

GIL DE OLIVEIRA NETO

ESPECTROSCOPIA CONSISTENTE PARA UM
MODELO DE GAUGE ESTENDIDO

TESE DE
MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1990-

"Muitas vezes - lutando contra obstáculos de toda ordem, ou sentindo minhas forças falharem e achando difícil perseverar no caminho escolhido - um secreto sentimento murmurava dentro de mim: existem poucas pessoas contentes e felizes aqui na Terra: talvez teu trabalho possa, um dia, ser a fonte onde os fracos, abatidos e sobrecarregados, encontrem alguns momentos de repouso e bem-estar."

Franz Joseph Hayden

AGRADECIMENTOS

Meus primeiros agradecimentos vão para os Três Mosqueteiros de Petrópolis: R. M. Doria, J. A. Helayel-Neto e F. A. B. Rabelo de Carvalho, sem os quais a batalha estaria perdida.

Gostaria de agradecer ainda:

- Ao Professor J. A. Simões, por importantes discussões sobre simetrias discretas, as quais muito contribuíram para o meu entendimento no assunto.

- Ao Departamento de Relatividade e Partículas, na figura do Professor Marcelo José Rebouças, pelo uso do Laboratório de Computação Algébrica, o que foi decisivo na obtenção de alguns resultados em Reduce.

- Às pessoas que, com seu trabalho dedicado, nos motivam tremendamente: Myriam, Denise, Vera, "Baiano", Uiliam, Rosângela, Rui, Paulo, etc...

- Aos colegas do CBPF.

- À boa acolhida e aos excelentes cursos, indispensáveis em nossa formação, fornecidos pela Universidade Católica de Petrópolis.

- À Fatima Dantas pelo grandioso trabalho de datilografia do texto e a sua grande paciência.

- Finalmente devo agradecer à sorte, o fato de não ter escapado entre meus dedos, ainda, esse tênue fio que separa nosso mundo, do mais completo e profundo vazio.

RESUMO

Os chamados Modelos de Gauge Estendidos, caracterizados pela associação de potenciais vetoriais extra em conexão com um único grupo unitário, Abeliano ou não, tem demonstrado ser consistente sob diferentes aspectos, quer de natureza geométrica, quer do ponto-de-vista das propriedades quântomecânicas. Baseados no princípio de Gauge, tais modelos procuram desenvolver algumas propriedades ainda não exploradas pelas teorias atuais que levam em conta tal princípio. O assunto desta tese são estes modelos estendidos, mais especificamente uma versão Abeliana dos mesmos.

Estudamos, inicialmente, propriedades gerais dos modelos estendidos; posteriormente, introduzimos uma Lagrangiana construída a partir de campos vetoriais, com uma simetria estendida frente ao grupo $U(1)$. Nesta direção, obtivemos o que é o resultado mais importante deste trabalho: a chamada Espectroscopia Consistente.

A Espectroscopia Consistente significa, na verdade, a determinação das propriedades físicas dos quanta descritos pelo modelo, de uma forma independente das possíveis parametrizações adotadas na descrição do mesmo. O fato de tal independência não ser imediata motivou-nos o estudo desenvolvido nesta tese.

SUMÁRIO

	página
Agradecimentos - - - - -	i
Resumo - - - - -	ii
CAPÍTULO I - Introdução - - - - -	1
1a. Teoria Quântica de Campos - - - - -	1
1b. Teorias de Gauge - - - - -	4
1c. Modelos de Gauge Estendido - - - - -	6
CAPÍTULO II - Campo Escalar Complexo - - - - -	9
2a. Lagrangiana Não-Diagonal, Equação de Movimento e Quantidades Relevantes para Descrição do Sistema - - - - -	9
2.a.1 Equações de Movimento - - - - -	12
2.a.2 Tensor Momento-Energia - - - - -	16
2.a.3 Tensor Momento-Angular - - - - -	18
2.a.4 Carga - - - - -	19
2b. Ω e Lagrangiana Diagonal - - - - -	20
2c. Estudo do Comportamento de Certas Grandezas Físicas frente à Reparametrização - - - - -	25
2.c.1 Propriedades Intrínsecas da Partícula - - -	25
2.c.1. α Massa - - - - -	25
2.c.1. β Carga - - - - -	28
2.c.1. γ Spin - - - - -	30
2.c.2 Propriedades Extrínsecas da Partícula - - -	31
2d. Estudo do Comportamento de Certas Simetrias frente à Reparametrização - - - - -	33
2.d.1. Simetrias Internas - - - - -	33
2.d.1. α Grupo $SU(N)$ - - - - -	34
2.d.1. β Simetria $[U(1)]^N$ - - - - -	39
2.d.1. γ Simetria $SU(N_1) \otimes SU(N_2) \otimes \dots \otimes$ $\otimes SU(N_p) \otimes [U(1)]^K$ - - - - -	41
2.d.2. Simetrias Discretas (CPT) - - - - -	42
2e. Exemplo - - - - -	50
Apêndice - - - - -	61
CAPÍTULO III - Modelo de Gauge Estendido - - - - -	65

