ALEXANDRE DA FONSECA VELASCO

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM E SUAS APLICAÇÕES PARA A QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA GRAVITAÇÃO

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF / CNPq

Rio de Janeiro, 1990

- Aos meus Pais.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Nelson Pinto Neto, por sua dedicação à minha orientação, e pelas pacientes e inúmeras revisões deste trabalho.

Aos colegas do CBPF, pela amizade e pela ajuda nos momentos difíceis do curso.

Aos professores do CBPF e da UFRJ, pelos conhecimentos que me transmitiram.

Aos funcionários da CFC, da biblioteca e do DRP, pela boa vontade com que sempre me atenderam.

A todos os funcionários do CBPF, por seu trabalho, silencioso, mas fundamental para a manutenção do ambiente agradável desta instituição.

A todos os parentes e amigos, pelos conselhos e pela força que me deram sempre.

Ao CNPq , pela bolsa concedida.

R E S U M O

Fez-se o formalismo de primeira ordem para a gravitação de Einstein, tomando-se como variáveis canônicas independentes, o determinante da métrica $h^{1/2}$, a parte da métrica que possui determinante unitário, o traço da curvatura extrínseca e a parte da curvatura extrínseca que possui traço nulo. Obteve-se tres representações para a equação de Wheeler-De Witt : uma delas resolve parcialmente o problema de ordenamento das variáveis canônicas; a segunda coincide com uma representação já conhecida da literatura; numa terceira, foi obtida a equação para a função de onda do universo na forma da equação de Schroedinger.

S U M Á R I O

LISTA DE FIGURAS

FIG. Pág.

CONVENÇÕES

- Dimensão do espaço-tempo: d .
- Índices gregos variam de 0 a d - 1.
- Índices latinos variam de 1 a d - 1.
- Métrica do espaço-tempo: $g^{\mu\nu}$.
- Métrica do espaço de d - 1 dimensões: h^{ij}.
- Derivada covariante no espaço-tempo:

$$V^{\mu}{}_{;\nu} = V^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} V^{\rho}$$

onde $V^{\mu}{}_{,\nu} = \dfrac{\partial V^{\mu}(x^{\rho})}{\partial x^{\nu}}$ e $\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} = g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\rho}{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu}{}_{,\rho} - g_{\nu\rho}{}_{,\lambda})$

- Derivada covariante no espaço de d - 1 dimensões:

$$V^{i}{}_{/j} = V^{i}{}_{,j} + \Gamma^{i}{}_{aj} V^{a}$$

onde $V^{i}{}_{,j} = \dfrac{\partial V^{i}(x^{b})}{\partial x^{j}}$ e $\Gamma^{i}{}_{aj} = h^{ib} (h_{ba}{}_{,j} + h_{bj}{}_{,a} - h_{aj}{}_{,b})$

- Tensor de curvatura no espaço-tempo:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\rho} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}$$

- Tensor de Ricci no espaço-tempo:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

- Escalar de curvatura no espaço-tempo:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

- Tensor de cuvatura nas hipersuperfícies do tipo espaço de d - 1 dimensões:

$$\tilde{R}^{i}{}_{jkl} = \Gamma^{i}{}_{jl,k} - \Gamma^{i}{}_{jk,l} + \Gamma^{i}{}_{ak} \Gamma^{a}{}_{jl} - \Gamma^{i}{}_{al} \Gamma^{a}{}_{jk}$$

- Tensor de Ricci nas hipersuperfícies do tipo espaço de $d - 1$ dimensões:

  $\tilde{R}_{ij} = \tilde{R}^{a}{}_{iaj}$

- Escalar de curvatura nas hipersuperfícies do tipo espaço de $d - 1$ dimensões:

  $\tilde{R} = h^{ij}\, \tilde{R}_{ij}$

- $g = \det g_{\mu\nu}$

- $h = \det h_{ij}$

- Assinatura da métrica: $(-, \underbrace{+, +, +, \ldots}_{d\,-\,1})$

- $\hbar = 1$

INTRODUÇÃO

As atuais observações cosmológicas indicam que o universo é homogêneo, isotrópico e está se expandindo[1]. Estas informações, associadas às equações de Einstein da gravitação[2], exigem que o universo, há cerca de 15 bilhões de anos atrás, estivesse todo concentrado num único ponto[3]. Nesse ponto, chamado de singularidade cósmica ou "big bang", nenhuma teoria física deve ser válida. Pensa-se no entanto, como o próprio Einstein sugeriu[4], que haveria um limite de validade da Teoria da Relatividade Geral (T.R.G). Fora deste limite os efeitos quânticos devidos à alta densidade de matéria e energia (da ordem de $10^{94} g/cm^3$), influenciariam a interação gravitacional. Isto exigiria a formulação de uma teoria quântica da gravitação. Tal teoria, que governaria a dinâmica do universo nos seus primórdios, poderia ditar o seu desvio da singularidade e talvez explicar algumas de suas atuais caracteristicas, tais quais as citadas no inicio deste parágrafo.

A formulação de uma teoria quântica da gravitação tem sido objeto de intensa pesquisa durante a segunda metade deste século, sem que se tenha chegado a um resultado satisfatório[5]; o que indica que alguns dos princípios básicos da mecânica quântica e/ou da T.R.G devam ser modificados de forma a torná-las compatíveis.

Existem duas linhas de pesquisa em gravitação quântica: uma delas, a dos físicos de partículas, que busca a construção de uma matriz S renormalizável que descreveria a interação dos grávitons com eles mesmos, e com outros campos de matéria presentes,[6] é conhecida como método covariante; a outra com ênfase na geometria, topologia e estrutura do espaço-tempo, é conhecida como método canônico. O principal problema da primeira linha é que a T.R.G não é renormalizável[7].

Nesse trabalho não se seguirá a linha do método covariante, mas sim, a do método canônico.

O método de quantização canônica consiste em colocar a teoria clássica na forma Hamiltoniana, identificando seus pares de variáveis canônicas (coordenadas e momenta canônicos) e calculando seus parênteses de Dirac (ou simplesmente parenteses de Poisson, no caso de sistemas regulares), em seguida associar estes pares de variáveis canônicas a operadores e seus parênteses de Dirac (Poisson) a comutadores destes operadores quânticos. A substituição destes operadores quânticos no lugar das variáveis canônicas na Hamiltoniana deve resultar na obtenção da equação de Schroedinger cujas soluções pertencem a um espaço de Hilbert no qual a interpretação probabilística da teoria quântica está baseada.

A característica especial da gravitação, e de qualquer teoria que seja invariante por reparametrização do tempo, é que elas não levam a uma Hamiltoniana, mas somente a vínculos Hamiltonianos[8]. Isto porém não tira todas as esperanças de se ver a teoria da gravitação quântizada. Deve-se ter em conta que os vínculos podem possuir importantes significados físicos. De fato, quando é feita a formulação Hamiltoniana para o campo eletromagnético, um dos vínculos obtidos é nada menos do que a bem conhecida lei de Gauss.

Diferentemente das teorias de Yang-Mills, onde os vínculos geram transformações canônicas que correspondem a rotações no espaço interno da teoria, segundo as quais os observáveis físicos permanecem inalterados, na T.R.G. o espaco "interno" corresponde ao próprio espaço-tempo e, sendo assim, as trasformações canônicas geradas pelos vínculos correspondem a movimentos no espaço-tempo físico, estando, portanto, interligados com a dinâmica da teoria[9,10].

Sendo a Hamiltoniana da T.R.G. nula, a equação de Schroedinger reduz-se à:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\,\Psi = 0 \qquad \text{(I.1)}$$

Vê-se portanto que Ψ é função só de h_{ij}, a métrica das hipersuperfícies tipo-espaço que folheam o espaço-tempo (ver apêndice B), e não do tempo t. Assim a dinâmica está reduzida às equações de vínculos:

$$\mathcal{H}_{\mu}\,\Psi = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

Uma das dificuldades com as equações de vínculos é saber o que fará o papel do tempo nelas. A equação de

Wheeler-De Witt[11,12], que provém do vínculo Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_0 \Psi = (G^{ijkl} \Pi_{ij} \Pi_{kl} + R) \Psi = 0 \qquad (I.3)$$

é uma equação diferencial funcional com relação às métricas h^{ij}

$$G^{ijkl} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial h^{ij} \partial h^{kl}} - R \Psi = 0 \qquad (I.4)$$

onde a expressão de G^{ijkl} é:

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} [h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk} - \frac{2}{(d-2)} h^{ij} h^{kl}] \qquad (I.5)$$

e Π_{ij} é o momento canônicamente conjugado à métrica h^{ij}.
Ao se estudar a assinatura de G^{ijkl} verifica-se que ela tem uma coordenada tipo tempo no espaço das métricas (superespaço)[11,12]. A procura das componentes da métrica que fazem o papel desta coordenada pode ser facilitada pelo estudo de novas representações da equação de Wheeler-De Witt.

Outro problema, relacionado à construção do espaço de Hilbert[8], é que, apesar de sua semelhança com a equação de Klein-Gordon, o que faz o papel de potencial na equação de Wheeler-De Witt é a curvatura intrínseca R (ver apêndice B), que é uma expressão muito complicada das métricas, além de não ser em geral positivamente definido. Quanto a este último problema, outras representações podem apontar para um outro caminho para a sua solução.

Resta lembrar que existe um problema de ordenamento na obtenção da equação (I.4) nas representações das métricas, já que, em (I.3), h^{ij} não comuta com Π_{kl} e, portanto, vários ordenamentos são possíveis.

Como se não bastassem todos os motivos acima expostos para a busca de novas representações, acrescenta-se ainda que elas podem trazer novas informações a respeito da evolução do universo. Por exemplo, Ψ pode ser um funcional da curvatura extrínseca k_{ij} como foi sugerido em [13]:

$$\Psi = \Psi(k_{ij}) \tag{I.6}$$

e fornercer, por intermédio da conexão de k_{ij} com a expansão do universo, informações a respeito da probabilidade do universo estar se expandindo ou se contraindo.

Nesta tese pretende-se aplicar o formalismo de primeira ordem para a gravitação, na busca de novas representações da equação de Wheeler-De Witt e na solução de seus problemas, acima relacionados. Ela está dividida da seguinte maneira:

No capítulo 1 é discutido o formalismo de primeira ordem através de dois exemplos: o campo eletromagnético[4] e o gravitacional. No primeiro deles, começa-se por apresentar o formalismo de segunda ordem, mostrando a equivalência entre os dois formalismos. O segundo é extraido de um trabalho de M. Gleiser, R. Holman e N. P. Neto[13], onde o formalismo de primeira ordem para a gravitação possibilita a obtenção de novas representações para a equação de Wheeler-De Witt.

No capítulo 2 começa a parte original deste trabalho. Através do formalismo de primeira ordem para a gravitação, tomando-se um número maior de variáveis canônicas independentes do que o tomado anteriormente, aplica-se o método de Dirac[9,10,14] e mostra-se que o formalismo Hamiltoniano alí obtido fornece as equações de Einstein. Depois constroi-se os parênteses de Dirac, transformando os vínculos de segunda classe em identidades fortes, e possibilitando a escolha de várias representações para o vínculo super-hamiltoniano.

No capítulo 3 é aplicado o método de quantização canônica obtendo-se outras representações para a equação de Wheeler-De Witt. Numa delas é resolvido parcialmente o problema de ordenamento das variáveis canônicas, outra é igual a obtida por [3], e, numa terceira, obtem-se a equação de Wheeler-De Witt na forma da equação de Schroedinger.

O apêndice A apresenta, de forma geral, o formalismo Hamiltoniano com vínculos. Ele foi desenvolvido para d = 4 , mas pode ser generalizado para d > 4 .

O apêndice B apresenta o formalismo ADM[8,15,16] para d = 4 , podendo também ser generalizado para d > 4.

CAPÍTULO 1

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM

Este capítulo começa com a apresentação do formalismo de segunda ordem para o campo eletromagnético, que é bastante bem conhecido. Na seção seguinte é feita uma apresentação mais breve do formalismo de primeira ordem para o mesmo campo, de modo que os dois tratamentos possam ser comparados. Por fim faz-se uma revisão do artigo de Gleiser, Holmam e Neto[13], onde é feito o formalismo de primeira ordem para o campo gravitacional, obtendo-se novas representações da equação de Wheeler-De Witt. A compreensão desta seção 2.C é o último passo necessário antes de se iniciar a leitura da parte original deste trabalho, que é apresentada nos capítulos 3 e 4.

1.A - O Campo Eletromagnético:

A ação para o campo eletromagnético[17] no vácuo é dada por:

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (1.1)$$

Levando-se em conta a seguinte dependência entre as variáveis do campo A_ν e $F^{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (1.2),$$

varia-se então a ação (1.1) na variável A_μ obtendo-se as equações de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3)$$

Os momenta canonicamente conjugados aos campos A_μ são:

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{A}_\mu} = -F^{0\mu} \qquad (1.4)$$

Destes quatro momenta Π^μ, os tres Π^i podem ser invertidos para os $\mathring{A}^i$:

$$\mathring{A}^i = -\Pi^i + \partial^i A^0 \qquad (1.5),$$

e o único vínculo será:

$$\Pi^0 \approx 0 \tag{1.6}$$

A densidade Lagrangeana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\Pi^i\,\Pi_i - \frac{1}{4}\,F_{ik}F^{ik} \tag{1.7}$$,

e a Hamiltoniana canônica é calculada da maneira indicada no apêndice A , resultando em:

$$H_C = \frac{1}{2}\int d^3x(\Pi^i\Pi_i + \Pi^i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}\,F^{ik}F_{ik}) \tag{1.8}$$,

ou, após uma integração por partes, em:

$$H_C = \int d^3x(\frac{1}{2}\,\Pi^i\Pi_i - A_0\partial_i\Pi^i + \frac{1}{4}\,F^{ik}F_{ik}) \tag{1.9}$$

A Hamiltoniana total H_T é obtida adicionando-se à Hamiltoniana canônica H_C, uma combinação dos vínculos $\Pi^0(x)$ de cada um dos infinitos pontos do campo:

$$H_T = H_C + \int d^3x\ u(x)\ \Pi^0(x) \tag{1.10}$$

A condição de consistência do vínculo primário Π^0 é:

$$\{\Pi^0\ ,\ H_T\} = \{\Pi^0\ ,\ H_C\} = \int d^3x'\{\Pi^0\ ,\ -A'_0\partial'_i\Pi'^i\} =$$

$$= - \int d^3x' \; \partial'_i \Pi'^i \{\Pi^0 \; , \; A'_0\} = + \int d^3x' \; \partial'_i \Pi'^i \delta^3(x-x') =$$

$$= + \partial_i \Pi^i \approx 0 \qquad (1.11)$$

Ela nos leva ao vínculo secundário:

$$\partial_i \Pi^i \approx 0 \qquad (1.12)$$

Note que este vinculo secundário nada mais é do que a lei de Gauss. Sua condição de consistência não leva a nenhum outro vínculo.

Os dois únicos vínculos Π^0 e $\partial_i \Pi^i$ são de primeira classe, pois os parênteses de Poisson entre eles são nulos:

$$\{\Pi^0 \; , \; \partial_i \Pi^i\} = 0 \qquad (1.13)$$

1.B – Formalismo de Primeira Ordem para o Campo Eletromagnetico

No formalismo de primeira ordem, que trata as variaveis A_ν e $F^{\mu\nu}$ (que é antissimétrica nos índices μ e ν) como independentes, reescreve-se a ação (1.1) como:

$$S = - \frac{1}{2} \int d^4x \; (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \int d^4x \; F^{\mu\nu} \; F_{\mu\nu} \qquad (1.14)$$

Sua variação em relação às variáveis A_ν e $F^{\mu\nu}$ levam respectivamente às equações:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.15.a)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (1.15.b)$$

Obtem-se assim na, equação (1.15.b), a relação de dependência entre A_ν e $F_{\mu\nu}$, que tinha sido ignorada.

Os momenta canonicamente conjugados às variáveis A_μ e $F_{\mu\nu}$ são respectivamente:

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} \qquad (1.16.a)$$

e

$$\Pi^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{F}_{\mu\nu}} = 0 \qquad (1.16.b)$$

Tem-se portanto "dez" vínculos primários:

$$\phi^\mu \equiv \Pi^\mu - F^{\mu 0} \approx 0 \qquad (1.17)$$

$$\phi^{\mu\nu} \equiv \Pi^{\mu\nu} \approx 0 \qquad (1.18)$$

Já que a teoria tratada aqui é a mesma que foi tratada na seção anterior no formalismo de segunda ordem, deve-se esperar que haja também somente dois vínculos de primeira classe, pois estes estão associados a arbitrariedades de calibre.

As Hamiltonianas canônica e total são respectivamente:

$$H_C = \int d^3x \, [(\partial_i A_\nu)F^{i\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \tag{1.19}$$

e

$$H_T = H_C + \int d^3x \, (u_{1\mu}\phi^\mu(x) + u_{2\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}(x)) \tag{1.20}$$

A condição de consistência do vínculo primário ϕ^μ é:

$$\{H_T \, , \, \phi^\mu\} = 0 \tag{1.21},$$

mas tem-se:

$$\{H_T \, , \, \phi'^{\mu}\} = \{\int d^3x[(\partial_i A_\alpha)F^{i\alpha} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}] \, , \, (\Pi'^{\mu} - F'^{\mu 0})\} +$$

$$+ \{\int d^3x(u_{1\alpha}\phi^\alpha + u_{2\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta}) \, , \, (\Pi'^{\mu} - F'^{\mu 0})\} =$$

$$= \int d^3x[F^{i\alpha}\{\partial_i A_\alpha \, , \, \Pi'^{\mu}\} + u_{2\alpha\beta}\{\Pi^{\alpha\beta} \, , \, F'^{\mu 0}\}] \tag{1.22}$$

Somente a componente ϕ^0 levará a vínculos secundários. As demais componentes levam a equações envolvendo os multiplicadores u_z.

$$\{H_T \, , \, \phi^0\} = \int d^3x \, F^{i\alpha} \, \partial_i(\delta^0_\alpha \, \delta^3(x-x')) =$$

$$= \int d^3x \, \partial_i(F^{i0}\delta^3(x-x')) - \int d^3x \, \partial_i(F^{i\alpha})\delta^0_\alpha \, \delta^3(x-x') =$$

$$= - \partial_i \, F^{i0} \approx 0 \tag{1.23}$$

De forma semelhante, a condição de consistência dos vínculos primarios ϕ^{ik} leva aos vinculos secundarios:

$$F^{ik} - (\partial^k A^i - \partial^i A^k) \approx 0 \tag{1.24}$$

Estes vínculos secundários serão denotados por:

$$\chi^0 \equiv - \partial_i F^{i0} \approx 0 \tag{1.25.a}$$

e

$$\chi^{ik} \equiv F^{ik} - (\partial^k A^i - \partial^i A^k) \approx 0 \tag{1.25.b}$$

A condição de consistência deles não leva a nenhum outro vínculo.

É fácil verificar que os únicos vínculos que apresentam parênteses de Poisson nulos com todos os demais vínculos, são:

$$\phi^0 = \Pi^0 \approx 0 \tag{1.26.a}$$

e

$$\chi^0 = \partial_i \Pi^i \approx 0 \tag{1.26.b}$$

Estes são os vínculos de primeira classe; os vínculos restantes são de segunda classe:

$$\phi^i \equiv \Pi^i - F^{i0} \approx 0 \tag{1.26.c}$$

$$\chi^{ik} \equiv F^{ik} - (\partial^k A^i - \partial^i A^k) \approx 0 \tag{1.26.d}$$

$$\phi^{\mu\nu} \equiv \Pi^{\mu\nu} \approx 0 \tag{1.26.e}$$

De fato, lembrando que $\Pi^{\mu\nu}$ e $F^{\mu\nu}$ são conjugados canônicos, pode-se perceber sem fazer calculos que os parênteses de Poisson entre os Π^{i}, ϕ^{i} e $\phi^{\mu\nu}$, são diferentes de zero. Estes resultados confirmam a expectativa de se ter apenas dois vínculos de primeira classe, que são inclusive os mesmos $\Pi^{0} \approx 0$ e $\partial_{i}\Pi^{i} \approx 0$.

A existência de vínculos de segunda classe possibilita a contrução dos parénteses de Dirac, que os converte em igualdades fortes, tornando o formalismo de primeira ordem equivalente ao de segunda ordem.

1.C - Formalismo de Primeira Ordem Para o Campo Gravitacional:

A ação de Einstein-Hilbert para um campo gravitacional no vácuo é:

$$S = \int d^{d}x \, (-g)^{1/2} R \tag{1.27}$$,

onde o número de dimensões d do espaço-tempo é arbitrário.

A variação de (1.27) nas componentes do tensor métrico $g^{\mu\nu}$ leva às equações de Einstein do campo gravitacional, que são equações diferenciais de segunda ordem com relação à métrica:

$$R^{\mu\nu} = 0 \tag{1.28}$$

Tem-se por objetivo obter a forma canônica dessas equações, que devem apresentar as seguintes propriedades:

(1) Devem ser resolvidas explicitamente para as derivadas temporais.

(2) Devem ser equações de primeira ordem.

A primeira propriedade pode ser obtida pela adoção do formalismo ADM (ver apêndice A). A segunda, pela consideração das componentes da conexão $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ como independentes dos $g^{\mu\nu}$ (Palatini).

Utilizando os resultados do apêndice A pode-se escrever a ação s da seguinte maneira:

$$S = \int d^d x\ h^{1/2}[-2h^{ij}\dot{k}_{ij} - \dot{h}^{ij}k_{ij} + N(\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) -$$
$$- 2N^i\ (k^j_{\ i} - \delta^j_{\ i}k)_{/j} - 2(N_{/i} - k_{ij}N^j)^{/i}] \qquad (1.29)$$

Onde $h \equiv \det h_{ij}$, h_{ij} é a métrica da hipersuperfície tipo espaço de dimensão d-1, $\tilde{R}$ a curvatura intrínseca, k_{ij} a curvatura extrínseca, N é a função lapse, e N^i é a função shift.

Agora as variáveis tomadas como independentes são h^{ij} e k_{ij}. As relações da conexão com o tensor métrico, na linguagem ADM, podem ser escritas como:

$$\dot{h}^{ij} = 2\ N\ k^{ij} - N^{i/j} - N^{j/i} \qquad (1.30)$$

Integrando-se o primeiro termo de (1.29) por partes e substituindo nessa ação as relações acima, chega-se à ação familiar do tratamento de segunda ordem:

$$I = -2\int_{\partial} d^{d-1}x\ h^{1/2}\ k + \int d^d x\ N\ h^{1/2}(\tilde{R} - k^2 + k_{ij}k^{ij}) \qquad (1.31),$$

à qual é preciso adicionar o termo de superficie:

$$2 \int_{\partial} d^{d-1}x \; h^{1/2}\, k$$

de modo que sua variação com respeito a h^{ij} dé as equações de Einstein.

