PAULO CESAR GOMES LEITE PITANGA

# PROJETORES EM DINÂMICAS VINCULADAS

TESE DE DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

IN MEMORIAM

CARLOS MARCIO DO AMARAL

GUIDO BECK

Agradeço a todos que me incentivaram durante a execução deste trabalho.

Agradeço ao Prof. PREM P.SRIVASTAVA, pelo interesse com que acompanhou o desenvolvimento desta tese.

**RESUMO**

No primeiro capítulo deste trabalho aplicamos a técnica de projeção ortogonal, para a formulação de um princípio variacional válido para sistemas holônomos e não holônomos. As equações de movimento decorrentes são expressas como projeções do vetor de Euler no subespaço ortogonal aos deslocamentos infinitesimais compatíveis com os vínculos.

No segundo capítulo formulamos os fundamentos da geometria não holônoma, baseados nas projeções dos deslocamentos infinitesimais. Construímos a conexão não holônoma, como a derivada parcial do projetor. Devido à não integrabilidade dos vínculos, a conexão não é simétrica, induzindo torção e curvatura. Deste ponto de vista os sistemas não holônomos são análogos aos sistemas hamiltonianos generalizados, submetidos a vínculos de segunda classe.

O terceiro capítulo é dedicado à quantização dos sistemas vínculados. Formulamos primeiro o problema no espaço de fase, obtendo uma forma canônica escrita por meio do projetor. Em seguida aplicamos o princípio da correspondência em coordenadas cartesianas, o que resulta em um operador de Laplace-Beltrami modificado pela presença da derivada do projetor. O mesmo resultado é obtido via integral de caminho. Como resultado, a hamiltoniana quântica adquire um termo adicional proporcional à curvatura escalar induzida pelos vínculos. Outro fato importante é o aparecimento de uma fase não integrável na função de onda compatível com os vínculos. Assim, a quantização dos sistemas

não holônomos deve ser realizada no quadro da quantização geométrica.

No quarto capítulo estendemos para a geometria simplética o método dos projetores. O projetor no espaço simplético determina uma 2-forma singular, que define os parênteses de Dirac. Portanto, o projetor neste contexto é parte da álgebra de Lie-Poisson induzida pelos vínculos. A formulação do projetor no espaço supersimplético visando a quantização da teorias de gauge relativísticas é o desdobramento natural de nossas futuras pesquisas.

SUMÁRIO

SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Caminante, no hay camino,

se hace camino al andar.

Antonio Machado (1940)

Apresentamos nesta tese alguns resultados dos nossos estudos sobre os sistemas mecânicos não relativísticos sujeitos a vínculos diferenciais não integráveis, chamados de não-holônomos.

Usando a técnica de projeção ortogonal, originalmente desenvolvida por C.M.Amaral (1), abordamos tanto a dinâmica clássica (2) quanto a dinâmica quântica (3) dos sistemas em questão. Além disso generalizamos, para o espaço simplético ( 4 ), a técnica de projeção.

O espaço de configuração induzido pelos vínculos não integráveis apresenta a peculiaridade de possuir métrica singular. Por isto, estes sistemas apresentam as mesmas características dos sistemas hamiltonianos generalizados, estudados pela primeira vez por Dirac (5) e independentemente por Bergmann (6). Foi por este motivo que empreendemos o presente estudo.

As propriedades geométricas do espaço de configuração dos sistemas estudados coincidem com as propriedades de uma variedade não-holônoma dotada de conexão não-simétrica. Os espaços de configuração dos campos de gauge incluem-se também na categoria não-holônoma. Desta forma, o nosso estudo mecânico, se estendido aos campos relativísticos, nos fornecerá um método geométrico simples para tratar as modernas teorias de gauge.

No nosso trabalho a conexão não integrável desempenha o papel fundamental de toda a teoria. Ressaltamos que o estudo da geometria dos sistemas holônomos, dissipativos, via conexão linear, foi desenvolvida por nós em (7).

Um sistema holônomo só pode ocupar determinados pontos no espaço de configuração euclidiano. Um sistema não-holônomo, ao contrário, pode ocupar qualquer posição. **A característica principal dos sistemas não-holônomos reside neste fato : qualquer ponto do espaço de configuração é acessível, porém só por determinados caminhos.** Isto reflete o fato de que são as tangentes às curvas que são restringidas pelos vínculos diferenciais não-integráveis.

A dependência de percursso entre dois pontos foi o que atraiu a nossa atenção e norteou as nossas pesquisas. Procuramos estudar o sistema do ponto de vista topológico : Se nem todos os caminhos entre dois pontos são admissíveis, então o espaço possui uma topologia não-trivial. O espaço dos caminhos entre dois pontos do espaço de configuração é decomposto em classes de curvas topologicamente equivalentes, podendo ser classificado de acordo com os grupos de homotopia (8).

A existência dos vínculos não-holônomos é relativamente recente, pois só foi reconhencida em 1894, quando Hertz em "Principles of Mechanics" (9) estabeleceu a diferença entre vínculos holônomos e não-holônomos.

Na literatura sobre sistemas não-holônomos encontramos contribuições dos mesmos eminentes pesquisadores que muito contribuíram para o desenvolvimento da física matemática. Encontramos, entre muitos outros, nomes como Hadamard (10), Appel (11), Hamel (12). Sobre as propriedades geométricas das variedades não holônomas podemos citar Schouten (13), Cartan (14), Synge (15), Vranceanu (16) e Vanderslice (17). Recentemente Koiller (18) desenvolveu um importante estudo sôbre os sistemas não-holônomos usando a moderna linguagem da geometria diferencial.

Sobre o princípio variacional encontramos contribuições de Morse (19), Saletan (20) e Rund (21).

Baseamos o nosso método nas inúmeras pesquisas sobre geometria do espaço de configuração holônomo, desenvolvida por vários pesquisadores.

Entre estes, destacamos o trabalho pioneiro de Jacobi (22) aplicado aos sistemas conservativos holônomos esclerônomos . O princípio variacional de Jacobi, que extremiza a expressão

$$\int ( E - V )^{1/2} \, d\tau \quad , \qquad (1)$$

determina que a trajetória do sistema seja realizada ao longo de uma geodésica da variedade riemanniana N-dimensional, com métrica positiva definida dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\nu} dx^{\mu} = 2(E-V)d\tau^2 \ . \qquad (2)$$

Esta geometrização não é ideal, uma vez que a métrica depende das condições iniciais, através da energia total **E**. A notação tensorial foi usada pela primeira vez por Ricci e Levi-Civita em um artigo bem conhecido (23). Encontramos aí as equações de Lagrange na forma covariante relativa à métrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = 2Tdt^2 \ . \qquad (3)$$

Porém esta geometrização é parcial, uma vez que a força externa não faz parte da estrutura geométrica. Nesta abordagem, a derivada covariante da velocidade ao longo de uma curva é igualada à força externa.

O estudo geométrico diferencial, de um sistema de partículas não relativísticas foi desenvolvido por Synge, sob o nome de " Geometria da Dinâmica " (24). Neste trabalho a curvatura induzida pelos vínculos é usada para analisar a estabilidade das geodésicas no espaço de configuração, com métrica definida através da energia cinética T do sistema.

O grande estímulo à interpretação física da geometria das variedades surge com a geometrização de Einstein do campo gravitacional relativístico em 1916 (25). Nesta teoria, o movimento de uma partícula é realizado ao longo de geodésicas do espaço-tempo quadridimensional. Esta descrição é possível pela introdução de uma conexão linear, compatível localmente com a métrica de Minkowski.

A correspondente descrição não-relativística só foi possível a partir da noção geral de conexão, estabelecida por Weyl (26) em 1918.

A noção de conexão 1-forma permitiu a Cartan (27) a descrição covariante da gravitação não-relativística no espaço-tempo de Galileu.

A homogeneidade temporal é introduzida por Trautman (28) em 1964, que desenvolve uma teoria Newtoniana análoga à relatividade geral. O espaço-tempo neste trabalho é uma variedade $X_4$ dotada de conexão afim, homeomorfa ao espaço Euclidiano quadridimensional. Neste espaço existe uma hipersuperfície tridimensional t = const definindo uma folheação de $X_4$. As linhas de universo são geodésicas de $X_4$ em relação à conexão afim $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ ( $\nu,\alpha,\mu = 0,1,2,3$ ).

A geometria induzida pelos vínculos não-holônomos é uma geometria dotada de conexão não-métrica, como mostramos no capítulo 2 desta tese. Neste ponto necessitamos de algumas considerações sobre a física associada a um espaço cuja conexão não decorre de uma métrica.

Como é bem conhecido, no eletromagnetismo o efeito Bohm-Aharonov (29) é uma consequência da multiconectividade do espaço. Também nas teorias de Yang-Mills os monopolos e instantons possuem propriedades determinadas pela multiconectividade do espaço.

A multiconectividade implica em transporte paralelo não trivial, mesmo em um espaço de curvatura nula. No caso do eletromagnetismo este transporte é realizado pelo próprio potencial eletromagnético, que age como uma conexão afim. De modo geral os campos de gauge são as conexões não métricas dos respectivos espaços. A geometria dos campos de Yang-Mills pode ser estudada a partir dos trabalhos de Atiyah (30).

O conceito físico relacionado a esta geometria deve-se a Dirac (31) , que generaliza a função de onda de um elétron por meio de um fator de fase dependente do caminho. Como consequência, a carga elétrica é quantizada.

Esta idéia foi generalizada para campos com leis de transformações locais não abelianas por Yang e Mills (32).

No estudo, sugerido por Dirac, da dinâmica quântica dos sistemas não-holônomos, Eden (33) propôs uma fase não integrável, a fim de tornar a função de onda compatível com as restrições físicas impostas pelos vínculos.

No nosso estudo a fase não-integrável surge naturalmente, porque trabalhamos com o sistema físico em um espaço não-holônomo definido convenientemente. Deste modo, o nosso estudo é intimamente ligado às teorias modernas de gauge, via conexão não-holônoma.

Com o projetor, é possível quantizarmos o sistema não-holônomo simplesmente pelo princípio da correspondência. A grande vantagem do nosso método reside nos dois seguintes fatos fundamentais: 1) trabalhamos com coordenadas cartesianas; 2) não usamos multiplicadores de Lagrange.

O primeiro fato permite aplicarmos diretamente o princípio da correspondência. O tratamento usual de eliminação de vínculos holônomos, por imersão da variedade riemanniana $R_M$ M-dimensional em uma variedade euclidiana $E_N$ N-dimensional impede o uso do princípio da correspondência

$$\hat{p}_i = - i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i} , \qquad (4)$$

porque a ordem dos operadores não é bem definida no processo de simetrização (34) . O princípio da correspondência aplica-se corretamente às coordenadas cartesianas ortogonais, como é bem sabido :

$$\hat{p}_\nu = - ih \frac{\partial}{\partial x^\nu} . \qquad (5)$$

Com o método de projeção, podemos trabalhar com coordenadas cartesianas ortogonais sem necessidade deintroduzir os multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores são outra fonte de ambiguidades no processo de quantização, pois seus momentos canônicos são nulos, se forem vistos como coordenadas adicionais. Se forem encarados como meros parâmetros auxiliares, dos quais o movimento não deve depender, o método fica restrito aos sistemas holônomos.

Descrevemos o momento generalizado não-holônomo como uma função linear dos momentos e das coordenadas cartesianas ortogonais,

$$\Pi_\nu = \Lambda^\mu_\nu( x ) p_\mu , \qquad (6)$$

onde $\Lambda^\mu_\nu$ é o elemento de matriz do projetor. Simetrizando e aplicando o princípio da correspondência obtemos o operador

$$\hat{\Pi}_\nu = - i\left[ \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Lambda^\mu_\nu}{\partial x^\mu} \right] , \qquad (7)$$

onde o último termo do lado direito é a contração da conexão não-holônoma . Este termo é responsável pelo surgimento da curvatura escalar na hamiltoniana quântica. Observamos que é um efeito puramente quântico, devido à simetrização dos operadores.

A curvatura escalar adicional, modificando o operador de Laplace-Beltrami, foi descoberta por B. de Witt (35) na quantização do sistema clássico no espaço de configuração riemanniano. O mesmo resultado, a menos de uma constante, foi obtido por Blattner (36) e por Simms e Woodhouse (37) no contexto da quantização geométrica (38).

O nosso resultado, pelo princípio da correspondência, é mais simples e mais geral, porque aplica-se também aos sistemas integráveis. Neste caso por uma transformação de coordenadas obtemos

$$\hat{\Pi}_i = -i \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} + 1/2 \frac{\partial \ln \mu(q)}{\partial q^i} \right] \quad , \qquad (8)$$

onde $\mu$ é a medida invariante da variedade riemanniana imersa no espaço ambiente euclidiano:

$$\mu = \det \left| \frac{\partial x^\nu}{\partial q^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial q^j} \delta_{\mu\nu} \right|^{1/2} \quad . \qquad (9)$$

Obtivemos em (3) o resultado de (35) utilizando a integral de caminho na variedade não-holônoma. Um resultado análogo foi obtido no contexto dos sistemas hamiltonianos generalizados, para vínculos de primeira classe, por Bukhbinder e Lyakovich (39).

Em relação aos sistemas hamiltonianos generalizados de

Dirac, ressaltamos que os vínculos não-holônomos são equivalentes aos vínculos de segunda classe. Os sistemas holônomos são equivalentes aos sistemas de primeira classe. A condição para que um sistema de vínculos seja de primeira classe,

$$\left\{ \phi^J, \phi^K \right\} = C_L^{JK} \phi^L \qquad , \qquad (10)$$

coincide com a condição de integrabilidade dos campos vetoriais associados a um sistema pfaffiano.

A relação (10) é a condição necessária e suficiente para que a evolução de uma observável não dependa dos multiplicadores de Lagrange. O método de Fadeev (40) para quantização de sistemas lagrangeanos singulares depende crucialmente da relação acima. Ou seja, aplica-se em princípio aos vínculos de primeira classe. A generalização do método para os vínculos de segunda classe foi desenvolvida por Senjanovic (41).

Da mesma forma, a quantização de Fradkin e Vilkovisky(42) aplica-se em princípio aos vínculos de primeira classe.

A generalização aos vínculos de segunda classe foi desenvolvida por Batalin e Fradkin ( 43 ).

O tratamento usual dos vínculos de segunda classe consiste de redefinir os parênteses de Poisson, de tal modo que uma observável e um vínculo de segunda classe possuam parênteses nulos entre si. Estes novos parênteses são conhecidos como parênteses de Dirac (44).

Mostramos em (4) que o projetor pode também ser definido no espaço simplético. Quando isto é feito, descobrimos que este operador define uma 2-forma simplética degenerada. Como é bem sabido, uma 2-forma degenerada define uma variedade pré-simplética (45). Como consequência, o projetor determina os parênteses de Dirac compatíveis com os vínculos de segunda classe (46).

A quantização das variedades pré-simpléticas é tema atual de pesquisa. Os espaços pré-simpléticos surgem naturalmente, na dinâmica relativística (47) e nas dinâmicas dependentes do tempo (48), além dos sistemas hamiltonianos generalizados ( 49), e nas teorias dos campos de gauge (50).

A quantização dos sistemas pré-simpléticos, via mergulho coisotrópico em uma variedade simplética, foi desenvolvida por Gotay e Sniatycki (51). O projetor define uma variedade coisotrópica, via projeção da 2-forma simplética.

Assim, ao introduzirmos os projetores na geometria simplética abrimos um amplo campo de aplicações do nosso método aos problemas atuais, como à geometria simplética das cordas (52) e à cohomologia da carga BRST (53), (54), ( 55). A geometria simplética permite uma formulação da mecânica hamiltoniana manifestamente invariante face a transformações canônicas. Por este motivo, o espaço simplético apresenta-se como uma alternativa para a formulação manifestamente invariante das teorias das cordas. Nestas teorias, o espaço-tempo e as variáveis fantasmas são tratadas como variáveis hamiltonianas. A formulação de uma geometria supersimplética é necessária para uma formulação covariante da teoria das cordas.

O método dos projetores adaptado ao espaço supersimplético, visando o estudo de cordas, será um dos temas de pesquisa a ser desenvolvido a partir desta tese.

Um outro estudo a ser implementado com a ajuda do projetor refere-se a definição de classes de medidas $\mu$ e $\nu$ associadas a um espaço de Hilbert intrínseco à variedade simplética. Esta pesquisa situa-se no quadro da quantização geométrica desenvolvida por V.Guillemim e S.Sternberg (56). Estes autores propuseram um projetor ortogonal, no espaço de Hilbert intrínseco associado à variedade simplética. O estudo da relação entre o nosso projetor e o de Guillemin-Sternberg poderá ser útil na formulação da geometria diferencial do espaço de Hilbert, outro tema que pretendemos desenvolver.

# CAPÍTULO 1

# PROJETORES E PRINCÍPIO VARIACIONAL

## 1- INTRODUÇÃO

No presente capítulo introduzimos o método de projeção ortogonal, na formulação de um princípio variacional generalizado para sistemas não-holônomos. A generalização do princípio variacional aos sistemas submetidos a vínculos não integráveis foi desenvolvida, por outros métodos, por Saletan e Cromer (20).

O cálculo das variações com condições suplementares é conhecido como o problema de Lagrange, e é um dos mais importantes problemas do cálculo variacional (Rund 21 pag 323).

O problema de Lagrange não pode ser aplicado diretamente aos sistemas não-holônomos, porque dele não obtemos o princípio de D'Alembert, como veremos.

Para formularmos o problema de Lagrange não-holônomo, construímos um projetor ortogonal, que seleciona as curvas compatíveis com os vínculos. A construção e uso da projeção ortogonal na mecânica clássica foram propostos pela primeira vez por C.M. do Amaral, com o objetivo de não eliminar coordenadas, no tratamento dos sistemas holônomos ( 1 ). A extensão do método aos sistemas não-holônomos foi por nós realizada em ( 2 ).

Começamos a exposição estabelecendo a diferença entre sistemas holônomos e não holônomos. Estudamos o problema de Lagrange e mostramos a sua inconsistência quando aplicado aos sistemas não integráveis . Passamos em seguida a descrever a construção do projetor, procurando desde o início empregar a notação da geometria diferencial.

Com a seleção das tangentes às curvas variacionais, obtemos as equações de movimento oriundas de um princípio variacional não-holônomo. O resultado obtido mostra que o vetor de Euler-Lagrange é um vetor nulo do projetor.

Estudamos aqui os sistemas com lagrangeanas $L(x,\dot{x})$ não singulares :

$$\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\nu \partial \dot{x}^\mu} \right| \neq 0 \quad . \qquad (1.1)$$

A relação do projetor com as lagrangeanas singulares será discutida no capítulo III.

No nosso método, as coordenadas cartesianas ortogonais são usadas por impossibilidade de efetuarmos uma transformação de coordenadas, devido à não-integrabilidade do sistema de vínculos. Assim, comecemos pelo estudo das coordenadas generalizadas.

**2- COORDENADAS GENERALIZADAS**

Consideremos um sistema mecânico composto de P partículas independentes. As coordenadas **cartesianas** retangulares destas partículas serão representadas por $x^{\nu}$ ($\nu = 1,\ldots,N = 3P$ ).

