_{--} \varphi^i \quad (5.21c)$$

(Γ_{jk}^i é o símbolo de Christoffel).

A fim de eliminar o campo auxiliar B(x), consideremos a seguinte ação cinética para os campos de Yang-Mills, já apresentada na subseção 2.1.2 do Cap. II.

$$S_C = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}^2 + i \gamma_- \mathcal{D}_{++} \bar{\gamma}_- + \frac{1}{2} B^2 \right] \quad (5.22)$$

onde $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}^{\bar{\alpha}} Q_{\bar{\alpha}}^-$ e

$$\bar{\varphi}^{\alpha} \equiv \partial_{++} A_{--}^{\alpha} - \partial_{--} A_{++}^{\alpha} + g f_{\beta\gamma}^{\alpha} A_{++}^{\beta} A_{--}^{\gamma} \quad , \quad (5.23a)$$

$$D_{++} \bar{\gamma}^{\alpha} \equiv \partial_{++} \bar{\gamma}^{\alpha} + g f_{\beta\gamma}^{\alpha} A_{++}^{\beta} \bar{\gamma}^{\gamma} \quad , \quad (5.23b)$$

$$[Q_{\alpha}^{\bar{\gamma}}, Q_{\beta}^{\bar{\gamma}}] = i f_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} Q_{\bar{\gamma}} \quad . \quad (5.23c)$$

Considerando conjuntamente (5.22) e (5.20), e utilizando a equação de Euler-Lagrange, concluímos que

$$B = g [(\partial_i K) \varphi^{\bar{i}} + (\partial_{-i} K) \varphi^{\bar{i}}] \quad . \quad (5.24)$$

Substituindo este resultado em (5.20) e explicitando os geradores, obtemos

$$\begin{aligned} S_{\sigma-G} = & \int d^2x \left\{ g_{1j}(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^{\bar{j}} \tilde{\nabla}_{--} \eta_+^{\bar{i}} + g_{1j}(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^{\bar{j}} \tilde{\nabla}_{--} \eta_+^{\bar{i}} + \right. \\ & + i g_{1j}(\varphi, \bar{\varphi}) D_{++} \varphi^{\bar{j}} D_{--} \varphi^{\bar{i}} + i g_{1j}(\varphi, \bar{\varphi}) D_{++} \varphi^{\bar{j}} D_{--} \varphi^{\bar{i}} + \\ & + g g_{1j}(\varphi, \bar{\varphi}) \left[\eta_+^{\bar{j}} \bar{\gamma}_-^{\alpha} (Q_{\alpha}^{\varphi})^{\bar{i}} - \eta_+^{\bar{i}} \bar{\gamma}_-^{\alpha} (Q_{\alpha}^{\varphi})^{\bar{j}} \right] + \\ & \left. + \frac{i}{2} g^2 \left[(\partial_i K(\varphi, \bar{\varphi})) (Q_{\alpha}^{\varphi})^{\bar{i}} + (\partial_{-i} K(\varphi, \bar{\varphi})) (Q_{\alpha}^{\varphi})^{\bar{i}} \right]^2 \right\} \quad (5.25) \end{aligned}$$

onde

$$D_{++} \varphi^{\bar{j}} \equiv \partial_{++} \varphi^{\bar{j}} + i g A_{++}^{\alpha} (Q_{\alpha}^{\varphi})^{\bar{j}} \quad ; \quad D_{--} \varphi^{\bar{i}} \equiv \partial_{--} \varphi^{\bar{i}} + i g A_{--}^{\alpha} (Q_{\alpha}^{\varphi})^{\bar{i}} \quad . \quad (5.26)$$

Para chegar à equação acima usamos ainda que

$$(\partial_i K(\varphi, \bar{\varphi})) (\partial_{++} A_{--}) \varphi^{\bar{i}} = (\partial_{-i} K(\varphi, \bar{\varphi})) (\partial_{++} A_{--}) \varphi^{\bar{i}} \quad (5.27)$$

a menos de uma derivada total.

5.1.2 - GAUGING DO SUBGRUPO DE ISOMETRIA

Ao invés de considerar o grupo de isometria completo G , vamos nos restringir a algum subgrupo m -dimensional, R , de sorte que os primeiros m vetores de Killing k_α^i ($\alpha = 1, \dots, m$) geram R . Portanto, em todas as fórmulas, vamos restringir o índice da álgebra de Lie α a esta faixa.

Para transformar as isometrias em simetrias locais, vamos seguir dois procedimentos diferentes, embora totalmente equivalentes.

Inicialmente vamos realizar o *gauging* no formalismo de campos componentes, de forma análoga ao processo utilizado pioneiramente por Bagger e Witten [34], no caso do modelo σ em quatro dimensões com supersimetria $N=1$. Em seguida, utilizamos o formalismo de superespaço na linha desenvolvida por Hull e outros [37], para o mesmo modelo assinalado acima.

O *gauging* do subgrupo de isometria é feito no formalismo de componentes, através da substituição seguinte [34]

$$i(Q_\alpha^-)\varphi^i \longmapsto k_\alpha^i(\varphi) \quad ; \quad -i(Q_\alpha^-)\bar{\varphi}^{\bar{i}} \longmapsto k_\alpha^{\bar{i}}(\bar{\varphi}) \quad , \quad (5.28)$$

a qual é sugerida pela equação (5.8).

Fazendo esta substituição, a última linha da equação (5.25) torna-se

$$\frac{1}{2} g^2 \left[i(\partial_i K(\varphi, \bar{\varphi})) k_\alpha^i(\varphi) - i(\partial_{\bar{i}} K(\varphi, \bar{\varphi})) k_\alpha^{\bar{i}}(\bar{\varphi}) \right]^2 \quad . \quad (5.29)$$

A equação de Killing (ver eq. (4.59) do Cap. IV)

$$\nabla_i k_{-j} + \nabla_{-j} k_i = 0$$

assegura a existência, pelos menos localmente, de funções escalares reais $D_\alpha(\varphi, \bar{\varphi})$, tal que [34]

$$g_{i\bar{j}} k_\alpha^i = i \partial_{\bar{j}} D_\alpha(\varphi, \bar{\varphi}) \quad . \quad (5.30)$$

Esta equação pode ser escrita como

$$\partial_i \partial_j K(\varphi, \bar{\varphi}) k_\alpha^i = i \partial_j D_\alpha(\varphi, \bar{\varphi})$$

e, ainda,

$$\partial_i K(\varphi, \bar{\varphi}) k_\alpha^i = i D_\alpha(\varphi, \bar{\varphi}) + F_\alpha(\varphi) \quad , \quad (5.31)$$

onde $F(\varphi)$ é uma função holomórfica de φ .

Notemos que esta equação é simplesmente a projeção em campos componentes da equação (5.13a), de tal forma que podemos identificar as funções escalares reais $D_\alpha(\varphi, \bar{\varphi})$ como projeções das funções $M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi})$ e assim passaremos a designá-las simplesmente por M nos dois formalismos.