Dando inicio ao desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano de primeira ordem, calcula-se primeiramente os momenta conjugados às variáveis N, N^{i}, h^{ij} e k_{ij}:

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{N}} = 0 \qquad (1.32.a)$$

$$\Pi^{i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{N}_{i}} = 0 \qquad (1.32.b)$$

$$\Pi_{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{h}^{ij}} = -\, h^{1/2}\, k_{ij} \qquad (1.32.c)$$

$$P^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{k}_{ij}} = -\, 2\, h^{1/2}\, h^{ij} \qquad (1.32.d)$$

Através destas relações não é possível expressar nenhuma das "velocidades" em função das variáveis canônicas e de seus momenta canonicamente conjugados. Obtem-se somente os vínculos primários apresentados abaixo:

$$\Pi \approx 0 \qquad (1.33.a)$$

$$\Pi^{i} \approx 0 \qquad (1.33.b)$$

$$\phi^{1}_{ij} \equiv \Pi_{ij} + h^{1/2}\, k_{ij} \approx 0 \qquad (1.33.c)$$

$$\phi^{2ij} \equiv P^{ij} + 2\, h^{1/2}\, h^{ij} \approx 0 \qquad (1.33.d)$$

Estes, utilizados de acordo com a regra apresentada no apêndice A, e já exemplificada nas seções anteriores deste presente capítulo, levam à seguinte Hamiltoniana canônica:

$$H_C = \int d^{d-1}x\; h^{1/2}[\, -N(\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) + 2N^i(k_i{}^j - \delta_i^j k)_{/j}] \qquad (1.34)$$

A Hamiltoniana total é então:

$$H_T = H_C + \int d^{d-1}x\; h^{1/2}\; [\; \lambda^{ij}\,(\, \Pi_{ij} + h^{1/2}\, k_{ij}\,) +$$
$$+ \omega_{ij}\,(\, P^{ij} + 2\, h^{1/2}\, h^{ij}\,) + \lambda\, \Pi + \lambda_i \Pi^i \;] \qquad (1.35)$$

onde λ, λ_i, λ^{ij} e ω_{ij} são os multiplicadores de Lagrange.

Os únicos parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas, diferentes de zéro, são:

$$\{h^{ij}(x)\;,\; \Pi_{kl}(y)\} = \frac{1}{2}\,(\delta^i_l\, \delta^j_k + \delta^i_k\, \delta^j_l)\;\; \delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.36.a)$$

$$\{k_{ij}(x)\;,\; P^{kl}(y)\} = \frac{1}{2}\,(\delta^k_i\, \delta^l_j + \delta^k_j\, \delta^l_i)\;\; \delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.36.b)$$

$$\{N(x)\;,\; \Pi(y)\} = \delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.36.c)$$

$$\{N^i(x)\;,\; \Pi_j(y)\;\} = \delta^i_j\; \delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.36.d)$$

Com eles podemos verificar a condição de consistência para os vínculos primários:

$$\{H_T\ ,\ \Pi\} \approx \{H_T\ ,\ \Pi^i\} \approx \{H_T\ ,\ \phi^1_{ij}\} \approx \{H_T\ ,\ \phi^{2ij}\} \approx 0 \quad (1.37)$$

Os dois primeiros (1.33.a) e (1.33.b) levam a vínculos secundários:

$$H_0 \equiv -\ h^{1/2}\ (\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) \approx 0 \qquad (1.38.a)$$

$$H_i \equiv 2\ h^{1/2}\ (k^j_{\ i} - \delta^j_i\ k)_{/j} \approx 0 \qquad (1.38.b)$$

Nota-se então que H_T é também um vínculo:

$$H_T \approx 0 \qquad (1.38.c)$$

como se esperaria de uma teoria invariante por transformações gerais dos sistemas de coordenadas.

Antes da verificação dos dois últimos (1.33.c) e (1.33.d), é conveniente calcular, com o auxílio das equações (1.36.a) e (1.36.b), alguns outros parentêses de Poisson:

$$\{H_0\ ,\ \phi'^{\,1}_{ij}\} = \{-\ h^{1/2}\ (\tilde{R} + k^2 - k_{ab}k^{ab})\ ,\ (\Pi'_{ij} + h'^{\,1/2}\ k'_{ij})\} =$$

$$= -\ h^{1/2}\ \{\tilde{R}\ ,\ \Pi'_{ij}\} - h^{1/2}\ \{(h^{ab}k_{ab})^2\ ,\ \Pi'_{ij}\} +$$

$$+\ h^{1/2}\ \{k_{ab}k^{ab},\ \Pi'_{ij}\} - \{h^{1/2},\ \Pi'_{ij}\}\ (\tilde{R} + k^2 - k_{ab}k^{ab}) =$$

$$= -\ h^{1/2}\ \{\tilde{R}\ ,\ \Pi'_{ij}\} - \frac{1}{2}\ h^{1/2}\ k\ k_{ij}\ \delta^d(x-x') +$$

$$+\ 2\ h^{1/2}\ k_{ai}k^a_{\ j}\ \delta^d(x-x') - \frac{1}{2}\ h_{ij}H_0\ \delta^d(x-x') \quad (1.39)$$

onde a notação com linha significa por exemplo:

$$\Pi'_{ij} \equiv \Pi_{ij}(x')$$

O primeiro termo será calculado separadamente.

Lembre-se que:

$$\left\{ \tilde{R} \, , \, \Pi'_{ij} \right\} = \int d^d z \, \frac{\partial \, \tilde{R}(x)}{\partial \, h^{kp}(z)} \, \frac{\partial \, \Pi_{ij}(x')}{\partial \, \Pi_{kp}(z)} \qquad (1.40)$$

A variação de $\tilde{R}$ em h^{ab} é:

$$\delta\tilde{R} = \delta h^{ab}\tilde{R}_{ab} + h^{ab}\delta\tilde{R}_{ab} \qquad (1.41)$$

onde:

$$\delta\tilde{R}_{ab} = (\delta\Gamma^{l}{}_{ab})_{,l} - (\delta\Gamma^{l}{}_{al})_{,b} + \delta\Gamma^{l}{}_{lm}\Gamma^{m}{}_{ab} + \Gamma^{l}{}_{lm}\delta\Gamma^{m}{}_{ab} -$$

$$- \delta\Gamma^{l}{}_{bm}\Gamma^{m}{}_{al} - \Gamma^{l}{}_{bm}\delta\Gamma^{m}{}_{al} \qquad (1.42)$$

Restringindo-se sistema de coordenadas onde $\Gamma^{a}{}_{bc} = 0$, tem-se:

$$\delta\tilde{R}_{ab} = (\delta\Gamma^{l}{}_{ab})_{/l} - (\delta\Gamma^{l}{}_{al})_{/b} \qquad (1.43)$$

Esta é uma identidade covariante, ou seja, tem a mesma forma independentemente do sistema de coordenadas. A equação (1.43) vale portanto também para sistemas de coordenadas onde $\Gamma^{a}{}_{bc} \neq 0$:

Usando as equações (1.41) e (1.43), tem-se:

$$\delta\tilde{R} = \delta h^{ab}\,\tilde{R}_{ab} + h^{ab}(\delta\Gamma^{l}{}_{ab})_{/l} - h^{ab}(\delta\Gamma^{l}{}_{ab})_{/b} \qquad (1.44)$$

A expressão para $\Gamma^{l}{}_{ab}$ em termos de h^{ij} é:

$$\Gamma^{l}{}_{ab} = \frac{1}{2}\,h^{li}(h_{ia,b} + h_{ib,a} - h_{ab,i}) \qquad (1.45)$$

Substituindo-a em (1.44), obtem-se:

$$\delta\Gamma^{l}{}_{ab} = \frac{1}{2}\,h^{li}(h_{ia,b} + h_{ib,a} - h_{ab,i}) + $$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\delta h_{ia})_{,b} + (\delta h_{ib})_{,a} - (\delta h_{ab})_{,i}] \qquad (1.46)$$

Restringindo-se novamente a um sistema de coordenadas

onde $\Gamma^{l}{}_{ab} = 0$, as derivadas tornam-se covariantes, consequentemente os três primeiros termos são nulos, e a expressão resultante, que é covariante, vale para qualquer sistema de coordenadas:

$$\delta\Gamma^{l}{}_{ab} = \frac{1}{2}\,h^{li}[(\delta h_{ia})_{/b} + (\delta h_{ib})_{/a} - (\delta h_{ab})_{/i}] \qquad (1.47)$$

Substituindo (1.47) e (1.44) em (1.41), δR fica:

$$\delta\tilde{R} = \delta h^{ab}\tilde{R}_{ab} + \frac{1}{2}\,h^{ab}h^{li}[(\delta h_{ia})_{/b/l} + (\delta h_{ib})_{/a/l} - (\delta h_{ab})_{/i/l}] -$$

$$-\frac{1}{2}\ h^{ab}h^{li}[\ (\delta h_{ia})_{/l/b}+\ (\delta h_{il})_{/a/b}-\ (\delta h_{al})_{/i/b}]$$

(1.48)

Então:

$$\frac{\partial\ \tilde{R}}{\partial\ h'^{kp}} = \frac{\partial\ h^{ab}}{\partial\ h'^{kp}}\ \tilde{R}_{ab} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ h^{ab}h^{li}\left[h_{im}h_{an}\left(\frac{\partial h^{mn}}{\partial h'^{kp}}\right)_{/p/l} +\ h_{im}h_{bn}\left(\frac{\partial h^{mn}}{\partial h'^{kp}}\right)_{/a/l} -\ h_{am}h_{bn}\left(\frac{\partial h^{mn}}{\partial h'^{kp}}\right)_{/i/l}\right]-$$

$$-\ \frac{1}{2}\ h^{ab}h^{li}\left[h_{im}h_{an}\left(\frac{\partial h^{mn}}{\partial h'^{kp}}\right)_{/l/b} +\ h_{im}h_{ln}\left(\frac{\partial h^{mn}}{\partial h'^{kp}}\right)_{/a/b} -\ h_{am}h_{ln}\left(\frac{\partial h^{mn}}{\partial h'^{kp}}\right)_{/i/b}\right]=$$

$$= \tilde{R}_{kp}\ \delta^{d-1}(x-x') + \delta^{d-1}(x-x')_{/k/p} - h^{il}h_{kp}\ \delta^{d-1}(x-x')_{/i/l}$$

(1.49)

Finalmente já é possível calcular os parênteses de Poisson entre $\tilde{R}$ e Π_{ij}:

$$\{\tilde{R}\ ,\ \Pi_{ij}\} = \int d^{d-1}z\ [\ \frac{1}{2}\ (\ \delta^k_i\ \delta^p_j + \delta^k_j\ \delta^p_i\ )\ \delta^{d-1}(x'-z)]\ \times$$

$$\times[\ R_{kp}\delta^{d-1}(x-z) + \delta^{d-1}(x-z)_{/k/p} - h^{nl}h_{kp}\delta^{d-1}(x-z)_{/n/l}] =$$

$$= \tilde{R}_{ij}\ \delta^{d-1}(x-x') + \delta^{d-1}(x-x')_{/i/j} - h^{nl}h_{ij}\delta^{d-1}(x-x')_{/n/l} \qquad (1.50)$$

O resultado final para o cálculo dos parênteses de Poisson entre H_o e ϕ'^{1}_{ij} é:

$$\{H_o\ ,\ \phi'^{1}_{ij}\} = -\ \frac{1}{2}\ H_o\ h_{ij}\ \delta^{d-1}(x-x') -$$

$$-\ h^{1/2}[\ h_{ij}h^{cd}\delta^{d-1}(x-x')_{,c/d} - \delta^{d-1}(x-x')_{,i/j} +$$

$$+ (\tilde{R}_{ij}+2kk_{ij}-2k^{k}{}_{i}k_{kj})\delta^{d-1}(x-x')] \qquad (1.51)$$

Agora o cálculo dos parênteses de Poisson entre H_i e ϕ^{1}_{ij}:

$$\{H_i\ ,\ \varphi'^{1}_{kl}\} = \{H_i\ ,\ \Pi'_{kl}\} = \int d^{d-1}x''\ \frac{\partial H_i}{\partial h''^{uv}}\ \frac{\partial \Pi'_{kl}}{\partial \Pi''_{uv}} \qquad (1.52)$$

Calcula-se então a variação de H_i em h^{ij}:

$$\delta H_i = -(k_i{}^{j}-\delta^{j}_{i}k)_{/j}\ \delta h^{1/2} - h^{1/2}\ \delta\ [(k_i{}^{j}-\delta^{j}_{i}k)_{/j}] =$$

$$= -(k_i{}^{j}-\delta^{j}_{i}k)_{/j}\ \delta h^{1/2} - h^{1/2}k_{in/j}\ \delta h^{nj} + h^{1/2}k_{mn/i}\ \delta h^{mn} -$$

$$- h^{1/2}h^{nj}\ \delta(k_{in/j}) + h^{1/2}h^{mn}\ \delta(k_{mn/i}) \qquad (1.53)$$

As variações $\delta(k_{mn/i})$ e $\delta(k_{in/j})$ serão calculadas separadamente:

Sabe-se que:

$$k_{mn/i} = k_{mn,i} - k_{an}\ \Gamma^{a}{}_{mi} - k_{ma}\ \Gamma^{a}{}_{ni} \qquad (1.54)$$

Então tem-se:

$$\delta(k_{mn/i}) = -k_{an}\ \delta\Gamma^{a}{}_{mi} - k_{ma}\ \delta\Gamma^{a}{}_{ni} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ k_{an}\ [\ \delta h^{ab}(h_{bm,i} + h_{bi,m} - h_{mi,b}) +$$

$$+ h^{ab} ((\delta h_{bm}),_i + (\delta h_{bi}),_m - (\delta h_{mi}),_b)] -$$

$$- \frac{1}{2} k_{ma} [\delta h^{ab}(h_{bn,i} + h_{bi,n} - h_{ni,b}) +$$

$$+ h^{ab} ((\delta h_{bn}),_i + (\delta h_{bi}),_n - (\delta h_{ni}),_b)] \qquad (1.55)$$

Da mesma forma como já foi feito por duas vezes no cálculo de $\{\tilde{R}\ ,\ \Pi^{*}_{ij}\}$, consideram-se as conexões Γ^i_{kl} nulas. A equação (1.55) fica:

$$\delta(k_{mn/i}) = - \frac{1}{2} k_{an} h^{ab} [(\delta h_{bm})_{/i} + (\delta h_{bi})_{/m} - (\delta h_{mi})_{/b}] -$$

$$- \frac{1}{2} k_{ma} h^{ab} [(\delta h_{bn})_{/i} + (\delta h_{bi})_{/n} - (\delta h_{ni})_{/b}] =$$

$$= - \frac{1}{2} k_{an} h^{ab} [- h_{br} h_{ms} (\delta h^{rs})_{/i} - h_{rs} h_{si} (\delta h^{rs})_{/n} + h_{mr} h_{si} (\delta h^{rs})_{/b}] -$$

$$- \frac{1}{2} k_{ma} h^{ab} [- h_{br} h_{sn} (\delta h^{rs})_{/i} - h_{rb} h_{si} (\delta h^{rs})_{/n} + h_{nr} h_{si} (\delta h^{rs})_{/b}]$$

$$(1.56)$$

Pode-se obter $\delta(k_{in/j})$ a partir de (1.56), mudando-se apenas os índices:

$$\delta(k_{in/j}) = \frac{1}{2} k_{an} h^{ab} (h_{br} h_{is} (\delta h^{rs})_{/j} + h_{br} h_{sj} (\delta h^{rs})_{/i} -$$

$$- h_{ir} h_{sj} (\delta h^{rs})_{/b}) + \frac{1}{2} k_{ia} h^{ab} (h_{br} h_{sn} (\delta h^{rs})_{/j} +$$

$$+ h_{rb} h_{sj} (\delta h^{rs})_{/n} - h_{nr} h_{sj} (\delta h^{rs})_{/b}) \qquad (1.57)$$

Substituindo (1.56) e (1.57) em (1.53) obtem-se a seguinte expressão para δH_i:

$$\delta H_i = -(k_i^{\ j} - \delta_i^j k)_{/j}\ \delta h^{1/2} - h^{1/2} k_{in/j}\ \delta h^{nj} + h^{1/2} k_{mn/i}\ \delta h^{mn} -$$

$$-\frac{1}{2} h^{1/2} h^{nj} k_{an} h^{ab}(h_{br} h_{is} (\delta h^{rs})_{/j} + h_{br} h_{sj} (\delta h^{rs})_{/i} - h_{ir} h_{sj} (\delta h^{rs})_{/b}) -$$

$$-\frac{1}{2} h^{1/2} h^{mn} k_{an} h^{ab}(h_{br} h_{ms} (\delta h^{rs})_{/i} + h_{br} h_{si} (\delta h^{rs})_{/m} - h_{mr} h_{si} (\delta h^{rs})_{/b}) -$$

$$-\frac{1}{2} h^{1/2} h^{mn} k_{ma} h^{ab}(h_{br} h_{sn} (\delta h^{rs})_{/i} + h_{rb} h_{si} (\delta h^{rs})_{/n} - h_{nr} h_{si} (\delta h^{rs})_{/b}) \tag{1.58}$$

O cálculo de $\dfrac{\partial H_i}{\partial h''^{uv}}$ é feito levando-se em conta que:

$$\left(\frac{\partial h^{rs}}{\partial h''^{uv}}\right)_{/j} = \delta^{rs}_{uv}\ \delta^{d-1}(x-x'')_{,j} + \frac{1}{2}\ \delta^{s}_{(n}\ \Gamma^{r}_{\ m)j}\ \delta^{d-1}(x-x'') +$$

$$+\frac{1}{2}\ \delta^{r}_{(n}\ \Gamma^{s}_{\ m)j}\ \delta^{d-1}(x-x''),$$

onde $\delta^{ab}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta^a_i\ \delta^b_j + \delta^a_j\ \delta^b_i)$

O resultado final é:

$$\{H_i\ ,\ \phi'^{1}_{kl}\} = \frac{1}{2} H_i\ h_{kl}\ \delta^{d-1}(x-x') -$$

$$-\frac{1}{2} h^{1/2} [(k_{ik}\ \delta^{d-1}(x-x'))_{/l} + (k_{il}\ \delta^{d-1}(x-x'))_{/k} -$$

$$-\frac{1}{2}(k_{kl}\ \delta^{d-1}(x-x'))_{/i} - k^b_{\ i} h_{kl}\ \delta^{d-1}(x-x')_{/b}] \tag{1.59}$$

Dos outros parênteses de Poisson mais simples, serão apresentados apenas os resultados:

$$\{H_o\ ,\ H'_i\} = \{H_o\ ,\ H'_o\} = \{H_i\ ,\ H'_j\} \approx 0 \tag{1.60.a}$$

$$\{H_o\ ,\ \phi'^{2ij}\} = 2\ h^{1/2}\ (k^{ij} - h^{ij}k)\delta^{d-1}(x-x') \tag{1.60.b}$$

$$\{H_i\ ,\ \phi'^{2kl}\} = -\ 2\ h^{1/2}\ [\ h^{kl}\delta^{d-1}(x-x')_{,i} -$$

$$-\ \frac{1}{2}\ (\delta^k_i\ h^{lj} - \delta^l_i\ h^{kj})\ \delta^{d-1}(x-x')_{,j}] \tag{1.60.c}$$

$$\{\phi^1_{ij}\ ,\ \phi'^1_{kl}\} = -\ \frac{1}{2}\ h^{1/2}\ (k_{ij}h_{kl} - h_{ij}k_{kl})\ \delta^{d-1}(x-x') \tag{1.60.d}$$

$$\{\phi^1_{ij}\ ,\ \phi'^{2kl}\} = -\ h^{1/2}\ (\delta^{kl}_{ij} - h^{kl}h_{ij})\ \delta^{d-1}(x-x') \tag{1.60.e}$$

$$\{\phi^{2ij}\ ,\ \phi'^{2kl}\} = 0 \tag{1.60.f}$$

Fica assim mais fácil verificar que a condição de consistência para os já citados vínculos ϕ^1_{ij} e ϕ^{2ij} leva a obtenção das seguintes expressões para os multiplicadores de Lagrange λ^{ij} e ω_{ij}:

$$\lambda^{ij} = h^{-1/2}(2N\ k^{ij} - N^{i/j} - N^{j/i}) \tag{1.61.a}$$

e

$$\omega_{ij} = h^{-1/2}[\ N\ (\tilde{R}_{ij} + kk_{ij} - 2k^m{}_i k_{mj}) - N_{,i/j} + N_{m/i}k^m{}_j +$$

$$+\ N_{m/j}k^m{}_i + N^m k_{ij/m}] \tag{1.61.b}$$

Aquí pode-se verificar que os cálculos estão coerentes, pois as equações de Hamilton abaixo levam às equações de Einstein quando são substituidos os valores de λ^{ij} e ω_{ij} nelas:

$$\mathring{k}_{ij} = \{k_{ij}\ ,\ H_T\} = h^{1/2}\omega_{ij} \qquad (G_{\mu\nu}\ \perp^\mu{}_\alpha\ \perp^\nu{}_\beta = 0) \tag{1.62.a}$$

onde $\perp^\mu{}_\alpha = \delta^\mu_\alpha + n^\mu\ n_\alpha$

e n^{μ} é o vetor perpendicular à hipersuperfície.

$$\mathring{h}^{ij} = \{h^{ij} , H_T\} = h^{1/2}\lambda^{ij} \quad (g_{\mu\nu;\alpha} = 0) \qquad (1.62.b)$$

O resultado nulo obtido em (1.32.a) e (1.32.b) para a variação da densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ em termos das "velocidades" $\mathring{N}$ e $\mathring{N}_i$, ou seja, o resultado de que N e N_i são arbitrários, indica que nenhum grau de liberdade é inerente a estes campos. Estas variáveis podem ser descartadas pela introduçao de vínculos de Gauge do tipo:

$$\Omega^{o} = N - C^{o} \approx 0 \qquad (1.63.a)$$

$$\Omega^{i} = N^{i} - C^{i} \approx 0 \qquad (1.63.b),$$

que depois da introdução dos parênteses de Dirac passarão a ser igualdades fortes junto com os demais vínculos:

$$\Pi^{\mu} = 0 \qquad (1.64.a)$$

$$N^{\mu} = C^{\mu} \qquad (1.64.b)$$

Assim os vínculos Π^{o} e Π^{i} podem ser descartados, e, N e N^{i} serem tratados como multiplicadores C^{o} e C^{i} no desenvolvimento que segue.

A verificação da condição de consistência para os vínculos secundários H_o e H_i não levam a nenhum novo vínculo. Todos os vínculos da teoria são então de segunda classe, já que nenhum deles possui parênteses de Poisson nulo com todos os demais.