O problema do movimento é resolvido se conhecermos as N coordenadas como funções do tempo, t. O problema também será resolvido se escolhermos um outro conjunto **arbitrário** de coordenadas,

$$q_1, \quad q_2, \ldots, q_N \; . \qquad (1.2)$$

Em certos casos podemos expressar um conjunto de coordenadas em função de outro conjunto,

$$x^{\mu} = f^{\mu} ( q_1, \; q_2, \ldots, q_N) \; . \qquad (1.3)$$

Para isso, é necessário que o jacobiano

$$\det \left| \frac{\partial f^{\mu}}{\partial q^{\nu}} \right| \; ; \; \mu,\nu = 1\ldots,N \qquad (1.4)$$

tenha posto N, isto é, a matriz acima deve possuir N linhas independentes.

Na transformação (1.3), passamos de um conjunto de N coordenadas cartesianas **retangulares** para um conjunto de N coordenadas **arbitrárias**.

Entretanto, se o sistema de partículas estiver submetido a M vínculos integráveis ( holônomos ), é possível caracterizar a posição do sistema por um conjunto de $S = N - M$ coordenadas **arbitrárias independentes** $q_i$ ($i = 1,\ldots,S = N - M$ ), de tal modo que as coordenadas cartesianas retangulares sejam expresssas em função das novas coordenadas,

$$x^{\nu} = f^{\nu}( q_1, q_2,\dots,q_s ) \quad ; \qquad (1.5)$$

neste caso o jacobiano deve ter posto igual a $s = N - M$, o que expressa o fato de existirem $M$ equações de vínculos entre as coordenadas $x^{\nu}$.

As coordenadas arbitrárias independentes são chamadas de coordenadas generalizadas, e o número $s$ coincide com o número de graus de liberdade do sistema, isto é, com número de deslocamentos infinitesimais independentes.

## 3- ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO

O espaço de configuração é formado pelo conjunto das coordenadas generalizadas ( $q_1,q_2, \dots,q_s$ ), no qual cada ponto representa o sistema de P partículas, sujeito a $M$ vínculos, em um determinado instante. A evolução deste ponto com o tempo representa o movimento do sistema ao longo da curva descrita neste espaço pelo conjunto de funções

$$q_1 = q_1(t);\; q_2= q_2(t);\dots;\; q_s = q_s(t). \qquad (1.6)$$

Estas equações representam a solução do problema dinâmico.

As propriedades geométricas ( métrica, curvatura, conexão ,etc. ) do espaço de configuração holônomo, não relativístico, coincidem com as propriedades geométricas de uma variedade riemanniana $s$-dimensional com métrica positiva definida. A interpretação física da geometria diferencial intrínseca do espaço de configuração pode ser encontrada no trabalho clássico de J.L.Synge " On the Geometry of Dynamics " (24).

## 4- VÍNCULOS NÃO HOLONOMOS

Se os $M$ vínculos formarem um sistema não integrável, o processo de transformação de coordenadas não poderá ser realizado, mas o número de graus de liberdade será ainda

$$S = N - M , \qquad (1.7)$$

e portanto teremos mais coordenadas do que graus de liberdade . Como consequência, notamos dois fatos fundamentais :

1) **O princípio de ação estacionária** não pode ser aplicado de modo imediato;

2) A geometria diferencial do espaço onde se realiza a dinâmica não mais coincide com a geometria riemanniana com métrica positiva definida.

A existência de vínculos que não impõem restrições nas posições do sistema mecânico só foi reconhecida em 1894, quando Hertz introduziu a distinção entre vínculos holônomos e não holônomos (9). Até então, supunha-se que se as coordenadas fossem independentes, as suas variações também o seriam. Isto é verdade apenas no caso dos sistemas integráveis.

**Nos sistemas não-holônomos qualquer posição do espaço de configuração original pode ser atingida, porém só por determinados caminhos, compatíveis com os vínculos.**

Vamos ilustrar este fenômeno com um exemplo simples, e bastante conhecido.

## 5- EXEMPLO

O protótipo de um sistema mecânico submetido a vínculos não integráveis é o de um disco de raio R que rola sem deslizar em um plano horizontal.

As coordenadas necessárias para descrever a posição do centro de massa do disco, são cinco:

**( x, y )** para determinar **a** posição do ponto C de contato do disco com o plano; o ângulo $\psi$ que define a rotação do disco; o ângulo $\phi$ entre a tangente ao disco no ponto C e o eixo dos x;o ângulo $\theta$ que indica a inclinação do plano do disco em relação ao plano (x,y).

Assim as cinco coordenadas determinam um espaço de configuração 5-dimensional. O vínculo consiste na condição de rolamento sem deslizamento. Esta condição se expressa pelo conjunto de equações diferenciais

$$\mathbf{dx = R\ cos\phi\ d\psi} \quad , \tag{1.8}$$

$$\mathbf{dy = R\ sen\phi\ d\psi} \quad . \tag{1.9}$$

Mostraremos que qualquer posição do espaço 5-dimensional pode ser atingida sem violar as restrições acima.

De fato, consideremos um ponto inicial $P_0$ $(x_0,y_0,\psi_0,\phi_0,\theta_0)$ e um ponto final $P_1$ **qualquer** $(x_1,y_1,\psi_1,\phi_1,\theta_1)$. Atingiremos $P_1$, partindo de $P_0$, usando o seguinte procedimento:

Primeiro rolamos o disco até ao ponto ( $x_1,y_1$) ao longo de um arco no plano (x,y), de comprimento

$$\Delta L = R\ (\psi_1 - \psi_0 + 2\ \mathbf{k}\ \pi\ ) \ , \tag{1.10}$$

onde **k** é um número inteiro arbitrário. Em seguida, giramos o disco em torno de uma perpendicular passando por C no ponto $(x_1, y_1)$, até atingirmos o ângulo $\phi_1$. Finalmente inclinamos o disco até a posição $\theta_1$. Deste modo, qualquer outra posição pode ser atingida.

## 6-GRUPO DE HOMOTOPIA

Os vínculos não-holônomos condicionam as velocidades e não as posições. Portanto existem curvas que devem ser excluídas do princípio variacional porque suas **tangentes** violam os vínculos.

Como consequência, nem todas as curvas serão topologicamente equivalentes. Isto é, uma curva que obedeça aos vínculos não pode ser deformada **continuamente** em outra que viole os vínculos. Topologicamente isto significa que uma curva fechada não pode ser reduzida continuamente a um ponto. Podemos ilustrar este fato com o exemplo do disco.

Consideremos o plano $R^2$, onde está a projeção da velocidade do centro de massa do disco. O vetor velocidade, de acordo com as equações de vínculos (1.8) e (1.9), pode ser escrito localmente como

$$\frac{dx}{ds} = \cos\phi(x,y) \qquad ; \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\phi(x,y) \quad , \qquad (1.11)$$

onde $ds = R\, d\psi$ .

Assim podemos escrever o campo de velocidades definido em cada ponto do $R^2$ :

$$V = \hat{u}\cos\phi(x,y) + \hat{v}\,\mathrm{sen}\phi(x,y) \quad , \qquad (1.12)$$

onde $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são vetores unitários ortogonais.

A função **V** pode ser singular em um determinado ponto do $R^2$. Vamos supor que o disco execute um circuito fechado $\gamma$, no plano(x,y). Assim **V** é uma aplicação do circuito fechado $\gamma$ do espaço físico em um círculo $S^1$ , como se verifica na fórmula (1.12). A cada volta completa , do vetor velocidade, no espaço físico, corresponde uma volta em $S^1$. Entretanto, o círculo $S^1$não depende do raio do circuito $\gamma$. Se $\gamma$ for deformado continuamente em um círculo de raio $\varepsilon$ infinitesimal, a variação de **V** continuará a ser $2\pi N$ . Logo a função V é singular no ponto $\varepsilon = 0$, para $N \neq 0$.

Em topologia o número N está relacionado com o primeiro grupo de homotopia do círculo $\Pi_1(s^1)$, que é isomorfo ao grupo dos inteiros Z. Isto quer dizer que o espaço não é simplesmente conexo.

É interessante observar que a fórmula (1.12) coincide com a de um spin planar de módulo unitário. A teoria de homotopia é aplicada neste caso para descrever os defeitos de um meio ferromagnético. Para tal descrição ver Nash (op.cit. 29), pag 244.

A estrutura topológica não trivial do espaço não holônomo revela-se pela existência de conexões não métricas, não integráveis, como veremos no capítulo 2 . Este é o mesmo tipo de fenômeno que ocorre no monopólo magnético, nos instantons e no efeito Bohm-Aharonov, e de modo geral nas teorias dos campos de gauge. No caso não-holônomo a multiconectividade do espaço é induzida pelos próprios vínculos.

A estrutura do espaço de configuração do disco que rola sem deslizar é a seguinte: um cubo tri-dimensional com os lados opostos identificados e parametrizado pelos ângulos $(\psi, \phi, \theta)$, do plano $(x,y)$ Este é um espaço fibrado, representado pelo produto topológico local

$$M = R^2 \times T^3 , \qquad (1.13)$$

onde $R^2$ representa o plano cartesiano e $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ representa o toro tri-dimensional, como produto topológico de três círculos $S^1$. O espaço de configuração neste exemplo é um espaço 5-dimensional tendo por base um espaço cartesiano 2-dimensional, e por fibra o $T^3$.

No caso holônomo, a estrutura topológica do espaço de configuração é mais simples. Como exemplo, o espaço de configuração de um pêndulo duplo é um 2- toro $T^2 = S^1 \times S^1$ obtido com a eliminação de duas coordenadas.

## 7- CLASSIFICAÇÃO DOS VÍNCULOS

Consideremos **N** partículas clássicas descritas por um sistema de coordenadas cartesianas retangulares. O vetor posição da $\nu$-ésima partícula e o vetor velocidade são escritos como

$$r_\nu = x_\nu i + y_\nu j + z_\nu k \; ; \quad \nu = 1, \ldots, N \qquad (1.14)$$

$$\dot{r}_\nu = \dot{x}_\nu i + \dot{y}_\nu j + \dot{z}_\nu k \; . \qquad (1.15)$$

Um vínculo diferencial ou cinemático é expresso pela equação

$$\phi(t,\ r_1,\ r_2,\ldots,r_N,\ \dot{r}_1,\ \dot{r}_2,\ldots,\dot{r}_N\ ) = 0\ . \qquad (1.16)$$

Um vínculo é dito **finito** ou **geométrico** se não depende explicitamente das velocidades :

$$f(t,\ r_\nu\ ) = 0\ . \qquad (1.17)$$

O vínculo diferencial mais comum na mecânica depende linearmente das velocidades,

$$\phi(\ t,r_\nu,\dot{r}_\nu\ ) = \sum^{N} e_\nu\ \dot{r}_\nu + D = 0\ , \qquad (1.18)$$

onde $e_\nu$ pode ser visto como a $\nu$-**ésima** componente de um vetor N-dimensional, que em geral depende da posição e do tempo. A função D pode também depender da posição e do tempo

Um vínculo finito impõe restrições sobre as coordenadas de posição. Um vínculo diferencial impõe restrições sobre as velocidades. Cada vínculo finito do tipo (1.17) origina um vínculo diferencial, por derivação temporal :

$$\dot{f}(\ t,r_\nu\ ) = \sum \nabla_\nu f\ \dot{r}_\nu + \frac{\partial\ f}{\partial\ t} = 0\ , \qquad (1.19)$$

onde

$$\nabla_\nu f = \frac{\partial\ f}{\partial\ x_\nu}\ i + \frac{\partial\ f}{\partial\ y_\nu}\ j + \frac{\partial\ f}{\partial\ z_\nu}\ k\ . \qquad (1.20)$$

O vínculo diferencial (1.19) é chamado integrável ou holônomo. O vínculo (1.18), que não resulta da diferenciação de uma função é chamado de não-holônomo.

Os sistemas submetidos a vínculos finitos ou diferenciais integráveis são chamados de sistemas holônomos. Os sistemas submetidos a vínculos diferenciais não integráveis são chamados de não-holônomos.

Observamos que a existência de vínculos não integráveis isoladamente não define o sistema como não-holônomo. Em certos casos é possível, por uma combinação adequada, tornar o sistema completamente integrável. O estudo da integrabilidade de um sistema de vínculos diferenciais (1.18) reduz-se ao estudo das condições de integrabilidade do sistema pfaffiano

$$\phi^{J} = \sum \mathbf{e}^{J}_{\nu}\, \mathbf{dx}^{\nu} = 0 \quad . \tag{1.21}$$

Este sistema é completamente integrável se

$$\mathbf{e}^{K}_{\mu}\, \partial_{\mu}\mathbf{e}^{J}_{\nu} - \mathbf{e}^{J}_{\mu}\partial_{\mu}\mathbf{e}^{K}_{\nu} = \mathbf{C}^{JK}_{L}\mathbf{e}^{L}_{\nu} \;, \tag{1.22}$$

$$K,\ L,\ J = 1,\ldots,M \;,\quad \nu = 1\ldots,N$$

onde $C^{JK}_{L}$ é uma constante. Um estudo destes sistemas, usando a linguagem da moderna geometria diferencial, foi desenvolvido por Hermann (57).

## 8- EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Estabelecemos aqui as equações de movimento de um sistema conservativo descrito por $N$ coordenadas $x^{\nu}$ e submetido a $M$ vínculos não holônomos (1.21). Para simplificar, consideramos a lagrangeana na forma

$$L = T(x^\nu,\dot{x}^\nu) - V(x^\nu) \quad , \tag{1.23}$$

onde $T(x^\nu,\dot{x}^\nu)$ representa a energia cinética e $V(x^\nu)$ o potencial externo.

Em alguma ocasiões usaremos a notação compacta

$$\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \; ; \; \partial_{\dot{\nu}} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu} \; ; \; d_t \equiv \frac{d}{dt}$$

e sempre a convenção de Einstein sobre a soma de índices repetidos.

As equações de Euler-Lagrange tomam a forma

$$d_t\partial_{\dot{\nu}}T - \partial_\nu T = Q_\nu + F_\nu \; , \tag{1.24}$$

onde $Q_\nu = -\partial_\nu V$ são as componentes da forças externas conservativas e $F_\nu$ são as componentes da forças de vínculos. Estas equações são reescritas usualmente na forma

$$d_t\partial_{\dot{\nu}}L - \partial_\nu L = \lambda_J \partial_{\dot{\nu}}\phi^J \quad , \tag{1.25}$$

onde $\lambda_J = \lambda_J(x,\dot{x})$ são os multiplicadores de Lagrange. O sistema de equações acima, junto com as equações de vínculos, formam um sistema de $N + M$ equações que permitem determinar as $N + M$ incógnitas $x^\nu,\lambda_J$. A dedução destas equações, entretanto, não é satisfatória, uma vez que não parte de um **princípio de ação estacionária**. As equações **(1.25)** são aceitas devido ao sucesso empírico, de acordo com Rund ( 21 pag 355).

Examinamos a seguir o princípio variacional sujeito a condições subsidiárias, não integráveis.

**9-PRINCÍPIO VARIACIONAL**

O problema consiste em determinar a curva que além de satisfazer às condições (1.21) torna extrema a integral de ação $S(\Gamma)$:

$$S(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(x^\nu, \dot{x}^\nu)dt \quad . \qquad (1.26)$$

O estudo deste problema tem interessado um grande número de físicos e matemáticos desde os trabalhos de Bolza (58), e tem sido reexaminado de tempos em tempos. Entre essas revisões podemos citar Carathéodory, Morse , Saletan e Rund, como já mencionamos na Introdução.

Procuramos obter as equações (1.25) comparando os valores de $S(\Gamma)$ segundo um conjunto de curvas compatíveis com os vínculos. Assim consideramos uma família de curvas caracterizadas por um parâmetro $\varepsilon$ , de tal modo que cada curva é determinada pela equação

$$x^\nu = x^\nu(t,\varepsilon) \quad ; \qquad (1.27)$$

a curva que extremiza $S(\Gamma)$ corresponde por escolha a $\varepsilon = 0$ : $x^\nu = x^\nu(t)$.

Uma curva vizinha à curva extremal é dada por

$$x^\nu(t,\varepsilon) = x^\nu(t) + \varepsilon\, \eta^\nu + O(\varepsilon^2) \quad , \qquad (1.28)$$

onde $\eta^{\nu} = \frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ ; à diferença,

$$\delta x^{\nu} = x^{\nu}(t,\varepsilon) - x^{\nu}(t) = \varepsilon\, \eta^{\nu} , \qquad (1.29)$$

chamamos de variação virtual.

As tangentes também diferem infinitesimalmente:

$$\dot{x}^{\nu}(t,\varepsilon) = \dot{x}^{\nu}(t) + \varepsilon\, \dot{\eta}^{\nu} + O(\varepsilon^{2}) , \qquad (1.30)$$

onde $\dot{\eta}^{\nu} = \frac{\partial\, \dot{x}^{\nu}}{\partial\, \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ ; o deslocamento virtual é definido por

$$\Delta x^{\nu} = (\dot{x}^{\nu}(t,\varepsilon) - \dot{x}^{\nu}(t))dt = \varepsilon\, \dot{\eta}^{\nu}dt . \qquad (1.31)$$

No caso holônomo as variações virtuais pertencem ao espaço dos deslocamentos virtuais. De fato, consideremos a variação virtual de um vínculo holônomo, esclerônomo,

$$\delta f^{J} = \partial_{\nu} f^{J}(x)\delta x^{\nu} \equiv a^{J}_{\nu}\delta x^{\nu} . \qquad (1.32)$$

Considerando as equações de vínculos (1.21), observamos que

$$\partial_{\dot{\nu}}\phi^{J}(x,\dot{x})\Delta x^{\nu} \equiv e^{J}_{\nu}\Delta x^{\nu} = 0 \qquad (1.33)$$

No caso holônomo temos $e^{J}_{\nu} = a^{J}_{\nu}$, pois $\partial_{\dot{\nu}}\phi^{J}(x,\dot{x}) = \partial_{\nu} f^{J}(x)$.

Esta igualdade significa que as variações virtuais são ortogonais às fôrças de vínculos. No caso não-holonomo $a^{J}_{\nu} \neq e^{J}_{\nu}$, e como consequência as variações virtuais não **coincidem com os deslocamentos virtuais:** $\Delta x^{\nu} \neq \delta x^{\nu}$

Considerando que o princípio de D'Alembert expressa o trabalho realizado em um deslocamento virtual,

$$\sum_{\nu} ( d_t \partial_{\dot{\nu}} L - \partial_{\nu} L) \Delta x^{\nu} = 0 \quad , \tag{1.34}$$

mostraremos que o princípio variacional convencional não se aplica aos sistemas dinâmicos não holônomos.

Efetuemos as variações da integral de ação considerando extremos fixos, para simplificar:

$$\eta^{\nu}(t_1) = \eta^{\nu}(t_2) = 0 \ .$$

Substituindo (1.28 ) e (1.30 ) na integral de ação (1.26) temos

$$S (\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L ( x^{\nu}(t) + \varepsilon \eta^{\nu};\ \dot{x}^{\nu}(t) + \varepsilon \dot{\eta}^{\nu})dt, \tag{1.35}$$

e expandindo o funcional em torno da curva extremal temos

$$S(\varepsilon) = S(0) + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + O( \varepsilon^2) \quad . \tag{1.36}$$

Deste modo identificamos a primeira variação de S como

$$\delta S = \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad , \tag{1.37}$$

e calculando a derivada do funcional S no ponto $\varepsilon$=0 temos

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t}^{t_2} \sum_{\nu} \left[\partial_{\nu} L\, \eta^{\nu} + \partial_{\dot{\nu}} L\, \dot{\eta}^{\nu}\right] dt \;. \qquad (1.38)$$

Integrando o segundo termo do lado direito de (1.38) por partes obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \partial_{\dot{\nu}} L\, \dot{\eta}^{\nu} dt = \left[\eta^{\nu}\, \partial_{\dot{\nu}} L\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\eta^{\nu}\, d_t \partial_{\dot{\nu}} L\right] dt \;. \qquad (1.39)$$

O primeiro termo é nulo devido à hipótese de extremos fixos. Substituindo (1.39) em (1.38 ) e multiplicando por $\varepsilon$ temos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu} \left[ d_t \partial_{\dot{\nu}} L - \partial_{\nu} L\, dt \right] \varepsilon \eta^{\nu} dt = 0 \;, \qquad (1.40)$$

e tendo em conta ( 1.28) ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\nu} \left[ d_t \partial_{\dot{\nu}} L - \partial_{\nu} L\, dt \right] \delta x^{\nu} dt = 0 \;. \qquad (1.41)$$

Reescrevendo o integrando de forma compacta temos a condição de estacionaridade da ação

$$\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu} E_{\nu}\eta^{\nu}dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu} E_{\nu}\delta x^{\nu}dt = 0 \ , \tag{1.42}$$

com $E_{\nu} \equiv d_t\, \partial_{\dot{\nu}}L - \partial_{\nu}L$ representando o vetor de Euler.