Portanto, a equação (5.25) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_{\sigma-g} = i \int d^2x \left\{ g_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^{\bar{j}} \tilde{\nabla}_{--} \eta_+^i + g_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) \eta_+^{\bar{j}} \tilde{\nabla}_{--} \eta_+^{\bar{i}} + \right. \\ \left. + ig_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) D_{++} \varphi^{\bar{j}} D_{--} \varphi^i + ig_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) D_{++} \varphi^{\bar{j}} D_{--} \varphi^{\bar{i}} + \right. \\ \left. - ig_{i\bar{j}}(\varphi, \bar{\varphi}) \left[\eta_+^{\bar{j}} \bar{\gamma}_-^\alpha k_\alpha^i + \eta_+^i \gamma_-^\alpha k_\alpha^{\bar{j}} \right] + \right. \\ \left. + 2ig^2 M^2 \right\} \quad , \quad (5.32) \end{aligned}$$

onde

$$D_{++} \varphi^{\bar{j}} \equiv \partial_{++} \varphi^{\bar{j}} + ig A_{++}^\alpha k_\alpha^{\bar{j}} \quad ; \quad D_{--} \varphi^i \equiv \partial_{--} \varphi^i + ig A_{--}^\alpha k_\alpha^i \quad . \quad (5.33)$$

A ação (5.32) é invariante sob o subgrupo de isometria local ou ainda, sob o subgrupo de gauge R .

Vamos passar agora ao processo de *gauging* do subgrupo de isometria desenvolvido no superespaço-(2,0).

No entanto, antes de empreender nossa análise no superespaço, é importante chamar a atenção para o fato de que, ao invés da métrica, é o potencial $K(\Phi, \bar{\Phi})$ que aparece na ação. Este fato, como iremos explicar abaixo, requer a necessidade de simultaneamente tornar local a invariância de Kähler (5.4) [37]. Contudo, os casos

quadri- e bidimensional diferem pelo fato de que no último o potencial de Kähler aparece sujeito a uma derivada espaço-temporal. Além disso, no caso (2,0) existe uma supersimetria extra em jogo, e isto é responsável pela forma diferente da ação em relação aos casos N=1 - D=4 e (1,0) - D=2.

As transformações *locais* do subgrupo de isometria são escritas na forma

$$\delta\Phi^i = \Lambda^\alpha k_\alpha^i(\Phi) \quad ; \quad \delta\bar{\Phi}^{\bar{i}} = \bar{\Lambda}^\alpha k_\alpha^{\bar{i}}(\bar{\Phi}) \quad , \quad (5.34)$$

onde $\Lambda \equiv \Lambda^\alpha(x; \theta, \bar{\theta}) Q_\alpha$ é um supercampo quirial parâmetro de gauge.

Na forma finita estas transformações tornam-se

$$\Phi^i \longmapsto \Phi'^i = \exp(L_{\Lambda, k}) \Phi^i \quad (5.35a)$$

$$\bar{\Phi}^{\bar{i}} \longmapsto \bar{\Phi}'^{\bar{i}} = \exp(L_{\bar{\Lambda}, \bar{k}}) \bar{\Phi}^{\bar{i}} \quad , \quad (5.35b)$$

onde os operadores $L_{\Lambda, k}$ e $L_{\bar{\Lambda}, \bar{k}}$ são definidos como

$$L_{\Lambda, k} \Phi^i \equiv \left[\Lambda^\alpha k_\alpha^j \frac{\partial}{\partial \Phi^j} , \Phi^i \right] \quad , \quad (5.36a)$$

$$L_{\bar{\Lambda}, \bar{k}} \bar{\Phi}^{\bar{i}} \equiv \left[\bar{\Lambda}^\alpha k_\alpha^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}^{\bar{j}}} , \bar{\Phi}^{\bar{i}} \right] \quad . \quad (5.36b)$$

A fim de covariantizar o potencial de Kähler K e expressar todas as variações de gauge em termos do supercampo $\Lambda(x; \theta, \bar{\theta})$, de tal forma a imitar o caso das transformações globais, propomos uma redefinição de campos análoga àquela que foi feita no caso de isotropia (Ver equação (5.15)), ou seja $\bar{\Lambda} \rightarrow iV$ na definição de um supercampo $\tilde{\Phi}$, que corresponde a uma " covariantização " do supercampo $\bar{\Phi}$. Portanto definimos

$$\tilde{\Phi}^{\bar{i}} \equiv \exp(L_{iV, \bar{k}}) \bar{\Phi}^{\bar{i}} = \exp(iL_{iV, \bar{k}}) \bar{\Phi}^{\bar{i}} \quad , \quad (5.37)$$

onde a transformação de gauge de V é fixada na forma abaixo

$$e^{iL_{iV, \bar{k}}} = e^{L_{\Lambda, \bar{k}}} e^{iL_{V, \bar{k}}} e^{-L_{\bar{\Lambda}, \bar{k}}} \quad , \quad (5.38)$$

Portanto, Φ transforma-se como

$$\tilde{\Phi}^1 \longmapsto \tilde{\Phi}'^1 = \exp(L_{\Lambda, \tilde{k}}) \tilde{\Phi}^1, \quad (5.39)$$

a qual infinitesimalmente lê-se

$$\delta \tilde{\Phi}^1 = \Lambda^\alpha(x; \theta, \bar{\theta}) \tilde{k}_\alpha^1 \quad (5.40)$$

No entanto, contrariamente ao *gauging* do subgrupo de isotropia, a prescrição de trocar $\bar{\Phi}$ por $\tilde{\Phi}$ não resulta em um escalar $K(\Phi, \tilde{\Phi})$ invariante de gauge, pois o grupo de simetria não é mais linearmente realizado.

Em outros termos, esta prescrição não é suficiente para tornar a ação do modelo- σ simultaneamente invariante sob simetria de gauge e transformações de Kähler *locais*. Notemos que uma transformação de isometria infinitesimal local induz em $K(\Phi, \tilde{\Phi})$ a variação

$$\delta K(\Phi, \tilde{\Phi}) = \Lambda^\alpha [(\partial_i K) k_\alpha^1(\Phi) + (\tilde{\partial}_i K) \tilde{k}_\alpha^1(\tilde{\Phi})] = \Lambda^\alpha (F_\alpha + \tilde{F}_\alpha) \quad (5.41)$$

tal que

$$\tilde{F}_\alpha = (\tilde{\partial}_i K) \tilde{k}_\alpha^1(\tilde{\Phi}) + iM_\alpha(\Phi, \tilde{\Phi}) \quad (5.42)$$

enquanto que

$$\tilde{\partial}_i \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{\Phi}^1} \quad (5.43)$$

A variação de isometria sobre K calculada acima é exatamente do tipo de uma transformação de Kähler *local*. É isto é uma consequência direta da existência dos escalares reais $M_\alpha(\Phi, \tilde{\Phi})$, conforme discutido nas referências [37] e [34].