Porém, como a condição de consistência para os "d" vínculos Ho e H_i não impõem restrições aos "d" multiplicadores N e N^i, isto sugere que "d" combinações dos " $\frac{1}{2}$ d (d-1) + $\frac{1}{2}$ d (d-1) + d " vínculos de segunda classe, são de primeira classe. Esses "d" vínculos de primeira classe podem ser obtidos através da escolha arbitrária dos multiplicadores N e N^i que aparece em H_T explicitamente e também implicitamente pelas expressões (1.61.a) e (1.62.b) de λ^{ij} e ω_{ij} , pois H_T é um vínculo de primeira classe. Pode-se escolher por exemplo:

(1) $N = \delta^{d-1}(x-x')$ e $N^i = 0$ (1.65),

obtendo um vínculo de primeira classe:

$$\bar{H}_0 = h^{1/2}\,(\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) + 2\,k^{ij}\Pi_{ij} +$$
$$+ (\tilde{R}_{ij} + kk_{ij} - 2k^p{}_i k_{pj})P^{ij} - P^{ij}{}_{/i/j} \qquad (1.66)$$

(2) $N = 0$ e $N^i_a = \delta^i_a\, \delta^{d-1}(x-x')$ (1.67),

obtendo d-1 vínculos de primeira classe:

$$\bar{H}_a = 2\,\Pi^j{}_{a/j} - 2\,k_{aj/i}P^{ij} + k_{ij/a}P^{ij} \qquad (1.68)$$

Os vínculos de segunda classe independentes $\phi^1{}_{ij}$ e ϕ^{2ij} tornam-se igualdades fortes com a introdução dos parênteses de Dirac:

$$\{A(x)\,,\; B(y)\}^* \equiv \{A(x)\,,\; B(y)\} -$$
$$- \int du\, dv\, \{A(x)\,,\; \phi^{\alpha}(u)\}\, (C^{-1})_{\alpha\beta}(u,v)\, \{\phi^{\beta}(v)\,,\; B(y)\} \qquad (1.69),$$

onde $C_{\alpha\beta}^{(ij)(kl)} = \{\phi_{\alpha}^{ij}\ ,\ \phi_{\beta}^{kl}\}$ (1.70)

são elementos da matriz dos paréntheses de Poisson entre os vínculos de segunda classe . Torna-se portanto necessário calcular a inversa da matriz C.

Observa-se que a matriz C pode ser representada por:

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & 0 \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

onde (veja as eqs. (1.60.d,e,f)):

$$A = -\frac{1}{2}\ h^{1/2}\ (k_{ij}h_{kl} - h_{ij}k_{kl})\ \delta^{d-1}(x-x') \tag{1.72.a}$$

$$B = h^{1/2}\ (\delta_{ij}^{kl} - h^{kl}h_{ij})\ \delta^{d-1}(x-x') \tag{1.72.b}$$

É fácil verificar que a matriz inversa será:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -B^{-1} \\ B^{-1} & B^{-1}A\ B^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

É somente necessário portanto calcular a inversa de B e a multiplicação $B^{-1}A\ B^{-1}$. Aqui será apresentado apenas o cálculo de B^{-1}.

Suponha que:

$$B^{-1} = -(C_{12}^{-1})^{kl}{}_{ij} = (a\delta_{ij}^{kl} + bh^{kl}h_{ij})\ \delta^{d-1}(x-u) \tag{1.74}$$

Então tem-se:

$$\int du\, (C^{-1})^{kl}{}_{mn}\, C_{12}{}^{mn}{}_{ij} =$$

$$= \int du\, h^{1/2}\, (a\, \delta^{kl}_{mn} + b\, h^{kl} h_{mn})(\delta^{mn}_{ij} - h^{mn} h_{ij})\, \delta^{d-1}(x-u)\, \delta^{d-1}(u-y) =$$

$$= h^{1/2}\, (a\, \delta^{kl}_{mn} + b\, h^{kl} h_{mn})\, (\delta^{mn}_{ij} - h^{mn} h_{ij})\, \delta^{d-1}(x-y) =$$

$$= h^{1/2}\, [\, a\, (\delta^{kl}_{ij} - h^{kl} h_{ij}) - b\, (d-2)\, h^{kl} h_{ij}]\, \delta^{d-1}(x-y) \equiv$$

$$\equiv \delta^{kl}_{ij}\, \delta^{d-1}(x-y) \tag{1.75}$$

Escolhendo $\quad a = h^{-1/2} \quad$ (1.76),

o valor de b deverá ser :

$$b = \frac{h^{-1/2}}{d-2} \tag{1.77}$$

Consequentemente tem-se:

$$B^{-1} = -\, (C^{-1}_{12})^{kl}{}_{ij} = h^{-1/2} (\delta^{kl}_{ij} - \frac{h^{kl} h_{ij}}{d-2})\, \delta^{d-1}(x-y) \tag{1.78}$$

e a multiplicação $B^{-1} A\, B^{-1}$ dá:

$$B^{-1} A\, B^{-1} = (C^{-1}_{22})_{ijkl} = -\frac{h^{-1/2}}{2\,(d-2)} (h_{ij} k_{kl} - h_{kl} k_{ij})\, \delta^{d-1}(x-y) \tag{1.79}$$

Em resumo tem-se, os seguintes elementos de C^{-1}:

$$C^{-1}_{11} = 0 \tag{1.80.a}$$

$$(C^{-1}_{12})^{kl}{}_{ij} = -(C^{-1}_{21})^{kl}{}_{ij} = -h^{-1/2}(\delta^{kl}_{ij} - \frac{h^{kl}h_{ij}}{d-2})\delta^{d-1}(x-y) \tag{1.80.b}$$

$$(C^{-1})_{ijkl} = -\frac{h^{-1/2}}{2(d-2)}(h_{ij}k_{kl} - h_{kl}k_{ij})\delta^{d-1}(x-y) \tag{1.80.c}$$

De posse destes resultados, já é possível calcular os parênteses de Dirac entre funções das variáveis canônicas. Os vínculos ϕ^1_{ij} e ϕ^{2ij} passarão a ser igualdades fortes e portanto podem ser usados para a escolha entre duas representações. Começa-se pelo par de variáveis canônicas h^{ij} e Π_{ij}.

Olhando a matriz C^{-1} vê-se que um dos termos (aquele relativo à C^{-1}_{11}) dos parenteses abaixo, é igual a zero:

$$\{h^{ij}(x)\ ,\ \Pi_{kl}(y)\}^* = \{h^{ij}(x)\ ,\ \Pi_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\, dv\, \{h^{ij}(x)\ ,\ \phi^{\alpha}(u)\}(C^{-1})_{\alpha\beta}(u,v)\{\phi^{\beta}(v)\ ,\ \Pi_{kl}(y)\} \tag{1.81}$$

Restam então os seguintes termos:

$$\{h^{ij}(x)\ ,\ \Pi_{kl}(y)\}^* = \delta^{ij}_{kl}\,\delta^{d-1}(x-y) -$$

$$-\int dudv\{h^{ij}(x), \phi^1_{mn}(u)\}[\,h^{-1/2}(\delta^{mn}_{rs} - \frac{h_{rs}h^{mn}}{d-2})\delta^{d-1}(u-v)]\,\{\phi^{2rs}(v), \Pi_{kl}(y)\} -$$

$$-\int duv\{h^{ij}(x), \phi^{2mn}(u)\}[\,-h^{-1/2}(\delta^{rs}_{mn} - \frac{h_{mn}h^{rs}}{d-2})\delta^{d-1}(u-v)]\,\{\phi^1_{rs}(v), \Pi_{kl}(y)\} -$$

$$-\int dudv\{h^{ij}(x), \phi^{2mn}(u)\}[\,\frac{-h^{-1/2}}{d-2}(h_{mn}k_{rs} - h_{rs}k_{mn})\delta^{d-1}(u-v)]\,\{\phi^{2rs}(v), \Pi_{kl}(y)\}$$

(1.82)

Substitui-se em (1.82) os parênteses de Poisson abaixo:

$$\left\{h^{ij}(x)\ ,\ \phi^{1}_{mn}(u)\right\} = \left\{h^{ij}(x)\ ,\ (\Pi_{mn}(u) + h^{-1/2}(u)\ k_{mn}(u))\right\} =$$

$$= \delta^{ij}_{mn}\ \delta^{d-1}(x-u) \qquad (1.83.a)$$

$$\left\{\phi^{2rs}(v)\ ,\ \Pi_{kl}(y)\right\} = \left\{(P^{rs}(v) + 2h^{1/2}(v)\ h^{rs}(v))\ ,\ \Pi_{kl}(y)\right\} =$$

$$- h^{1/2}h_{kl}h^{rs}\delta^{d-1}(v-y) + 2h^{1/2}\delta^{rs}_{kl}\ \delta^{d-1}(v-y) \qquad (1.83.b)$$

$$\left\{h^{ij}(x), \phi^{2mn}(u)\right\} = \left\{h^{ij}(x),(P^{mn}(u) + 2h^{1/2}(u)\ h^{mn}(u))\right\} = 0 \qquad (1.83.c)$$

Mostra-se então facilmente que o parêntese de Dirac entre h^{ij} e Π_{kl} é:

$$\left\{h^{ij}(x), \Pi_{kl}(y)\right\}^{*} = (-\delta^{ij}_{kl} + \frac{1}{d-2}\ h^{ij}h_{kl})\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.84)$$

De modo semelhante obtem-se os outros parênteses:

$$\left\{h^{ij}(x), h^{kl}(y)\right\}^{*} = 0 \qquad (1.85.a)$$

$$\left\{\Pi_{ij}(x), \Pi_{kl}(y)\right\}^{*} = \frac{h^{1/2}}{d-2}\ (k_{ij}h_{kl} - h_{ij}k_{kl})\delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.85.b)$$

Os parênteses de Poisson (1.84) e (1.85.b) revelam que Π_{ij} não é uma boa variável canônica. Deverá ser feita uma mudança de variável, de forma que nessa nova variável canônica Π'_{ij} seus parênteses de Dirac dêem:

$$\left\{\Pi'_{ij}(x)\ ,\ \Pi'_{kl}(y)\right\}^{*} = 0 \qquad (1.86.a)$$

$$\left\{h^{ij}(x)\ ,\ \Pi'_{kl}(y)\right\}^{*} = \delta^{ij}_{kl}\ \delta^{d-1}(x-y) \tag{1.86.b}$$

Supondo que Π'_{ij} seja uma combinação do tipo:

$$\Pi'_{ij} = -\ a\ \Pi_{ij} + b\ h_{ij}\Pi \tag{1.87}$$,

onde a e b são coeficientes a serem determinados, e Π é o traço de Π_{ij}:

$$\Pi \equiv h^{ij}\ \Pi_{ij}$$

Não é tarefa difícil mostrar que os Π'_{ij} obtidos serão:

$$\Pi'_{ij} = -\ \Pi_{ij} + h_{ij}\Pi \tag{1.88}$$

A expressão (1.88) pode ser invertida tomando-se o seu traço, e encontrando:

$$\Pi_{ij} = -\ \Pi'_{ij} + \frac{1}{d-2}\ h_{ij}\Pi' \tag{1.89}$$

Substituindo em (1.66) e em (1.68) os vínculos abaixo:

$$k_{ij} = -\ h^{-1/2}\ \Pi_{ij} \tag{1.90.a}$$

$$h^{ij} = -\ \frac{1}{2}\ h^{-1/2}\ P^{ij} \tag{1.90.b}$$,

já em termos de Π'_{ij} , encontra-se:

$$\bar{H}_{a} = 2\ \Pi'^{j}_{a/j} \approx 0 \tag{1.91.a}$$

$$\bar{H}_o = \frac{1}{2} h^{-1/2}[h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk} - \frac{2}{d-2} h^{ij}h^{kl}]\Pi'_{ij}\Pi'_{kl} - h^{1/2}\tilde{R} \approx 0 \qquad (1.91.b)$$

Estes são os já conhecidos vínculos super-momento e super-Hamiltoniano respectivamente. Esta escolha de variáveis leva ao mesmo resultado que se obtem no formalismo de segunda ordem da gravitação.

Pode-se ainda obter uma outra representação para as equações (1.91.a) e (1.91.b). Com este objetivo calcula-se antes os parênteses de Dirac de todas as combinações possiveis entre o par de coordenadas k_{ij} e P^{ij}. É fácil mostrar que eles dão os seguintes resultados:

$$\{P^{ij}(x), k_{kl}(y)\}^* = -2\delta^{ij}_{kl}\, \delta^{d-1}(x-y) + \frac{1}{d-2} h^{ij}h_{kl}\delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.92.a)$$

$$\{P^{ij}(x), P^{kl}(y)\}^* = 0 \qquad (1.92.b)$$

$$\{k_{ij}(x), k_{kl}(y)\}^* = \frac{h^{-1/2}}{2(d-2)}(h_{kl}k_{ij} - h_{ij}k_{kl})\delta^{d-1}(x-y) \qquad (1.92.c)$$

Os parênteses de Dirac revelam mais uma vez que não se está trabalhando com boas variáveis canônicas. Da mesma forma como foi feito para o par Π_{ij} e h^{ij}, mostra-se que a variável k^{ij} deve ser modificada para:

$$k'_{ij} = \frac{1}{2} (k_{ij} + \frac{1}{d-3} h_{ij}k) \qquad (1.93),$$

que leva aos seguintes parênteses de Dirac:

$$\{P^{ij}(x)\ ,\ P^{kl}(y)\}^* = \{k'_{ij}(x)\ ,\ k'_{kl}(y)\}^* = 0 \tag{1.94.a}$$

$$\{k'_{ij}(x)\ ,\ P^{kl}(y)\}^* = \delta^{kl}_{ij}\ \delta^{d-1}(x-y) \tag{1.94.b}$$

Para se fazer a substituição dos vínculos (1.90.a) e (1.90.b) em (1.66) e (1.68) de modo que estes últimos fiquem escritos somente em termos das variáveis k'_{ij} e P^{ij}, é necessario antes obter dos primeiros as seguintes expressões:

$$\Pi_{ij} = -(-2)^{(1-d)/(d-3)} P^{(d-3)^{-1}} k_{ij} \tag{1.95.a}$$

$$h^{1/2} = (-2)^{(1-d)/(d-3)} P^{(d-3)^{-1}} \tag{1.95.b}$$

$$h^{ij} = (\frac{4}{P})^{(d-3)^{-1}} P^{ij} \tag{1.95.c}$$

$$h_{ij} = (\frac{P}{4})^{(d-3)^{-1}} P_{ij} \tag{1.95.d}$$

onde $P \equiv \det P^{ij}$ e $P_{ij} \equiv (P^{ij})^{-1}$.

O resultado dessa substituição em $\bar{H}_a$ é:

$$\bar{H}_a = -2\ k'_{aj/i} P^{ij} + k'_{ij/a} P^{ij} \tag{1.96}$$

Ocorre porém que a variável h^{ij} ainda está presente na expressão acima, na forma de derivada covariante. Para elimina-la, escreve-se as derivadas covariantes explicitamente em termos das conexões:

$$k'_{ij/a} = k'_{ij,a} - \Gamma^{l}_{ia} k'_{lj} - \Gamma^{l}_{aj} k'_{il} \qquad (1.97);$$

depois usando:

$$P^{ij}_{\ /i} = 0 \qquad (1.98),$$

eliminam-se as conexões, e obtem-se:

$$\bar{H}_{a} = - 2\, k'_{aj,i} P^{ij} + k'_{ij,a} P^{ij} - 2\, k'_{aj} P^{ij}_{\ ,i} \qquad (1.99)$$

Vale frisar, como mostrado em [13], que (191.a) e (199) são geradores de trasformações de coordenadas.

A nova representação para o vínculo super-hamiltoniano (1.91.b) é:

$$\bar{H}_{o} = \left(\frac{P}{4}\right)^{(d-3)^{-1}} \frac{R_{ij} P^{ij}}{2} + \left[\frac{(d-1)}{2(d-2)} k'_{mn} k'_{ij} - k'_{mj} k'_{ni} - k'_{mi} k'_{nj}\right] P^{mn} P^{ij} \approx 0 \qquad (1.100)$$

onde

$$\left(\frac{P}{4}\right)^{(d-3)^{-1}} \frac{\tilde{R}_{ij} P^{ij}}{2} =$$

$$= ((2)^{1-d}\, P)^{(d-3)^{-1}} \Big[- P^{ij}_{\ ,i,j} - \frac{1}{4} P_{ij} P^{lb} P^{ij}_{\ ,l,b} +$$

$$+ \frac{1}{4(d-3)} \big(-4\, P_{ij}\, P^{ab}_{\ ,a}\, P^{ij}_{\ ,b} + (d-7) P_{ij}\, P^{kl}\, P^{ij}_{\ ,l,k} +$$

$$+ (d-7) P^{kl}\, P^{ij}_{\ ,k}\, P_{ij,l} + P_{ij}\, P_{ab}\, P^{kl}_{\ ,l}\, P^{ab}_{\ ,k} \big)\Big] \qquad (1.101)$$

Com isto, conclui-se a construção da teoria classica. A sua parte quântica será apresentada na introdução do capítulo 3.

CAPÍTULO 2

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM PARA O CAMPO GRAVITACIONAL EM TERMOS DE OUTRAS VARIÁVEIS CANÔNICAS

Neste capítulo são definidas novas variáveis canônicas $\tilde{h}^{ij}$, $h^{1/2}$, k e $\hat{k}_{ij}$, reescreve-se a ação de Einstein - Hilbert (1.3) termos delas, e aplica-se o formalismo de primeira ordem, tomando como variáveis independentes N, N^i, $h^{1/2}$, $\tilde{h}^{ij}$, $\hat{k}_{ij}$ e k. Isto leva a um número de vínculos de segunda classe maior do que o encontrado na seção 1.C do capítulo 1, possibilitando a obtenção de outras representações da equação de Wheeler - De Witt.

Como já foi visto no capítulo anterior, a ação de Einstein - Hilbert pode ser escrita na formulação ADM, como:

$$S = \int d^dx\, h^{1/2}[-2\, h^{ij}\mathring{k}_{ij} - \mathring{h}^{ij}k_{ij} +$$

$$+ N(\tilde{R} + k^2 - k^{ij}k_{ij}) - 2\, N^i(k^j_i - \delta^j_i\, k)_{/j}] \qquad (2.1)$$

Definem-se novas variáveis $\tilde{h}^{ij}$ e $\hat{k}_{ij}$ tal que:

$$h^{ij} =: (h^{1/2})^a\, \tilde{h}^{ij} \qquad (2.2.a)$$

e

$$k_{ij} =: \hat{k}_{ij} + \frac{1}{d-1}\, k\, h_{ij} \qquad (2.2.b),$$

onde $a = -\frac{2}{d-1}$

Nota-se que o determinante de $\tilde{h}^{ij}$ é igual a 1:

$$\det \tilde{h}^{ij} \equiv \tilde{h} = 1 \qquad (2.3)$$

e que $\hat{k}_{ij}$ é a parte sem traço de k_{ij}:

$$h^{ij}\, \hat{k}_{ij} = 0 \qquad (2.4)$$

As duas equações acima são vínculos que restringem a variação das variáveis canônicas. Deve-se, a fim de variá-las livremente, introduzir esses vínculos na ação por meio de multiplicadores de Lagrange. A ação S fica:

$$S = \int d^dx\, \{\, z(\tilde{h} - 1) + y(\hat{k}_{ij}h^{ij}) + h^{1/2}[-2\, h^{ij}\, \mathring{k}_{ij} - \mathring{h}^{ij}\, k_{ij} +$$

$$+ N(\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) - 2N^i(k^j_i - \delta^j_i k)_{/j}] \} \qquad (2.5)$$

onde z e y são os multiplicadores de Lagrange.

Substituindo na ação a expressão (2.2.b), e usando a equação abaixo:

$$h_{mn}\mathring{h}^{mn} = -2h^{-1/2}\mathring{h}^{1/2} \qquad (2.6),$$

a ação fica:

$$S = \int d^dx \, \{[h^{1/2}(-2h^{ij}\mathring{\hat{k}}_{ij} - \mathring{h}^{ij}\hat{k}_{ij}) - \mathring{k}h^{1/2} + \mathring{h}^{1/2}k - \frac{2k\mathring{h}^{1/2}}{d-1}] +$$

$$+ h^{1/2}[N(\tilde{R} + \frac{(d-2)}{(d-1)}k^2 - \frac{2}{d-1}h^{ij}\hat{k}_{ij}k - \hat{k}_{ij}\hat{k}^{ij}) -$$

$$-2N^i(\hat{k}^j_i - \frac{(d-2)k}{(d-1)}\delta^j_i)_{/j}] + z(\tilde{h} - 1) + y(h^{ij}\hat{k}_{ij}) \} \qquad (2.7)$$

A variação de (2.7) em $\hat{k}_{ij}$ leva à obtenção da expressão do multiplicador y:

$$y = 2h^{1/2}(Nk - N^n{}_{/n}) \qquad (2.8),$$

e também à seguinte equação:

$$h^{1/2}(\delta^{ij}_{mn} - \frac{1}{(d-1)}h^{ij}h_{mn})[-\mathring{h}^{mn} + 2Nk^{mn} - N^{m/n} - N^{n/m}] = 0 \qquad (2.9)$$

A variação em k leva a uma outra equação:

$$h_{mn}\mathring{h}^{mn} = 2(Nk - N^m{}_{/m}) \qquad (2.10),$$

que junto com (2.9) resulta em parte das equações de Einstein:

$$\overset{\circ}{h}^{mn} = 2Nk^{mn} - N^{m/n} - N^{n/m} \qquad (2.11)$$

O restante das equações de Einstein será obtido das variações em $h^{1/2}$ e $\tilde{h}^{ij}$. A variação em $\tilde{h}^{ij}$ leva à obtenção do outro multiplicador, z:

$$z = h^{1/2}\Big[- \frac{(d-2)}{(d-1)(d-1)} Nk^2 + \frac{1}{(d-1)} N \hat{k}_{ij}\hat{k}^{ij} + \frac{(d-2)}{(d-1)} N'^{c}{}_{/c} - $$
$$- N^{l/p}\hat{k}_{lp} - \frac{(d-2)}{(d-1)} N^l k,_{l}\Big] \qquad (2.12),$$

e à equação:

$$(\delta^{ij}_{mn} - \frac{1}{d-1} h^{ij}h_{mn})[\overset{\circ}{k}_{ij} - N,_{i/j} - N(\tilde{R}_{ij} + k\, k_{ij} - 2k^{p}{}_{i}k_{pj}) - $$
$$- N^l{}_{/i}k_{jl} - N^l{}_{/j}k_{il} - N^l k_{ij/l}] = 0 \qquad (2.13)$$

A variação em $h^{1/2}$ leva à equação:

$$h^{ij}\overset{\circ}{k}_{ij} = - N(\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) + N'^{c}{}_{/c} - 2N^{l/p}k_{lp} - N^l k,_{l} \qquad (2.14),$$

que junto com (2.13) resulta na outra parte das equações de Einstein:

$$\overset{\circ}{k}_{ij} = N,_{i/j} + N(\tilde{R}_{ij} + k\, k_{ij} - 2k^{p}{}_{i}k_{pj}) - N^l{}_{/i}k_{jl} - $$
$$- N^l{}_{/j}k_{il} - N^l k_{ij/l} \qquad (2.15)$$

As variações em N e N^i levam respectivamente às equações:

$$H_0 \equiv h^{1/2}(\tilde{R} + \frac{(d-2)}{(d-1)} k^2 - \frac{2}{d-1} h^{ij}\hat{k}_{ij} k - \hat{k}_{ij}\hat{k}^{ij}) = 0 \qquad (2.16.a)$$

$$H_i \equiv 2h^{1/2}(\hat{k}^j_i - \frac{(d-2)}{(d-1)} k\, \delta^j_i)_{/j} = 0 \qquad (2.16.b)$$

Repara-se que (2.11) traz de volta a relação de dependência entre h^{ij} e k_{ij} , ou seja, entre $\tilde{h}^{ij}$,$h^{1/2}$, $\hat{k}_{ij}$ e k, que havia sido ignorada. Essa é uma caracteristica do formalismo de primeira ordem, e ocorreu também na variação da ação (1.14) do campo eletromagnético em $F^{\mu\nu}$, restabelecendo a relação destas variáveis com as outras (A^{μ}), comforme foi visto no capítulo 1.