Se o sistema for holônomo temos $\delta x^{\nu} \equiv \Delta x^{\nu}$ e portanto obtemos o princípio de D'Alembert

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu} E_{\nu}\Delta x^{\nu}dt = 0 \ . \tag{1.43}$$

No caso não-holônomo este procedimento não pode ser efetuado pois $\Delta x^{\nu} \neq \delta x^{\nu}$. Isto é, não obtemos o princípio de D'Alembert.

A fórmula (1.42 ) pode ser vista como um produto escalar entre os vetores E de Euler e $\eta$, cujas componentes são respectivamente $E_{\nu}$ e $\eta^{\nu}$, $\nu = 1,\ldots,N$. Com esta observação, podemos formular um princípio variacional generalizado válido também para sistemas não holônomos. Para isto temos que obrigar as variações virtuais $\delta x^{\nu}$ a pertecerem ao subespaço ortogonal a $E_{\nu}$. Isto pode ser realizado com uma formulação geométrica, como a descrita a seguir.

## 10- CAMPOS VETORIAIS

Considerando a forma da equações de vínculos (1.21), vemos que as restrições são impostas no espaço tangente:

$$\phi^{J} = e^{J}_{\nu}(x,\dot{x})\ \dot{x}^{\nu} = 0 \tag{1.44}$$

$$J = 1,\ldots,M \; ; \; \nu = 1.\ldots,N.$$

Podemos gerar $M$ contravetores em cada ponto $(x,\dot{x})$, a partir do gradiente em velocidades, supondo vínculos homogêneos nessas variáveis:

$$e^J_\mu(\, x,\dot{x}) = \partial_{\dot{\mu}}\phi^J \quad . \qquad (1.45)$$

As componentes $e^J_\mu$ serão definidas em relação a dada uma base do espaço ambiente, composta de $N$ tensores linearmente independentes que serão designados

$$|\, a^\mu > \quad ; \; \mu = 1,\ldots,N. \qquad (1.46)$$

O espaço ambiente pode ser dotado de um tensor métrico definido pelo produto escalar

$$< a^\mu|a^\nu> = g^{\mu\nu} \quad , \qquad (1.47a)$$

com a dualidade definida por

$$< a_\mu|\, a^\nu > = \delta^\nu_\mu \quad . \qquad (1.47b)$$

Desta forma associamos a cada equação de vínculo (1.21) um campo tensorial $|\, e^J >$ cuja representação na base ambiente é escrita como

$$|\, e^J \rangle \; = \; |\, a^\mu > e^J_\mu \quad , \qquad (1.48a)$$

$$J = 1,\ldots,M \quad ; \; \nu =1,\ldots,N$$

cujo dual é representado por

$$< e_K| = e^\mu_K < a_\mu| \; . \qquad (1.48b).$$

Assim o produto dual local implica em

$$< e_K | e^J > = e^{\mu}_K < a_{\mu} | a^{\nu} > e^J_{\nu} = e^{\mu}_K e^J_{\mu} = \delta^J_K . \qquad (1.49)$$

Como as equações de vínculos (1.21) são independentes, os $|e^J\rangle$ formam um espaço linear M-dimensional local.

Para gerarmos uma base **completa,** utilizamos N-M vetores arbitrários, linearmente independentes, cuja representação na base ambiente é

$$|e^i\rangle = | a^{\mu} > e^i_{\mu} \quad , \qquad (1.50a)$$

$$i = 1,..,N-M, \ \mu = 1,..,N,$$

com o respectivo dual

$$< e_i | = e^{\mu}_i < a_{\mu} | \ . \qquad (1.50b)$$

Vamos supor ortogonalidade local entre o espaço interno, designado pelas letras romanas minúsculas, e o espaço externo, designado pelas romanas maiúsculas

$$\langle e^i | e^J \rangle = e^{i\mu} e^J_{\mu} = 0 \quad . \qquad (1.51)$$

No espaço externo temos um tensor métrico local bem definido:

$$\langle e^K | e^J \rangle = e^{K\mu} e^J_{\mu} = g^{KJ}(x,\dot{x}). \qquad (1.52)$$

Com o auxílio de $g_{KJ}$ podemos definir os campos vinculares covariantes

$$|e_J\rangle = |e^K\rangle g_{KL} . \qquad (1.54)$$

Cabe aqui uma observação:adotamos a regra de soma dos índices repetidos, em diagonal descendente da esquerda para a direita ↘ . Esta notação é útil, como veremos na definição do operador de projeção.

Se definirmos a base $\langle a_\mu |$ como um campo vetorial local do espaço tangente,

$$\langle a_\mu | \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \qquad (1.55)$$

temos a 1-forma dual

$$| a^\mu \rangle \equiv dx^\mu \quad , \qquad (1.56)$$

cujo produto dual é definido pela convenção usual

$$\langle a_\mu | a^\nu \rangle = \delta_\mu^\nu \quad . \qquad (1.57)$$

Assim os campos tensoriais locais associados aos vínculos podem ser escritos como

$$|e^J\rangle = dx^\mu e_\mu^J \ , \qquad (1.58)$$

$$| e_J\rangle = dx^\mu e_{\mu J} \ , \qquad (1.59)$$

$$\langle e^J| = e^{J\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ , \qquad (1.60)$$

$$\langle e_J| = e_J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \qquad (1.61)$$

As 1- formas associadas aos vínculos serão definidas de modo geral de acordo com (1.58) e (1.59). E os campos vetoriais, como (1.60) e (1.61).

**11- O PROJETOR**

As componentes $e^{J}_{\mu}$ e suas recíprocas $e^{J\mu}$ podem ser obtidas por projeção do vetor local sobre o vetor do espaço ambiente:

$$< a_{\nu}| \, e^{K} > = \, < a_{\nu}| \, a^{\mu} > e^{K}_{\mu} = e^{K}_{\nu} \, , \qquad (1.62)$$

$$< e^{J}|a^{\nu} > = e^{J\mu} < a_{\mu}| \, a^{\nu} > = e^{J\nu} \, . \qquad (1.63)$$

O operador de projeção é definido pela propriedade de idempotência (59). Assim definimos o projetor sobre o espaço externo como

$$Q(x,\dot{x}) = | \, e^{J} >< e_{J} \, | \, , \qquad (1.64a)$$

ou seja,

$$Q = dx^{\mu} e^{J}_{\mu} \, e^{\nu}_{J} \frac{\partial}{\partial \, x^{\nu}} \, ; \qquad (1.64b)$$

portanto o projetor é um tensor do tipo ( 1,1 ).

Os tensores induzidos pelos vínculos são auto-tensores do projetor, como pode ser verificado diretamente:

$$Q(x,\dot{x})| \, e^{K} > = | \, e^{J} >< e_{J}| \, e^{K} > = | \, e^{K} >, \qquad (1.65)$$

e como consequência.

$$Q^{2} = | \, e^{J} >< e_{J} \, | \, e^{K} >< e_{K}| = | \, e^{J} >< e_{J}| \qquad , \qquad (1.66)$$

Usando (1.62) e (1.63) determinamos as componentes do projetor:

$$Q^{\mu}_{\nu} \equiv \langle a_{\nu}|Q|\ a^{\mu}\rangle = e^{J}_{\nu}\ e_{J}^{\ \mu} \qquad (1.67)$$

$$J,K = 1,\ldots,M\ ;\ \nu,\mu,\alpha = 1,\ldots,N$$

As componentes do projetor complementar tem a forma

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - Q^{\mu}_{\nu}\ , \qquad (1.68)$$

onde $\delta^{\mu}_{\nu}$ é a função delta de Kroneker. Com esta definição, verificamos que as 1-formas $|\ e^{J} >$ são os tensores nulos de $\Lambda$:

$$\Lambda\ |\ e^{J} > = 0\ , \qquad (1.69a)$$

ou, em componentes,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\ e^{J}_{\mu} = 0\ . \qquad (1.69b)$$

A ação dual de $\Lambda$ se escreve

$$< e^{J}|\ \Lambda = 0\ , \qquad (1.70a)$$

ou, em componentes,

$$e^{J\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu} = 0\ . \qquad (1.70b)$$

Com o auxílio de $\Lambda$ as componentes das velocidades compatíveis com os vínculos serão escritas como

$$\dot{x}^{\nu *} = \dot{x}^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu} \qquad (1.71a)$$

e

$$\dot{x}^{*}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\ \dot{x}_{\mu}\ , \qquad (1.71b)$$

onde $\dot{x}^{\mu}$ é uma velocidade arbitrária. De fato vemos que (1.71a) obedece a equação de vínculo tendo em conta (1.69a):

$$\dot{x}^{\nu *}e^{J}_{\nu} = \dot{x}^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}e^{J}_{\nu} = 0\ ; \qquad (1.72)$$

concluímos que os deslocamentos virtuais e as variações virtuais devem pertencer inteiramente ao espaço interno e portanto devem ser escritas como

$$\Delta x^{\nu *} = \Delta x^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu} \quad , \qquad \delta x^{\nu *} = \delta x^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu} \quad , \tag{1.73}$$

onde $\Delta x^{\nu}$ e $\delta x^{\nu}$ são arbitrários.

## 12- PRINCÍPIO VARIACIONAL GENERALIZADO

Consideremos a integral de ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\ (x^{\nu}, \dot{x}^{\nu})\ dt \ , \tag{1.74}$$

e efetuemos as variações de acordo com (1.73):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta x^{\nu *} E_{\nu}\ dt = 0 \ , \tag{1.75}$$

ou seja

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu} E_{\nu} dt = 0 \ ; \tag{1.76}$$

como os $\delta x^{\mu}$ são arbitrários podemos escrever

$$\Lambda_{\mu}^{\nu}\ E_{\nu} = 0 \ , \tag{1.77}$$

portanto o vetor de Euler é um vetor nulo do projetor. Explicitamente,

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \left[\ d_t\ \partial_{\dot{\nu}} L - \partial_{\nu} L\ \right] = 0 \ , \tag{1.78}$$

$\mu,\nu = 1,..,N.$

O conjunto de equações (1.78), junto com as equações de vínculos (1.21), determinam completamente o movimento do sistema.

Mostraremos que as equações (1.78) são as equações de movimento provenientes do princípio de D'Alembert:

$$E_\nu = \partial_\nu \phi^J \lambda_J \ . \tag{1.79}$$

Usando a propriedade de complementaridade do projetor (1.68), reescrevemos (1.77) como

$$E_\mu = Q_\mu^\nu \ E_\nu \ , \tag{1.80}$$

e de (1.67) temos

$$Q_\mu^\nu \ E_\nu \ = \ e_\mu^J \ e_J^\nu \ E_\nu = e_\mu^J < e_J | \ E > \ . \tag{1.81}$$

O produto escalar em (1.81) é a componente da força de vínculo na direção $< e_J|$, e portanto

$$E_\mu = e_\mu^J \ \lambda_J = \partial_\mu \phi^J \lambda_J \ . \tag{1.82}$$

Assim os usuais multiplicadores de Lagrange $\lambda_J$ são as componentes das forças de vínculos, escritas no referencial local. Observamos que esta formulação do princípio variacional nos fornece as equações de movimento corretas, na forma encontrada por Whittaker (60).

**13- EXEMPLOS**

PRIMEIRO EXEMPLO

Como ilustração do método consideramos um exemplo clássico de sistema não-holônomo. O sistema consiste de um par de partículas de massas iguais M = 1, cuja distância relativa **a** é admitida constante. O sistema é suposto mover-se em um plano vertical sob ação de um campo gravitacional constante, de modo que a velocidade do centro de massa seja sempre colinear com o vetor que une as duas partículas. Este é o modelo de um "patim" idealizado. Existem dois tipos de vínculos: a) holônomo e b) não-holônomo.

A lagrangeana do sistema em coordenadas cartesianas tem a forma

$$L = \frac{1}{2} ( \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 ) - g ( x_3 + x_4 ) \quad , \qquad (1.83)$$

e os vínculos são expressos pelas equações

a) $$\frac{1}{2} [ ( x_2-x_1 )^2 + ( x_4 - x_3 )^2 - a^2 ] = 0 \quad , \qquad (1.84)$$

b) $$\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{\dot{x}_3 + \dot{x}_4} = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} \quad , \qquad (1.85)$$

onde $( x_1,x_3)$ e $(x_2,x_4)$ são as coordenadas cartesianas de cada partícula no plano e $(\dot{x}_1, \dot{x}_3)$ , $(\dot{x}_2,\dot{x}_4 )$ as velocidades. Definindo $( x_2-x_1) = u$ e $( y_2-y_1) = v$ temos as equações de vínculos na forma diferencial

$$\phi^1 = -udx_1 + udx_2 - vdy_1 + vdy_2 = 0 , \tag{1.86}$$

$$\phi^2 = -vdx_1 - vdx_2 + udy_1 + udy_2 = 0 . \tag{1.87}$$

Os vetores locais $< e^J |$ tem componentes

$$< e^1 | \equiv ( -u, u, -v, v ) , \tag{1.88}$$

$$< e^2 | \equiv ( -v, -v, u, u ) , \tag{1.89}$$

e possuem a mesma norma :

$$< e^1 | e^1 > = < e^2 | e^2 > = 2 ( u^2 + v^2 ) = 2 a^2 . \tag{1.90}$$

O projetor tem a seguinte representação matricial :

$$Q = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{v^2 - u^2}{a^2} & 0 & -\dfrac{2\,vu}{a^2} \\ \dfrac{v^2 - u^2}{a^2} & 1 & -\dfrac{2\,vu}{a^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\,uv}{a^2} & 1 & -\dfrac{v^2 - u^2}{a^2} \\ -\dfrac{2\,uv}{a^2} & 0 & -\dfrac{v^2 - u^2}{a^2} & 1 \end{vmatrix} . \tag{1.91}$$

Aplicando as equações e movimento (1.80), obtemos o sistema

$$\dot{x}^{\bullet}_1 = \frac{\ddot{x}_1}{2} + \frac{v^2 - u^2}{2a^2}\,\dot{x}^{\bullet}_2 - \frac{2\,vu}{2\,a^2}\,(\,\dot{x}^{\bullet}_4 + g\,)\,, \qquad (1.92)$$

$$\dot{x}^{\bullet}_2 = \frac{\ddot{x}_2}{2} + \frac{v^2 - u^2}{2a^2}\,\dot{x}^{\bullet}_1 - \frac{2\,vu}{2\,a^2}\,(\,\dot{x}^{\bullet}_3 + g\,)\,, \qquad (1.93)$$

$$\dot{x}^{\bullet}_3 + g = \frac{\ddot{x}_3 + g}{2} - \frac{v^2 - u^2}{2a^2}\,(\,\dot{x}^{\bullet}_4 + g) - \frac{2\,vu}{2\,a^2}\,\dot{x}^{\bullet}_2\,, \qquad (1.94)$$

$$\dot{x}^{\bullet}_4 + g = \frac{\ddot{x}_4 + g}{2} - \frac{v^2 - u^2}{2a^2}\,(\,\dot{x}^{\bullet}_3 + g) - \frac{2\,vu}{2\,a^2}\,\dot{x}^{\bullet}_1\,. \qquad (1.95)$$

Definindo $b = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$ e $q = \dot{x}_3 + \dot{x}_4$, somando e subtraindo (1.92) e (1.93), obtemos as equações

$$u\dot{b} + 2vg + v\dot{q} = 0\,, \qquad (1.96)$$

$$\dot{u}^{\bullet} v - u\,\dot{v}^{\bullet} = 0\,. \qquad (1.97)$$

Estas equações, junto com as equações de vínculos

$$v^2 + u^2 = a^2\,, \qquad (1.98)$$

$$bv - qu = 0\,, \qquad (1.99)$$

determinam o movimento do sistema, e coincidem com as equações encontradas por Gantmacher (61, pag 24 ).

**SEGUNDO EXEMPLO**

Como segundo exemplo consideremos um disco de raio **R** rolando em um plano horizontal obrigado a permanecer na vertical. Os vínculos neste caso são escritos na forma

$$\phi^1 = \dot{x}\cos(\chi) + \dot{y}\sin(\chi) - R\dot{\theta} = 0 \quad , \qquad (1.103)$$

$$\phi^2 = \dot{x}\sin(\chi) - \dot{y}\cos(\chi) = 0 \quad , \qquad (1.104)$$

onde **x y** são as coordenadas cartesianas do centro de massa, $\theta$ é o angulo de rotação do disco e $\chi$ é o angulo entre o disco e o eixo dos **x**. O primeiro vínculo expressa a condição de rolamento puro. O segundo vínculo determina que a velocidade mantenha-se na linha da projeção do centro de massa no plano **x-y**.

Na ausência de forças externas a lagrangeana tem a forma

$$L = 1/2\ [\ I\dot{\theta}^2 + J\dot{\chi}^2 + M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] \quad , \qquad (1.105)$$

e a hamiltoniana correspondente se escreve

$$H = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\chi^2}{2J} + \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_y^2}{2M} \quad . \qquad (1.106)$$

O projetor tem a seguinte forma matricial:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{R^2\cos^2\chi}{(1+R^2)} & \frac{R^2\cos 2\chi}{2(1+R^2)} & \frac{R\cos\chi}{(1+R^2)} & 0 \\ \frac{R^2\cos 2\chi}{2(1+R^2)} & \frac{R^2\sin^2\chi}{(1+R^2)} & \frac{R\sin\chi}{(1+R^2)} & 0 \\ \frac{R\cos\chi}{(1+R^2)} & \frac{R\sin\chi}{(1+R^2)} & 1-\frac{R^2}{(1+R^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{1.83}$$

Os momentos canônicos são

$$\Pi_x = R\cos\chi\ p_\theta , \quad \Pi_y = R\sin\chi\ p_\theta , \quad \Pi_\theta = p_\theta , \ \Pi_\chi = p_\chi , \tag{1.84}$$

onde usamos

$$\Pi^\mu = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu} . \tag{1.85}$$

A hamiltoniana vinculada pode ser escrita

$$H^* = (1/2)[(R^2/M + 1/I)p_\theta^2 + (1/J)p_\chi^2 \quad ; \tag{1.86}$$

as equações canônicas tomam a forma

$$\dot{\theta} = (R^2/M + 1/I)p_\theta \quad , \quad \dot{\chi} = (1/J)p_\chi \quad , \tag{1.87}$$

$$\dot{p}_\theta = 0 \quad , \quad \dot{p}_\chi = 0 \quad , \tag{1.88}$$

cujas soluções são imediatas:

$$\begin{gathered} \theta = \omega t + \omega_0, \qquad \chi = \Omega t + \Omega_0 \quad . \\ p_\theta = \text{const} , \qquad p_\chi = \text{const} \end{gathered} \tag{1.89}$$

CAPÍTULO 2

# GEOMETRIA NÃO-HOLÔNOMA

## 1- INTRODUÇÃO

De acordo com Klein, uma geometria pode ser definida por meio dos invariantes do grupo que age sobre uma variedade (62).