O resultado (5.41), imediatamente, sugere a introdução de um par de supercampos auxiliares quirais e anti-quirais, $\xi(\Phi)$ e $\bar{\xi}(\bar{\Phi})$, cujas transformações de Yang-Mills são tais que compensam a variação de isometria de K . No caso global definimos

$$\delta\xi(\Phi) \equiv \lambda^\alpha F_\alpha(\Phi) \quad ; \quad \delta\bar{\xi}(\bar{\Phi}) \equiv \lambda^\alpha \bar{F}_\alpha(\bar{\Phi}) \quad . \quad (5.44)$$

Agora introduzimos o *Lagrangeana* dado por

$$\mathfrak{L}_\xi = \partial_1 [K(\Phi, \bar{\Phi}) - \xi(\Phi)] \partial_{--} \Phi^1 - \partial_{-1} [K(\Phi, \bar{\Phi}) - \bar{\xi}(\bar{\Phi})] \partial_{--} \bar{\Phi}^1 \quad . \quad (5.45)$$

Utilizando as equações (5.44) e outras pertinentes notamos imediatamente que o *Lagrangeana* acima é invariante sob transformações de Yang-Mills globais.

É importante assinalar aqui a mudança em relação à equação (5.12), a qual leva à invariância sob simetria global quando consideramos a ação.

Uma vez que \mathfrak{L}_ξ é invariante global, isso nos indica que a prescrição de *gauging* correta é fazer as substituições $\bar{\Phi} \rightarrow \tilde{\Phi}$ e $\bar{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}$, de tal forma a obtermos a Lagrangeana seguinte

$$\mathfrak{L}_\xi = \partial_1 [K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi(\Phi)] \nabla_{--} \Phi^1 - \tilde{\partial}_{-1} [K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})] \nabla_{--} \tilde{\Phi}^1 \quad , \quad (5.46)$$

a qual pode ser ainda escrita como

$$\mathfrak{L}_\xi = \partial_1 [K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})] \nabla_{--} \Phi^1 - \tilde{\partial}_{-1} [K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})] \nabla_{--} \tilde{\Phi}^1 \quad (5.47)$$

e onde temos que

$$\nabla_{--} \Phi^1 \equiv \partial_{--} \Phi^1 - g\Gamma_{--}^\alpha k_\alpha^1(\Phi) \quad , \quad (5.48a)$$

$$\nabla_{--} \tilde{\Phi}^1 \equiv \partial_{--} \tilde{\Phi}^1 - g\Gamma_{--}^\alpha \tilde{k}_\alpha^1(\tilde{\Phi}) \quad . \quad (5.48b)$$

Agora, se os supercampos escalares auxiliares holomórfico e anti-holomórfico são escolhidos tais que

$$\delta\xi(\Phi) \equiv \Lambda^\alpha F_\alpha(\Phi) \quad ; \quad \delta\tilde{\xi}(\tilde{\Phi}) \equiv \Lambda^\alpha \tilde{F}_\alpha(\tilde{\Phi}) \quad , \quad (5.49a)$$

o que equivale a

$$(\partial_1 \xi) k_\alpha^1 = F_\alpha(\Phi) \quad ; \quad (\tilde{\partial}_1 \tilde{\xi}) \tilde{k}_\alpha^1 = \tilde{F}_\alpha(\tilde{\Phi}) \quad , \quad (5.49b)$$

temos, então, que a combinação $[K(\Phi, \Phi) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})]$ torna-se um invariante e o Lagrangeano (5.47) é simétrico sob transformações de isometria locais [88].

Neste ponto, vale a pena comentar um pouco sobre os supercampos auxiliares ξ e $\bar{\xi}$. Sua introdução no Lagrangeano é bastante relevante para assegurar a invariância local, conforme vimos acima. Isto não é surpreendente, uma vez que um mecanismo similar ocorre no *gauging* dos modelos- σ com supersimetria $N=1$ em 4 dimensões. Contudo, ao contrário do que ocorre no caso de modelos- σ com supersimetria-(2,0), os supercampos auxiliares desaparecem da ação $N=1 - D=4$. A razão básica para a persistência destes supercampos aqui segue-se da presença das derivadas espaço-temporais $\partial_{--}\phi^1$ e $\partial_{--}\bar{\phi}^1$ na ação globalmente simétrica. Embora a geometria do espaço alvo nos casos $N = 1 - D = 4$ e $(2,0) - D = 2$ seja a mesma, a ação no primeiro envolve apenas o potencial de Kähler, enquanto que no último a ação apresenta derivadas espaço-temporais explícitas.

Portanto, além da função escalar M_α discutida nas referências [2-5], os supercampos auxiliares (fixados não-univocamente a partir de suas transformações de gauge) permanecem na ação (2,0) e nenhum argumento de quiralidade pode fazê-los desaparecer como acontece no caso $N=1 - D=4$. No entanto, uma vez que o papel de ξ e $\bar{\xi}$ é adicionar partes holomórfica e anti-holomórfica ao potencial K , a métrica do espaço alvo não sente a presença deles e então podemos dizer que diferentes escolhas de ξ e $\bar{\xi}$ (os quais são apenas artefatos do superespaço) correspondem à mesma ação do modelo- σ em campos componentes.

5.2. - MODELOS- σ (2,0) COM TORÇÃO INVARIANTES SOB ISOMETRIAS LOCAIS

O *gauging* do modelo- σ (2,0) com torção será desenvolvido aqui no formalismo do superespaço (2,0) e segue, em linhas gerais, o procedimento levado a efeito na última parte da seção anterior. Desta forma, alguns passos repetitivos serão evitados e nos

concentraremos efetivamente na análise das simetrias e das condições que possibilitam o *gauging*, uma vez que, como ficou claro na seção anterior, simetrias " extras " da ação são essenciais no processo.

Recordemos aqui a ação e as simetrias " extras " da mesma que foram apresentadas na seção 4.3 do Capítulo IV.

$$S_{\sigma} = i \int d^2x \, d\theta_+ \, d\bar{\theta}_+ \left[K_1(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_{--} \Phi^1 - K_{-1}(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_{--} \bar{\Phi}^1 \right] \quad , \quad (5.50)$$

com as simetrias

$$\delta K_1 = i \partial_1 M(\Phi, \bar{\Phi}) \quad \text{com } M \text{ real} \quad (5.51)$$

$$\delta K_1 = F_1(\Phi) \quad ; \quad \delta K_{-1} = \bar{F}_{-1}(\bar{\Phi}) \quad \text{com } \partial_{-j} F_1 = \partial_{-j} \bar{F}_{-1} = 0 \quad . \quad (5.52)$$

Devido à óbvia semelhança com a transformação de Kähler, a menos do fato de que esta é definida para escalares, enquanto que (5.52) é definida para vetores, rotulemos esta última de transformação vetorial do tipo Kähler. Explicitando os parâmetros, escrevemos:

$$\begin{aligned} \delta K_1 &= \lambda F_{\alpha 1}^{\alpha}(\Phi) & ; & & \delta K_{-1} &= \lambda \bar{F}_{-1}^{\alpha}(\bar{\Phi}) \\ \delta K_1 &= i \lambda_{\alpha} \partial_1 M^{\alpha}(\Phi, \bar{\Phi}) & ; & & \delta K_{-1} &= - i \lambda_{\alpha} \partial_{-1} M^{\alpha}(\Phi, \bar{\Phi}) \quad . \end{aligned}$$

Nosso procedimento no caso com torção terá algumas diferenças em relação ao caso da variedade de Kähler, basicamente devido ao fato de estarmos trabalhando agora com prepotenciais vetoriais, ao invés de derivadas de funções escalares. Até como consequência disso, como vemos na equação (5.52), existem duas transformações vetoriais do tipo Kähler, uma para o vetor K_1 e outra para o vetor K_{-1} . Este fato também leva a mudanças no processo de *gauging* em relação ao caso sem torção.