Os momenta conjugados às variaveis canônicas são:

$$\bar{\Pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{N}} = 0 \qquad (2.17.a)$$

$$\Pi_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{N}^i} = 0 \qquad (2.17.b)$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{h}^{1/2}} = \frac{(d-3)}{(d-1)} k - a\, h^{ij}\, \hat{k}_{ij} \qquad (2.17.c)$$

$$\tilde{\Pi}_{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{\tilde{h}}^{ij}} = - (h^{1/2})^{a+1}\, \hat{k}_{ij} \qquad (2.17.d)$$

$$\hat{P}^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{\hat{k}}_{ij}} = - 2\, h^{1/2}\, h^{ij} \qquad (2.17.e)$$

$$P \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{k}} = - h^{1/2} \qquad (2.17.f)$$

Nenhuma das velocidades pode ser invertida para os momenta. Tem-se portanto os seguintes vínculos primários:

$$\phi \equiv \Pi - \frac{(d-3)}{(d-1)} k + a\, h^{ij}\, \hat{k}_{ij} \approx 0 \qquad (2.18.a)$$

$$\tilde{\phi}_{ij} \equiv \tilde{\Pi}_{ij} + (h^{1/2})^{a+1}\, \hat{k}_{ij} \approx 0 \qquad (2.18.b)$$

$$\hat{\phi}^{ij} \equiv \hat{P}^{ij} + 2\, h^{1/2}\, h^{ij} \approx 0 \qquad (2.18.c)$$

$$\hat{\phi} \equiv P + h^{1/2} \approx 0 \qquad (2.18.d)$$

$$\bar{\Pi} \approx 0 \qquad (2.18.e)$$

$$\Pi_i \approx 0 \qquad (2.18.f)$$

além dos vínculos:

$$\tilde{h} - 1 \approx 0 \qquad (2.19.a)$$

$$h^{ab}\, \hat{k}_{ab} \approx 0 \qquad (2.19.b)$$

A Hamiltoniana canônica e a total são respectivamente:

$$H_c = \int d^{d-1}x \,\{\, [\, -N\, (\tilde{R} + \frac{(d-2)}{(d-1)} k^2 - \frac{2}{d-1} h^{ij}\, \hat{k}_{ij}\, k - \hat{k}_{ij}\, \hat{k}^{ij}) - 2\, N^i (\, \hat{k}^j{}_i - \frac{(d-2)}{(d-1)} k\, \delta^j_i\,)_{/j}] - z(\tilde{h} - 1) - y(h^{ij} k_{ij}) \,\} \qquad (2.20.a)$$

e

$$H_T = H_c + \int d^{d-1}x\, (\lambda\phi + \omega^{ij}\tilde{\phi}_{ij} + \lambda_{ij}\hat{\phi}^{ij} + \omega\hat{\phi}) \qquad (2.20.b)$$

onde λ, ω^{ij}, λ_{ij} e ω são multiplicadores de Lagrange. Os vínculos (2.18.e) e (2.18.f) não são incluidos por motivo semelhante àquele que levou os vínculos (1.33.a) e (1.33.b) do capítulo 1 a serem excluidos da teoria.

Os únicos parênteses de Poisson entre coordenadas e momenta canônicos, diferentes de zero, são:

$$\{N(x)\ ,\ \bar{\Pi}(y)\} = \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.21.a)$$

$$\{h^{1/2}(x)\ ,\ \Pi(y)\} = \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.21.b)$$

$$\{\hat{k}_{kl}(x)\ ,\ \hat{P}^{ij}(y)\} = \delta^{ij}_{kl}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.21.c)$$

$$\{N^{i}(x)\ ,\ \Pi_{l}(y)\} = \delta^{i}_{l}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.21.d)$$

$$\{\tilde{h}^{ij}(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} = \delta^{ij}_{kl}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.21.e)$$

$$\{k(x)\ ,\ P(y)\} = \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.21.f)$$

Por questões praticas, que se tornarão claras mais adiante, reescreve-se a Hamiltoniana total com uma nova nomenclatura para os vínculos primarios:

$$\begin{aligned} H_{T} = \int d^{d-1}x\ \{ & -h^{1/2}[\ N\ (\tilde{R} + \frac{(d-2)}{(d-1)}\ k^{2} - \frac{2}{d-1}\ h^{ij}\ \hat{k}_{ij}k - \hat{k}_{ij}\hat{k}^{ij}) - \\ & - 2\ N^{i}\ (\ \hat{k}^{j}_{\ i} - \frac{(d-2)}{(d-1)}\ \delta^{j}_{i}\ k\ )_{/j}] + \lambda\phi_{1} + \omega^{ij}\phi_{2ij} + y\phi_{3} + \\ & + \lambda_{ij}\phi^{ij}_{4} + \omega\phi_{5} + z\phi_{6}\ \} \end{aligned} \qquad (2.22)$$

onde tem-se:

$$\phi_{1} \equiv \phi \qquad (2.23.a)$$

$$\phi_{2ij} \equiv \tilde{\phi}_{ij} \qquad (2.23.b)$$

$$\phi_{3} \equiv h^{ij}\ \hat{k}_{ij} \qquad (2.23.c)$$

$$\phi^{ij}_{4} \equiv \hat{\phi}^{ij} \qquad (2.23.d)$$

$$\phi_5 \equiv \hat{\phi} \tag{2.23.e}$$

$$\phi_6 \equiv (\tilde{h} - 1) \tag{2.23.f}$$

Os parênteses de Poisson entre os "6" vínculos acima são:

$$\{\phi_1(x) \, , \, \phi_1(y)\} = 0 \tag{2.24.a}$$

$$\{\phi_1(x) \, , \, \phi_{2ij}(y)\} = -\,(h^{1/2})^{a} \, \hat{k}_{ij} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.b}$$

$$\{\phi_1(x) \, , \, \phi_3(y)\} = 0 \tag{2.24.c}$$

$$\{\phi_1(x) \, , \, \phi_4^{ij}(y)\} = -\,\frac{2(d-2)}{(d-1)} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.d}$$

$$\{\phi_1(x) \, , \, \phi_5(y)\} = -\,\frac{2(d-2)}{(d-1)} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.e}$$

$$\{\phi_1(x) \, , \, \phi_6(y)\} = 0 \tag{2.24.f}$$

$$\{\phi_{2ij}(x) \, , \, \phi_{2kl}(y)\} = 0 \tag{2.24.g}$$

$$\{\phi_{2ij}(x) \, , \, \phi_3(y)\} = -\,(h^{1/2})^{a} \, \hat{k}_{ij} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.h}$$

$$\{\phi_{2ij}(x) \, , \, \phi_4^{kl}(y)\} = -\,(h^{1/2})^{a+1} \, \delta^{kl}_{ij} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.i}$$

$$\{\phi_{2ij}(x) \, , \, \phi_5(y)\} = 0 \tag{2.24.j}$$

$$\{\phi_{2ij}(x) \, , \, \phi_6(y)\} = -\,(h^{1/2})^{a} \, h_{ij} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.l}$$

$$\{\phi_3(x) \, , \, \phi_3(y)\} = 0 \tag{2.24.m}$$

$$\{\phi_3(x) \, , \, \phi_4^{ij}(y)\} = h^{ij} \, \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.24.n}$$

$$\{\phi_3(x) \, , \, \phi_5(y)\} = 0 \tag{2.24.o}$$

$$\left\{\phi_3(x)\ ,\ \phi_6(y)\right\} = 0 \tag{2.24.p}$$

$$\left\{\phi_4^{ij}(x)\ ,\ \phi_4^{kl}(y)\right\} = 0 \tag{2.24.q}$$

$$\left\{\phi_4^{ij}(x)\ ,\ \phi_5(y)\right\} = 0 \tag{2.24.r}$$

$$\left\{\phi_4^{ij}(x)\ ,\ \phi_6(y)\right\} = 0 \tag{2.24.s}$$

$$\left\{\phi_5(x)\ ,\ \phi_5(y)\right\} = 0 \tag{2.24.t}$$

$$\left\{\phi_5(x)\ ,\ \phi_6(y)\right\} = 0 \tag{2.24.u}$$

$$\left\{\phi_6(x)\ ,\ \phi_6(y)\right\} = 0 \tag{2.24.v}$$

Denomina-se por $\mathcal{H}_C^*$ a seguinte expressão:

$$\mathcal{H}_C^* = - h^{1/2}\Big[\ N\ \Big(\ \tilde{R} + \frac{(d-2)}{(d-1)} k^2 - \frac{2}{d-1} h^{ij}\ \hat{k}\ {}_{ij}k - \hat{k}\ {}_{ij}\hat{k}^{ij}\ \Big) -$$

$$- 2\ N^i\Big(\ \hat{k}^j_{\ i} - \frac{(d-2)}{(d-1)}\ \delta^j_i\ k\ \Big)_{/j}\ \Big] \tag{2.25}$$

Assim a Hamiltoniana total pode ser escrita como:

$$H_T = \int d^{d-1}x\ \Big(\ \mathcal{H}_C^*(x) + \lambda^a(x)\phi_a(x)\Big) \tag{2.26}$$

onde a letra a , aqui, varia de 1 a 6; e as funções λ^a são definidas como:

$$\lambda^1 \equiv \lambda \tag{2.27.a}$$

$$\lambda^{2ij} \equiv \omega^{ij} \tag{2.27.b}$$

$$\lambda^3 \equiv y \tag{2.27.c}$$

$$\lambda^4_{ij} \equiv \lambda_{ij} \tag{2.27.d}$$

$$\lambda^5 \equiv \omega \tag{2.27.e}$$

$$\lambda^6 \equiv z \tag{2.27.f}$$

As condições de consistência dos vínculos (2.23) são dadas por:

$$\{H_T \, , \; \phi_b(y)\} = \int d^{d-1}x \; (\{\mathscr{H}^*_C(x) \, , \; \phi_b(y)\} + \lambda^a\{\phi_a(x) \, , \; \phi_b(y)\})$$

$$\approx 0 \tag{2.28}$$

Elas não levam a novos vínculos, mas sim, aos valores dos multiplicadores:

$$\lambda^1 \equiv \lambda = - h^{1/2}(Nk - N^n{}_{/n}) \tag{2.29.a}$$

$$\lambda^{2kl} \equiv \omega^{kl} = (h^{1/2})^{-a} \{ 2 N \hat{k}^{kl} - N^{k/l} - N^{l/k} - \frac{2}{d-1} h^{kl} N^n{}_{/n} \} \tag{2.29.b}$$

$$\lambda^3 \equiv y = 2 h^{1/2}(N k - N^n{}_{/n}) \tag{2.29.c}$$

$$\lambda^4_{ij} \equiv \lambda_{ij} = \frac{1}{d-1} N^{\prime c}{}_{/c} h_{ij} - N_{\prime i/j} + N \tilde{R}_{ij} + \frac{(d-3)}{(d-1)} N k \hat{k}_{ij} -$$

$$- 2 N \hat{k}^p{}_i \hat{k}_{pj} + N^l{}_{/i} \hat{k}_{jl} + N^l{}_{/j} \hat{k}_{il} + N^l \hat{k}_{ij/l} +$$

$$+ \frac{(d-2)}{(d-1)(d-1)} N \hat{k}_{mn} \hat{k}^{mn} h_{ij} \tag{2.29.d}$$

$$\lambda^5 \equiv \omega = - N^{\prime c}{}_{/c} + N^l k_{\prime l} + \frac{1}{d-1} N k^2 + N \hat{k}_{ij} \hat{k}^{ij} \tag{2.29.e}$$

$$\lambda^{\sigma} \equiv z = h^{1/2}\Big[\frac{(d-2)}{(d-1)(d-1)}\, N\, k^2 + \frac{1}{d-1}\, N\, \hat{k}_{ij}\hat{k}^{ij} + \frac{(d-2)}{(d-1)}\, N^{/c}{}_{/c} -$$

$$- N^{l/p}\, \hat{k}_{p} - \frac{(d-2)}{(d-1)}\, N^{l} k_{/l} \Big] \qquad (2.29.f)$$

Os multiplicadores λ^{3} e λ^{σ} correspondem aos valores encontrados no formalismo Lagrangeano. Os outros são os necessários para que as equações de Hamilton dêem as equações de Einstein. Os vínculos primários (2.18.e) e (2.18.f) porém levam aos seguintes vínculos secundários:

$$H_{o} = - h^{1/2}\, (\tilde{R} + k^2 - k_{ij}k^{ij}) \approx 0 \qquad (2.30.a)$$

$$H_{i} = 2\, h^{1/2}\, (k^{j}{}_{i} - \delta^{j}_{i}\, k)_{/j} \approx 0 \qquad (2.30.b)$$

No cálculo dos parênteses de Poisson entre os vínculos pôde-se observar que não houve nenhum vínculo que apresentasse parênteses de Poisson nulo com todos os outros. Portanto todos esses vínculos são de segunda classe. Deve-se neste caso trabalhar com parênteses de Dirac no lugar de parênteses de Poisson, como é discutido no apêndice A. Da mesma forma que no capítulo 1, N e N^{i} são arbitrários, e portanto, H_{o} e H_{i} são vínculos de primeira classe. Relembrando, a expressão geral para os parênteses de Dirac entre duas funções A(x) e B(y) é:

$$\{A(x)\ ,\ B(y)\}^{*} \equiv \{A(x)\ ,\ B(y)\} -$$

$$- \int du\, dv\, \{A(x)\ ,\ \phi^{\alpha}(u)\}\, (C^{-1})_{\alpha\beta}(u,v)\, \{\phi^{\beta}(v)\ ,\ B(y)\} \qquad (2.31)$$

onde tem-se:

$$C_{\alpha\beta} = \{\phi_{\alpha}\ ,\ \phi_{\beta}\} \qquad (2.32)$$

dados por (2.16).

É necessário portanto obter C^{-1} antes de iniciar o cálculo dos parênteses de Dirac.

Para facilitar o cálculo de C^{-1}, escreve-se a matriz C separada em blocos :

$$C = \begin{pmatrix} M & N \\ -N^T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

A matriz invérsa, também separada em blocos, fica:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-N^T)^{-1} \\ -N^T & N^{-1}M(N^T)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

O cálculo de C^{-1} resume-se então no cálculo da matriz N^{-1}, da transposta, e na multiplicação matricial $N^{-1}M(N^T)^{-1}$.

O cálculo de N^{-1} através da solução do sistema de equações $N^{-1}N = 1$ pode ser auxiliado pela relação que existe entre os multiplicadores de lagrange λ_a e os parênteses de Poisson dos vínculos ϕ^b com H^*_c, dada por:

$$\lambda_a = - \int d^{d-1}y \; C^{-1}_{ab} \left\{ \phi^b(x) \, , \, H^*_c(y) \right\} \tag{2.35}$$

Esta relação é equivalente à relação (A.23) apresentada no apêndice A.

Dos parênteses de Poisson (2.24), vê-se que a matriz N é dada por:

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{(d-2)}{(d-1)}h^{ij} & -\frac{2(d-2)}{(d-1)} & 0 \\ -(h^{1/2})^{a+1}\delta^{kl}_{ij} & 0 & -(h^{1/2})^{a}h_{ij} \\ h^{ij} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

e a matriz N^{-1} é:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}_{14} & -C^{-1}_{15} & -C^{-1}_{16} \\ -C^{-1}_{24} & -C^{-1}_{25} & -C^{-1}_{26} \\ -C^{-1}_{34} & -C^{-1}_{35} & -C^{-1}_{36} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

A equação $N^{-1}N = 1$ leva de imediato a alguns elementos de C^{-1}, como por exemplo:

$$C^{-1}_{14} = 0 \tag{2.38.a}$$

$$C^{-1}_{15} = \frac{(d-1)}{2(d-2)} \tag{2.38.b}$$

$$C^{-1}_{16} = 0 \tag{2.38.c}$$

Leva também a algumas relações úteis, tais como:

$$h_{ij}\,(C^{-1}_{25})^{ij} = 0 \tag{2.39.a}$$

$$h_{ij}\,(C^{-1}_{24})^{ij}_{kl} = 0 \tag{2.39.b}$$

Usando agora a relação (2.35) para a = 2, obtem-se:

$$(h^{1/2})^{-a} \left(2 N \hat{k}^{ij} - N^{i/j} - N^{j/i} + \frac{2}{d-1} h^{ij} N^{n}{}_{/n} \right) =$$

$$= (C^{-1}_{24})^{ij}_{kl} \left(\frac{2}{d-1} N k h^{kl} + 2h^{1/2} N \hat{k}^{kl} - h^{1/2} N^{k/l} - h^{1/2} N^{l/k} \right) -$$

$$- (C^{-1}_{25})^{ij} \frac{2(d-2)}{(d-1)} \left[N k - h^{1/2} N^{n}{}_{/n} \right] \qquad (2.40)$$

Com base na relação (2.39.b) supõe-se a expressão de $(C^{-1}_{24})^{ij}_{kl}$ seja do tipo abaixo:

$$(C^{-1}_{24})^{ij}_{kl} = (h^{1/2})^{-a-1} (\delta^{ij}_{kl} - \frac{1}{d-1} h^{ij} h_{kl}) \qquad (2.41)$$

Substituindo-se esta expressão (2.41) em (2.40), obtem-se:

$$C^{-1}_{25} = 0 \qquad (2.42)$$

Com um procedimento semelhante a este acima, obtem-se todos os elementos da matriz N^{-1}, que são os seguintes:

$$N^{-1}_{11} \equiv - C^{-1}_{14} = 0 \qquad (2.43.a)$$

$$N^{-1}_{12} \equiv - C^{-1}_{24} = - (h^{1/2})^{-a-1} (\delta^{ij}_{kl} - \frac{1}{d-1} h^{ij} h_{kl}) \qquad (2.43.b)$$

$$N^{-1}_{13} \equiv - C^{-1}_{34} = \frac{1}{d-1} h_{ij} \qquad (2.43.c)$$

$$N^{-1}_{21} \equiv - C^{-1}_{15} = - \frac{(d-1)}{d(d-2)} \qquad (2.43.d)$$

$$N^{-1}_{22} \equiv - C^{-1}_{25} = 0 \qquad (2.43.e)$$

$$N^{-1}_{23} \equiv - C^{-1}_{35} = -1 \tag{2.43.f}$$

$$N^{-1}_{31} \equiv - C^{-1}_{16} = 0 \tag{2.43.g}$$

$$N^{-1}_{32} \equiv - C^{-1}_{26} = - \frac{1}{d-1} (h^{1/2})^{-\alpha} h^{ij} \tag{2.43.h}$$

$$N^{-1}_{33} \equiv - C^{-1}_{36} = -\frac{1}{d-1} h^{1/2} \tag{2.43.i}$$

Sabendo-se que $(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T$, pode-se calcular os elementos restantes de C^{-1}tendo apenas que efetuar multiplicações de matrizes. Os elementos de C^{-1} obtidos são os seguintes:

$$C^{-1}_{ij} = 0 \quad \text{p/ valores de i e j entre 1 e 3} \tag{2.44.a}$$

$$C^{-1}_{14} = 0 \tag{2.44.b}$$

$$C^{-1}_{15} = \frac{(d-1)}{2(d-2)} \tag{2.44.c}$$

$$C^{-1}_{16} = 0 \tag{2.44.d}$$

$$C^{-1}_{24} = (h^{1/2})^{-\alpha-1}(\delta^{ij}_{kl} - \frac{1}{d-1} h^{ij}h_{kl}) \tag{2.44.e}$$

$$C^{-1}_{25} = 0 \tag{2.44.f}$$

$$C^{-1}_{26} = \frac{1}{d-1} (h^{1/2})^{-\alpha} h^{ij} \tag{2.44.g}$$

$$C^{-1}_{34} = \frac{1}{d-1} h_{ij} \tag{2.44.h}$$

$$C^{-1}_{35} = 1 \tag{2.44.i}$$

$$C^{-1}_{36} = \frac{1}{d-1} h^{1/2} \tag{2.44.j}$$

$$C^{-1}_{41} = 0 \tag{2.44.l}$$

$$C^{-1}_{42} = - (h^{1/2})^{-\alpha-1}(\delta^{ij}_{kl} - \frac{1}{d-1} h^{ij}h_{kl}) \tag{2.44.m}$$

$$C^{-1}_{43} = \frac{1}{d-1}\, h_{ij} \tag{2.44.n}$$

$$C^{-1}_{44} = \frac{1}{d-1}\, (h^{1/2})^{-1} (\hat{k}_{kl} h_{rs} - \hat{k}_{rs} h_{kl}) \tag{2.44.o}$$

$$C^{-1}_{45} = -\, \frac{(d-3)}{2(d-2)}\, (h^{1/2})^{-1}\, \hat{k}_{kl} \tag{2.44.p}$$

$$C^{-1}_{46} = -\, \frac{1}{d-1}\, \hat{k}_{kl} \tag{2.44.q}$$

$$C^{-1}_{51} = -\, \frac{(d-1)}{2(d-2)} \tag{2.44.r}$$

$$C^{-1}_{52} = 0 \tag{2.44.s}$$

$$C^{-1}_{53} = -1 \tag{2.44.t}$$

$$C^{-1}_{54} = \frac{(d-3)}{2(d-2)}\, (h^{1/2})^{-1} \hat{k}_{kl} \tag{2.44.u}$$

$$C^{-1}_{61} = 0 \tag{2.44.v}$$

$$C^{-1}_{62} = -\, \frac{1}{d-1}\, (h^{1/2})^{-\alpha}\, h^{ij} \tag{2.44.v}$$

$$C^{-1}_{63} = -\, \frac{1}{d-1}\, h^{1/2} \tag{2.44.x}$$

$$C^{-1}_{64} = \frac{1}{d-1}\, \hat{k}_{rs} \tag{2.44.y}$$

$$C^{-1}_{kl} = 0 \qquad \text{p/ valores de k e l entre 5 e 6} \tag{2.44.z}$$

De posse da matriz C^{-1} já é possível calcular os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas. Os vínculos de segunda classe tornam-se então igualdades fortes, podendo gerar novas representações. Calcula-se então os parenteses de Dirac entre todas as combinações das variáveis $h^{1/2}$, Π , $\tilde{h}^{ij}$ e $\tilde{\Pi}_{ij}$ para verificar se estas são boas variáveis canônicas.