Cartan (63) foi o primeiro a propor a generalização do conceito de Klein. Esta generalização consiste em definir a geometria por meio dos deslocamentos isomórficos de uma geometria local, ao longo das curvas de uma variedade subjacente. Assim foram estudadas a geometria riemanniana, a geometria afim, a geometria projetiva, e a conforme. Cartan também estudou vários casos em que o espaço local possuia diferentes grupos de transformação ( 27).

O estudo da geometria não-holônoma como uma geometria de Klein generalizada foi realizado por Vanderslice (17).

O postulado fundamental desta geometria refere-se aos deslocamentos infinitesimais compatíveis com uma curva do espaço subjacente N-dimensional $A_N$. Vamos construir este postulado com o projetor, introduzido no primeiro capítulo.

Consideremos uma família de curvas de $A_N$ passando por um ponto $x_0$, em cada direção $\dot{x}^\mu$ representada localmente por

$$x^\mu = x_0 + \dot{x}^\mu t \; , \qquad \mu = 1,\dots,N \; . \tag{2.1}$$

O deslocamento infinitesimal compatível com os vínculos, na direção $\mu$ ao longo desta curva será escrito com a ajuda do projetor:

$$dx^{\mu *} = dx^{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} \quad , \tag{2.2}$$

onde $dx^{\nu} = {}_{\lim \varepsilon \Rightarrow 0}\, 1/\varepsilon\ (\ x^{\nu}(t+\varepsilon) - x^{\nu}(t))$.

Como vimos no primeiro capítulo,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \mathbf{e}^{J}_{\nu}\ \mathbf{e}^{\mu}_{J} \tag{2.3}$$

são os elementos de matriz do projetor, escrito em coordenadas do espaço ambiente, e $e^{J}_{\mu}$ as componentes das 1-formas locais, definidas pela restrição

$$|\ \mathbf{e}^{J} > \ = \mathbf{dx}^{\mu}\mathbf{e}^{J}_{\mu} = \mathbf{0} \tag{2.4a}$$

$$J = 1 . . . . M \quad ,$$

e os $e^{\mu}_{J}$ são as componentes dos campos vetoriais duais:

$$< \mathbf{e}_{J}\ | = \mathbf{e}^{\mu}_{J} \frac{\partial}{\partial\ \mathbf{x}^{\mu}} \quad . \tag{2.4b}$$

A relação de dualidade implica em

$$< e_{J} |\ e^{K} > \ = \ \mathbf{e}^{\mu}_{J}\mathbf{e}^{K}_{\mu} = \delta^{K}_{J} \quad . \tag{2.5}$$

Desta forma introduzimos naturalmente o projetor na geometria não-holônoma.

## 2- CONDIÇÕES DE INTEGRABILIDADE

Consideremos o subgrupo dos deslocamentos infinitesimais compatíveis, ao longo de um paralelogramo de lados $\Delta x^{\mu}$ e $\delta x^{\mu}$.

Este subgrupo foi chamado por Cartan de grupo de Holonomia. Se os deslocamentos, como grupo, reduzirem-se à identidade, dizemos que a curvatura é nula na região. Usando o postulado (2.2), obtemos

$$\overline{\Delta}X^{\alpha} = \delta(\Delta x^{\nu}\Lambda^{\mu}_{\nu})\Lambda^{\alpha}_{\mu} - \Delta(\delta x^{\nu}\Lambda^{\mu}_{\nu})\Lambda^{\alpha}_{\mu} = \Delta x^{\rho}\delta x^{\nu}R^{\alpha}_{\rho\nu} , \quad (2.6)$$

onde

$$R^{\alpha}_{\rho\nu} = \left[ \partial_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho} \right]\Lambda^{\alpha}_{\mu} . \quad (2.7)$$

Se $R^{\alpha}_{\rho\nu} = 0$, o deslocamento infinitesimal é completamente integrável. Neste caso a geometria é holônoma na região definida pelo percursso. Se $R^{\alpha}_{\rho\nu} \neq 0$, a geometria é não holônoma. Portanto o projetor contém a informação sobre a holonomia do espaço.

Se efetuarmos as derivadas em 2.7, tendo em conta (2.3), chegamos à mesma expressão de Weyl ( 64 ) pag 717.

A integrabilidade de (2.2) implica em

$$\frac{\partial^2 x^{\mu *}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 x^{\mu *}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\rho}} = 0 . \quad (2.8)$$

No caso não holônomo, chamamos o objeto definido por

$$\frac{\partial^2 x^{\mu *}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}} = -\partial_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\nu} \equiv \overline{\Gamma}^{\mu}_{\rho\nu} \quad (2.9)$$

de conexão não - holônoma. A partir desta definição verifica -se fácilmente que $\bar{\Gamma}^{\mu}_{\rho\nu}$ transforma-se como as componentes de uma conexão afim, sob transformações de coordenadas:

$$x^{\nu'} = x^{\nu'}(x); \qquad dx^{\nu'} = dx^{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \tag{2.10}$$

$$\bar{\Gamma}^{\mu'}_{\rho\nu} = \left[ \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\sigma} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\rho'} \partial x^{\nu'}} \right] \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \tag{2.11}$$

### 3- GEODÉSICA NÃO HOLÔNOMA

Deduziremos a expressão da geodésica não holônoma, supondo que o espaço subjacente $A_N$ possua uma conexão métrica. A geodésica não holônoma por definição será toda curva que torne estacionário o comprimento do arco elementar e obedeça ao mesmo tempo as restrições impostas pelos vínculos.

Ressaltamos neste estudo, que a variedade não holonoma é mais geral do que a variedade riemanniana, pois possibilita a coexistência de transporte paralelo métrico com transporte paralelo não métrico. Achamos que a variedade não holônoma pode ser útil na descrição geométrica das teorias unificadas como a do eletromagnetismo com relatividade geral. A conexão não holônoma é independente da métrica da variedade ambiente, como veremos a seguir.

Seja uma variedade N - dimensional com coordenadas locais $\{ x^{\nu} \}$ ( $\nu = 1,\ldots N$ ), cujo elemento de arco, positivo definido, é dado por

$$ds^2 = dx^{\mu} dx^{\nu} g_{\mu\nu} \quad ; \tag{2.12}$$

consideremos ainda os deslocamentos condicionados pelas condições suplementares

$$dx^{\mu}e_{\mu}^{J} = 0 \; , \; J = 1,..M \quad . \tag{2.13}$$

Esta equação obriga que a curva restringida seja ortogonal em todos os pontos aos tensores locais. Assim as variações devem obedecer às equações

$$\delta x^{\mu}e_{\mu}^{\;J} = 0 \quad . \tag{2.14}$$

A variação estacionária do arco (2.12) compatível com os vínculos nos fornece

$$\delta \int ds = \int \xi^{\nu}\Lambda_{\nu}^{\mu} \; \delta x_{\mu} \quad , \tag{2.15}$$

onde $\xi^{\nu}$ é o primeiro tensor de curvatura

$$\xi^{\nu} = \dot{x}^{\cdot\nu} + \dot{x}^{\mu}\,\dot{x}^{\rho}\left\{ {\nu \atop \mu\;\rho} \right\} \equiv \nabla\,\dot{x}^{\nu} \quad , \tag{2.16}$$

e $\left\{ {\lambda \atop \mu\;\rho} \right\}$ o símbolo de Christoffel de segunda espécie.

A solução estacionária de (2.15) consistente com (2.14) será, como vimos no primeiro capítulo,

$$\xi^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu} = 0 \quad , \tag{2.17}$$

com a condição adicional sobre as tangentes

$$\dot{x}^{\nu *} = \dot{x}^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu} \quad . \tag{2.18}$$

O problema reduz-se a achar um tensor de curvatura que obedeça (2.17) tendo em conta (2.18).

Derivando covariantemente a equação (2.18) ( ao longo de uma geodésica compatível com os vínculos ) temos

$$\ddot{x}^{\nu *} + \dot{x}^{\rho *}\dot{x}^{\mu *}\left\{ {\nu \atop \rho\ \mu} \right\} = \xi^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu} + \dot{x}^{\rho *}\dot{x}^{\mu *}\ \nabla_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\mu} \quad ; \tag{2.19}$$

dispensando o uso do símbolo (*) e considerando (2.17) obtemos

$$\ddot{x}^{\nu} + \dot{x}^{\rho}\ \dot{x}^{\mu}\left[ \left\{ {\nu \atop \mu\ \rho} \right\} - \nabla_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\mu} \right] = 0 \quad , \tag{2.20}$$

onde $\nabla_{\rho}$ é a derivada covariante do projetor.

Este resultado é o mesmo encontrado por Synge, que entretanto não usou o método de projeção (op.cit.15).

A derivada covariante do projetor em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser calculada diretamente :

$$\nabla_{\sigma}\Lambda^{\alpha}_{\nu} = \partial_{\sigma}\Lambda^{\alpha}_{\nu} + \Lambda^{\rho}{}_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Lambda^{\alpha}_{\rho} \quad .$$

Os dois últimos termos anulam-se pois são as projeções de uma mesma conexão métrica no mesmo subespaço ,

$$\Lambda^{\rho}{}_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Lambda^{\alpha}_{\rho} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\sigma\nu} = 0 \quad ,$$

e portanto

$$\nabla_\sigma \Lambda^\rho_\nu = \partial_\sigma \Lambda_\nu{}^\rho \quad ,$$

coincidindo com a definição da conexão não holônoma (2.9)

$$\nabla_\rho \Lambda^\nu_\mu = \partial_\rho \Lambda_\mu{}^\nu = - \overline{\Gamma}^\nu_{\rho\mu} \quad . \tag{2.21}$$

Assim a conexão não holônoma é induzida únicamente pelos vínculos, via projetor.

**4-PARALELISMO**

A variedade não holônoma admite portanto paralelismo mais geral definido por meio da conexão

$$\Gamma^{\nu *}_{\rho\mu} = \Gamma^\nu_{\rho\mu} + \overline{\Gamma}^\nu_{\rho\mu} \quad . \tag{2.22}$$

O primeiro termo é devido à métrica ambiente e o segundo depende única e exclusivamente dos vínculos.

A propagação paralela de um vetor contravariante será

$$\overline{X}^\nu = \dot{X}^\nu + X^\rho \dot{x}^\mu ( \Gamma^\nu_{\rho\mu} + \overline{\Gamma}^\nu_{\rho\mu} ) = 0 \quad . \tag{2.23}$$

A conexão $\overline{\Gamma}$ não é simetrica, produzindo torção:

$$T^\nu_{\rho\mu} = 1/2( \overline{\Gamma}^\nu_{\rho\mu} - \overline{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} ) = 1/2( \partial_\rho \Lambda^\nu_\mu - \partial_\mu \Lambda^\nu_\rho ) \quad . \tag{2.24}$$

Os vínculos não holônomos também contribuem para a curvatura do espaço:

$$\overline{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\nu}\overline{\Gamma}^{\mu}_{\rho\sigma} - \partial_{\rho}\overline{\Gamma}^{\ \mu}_{\sigma\nu} + \overline{\Gamma}^{\ \mu}_{\nu\lambda}\overline{\Gamma}^{\ \lambda}_{\rho\sigma} - \overline{\Gamma}^{\mu}_{\rho\lambda}\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\sigma\nu} \quad . \qquad (2.25)$$

Se o sistema for completamente integrável, teremos torção nula e a curvatura $\overline{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ também nula.

Observamos, na formulação acima, que os índices dos espaços internos ( $j$ ) e externos ( $J$ ) não aparecem. Portanto esta teoria é invariante face às transformações desses espaços neles mesmos. Analisaremos agora a conexão no grupo de transformações locais.

### 5-GRUPO NÃO HOLONOMO

Consideremos $N$ formas pfaffianas independentes definidas no espaço ambiente $N$ dimensional :

$$| e^{a} > = dx^{\mu}e^{a}_{\mu} \quad , \qquad (2.26)$$

$$a = 1...N; \ \mu = 1...N \quad .$$

OBSERVAÇÃO :As letras maiúsculas (I,J,K,L) designam os objetos do espaço externo, as minúsculas ( i,j,k,l) designam os objetos do espaço interno, e as minúsculas (a,b,c,.) designam os objetos do espaço ambiente como um todo. Os três conjuntos tem caráter tensorial face ao grupo de transformações locais . As letras gregas ($\mu,\nu,\rho,\sigma$ ) tem caráter tensorial face ao grupo das transformações de coordenadas

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime}(x^{\nu}) \quad , \qquad (2.27)$$

$$\mu, \nu = 1, \dots N \quad .$$

A forma quadrática positiva definida

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{N} ( d\tau^a )^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} \qquad (2.28)$$

é invariante face a um grupo ortogonal que transforma o sistema (2.1) em um outro sistema de n formas independentes

$$| \bar{e}^a > = | e^b > A_b{}^a \quad , \qquad (2.29)$$

o que implica em

$$\bar{e}^a_\mu = e^b_\mu A^a_b \qquad (2.30)$$

com a condição de ortogonalidade

$$A^c_d A^b_c = \delta_d{}^b \quad . \qquad (2.31)$$

O estudo dos invariantes deste grupo ortogonal é equivalente ao estudo das propriedades de uma variedade riemanniana com métrica positiva definida.

A generalização para os espaços não holônomos consiste em determinar o subgrupo que deixa invariante a forma quadrática

$$ds^2 = \sum^{N-M} ( ds^{i\,2} ) \quad , \quad i = 1, \dots . N-M \quad , \qquad (2.32)$$

e, simultaneamente, as 1-formas locais

$$| e^J> = dx^\mu e^J_\mu \quad , \quad J = 1,\dots M \quad . \tag{2.33}$$

Nestas condições o subgrupo ortogonal terá a forma

$$| \bar{e}^j > =| e^i >A^j_i \quad , \quad | \bar{e}^J > = | e^K >A^J_K \quad , \tag{2.34}$$

$$i,j = 1,..N-M \quad ; \quad J =1,\dots M \quad ,$$

com as condições subsidiárias

$$A^i_k A^j_i = \delta^j_k \quad , \tag{2.35}$$

$$A^K_j = A^k_J = 0 \quad , \tag{2.36}$$

$$\det| A^J_K| \neq 0 \quad . \tag{2.37}$$

## 6-SISTEMA MECÂNICO DE CAPLYGIN

Se considerarmos um subgrupo do grupo não holônomo, impondo a condição de transformação ortogonal também no espaço externo

$$A^L_J A^K_L = \delta^K_J \quad , \tag{2.38}$$

então a forma

$$d\vartheta^2 = \sum^M ( ds^J ) ^2 \tag{2.39}$$

é invariante.

Neste caso a métrica do espaço ambiente

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N-M} ( ds^j)^2 + \sum_{J=1}^{M} ( ds^J)^2 \tag{2.40}$$

pode ser decomposta em uma métrica vertical e outra horizontal por meio do projetor:

$$ds^2 = dx^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu}dx_{\nu} + dx^{\mu}Q_{\mu}^{\nu}dx_{\nu} = \sum_{j=1}^{N-M}( ds^j)^2 + \sum_{J=1}^{M}( ds^J)^2 \, , \tag{2.41}$$

e as equações de vínculos podem ser colocadas na forma

$$\dot{x}_i = b_i^J \dot{x}_J \, , \tag{2.42}$$

$$i = 1,..N-M; \; J = 1,..M \, ,$$

onde os coeficientes não dependem das coordenadas $x_i$. O disco que rola sem deslizar encontra-se nesta categoria. Os sistemas mecânicos submetidos a estes vínculos são conhecidos como sistemas de Caplygin (65). Na teoria dos sistemas Hamiltonianos generalizados, que veremos no próximo capítulo, estes sistemas são os que admitem uma separação simples entre os graus de liberdade físicos e não físicos.

CAPITULO 3

# MECÂNICA QUÂNTICA DOS SISTEMAS NÃO-HOLÔNOMOS

## 1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo aplicaremos o método dos projetores no processo de quantização dos sistemas não-holônomos.

O projetor determina uma métrica singular no espaço de configuração, o que permite estabelecer uma analogia completa entre os sistemas padrão submetidos a vínculos e os sistemas hamiltonianos generalizados.

Uma das vantagens do uso de coordenadas não holônomas reside no caráter cartesiano das mesmas. Como é bem sabido, neste caso o princípio da correspondência entre as variáveis clássicas e os operadores no espaço de Hilbert não introduz ambiguidades, (66). O operador momento compatível com os vínculos introduz anomalias na álgebra quântica, devido à dependência funcional imposta pelo projetor. Estas anomalias refletem o afastamento do homomorfismo entre a algebra de Lie clássica e quântica.

O processo de quantização pelo princípio da correspondência faz aparecer adicionalmente a curvatura da variedade não holônoma.

O processo de quantização do sistema não-holônomo via integral de caminho também modifica a hamiltoniana quântica, por um termo proporcional à curvatura escalar .

A função de onda adquire um fator de fase não integrável, proporcional à conexão não-holônoma. Para evitar ambiguidades na definição da função de onda, impomos a condição de pré-quantização geométrica, necessária nos casos em que o espaço não é simplesmente conexo . É interessante observar que os propagadores de Feynman dividem-se em N-M classes de equivalências, correspondendo cada classe a caminhos homotopicamente diferentes. O propagador total é a soma sobre todas as classes. Evidentemente no caso holônomo o espaço é topologicamente trivial: todos os caminhos são equivalentes.

## 2 - VÍNCULOS E SUAS CLASSES

A quantização dos sistemas clássicos submetidos a vínculos que não decorrem da forma da lagrangeana apresenta dificuldades análogas às encontradas na quantização dos sistemas hamiltonianos generalizados, de Dirac ( 2).

Dirac introduziu a importante diferença entre vínculos de primeira e segunda classe. Mostramos que os vínculos de segunda classe são análogos aos vínculos não-holônomos, e os vínculos de primeira classe análogos aos holônomos.

Os vínculos de primeira classe por definição são aqueles cujos parênteses de Poisson com outro vínculo e com a hamiltoniana são nulos. Ou seja, eles formam uma álgebra de Lie fechada em relação aos parênteses de Poisson :

$$\left\{ \phi^{J},\ \phi^{K} \right\} = C^{JK}_{L}\phi^{L} \quad , \tag{3.1}$$

$$\left\{ H,\ \phi^{K} \right\} = C^{K}_{L}\phi^{L} \quad , \tag{3.2}$$

onde $C^{JK}_{L}$ e $C^{K}_{L}$ são em geral constantes. As condições acima são as condições para que a evolução de uma observável permaneça todo o tempo em uma subvariedade definida pelos vínculos.