Lembrando que a métrica pode ser construída a partir dos chamados prepotenciais vetoriais K_1 e K_{-1} na forma

$$g_{i\bar{j}} = \frac{1}{2} \left(\partial_i K_{-j}(\Phi, \bar{\Phi}) + \partial_{\bar{j}} K_i(\Phi, \bar{\Phi}) \right) \quad , \quad (5.53)$$

observamos que as transformações (5.51) e (5.52) são também uma invariância da métrica.

Desta forma, repetindo a argumentação usada no caso da variedade de Kähler (Ver eq. (5.11)), podemos considerar que a variação de isometria dos prepotenciais vetoriais deve ser no máximo igual a uma transformação vetorial do tipo Kähler. De modo que podemos escrever a igualdade

$$\delta K_1 = K_1(\Phi; \bar{\Phi}') - K_1(\Phi, \bar{\Phi}) = \lambda^\alpha \left(k_\alpha^j K_{1,j} + k_\alpha^{\bar{j}} K_{1,\bar{j}} \right) = \lambda^\alpha F_{1\alpha}(\Phi) \quad , \quad (5.54)$$

e sua conjugada

$$\delta K_{\bar{1}} = K_{\bar{1}}(\Phi; \bar{\Phi}') - K_{\bar{1}}(\Phi, \bar{\Phi}) = \lambda^\alpha \left(k_\alpha^j K_{\bar{1},j} + k_\alpha^{\bar{j}} K_{\bar{1},\bar{j}} \right) = \lambda^\alpha \bar{F}_{\bar{1}\alpha}(\bar{\Phi}) \quad . \quad (5.55)$$

Considerando a dependência dos prepotenciais nos supercampos Φ e $\bar{\Phi}$, e levando em conta ainda a simetria da ação e da métrica (5.51), as equações acima devem ser modificadas para

$$\delta K_1 = \lambda^\alpha \left(k_\alpha^j K_{1,j} + k_\alpha^{\bar{j}} K_{1,\bar{j}} \right) = \lambda^\alpha F_{1\alpha}(\Phi) + i\lambda^\alpha \partial_{\bar{1}} M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad , \quad (5.56)$$

$$\delta K_{\bar{1}} = \lambda^\alpha \left(k_\alpha^j K_{\bar{1},j} + k_\alpha^{\bar{j}} K_{\bar{1},\bar{j}} \right) = \lambda^\alpha \bar{F}_{\bar{1}\alpha}(\bar{\Phi}) - i\lambda^\alpha \partial_{\bar{1}} M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad . \quad (5.57)$$

De forma idêntica ao caso sem torção, notamos que a prescrição dada pelas equações (5.37) e (5.39) não é suficiente para tornar a ação (5.50) invariante de gauge, uma vez que as simetrias (5.51) e (5.52) não são elas mesmas invariantes segundo esta prescrição.

Portanto, seguindo alguns passos similares ao caso da variedade de Kähler, passamos logo para a definição de uma Lagrangeana que envolve dois supercampos auxiliares $\xi_1(\Phi)$ e $\bar{\xi}_{\bar{1}}(\bar{\Phi})$, a saber

$$\mathcal{L}_\xi = [K_1(\Phi, \bar{\Phi}) - \xi_1(\Phi)] \partial_{--} \Phi^{\bar{1}} - [K_{\bar{1}}(\Phi, \bar{\Phi}) - \bar{\xi}_{\bar{1}}(\bar{\Phi})] \partial_{--} \bar{\Phi}^{\bar{1}} \quad . \quad (5.58)$$

Estes supercampos auxiliares são tais que

$$\delta \xi_1(\Phi) \equiv \lambda^\alpha F_{1\alpha}(\Phi) \quad ; \quad \delta \bar{\xi}_1(\bar{\Phi}) \equiv \lambda^\alpha \bar{F}_{1\alpha}(\bar{\Phi}) \quad . \quad (5.59)$$

Uma vez que podemos escrever as variações de ξ e $\bar{\xi}$ como

$$\delta \xi_1(\Phi) \equiv \lambda^\alpha (\partial_j \xi_1) k_\alpha^j \quad ; \quad \delta \bar{\xi}_1(\bar{\Phi}) \equiv \lambda^\alpha (\partial_j \bar{\xi}_1) k_\alpha^{\bar{j}} \quad , \quad (5.60)$$

temos então que

$$F_{1\alpha}(\Phi) = (\partial_j \xi_1) k_\alpha^j \quad ; \quad \bar{F}_{1\alpha}(\bar{\Phi}) = (\partial_j \bar{\xi}_1) k_\alpha^{\bar{j}} \quad . \quad (5.61)$$

Usando (5.56), (5.57) , (5.59) e (5.61), obtemos que a variação da Lagrangeana (5.58) é dada por

$$\delta \mathcal{L}_\xi = \lambda^\alpha \left[\left(\mathcal{L}_\alpha K_1 - \mathcal{L}_\alpha \xi_1 \right) \partial_{--} \Phi^1 - \left(\mathcal{L}_\alpha K_{\bar{1}} - \mathcal{L}_\alpha \bar{\xi}_{\bar{1}} \right) \partial_{--} \bar{\Phi}^{\bar{1}} \right] \quad , \quad (5.62)$$

onde as derivadas de Lie dos vetores K_1 e ξ_1 , são definidas como

$$\mathcal{L}_\alpha K_1(\Phi, \bar{\Phi}) \equiv K_{1,j} k_\alpha^j + K_{1,\bar{j}} k_\alpha^{\bar{j}} + K_j \partial_1 k_\alpha^j \quad , \quad (5.63)$$

$$\mathcal{L}_\alpha \xi_1(\Phi) \equiv \xi_{1,j} k_\alpha^j + \xi_j \partial_1 k_\alpha^j \quad . \quad (5.64)$$

Portanto, a condição para invariância da *Lagrangeana* sob transformações globais consiste em que

$$\mathcal{L}_\alpha (K_1 - \xi_1) = 0 \quad ; \quad \mathcal{L}_\alpha (K_{\bar{1}} - \bar{\xi}_{\bar{1}}) = 0 \quad . \quad (5.65)$$

Novamente, formulamos a prescrição de *gauging* fazendo as substituições $\bar{\Phi} \rightarrow \tilde{\Phi}$ e $\bar{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}$ de tal forma que obtemos a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L}_\xi = [K_1(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi_1(\Phi)] \nabla_{--} \Phi^1 - [\tilde{K}_{\bar{1}}(\Phi, \tilde{\Phi}) - \tilde{\xi}_{\bar{1}}(\tilde{\Phi})] \nabla_{--} \tilde{\Phi}^{\bar{1}} \quad , \quad (5.66)$$

onde

$$\nabla_{--} \Phi^1 \equiv \partial_{--} \Phi^1 - g \Gamma_{--}^\alpha k_\alpha^1(\Phi) \quad (5.67a)$$

$$\nabla_{--} \tilde{\Phi}^1 \equiv \partial_{--} \tilde{\Phi}^1 - g \Gamma_{--}^\alpha \tilde{k}_\alpha^1(\tilde{\Phi}) \quad (5.67b)$$

Na equação (5.66), $\tilde{K}_1(\Phi, \tilde{\Phi})$ indica o complexo conjugado de $K_1(\Phi, \Phi)$.