Lembrando mais uma vez, a expressão geral dos parenteses de

Dirac entre duas funções A(x) e B(y) é:

$$\{A(x)\ ,\ B(y)\}^{*} = \{A(x)\ ,\ B(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{A(x)\ ,\ \phi^{\alpha}(u)\}\ (C^{-1})_{\alpha\beta}(u,v)\ \{\phi^{\beta}(v)\ ,\ B(y)\} \tag{2.45}$$

Cálculo de $\{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\}^{*}$:

$$\{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\}^{*} =$$

$$= - \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{3}(u)\}\ (C^{-1}_{34})_{mn}\ \{\phi^{4mn}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{3}(u)\}\ (C^{-1}_{3\sigma})\ \{\phi^{\sigma}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{4mn}(u)\}\ (C^{-1}_{43})_{mn}\ \{\phi^{3}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{4mn}(u)\}\ (C^{-1}_{44})_{mnrs}\{\phi^{4rs}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{4mn}(u)\}\ (C^{-1}_{4\sigma})_{mn}\ \{\phi^{\sigma}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{\sigma}(u)\}\ (C^{-1}_{\sigma 3})\ \{\phi^{3}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} -$$

$$- \int du\ dv\ \{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \phi^{\sigma}(u)\}\ (C^{-1}_{\sigma 4})\ \{\phi^{4}(v)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\} =$$

$$= - \int dudv\ ((h^{1/2})^{a}\ \hat{k}_{ij}\delta(x-u))(\tfrac{1}{d-1}\ h_{mn}\delta(u-v))(2h^{1/2}\delta^{mn}_{kl}\ \delta(v-y)) +$$

$$+ \int dudv\ ((h^{1/2})^{a}\ \hat{k}_{ij}\delta(x-u))(\tfrac{1}{d-1}\ h^{1/2}\delta(u-v))((h^{1/2})^{a}\ \tilde{h}\ h_{kl}\delta(v-y)) -$$

$$+ \int dudv\ (2(h^{1/2})^{a+1}\delta^{mn}_{ij}\delta(x-u))(\tfrac{1}{d-1}\ (h^{1/2})^{-1}(\hat{k}_{mn}h_{rs} - \hat{k}_{rs}h_{mn})\delta(u-v))\times$$
$$\times(2(h^{1/2})^{a+1}\delta^{rs}_{kl}\ \delta(v-y)) -$$

$$- \int dudv\ (2(h^{1/2})^{a+1}\delta^{mn}_{ij}\ \delta(x-u))(\tfrac{1}{d-1}\ \hat{k}_{mn}\delta(u-v))\times$$
$$\times((h^{1/2})^{a}\ \tilde{h}\ h_{kl}\delta(v-y)) -$$

$$- \int dudv\ ((h^{1/2})^{\alpha}\ \tilde{h}\ h_{ij}\delta(x-y))(\frac{1}{d-1}\ h^{1/2}\delta(u-v))((h^{1/2})^{\alpha}\ \hat{k}_{kl}\delta(v-y)) +$$

$$+ \int dudv\ ((h^{1/2})^{\alpha}\ \tilde{h}\ h_{ij}\delta(x-u))(\frac{1}{d-1}\ \hat{k}_{mn}\delta(u-v))(2(h^{1/2})^{\alpha+1}\delta(v-y)) =$$

$$= \frac{1}{d-1}\ (h^{1/2})^{2\alpha+1}(\hat{k}_{ij}\ h_{kl} - \hat{k}_{kl}\ h_{ij})\ \delta(x-y) \qquad (2.46)$$

Os outros parênteses de Dirac são:

$$\{h^{1/2}(x)\ ,\ h^{1/2}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.a)$$

$$\{h^{1/2}(x)\ ,\ \Pi(y)\}^{*} = \frac{(d-3)}{2(d-2)}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.b)$$

$$\{h^{1/2}(x)\ ,\ \tilde{h}^{ij}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.c)$$

$$\{h^{1/2}(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{ij}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.d)$$

$$\{\Pi(x)\ ,\ \Pi(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.e)$$

$$\{\Pi(x)\ ,\ \tilde{h}^{ij}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.f)$$

$$\{\Pi(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{ij}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.g)$$

$$\{\tilde{h}^{ij}(x)\ ,\ \tilde{h}^{kl}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.h)$$

$$\{\tilde{h}^{ij}(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\}^{*} = (-\ \delta^{ij}_{kl} + \frac{1}{d-1}\ h^{ij}\ h_{kl})\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.i)$$

$$\{\tilde{\Pi}_{ij}(x)\ ,\ \tilde{\Pi}_{kl}(y)\}^{*} = \frac{1}{d-1}\ (h^{1/2})^{2\alpha+1}(\hat{k}_{ij}\ h_{kl} - \hat{k}_{kl}\ h_{ij})\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.j)$$

Os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas k , P , $\hat{k}_{ij}$ e $\hat{P}^{ij}$, são:

$$\{k(x)\ ,\ k(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.a)$$

$$\{k(x)\ ,\ P(y)\}^{*} = \frac{(d-1)}{2(d-2)}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.b)$$

$$\{k(x)\ ,\ \hat{k}_{ij}(y)\}^{*} = \frac{(d-3)}{2(d-2)}\ (h^{1/2})^{-1}\ k_{ij}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.c)$$

$$\{k(x)\ ,\ \hat{P}^{ij}(y)\}^{*} = \frac{(d-3)}{(d-2)}\ h^{ij}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.d)$$

$$\{P(x)\ ,\ P(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.e)$$

$$\{P(x)\ ,\ \hat{k}_{ij}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.f)$$

$$\{P(x)\ ,\ \hat{P}^{ij}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.g)$$

$$\{\hat{k}_{ij}(x)\ ,\ \hat{k}_{kl}(y)\}^{*} = \frac{1}{d-1}\ (h^{1/2})^{-1}(\hat{k}_{ij}h_{kl} - \hat{k}_{kl}h_{ij})\delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.h)$$

$$\{\hat{k}_{ij}(x)\ ,\ \hat{P}^{kl}(y)\}^{*} = 2\ (\delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{d-1}\ h^{kl}h_{ij})\delta^{d-1}(x-y) \qquad (2.47.i)$$

$$\{\hat{P}^{ij}(x)\ ,\ \hat{P}^{kl}(y)\}^{*} = 0 \qquad (2.47.j)$$

Observa-se, pelas expressões dos parênteses de Dirac, que nenhum dos dois conjuntos de variáveis canônicas forma um conjunto de boas variáveis canônicas. Será necessário redefinir novas variáves canônicas. Sejam T e E estas novas variáveis dadas por:[8]

$$T \equiv \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}}\ \ln\ (h^{1/2}) \qquad (2.48.a)$$

$$E \equiv \frac{(d-2)^{1/2}(d-1)^{1/2}}{(d-3)}\ h^{1/2}\ \Pi \qquad (2.48.b)$$

Calculam-se os parênteses de Dirac entre o novo conjunto de variáveis canônicas $\{ T , E , \tilde{h}^{ij}, \tilde{\Pi}_{ij} \}$:

$$\{T , E\}^* = \frac{2(d-2)}{(d-3)} \{\ln h^{1/2}, h^{1/2} \Pi\}^* =$$

$$= \frac{2(d-2)}{(d-3)} \{\ln h^{1/2}, h^{1/2}\}^* \Pi + \frac{2(d-2)}{(d-3)} \{\ln h^{1/2}, \Pi\}^* h^{1/2} \tag{2.49}$$

Os parênteses $\{\ln h^{1/2}, h^{1/2}\}^*$ e $\{\ln h^{1/2}, \Pi\}^*$ serão calculados separadamente:

$$\{\ln h^{1/2}(x) , h^{1/2}(y)\}^* =$$

$$= - \int dudv \{\ln h^{1/2}(x) , \phi^{\alpha}(u)\}(C^{-1})_{\alpha\beta}(u,v)\{\phi^{\beta}(v) , h^{1/2}(y)\} =$$

$$= 0 \tag{2.50}$$

$$\{\ln h^{1/2}(x) , \Pi(y)\}^* = \{\ln h^{1/2}(x) , \Pi(y)\} -$$

$$- \int dudv \{\ln h^{1/2}(x) , \phi^{\alpha}(y)\}(C^{-1})_{\alpha\beta}(u,v)\{\phi^{\beta}(v) , \Pi(y)\} =$$

$$= \int d^{d-1}z \frac{\partial(\ln h^{1/2}(x))}{\partial h^{1/2}(z)} \frac{\partial\Pi(y)}{\partial\Pi(z)} -$$

$$- \int dudv \{\ln h^{1/2}(x) , \phi^{1}(u)\}(C^{-1})_{15}\{\phi^{5}(v) , \Pi(y)\} =$$

$$= h^{-1/2} \delta^{d-1}(x-y) - \int dudv\ h^{-1/2}\delta^{d-1}(x-u)\frac{(d-1)}{2(d-2)} \delta^{d-1}(u-v) =$$

$$= \frac{(d-3)}{2(d-2)} h^{-1/2} \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.51}$$

Substituinto (2.50) e (2.51) em (2.49), obtem-se:

$$\left\{ T(x) \ , \ E(y) \right\}^{*} = \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.52}$$

Os outros parênteses de Dirac são:

$$\left\{ T \ , \ T \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.a}$$

$$\left\{ T \ , \ E \right\}^{*} = \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.53.b}$$

$$\left\{ T \ , \ \tilde{h}^{ij} \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.c}$$

$$\left\{ T \ , \ \tilde{\Pi}_{ij} \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.d}$$

$$\left\{ E \ , \ E \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.e}$$

$$\left\{ E \ , \ \tilde{h}^{ij} \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.f}$$

$$\left\{ E \ , \ \tilde{\Pi}_{ij} \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.g}$$

$$\left\{ \tilde{h}^{ij} \ , \ \tilde{h}^{kl} \right\}^{*} = 0 \tag{2.53.h}$$

$$\left\{ \tilde{h}^{ij} \ , \ \tilde{\Pi}_{ij} \right\}^{*} = \left(- \delta^{ij}_{kl} + \frac{1}{d-1} h^{ij} h_{kl} \right) \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.53.i}$$

$$\left\{ \tilde{\Pi}_{ij} \ , \ \tilde{\Pi}_{kl} \right\}^{*} = - \frac{h^{-1/2}}{d-1} \left(\tilde{\Pi}_{ij} \ h_{kl} - \tilde{\Pi}_{kl} \ h_{ij} \right) \delta^{d-1}(x-y) \tag{2.53.j}$$

Utiliza-se os vínculos de segunda classe (2.18.a), (2.18.b) e (2.18.c) que agora são igualdades fortes:

$$\Pi - \frac{(d-3)}{(d-1)} k + a \ h^{ij} \ \hat{k}_{ij} = 0 \tag{2.54.a}$$

$$\tilde{\Pi}_{ij} + (h^{1/2})^{a+1} \ \hat{k}_{ij} = 0 \tag{2.54.b}$$,

$$\tilde{h}^{ij}\,\hat{k}_{ij} = 0 \tag{2.54.c}$$

para substituir na expressão (2.16.b) de H_i:

$$H_i = -\,2\,h^{1/2}\,(\hat{k}_i{}^j{}_{/j} - \frac{(d-2)}{(d-1)}\,k,_i) \tag{2.55}$$

as variáveis k e $\hat{k}_{ij}$, pelas variáveis $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$, E e T , obtendo-se:

$$H_i = 2\,\tilde{\Pi}_{il,j}\,\tilde{h}^{lj} + \tilde{h}^{ab},_i\,\tilde{\Pi}_{ab} + 2\,\tilde{h}^{aj},_j\,\tilde{\Pi}_{ia} +$$

$$+\,\frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}}\,E,_i - T,_i\,E \tag{2.56}$$

O vínculo deve manter o seu significado físico em qualquer representação. Pode-se verificar isto calculando-se os seguintes parênteses de Dirac:

$$\left\{\tilde{h}^{ij}(x)\ ,\ \int d^{d-1}y\ \ \xi^b(y)\,H_b(y)\right\}^* = \tilde{h}^{ib}\,\xi^j,_b + \tilde{h}^{bj}\,\xi^i,_b -$$

$$-\,\tilde{h}^{ij},_m\,\xi^m + a\,\tilde{h}^{ij}\,\xi^n,_n \tag{2.57}$$

O vínculo H_i é portanto gerador de transformações de coordenadas, como mostra-se a seguir:

Numa transformação de coordenadas $\tilde{h}^{ij}$ se transforma como:

$$\tilde{h}'^{ij}(x') = J^w\,\frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\,\frac{\partial x'^j}{\partial x^b}\,\tilde{h}^{ab}(x) \tag{2.58},$$

onde $w = a = -\frac{2}{d-1}$ é o peso da densidade tensorial $\tilde{h}^{ij}$.

Considerando-se uma transformação infinitesimal:

$$x'^{i} = x^{i} + \xi^{i}$$

então tem-se:

$$J^{w} = 1 + w\,\xi^{i}{}_{,i} \qquad (2.59),$$

Sabendo-se que a expansão de $\tilde{h}'^{ij}(x')$ em série de Taylor é:

$$\tilde{h}'^{ij}(x') = \tilde{h}'^{ij}(x) + \tilde{h}^{ij}(x)_{,a}\,\xi^{a} \qquad (2.60),$$

pode-se então mostrar que $\tilde{h}^{ij}$ se transforma exatamente como a expressão do lado direito de (2.57):

$$\delta\tilde{h}^{ij} = \tilde{h}'^{ij}(x) - \tilde{h}^{ij}(x) = \tilde{h}^{ib}\,\xi^{j}{}_{,b} + \tilde{h}^{jb}\,\xi^{i}{}_{,b} -$$

$$- \tilde{h}^{ij}{}_{,m}\,\xi^{m} + a\,\tilde{h}^{ij}\,\xi^{n}{}_{,n} \qquad (2.61)$$

Utiliza-se novamente as equações fortes (2.54.a), (2.54.b) e (2.54.c) para se substituir na expressão (2.16.a) de H_o:

$$H_o = h^{1/2}(\tilde{R} + \frac{(d-2)}{(d-1)}\,k^2 - \frac{2}{d-1}\,h^{ij}\,\hat{k}_{ij}\,k - \hat{k}_{ij}\,\hat{k}^{ij}) \qquad (2.62)$$

as variáveis k e $\hat{k}_{ij}$, pelas variáveis $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$, E e T, obtendo-se:

$$H_o = - \exp(-T/c) \left(\exp(T/c) \tilde{R} + E^2 - \tilde{h}^{ik} \tilde{h}^{jl} \tilde{\Pi}_{ij} \tilde{\Pi}_{kl} \right) \tag{2.63}$$

Aquí encerra a parte clássica da teoria. A parte quântica será apresentada na seção 3.A do próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

No capítulo anterior e na seção 1.C do capítulo 1 foi vista a parte clássica da teoria da gravitação. Neste capítulo seguir-se-á o processo de quantização canônica, começando-se pela extensão da seção 1.C, que é uma revisão do artigo de Gleiser Holman e Neto[13].

O processo de quantização canônica consiste nas seguintes etapas:

1- As variáveis canônicas h^{ij}, Π'_{ij} , k_{ij} e P^{ij} são associadas a operadores.

2- Os vínculos de segunda classe:

$$P^{ij} = - 2\, h^{1/2}\, h^{ij} \qquad (3.1.a)$$

$$k_{ij} = h^{1/2}\, (\Pi'_{ij} - \frac{1}{d-2}\, h_{ij}\Pi') \qquad (3.1.b)$$

passam, portanto, a ser identidades entre operadores. Estes vínculos foram utilizados na seção 1.C para se eliminar as variáveis k_{ij} e P^{ij} das equações, e se trabalhar na representação h_{ij} , Π'_{ij} .

3- Os parênteses de Dirac das variáveis dessa representação:

$$\{h^{ij}(x)\ ,\ h^{kl}(y)\}^{*} = 0 \qquad (3.2.a)$$

$$\{\Pi'_{ij}(x)\ ,\ \Pi'_{kl}(y)\}^{*} = 0 \qquad (3.2.b)$$

$$\{h^{ij}(x)\ ,\ \Pi'_{kl}(y)\}^{*} = \delta^{ij}_{kl}\ \delta^{d-1}(x-y) \qquad (3.2.c)$$

são associados a comutadores entre operadores, através da relação:

$$[A\ ,\ B] = i\ \hbar\ \{A\ ,\ B\}^{*} \qquad (3.3)$$

Daquí para a frente $\hbar$ será considerado como igual a 1.

Uma representação que satisfaz estas relações de comutação é:

$$\Pi'_{kl} = -i\ \frac{\partial}{\partial h^{kl}} \qquad (3.4.a)$$

$$h_{kl} = h_{kl} \qquad (3.4.b)$$

4- A Hamiltoniana, em termos dos operadores, deveria levar a equação de Schroedinger:

$$H\ \Psi = i\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} \qquad (3.5)$$

onde Ψ é uma função que pertence a um espaço de Hilbert. Porém, como a Hamiltoniana H_t é um vínculo, tem-se:

$$H\ \Psi = 0 \qquad (3.6.a)$$

e portanto:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = 0 \qquad (3.6.b)$$

5- Substituem-se nos vínculos:

$$\overline{H}_i = 2\ \Pi'^{\,j}_{i\ /j} \approx 0 \qquad (3.7.a)$$

$$\overline{H}_o = \frac{1}{2}\ h^{-1/2}\ [h^{ik}\ h^{jl} + h^{il}\ h^{jk} - \frac{2}{d-2}\ h^{ij}\ h^{kl}]\ \Pi'_{ij}\ \Pi'_{kl} \qquad (3.7.b)$$

as variáveis canônicas pelos respectivos operadores, e aplica-os às funções de onda. No presente caso, são eles que vão reger a dinâmica do campo gravitacional. Eles restringem o espaço de Hilbert às funções que satisfazem às seguintes equações:

$$\overline{H}_i\ \Psi(h) = h^{jl} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial h^{ij}}\right)_{/l} = 0 \qquad (3.8.a)$$

$$\tilde{H}_o\, \Psi(h) = G^{ijkl} \frac{\partial^2 \Psi(h)}{\partial h^{ij}\, \partial h^{kl}} - h^{1/2}\, \tilde{R}\, \Psi(h) = 0 \qquad (3.8.b)$$

onde

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} \left[h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk} - \frac{2}{d-2} h^{ij} h^{kl} \right] \qquad (3.9)$$

A restrição imposta às funções de onda Ψ pela equação (3.8.a) faz com que os Ψ de métricas que difiram apenas por uma transformação de coordenadas, sejam iguais.

A equação (3.8.b) é a equação de Wheeler-De Witt[11,12] na representação (h^{ij}, Π'_{kl}). Nela, G^{ijkl} pode ser interpretada como uma métrica do espaço das métricas h^{ij} (superespaço)[11, 12].

Os autovalores da matriz G^{ijkl} são todos positivos com a excessão de um deles, que é negativo[11]. Isto indica a existência de uma coordenada tipo-tempo e, portanto, (3.8.b) é uma equação hiperbólica.

No restante deste capítulo será seguido o processo de quantização canônica para as outras representações decorrentes dos resultados do capítulo 2.

3.A - Representação ($\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$, T , E):

As etapas do processo de quantização que se segue nessa representação são:

1- As variáveis canônicas $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$, T e E são associadas a operadores.

2- Os vínculos de segunda classe:

$$\Pi - \frac{(d-3)}{(d-1)} k + a(h^{1/2})^{a} \tilde{h}^{ij} \hat{k}_{ij} = 0 \qquad (3.10.a)$$

$$\tilde{\Pi}_{ij} + (h^{1/2})^{a+1} \hat{k}_{ij} = 0 \qquad (3.10.b)$$

$$\tilde{h}^{ij} \hat{k}_{ij} = 0 = \tilde{h}^{ij} \tilde{\Pi}_{ij} \qquad (3.10.c)$$

passam a ser identidades entre operadores.

O ordenamento na equação (3.10.c) é importante. Mais adiante é escolhido o outro ordenamento e serão vistas as suas consequências. Por enquanto segue-se este ordenamento.

3- Os parênteses de Dirac são associados a comutadores entre os operadores.

Uma representação que satisfaz as relações de comutação é:

$$T = T \qquad (3.11.a)$$

$$E = - i \frac{\partial}{\partial T} \qquad (3.11.b)$$

$$\tilde{h}^{ij} = \tilde{h}^{ij} \qquad (3.11.c)$$

$$\tilde{\Pi}_{ij} = - i (- \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{ij}} + \tilde{h}_{ij} \tilde{h}^{kl} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{kl}}) \tag{3.11.d}$$

A seguir, verifica-se a relação de comutação entre os operadores $\tilde{\Pi}_{ij}$ e $\tilde{\Pi}_{kl}$ quando aplicada a uma função Ψ.

$$[\tilde{\Pi}_{ij} , \tilde{\Pi}_{kl}] \Psi = \tilde{\Pi}_{ij} \tilde{\Pi}_{kl} - \tilde{\Pi}_{kl} \tilde{\Pi}_{ij} =$$

$$= - \{ (- \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{ij}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{ij} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{mn}}) \times$$

$$\times (- \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{kl}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{kl} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{mn}}) -$$

$$- (- \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{kl}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{kl} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{mn}}) (- \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{ij}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{ij} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{mn}}) \} \Psi =$$

$$= (- \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{kl} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{kl}} + \frac{1}{(d-1)^2} \tilde{h}_{ij} \tilde{h}^{rs} \frac{\partial (\tilde{h}_{kl} \tilde{h}^{mn})}{\partial \tilde{h}^{rs}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{mn}} +$$

$$+ \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{kl}} - \frac{1}{(d-1)^2} \tilde{h}_{kl} \tilde{h}^{rs} \frac{\partial (\tilde{h}_{ij} \tilde{h}^{mn})}{\partial \tilde{h}^{rs}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{mn}}) =$$

$$= \frac{1}{d-1} (\tilde{h}_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{kl}} - \tilde{h}_{kl} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{ij}}) =$$

$$= \frac{1}{d-1} (\tilde{h}_{ij} \tilde{\Pi}_{kl} - \tilde{h}_{kl} \tilde{\Pi}_{ij}) \Psi \tag{3.12}$$

o que está de acordo com (2.53.j) em termos de $\tilde{h}^{ij}$:

$$\{ \tilde{\Pi}_{ij}(x) , \tilde{\Pi}_{kl}(y) \}^{*} = - \frac{1}{d-1} (\tilde{\Pi}_{ij} \tilde{h}_{kl} - \tilde{\Pi}_{kl} \tilde{h}_{ij}) \delta^{d-1}(x-y) \tag{3.13}$$

Essa primeira relação de comutação é satisfeita. É fácil verificar que as outras relações também o são.