As relações (3.1) expressam também as condições de integrabilidade do sistema pfaffiano local:

$$|e^J> = dx^{\mu} e^J_{\mu} \quad . \tag{3.3}$$

Assim, se $< e^J| = e^{\mu J}\partial_{\mu}$ é o campo vetorial associado ao sistema de formas (3.3), as condições de integrabilidade expressam-se pelos parênteses de Lie

$$[ < e^J|, < e^K| ] = C^{JK}_L < e^L | \ , \tag{3.4}$$

o que implica em

$$e^{K\alpha}\partial_{\alpha} e^{J\mu} - e^{J\alpha}\partial_{\alpha} e^{K\mu} = C^{KJ}_L \ e^{L\mu} \ . \tag{3.5}$$

Neste caso os vetores $e^J$ e $e^K$ pertencem inteiramente ao espaço externo, na terminologia do capítulo anterior. Os vetores $e^J$ associados aos vínculos não-holônomos não obedecem às relações (3.5). Os sistemas que obedecem (3.5) são completamente integráveis e portanto holônomos. Por outro lado, os vínculos (3.3) supostos lineares nas velocidades assumem a seguinte forma no espaço de fase:

$$\phi^J( x,p) = e^{J\nu} p_{\nu}. \tag{3.6}$$

Calculando os parênteses de Poisson obtemos

$$\{ \phi^J, \phi^K \} = ( e^{K\alpha}\partial_{\alpha} e^{J\nu} - e^{J\alpha} \partial_{\alpha} e^{K\nu} ) p_{\nu}. \tag{3.7}$$

Portanto (3.7) é equivalente a (3.1) se o sistema for completamente integrável. Assim os sistemas holônomos podem ser chamados de primeira classe e os não-holônomos de segunda classe, na terminologia de Dirac.

## 3 - LAGRANGEANAS SINGULARES

Os sistemas hamiltonianos generalizados caracterizam-se pelo fato de possuirem o hessiano da lagrangeana nulo:

$$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\nu \partial \dot{x}^\mu}\right| = 0 \ . \tag{3.8}$$

O estudo destes sistemas é importante, pois eles são a versão finita das teorias dos campos de gauge.

Com o auxílio do projetor produzimos uma lagrangeana singular que representa o sistema vinculado, tal que

$$\det\left|\frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{x}^\nu \partial \dot{x}^\mu}\right| = \det|\ \Lambda_{\nu\mu}| = 0 \quad , \tag{3.9}$$

pois o projetor é um operador singular.

Esta equação expressa uma geometria com métrica singular, ou seja, uma geometria com conexão afim. Se os vínculos forem holônomos podemos, por transformação de coordenadas, induzir uma variedade riemanniana com métrica positiva definida. Se os vínculos forem não-integráveis somos obrigados a trabalhar com todas as coordenadas em uma variedade não-holônoma, com conexão não-holônoma, estudada no capítulo 2. Antes de estudarmos a quantização via projetor, descreveremos brevemente os métodos usuais de quantização dos sistemas hamiltonianos generalizados.

## 4 - QUANTUMGEOMETRODINÂMICA

A proposta de Dirac, para a quantização canônica dos sistemas generalizados submetidos a vínculos de primeira classe, consiste em trabalhar com todas as coordenadas e momentos como se fossem independentes, e impor restrições ao vetor de estado. No contexto da teoria gravitacional este procedimento é conhecido como quantumgeometrodinâmica (39).

Consideremos o sistema clássico no espaço de fase, com coordenadas ( $x^{\mu}, p_{\mu}$ ) $\equiv \xi$; $\mu = 1,..,N$, submetido a $M$ vínculos de primeira classe ( holônomos ):

$$\phi^{J}(\xi) = 0 \; ; \quad \left\{ \phi^{J}, \; \phi^{K} \right\} = C^{JK}_{L}\phi^{L} \; ; \quad \left\{ H, \; \phi^{K} \right\} = C^{K}_{L}\phi^{L} \qquad (3.10)$$

$$J,K,L = 1,..,M.$$

As equações de movimento, usando multiplicadores de Lagrange, tomam a forma

$$\dot{F} = \left\{ F, \; H^{*} \right\} \; ; \qquad H^{*} = H + \lambda_{J}\phi^{J} \quad . \qquad (3.11)$$

A quantização consiste na substituição das coordenadas $x^{\mu}$ e do momentos $p_{\mu}$ por operadores $\hat{x}^{\mu}$ e $\hat{p}_{\mu}$ que satisfaçam as relações de comutação

$$[\, \hat{x}^{\mu}, \; \hat{p}_{\nu} \,] = i\hbar \, \delta^{\mu}_{\nu} \quad , \quad [\, \hat{x} \, , \; \hat{x} \,] = [\, \hat{p} \, , \; \hat{p} \,] \; = 0 \; . \qquad (3.12)$$

Por hipótese existe um ordenamento dos operadores $\hat{p}$ e $\hat{x}$ tal podemos escrever

$$[\,\hat{\phi}^J,\ \hat{\phi}^K] = C^{JK}_{L}\,\hat{\phi}^L\ , \qquad [\,\hat{\phi}^J,\ \hat{H}^*\,] = C^J_K\,\hat{\phi}^K\ . \tag{3.13}$$

O vetor de estado $|\,\Psi\,>$ deve satisfazer as equações de Heisenberg

$$\dot{\hat{x}}^{\mu}\,|\,\Psi\,> = [\,\hat{x}^{\mu},\ \hat{H}^*\,]\,|\,\Psi\,>\ , \tag{3.14}$$

$$\dot{\hat{p}}_{\mu}\,|\,\Psi\,> = [\,\hat{p}_{\mu},\ \hat{H}^*\,]\,|\,\Psi\,>\ , \tag{3.15}$$

com as condições subsidiárias

$$\hat{\phi}^J|\,\Psi\,> = 0\ . \tag{3.16}$$

As equações (3.14) e (3.15) são consistentes se as relações (3.13) forem válidas, isto é se

$$[\,\hat{\phi}^J,\ \hat{\phi}^K\,]|\,\Psi\,> = C^{JK}_{L}\,\hat{\phi}^L|\,\Psi\,>\ , \tag{3.17}$$

$$[\,\hat{\phi}^J,\ \hat{H}^*\,]|\,\Psi\,> = C^{J}_{L}\,\hat{\phi}^L|\,\Psi\,>\ . \tag{3.18}$$

Portanto esta teoria só se aplica aos sistemas holônomos, isto é aos vínculos de primeira classe.

## 5 - QUANTIZAÇÃO VIA FIXAÇÃO DE GAUGE

Um outro procedimento, válido para vínculos de primeira classe, consiste em determinar adequadamente uma superfície compatível com os vínculos (fixação de gauge), e impor relações canônicas de comutação entre as variáveis aí definidas.

Os vínculos diferenciais lineares nas velocidades restringem apenas os momentos. Deste modo as transformações canônicas no espaço de fase reduzem-se às transformações pontuais. Neste caso podemos trabalhar na representação de configuração. Este é um caso particular em que o espaço de fase possui um espaço de configuração e um espaço de momentos separados.

Nestas condições, podemos realizar uma transformação canônica tal que as novas variáveis separam-se naturalmente em variáveis compatíveis e incompatíveis com os vínculos. Para isto introduz-se uma função $X^J(x)$ de tal modo que

$$\left\{ X^J, \phi^K \right\} = M^{JK} \neq 0 \; ; \quad J, K = 1,..,M \, , \tag{3.19}$$

com $\det| M^{JK}| \neq 0$. As novas variáveis serão escritas coletivamente

$$Q^{\mu} = ( q^i, q^J ), \qquad P_{\mu} = (p_i, p_J), \tag{3.20}$$

$$i = 1,..N - M \, ,$$

com $q^J = X^J(x)$. A função $X^J$ é a chamada função de gauge. Quando impomos $X^J = 0$, ela define a subvariedade compatível com os vínculos.

Este caso corresponde a uma particular transformação do grupo não-holônomo ortogonal, são os sistemas de Caplygin, como vimos no capítulo anterior. Assim é possível colocar os vínculos na forma

$$\bar{\phi}^J = p_J - f^J(q^i, X^J, p_i) = 0 \, . \tag{3.21}$$

Estes vínculos são obtidos pela transformação dos vetores locais

$$\bar{e}^J_{\mu} = e^K_{\mu} A^J_K \, . \tag{3.22}$$

A transformação (3.22) acima deve preservar a álgebra dos vínculos. Calculando diretamente os parênteses de Poisson, obtemos

$$\left\{ \bar{\phi}^J, \bar{\phi}^K \right\} = \frac{\partial f^K}{\partial X^J} - \frac{\partial f^J}{\partial X^K} - \left\{ f^J, f^K \right\} \quad . \qquad (3.23)$$

O último termo é nulo sobre a superfície de gauge, isto é, quando impusermos os vínculos $p_J = f^J$. O primeiro termo só é nulo se os vínculos forem integráveis. Portanto este método não se aplica aos vínculos não-holônomos, ou de segunda classe. Este método apresenta dificuldades uma vez que nem sempre a determinação da superfície pode ser realizada. Também nem sempre a transformação local é ortogonal.

Um método que em princípio só é aplicável aos vínculos que obedeçam as relações (3.1) e (3.2) é o metodo de Fadeev ( 40), baseado na integral de caminho de Feynman.

O método canônico não é satisfatório, pois não existe procedimento para determinar a função de gauge que define a superfície compatível com os vínculos. O método alternativo foi proposto por Fadeev . Este método usa a integral de caminho de Feynman sobre uma medida definida convenientemente. A expressão da matriz S proposta por Fadeev tem a forma

$$\langle out|S|in \rangle = \int \exp \left[ i/h \int_{\infty}^{+\infty} \sum p_\mu \dot{x}^\mu - H\ (x,p) \right] dt \prod_t d\mu\ (x(t),p(t)), \qquad (3.24)$$

onde a medida

$$d\mu = \Pi_J \delta(X^J)\ \delta(\phi^J) \det|M^{JK}|\ \Pi_\mu dq^\mu dp_\mu (2\pi\hbar)^{-(N-M)} \qquad (3.25)$$

é invariante face à transformação do grupo ortogonal estudada no capítulo 2. Isto significa que a medida independe da escolha de $X^J = 0$. Por isto a quantização de Fadeev é gauge-invariante e soluciona o problema da escolha de $X^J$.

A generalização do método de Fadeev, para incluir vínculos de segunda classe, foi realizada por Senjanovic ( 41). O método consiste essencialmente em multiplicar a medida de Fadeev pelo termo

$$\prod_J \delta(\theta^J)\ \det|g^{JK}|^{1/2} , \tag{3.26}$$

onde

$$g^{JK} = \left\{ \theta^J, \theta^K \right\} \tag{3.27}$$

são os parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe.

O método de Fadeev não é aplicável de modo totalmente satisfatório às teorias de gauge relativísticas, como as teorias de cordas por exemplo, uma vez que não é Lorentz-invariante.

Com o objetivo de reescrever a integral (3.24) de forma que a mesma seja manifestamente Lorentz-invariante e ao mesmo tempo gauge-invariante, Fradkin e Vilkovisky (42) introduziram variáveis fermiônicas adicionais, consideradas elementos da álgebra de Grassmann. Estas variáveis são conhecidas como fantasmas e fantasmas conjugados. Não trataremos aqui este método, embora seja possível a extensão dos projetores para as supervariedades, equipadas com coordenadas grassmannianas.

Passaremos à descrição da quantização por meio do projetor, válida para sistemas de vínculos integráveis ou não. É conveniente desenvolvermos inicialmente a formulação no espaço de fase.

## 6 - SISTEMAS NÃO-HOLÔNOMOS NO ESPAÇO DE FASE.

Consideremos um sistema clássico, com número finito de graus de liberdade, descrito no espaço euclidiano ( em coordenadas cartesianas ortogonais) pela lagrangeana

$$L ( x,\dot{x} ) = 1/2\ \dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\mu} - V(x) , \quad \mu,\nu = 1,\ldots N , \qquad (3.28)$$

e $M$ vínculos não integráveis, na forma

$$\phi^{J} = \dot{x}^{\mu}e^{J}_{\mu}(x) = 0 ; \quad J = 1,\ldots M . \qquad (3.29)$$

A partir da definição de momento generalizado

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \qquad (3.30)$$

escrevemos os vínculos (3.2) no espaço de fase:

$$\phi^{J} = e^{J\nu}p_{\nu} = 0 . \qquad (3.31)$$

Portanto os vínculos dependem essencialmente dos momentos. A transformação de Legendre sobre o sistema livre nos fornece a hamiltoniana

$$H = \dot{x}^{\nu}p_{\nu} - L(x,\dot{x}) . \qquad (3.32)$$

## 7 - EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A partir das equações de Euler-Lagrange deduzidas no primeiro capítulo

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \right] = 0 \ , \qquad (3.33)$$

obtemos as equações de movimento no espaço de fase:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \dot{p}_{\mu} = - \Lambda^{\mu}_{\nu} \frac{\partial H}{\partial x^{\mu}} \ , \qquad (3.34)$$

$$\dot{x}^{\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_{\nu}} \ . \qquad (3.35)$$

Estas equações podem ser expressas por meio dos parênteses de Poisson. Para isto redefinimos os momentos generalizado como

$$\Pi_{\mu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \ ; \qquad (3.36)$$

ou

$$\Pi_{\mu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} p_{\alpha} \ . \qquad (3.37)$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo obtemos

$$\dot{\Pi}_{\mu} = \dot{x}^{\nu} \frac{\partial \Lambda^{\alpha}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} p_{\alpha} + \dot{\Lambda}^{\alpha}_{\mu} \cdot p_{\alpha} \ , \qquad (3.38)$$

e substituindo $\Lambda^{\alpha}_{\mu} \dot{p}_{\alpha}$ em ( 3.34 ) e levando em conta ( 3.35) temos

$$\dot{\Pi}_\mu = - \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial H}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Lambda^\alpha_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_\nu} p_\alpha \quad ; \tag{3.39}$$

a partir da definição dos parênteses de Poisson

$$\{ f , g \} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \quad , \tag{3.40}$$

podemos escrever finalmente

$$\dot{\Pi}_\mu = \{ \Pi_\mu , H \} \quad . \tag{3.41}$$

As coordenadas de posição, como já ressaltamos no primeiro capítulo, não sofrem restrições por parte de vínculos diferenciais. Deste modo podemos escrever

$$\dot{x}^\mu \doteq \{ x^\mu , H \} \quad . \tag{3.42}$$

As equações (3.41) e (3.42) são as equações de movimento no espaço de fase de um sistema sujeito aos vínculos (3.31). Observamos que enquanto a hamiltoniana permanece inalterada, os parênteses de Poisson entre as coordenadas $\Pi_\mu$ e $x^\mu$ modificam-se devido a presença dos vínculos

$$\{ x^\nu , x^\mu \} = 0 \ , \quad \{ x^\mu , \Pi_\nu \} = \Lambda^\mu_\nu \quad , \tag{3.43}$$

$$\{ \Pi_\mu , \Pi_\nu \} = \left( \partial_\mu \Lambda^\alpha_\nu - \partial_\nu \Lambda^\alpha_\mu \right) p_\alpha \equiv T^\alpha_{\mu\nu} p_\alpha \quad . \tag{3.44}$$

## 8 - QUANTIZAÇÃO VIA PROJETOR

O projetor permite, como vimos, trabalhar com as coordenadas cartesianas ortogonais, sem a necessidade de introduzirmos os multiplicadores de Lagrange. Este multiplicadores introduzem novos vínculos se vistos como coordenadas adicionais, pois são nulos seus momentos conjugados

$$p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad . \tag{3.45}$$

Por outro lado, se os multiplicadores forem considerados funções arbitrárias das quais as equações de movimento não devem depender, a validade do seu uso é restrita aos vínculos holônomos. De fato, para que uma função F possa ser observável física é preciso que a sua evolução temporal não dependa dos multiplicadores. Se considerarmos a hamiltoniana na forma

$$H^* = H_0 + \lambda_J \phi^J \quad , \tag{3.46}$$

a função F deve ser tal que

$$\left\{ F, \phi^J \right\} = D^J_K \phi^K \ . \tag{3.47}$$

Uma vez que evolução temporal de F se escreve como

$$\dot{F} = \left\{ H_0, x^\mu \right\} + \lambda_L \left\{ \phi^L, F \right\} \quad , \tag{3.48}$$

vemos que o último termo é nulo sobre a variedade definida pelos vínculos de acordo com (3.47) Entretanto (3.47) é um sistema de M equações diferenciais de primeira ordem, para as quais as condições de integrabilidade são

$$\left\{ \phi^J , \phi^K \right\} = C_L^{JK} \phi^L \qquad . \tag{3.49}$$

Como já vimos, as relações acima não são verificadas para vínculos não-holônomos. Deste modo o método dos projetores é uma alternativa para a descrição clássica e quântica dos sistemas não-holônomos, uma vez que dispensa o uso dos multiplicadores de Lagrange.

## 9 - EQUAÇÕES DE HEISENBERG

**O projetor permite concentrar nos operadores as informações sobre os vínculos,** e o vetor de estado pode ser considerado arbitrário. Neste caso as equações de Heisenberg devem ser escritas de acordo com as equações (3.41) e (3.42)

$$\dot{\hat{x}}^{\mu} \mid \psi > = [ \hat{x}^{\mu} , \hat{H} ] \mid \psi > \qquad , \tag{3.50}$$

$$\dot{\hat{\Pi}}_{\mu} \mid \psi > = [ \hat{\Pi}_{\mu} , \hat{H} ] \mid \psi > \qquad , \tag{3.51}$$

onde $\hat{\Pi}$ é o operador momento definido em (3.37) devidamente simetrizado:

$$\hat{\Pi}_{\mu} = 1/2 \left( \hat{\Lambda}^{\mu}_{\nu} \hat{p}_{\mu} + \hat{p}_{\mu} \hat{\Lambda}^{\mu}_{\nu} \right) \qquad . \tag{3.52}$$

## 10 - FATOR DE FASE GEOMÉTRICA

As equações de movimento (3.14) e (3.15) devem ser equivalentes a (3.50) e (3.51), e portanto escrevemos

$$\hat{p}_\mu | \Psi > = \hat{\Pi}_\mu | \psi > \quad . \tag{3.53}$$

Na primeira descrição o vetor de estado é restringido pelos vínculos, ficando livres os momentos. Na segunda descrição ocorre o inverso. A arbitrariedade do estado $|\psi >$ permite absorver os fatores introduzidos pela simetrização ( 3.52).

Representaremos a diferença entre o estado $| \Psi >$ e o estado $| \psi >$ por meio de uma fase geométrica dependente de posição

$$| \Psi > = e^{i\beta} | \psi > \quad . \tag{3.55}$$

Com esta escolha garantimos que as duas descrições possuam a mesma distribuição de probabilidade, de acordo com

$$< \Psi | \Psi > = < \psi | \psi > = \int \bar{\Psi} \Psi \, d\mu \quad . \tag{3.56}$$

Para mantermos o princípio de superposição, a fase geométrica deve ser a mesma para estados diferentes no mesmo ponto do espaço. Assim, se $| \Psi_1 >$ e $| \Psi_2 >$ são dois estados distintos, temos

$$C_1 | \Psi_1 > + C_2 | \Psi_2 > = e^{i\beta} [ C_1 | \psi_1 > + C_2 | \psi_2 > ] \quad . \tag{3.57}$$

Um operador $\hat{O}$ genérico de uma descrição relaciona-se com o correspondente $\hat{O}^*$ ( não confundir com conjugado ) da outra descrição pela transformação

$$e^{-i\beta}\,\hat{O}^*\,e^{i\beta} = \hat{O} \quad . \tag{3.58}$$

## 11 - QUANTIZAÇÃO GEOMÉTRICA

Como as coordenadas de posição do sistema não-holônomo comutam , podemos escolher a representação de configuração para escrevermos a equação de Schroedinger

$$i\hbar\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,t} = H^*\,\Psi(x,t) \tag{3.59}$$

com a condição subsidiária

$$-i\hbar\,e^J_\nu(\,x\,)\,\frac{\partial\Psi}{\partial\,x^\nu} = 0 \quad , \tag{3.60}$$

onde usamos o princípio da correspondência $p_\mu \Rightarrow -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ – válido em coordenadas cartesianas.