A versão local das equações (5.56) e (5.57), considerando nossa prescrição, pode ser escrita como

$$\delta K_1 = \Lambda^\alpha \left(k_\alpha^j K_{1,j} + \bar{k}_\alpha^j K_{1,\bar{j}} \right) = \Lambda^\alpha \left(F_{1\alpha}(\Phi) + i \delta_{1\alpha} M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \right) \quad (5.68)$$

$$\delta \tilde{K}_1 = \Lambda^\alpha \left(k_\alpha^j \tilde{K}_{1,j} + \tilde{k}_\alpha^j \tilde{K}_{1,\bar{j}} \right) = \Lambda^\alpha \left(\tilde{F}_{1\alpha}(\tilde{\Phi}) - i \tilde{\delta}_{1\alpha} M_\alpha(\Phi, \tilde{\Phi}) \right) \quad (5.69)$$

Considerando que as derivadas covariantes (5.67a e b) transformam-se como os supercampos Φ e $\tilde{\Phi}$, e tendo em vista que

$$\delta \xi_1(\Phi) \equiv \Lambda^\alpha F_{1\alpha}(\Phi) \quad ; \quad \delta \tilde{\xi}_1(\tilde{\Phi}) \equiv \Lambda^\alpha \tilde{F}_{1\alpha}(\tilde{\Phi}) \quad (5.70)$$

a variação da Lagrangeana (5.66) é dada por

$$\delta \mathcal{L}_\xi = \Lambda^\alpha \left[\left(\mathcal{L}_\alpha K_1 - \mathcal{L}_\alpha \xi_1 \right) \nabla_{--} \Phi^1 - \left(\mathcal{L}_\alpha \tilde{K}_1 - \mathcal{L}_\alpha \tilde{\xi}_1 \right) \nabla_{--} \tilde{\Phi}^1 \right] \quad (5.71)$$

Portanto a condição para a invariância local da Lagrangeana (5.66) [89] é que existam vetores R_1 e \tilde{R}_1 , tais que

$$\mathcal{L}_\alpha R_1 \equiv \mathcal{L}_\alpha (K_1 - \xi_1) = 0 \quad ; \quad \mathcal{L}_\alpha \tilde{R}_1 \equiv \mathcal{L}_\alpha (\tilde{K}_1 - \tilde{\xi}_1) = 0 \quad (5.72)$$

Por fim, podemos recordar o comentário feito no final de seção 5.1 acerca dos supercampos auxiliares, assinalando que no caso da variedade com torção, o *gauging* de um subgrupo de G requer a introdução de supercampos auxiliares, os quais são vetores da variedade alvo. No entanto, uma vez que eles são holomórficos ou anti-holomórficos, a métrica definida a partir dos vetores R_1 é a mesma obtida a partir dos vetores K_1 . Desta forma diferentes escolhas de ξ correspondem à mesma ação do modelo- σ em termos dos campos componentes.

CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho, foram amplamente discutidos modelos bidimensionais com supersimetria-(2,0). O nosso estudo dividiu-se basicamente em duas linhas. Na primeira parte, construímos em detalhe os modelos de matéria e de gauge, analisando suas propriedades quânticas, enquanto que, na segunda parte, dedicamo-nos ao estudo dos modelos- σ não-lineares (2,0)-supersimétricos.

No tocante ao modelo construído com supercampos de matéria, usando um método modificado em relação àquele apresentado na ref. [63], foram obtidos os superpropagadores para os supercampos de matéria massivos. Realizamos um estudo do comportamento ultra-violeta dos supergráficos, através da contagem de potências no superespaço, listando aqueles potencialmente divergentes e discutindo sobre a renormalizabilidade do modelo. Apresentamos também a versão-(2,0) do teorema de não-renormalização que estabelece que o setor de matéria não requer renormalizações independentes para as massas e as constantes de acoplamento.

Ao lado dos formalismos usuais para a introdução da teoria de Yang-Mills com supersimetria-(2,0), mostramos o formalismo de covariantização da ação de matéria com o relaxamento de alguns vínculos. Tal procedimento leva ao aparecimento de um potencial de gauge extra, embora este não necessariamente se acople com o setor de matéria usual. Verifica-se, na verdade, que este acoplamento ocorre apenas no caso em que os supercampos de matéria definem um modelo- σ não-linear [62].

Foram quantizados os supermultipletos de gauge-(2,0) através do formalismo de integrais de trajetória, definidas no

superespaço-(2,0). Em particular, utilizamos o método de Faddeev-Popov para obter o termo de superfantasma e uma condição de fixação de gauge. Estabelecemos ainda a simetria de BRST para o modelo no superespaço e determinamos os superpropagadores de gauge.

O modelo de supercampos de gauge Abelianos (2,0)-supersimétrico pode ser visto como a versão-(2,0) do conhecido modelo de Schwinger vetorial. É interessante, então, analisar algumas propriedades quânticas do modelo supersimétrico e compará-las com o modelo ordinário. Em particular, dois aspectos são abordados neste trabalho: a finitude e a geração dinâmica de massa.

Após análise do comportamento ultra-violeta do modelo de gauge, através da contagem de potências, determinamos os supergráficos potencialmente divergentes, e mostramos que a teoria é finita para supergráficos com mais de 1-loop, o que confirma o caráter de modelo super-renormalizável, sugerido pelo fato da constante de acoplamento ter dimensão de massa. Os supergráficos que são divergentes a 1-loop foram calculados explicitamente, e concluímos que todas as divergências se cancelam, confirmando a finitude esperada para este modelo, especialmente considerando que sua versão ordinária já é finita. Por meio do cálculo destes supergráficos, mostramos ainda a geração dinâmica de massa para os supercampos de gauge, fenômeno que ocorre para a versão-(1,0) do modelo de Schwinger [69], mas não para a versão $N=1$ (ou (1,1)) [71].

Estes estudos de propriedades quânticas de modelos de gauge com supersimetria-(2,0) podem adquirir certa relevância no contexto dos modelos de supercordas, no que se refere à dinâmica dos campos de gauge na superfície de universo. A introdução de campos de gauge como graus de liberdade dinâmicos da superfície de universo fornece um mecanismo para se obter modelos de cordas com simetria de gauge espontaneamente quebrada. Desta forma, a geração de massa para o multipletto de gauge-(2,0) pode orientar a escolha dos grupos de gauge remanescentes após a compactificação das supercordas [29].

Vale salientar ainda que, no contexto comentado acima, a simetria de gauge é, em geral, anômala, de modo que o estudo das

anomalias, particularmente no superespaço-(2,0), pode ter aplicação neste quadro.