Deve-se notar que não importa o ordenamento das variáveis $\tilde{\Pi}_{ij}$ e $\tilde{h}_{ij}$ no lado direito da equação (3.13) contanto que se mantenha o mesmo ordenamento em seus dois termos.

Um ordenamento simetrizado:

$$\left\{\Pi_{ij}(x)\ ,\ \Pi_{kl}(y)\right\}^{*} = -\ \frac{1}{d-1}\ [\,(\tilde{\Pi}_{ij}\tilde{h}_{kl} + \tilde{h}_{kl}\tilde{\Pi}_{ij}) - (\tilde{h}_{ij}\tilde{\Pi}_{kl} + \tilde{\Pi}_{kl}\tilde{h}_{ij})\,] \tag{3.14}$$

satisfaz também as mesmas relações de comutação (3.12).

4- Os vínculos:

$$H_i = 2\ \tilde{\Pi}_{il,\,j}\ \tilde{h}^{lj} + \tilde{h}^{ab},_{i}\ \tilde{\Pi}_{ab} + 2\ \tilde{h}^{aj},_{j}\ \tilde{\Pi}_{ia} + \\ + \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}}\ E,_{i} - T,_{i}\ E \tag{3.15.a}$$

$$H_o = -\ \exp(-T/c)\ (\ \exp(T/c)\ R + E^2 - \tilde{h}^{ik}\ \tilde{h}^{jl}\ \tilde{\Pi}_{ij}\ \tilde{\Pi}_{kl}) \tag{3.15.b}$$

restringem o espaço de Hilbert às funções que satisfaçam às seguintes equações:

$$H_i\ \Psi = -\ i\ \Bigg[2\left(-\ \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{il}} + \frac{1}{d-1}\ \tilde{h}_{il}\ \tilde{h}^{mn}\ \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{mn}}\right),_{j}\ \tilde{h}^{lj} + \\ + \tilde{h}^{ab},_{i}\left(-\ \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ab}} + \frac{1}{d-1}\ \tilde{h}_{ab}\ \tilde{h}^{mn}\ \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{mn}}\right) + \\ + 2\ \tilde{h}^{aj},_{j}\left(-\ \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ia}} + \frac{1}{d-1}\ \tilde{h}_{ia}\ \tilde{h}^{mn}\ \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{mn}}\right) +$$

$$+ \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_{,i} - T_{,i} \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right] = 0 \qquad (3.16.a)$$

$$H_o \Psi = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} - \tilde{G}^{ijab} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{h}^{ij} \partial \tilde{h}^{ab}} + \frac{(d-2)(d+1)}{2(d-1)} \tilde{h}^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{ij}} +$$

$$+ \exp(2T/c) \, R \, \Psi = 0 \qquad (3.16.b)$$

onde (3.16.b) é obtida independentemente do ordenamento do último termo do lado direito de (3.15.b), e c é uma constante dada por (2.48.a):

$$c = \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}} \qquad (3.17)$$

e $\tilde{G}^{ijab}$ é igual a:

$$\tilde{G}^{ijab} = \frac{1}{2} (\tilde{h}^{ia} \tilde{h}^{jb} + \tilde{h}^{ib} \tilde{h}^{ja}) - \frac{1}{d-1} \tilde{h}^{ij} \tilde{h}^{ab} \qquad (3.18)$$

Examina-se agora o significado da equação (3.16.a). Ela deverá ter o mesmo significado que a equação (3.8.a).

Sabendo que, dada uma transformação de coordenadas infinitesimal $x'^i = x^i + \xi^i$, as variáveis canônicas $\tilde{h}^{ij}$ e T se transformam como:

$$\delta\tilde{h}^{ij} = \tilde{h}'^{ij}(x) - \tilde{h}^{ij}(x) = \tilde{h}^{ib} \xi^j{}_{,b} + \tilde{h}^{jb} \xi^i{}_{,b} -$$

$$- \tilde{h}^{ij}{}_{,m} \xi^m + a \tilde{h}^{ij} \xi^n{}_{,n} \qquad (3.19.a)$$

$$\delta T = T'(x) - T(x) = - \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}} \xi^i{}_{,i} - T_{,i} \xi^i \qquad (3.19.b)$$

então tem-se:

$$\Psi(\tilde{h}^{ij} + \delta\tilde{h}^{ij} , T + \delta T) =$$

$$= \Psi(\tilde{h}^{ij}, T) + \int d^{d-1}y \left(\frac{\partial\Psi(y)}{\partial\tilde{h}^{mn}} \delta h^{mn}(y) + \frac{\partial\Psi(y)}{\partial T} \delta T(y) \right) =$$

$$= \Psi(\tilde{h}^{ij}, T) - \int d^{d-1}y \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ip}}\right)_{,b} \tilde{h}^{ib} + \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ip}} \tilde{h}^{ib}{}_{,b} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{pj}}\right)_{,a} \tilde{h}^{aj} + \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{pj}} \tilde{h}^{aj}{}_{,a} + \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ij}} \tilde{h}^{ij}{}_{,p} + a \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ij}}\right)_{,p} \tilde{h}^{ij} +$$

$$\left. + a \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ij}} \tilde{h}^{ij}{}_{,p} - \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_{,p} + \frac{\partial\Psi}{\partial T} T_{,p} \right] \xi^p =$$

$$= \Psi(\tilde{h}^{ij}, T) +$$

$$+ \int d^{d-1}y \left[2 \left(- \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{il}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{ij} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{mn}} \right)_{,} \tilde{h}^{lj} + \right.$$

$$+ \tilde{h}^{ab}{}_{,i} \left(- \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ab}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{ab} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{mn}} \right) +$$

$$+ 2 \tilde{h}^{aj}{}_{,j} \left(- \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{ia}} + \frac{1}{d-1} \tilde{h}_{ab} \tilde{h}^{mn} \frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{h}^{mn}} \right) +$$

$$\left. + \frac{2(d-2)^{1/2}}{(d-1)^{1/2}} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_{,i} - T_{,i} \frac{\partial\Psi}{\partial T} \right] =$$

$$= \Psi(\tilde{h}^{ij}, T) + i \int d^{d-1}y \quad H_p\Psi \, \xi^p \qquad (3.20)$$

onde usou-se a informação de que $\tilde{h}^{ab}{}_{,i}\, \tilde{h}_{ab} = 0$, já que $\det \tilde{h}^{ab} = 1$

De acordo com a equação (3.16.a), tem-se:

$$\Psi(\tilde{h}^{ij} + \delta\tilde{h}^{ij},\ T + \delta T) = \Psi(\tilde{h}^{ij},\ T) \qquad (3.21)$$

o que significa que as funções de onda de duas métricas que difiram apenas por uma transformação de coordenadas são iguais.

A equação (3.16.b) é a equação de Wheeler-De Witt na representação $(\tilde{h}^{ij},\ \tilde{\Pi}_{ij}\ ,\ T\ ,\ E)$.

Procura-se agora os autovalores da matriz $\tilde{G}^{ijab}$, para se poder compará-los com os da matriz G^{ijkl} da representação usual.

A matriz $\tilde{G}^{ijab}$é simétrica na troca dos índices i e j, e dos índices a e b, e também, na troca do par de índices i e j pelo par de índices a e b. É conveniente, então, ordenar essa matriz da seguinte maneira:

$$\tilde{G}^{1111} = M^{11} \qquad (3.22.a)$$

$$\tilde{G}^{1122} = M^{12} \qquad (3.22.b)$$

$$\tilde{G}^{1133} = M^{13} \qquad (3.22.c)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{G}^{11(d-1)(d-1)} = M^{1(d-1)} \qquad (3.22.d)$$

$$\tilde{G}^{1112} = M^{1d} \qquad (3.22.e)$$

$$\tilde{G}^{1113} = M^{1(d+1)} \qquad (3.22.f)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{G}^{2211} = M^{21} \qquad (3.22.g)$$

$$\tilde{G}^{2222} = M^{22} \qquad (3.22.h)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{G}^{2212} = M^{2d} \qquad (3.22.i)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{G}^{(d-1)(d-1)11} = M^{(d-1)1} \qquad (3.22.j)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{G}^{1211} = M^{d1} \qquad (3.22.l)$$

$$\tilde{G}^{1222} = M^{d2} \qquad (3.22.m)$$

onde a matriz M^{ij} é uma matriz simétrica nos índices i e j.

O número n de elementos de $\tilde{G}^{ijab}$ é:

$$n = [(d-1) + C^2_{d-1}]^2 \qquad (3.23)$$

onde C^2_{d-1} é o número de combinações entre d-1 elementos 2 a 2:

$$C^2_{d-1} = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \qquad (3.24)$$

Para se calcular os elementos da matriz M, considera-se que a métrica seja localmente Euclidiana:

$$\tilde{h}^{ij} = \delta^{ij} \qquad (3.25)$$

Os elementos são:

$$M^{11} = \tilde{G}^{1111} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{11} + \tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{11}) - \frac{1}{d-1}\tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{11} =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta^{11}\ \delta^{11} + \delta^{11}\ \delta^{11}) - \frac{1}{d-1}\delta^{11}\ \delta^{11} =$$

$$= \frac{(d-2)}{(d-1)} \tag{3.26.a}$$

$$M^{12} = \tilde{G}^{1122} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{12}\ \tilde{h}^{12} + \tilde{h}^{12}\ \tilde{h}^{12}) - \frac{1}{d-1}\tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{22} =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta^{12}\ \delta^{12} + \delta^{12}\ \delta^{12}) - \frac{1}{d-1}\delta^{11}\ \delta^{22} =$$

$$= -\frac{1}{d-1} \tag{3.26.b}$$

$$M^{1d} = \tilde{G}^{1112} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{12} + \tilde{h}^{12}\ \tilde{h}^{11}) - \frac{1}{d-1}\tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{12} =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta^{11}\ \delta^{12} + \delta^{12}\ \delta^{11}) - \frac{1}{d-1}\delta^{11}\ \delta^{12} = 0 \tag{3.26.c}$$

$$M^{dd} = \tilde{G}^{1212} = \frac{1}{2}(\tilde{h}^{11}\ \tilde{h}^{22} + \tilde{h}^{12}\ \tilde{h}^{21}) - \frac{1}{d-1}\tilde{h}^{12}\ \tilde{h}^{12} =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta^{11}\ \delta^{22} + \delta^{12}\ \delta^{21}) - \frac{1}{d-1}\delta^{12}\ \delta^{12} = \frac{1}{2} \tag{3.26.d}$$

A matriz M se escreve então como:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \frac{(d-2)}{(d-1)} & -\frac{1}{(d-1)} & -\frac{1}{(d-1)} & \cdots & & & \\ -\frac{1}{(d-1)} & \frac{(d-2)}{(d-1)} & & & & 0 & \\ \vdots & & & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \ \cdots \\ & 0 & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & \vdots & & \end{array}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.27)$$

onde as dimensões dos blocos são:

$$B_{11} \longrightarrow (d-1)\times(d-1)$$
$$B_{12} \longrightarrow \frac{(d-1)(d-2)}{2} \times (d-1)$$
$$B_{21} \longrightarrow (d-1)\times \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$
$$B_{22} \longrightarrow \frac{(d-1)(d-2)}{2} \times \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

O bloco B_{22} já está diagonalizado. Falta diagonalizar o bloco B_{11}:

$$B_{11} V = \lambda\ V \qquad (3.28)$$

onde V e λ são respectivamente o autovetor e o autovalor de B_{11}.

O bloco B_{11} pode ser decomposto em duas partes, sendo uma delas a matriz unidade:

$$\frac{1}{d-1}\begin{bmatrix} (d-2) & -1 & -1 & \dots \\ -1 & (d-2) & -1 & \\ -1 & -1 & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} = \frac{1}{d-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \\ -1 & -1 & -1 & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} + I \qquad (3.29)$$

É fácil verificar que o vetor abaixo:

$$V^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

é autovetor da primeira parte de B_{11} denominada por B^*_{11}:

$$B^*_{11}V^* = \frac{1}{(d-1)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots \\ -1 & -1 & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix} = V^* \tag{3.31}$$

então V^* é autovetor também de B_{11} com autovalor nulo:

$$B_{11}V^* = 0 \tag{3.32}$$

Seja $\{ V\perp \}$ o conjunto dos vetores ortogonais a V^*.

$$V^* \circ V\perp = 0 \tag{3.33}$$

O conjunto $\{ V\perp \; , \; V^* \}$ forma uma base, e os vetores $V\perp$ são autovetores de B^*_{11}, com autovalor nulo:

$$B^*_{11}V\perp = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \\ -1 & -1 & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V\perp_1 \\ V\perp_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

e consequentemente autovetores de B_{11} com autovalor 1.

A matriz B_{11}, na base $\{ V^*, V\perp \}$, se escreve:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

A matriz $\tilde{G}$ fica:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \\ \vdots & & & \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Já era esperado que $\tilde{G}$ possuisse um número de autovalores positivos igual ao da matriz G da representação usual (h^{ij}, Π'_{ij}):

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} [h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk} - \frac{2}{d-2} h^{ij} h^{kl}] \tag{3.37}$$

e apresentasse um autovalor nulo no lugar de um negativo, já que a equação de Wheeler-De Witt (3.16.b) na representação $(\tilde{h}^{ij}, \tilde{\Pi}_{ij} , T , E)$ apresenta a derivada em relação à coordenada tipo-tempo (T) separada do termo que contém $\tilde{G}^{ijab}$.

Se na equação (3.10.c) tivesse sido escolhido o ordenamento:

$$\tilde{\Pi}_{ij} \tilde{h}^{ij} = 0 \tag{3.38}$$

dever-se-ía então definir o operador $\tilde{\Pi}_{ij}$ como:

$$\tilde{\Pi}_{ij} = -i\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{ij}} + \frac{1}{d-1}\tilde{h}_{ij}\,\tilde{h}^{ab}\frac{\partial}{\partial \tilde{h}^{ab}} + \frac{(d-2)(d+1)}{2(d-1)}\tilde{h}_{ij} \right\} \tag{3.39}$$

Tal definição, no entanto, fornece a mesma equação de Wheeler-De Witt (3.16.b), independentemente do ordenamento das variáveis canônicas no lado direito dos parênteses de Dirac.

3.B - REPRESENTAÇÃO (K , P , $\hat{K}_{ij}$, P^{ij}):

Dos parênteses de Dirac (2.47.b) nota-se que é necessário redefinir a variável canônica $\hat{k}_{ij}$, para que se tenha:

$$\left\{k'_{ij}(x)\ ,\ k'_{kl}(y)\right\}^{*} = 0 \tag{3.40}$$

Fazendo-se isto, encontra-se o mesmo k'_{ij} obtido em [13], e apresentado na seção 1.C :

$$\begin{aligned} k'_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\hat{k}_{ij} + \frac{(d-2)}{(d-1)(d-3)}\,P^{-1}\,k\,P_{ij} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(k_{ij} + \frac{1}{d-3}\,P^{-1}\,k\,P_{ij} \right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

que é exatamente k'_{ij} dado por (1.93), e consequentemente leva à mesma representação de $\overline{H}_0$ (1.101).

3.C - Representação (k , P , $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$):

As etapas do processo de quantização que se segue nessa representação são as seguintes:

1 - As variáveis canônicas k , P , $\tilde{h}^{ij}$ e $\tilde{\Pi}_{ij}$ são associadas a operadores.

2 - Os vínculos de segunda classe:

$$P = - h^{1/2} \tag{3.42.a}$$

$$\hat{k}_{ij} = - (h^{1/2})^{-a-1} \tilde{\Pi}_{ij} \tag{3.42.b}$$

passam a ser identidades entre operadores.

3 - Os parênteses de Dirac (2.47.b), que deverão ser associados a comutadores, indicam que é necessária uma mudança de variável:

$$k' = \frac{2(d-2)}{(d-1)} k \tag{3.43}$$

para que se tenha :

$$\{k'(x)\ ,\ P(y)\}^* = \delta^d(x-y) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow\ [k'\ ,\ P] = i \qquad (3.44)$$

Uma representação que satisfaz as relações de comutação é:

$$k' = k' \qquad (3.45.a)$$

$$P = -\,i\,\frac{\partial}{\partial k'}, \qquad (3.45.b)$$

e $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$ são os mesmos da representação (3.A)

4 - O vínculo super-hamiltoniano H_o , em termos das variáveis k, P, $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$, será:

$$H_o = P\ (\ R(h^{ij}) + \frac{(d-1)}{4(d-2)}\,k'^2 - P^{-2}\,\tilde{h}^{ia}\,\tilde{h}^{jb}\,\tilde{\Pi}_{ij}\,\tilde{\Pi}_{ab}\ ) \qquad (3.46)$$

onde ainda falta escrever R em termos das variáveis $\tilde{h}^{ij}$. Para se fazer isto, define-se uma função ϕ:

$$\phi \equiv (h^{1/2})^{\frac{d-3}{2(d-1)}} \qquad (3.47)$$

tal que:

$$h_{ij} = (h^{1/2})^{-a}\,\tilde{h}_{ij} = \phi^{\frac{4}{d-3}}\,\tilde{h}_{ij} \qquad (3.48)$$

Em [19] mostra-se que:

$$R(h^{ij}) = \phi^{\frac{-4}{d-3}} \left[R(\tilde{h}^{ij}) - \frac{4(d-2)}{(d-3)} \phi^{-1} \tilde{\Delta} \phi \right] \qquad (3.49)$$

onde o Laplaceano $\tilde{\Delta}$ com o símbolo " ~ " significa que as conexões oriundas das derivadas covariantes estão expressas em termos de $\tilde{h}^{ij}$.

O vínculo H_o fica :

$$H_o = P \left\{ \phi^{\frac{-4}{d-3}} \left[R(\tilde{h}^{ij}) - \frac{4(d-2)}{(d-3)} \phi^{-1} \tilde{\Delta} \phi \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(d-1)}{4(d-2)} k'^{2} - \tilde{h}^{ia} \tilde{h}^{jb} \tilde{\Pi}_{ij} \tilde{\Pi}_{ab} P^{-2} \right\} \qquad (3.50)$$

Multiplicando (3.50) por $-\frac{(d-3)}{4(d-2)}P^{-1} \phi^{\frac{(d+1)}{(d-3)}}$ a expressão de H_o fica:

$$\tilde{\Delta} \phi - \frac{(d-3)}{4(d-2)} R(\tilde{h}) \phi - \frac{(d-1)(d-3)}{16(d-2)^2} K'^{2} \phi^{\frac{d+1}{d-3}} +$$

$$+ \frac{(d-3)}{4(d-2)} \tilde{h}^{ia} \tilde{h}^{jb} \tilde{\Pi}_{ij} \tilde{\Pi}_{ab} \phi^{\frac{-3d+5}{d-3}} = 0 \qquad (3.51)$$

Em [20] mostra-se que esta equação tem solução, e é única, para ϕ, quando d = 4. Existe também solução para d > 4 , mas não é única.

$$\phi = \phi(\tilde{h}^{ij}, \tilde{\Pi}_{ij}, k') \qquad (3.52)$$

Portanto, pode-se escrever uma expressão para o operador P em termos dos demais operadores desta representação:

$$P = - h^{1/2} = - \phi^{\frac{2(d-1)}{(d-3)}} = F(\tilde{h}^{ij}, \tilde{\Pi}_{ij}, k') \qquad (3.53)$$

Conhecendo a forma do operador P, dada por (3.45.b), pode-se obter, aplicando a equação acima à função de onda Ψ, uma equação na forma da equação de Schroedinger:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial k} = F(\tilde{h}^{ij}, \tilde{\Pi}_{ij}, k')\Psi \qquad (3.54)$$

cuja forma explícita de F não é, entretanto, conhecida.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÃO

O formalismo de primeira ordem para a gravitação, tomando como variáveis canônicas independentes $h^{1/2}$, $\tilde{h}^{ij}$, k e $\hat{k}_{ij}$, possibilitou a obtenção de três representações:

1 - Representação ($\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$, T , E).

2 - Representação (k , P , $\hat{k}_{ij}$, P^{ij}).

3 - Representação (k , P , $\tilde{h}^{ij}$, $\tilde{\Pi}_{ij}$).

Na primeira representação foram definidas as seguintes variáveis canônicas:

$$T = c_1 \ln h^{1/2} \qquad (4.1.a)$$

$$E = c_2\, h^{1/2}\, \Pi \qquad (4.1.b)$$

O vínculo super-hamiltoniano H_0 obtido já era conhecido[10], mas a forma explícita da equação de Wheeler-De Witt, tanto quanto se saiba, é apresentada pela primeira vez como sendo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} - \tilde{G}^{ijab} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{h}^{ij}\, \partial \tilde{h}^{ab}} + \frac{(d-2)(d+1)}{2(d-1)} \tilde{h}^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{h}^{ij}} +$$

$$+\exp(2T/c)\; R\, \Psi = 0 \qquad (4.2)$$

onde

$$\tilde{G}^{ijab} = \frac{1}{2} (\tilde{h}^{ia} \tilde{h}^{jb} + \tilde{h}^{ib} \tilde{h}^{ja}) - \frac{2}{d-1} \tilde{h}^{ij} \tilde{h}^{ab} \qquad (4.3)$$

Além disso esta equação é obtida para qualquer ordenamento das variáveis canônicas, o que é surpreendente, e resolve um dos problemas básicos da equação de Wheeler-De Witt.

Os autovalores da matriz $\tilde{G}$ foram calculados, encontrando-se todos eles positivos, com a excessão de um deles nulo. Este resultado já era esperado, pois como a derivada na coordenada tipo-tempo já se encontrava separada, $\tilde{G}$ não deveria apresentar nenhum autovalor negativo.

Na segunda representação a equação de Wheeler-De Witt é a mesma que a obtida em [13].

Na terceira representação foi obtido a equação de Wheeler-De Witt na forma da equação de Schroedinger.

$$i \, \frac{\partial \Psi}{\partial k} = F(\tilde{h}^{ij}, \, \tilde{\Pi}_{ij} \, , \, k') \, \Psi \qquad (4.4)$$

onde F é obtida de (3.53).

Esta equação já tinha sido apresentada em [8], estando aquí generalizada para d dimensões.