A função de onda compatível com os vínculos, na representação de Schroedinger, se escreve de acordo com (3.55)

$$\Psi(x,t) = e^{i\beta}\psi\,(x,t) \quad ; \tag{3.61}$$

calculando $\hat{p}_\mu\Psi$ obtemos

$$-i\hbar\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial x_\mu} = e^{i\beta}\,\left[\,-\,i\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,x_\mu} + \hbar\,\frac{\partial\,\beta}{\partial x_\mu}\,\right]\,\psi \quad , \tag{3.62}$$

isto é,

$$p_\mu \Psi = e^{i\beta}\left[ - i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \hbar \frac{\partial \beta}{\partial x_\mu} \right] e^{-i\beta} \Psi \quad . \qquad (3.63)$$

Portanto se $\Psi$ for uma solução da equação de Schroedinger de uma partícula, $\psi$ representa a solução da mesma equação para uma partícula em um campo adicional análogo ao eletromagnético.

Assim identificamos o momento vinculado :

$$\hat{\Pi}_\mu = \left[ - i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \hbar \frac{\partial \beta}{\partial x_\mu} \right] \quad . \qquad (3.64)$$

A forma da função $\beta$ deve ser tal que (3.64) seja consistente com o momento **simetrizado:**

$$\hat{\Pi}_\mu = 1/2 \; ( \Lambda^\nu_\mu p_\nu + p_\nu \Lambda^\nu_\mu ) \; . \qquad (3.65)$$

Calculando diretamente de (3.64) vemos que a fase $\beta$ deve ser da forma

$$\beta = 1/\hbar \int dx^\mu ( - Q^\nu_\mu p_\nu + p_\nu \Lambda^\nu_\mu ) \; , \qquad (3.66)$$

onde usamos a propriedade de complementaridade dos projetores,

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - Q^\mu_\nu \quad ; \qquad (3.67)$$

usando o princípio da correspondência obtemos

$$\hat{\Pi}_\mu \Psi = -i\hbar \; ( \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu + 1/2 \; \partial_\mu \Lambda^\mu_\nu ) \Psi \quad . \qquad (3.68)$$

## 12 - ANOMALIAS E MEDIDA NULA

Do capítulo anterior, sobre a geometria não-holônoma, vemos que o último termo de (3.64) é a contração da conexão não holônoma.

$$\overline{\Gamma}^{\mu}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\nu} \equiv \overline{\Gamma}_{\nu} \ .$$

O operador momento pode ser reescrito como

$$\hat{\Pi}_{\nu} = -i\hbar \ ( \Lambda^{\mu}_{\nu}\partial_{\mu} + 1/2 \ \overline{\Gamma}_{\nu} \ ), \tag{3.69}$$

e a fase quantizada como

$$\hat{\beta} = 1/\hbar \int dx^{\mu}(- Q^{\nu}_{\mu}p_{\nu} \ ) + (1/2) \ i \int dx^{\mu}\overline{\Gamma}_{\mu} \quad . \tag{3.70}$$

O último termo de (3.70 ) é o responsável pelo aparecimento do termo de curvatura escalar R na expressão da energia cinética quantizada . Estes termos são conhecidos como anomalias,que surgem no processo de simetrização dos operadores :

$$H^{*} = -\hbar^{2}1/2 \sum_{\mu,\nu} (\Lambda^{\alpha}_{\mu}\partial_{\alpha} + 1/2 \ \overline{\Gamma}_{\mu} \ )( \Lambda^{\beta}_{\nu}\partial_{\beta} + 1/2 \ \overline{\Gamma}_{\nu} \ ) + V \ (x) \ . \tag{3.71}$$

Em geral não podemos esquecer os termos adicionais, que revelam o afastamento do homomorfismo entre a álgebra das observáveis clássicas e quânticas .

A fase induzida pelos vínculos pode ser vista como a fase de Berry (67) no caso quântico e como o ângulo de Hannay no caso clássico ( 68 ).

Para sistemas integráveis ( primeira classe) obtemos o resultado da quantumgeometrodinamica, de Bukhbinder e Lyakhovich ( 39). Os vínculos podem ser eliminados por imersão de uma variedade riemanniana com métrica positiva definida, na variedade euclidiana ambiente,

$$g^{ij} = \frac{\partial q^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^j}{\partial x^\nu} \delta^{\mu\nu} , \qquad (3.72)$$

$$\mu, \nu = 1, \ldots N \; ; \quad i, j = 1 \ldots N-M \; ,$$

e o momento reduz-se a

$$\hat{\Pi}_i = -i\hbar \left( \partial_i + 1/2 \, \Gamma_i \right) \qquad (3.73)$$

com

$$\Gamma_i = \frac{\partial \, Ln \, \mu}{2 \, \partial \, q_i} \; , \qquad (3.74)$$

onde $\mu$ a medida da variedade riemanniana

$$\mu = \det \left| g_{ij} \right|^{1/2} . \qquad (3.75)$$

Para vínculos não-holônomos, não podemos realizar a imersão. O espaço ambiente é não-holônomo, e a medida é nula, uma vez que o projetor é singular:

$$\det \left| \Lambda^\nu_\mu \right| = 0 . \qquad (3.76)$$

Entretanto, como a conexão induzida pelos vínculos é antissimétrica, o espaço ambiente possui curvatura holônoma e torção, como vimos no capítulo 2. Este fato revela-se nos comutadores

$$[\hat{\Pi}_\mu,\hat{\Pi}_\nu]\psi = \hbar^2 \mathbf{T}^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha\psi + \hbar^2 \mathbf{R}_{\mu\nu}\psi \; . \tag{3.77}$$

O primeiro termo é a torção, e surge também nos parênteses de Poisson (3.44), o segundo têrmo é devido a simetrização. Se o sistema for integrável os dois termos são nulos. Portanto, a quantização de vínculos holônomos via projetor é livre de anomalias.

## 13 - FASE NÃO INTEGRÁVEL

Considerando a função de onda restringida $\Psi$ obtemos o comutador

$$[\hat{\mathbf{p}}_\mu,\hat{\mathbf{p}}_\nu]\Psi = \hbar^2[\,\partial^2_{\mu\nu}\Psi - \partial^2_{\mu\nu}\Psi\,] = \hbar^2(\,T_{\mu\nu}+R_{\mu\nu})\,\Psi \tag{3.78}$$

onde

$$T_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} = \mathbf{e}^{i\beta}\,(\,\mathbf{T}^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha + \mathbf{R}_{\mu\nu}\,)\,\mathbf{e}^{-i\beta} \; . \tag{3.79}$$

A função $T_{\lambda\nu}$, no contexto quântico, exprime o fato de que a variação da função de onda entre dois pontos do espaço de configuração depende do caminho tomado entre os pontos. A função de onda $\Psi$ que contém a informação de não holonomia é o análogo quântico da coordenada não-holônoma

$$\mathbf{x}^{\mu *} = \int \mathbf{dx}^\alpha \Lambda^\mu_\alpha \; , \tag{3.80}$$

cujo valor é indefinido em um ponto qualquer da variedade, e a diferença entre as coordenadas de dois pontos depende do caminho entre esses pontos.

## 14 - PRÉ-QUANTIZAÇÃO GEOMÉTRICA

Estudaremos agora o processo de quantização a partir de uma ação clássica não integrável. O protótipo de tal sistema é o de uma partícula elétrica no campo de um monopolo magnético.

Generalizaremos o formalismo do projetor para estes sistemas , no próximo capítulo. Por enquanto estabelecemos o problema no espaço de configuração. Definimos a ação clássica não-integrável como

$$S^c = \int_{t1}^{t2} [\ \dot{x}^\nu \Lambda^\mu_\nu\ p_\mu - H\ ]\ dt \quad , \qquad (3.81)$$

e portanto

$$\Pi_\nu = \frac{\partial\ S^c}{\partial\ x^\nu} \quad . \qquad (3.82)$$

Para vínculos não-holônomos esta fase depende do caminho, devido à não-integrabilidade dos vínculos

$$\partial^2_{\lambda\nu} S^c - \partial^2_\nu S^c_\lambda = T^\alpha_{\lambda\nu} p_\alpha \quad , \qquad (3.83)$$

onde $T^\alpha_{\lambda\nu} \equiv \bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\nu\lambda}$ é a torção da variedade não-holônoma.

Uma ação clássica não integrável implica na impossibilidade de uma descrição Hamiltoniana global, uma vez que para tanto é preciso que a 1-forma $dx^\mu p_\mu$ seja não-degenerada, o que não ocorre com a 1-forma $dx^\mu \Lambda^\nu_\mu p_\nu$ do sistema não holônomo. Os sistemas que são descritos por uma 2-forma degenerada são chamados de pré-simpléticos.

Usando a complementaridade dos projetores, a propagação da função de onda entre dois pontos pode ser escrita de acordo com a ação (3.82)

$$\psi(a,b,t+\varepsilon,\gamma) = \int_a^b \exp(\tfrac{i}{\hbar}S)\left[\exp(-\tfrac{i}{\hbar}\int dx^{\mu}Q_{\mu}^{\nu}\,\mathbf{p}_{\nu})\right]\psi\ \mathcal{D}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]. \qquad (3.84)$$

Consideramos aqui os caminhos que partem de um ponto inicial **a**, compatível com os vínculos, e chegam em um ponto final **b**. Evidentemente para um circuito fechado devemos ter

$$\Psi\ (x(0)) = \exp\ (-i/\hbar \int_{\gamma} dx^{\mu}Q_{\mu}^{\nu}P_{\nu}dx^{\mu}\ )\Psi\ (x(2\pi))\ ; \qquad (3.85)$$

usando o teorema de Stokes,

$$i/\hbar \int_{\gamma} dx^{\mu}Q_{\mu}^{\nu}P_{\nu} = i/\hbar \int_{\sigma} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}T_{\mu\nu}^{\alpha}p_{\alpha} \quad , \qquad (3.86)$$

onde $\sigma$ é uma superfície fechada limitada pelos caminhos $\gamma$ .

Para evitarmos ambiguidade na definição da função de onda devemos impor a condição

$$i/\hbar \int dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}\ T_{\mu\nu}^{\alpha}p_{\alpha} = 2\pi\ n \quad , \ n \in Z\ . \qquad (3.87)$$

Isto significa que os vínculos induzem uma torção 2-forma em um espaço fibrado ( sobre o espaço de configuração ) com a condição

$$i/\hbar \int T = 2\pi n \quad , \qquad n \in Z \; . \qquad (3.88)$$

Esta condição leva à quantização da carga no eletromagnetismo, como foi mostrado por Dirac (35) e também à quantização do spin, interpretado como o momento angular intrínseco (op.cit 38).

**15 - INTEGRAL DE CAMINHO**

Em 1948, Feynman (69) introduziu uma integral sobre as trajetórias de um sistema clássico de partículas no espaço de configuração, a fim de obter a teoria quântica do respectivo sistema. A integral de caminho representa o operador de propagação K(a,b) como uma integral definida com uma medida apropriada no espaço das trajetórias entre dois pontos a e **b** do do espaço de evolução do sistema:

$$K\,(a,b) = \int_a^b \exp\,(i/h\; S\;)D(x(t)) \quad . \qquad (3.89)$$

O propagador no espaço de configuração correspondente ao sistema vinculado será escrito como

$$K^{*}(b,a,\gamma\;) = \int_a^b \exp\,(i/h\; S\;)\exp(\beta)D(x(t))\;, \qquad (3.90)$$

onde $\beta$ é a fase não-integrável induzida pelos vínculos. Assim, a a solução da equação de Schroedinger

$$i\hbar\;\partial_t\psi = \mathbf{H}\;\psi \qquad (3.91)$$

é representada por

$$\psi\ (b,\gamma) = K^*(b,a,\gamma)\psi(t)\ , \tag{3.92}$$

ou seja, de acordo com (3.33),

$$\psi(x(t+\epsilon),\gamma\ ) = \int \exp(\tfrac{i}{\hbar}S^C)\psi(x(t))\mathcal{D}\ (x) \tag{3.93}$$

onde

$$S^C = \int_{t_1}^{t_2} [\ 1/2\ \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Lambda_{\mu\nu} -\ V(x)\ ]dt\ . \tag{3.94}$$

A lagrangena sob a integral é não-standard, pois, com já vimos,

$$\det\ |\ \Lambda_{\mu\nu}|\ = 0.$$

A integral de caminho pode ser aproximada para integrais gaussianas usando o método de Garrod (70), que consiste em aproximar a trajetória por um conjunto de trajetórias retilíneas.

Para isto dividimos o intervalo temporal $(t_1,t_2)$ em N partes iquais $\varepsilon = t_{i+1}-t_i$. Aproximando a trajetória por uma reta neste intervalo, podemos escrever (3.94) como

$$S^C(t_{i+1}-t_i) \approx 1/\varepsilon\ \eta^\mu \eta^\nu \Lambda_{\mu\nu} \tag{3.95}$$

onde $\eta_\nu = (\ x_\nu(t_i+\varepsilon)-x_\nu(t_i))$. Exponenciando temos

$$\exp\ (\ S^C((t_{i+1}-t_i) = \exp(\frac{i}{\varepsilon\hbar}\ \eta^\mu \eta^\nu \Lambda_{\mu\nu}\ )\ . \tag{3.96}$$

Expandindo em série de Taylor os termos da exponencial obtemos

$$\exp S^{C} = \exp(S_2)\exp(\bar{S}) \,, \qquad (3.97)$$

onde

$$S_2 = \frac{i}{2\varepsilon\hbar} \sum \eta^{\nu 2} \qquad (3.98)$$

e

$$\bar{S} \approx (i\hbar\,\varepsilon^{-1})\left[1/2\ \eta^{\mu}\eta^{\nu} - 1/6\ \eta^{\nu}\eta^{\sigma}\eta^{\lambda}\ \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda} - 1/8\ \eta^{\sigma}\eta^{\lambda}\eta^{\alpha}\eta^{\beta}\ \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}\ \bar{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\beta} + 1/8\ \eta^{\nu}\eta^{\sigma}\eta^{\lambda}\eta^{\alpha}\ \bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda,\alpha} + \ldots\right]Q_{\mu\nu} \,; \qquad (3.99)$$

aqui usamos $\Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}$ e a equação da geodésica não-holônoma

$$\dot{x}^{\cdot\mu} + \dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho}\bar{\Gamma}^{\mu}_{\rho\nu} = 0 \,. \qquad (3.100)$$

A forma quadrática na exponencial determina as integrais gaussianas:

$$\int_{t_1}^{t_2} \exp\left[\frac{i}{2\varepsilon\hbar} \sum \delta_{\mu\nu}\eta^{\nu}\eta^{\mu}\right] (1 + \varepsilon\,\bar{S} + \varepsilon^2\,\bar{S}^2 + \ldots)\,(\psi + \eta^{\nu}\partial_{\nu}\psi + 1/2\eta^{\nu}\eta^{\mu}\partial^2_{\nu\mu}\psi + \ldots)D(\eta) \,. \qquad (3.101)$$

Resolvendo as integrais gaussianas em coordenadas cartesianas, e desenvolvendo ambos os lados de (3.93) em potencias de $\varepsilon$,

$$\psi + \varepsilon\,\frac{\partial\psi}{dt} + O(\varepsilon^2) \approx \psi + \hbar^{-1}i\varepsilon\left[-\frac{\hbar^2}{2}\nabla_{\mu}\,(\Lambda_{\nu\mu}\,\nabla_{\nu})\psi + \frac{\hbar^2}{6}\,R\,\psi\right]. \qquad (3.102)$$

Comparando os monômios em $\varepsilon$ identificamos a hamiltoniana quântica:

$$H^{*}=-\frac{\hbar^{2}}{2}\nabla_{\mu}(\Lambda_{\mu\nu}\nabla_{\nu})\psi - \frac{\hbar^{2}}{6}R\psi \quad . \qquad (3.103)$$

Esta hamiltoniana coincide com hamiltoniana encontrada por Sniatycki ( 39 pag 134 ). Aqui o termo adicional é proporcional à curvatura escalar R associada à conexão não-holônoma e o operador de translação se escreve

$$\nabla_{\mu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\mu} \quad \partial_{\alpha} + 1/2 \; \overline{\Gamma}_{\mu} \quad . \qquad (3.104)$$

A quantização geométrica da energia cinética na representação de configuração, em um espaço de configuração riemanniano, foi estudada por Blattner (op.cit 36) e por Simms e Woodhouse ( 37); entretanto o resultado de ambos difere de (3.103) por um fator 1/2. Este fator é devido à simetrização do operador momento que no nosso cálculo foi considerado. O primeiro a chegar ao termo adicional de curvatura foi De Witt ( op.cit 35 ).

**16 - APLICAÇÕES**

Como ilustração do processo de quantização via projetor, vamos estudar dois problemas em física nuclear que envolvem sistemas clássicos de partículas e vínculos. A inércia coletiva em física nuclear é um problema de vínculos que não podem ser eliminados por transformações de coordenadas. Usando os multiplicadores de Lagrange, Amiot e Griffin ( 71) determinaram uma hamiltoniana quântica compatível com os vínculos.

A - PROBLEMA DO CENTRO CENTRO DE MASSA

Consideremos a lagrangeana do problema a N-partículas:

$$L(r_i,\dot{r}_i,t) = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i^2 - V(|r_i-r_j|) . \qquad (3.105)$$

Para separarmos o movimento do centro de massa realizamos a seguinte transformação de coordenadas:

$$r_i = R + q_i \qquad (3.106)$$

onde **R** é a coordenada do centro de massa. Esta transformação induz o seguinte vínculo linear:

$$\sum m_i q_i = 0 \; ; \qquad (3.107)$$

neste caso as componentes do projetor são

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j - \frac{m_i m_j}{\sum m_i^2} , \qquad (3.108)$$

o momento canônico se escreve

$$\Pi^i = \Lambda^i_j \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} , \qquad (3.109)$$

e as relações de comutação tomam a forma

$$\{ r_i^a , \Pi^j_b \} = \delta^a_b \left( \delta^j_i - \frac{m_i m_j}{\sum m_k^2} \right) , \quad a,b = x,y,z , \qquad (3.110)$$

$$\{ r_i \; r_j \} = \{ \Pi^i , \Pi^j \} = 0 . \qquad (3.111)$$

Vemos a partir destas relações que as partículas não são independentes. Se considerarmos um sistema de N partículas idênticas teremos

$$\{ \mathbf{r}^a_i , \Pi^j_b \} = \delta^a_b \left( \delta^j_i - \frac{1}{N} \right) , \quad a,b = x,y,z \quad . \qquad (3.112)$$

Portanto no limite de N >> 1 as relações de comutação tornam-se canônicas. Ou seja, neste limite o modelo de partículas independentes da física nuclear é uma boa aproximação.

A hamiltoniana vinculada será

$$H^* = \frac{1}{2Nm} \sum \Pi^i . \Pi^i + V \mid \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \mid \; ; \qquad (3.113)$$

como $\Pi^i = p^i - \dfrac{m_i \sum m_j p^j}{\sum m_k^2}$ ,obtemos a seguinte relação para um sistema de partículas identicas:

$$\Pi^i = p^i - \frac{\sum p^j}{N} = p^i - < p > \quad . \qquad (3.114)$$

Nestas condições a energia entre dois autoestados de $H^*$ será dada por

$$<\psi|H^*|\psi> = \frac{1}{2M} <\psi \,|\sum (p^i - <p>)(p^i - <p>|\psi> + <\psi|V|\psi> , \qquad (3.115)$$

ou seja ,

$$E = \frac{1}{2M} < p^2 > + < V > - \frac{< p >^2}{2M} \quad . \qquad (3.116)$$

Os primeiros dois termos de (3.116) formam a energia média das partículas individuais e o último termo é a energia cinética coletiva. Neste caso a inercia coletiva é igual à massa total do sistema M . Este resultado está de acordo com os cálculos de Amiot e Griffin.