O estudo de modelos- σ não-lineares diretamente no superespaço-(2,0), até pouco tempo atrás, carecia de uma atenção maior, especialmente se considerarmos que no modelo de supercordas heteróticas, o modelo- σ presente na superfície de universo possui supersimetria-(2,0), sendo seu espaço alvo uma variedade de Kähler [18].

Neste trabalho, apresentamos um estudo sistemático do modelo- σ no superespaço-(2,0) e de sua geometria, especialmente para o caso de uma variedade com torção, ainda pouco estudado na literatura. Como ponto importante, trabalhando com uma variedade de Kähler (sem torção), promovemos as isometrias a simetrias locais, no contexto de campos componentes, seguindo o método delineado por Bagger e Witten [34]. No superespaço-(2,0), estendemos o método de Hull e outros [37], para realizar o *gauging* das isometrias dos modelos- σ definidos em variedades de Kähler e em variedades com torção. Conseqüentemente, obtivemos o acoplamento dos supermultipletos de Yang-Mills aos supercampos-(2,0) do modelo- σ .

Um modelo- σ não-linear bidimensional pode definir uma teoria de campos conforme se a geometria do espaço-alvo satisfaz determinadas condições [30,33,90]. Em particular, modelos- σ supersimétricos definidos em espaços de Kähler *Ricci-flat* ou em variedades do tipo hiper-Kähler constituem uma importante classe de modelos conformes. Em princípio, o *gauging* do modelo efetuado neste trabalho não leva a nenhum novo modelo conforme, segundo foi discutido no final das seções 5.1 e 5.2.

Recentemente, o trabalho de C. M. Hull [91], que realiza o *gauging* da chamada álgebra-W construída por Zamolodchikov [92] como uma extensão da álgebra de Virasoro, abriu caminho para uma nova teoria de cordas baseada na álgebra-W. Este novo modelo parece ser bastante promissor, especialmente para uma melhor descrição da supergravidade em duas dimensões [92,93].

Neste contexto, nossos resultados para acoplar os campos de gauge aos campos do modelo- σ , através do *gauging* das isometrias podem ter uma certa relevância, especialmente se efetuarmos este nosso estudo considerando a supersimetria-(2,0) como uma simetria

local. O estudo da supergravidade-(2,0) na superfície de universo, considerando principalmente o papel de campos de gauge advindos do *gauging* de isometrias, pode representar uma extensão bastante interessante desta tese. Em particular, se considerarmos a supergravidade no contexto das álgebras-W.

Por outro lado, pretendemos posteriormente construir o modelo- σ com supersimetria-(4,0) e realizar o *gauging* de suas isometrias no superespaço-(4,0).

Um outro projeto a ser encetado, baseado nesta tese, é a construção da versão-(2,0) do modelo de Schwinger *quiral*. Neste quadro, verificando a possibilidade de reproduzir no superespaço-(2,0), interessantes propriedades tais como geração de massa, anomalia quiral e, em particular, a relação desta última com o esquema de regularização.

Provou-se recentemente [94] que o modelo- σ (2,0) constituído apenas de supercampos escalares não apresenta geração dinâmica de massa. No entanto, resta ainda como um ponto interessante a análise de uma possível geração dinâmica de massa no modelo- σ (2,0) acoplado com supercampos de gauge.

O estudo das propriedades destes modelos- σ não-lineares invariantes de gauge, no que se refere às transformações conformes, (especialmente no sentido da análise da função- β), constitui-se também num problema a ser investigado, visto que vínculos não-triviais sobre o *background* de Yang-Mills devem emergir da imposição de invariância conforme.

APÊNDICE

O objetivo deste apêndice é apresentar brevemente os espinores do espaço-tempo bidimensional e as nossas convenções para as coordenadas do cone-de-luz.

Sabe-se, do teorema fundamental das Álgebras de Clifford [95], que um espinor genérico em D dimensões espaço-temporais possui $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ componentes (onde $\lfloor D/2 \rfloor$ denota a parte inteira de $D/2$). Estes espinores são chamados espinores de Dirac. No caso de um espaço de dimensão par, podemos definir projetores, com os quais escrevemos qualquer espinor como a soma de outros dois, cujas $2^{(D/2)-1}$ componentes são independentes. Vamos denotá-los por ψ_+ e ψ_- . Estes espinores são conhecidos como espinores de Weyl ou quirais. Segundo a convenção que adotamos, tais espinores são chamados *left-handed* e *right-handed* respectivamente, conforme sejam auto-estado de um ou outro projetor. Em outras palavras, possuem uma quiralidade bem definida.

Consideremos um espinor de Dirac que obedece à condição de Majorana, ou seja,

$$\psi = C \bar{\psi}^T, \quad (A.1)$$

onde C é uma matriz definidade tal modo que

$$C^\dagger C = 1 \quad ; \quad C \gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu, \quad (A.2)$$

(γ_μ representa as matrizes de Dirac).

O espinor que obedece à condição de auto-conjugação (A.1) é chamado de espinor de Majorana.

Espinores de Weyl que satisfazem à condição de Majorana só podem ser definidos em dimensões do tipo $D = 8n + 2$ [96], e são denominados espinores de Majorana-Weyl.

Consideremos, agora, a dimensão que nos interessa neste trabalho, ou seja $D = 2$, onde é possível definir espinores de Majorana-Weyl. Aqui, os espinores de Dirac e Weyl possuem respectivamente duas e uma componentes. A representação das matrizes- γ escolhida é a chamada representação de Majorana-Weyl, para a qual

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\gamma_3 \equiv \gamma^0 \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Desta forma, os espinores de Weyl transformam-se segundo o grupo de Lorentz, $SO(1,1)$, como

$$\psi_{\pm}' = e^{\pm \alpha/2} \psi_{\pm} \quad , \quad (\text{A.5})$$

onde α é o parâmetro que caracteriza uma dada transformação de $SO(1,1)$.

Na representação (A.3), os espinores de Majorana são tais que $\psi = \psi^*$ e, portanto, suas componentes são reais.

As coordenadas de cone-de-luz são definidas como:

$$x^{++} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (x^0 + x^1) \quad ; \quad x^{--} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (x^0 - x^1) \quad (\text{A.6})$$

Uma vez que a nossa métrica é representada por $\eta_{\mu\nu} = \text{Diag}(-1, 1)$, obtemos que

$$ds^2 = - 2 dx^{++} dx^{--} \quad (\text{A.7})$$

e, conseqüentemente, a métrica pode ser escrita na forma

$$\eta_{++,+} = \eta_{--,--} = 0 \quad ; \quad \eta_{+,-} = \eta_{-,+} = -1 \quad (\text{A.8})$$

Pode-se mostrar que as componentes A^{++} e A^{--} de um vetor A_{μ} transformam-se sob $SO(1,1)$ segundo as relações:

$$(A^{--})' = e^{\pm\alpha} (A^{--}) \quad (\text{A.9})$$

$$(A^{++})' = e^{\mp\alpha} (A^{++})$$

Desta forma, os sinais +/- como índices possuem dois significados. Por um lado, quando o mesmo sinal aparece em número par, denota uma quantidade bosônica e, quando em número ímpar (tipicamente um só índice), denota uma quantidade fermiônica. Por outro lado, estes sinais indicam as propriedades de transformação sob o grupo de Lorentz das quantidades envolvidas. Em outras palavras, um campo sem índices deve ser um escalar, um campo com um índice + (-) deve ser um espinor *left-handed* (*right-handed*), enquanto que um campo com um par de índices iguais tem propriedades vetoriais (a rigor, propriedades de componentes de cone-de-luz de um campo vetorial).