Seguiu-se também neste trabalho, a indicação de [13], de se manipular a ação de Einstein-Hilbert, escrita na forma ADM, por meio de integrações por partes, e, eliminando-se termos de derivadas totais, deixa-la, por exemplo, na forma:

$$S = \int d^{d-1}x \, dt \, [\, - h^{1/2} \, h^{ij} \, \dot{k}_{ij} + k \, \dot{h}^{1/2} -$$
$$- h^{1/2} \, N \, (R + k^2 - k_{ij} \, k^{ij}) + 2 \, h^{1/2} \, N^i \, (k^j_i - \delta^j_i \, k)_{/j} \,] \qquad (4.5)$$

Estes cálculos, contrariamente ao que se sugeriu em [13], não levou a novas representações, mas sim, às mesmas alí obtidas. Isto, aliado aos resultados aquí apresentados, dá uma boa indicação de que talvez não haja outras representações importantes da equação de Wheeler-De Witt. Deve-se notar também que no formalismo de segunda ordem não se pode usar a parte sem traço e o traço de k_{ij} como variáveis canônicas para se reproduzir os resultados obtidos aquí pelo formalismo de primeira ordem.

Pretende-se, em futuros trabalhos, aplicar os resultados aquí obtidos, ao mini-superespaço, onde graus de liberdade da métrica são congelados[21], e se estudar as condições de contorno da equação de Wheeler-De Witt dentro das várias propostas da literatura[22,23,24].

Nas representações $(k\ ,\ P\ ,\ \hat{k}_{ij},\ P^{ij})$ ou $(k\ ,\ P\ ,\ \tilde{h}^{ij},\ \tilde{\Pi}_{ij})$ pode-se verificar se as soluções da equação de Wheeler-De Witt fazem previsões a respeito da expansão do universo. Pretende-se também comparar o ordenamento das variáveis aqui utilizados com outras propostas de ordenamento[25,26].

Com relação a representação $(k\ ,\ P\ ,\ \tilde{h}^{ij},\ \tilde{\Pi}_{ij})$, pode-se estudar casos particulares da equação de Wheeler-De Witt, e se tentar definir o espaço de Hilbert, já que ela está na forma da equação de Schroedinger. Pode-se também examinar sob que condições a equação (3.51) tem solução única para $d > 4$ e se procurar sua única solução para $d = 4$.

APÊNDICE A

FORMALISMO HAMILTONIANO COM VÍNCULOS

Este apêndice é uma breve revisão do formalismo Hamiltoniano com vínculos para um sistema geral[9,10,14]. O objetivo de sua apresentação é o de servir de referência aos outros capítulos , onde são tratados específicamente os campos eletromagnético e gravitacional.

A.1 - SISTEMAS REGULARES:

Seja L a Lagrangeana de um sistema:

Seja L a Lagrangeana de um sistema:

$$L = \int d^3x \ \mathcal{L}(q^i(x), \dot{q}^i(x)) \qquad \text{(A.1)}$$

onde i varia de 1 a N; $\mathcal{L}(q^i(x), \dot{q}^i(x))$ é a densidade de Lagrangeana; $\mathring{q}^i(x) = \frac{dq^i(x)}{dt}$ as N velocidades.

Os momenta $p_i(x)$ canonicamente conjugados aos $q^i(x)$, e a matriz Hessiana W_{ij} são definidos por:

$$p_i(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{q}^i(x)} \qquad \text{(A.2)}$$

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial p_i(x)}{\partial \mathring{q}^j(x)} \qquad \text{(A.3)}$$

O sistema é dito regular se a matriz W_{ij} for inversível e, consequentemente, for possível expressar as N velocidades $\mathring{q}^i(x)$ em termos das N coordenadas $q^i(x)$ e dos N momenta $p_i(x)$. Pode-se então construir a Hamiltoniana canônica:

$$H_C = \int d^3x \ \mathcal{H}_C(q^i(x), p_i(x)) \qquad \text{(A.4)}$$

onde:

$$\mathcal{H}_C(q^i(x), p_i(x)) = p_i(x)\dot{q}^i(x) - \mathcal{L}(q_i(x), \dot{q}^i(x)) \qquad \text{(A.5)},$$

sendo substituido os $\mathring{q}^i(x)$ que aparecem em (A.5) por sua expressão nas variáveis $q^i(x)$ e $p_i(x)$.

$$\mathring{q}^i = \mathring{q}^i(q^j(x), p_j(x)).$$

Do formalismo Hamiltoniano resultam as equações de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial p_i} \tag{A.6.a}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial q^i} \tag{A.6.b}$$

É conveniente introduzir o formalismo de parentéses de Poisson e escrever as duas equações acima de outra forma. Sejam então $A(q^i(x), p_i(x))$ e $B(q^i(x), p_i(x))$ duas funções das variáveis $q^i(x)$ e $p_i(x)$. Definem-se os parénteses de Poisson entre elas como:

$$\left\{ A(q^i(x), p_i(x)) \;,\; B(q^j(x), p_j(x)) \right\} =$$

$$= \int d^3z \left[\frac{\partial A(q^i(x), p_i(x))}{\partial q^l(z)} \frac{\partial B(q^j(y), p_j(y))}{\partial p_l(z)} - \frac{\partial A(q^i(x), p_i(x))}{\partial p_l(z)} \frac{\partial B(q^j(y), p_j(y))}{\partial q^l(z)} \right] \tag{A.7}$$

Os parénteses de Poisson possuem as seguintes propriedades:

$$\{A \,,\, B\} = - \{B \,,\, A\} \tag{A.8.a}$$

$$\{A_1 + cA_2 \,,\, B\} = \{A_1 \,,\, B\} + c\{A_2 \,,\, B\} \tag{A.8.b}$$

$$\{A_1 A_2 \,,\, B\} = A_1 \{A_2 \,,\, B\} + \{A_1 \,,\, B\} A_2 \tag{A.8.c}$$

$$\{A , \{B , C\}\} + \{C , \{A , B\}\} + \{B , \{C , A\}\} = 0 \qquad (A.8.d)$$

onde A, B, A_1, A_2 e C são funções de $q_i(x)$ e $p_i(x)$, e c é um número real.

Os parênteses de Poisson entre a Hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_C$ e as variáveis canônicas $q^i(x)$ e $p_i(x)$ quando calculados, dão respectivamente:

$$\{H_C , q^i(x)\} = \frac{\partial \mathcal{H}_C}{\partial p_i(x)} \qquad (A.9.a)$$

$$\{H_C , p_i(x)\} = - \frac{\partial \mathcal{H}_C}{\partial q^i(x)} \qquad (A.9.b)$$

Comparando estas com as equações (A.6.a) e (A.6.b), pode-se escrever as equações de Hamilton na forma:

$$\mathring{q}^i(x) = \{q^i(x) , H_C\} \qquad (A.10.a)$$

$$\mathring{p}_i(x) = \{p_i(x) , H_C\} \qquad (A.10.b)$$

De um modo geral a derivada temporal total de qualquer função das variáveis canônicas $q^i(x)$ e $p_i(x)$ pode ser escrita como:

$$\mathring{A}(q(x) , p(x)) = \{A , H_C\} \qquad (A.10.c)$$

A.2 - SISTEMAS SINGULARES E VÍNCULOS

Se W_{ij} não é inversível, pode-se então expressar algumas velocidades $\dot{q}^j$ em termos das coordenadas q^i, de alguns momenta p_k e das velocidades restantes $\dot{q}^l$:

$$\dot{q}^j = f^j(q^i, p_k, \dot{q}^l) \qquad (A.11)$$

Surgem também relações entre os momenta p_k e as coordenadas q^i:

$$\phi^m(q^i, p_k) \approx 0 \qquad (A.12)$$

Estas relações recebem o nome de vínculos primários. Note que nelas é usado um símbolo diferente do símbolo de igualdade. Este aquí ($\approx$) é lido como fracamente igual pois pode ocorrer que os parênteses de Poisson ϕ^m com alguma função das variáveis canônicas $q^i(x)$ e $p_i(x)$ sejam diferentes de zéro. Portanto não se pode considerar este símbolo " $\approx$ " como um símbolo de igualdade antes de se calcular os parênteses de Poisson envolvendo ϕ^m.

A Hamiltoniana canônica é calculada da expressão abaixo:

$$\mathcal{H}_c(q^i(x), p_k(x), \dot{q}^l(x)) =$$

$$= p_a(x)\dot{q}^a(x) + p_m(x)\dot{q}^m(x) - \mathcal{L}(q^i(x), p_k(x), \dot{q}^l(x)) \qquad (A.13),$$

onde deve ser substituido em $\dot{q}^{a}$ a função $f(q,p_k,\dot{q}^{l})$, e em p^{m} a expressão proveniente dos vínculos primários ϕ^{m} substituindo-a por H_T (Hamiltoniana total):

$$H_T = H_C + \int d^3x \;\; u_m \, \phi^{m}(q^{i}(x), p_k(x)) \tag{A.14}$$

onde u_m são multiplicadores que devem ser variados independentemente das coordenadas e momenta. O cálculo variácional leva às seguintes equações:

$$\mathring{q}^{i} = \frac{\partial \mathscr{H}_C}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \phi^{m}}{\partial p_i} \tag{A.15.a}$$

$$\mathring{p}_i = - \frac{\partial \mathscr{H}_C}{\partial q^{i}} - u_m \frac{\partial \phi^{m}}{\partial q^{i}} \tag{A.15.b}$$

$$\phi^{m} = 0 \tag{A.15.c}$$

Comparando estas equações com a derivada temporal total de uma função $g(q^{i}(x), p_i(x))$, das variáveis $q^{i}(x)$ e $p_i(x)$, e com a expressão para os parênteses de Poisson entre duas funções de $q^{i}(x)$ e $p_i(x)$ (A.8), mostra-se que:

$$\mathring{g}(q^{i}(x), p_i(x)) = \{g \, , \, H_C\} + \\ + \int d^3y \; u_m \{g \, , \, \phi^{m}(q^{i}(y), p_i(y))\} \approx \{g \, , \, H_T\} \tag{A.16}$$

Pode-se calcular a derivada temporal total dos vínculos primários $\phi^{m}(q^{i}(x), p_i(x))$ pela equação (A.16), que, para a consistência da teoria, deverá ser nula:

$$\{\phi^m(q^i(x),p_i(x)) \ , \ H_T\} = \dot{\phi}^m(q^i(x), p_i(x)) \approx 0 \qquad (A.17)$$

A verificação das condições de consistência para cada vínculo pode levar a quatro resultados possíveis:

1- Pode levar a inconsistências, como por exemplo, $1 \approx 0$, e consequentemente a teoria ser inconsistente.

2- Pode levar a combinações lineares dos vínculos primários, satisfazendo a equação (A.17) identicamente.

3- Pode levar a novas equações que independam dos multiplicadores u_m e involvam somente os q^i e p_i, constituindo assim novos vínculos. Estes novos vínculos, que serão denotados por χ_n, serão chamados de vínculos secundários.

4- Pode impor condições aos multiplicadores u_m:

Se a condição de consistência de algum dos vínculos cair no terceiro caso e levar a um novo vínculo, dever-se-á fazer a verificação de sua consistência também, tornando a cair num dos três últimos casos, repetindo a seguir, o processo até que não surja mais nenhum outro vínculo secundário.

A.3 - VÍNCULOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA CLASSES:

Apesar da origem distinta, a divisão dos vínculos em primários e secundários não é de grande importância. Uma divisão mais importante deles é a de vínculos de primeira e segunda classes que é definida a seguir:

Vínculos (ou funções) de primeira classe são os (as) que possuem parentêses de Poisson nulos com todos os vínculos, e aquêles que não forem de primeira classe deverão ser de segunda classe.

Os vínculos serão denotados por:

$\phi_a \longrightarrow$ Vínculos primários de primeira classe.

$\phi_\alpha \longrightarrow$ Vínculos primários de segunda classe.

$\chi_{a'} \longrightarrow$ Vínculos secundários de primeira classe.

$\chi_{\alpha'} \longrightarrow$ Vínculos secundários de segunda classe.

Na notação acima, índices sem linha são referentes a vínculos primários e, com linha, a secundários; índices latinos são referentes a vínculos de primeira classe e, índices gregos, a vínculos de segunda classe.

Com esta classificação a hamiltoniana total, que agora se escreve:

$$H_T = H_C + \int d^3x \;\; u_a \, \phi^a \; + \int d^3x \;\; u_\beta \, \phi^\beta \qquad (A.18),$$

é, devido a consistência dos vínculos, uma função de primeira classe e pode-se escrever o que segue abaixo:

$$\{\phi_a\ ,\ H_T\} = \{\phi_a\ ,\ H_C\} + \int d^3x\ \{\phi_a\ ,\ \phi_m\}\ u^m =$$

$$= \{\phi_a\ ,\ H_C\} \approx 0 \qquad \text{(A.19.a)}$$

$$\{\chi_{a'},\ H_T\} = \{\chi_{a'},\ H_C\} + \int d^3x\ \{\chi_{a'},\ \phi_m\}\ u^m =$$

$$= \{\chi_{a'},\ H_C\} \approx 0 \qquad \text{(A.19.b)}$$

$$\{\phi_\alpha\ ,\ H_T\} = \{\phi_\alpha\ ,\ H_C\} + \int d^3x\{\phi_\alpha\ ,\ \phi_\beta\}\ u^\beta + \int d^3x\{\phi_\alpha\ ,\ \phi_a\}\ u^a =$$

$$= \{\phi_\alpha\ ,\ H_C\} + \int d^3x\{\phi_\alpha\ ,\ \phi_\beta\}\ u^\beta \approx 0 \qquad \text{(A.19.c)}$$

$$\{\chi_{\alpha'},\ H_T\} = \{\chi_{\alpha'},\ H_C\} + \int d^3x\{\chi_{\alpha'},\ \phi_\beta\}\ u^\beta + \int d^3x\{\chi_{\alpha'},\ \phi_a\}\ u^a =$$

$$= \{\chi_{\alpha'},\ H_C\} + \int d^3x\{\chi_{\alpha'},\ \phi_\beta\}\ u^\beta \approx 0 \qquad \text{(A.19.d)}$$

Estas equações serão úteis na próxima seção.

A.4 - PARÊNTESES DE DIRAC:

Neste estágio, deve-se reduzir ao máximo o número de vínculos de segunda classe, formando, através da combinação linear destes, vínculos de primeira classe. Tendo isto sido feito, então a matriz C dos parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe independentes:

$$C \equiv \begin{bmatrix} \{ \phi_{\alpha}, \ \phi_{\beta} \} & \{ \phi_{\alpha}, \ \phi_{\beta'} \} \\ \{ \chi_{\alpha'}, \ \phi_{\beta} \} & \{ \chi_{\alpha'}, \ \chi_{\beta'} \} \end{bmatrix} \tag{A.20}$$

possui inversa[10],[14] C^{-1}.

Seja $\{ \xi_{\mu} \}$ o conjunto dos vínculos de segunda classe ϕ_{α} e $\chi_{\alpha'}$. Então, pode-se reescrever as equações (A.19.c) e (A.19.d) como:

$$\{\xi_{\mu} , H_C\} + \int d^3x \{\xi_{\mu} , \phi_{\beta}\} u^{\beta} =$$

$$= \{\xi_{\mu} , H_C\} + \int d^3x \ C_{\mu\beta} \ u^{\beta} \approx 0 \tag{A.21}$$

Multiplicando esta última pela matriz inversa C^{-1} tem-se:

$$u^{\alpha} \approx - \int d^3x \ (C^{-1})^{\alpha\mu} \{\xi_{\mu} , H_C\} \tag{A.22}$$

e

$$\int d^3x \ (C^{-1})^{\alpha'\mu} \{\xi_{\mu} , H_C\} \approx 0 \tag{A.23}$$

A derivada temporal total de uma função $A(q^i(x),p_i(x))$ é:

$$\dot{A} \approx \{A , H_C\} + \int d^3x \{A , \phi_a\} u^a + \int d^3x \{A , \phi_{\alpha}\} u^{\alpha} =$$

$$= \{A , H_C\} + \int d^3x\{A , \phi_a\} u^a - \int d^3x\{A , \phi_{\alpha}\}(C^{-1})^{\alpha'\mu}\{\xi_{\mu} , H_C\} =$$

$$= \{A\ ,\ H_C\} + \int d^3x \{A\ ,\ \phi_a\}\, u^a - \int d^3x \{A\ ,\ \xi_\nu\}(C^{-1})^{\nu\mu}\{\xi_\mu\ ,\ H_C\} \qquad (A.24)$$

Chega-se assim à seguinte expressão para H_T:

$$H_T = H_C + u^a\phi_a - \xi_\nu\ (C^{-1})^{\nu\mu}\ \{\ \xi_\mu\ ,\ H_C\ \} \qquad (A.25)$$

Definindo-se os parênteses de Dirac entre duas funções $A_1(q,p)$ e $A_2(q,p)$ por:

$$\{A_1\ ,\ A_2\}^* = \{A_1\ ,\ A_2\} - \int d^3x \{A_1\ ,\ \xi_\nu\}(C^{-1})^{\nu\mu}\{\xi_\mu\ ,\ A_2\} \quad (A.26),$$

então:

$$\{A\ ,\ H_T\}^* = \{A\ ,\ H_T\} - \int d^3x \{A\ ,\ \xi_\nu\}(C^{-1})^{\nu\mu}\{\xi_\mu\ ,\ H_T\} \approx$$

$$\approx \{A\ ,\ H_T\} \qquad (A.27),$$

pois todos os $\{\xi_\mu\ ,\ H_T\}$ se anulam já que H_T é de primeira classe. Então $\dot{A}$ pode ser escrito como:

$$\dot{A} = \{A\ ,\ H_T\}^* \qquad (A.28)$$

Além disso, os vínculos que eram considerados como igualdades fracas, podem agora, trabalhando-se com parênteses de Dirac, ser considerados como igualdades fortes, no sentido de que os seus parênteses de Dirac com qualquer função das variáveis canônicas são nulos, como é mostrado abaixo:

$$\{A_i \, , \, \xi_\lambda\}^* = \{A_i \, , \, \xi_\lambda\} - \int d^3x \{A_i \, , \, \xi_\nu\}(C^{-1})^{\nu\mu}\{\xi_\mu \, , \, \xi_\lambda\} =$$

$$= \{A_i \, , \, \xi_\lambda\} - \{A_i \, , \, \xi_\nu\} \delta^\nu_\lambda = 0 \qquad (A.30)$$

A.5 - Vínculos Geradores de Transformações de Calibre:

Se houver vínculos secundários de primeira classe na teoria, H_T não é a Hamiltoniana mais geral possível que conserva todos os vínculos. Pode-se ainda estende-la adicionando uma combinação linear destes vínculos secundários de primeira classe $\chi_{a'}$:

$$H_E \equiv H_T + v^{a'} \chi_{a'} =$$

$$= H_C + u^a \phi_a + v^{a'} \chi_{a'} - \xi_\nu (C^{-1})^{\nu\mu} \{ \xi_\mu \, , \, H_C \} \qquad (A.31),$$

onde os $v^{a'}$ são funções arbitrárias . Essa Hamiltoniana estendida continuará conservando todos os vínculos. Com ela, a evolução no tempo de uma função $A(q^i(x), p_i(x))$ será dada por:

$$\dot{A} = \{A \, , \, H_E\} = \{A \, , \, H_C\} + u^a \{A \, , \, \phi_a\} +$$

$$+ v^{a'} \{A \, , \, \chi_{a'}\} - \{A \, , \, \xi_\nu\} (C^{-1})^{\nu\mu} \{\xi_\mu \, , \, H_C\} \qquad (A.32)$$

Na equação (A.32), há funções arbitrárias u^a e $v^{a'}$. Portanto a evolução temporal de A não é unívoca. O que ocorre é que nem todas as variáveis canônicas são observáveis, o número destas é maior do que o necessário, ocasionando o que se chama de arbitrariedade de calibre na teoria. Dado um estado físico inicial, existe mais de um conjunto de variáveis que levam a um mesmo estado físico posterior. Para se eliminar estes graus de liberdade espúrios, é preciso impor novos vínculos independentes dos demais, e que tenham parênteses de Poisson diferentes de zero com os vínculos de primeira classe ϕ_a e $\chi_{a'}$. A condição de consistência para estes novos vínculos, que denotaremos por g_b e $g_{b'}$, implicará na determinação das funções u^a e $v^{a'}$. A evolução temporal de A é agora unívoca.

À imposição dos vínculos g_b e $g_{b'}$ dá-se o nome de fixação de calibre e os vínculos de primeira classe ϕ_a e $\chi_{a'}$ são geradores de trasformações de calibre, isto é, são geradores daquelas trasformações canônicas que não mudam o estado físico do sistema.

Não existe uma demonstração geral de que vínculos secundários de primeira classe também sejam geradores de transformações de calibre, e que a Hamiltoniana estendida seja a geradora das transformações temporais nas variáveis canônicas. Há no entanto, razões para se postular que qualquer vínculo de primeira classe é gerador de transformações de calibre. Uma delas é que a distinção entre vínculos primários e secundários,que é baseada na Lagrangeana, não é natural do ponto de vista Hamiltoniano, enquanto que a classificação em primeira e segunda classes provém dos parênteses de Poisson, que fazem parte da estrutura da formulação Hamiltoniana. Além disso todas as teorias Hamiltonianas estudadas até hoje confirmam a conjectura de que qualquer vínculo de primeira classe é gerador de transformações de calibre.

De acordo com o que foi discutido nos últimos parágrafos, pode-se concluir que o número de graus de liberdades da teoria será:

$$n = \frac{2N - n_2 - n_1 - n_1}{2} \qquad (A.33),$$

onde n_2 é o número de vínculos de segunda classe, e n_1 é o número de vínculos de primeira classe, que é igual ao dos novos vínculos impostos g_t e g_b.

APÊNDICE B

FORMALISMO ADM

Numa teoria relativistica a coordenada temporal é tratada indistintamente das coordenadas espaciais. Porém quando se trabalha na formulação Hamiltoniana, definem-se momenta canônicos como derivadas da Lagrangeana em termos das "velocidades", e isto quebra a simetria quadridimensional, reservando à coordenada temporal um papel de destaque.

Na formulação Hamiltoniana da teoria graviacional as equações são particularmente complicadas e o significado físico delas não fica muito visível. É conveniente então utilizar um formalismo desenvolvido por Arnowitt, Deser e Misner[8,15,16], e conhecido como formalismo ADM, que permite uma melhor visão geométrica das equações, tornando-as, neste sentido, mais simples.

Este apêndice é uma introdução ao formalismo ADM. Ele é dividido em tres seções: A primeira seção trata da separação do espaço-tempo no espaço e no tempo; na segunda são discutidos os conceitos de curvatura extrínseca e curvatura intrínseca, tanto do ponto de vista qualitativo quanto quantitativo; a última mostra de forma resumida os principais passos para se escrever a ação de Einstein-Hilbert na forma ADM.