B- OSCILAÇÕES DA FORMA NUCLEAR

O método dos projetores será usado aqui no cálculo da energia coletiva do modelo não esférico de Born e Mottelson de acordo com o procedimento de Peierls-Yoccoz (72). As coordenadas coletivas $<Q>$ e $<\Pi>$ são tomadas como médias dos operadores de quadrupolo

$$\phi^{(1)} = <Q> = \sum ( 2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2 ) \quad ; \qquad (3.117)$$

$$\phi^{(2)} = <P> = \frac{1}{m} ( \sum 4z_i p_{zi} - 2x_i p_{xi} - 2y_i p_{yi}) \quad , \qquad (3.118)$$

onde $<Q >$ é o momento de quadrupolo intríseco e $<P>$ é o momento coletivo canônicamente conjugado. Estas relações podem ser consideradas como vínculos sobre as coordenadas de cada nucleon. A metrica simplética ( ver capítulo 4) pode ser calculada por meio dos parênteses de Poisson e seus elementos não zero são

$$g^{12} = \{<Q>,<P>\} = \frac{1}{m} <(\sum 16 z_i^2 + 4 x_i^2 + 4 y_i^2)> = \frac{1}{m}(8N<r^2> + 4<Q>) \quad , \qquad (3.119)$$

onde $g_{12} = (M_Q)^{-1}$ é justamente a inércia coletiva do sistema. Consideremos a hamiltoniana nuclear cujo potencial harmônico é deformado cilindricamente segundo os parâmetros $\alpha$ e $\beta$;

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2mN} \mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i \quad +1/2 \sum_{i=1}^{N}( \mathbf{r}'_i.\mathbf{r}'_j) \quad , \tag{3.120}$$

onde $\mathbf{r}'_i = \alpha^2 x_i \mathbf{i} + \alpha^2 y_i \mathbf{j} + \beta^2 z_i \mathbf{k}$.

A energia do sistema vinculado é dada pelo valor médio da hamiltoniana vinculada tomada entre auto-estados arbitrários,

$$E = < \psi \mid H^C \mid \psi >, \tag{3.121}$$

onde $<\psi|$ é um estado a N nucleons devidamente antissimetrizado e $H^C$ é a Hamiltonianan compatível com os vínculos.

$$H^C = \frac{1}{2Nm} \sum_{i,j} \mathbf{P}_i \Lambda_i^j \mathbf{P}_j + 1/2 \sum_{i,j} (\mathbf{r}'_i \Lambda^j{}_i \mathbf{r}'_j) \quad , \tag{3.122}$$

ou usando o projetor complementar,

$$H^C = H_0 - \frac{1}{2Nm} \sum \mathbf{P}_i Q_i^j \mathbf{P}_j - 1/2 \sum (\mathbf{r}'_i Q_i^j \mathbf{r}'_j) \quad . \tag{3.123}$$

A representação matricial do projetor Q tem a seguinte forma neste caso:

$$Q = \begin{vmatrix} Q_j^i & 0 \\ 0 & Q_j^i \end{vmatrix} \tag{3.125}$$

com

$$Q_i^j = \frac{4}{M} \begin{vmatrix} x_i x_j & x_i y_j & -2\, x_i z_j \\ y_i x_j & y_i y_j & -2\, y_i z_j \\ -2z_i x_j & -2z_i y_j & 4\, z_i z_j \end{vmatrix} \quad . \qquad (3.126)$$

A hamiltoniana vinculada toma a forma

$$H^C = H_0 - \frac{\Pi^2}{2\,M} - \frac{Q^2}{2M} \quad . \qquad (3.127)$$

O primeiro termo de (3.76) representa a hamiltoniana de partículas independentes e os dois últimos representam as contribuições coletivas: cinética e potencial.

O potencial coletivo é da forma

$$Q^2 = \sum \left( 2\beta^2 z_i^2 - \alpha^2 x_i^2 - \alpha^2 y_i^2 \right)^2 \quad , \qquad (3.128)$$

Este potencial somado ao potencial de $H_0$ apresenta duplos mínimos caraterísticos do fenômenos de quebra espontânea de simetria;foi estudado por nós no quadro da mecânica estatística usando o funcional de Landau-Ginzburg (73).

Recentemente Leviatan e Shao estudaram as deformações quadrupolares e mostraram a existência do mesmo fenômeno de quebra espontânea de simetria (74).

## CAPÍTULO 4

## GEOMETRIA SIMPLÉTICA

### 1-INTRODUÇÃO

No capítulo anterior usamos a técnica dos projetores em um espaço de fase, que admitia um espaço de configuração separado do espaço dos momentos. Esta separação é devida à linearidade dos vínculos em relação aos momentos.

No presente capítulo vamos generalizar o método dos projetores para qualquer tipo de dependência funcional dos vínculos, nas variáveis fundamentais do espaço de fase. A construção dos projetores neste caso geral só é possível se for formulada em uma variedade simplética, como mostramos em (4).

A formulação da mecânica em variedades simpléticas foi desenvolvida inicialmente por Cartan (75). A versão moderna dos sistemas Hamiltonianos e lagrangeanos em variedades simpléticas pode ser encontrada em R. Abraham e J.E.Marsden (76), ou em B. Doubrovine, S.Novikov e A Fomenko (77) ou ainda em M.de Leon e P.Rodrigues (78) que em particular desenvolvem a teoria dos sistemas lagrangeanos degenerados usando também a idéia de um projetor, entretanto na linguagem global.

### 2 - VARIEDADE SIMPLÉTICA

Uma variedade E de dimensão par, caracterizada por uma 2-forma $\omega$ fechada e não degenerada, é chamada de simplética e é representada por ( E, $\omega$ ). A forma simplética $\omega$ possui as seguintes propriedades:

$$d\omega = 0, \qquad \forall\ X \neq 0 \quad \exists\ Y : \omega(\ X,Y\ ) \neq 0 \quad , \qquad (4.1)$$

onde X e Y são dois campos vetoriais definidos no espaço tangente $TM_x$.

Denotaremos as 2N variáveis do espaço de fase por $\xi^{\nu}$, de tal modo que para $\nu = 1,..,N$, $\xi^{\nu} \equiv q^i$ $i = 1,..,N$, e para $\nu \geq N + 1$, $\xi^{\nu} \equiv p_i$.

A condição $d\omega = 0$ localmente implica na existência de uma 1-forma $|\ \theta > = d\xi^{\mu}A_{\mu}$ tal que $|\ \omega >$ seja exata:

$$|\ \omega > = d\xi^{\mu}\wedge\ d\xi^{\nu}\omega_{\mu\nu} = \ d\xi^{\mu}\wedge\ d\xi^{\nu}\left[\ \frac{\partial\ \mathbf{A}_{\mu}}{\partial\xi^{\nu}} - \frac{\partial\ \mathbf{A}_{\nu}}{\partial\ \xi^{\mu}}\ \right] = d|\theta >, \qquad (4.2)$$

$$\mu,\ \nu = 1,..,2N\ .$$

*Observação :* Com a nossa convenção de soma adotada no primeiro capítulo, a ação do operador d ( derivada exterior ) é a partir da direita para a esquerda.

Como $\omega$ é não degenerada temos

$$\det\ |\ \omega_{\mu\nu}\ | \neq 0 \quad , \qquad (4.3)$$

e portanto a inversa é definida:

$$\omega^{\alpha\nu}\omega_{\nu\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu} \quad . \qquad (4.4)$$

A identidade de Jacobi é uma consequência de $d\omega = 0$:

$$\partial_{\rho}\omega_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\omega_{\nu\rho} + \partial_{\nu}\omega_{\rho\mu} = 0\ . \qquad (4.5)$$

Em virtude de (4.2), existe uma transformação f, difeomorfa, que deixa $\omega$ invariante:

$$| \theta' > = | \theta > + df \quad ; \tag{4.6}$$

como $d^2f = 0$, temos

$$| \omega' > \equiv | \omega > \quad . \tag{4.7}$$

Quando o espaço de fase admite um espaço de configuração e um espaço de momentos bem definidos, ( sem vínculos ) temos

$$\omega^{ij} = 0 \; ; \; \omega^{j\; k+N} = - \omega^{K+N\; j} = \delta^{K+N\; j} \; ; \; \omega^{J+N\; K+N} = 0 \quad , \tag{4.8}$$

e neste caso a 2-forma simplética se escreve

$$| \omega > = \sum dq^i \wedge dp_i \tag{4.9}$$

e

$$| \theta > = \sum dq^i p_i \quad . \tag{4.10}$$

### 3 - EQUAÇÕES CANÔNICAS

Para os sistemas simpléticos, definimos o campo vetorial associado às funções definidas no espaço simplético

$$< f | = \omega^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \equiv \omega^{\mu\nu} \partial_\nu f \partial_\mu \tag{4.11a}$$

e a 1-forma associada como

$$df = | f > = d\xi^\mu \partial_\mu f \quad . \tag{4.11b}$$

A partir da definição dos parênteses de Poisson

$$\{ f , h \} = \omega^{\nu\mu}\partial_{\mu}f\partial_{\nu}h \quad , \tag{4.12}$$

verificamos que o produto simplético ( dual) é uma aplicação da variedade simplética na álgebra de Lie-Poisson:

$$< f \mid h > = \{ f , h \} \quad . \tag{4.13}$$

Com este formalismo, as equações canônicas de movimento podem ser escritas na forma

$$\dot{\xi}^{\mu} = < H|\xi^{\mu} = \omega^{\mu\nu}\partial_{\nu}H = \{ H, \xi^{\nu} \} \quad , \tag{4.14}$$
$$\nu = 1,...,2N \quad .$$

Dizemos que o campo vetorial $< H |$ gera um grupo uniparamétrico de transformações na variedade simplética 2n dimensional de tal modo que

$$< H \mid \omega > = d\xi^{\nu}\partial_{\nu}H = \mid H >\equiv dH \quad , \tag{4.15}$$

o que implica na invariância da 2-forma $| \omega >$ sob ação da derivada de Lie segundo o campo hamiltoniano:

$$L_{<H|}\omega = d < H \mid \omega > + < H \mid d| \omega > = 0 \quad . \tag{4.16}$$

O primeiro termo é nulo devido a $d^2H = 0$ e o segundo é nulo porque $\omega$ é exata : $d \mid \omega > = 0$.

## 4 - PROJETOR NA VARIEDADE PRÉ-SIMPLÉTICA

Existem sistemas dinâmicos nos quais $| \omega >$ é exata apenas localmente. Um exemplo de tal sistema é o que descreve o monopólo magnético (50). Neste caso a 2-forma é degenerada.

As variedades que se caracterizam por 2-forma degenerada são chamadas de variedades pré-simpléticas ( 51).

As variedades não-holônomas, por possuírem uma conexão não -integrável, entram na categoria de pré-simpléticas. O método dos projetores pode ser generalizado para o espaço pré-simplético, usando uma abordagem geométrica análoga à desenvolvida no espaço de configuração.

Consideremos as 2n coordenadas do $R^{2n}$ denotadas por $\xi^{\nu}$ e um conjunto de 2M vínculos de segunda classe ( não-holônomos):

$$\phi^{J}(\xi^{\nu}) = 0 \; ; \qquad J = 1,\ldots, 2M \; ; \quad \nu = 1,\ldots,2N. \tag{4.17}$$

Associamos a estes vínculos o campo vetorial

$$< e^{J} | = \omega^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi^{J}\partial_{\mu} \equiv \omega^{\mu\nu}e^{J}_{\nu}\partial_{\mu} \tag{4.18}$$

e a 1-forma associada $| e^{J} >$ com ação à esquerda,

$$| e^{J} > = d\xi^{\mu}\partial_{\mu}\phi^{J} \equiv d\xi^{\mu}e^{J}_{\mu} \; . \tag{4.19}$$

Assim o produto simplético é uma aplicação da subvariedade simplética, definida pelos vínculos, na álgebra de Lie das funções que definem os vínculos:

$$< e^{J} | e^{K} > = \omega^{\mu\nu}e^{J}_{\nu} \, e^{K}_{\mu} = \{ \phi^{J}, \phi^{K} \} \; . \tag{4.20}$$

Como os vínculos são, por hipótese, de segunda classe, o produto simplético é diferente de zero:

$$< e^{J} | \ e^{K} > = g^{JK} \neq 0 \ . \tag{4.21}$$

Faremos a hipótese usual da inversibilidade local de $g^{JK}$, isto é,

$$g^{JK} g_{KL} = \delta^{J}_{L} \ . \tag{4.22}$$

Assim a inversa $g_{JK}$ nos permite definir a 1-forma

$$| \ e_{J} > = d\xi^{\mu} e^{K}_{\mu} \ g_{KJ} \equiv d\xi^{\mu} e_{\mu J} \tag{4.23}$$

e o campo vetorial

$$< e_{J} \ | = \omega^{\nu\mu} e^{K}_{\mu} g_{KJ} \partial_{\nu} \equiv \omega^{\nu\mu} e_{\mu J} \partial_{\nu} \ . \tag{4.24}$$

A partir da definição geral de projetor

$$\Lambda = I - | \ e^{J} >< e_{J} \ | \quad , \tag{4.25}$$

onde $I$ é a matriz identidade $2N \times 2N$, obtemos o projetor simplético

$$\Lambda = I - d\xi^{\mu} e^{J}_{\mu} \omega^{\alpha\beta} e_{\beta J} \partial_{\alpha} \tag{4.26a}$$

ou em componentes

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\mu} - e^{J}_{\mu} \ \omega^{\alpha\beta} e_{\beta J} \ . \tag{4.26b}$$

A propriedade de idempotência verifica-se diretamente a partir da definição (4.23):

$$| e^J >< e_J | e^K >< e_K | = | e^J >< e_J | \quad . \qquad (4.27)$$

5 - PARÊNTESES DE DIRAC

Consideremos duas funções f e h definidas no espaço simplético e calculemos o produto

$$< f \mid \Lambda \mid h > . \qquad (4.28)$$

De acordo com (4.26) temos

$$< f | \Lambda | h > = < f | h > - \omega^{\nu\mu} \partial_\mu f \, e^J_\nu \, \omega^{\alpha\beta} e^K_\beta \, \partial_\alpha h \, g_{KJ} \,. (4.29)$$

Tendo em conta (4.26) e a definição dos parênteses de Poisson (4.13), verificamos imediatamente que (4.28) é o parêntese de Dirac entre as funções f e h,

$$< f|\Lambda| h > = \{f ,h \} - \{ f,\phi^J \}\{\phi^K,h \} g_{KJ} = \{ f,h \}^* \, . \qquad (4.30)$$

Podemos interpretar este resultado observando que o produto simplético é realizado com a projeção da 1-forma associada à função h :

$$| h^* > = \Lambda \mid h > \quad , \qquad (4.31)$$

que é ortogonal aos campos vetoriais associados aos vínculos:

$$< e^J | \, h^* > \; = \; < e^J | \, \Lambda \, | \, h > \; = 0 \; , \qquad (4.32)$$

$$J = 1, \ldots, 2M \; .$$

Isto significa que o produto simplético na variedade compatível com os vínculos define o parêntese de Dirac.

## 6 - VARIEDADE SIMPLÉTICA INDUZIDA

Portanto de (4.32) vemos que o projetor define um subespaço H da variedade simplética ambiente E, tal que

$$< \phi^J | \in H \quad e \quad | \, f^* > \in \mathrm{orth}(H) \; , \qquad (4.33)$$

onde orth(H) representa o conjunto das formas ortogonais a H.

De acordo com Souriau ( 45 , pags 75 e pag 90 ), uma variedade V mergulhada na variedade simplética ambiente E é dita coisotrópica se a 2-forma sobre $\omega^*$ definida em V for tal que

$$\mathrm{Ker}(\omega^* ) \equiv \mathrm{orth}\ H \; , \qquad (4.34)$$

onde H é o espaço tangente de V.

O Ker($\omega^*$ ) é formado com o conjunto das formas ortogonais a H, isto é ,

$$< e^J | \, f_i > \; = 0 \; ; \; i = 1, \ldots 2(N - M) \quad \forall < e^J | \in H \; . \qquad (4.35)$$

Logo vemos que o projetor permite a definição de formas definidas em orth(H) associadas a funções do espaço simplético,

$$| \, f_i^* > = \Lambda | \, f_i > \; = \; d\xi^\mu \, \Lambda_\mu^\nu \, \partial_\nu f_i \qquad i = 1, \ldots 2 \, (N - M) , \qquad (4.36)$$

e também a campos vetoriais

$$< \mathbf{h}_j | \Lambda = < \mathbf{h}_j^* | = \omega^{\mu\nu}\Lambda_\nu^\beta \; \partial_\beta \mathbf{h}_j \partial_\mu \; . \qquad (4.37)$$

Calculando o produto simplético dos tensoresdefinidos em orth(H) obtemos

$$< \mathbf{h}_i^* \; | \; \mathbf{f}_j^* \; > = < \mathbf{h}_i | \; \Lambda \; | \; \mathbf{f}_j > = \Lambda^{\mu\beta} \partial_\beta \mathbf{h}_i \partial_\mu \mathbf{f}_i , \qquad (4.38)$$

onde usamos a propriedade de idempotência.

Assim, de acordo com (4.30), o produto simplético dos tensores projetados coincidem com os parênteses de Dirac na variedade compatível com os vínculos. Aqui os parênteses são reescritos em função da projeção,

$$\Lambda^{\mu\beta} = \omega^{\mu\nu}\Lambda_\nu^\beta \quad , \qquad (4.39)$$

onde

$$\Lambda^{\mu\beta} = \omega^{\mu\nu}\Lambda_\nu^\beta = \omega^{\mu\beta} - \omega^{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu^J \omega^{\beta\alpha}\mathbf{e}_{\alpha J} \; . \qquad (4.40)$$

Os $\Lambda^{\mu\nu}$ definem os parênteses de Dirac no subespaço compatível com os vínculos:

$$\{ \mathbf{f} \; , \; \mathbf{h} \}^* = \Lambda^{\mu\nu} \partial_\nu \mathbf{f} \partial_\mu \mathbf{h} \quad . \qquad (4.41)$$

Para verificarmos este fato basta usarmos novamente a definição dos parentêses de Poisson (4.13).

A variedade orth(H) é pré-simplética, pois os projetores são singulares, isto é,

$$\det|\ \Lambda^{\mu}_{\nu}\ | = 0. \tag{4.42}$$

## 7 - OBSERVÁVEIS

As variações infinitesimais compatíveis com os vínculos devem pertencer ao subespaço definido pela métrica simplética $\Lambda^{\mu\nu}$, e portanto

$$d\xi^{\nu *} = d\xi^{\alpha}\ \Lambda^{\nu}_{\alpha} \quad . \tag{4.43}$$

Definimos as variáveis fundamentais compatíveis com os vínculos como

$$\xi^{\mu *} = \int d\xi^{\nu}\Lambda^{\mu}_{\nu} \ . \tag{4.44}$$

Evidentemente as coordenadas $\xi^{\mu *}$ são indefinidas em cada ponto do espaço devido à não integrabilidade. (A integral (4.44) é dependente do caminho ).