REFERÊNCIAS

- [1] M. Sakamoto, Phys. Lett. **B151** (1985) 115
- [2] E. Witten, Comm. Math. Phys. **92** (1984) 455
- [3] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B75** (1974) 461
- [4] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B59** (1975) 79
- [5] A. A. Belavin, A. M. Polyakov e A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333
- [6] R. Jackiw e R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1219;
L. D. Fadeev e S. L. Shatashvili, Phys. Lett. **B167** (1986) 225;
K. D. Rothe, Nucl. Phys. **B269** (1986) 269
- [7] J. Wess e B. Zumino, Phys. Lett. **B37** (1971) 95
- [8] K. Harada, H. Kubota e I. Tsutsui, Phys. Lett. **B173** (1986) 77;
K. Harada e I. Tsutsui, Phys. Lett. **B183** (1987) 311
- [9] J. Schwinger, Phys. Rev. **128** (1962) 2425
- [10] A. Diaz, J. A. Helayël-Neto e A. W. Smith, Phys. Lett. **B200** (1988) 515
- [11] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B59** (1975) 76;
E. Brézin e J. Zinn-Justin, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 691;
W Bardeen, B. Lee e R. Schrock, Phys. Rev. **D14** (1976) 985
- [12] D. Friedan, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1057
- [13] G. Moore e P. Nelson, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 83;
C. M. Hull e E. Witten, Phys. Lett. **B100** (1985) 398
- [14] P. Ramond, Phys. Rev. **D3** (1971) 2415
- [15] J. L. Gervais e B. Sakita, Nucl. Phys. **B34** (1971) 632;
L. Brink, P. Di Vecchia e P. Howe, Phys. Lett. **B65** (1976) 471
- [16] M. Green e J. Schwarz, Phys. Lett. **B149** (1984) 117
- [17] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 502
- [18] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger e E. Witten, Nucl.

- Phys. B258 (1985) 46
- [19] C. M. Hull e E. Witten, Phys. Lett. B160 (1985) 398
- [20] M. Evans e B. A. Ovrut, Phys. Lett. B171 (1986) 177
- [21] D. Z. Freedman e P. K. Townsend, Nucl. Phys. B177 (1981) 282
- [22] M. Dine e N. Seiberg, Phys. Lett. B180 (1986) 364
- [23] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky e E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 1 (1984) 469;
E. Sokatchev e K. Stelle, Class. Quantum Grav. 4 (1987) 501
- [24] C. M. Hull, " *Ultra-Violet Finiteness of Supersymmetric Non-Linear Sigma Models* ", Preprint do Institute for Advanced Studies - Princeton - Janeiro de 1985
- [25] A. M. Polyakov e P. B. Wiegmann, Phys. Lett. B131 (1983) 121;
P. DiVecchia e P. Rossi, Phys. Lett. B140 (1984) 344;
P. Goddard, W. Nahm e D. Olive, Phys. Lett. B140 (1985) 111;
I. Antoniadis e A. Bachas, Nucl. Phys. B278 (1986) 343
- [26] A. N. Redlich e H. J. Schnitzer, Phys. Lett. B167 (1986) 315;
A. Ceresole, A. Lerda, P. Pizzochero e P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B198 (1987) 34
- [27] E. T. Tomboulis, Phys. Lett. B198 (1987) 165
- [28] J. Bagger, D. Nemeschansky, N. Seiberg e S. Yankielowitz, Nucl. Phys. B289 (1987) 53
- [29] M. Porrati e E. T. Tomboulis, Nucl. Phys. B315 (1989) 615;
J. Quackenbush, Phys. Lett. B234 (1990) 285
- [30] A. Sen, Phys. Rev. D32 (1985) 2162;
C. M. Hull, Nucl. Phys. B260 (1985) 182;
E. A. Ivanov, S. O. Krivonos e V. M. Leviant, Phys. Lett. B215 (1988) 689
- [31] C. Lovelace, Phys. Lett. B135 (1984) 75;
C. G. Callan *et al.*, Nucl. Phys. B262 (1985) 593;
E. Fradkin e A. Tseytlin, Nucl. Phys. B261 (1985) 1
- [32] E. Bergshoeff, E. Sezgin e H. Nishino, Phys. Lett. B166 (1986) 141
- [33] C. M. Hull e B. Spence, Phys. Lett. B232 (1989) 204
- [34] J. Bagger e E. Witten, Phys. Lett. B118 (1982) 103
- [35] J. Bagger, Nucl. Phys. B211 (1983) 302;
R. Grimm, Phys. Lett. B242 (1990) 64
- [36] C. M. Hull, A. Karlhede, U. Lindström e M. Roček, Nucl. Phys.

B266 (1986) 1

- [37] Y. Achiman, S. Ayoama e J. W. van Holten, Nucl. Phys. B258 (1985) 179
- [38] A. C. W. Kotcheff e G. M. Shore, Nucl. Phys. B336 (1990) 245;
A. C. W. Kotcheff e G. M. Shore, Nucl. Phys. B333 (1990) 701;
G. M. Shore, Nucl. Phys. B334 (1990) 172
- [39] R. D'Auria, S. Ferrara e P. Frè, " *Special and Quaternionic Isometries: General Couplings in N=2 Supergravity and the Scalar Potencial* ", PREPRINT - Università di Padova - DFPD/90/TH/35;
R. D'Auria, " *Special Kähler Geometry, Calabi-Yau Moduli Spaces and the Gauging of N=2 Supergravity Isometries* ",
PREPRINT - Università di Padova - DFPD/90/TH/38
- [40] I. Jack, D. R. T. Jones, N. Mohammedi e H. Osborn, Nucl. Phys. B332 (1990) 359
- [41] H. Miyazawa, Phys. Rev. 170 (1968) 1586
- [42] S. Coleman e J. Mandula, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [43] M. F. Sohnius, Phys. Reports 128 (1985) 39
- [44] M. Gerstenhaber, Ann. Math. 78 (1963) 267;
J. W. Milnor e J. C. Moore, Ann. Math. 81 (1965) 211
- [45] I. A. Golfand e E. P. Likhtman, JETP Lett. 13 (1971) 323
- [46] D. V. Volkov e V. P. Akulov, Phys. Lett. B46 (1973) 109
- [47] A. Neveu e J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B31 (1971) 86
- [48] J. Wess e B. Zumino, Nucl. Phys. B70 (1974) 39
- [49] J. Wess e B. Zumino, Phys. Lett. B49 (1974) 52
- [50] S. Ferrara e B. Zumino, Nucl. Phys. B79 (1974) 413
- [51] E. C. Poggio e H. N. Pendleton, Phys. Lett. B72 (1977) 200;
D. R. T. Jones, Phys. Lett. B72 (1977) 199
- [52] M. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 1063;
W. Caswell e D. Zanon, Phys. Lett. B100 (1980) 152;
M. F. Sohnius e P. C. West, Phys. Lett. 100B (1981) 245
- [53] M. B. Green e J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B181 (1981) 502;
M. B. Green e J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B198 (1982) 252;
M. B. Green e J. H. Schwarz, Phys. Lett. B109 (1982) 444;
M. B. Green, J. H. Schwarz e L. Brink, Nucl. Phys. B198 (1982) 474