B.1 - SEPARAÇÃO 3+1:

Seja $X^{\alpha} = X^{\alpha}(x^{a})$ uma hipersuperfície tipo espaço arbitrária num espaço-tempo de topologia $R \otimes M^{d-1}$. Em cada ponto dela há uma base de 3 vetores $X^{\alpha}_{a} = X^{\alpha}{}_{,a}$ tangentes à hipersuperfície, e um vetor n^{α} unitário e normal à mesma.

$$X^{\alpha}_{a}\, n_{\alpha} = 0 \qquad \text{(B.1.a)}$$

$$n^{\alpha} n_{\alpha} = -1 \qquad \text{(B.1.b)}$$

Essa hipersuperfície pode ser deformada ao longo do espaço-tempo de modo que se tenha uma família de hipersuperfícies de 1 parâmetro t $X^{\alpha} = X^{\alpha}(x^{a}, t)$.

O vetor deformação $N^{\alpha} \equiv \mathring{X}^{\alpha}$, que é mostrado na figura B.1 abaixo, faz a ligação de pontos em duas hipersuperfícies que apresentem as mesmas coordenadas x^a. Esse vetor pode ser escrito em termos dos vetores da base $\{n^\alpha, X^\alpha_a\}$, como:

$$N^\alpha \equiv N\, n^\alpha + N^a\, X^\alpha_a \qquad (B.2)$$

onde N e N^a são as duas componentes conhecidas como funções lapse e shift respectivamente.

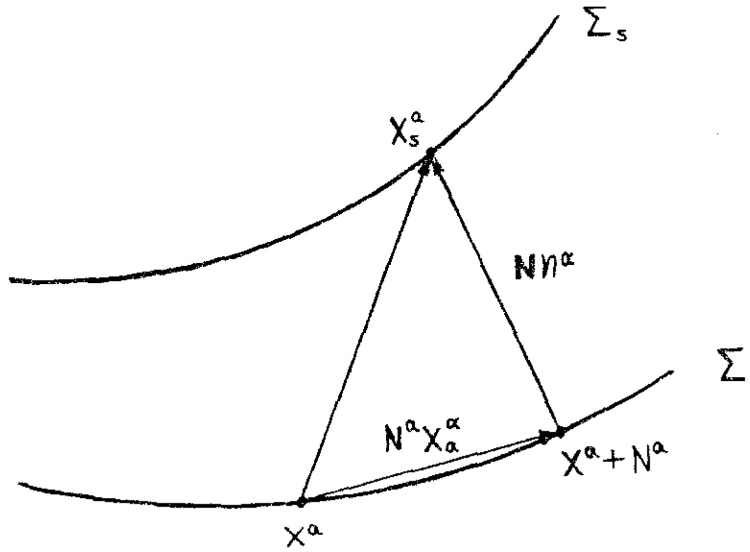

FIGURA B.1

A figura mostra o vetor deformação N^α fazendo a ligação entre o ponto x^a da hipersuperfície inferior Σ, com o ponto x^a_s da hipersuperfície superior Σ_s, e as suas componentes na base (n^α, x^α_a).

As componentes de um campo arbitrário $A_{\mu\nu}$ na base $\{n^\alpha, X^\alpha_a\}$ são:

$$A_{00} = A_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \qquad (B.3.a)$$

$$A_{0i} = A_{\alpha\beta} n^\alpha X^\beta_i \qquad (B.3.b)$$

$$A_{ij} = A_{\alpha\beta} X^\alpha_i X^\beta_j \qquad (B.3.d)$$

A variação dessas componentes, quando a hipersuperfície X^{α} é deformada, indicam como o campo $A_{\mu\nu}$ varia ao longo do tempo.

A decomposição do espaço-tempo é particularmente simples para o campo gravitacional , pois duas das componentes de $g_{\mu\nu}$ na base $\{n^{\alpha},\ X^{\alpha}_{a}\}$, de acordo com as equações (B.1.a) e (B.1.b), são:

$$g_{\perp\perp} = g_{\alpha\beta}\ n^{\alpha}\ n^{\beta} = -1 \tag{B.4.a}$$

$$g_{\perp i} = g_{\alpha\beta}\ n^{\alpha}\ X^{\beta}_{i} = 0 \tag{B.4.b}$$

A outra componente será representada por h_{ij}:

$$h_{ij} \equiv g_{\alpha\beta}\ X^{\alpha}_{i}\ X^{\beta}_{j} \tag{B.5}$$

A partir da decomposição anterior, pode-se obter as componentes do campo $g_{\mu\nu}$ numa outra base mais geral, onde o vetor n^{α} é substituido pelo vetor N^{α} que é tipo tempo, mas não necessariamente ortogonal às hipersuperfícies tipo espaço.

$$n^{\alpha} = \frac{N^{\alpha}}{N} - \frac{N^{a}}{N}\ X^{\alpha}_{a} \tag{B.6}$$

As suas componentes são:

$$g'_{oo} = g_{\alpha\beta}\ N^{\alpha}\ N^{\beta} = g_{\alpha\beta}\ (N\ n^{\alpha} + N^{a}X^{\alpha}_{a})(N\ n^{\beta} + N^{b}X^{\beta}_{b}) =$$

$$= g_{\alpha\beta}\ (N^{2}n^{\alpha}n^{\beta} + N\ N^{a}X^{\alpha}_{a} + N\ N^{b}X^{\beta}_{b} + N^{a}N^{b}X^{\alpha}_{a}X^{\beta}_{b}) =$$

$$= - N^2 + N^a N^b h_{ab} = - N^2 + N^a N_a \qquad \text{(B.7)},$$

onde $N_a = h_{ab} N^b$

$$g'_{0i} = N_i \qquad \text{(B.8.a)}$$

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta}\ X^{\alpha}_{i}\ X^{\beta}_{j} =: h_{ij} \qquad \text{(B.8.b)},$$

ou, representando na forma matricial:

$$g'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.9)}$$

É fácil verificar que sua inversa é:

$$g'^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{N^2} & \dfrac{N^m}{N^2} \\ \dfrac{N^k}{N^2} & h^{km} - \dfrac{N^k N^m}{N^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.10)}$$

onde h^{km} é a inversa de h_{ij} .

Pode-se representar n^{α} na base $\{N^{\alpha}\ ,\ X^{\alpha}_{a}\}$ de uma outra maneira:

$$n^{\alpha} = \left(\frac{1}{N} \, , \, - \frac{N^{a}}{N} \right) \tag{B.11}$$

$$n_{\beta} = g'_{\alpha\beta} \; n^{\alpha} = (-N \; , \; 0 \; , \; 0 \; , \; 0 \;) \tag{B.12}$$

B.2 - Curvaturas Intrínseca e Extrínseca

O tensor h_{ij} que é a projeção de $g_{\alpha\beta}$ sobre a hipersuperfície, pode de fato ser considerado como sendo a métrica do tri-espaço. A curvatura intrínseca da hipersuperfície é então definida e calculada da mesma forma que a curvatura do espaço-tempo, só que, usando as derivadas espaciais de h_{ij} no lugar das derivadas espaço-temporais de $g_{\mu\nu}$. A medida mais natural da curvatura intrínseca será, portanto, o escalar de curvatura do tri-espaço $^{3}R \equiv h^{ij} R_{ij}$.

A curvatura extrínseca não possui análogo no espaço-tempo, pois pressupõe um espaço exterior . Será mais fácil compreender o seu significado, olhando para as figuras (B.2.a) e (B.2.b) que representam duas superfícies bi-dimensionais num espaço Euclidiano tri-dimensional.

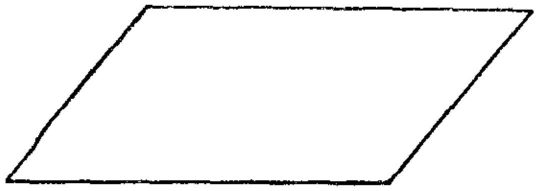

FIGURA B.2.a

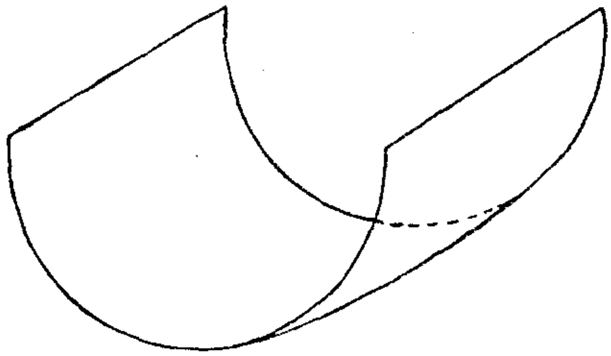

FIGURA B.2.b

A figura (B.2.a) representa um plano, que tem curvaturas intrínseca e extrínseca nulas. A figura (B.2.b) representa o mesmo plano, agora curvado, que apesar de ainda possuir curvatura intrínseca nula, possui agora curvatura extrínseca diferente de zero.

Do ponto de vista quantitativo, a curvatura extrínseca deverá ter um valor proporcional à derivada covariante do vetor n^{α} no espaço-tempo (ver figura B.3).

$$k_{\alpha\beta} = - \perp^{\mu}{}_{\alpha} \perp^{\nu}{}_{\beta} \, n_{(\mu;\nu)} \qquad (B.13)$$

onde os parênteses em torno dos índices significam simetrização e $\perp^{\mu}{}_{\alpha}$ é o projetor sobre a hipersuperfície.

$$\perp^{\mu}{}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha} + n^{\mu} n_{\alpha} \qquad (B.14)$$

FIGURA B.3

A figura mostra em linha pontilhada o vetor n^{α} transportado paralelamente do ponto x^i para o ponto $x^i + dx^i$ sobre a hipersuperfície Σ.

As componentes mais importantes são as k_{ij}:

$$k_{ij} = -(\delta^{\mu}_{i} + n^{\mu} n_i)(\delta^{\nu}_{j} + n^{\nu} n_j)\, n_{(\mu;\nu)} =$$

$$= - n_{(i;j)} = n_{\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{ij} = n_0 \Gamma^{0}{}_{ij} =$$

$$= - \frac{1}{2} N g^{0\alpha}(g_{\alpha i,j} + g_{\alpha j,i} - g_{ij,\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2N}(N_{i,j} + N_{j,i} - \mathring{h}_{ij}) - \frac{N^k}{2N}(h_{ki,j} + h_{kj,i} - h_{ij,k}) =$$

$$= \frac{1}{2N}(N_{i,j} + N_{j,i} - \mathring{h}_{ij} - 2 N_k \Gamma^{k}{}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{2N}(N_{i/j} + N_{j/i} - \mathring{h}_{ij}) \qquad (B.15),$$

onde as barras " / " indicam derivadas covariantes em relação ao tri-espaço.

As outras componentes são:

$$k_{00} = N^i N^j k_{ij} \qquad (B.16.a)$$

$$k_{oi} = N^j k_{ij} \tag{B.16.b}$$

B.3 - A Ação de Einstein-Hilbert na Forma ADM

O objetivo agora é escrever a ação:

$$S = \int d^dx \ (-g)^{1/2}\, {}^4R \tag{B.17}$$

em termos das quantidades N, N^i, h_{ij} e k_{ij}, que são as relevantes na formulação ADM.

A raiz quadrada de $-g$ será:

$$(-g)^{1/2} = N\, h^{1/2} \tag{B.18}$$

onde $h \equiv \det h^{ij}$

${}^4R$ será escrito simplesmente como R até o final de seu cálculo:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} =$$

$$= g^{oo} R^{i}{}_{oio} + g^{oi} R^{o}{}_{ooi} + g^{oi} R^{l}{}_{oli} -$$

$$- g^{io} R^{l}_{iol} + g^{ij} R^{o}_{ioj} + g^{ij} R^{l}_{ilj} =$$

$$= g^{oo} R^{i}_{oio} + g^{oi} R^{o}_{ooi} + g^{oi} g^{lk} g_{oo} R^{o}_{kli} -$$

$$- g^{oi} g^{lk} g_{jo} R^{j}_{kli} - g^{io} g^{lo} R_{oiol} - g^{io} g^{lk} g_{oo} R^{o}_{lki} -$$

$$- g^{io} g^{lk} g_{oj} R^{j}_{lki} + g^{ij} R^{o}_{ioj} + g^{ij} R^{l}_{ilj} \qquad \text{(B.19)}$$

Deve-se calcular apenas os tensores R^{m}_{ijk} , R^{o}_{iok} , R^{o}_{oio} e R^{o}_{ijk} usando-se a expressão geral de $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ em termos das conexões:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} \Gamma^{\sigma}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \qquad \text{(B.20)}$$

Antes porém, calcula-se as componentes da conexão: Γ^{o}_{oo}, Γ^{j}_{ik} , Γ^{o}_{oi} , Γ^{j}_{io} e Γ^{o}_{ij} , usando-se a expressão geral de $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ em termos das componentes da métrica:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) \qquad \text{(B.21)}$$

Subentende-se que $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ é a conexão no espaço-tempo ${}^{4}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$. O índice 4 será omitido até o final do cálculo:

$$\Gamma^{o}_{oi} = g^{oo} \Gamma_{ooi} + g^{ol} \Gamma_{loi} =$$

$$= - \frac{1}{2N^2} (g_{oo,i} + g_{oi,o} + g_{io,o}) + \frac{1}{2} \frac{N^l}{N^2} (g_{lo,i} + g_{li,o} + g_{io,l}) =$$

$$= - \frac{1}{2N^2} [(N_k N^k),_i - (N^2),_i] + \frac{N^l}{N^2} (N_{l,i} + \mathring{h}_{li} - N_{i,l}) =$$

$$= \frac{1}{N} N,_{i} - \frac{1}{N^2} N^k N_{k,i} + \frac{1}{N^2} N^k N_k h^{kl},_{i} +$$

$$+ \frac{1}{2N^2} (N_{l,i} + \mathring{h}_{li} - N_{i,l}) =$$

$$= \frac{1}{N} N,_{i} - \frac{1}{N^2} N_l N_k {}^3\Gamma^{(k}{}_{mi} h^{l)m} - \frac{1}{2N^2} (N_{j,i} + N_{i,j} - \mathring{h}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{N} N,_{i} - \frac{1}{2N^2} (N_{j/i} + N_{i/j} - \mathring{h}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{N} N,_{i} - \frac{1}{N} N^j k_{ij} \tag{B.23.a}$$

De forma semelhante pode-se obter, para as outras componentes da conexão as seguintes expressões:

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{N} [\mathring{N} + N^i N,_{i} - N^i N_j k_{ij}] \tag{B.23.b}$$

$$\Gamma^j{}_{ik} = {}^3\Gamma^j{}_{ik} + \frac{1}{N} k_{ik} \tag{B.23.c}$$

$$\Gamma^j{}_{i0} = N [- k^j{}_i + (\frac{1}{N} N^j)_{/i} + \frac{1}{N^2} N^j N^m k_{im}] \tag{B.23.d}$$

$$\Gamma^0{}_{ij} = - \frac{1}{N} k_{ij} \tag{B.23.e}$$

Cálculo de $R^0{}_{ijk}$:

$$R^0{}_{ijk} = \Gamma^0{}_{ik,j} - \Gamma^0{}_{ij,k} + \Gamma^0{}_{j\sigma} \Gamma^\sigma{}_{ik} - \Gamma^0{}_{k\sigma} \Gamma^\sigma{}_{ij} =$$

$$= \Gamma^0{}_{ik,j} - \Gamma^0{}_{ij,k} + \Gamma^0{}_{j0} \Gamma^0{}_{ik} + \Gamma^0{}_{jl} \Gamma^l{}_{ik} -$$

$$- \Gamma^{o}{}_{ko}\,\Gamma^{o}{}_{ij} - \Gamma^{o}{}_{kl}\,\Gamma^{l}{}_{ij} =$$

$$= (- \frac{1}{N}\,k_{ik}\,),_{j} - (- \frac{1}{N}\,k_{ij}\,),_{k} +$$

$$+ (\frac{1}{N}\,N,_{j} - \frac{1}{N}\,N^{p}\,k_{jp}\,)(- \frac{1}{N}\,k_{lk}\,) +$$

$$+ (- \frac{1}{N}\,k_{jl}\,)({}^{3}\Gamma^{l}{}_{ik} + \frac{1}{N}\,k_{ik}\,) -$$

$$- (\frac{1}{N}\,N,_{k} - \frac{1}{N}\,N^{p}\,k_{kp}\,)(- \frac{1}{N}\,k_{ij}\,) -$$

$$- (- \frac{1}{N}\,)({}^{3}\Gamma^{l}{}_{ij} + \frac{1}{N}\,k_{ij}\,) =$$

$$= - \frac{1}{N}\,(\,k_{ik,j} + {}^{3}\Gamma^{l}{}_{ij}\,k_{lk} + k_{ij,k} - {}^{3}\Gamma^{l}{}_{ik}\,k_{lj} \qquad (B.24)$$

Somando e subtraindo o mesmo termo

$$\frac{1}{N}\,{}^{3}\Gamma^{l}{}_{kj}\,k_{il} - \frac{1}{N}\,{}^{3}\Gamma^{l}{}_{kj}\,k_{il}$$

a componente $R^{o}{}_{ijk}$ fica·

$$R^{o}{}_{ijk} = \frac{1}{N}\,(k_{ij/k} - k_{ik/j}) \qquad (B.25.a)$$

Cálcula-se as outras 3 componentes de maneira semelhante, obtendo-se as seguintes expressões para elas:

$$R^{m}{}_{ijk} = {}^{3}\,R^{m}{}_{ijk} + \frac{1}{N}\,N^{m}(k_{ik/j} - k_{ij/k}) + k^{m}{}_{j}\,k_{ik} - k^{m}{}_{k}\,k_{ij} \qquad (B.25.b)$$

$$R^{o}{}_{iok} = - \frac{1}{N}\,\mathring{k}_{ik} - \frac{1}{N}\,N,_{i/k} + \frac{1}{N}\,N^{l}{}_{/i}\,k_{lk} +$$

$$+ \frac{1}{N}\,(N^{l}\,k_{il})_{/k} - k^{l}{}_{i}\,k_{lk} \qquad (B.25.c)$$

$$R^{o}{}_{oio} = \frac{1}{N} \left[\mathring{k}_{ik} N^k + N_{,i/k} N^k - N^l{}_{/i} k_{lk} N^k - N^l{}_{/k} N^k k_{li} - \right.$$

$$\left. - N^l N^k k_{kl/i} + N N^k k_{il} k^l{}_k \right] \qquad (B.25.d)$$

Substituindo as expressões acima em (B.19), depois de alguma algebra, obtem-se:

$$R = \frac{1}{N} \left[- 2 h^{ij} \mathring{k}_{ij} - \mathring{h}^{ij} k_{ij} + N ({}^3R + k^2 - k_{ij} k^{ij}) - \right.$$

$$\left. - 2 N^i (k^j{}_i - \delta^j_i k)_{/j} - 2 (N_{,i} - k_{ij} N^j)^{/i} \right] \qquad (B.26)$$

Este resultado pode ser generalizado para um espaço-tempo de d dimensões, sendo necessário apenas substituir ${}^3R$ por $\tilde{R}$ para ficar de acordo com a convenção. Ele é usado no capítulo 1.

é usado no capítulo 1 .

BIBLIOGRAFIA

1 - S. Weinberg, "Os Tres Primeiros Minutos", (Editora Gradiva).

2 - A. Einstein, " The Principle of Relativity ", (Dover Publications, Inc. 1952).

3 - S.W. Hawking e R. Penrose, Proc. Roy. Soc. Lond. A.314, 529 (1970).

4 - A. Einstein, " The Meaning of Relativity ", (Priceton University).

5 - C.J. Isham, Imperial College preprint / TP / 84-85 / 31.

6 - B.S. De Witt, " Quantum Theory of Gravity II. The Manifestly Covariant Theory ", Phys. Rev. 162, 1195 (1967); e " Quantum Theory of Gravity III. Aplications of the Covariant Theory ", Phys. Rev. 162, 1239 (1967).

7 - S. Deser e P. Von Nieuwenhuizen, " One Loop Divergences of Quantized Einstein-Maxwell Fields ", Phys. Rev. D10, 401 (1974).

8 - K. Kuchar, "Canonical Methods of Quantizations", in "Quantum Gravity II", C.J. Isham, R. Penrose e D.W. Sciama, Eds. (Clarendon Press, Oxford, 1981).

9 - A. J. Hanson, T. Regge e C. Teitelboim, " Constrained Hamiltonian Systems " (Academia Nacionale dei Lincei, Rome, 1976).

10 - K. Sundermeyer, " Constrained Dynamics with Aplications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model ", Lecture Notes in Physics 169 (Springer, Berlin, 1982).

11 - B.S. De Witt, " Quantum Theory of Gravity I. The Canonical Theory ", Phys. Rev. 160, 1113 (1967).

12 - J.A. Wheeler 1968, " Superspace and the Nature of Quantum Geometrodinamics ", in Battelle Rencontres ed. by (De Witt and J.A. Wheeler), Benjamin, New YorK.

13 - M. Gleiser, R. Holman e N.P. Neto, " First Order Formalism for Quantum Gravity ", Nucl. Phys. B294, 1164 (1987).

14 - P.A.M. Dirac, " Lectures in Quantum Mechanics ", (Yeshiva Univ. Press, New York, 1962).

15 - R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner in " Gravitation : An Introduction to Current Research ", L. Witten, Ed. (Wiley, NY 1962).

16 - C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler, " Gravitation ", (W.H. Freeman and Company, New York, 1973)

17 - L. Landau e E. Lifshitz, " Teoria do Campo ", (Editora MIR, Moscow, 1980), 353-356.

18 - K. Kuchar, " Canonical Quantization of Gravity ", in " Relativity, Astrophysics and Cosmology ", W. Israel, (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland 1973).

19 - S. Goldberg, "Curvature and Homology", (Dover Plublications, Inc. ,New York, pag. 115).

20 - J.W. York Jr. e N. O' Murchadha, " Existence and Uniqueness of Solutions of the Hamiltonian Constraint of General Relativity on Compact Manifolds ", J. Math. Phys. 14, 1551, (1973).

21 - M.P. Ryan, " The Mini-superspace ", notas da VI Escola Brasileira de Cosmologia e Gravitação, ed M. Novello.

22 - J.B. Hartle e S.W. Hawking, " The Wave Function of the Universe ", Phys. Rev. D28, 2960, (1983).

23 - A. Vilenkin, " Boundary Conditions in Quantum Cosmology ", Phys. Rev. D33 , 3560, (1986).

24 - J. Wudka, "Boundary Conditions and Cosmological Constante", Phys. Rev. D36 , 1036, (1987).

25 - J. Zanelli e T. Christodoulakis, " Canonical Approach to Quantum Gravity ", Class. Quantum Grav. 4, 851 (1987).

26 - S.W. Hawking e D.N. Page, " Operator Ordering and the the Flatness of the Universe ", Nucl. Phys. B, 264, 185, (1986).

"FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM E SUAS APLICAÇÕES PARA A QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA GRAVITAÇÃO"

NELSON PINTO NETO

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Nelson Pinto Neto

Nelson Pinto Neto - Presidente

João Barcelos Neto

João Barcelos Neto

Ivano Damião Soares

Ivano Damião Soares

Rio de Janeiro, 05 de outubro de 1990