A partir da definição dos parênteses de Poisson (4.13) temos

$$\{\ \xi^{\mu *},\ \xi^{\nu *}\ \} = \Lambda^{\mu\nu} \quad , \tag{4.45}$$

e portanto

$$\{\ \xi^{\mu *},\ \xi^{\nu *}\ \} = \{\ \xi^{\mu}\ ,\ \xi^{\nu}\ \}^{*} \quad , \tag{4.46}$$

onde $\xi^{\mu}$ são variáveis arbitrárias. A relação de involução assume um caráter geométrico

$$\{ \xi^{\mu *} , \phi^{\kappa} \} = \Lambda^{\mu\alpha} \partial_{\alpha} \phi^{\kappa} = 0 \quad ; \tag{4.47}$$

isto é, os campos vetoriais gerados pelos gradientes simpléticos são normais à variedade definida pelos vínculos.

As 1-formas associadas às observáveis $f_i$ devem pertencer também ao subespaço orth(H) e portanto escrevemos formalmente

$$f_i^* = \int | f_i^* > = \int d\xi^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} f_i \ . \tag{4.48}$$

Com esta definição garantimos que os parênteses de Poisson entre as observáveis coincidam com os parênteses de Dirac:

$$\{ f_i^* , h_i^* \} = \Lambda^{\mu\nu} \partial_{\nu} f_i \partial_{\mu} h_i \ . \tag{4.49}$$

## 8 - PRINCÍPIO VARIACIONAL

Vamos considerar $\theta$ uma 1-forma definida no espaço simplético ambiente e $\omega$ a 2-forma simplética

$$\theta = d\xi^{\mu} A_{\mu} \quad , \tag{4.50}$$

$$\omega = d\theta = d\xi^{\mu} \wedge d\xi^{\nu} \omega_{\nu\mu} \ . \tag{4.51}$$

A ação simplética se escreve, de acordo com Balachandran et al.( 50 pag 125),

$$S(\gamma) = \int_{t1}^{t2} \left( d\xi^{\mu} A_{\mu} - H(\xi^{\nu}) dt \right) \quad , \tag{4.52}$$

onde $H\ (\xi^{\nu})$ é a hamiltoniana em variáveis arbitrárias. Variando a ação de acordo com os vínculos temos

$$\delta S(\gamma) = \int d\xi^{\mu *} \left( d\xi^{\nu} \omega_{\nu\mu} - \partial_{\mu} H(\xi^{\nu}) dt \right) = 0 \ . \tag{4.53}$$

As variações $d\xi^{\mu *}$ não são todas independentes, mas usando o projetor de acordo com (4.43) podemos escrever

$$\delta S(\gamma) = \int d\xi^{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\mu} \left( d\xi^{\nu} \omega_{\nu\mu} - \partial_{\mu} H(\xi) dt \right) = 0 \quad ; \tag{4.54}$$

como os $d\xi^{\alpha}$ são arbitrários, temos

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} \left( \dot{\xi}^{\nu} \omega_{\nu\mu} - \partial_{\mu} H\ (\xi) \right) = 0 \ , \tag{4.55}$$

ou

$$\dot{\xi}^{\nu *} = \Lambda^{\nu\mu} \partial_{\mu} H \quad , \tag{4.56}$$

onde $\dot{\xi}^{\nu *} = \omega^{\nu\alpha}\ \dot{\xi}^{\sigma} \Lambda_{\alpha}^{\beta}\ \omega_{\sigma\beta}$ .

A equação de movimento (4.56) pode ser escrita na forma canônica, tendo em conta a definição dos parenteses de Dirac (4.41):

$$\dot{\xi}^{\nu *} = \Lambda^{\nu\mu} \partial_{\mu} H = \{\ H,\ \xi^{\nu} \}^{*} \ . \tag{4.57}$$

Esta equação pode ser reescrita em termos de uma hamiltoniana $H^*$ definida no subespaço orth(H). Escrevemos formalmente a integral da 1-forma

$$H^* = \int | H^* > = \int d\xi^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu} H \quad . \tag{4.58}$$

Usando (4.44) e a definição dos parênteses de Dirac obtemos :

$$\dot{\xi}^{\nu *} = \{ H^*, \xi^{\nu *} \} . \tag{4.59}$$

9 - **FORMA PRÉ-SIMPLÉTICA**

A subvariedade definida pelos vínculos é uma variedade pré-simplética definida por meio de 2-forma degenerada. De fato consideremos a 1-forma obtida por projeção

$$\theta^* = d\xi^{\alpha *} A_{\alpha} = d\xi^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\alpha} A_{\alpha} , \tag{4.60}$$

portanto

$$\omega^* = d\theta^* = d\xi^{\mu} \wedge d\xi^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\alpha} \omega_{\alpha\mu} + 1/2 \, d\xi^{\mu} \wedge d\xi^{\nu} \left( \partial_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu} \Lambda_{\nu}^{\alpha} \right) A_{\alpha} , \tag{4.61}$$

ou seja,

$$\omega^* = d\xi^{\mu} \wedge d\xi_{\mu}^* + 1/2 \, d\xi^{\mu} \wedge d \xi^{\nu} S_{\mu\nu} . \tag{4.62}$$

O último termo expressa as condições de integrabilidade dos vínculos. Como já vimos, no espaço de configuração este termo é a torção da variedade não-holônoma. No caso simplético este termo está ligado à torção nos espaços de Finsler generalizados também conhecidos como espaços de Lichnerowicz, como foi mostrado por Klein ( (79), pag 47).

Na formulação canônica as trajetórias definidas pela forma pré-simplética, $\omega^*$ são geodésicas do espaço de Lee ( (80) pag 433), onde a matriz simplética correspondente à $\omega^*$ tem a forma

$$\omega = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & S \end{vmatrix} \quad , \qquad (4.63)$$

onde S é a matriz formada com $S_{\mu\nu}$ e $\Lambda$ a matriz que representa o projetor ( $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ ). $\mu$, $\nu$ = 1,...,N.

## 10 - QUANTIZAÇÃO GEOMÉTRICA

A formulação simplética nos permite naturalmente descrever a quantização geométrica.

Aqui associaremos às funções de onda $\psi(\xi)$, no espaço de Hilbert, campos vetoriais e 1-formas definidos no espaço tangente à variedade simplética :

$$< \psi \mid = -i \, \omega^{\mu\nu} \partial_{\nu}\psi \, \partial_{\mu} \; , \qquad (4.64)$$

$$\mid \psi > = i \, d\xi^{\mu} \partial_{\mu}\psi \quad . \qquad (4.65)$$

Por outro lado, os campos vetoriais e 1-formas associados aos vínculos devem aniquilar os tensores associados à função de onda, para expressar a restrição ao sistema:

$$< e^{J} \mid \psi > = \omega^{\mu\nu} \partial\phi^{J}_{\nu} \partial_{\mu}\psi = \{ \phi^{J} , \psi \} = 0. \qquad (4.66)$$

Esta expressão é mais geral do que a que estudamos no capítulo

3.

Se considerarmos a representação de configuração e vínculos lineares nos momentos, o parêntese de Poisson (4.66 ) reduz-se à fórmula (3.60):

$$\{ \phi^J , \psi \} = \frac{\partial\phi^J}{\partial p_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = e^J_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} = 0 \ . \qquad (4.67)$$

Como o tratamemto simétrico da posição e do momento viola o princípio de incerteza, temos que escolher funções que dependam apenas dos momentos ou apenas das posições, separadamente. Este procedimento é conhecido como polarização e é discutido exaustivamente em (51).

Os campos vetoriais ( 1-formas) associados à função de onda arbitrárias devem ser projetados, para fornecer o campo vetorial ( 1-formas ) compatível com os vínculos:

$$| \psi^* > = \Lambda | \psi > = | \psi > - | e_J >\{ \phi^J , \psi \} \ . \qquad (4.68)$$

Verificamos imediatamente que

$$< e^K | \psi^* > = < e^K | \psi > - \{ \phi^K , \psi \} \equiv 0 \ . \qquad (4.69)$$

**11 - TRANSPORTE PARALELO**

Se interpretarmos $\theta^* = d\xi^\nu \Lambda^\mu_\nu A_\mu$ como a conexão 1-forma, podemos transportar paralelamente uma função de onda arbitrária, como vimos no capítulo 3. Neste caso a função de onda aquire um fator de fase

$$\psi' = \left[ \exp \int \theta^* \right] \psi \quad ; \tag{4.70}$$

usando o teorema de Stokes obtemos imediatamente

$$\int_\gamma \theta^* = \int_\sigma \omega^* \quad . \tag{4.71}$$

Para evitar ambiguidades na definição da função de onda devemos impor a condição

$$\int \omega^* = 2\pi\, N \quad , \tag{4.72}$$

o que garante que a curvatura 2-forma $\omega^*$ é um inteiro da cohomologia de DeRham . Esta é a condição de pré- quantização geométrica, necessária e suficiente para a existência de um fibrado quântico, (cit 51 pag 6 ).

## REFERÊNCIAS

1. C.M. do Amaral " Configuration Space Constraints as Projectors in the Many-Body System" Nuovo Cimento 25 B, 817 (1975).
2. C.M. Amaral e P.Pitanga "Projetores em Dinâmicas Vinculadas" Rev.Bras.Fís. 3,473 (1982).
3. P.Pitanga e K.Mundim " Projector in Constrained Quantum Dynamics" Nuovo Cimento 101 A,345 (1989).
4. P.Pitanga " Symplectic Projector in Constrained Systems" Nuovo Cimento 103 A, 11,1529 (1990).
5. P.A.M. Dirac " Generalized Hamiltonian Dynamics" Proc. Roy.Soc. A 246, 326 (1958)
6. P.Bergmann " Non Linear Field Theories " Phys.Rev. 75, 680 (1949)
7. C.M.Amaral e P.Pitanga " On the Existence of Singularities in the Geometrization of Lagrangian Dynamic" Rev.Bras.Fís. 17, 4, 617 (1987).
8. N.Steenrod " The Topology of Fibre Bundles" ( Princeton University Press, 1970).
9. H.Hertz "Principles of Mechanics" ( reprint Dover,1956).
10. J.Hadamard " Sur les mouvements de roulements" C.R. Acad. Sci.Paris 118, 911 ( 1894).
11. P.Appell " Sur une forme nouvelle des equations de la dynamique " C. R. Acad.Sci.Paris 129,459 (1899).
12. G.Hamel "Über nichtholonome Systeme" Math. Ann. 92, 31 (1924).
13. J.A.Schouten " Über nictholonome Übertragungen" Math.Z. 30, 149 (1929).

14. E. Cartan " Sur la représentation geométrique des systèmes matériels non holonomes " Proc.Inter. Congr. Math.Bologna 4, 253, (1928).
15. J.L.Synge " Geodesics in non-holonomic geometry" Math.Ann. 99, 738 (1928).
16. G. Vranceanu " Sur les espaces non-holonomes" C.R. Acad. Sci. Paris 183, 852 (1926).
17. J.L.Vanderslice " Non-holonomic Geometries" Amer. J. Math. 51, 153 (1934).
18. J.Koiller " Reduction of Classical Non-Holonomic Systems with symmetries" Arch. Rat. Mech.Annal. in press.
19. M.Morse " Sufficient conditions in the problem of Lagrange with variables end conditions" Amer.J.Math. 53, 517 (1931).
20. E.Saletan e A.Cromer " A Variational Principle for Nonholonomic Systems" Am.J.Phys. 38, 892 (1970).
21. H.Rund " The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations" ( Robert E.Krieger Publishing Co, 1973).
22. C. Jacobi "Gesammelt Werke" suppl. Berlin (1866).
23. G.Ricci e T.Levi-Civita " Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications" Math.Ann. 54, 125 (1901).
24. J.L. Synge " On the Geometry of Dynamics " Philos.Transactions A, 31 (1927).
25. A.Einstein " Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" Ann.Phys. 49, 769 (1916).
26. H.Weyl " Space, time, matter" ( Trad.H.L.Brose, Methuen, London, 1921).

27.E.Cartan " Sur les variétées à connexion affine et la théorie de la rélativité généralisée" Annales de l'École Normale 40, 383 (1925).

28.A. Trautman " Sur la théorie Newtonienne de la gravitation" C.R.Acad. Sci. Paris 257, 617 (1963).

29.C. Nash e S. Sen " Topology and Geometry for Physicists " (Academic Press, 1983).

30.M.F.Atiyah " Geometry of Yang-Mills Fields " Accademia Nazionale Dei Lincei, Pisa, (1979).

31.P.A.M. Dirac " Quantised Singularities in the Eletromagnetic Field" Proc.Camb.Phil.Soc.A, 60, (1932).

32.C.N. Yang e R.L.Mills" Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance " Phys.Rev. 96, 191 (1954). C.N.Yang "Integral Formalism for Gauge Fields" Phys.Rev.Lett. 33,445 (1974).

33.R.J.Eden " The quantum mechanics of non-holonomic system" Proc.Roy.Soc. A 205,583 ( 1951).

34.L.T.Hsang et al." Quantization in Curvilinear Coordinates" Inter.J.Theo.phys. 29, 909 (1990).

35.B.S.De Witt " Dynamical Theory in Curved Spaces I. A Review of the Classical and Quantum Action Principles" Rev.Mod.Phys. 29,377 (1957).

36.R.J.Blattner " Quantization and representation theory, in harmonic analysis on homogeneous spaces" Proc. Sym. Pure.Math. (Providence) 26,147 ( 1973).

37.D.J. Simms e N.M.Woodhouse " Lectures in geometric quantization " Lecture Notes in Physics 53 . ( Springer, 1976).

38. J.Sniatycki " Geometric Quantization and Quantum Mechanics" ( Springer, 1980).

39. I.L.Bukhbinder e S.Lyakhovich " On the Coordinate Representation in the quantum theory of Gauge Fields" Trans. Theoret. Math.Phys. 1146 (1990).

40. L.D.Fadeev " The Feynman integral for singular Lagrangians " Trans.Theoret. Math.Phys,1,1 (1970).

41. P. Senjanovic " Path Integral Quantization of Field Theories with Second-Class Constraints" Ann.Phys. 100, 227, (1976).

42. E.S. Fradkin e G.Vilkovisky " Quantization of Relativistic Systems with Constraints" Phys. Lett.B 55, 224 (1974).

43. I.Batalin e E.Fradkin " Operatorial Quantization of Dynamical Systems Subject To Second Class Constraints" Nucl.Phys.B 279, 514, (1987).

44. P.A.M.Dirac " Generalized Hamiltonian Dynamics" Canad. J.Math. 2, 129 (1950).

45. J.M.Souriau " Structure des Systèmes Dynamiques " (Dunod, Paris,1970).

46. J.Sniatycki " Dirac bracket in geometric dynamics " Ann. Inst.Henri Poincaré XX,365 (1974).

47. J.Sniatycki e W.Tulczyjew " Canonical dynamics of relativistic charged particles " Ann. Inst. Henri Poincaré XV, 3,177 (1971).

48. H.P. Kunzle " Degenerate Lagrangean System " Ann. Inst. Henri Poincaré " XI,393 (1969).

49. O.Babelon e C.M. Viallet " The Riemannian Geometry of the Configuration Space of Gauge Theories " Commun. Math. Phys. 81, 515 ( 1981).

50. A.Balachandran et al " Gauge Symmetries and Fibre Bundles" Lectures Notes in Physics 188 (Springer,1983).

51. M.Gotay e J. Sniatycki " On the Quantization of Presymplectic Dynamical Systems via Coisotropic Imbeddings " Commun.Math.Phys.82, 377 (1981).

52. A.Niemi " Symplectic Geometry of Strings " Ann.Phys. 187, 369 (1988).

53. M.DuBois Violette " Systèmes Dynamiques Constraints: L'Approche Homologique " Ann. Inst. Fourier, Grenoble,37, 45 (1987).

54. F.A.M.Frescura e G.Lubczonok " Co-Symplectic Geometry and Co-Lagrangian Subspaces " Intern. J.Theo.Phys. 29 (1990).

55. J.Fisch " Second Class Constraints in The Batalin-Vilkovisky Lagrangian BRST Quantization ". Modern Phys.Lett.A,5,195, (1990).

56. V.Guillemin e S.Sternberg " Some problems in the integral geometry and some related problems in micro-local analysis" Amer.J.Math. 101, 915 (1979).

57. R.Hermann " E.Cartan's Geometric Theory of Partial Differential Equation" Advances in Math.1,265 (1961).

58. Bolza " Vorlesungen über Variationsrechnung" ( Koehler& Amelang, Leipzig, 1909, reprinted 1949 ).

59. T.Kato"Pertubation Theory for Linear Operators" (Springer-Verlag, Berlin, 1976).

60. E.T.Whittaker " Analytical Dynamics of Particles and Rigid

Bodies " ( Cambridge University Press, London, 1959).

61. F.Gantmacher " Lectures in Analytical Mechanics " (Mir,Moscou,1970).

62. N.P.Konopleva e V.N.Popov " Gauge Fields " ( Trad. N.M.Queen, Harwood Academic Publishers, 1981).

63. É.Cartan " Les récentes généralisations de la notion d'espace" Bulletin des Sciences Mathématiques 48, 294 (1924).

64. H. Weyl " On the foundations of general infinitesimal geometry " Bull. Amer.Math.Soc. 35,716 (1929).

65. J.I.Neimark e N.A.Fufaev " Dynamics of Nonholonomic System " Amer.Math.Soc. Providence,( 1972).

66. L.I.Schiff " Quantum mechanics " ( McGraw-Hill, N.Y. 1968).

67. M.V.Berry " Quantal phase factors accompanying adiabatic changes" Proc. R. Soc. Lond. A 392,45 (1984).

68. J.KOILLER " A note on classical motions under strong constraints" J.Phys. A 23, L-521 (1990).

69. R.P. Feynman " Space time approach to nonrelativistic quantum mechanics " Rev.Mod.Phys. 20, 367 ( 1948).

70. C.Garrod " Hamiltonian Path-Integral Methods " Rev.Mod.Phys. 38, 483 ( 1966).

71. P.Amiot e J.J. Griffin " Constraints in Quantum mechanics via Lagrangians, Hamiltonians, and Canonical Equation of Motion " Ann.Phys. 95, 295 ( 1975).

72. J.Yoccoz " On the Moments of Inertia of Nuclei " Proc. Phys. Soc. A 70, 388 (1957).

73. P.Lederer e P.Pitanga " Coupled Fields in One Dimension : Cross-Over From a Continuous Symmetry to a Discrete One "

Journal de Physique 39,993 ( 1978).

74. A.Leviatan e B.Shao " General quadrupole nuclear shapes. An algebraic perspective " Phys. Lett. 243,313 ( 1990).

75. É. Cartan " Leçons sur les Invariants Integraux " ( Hermmann, 1922).

76. R.Abraham e J. Marsden " Foundations of Mechanics " ( A. Wesley, second edition, 1987).

77. B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko " Géométrie Contemporaine. Méthodes et applications " ( Mir, Trad. Francês, 1982 ).

78. M.de LEON E P.RODRIGUES " Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics", (North Holland, Math.Studies 158, 1989).

79. J.Klein " Espaces Variationnels et Mécanique " Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12, 1 (1962).

80. H.C.Lee " A kind of even-dimensional geometry and its application to exterior calculus " Amer.J.Math.55, 433 (1943).

# "PROJETORES EM DINÂMICAS VINCULADAS"

**PAULO CÉSAR GOMES LEITE PITANGA**

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Prem Prakash Srivastava/CBPF

Jair Koeller/LNCC

Paulo Roberto Rodrigues/UFF

Juan Alberto Mignaco/CBPF

Mário Novello/CBPF

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira/CBPF

Rio de Janeiro, 20de dezembro de 1990