- [54] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec e R. Rohm, Nucl. Phys. B256 (1985) 253;
D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec e R. Rohm, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 502;
C. G. Callan, D. Friedan, E. Martinec e M. Perry, Nucl. Phys. B262 (1985) 593;
E. Fradkin e A. Tseytlin, Nucl. Phys. B261 (1985) 1
- [55] R. Brooks, F. Muhammad e S. J. Gates, Nucl. Phys. B268 (1986) 599
- [56] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, *SUPERSPACE or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Benjamin/Cummings Publishing Company (1983)
- [57] E. Gildener, Phys. Rev. D14 (1976) 1667
- [58] E. Gildener e S. Weinberg, Phys. Rev. D15 (1976) 3333;
G. 't Hooft, in *Proc. of the Advanced Study Institute, Cargèse, 1979*, Plenum Press (New York, 1980);
T. P. Cheng e L. -F. Li, in *Proc. of the 1980 Guangzhou Conf. on Theor. Part. Physics*, Beijing, Science Press.
- [59] G. Vello e D. Zwanziger, Phys. Rev. 186 (1969) 1337
- [60] P. Fayet e J. Iliopoulos, Phys. Lett. B51 (1974) 461
- [61] C. A. S. Almeida e R. M. Doria, " *Information on a Gauge Principle from a (2,0)-Supersymmetric Model* " , aceito para publicação na Rev. Bras. Fis.
- [62] C. A. S. Almeida e R. M. Doria, *A Less-Constrained (2,0) Super-Yang-Mills Theory: The Coupling to non-linear σ -Models*, submetido para publicação em Mod. Phys. Lett. A
- [63] R. Brooks e S. J. Gates, Phys. Lett. B184 (1987) 217
- [64] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, Commun. Math. Phys. 42 (1975) 127
- [65] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 98;
I. V. Tyutin, Internal Report FIAN 39 (1975)
- [66] J. Schwinger, Phys. Rev. 125 (1962) 397
- [67] W. Siegel, Phys. Lett. B84 (1979) 193;
W. Siegel, Phys. Lett. B94 (1980) 37
- [68] C. A. S. Almeida, J. A. Helayël-Neto e M. W. de Oliveira, *Dynamical Mass Generation in the (2,0)-Supersymmetric Vector Schwinger Model*, submetido para publicação em Mod.

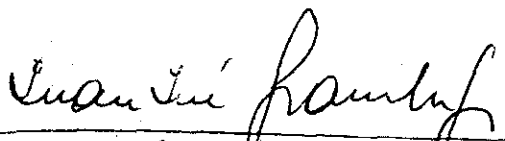
- Phys. Lett. **A**
- [69] C. A. S. Almeida, M. A. C. Kneipp e M. W. de Oliveira, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 1443
- [70] M. A. C. Kneipp, " Aspectos Quânticos de Modelos de Gauge Heteróticos com Supersimetria (1,0) " - Tese de Mestrado - (CBPF) (1989)
- [71] A. Smailagič e J. A. Helayël-Neto, Mod. Phys. Lett. **A2** (1987) 787
- [72] R. Jackiw, " *Anomalies and Topology* ", Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics - Yale University (Junho-Julho 1985)
- [73] A. Smailagič e R. Gamboa-Saravi, Phys. Lett. **B192** (1987) 145
- [74] C. Farina de Souza, " Utilização de Diferentes Técnicas de Regularização em Modelos Bidimensionais " - Tese de Doutorado (UFRJ) (1989)
- [75] O. Piguet e A. Rouet, Phys. Rev. **C76** (1981) 1
- [76] L. Bonora e P. Cotta-Ramusino, Comm. Math. Phys., **87** (1983) 589;
O. Piguet, " *Anomalies in Gauge and Supersymmetric Gauge Theories* " - (não-publicado)
- [77] R. Stora, *Algebraic Structure of Chiral Anomalies*, aulas ministradas no " GIFT Seminar " (1985), JACA, Espanha.
- [78] L. Álvarez-Gaumé e E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1983) 269
- [79] P. S. Howe e K. S. Stelle, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 1871
- [80] C. M. Hull - *Lectures on non-linear Sigma-Models and Strings in " Super Field Theory Proc. "* (1986) Vancouver Workshop - ed. G. Kunstatter and H. C. Lee (New York - Plenum)
- [81] S. Mukhi, " *Non-linear σ -Models, Scale invariance and String Theories: A Pedagogical Review* ", aulas ministradas no " Summer Workshop in High Energy Physics and Cosmology " ocorrido no ICTP, Trieste, 1986
- [82] T. L. Curtright e C. Zachos, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1799
- [83] F. Delduc, S. Kalitzin e E. Sokatchev, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1567
- [84] S. J. Gates, C. Hull e M. Roček, Nucl. Phys. **B248** (1984) 157

- [85] L. Álvarez-Gaumé and D. Z. Freedman, *Comm. Math. Phys.* 80 (1981) 443
- [86] P. Candelas - *Lectures on Complex Manifolds in " Superstrings and Grand Unification "* (1988) - ed. T. Pradhan (World Scientific)
- [87] K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Macmillan, New York, 1965.
- [88] C. A. S. Almeida, J. A. Helayël-Neto e A. W. Smith, *Mod. Phys. Lett.* A6 (1991) 1397
- [89] C. A. S. Almeida, J. A. Helayël-Neto e A. W. Smith, *The Superspace Gauging of (2,0) σ -Models in the Presence of Torsion*, submetido para publicação em *Phys. Lett. B*
- [90] A. Sen, *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 1846
- [91] C. M. Hull, *Phys. Lett.* B240 (1990) 110.
- [92] A. B. Zamolodchikov, *Theor. Mat. Fiz.* 65 (1985) 1205.
- [93] Rui-Ming Xu, *Phys. Lett.* B247 (1990) 295.
- [94] D. Spector, *Nucl. Phys.* B335 (1990) 421.
- [95] C. Chevalley, *The Algebraic Theory of spinors*, Columbia University Press, New York (1954)
- [96] F. Gliozzi, D. Olive e J. Scherk, *Nucl. Phys.* B112 (1977) 253

"PROPRIEDADES QUÂNTICAS E ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE
MODELOS COM SUPERSIMETRIA HETERÔTICA DO TIPO (2,0)"

CARLOS ALBERTO SANTOS DE ALMEIDA

Tese de Doutorado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



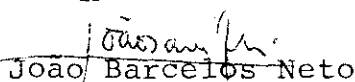
Juan José Giambiagi - Presidente



José Abdalla Helayél-Neto - Co-orientador



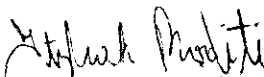
Abraham Hirszt Zimerman



João Barcelos Neto



Carlos Guido Bollini



Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, 02 de agosto de 1991