3a. Motivação do Modelo, Construção da Lagrangiana Não-Diagonal e Equação de Movimento - - - - -	65
3b. Campos Físicos e a Matriz Ω - - - - -	78
3.b.1. Parametrização Transversal e Ω_T - - - - -	80
3.b.2. Parametrização Longitudinal e Ω_L - - - - -	82
3c. Equivalência entre as Parametrizações - - - - -	85
3d. Espectroscopia - - - - -	89
3e. Os Resíduos na Parametrização Física Transversal - - - - -	95
3f. Exemplo - - - - -	101
Apêndice - - - - -	112
CAPÍTULO IV - Conclusão - - - - -	114
4a. Uso de Grupos de Simetria Simples na Descrição de Muitos Campos de Gauge - - - - -	114
4b. Massa sem o Uso do Mecanismo de Higgs - - - - -	115
4c. O Aparecimento de Partículas com Spin Zero - - - - -	115
4d. A Possibilidade de Escolha de uma Parametrização - - - - -	116
4e. Espectroscopia Consistente - - - - -	117
4f. Um Modelo Mínimo - - - - -	118
4g. Conclusão Final - - - - -	120
Anexo - - - - -	122
Referências Bibliográficas - - - - -	132

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.a TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

A gênese da Teoria Quântica de Campos (TQC) nos leva ao final dos anos 20, início dos 30. Ela surgiu em suas bases, poucos anos depois da teoria quântica das partículas, e muitos físicos deram suas contribuições para o seu desenvolvimento. Nas palavras de um destes, P.A.M. Dirac, a motivação para efetivamente quantizarmos os campos, modificando assim o papel que estes representavam (como campos clássicos de fundo) nas teorias quânticas existentes, seria: "A beleza matemática da analogia formal da TQC com a teoria clássica quando expressa em forma simbólica" [1]. Apesar de forte, esta não é a única razão que podemos imaginar, pois o fato dos campos terem como fonte partículas quânticas torna necessário que os primeiros também sejam grandezas quânticas.

Nessa época, das quatro interações conhecidas hoje em dia, apenas a Gravitação e o Eletromagnetismo haviam sido

estabelecidos. É da segunda teoria que surgem as motivações práticas para a quantização dos campos, das quais citaremos duas obtidas do estudo do átomo de hidrogénio. A primeira se refere a um pequeno desvio, em relação as previsões teóricas baseadas nas teorias existentes dos níveis de energia deste átomo, observados primeiramente por Lamb-Retherford [2]. A outra é o valor do momento magnético anômalo do elétron, quando o sistema se encontra sobre à ação de um campo magnético externo uniforme. Estes fenómenos, quando tratados à luz dessa nova teoria, ou seja, quando se levou em conta o efeito das flutuações quânticas do campo eletromagnético do próton sobre o elétron [3], forneceram de forma espetacular, uma comprovação para utilização desse esquema [4].

Na teoria quântica de campos, a cada partícula é associada um operador matemático chamado campo quântico, o qual carrega as características da partícula - os números quânticos. O primeiro que diferenciou a Física Clássica da Quântica foi o spin. Na Mecânica Clássica, o momento angular é uma variável contínua, enquanto para a Mecânica Quântica aparece como um múltiplo de \hbar . Outros números quânticos bastante comuns são, a massa e a carga. Assim sendo, a versão quantizada das equações de Maxwell significa que o campo eletromagnético deve ser um bóson que carrega os números quânticos do fóton: massa = 0, spin $s = 1$, e carga elétrica $Q = 0$. Este campo quantizado possui um formalismo matemático que já carrega o dualismo onda-partícula. Uma característica da TQC é o aparecimento de processos virtuais que momentaneamente violam a conservação de energia e momentum, contudo são permitidos pelo princípio da

incerteza de Heisenberg.

Dentre os diferentes métodos de quantização dos campos, destacamos os seguintes: Canônica [5], o primeiro deles a ser desenvolvido; por Integrais-de-Caminho [6]; e Estocástica [7]. A primeira teoria surgiu ao aplicar-se esses métodos ao Eletromagnetismo, nascendo daí a chamada Eletrodinâmica Quântica (QED).

Pouco tempo após sua implementação, notou-se [8] a presença de infinitos em resultados físicos obtidos a partir da QED, sobretudo na auto-energia do elétron, a qual contribuiu no cálculo da sua massa. Muitos anos se passaram, e somente na década de 50, físicos como: Feynman, Schwinger, e outros [9] puderam mostrar como os infinitos do QED são eliminados.

O mecanismo pelo o qual obtemos os resultados finitos é chamado de renormalização, e pode ser entendido como a redefinição dos parâmetros tais como: carga e massa, contidos na Lagrangiana inicial. Essa redefinição é feita no sentido de levar em conta efeitos obtidos a partir da 2ª ordem da teoria de perturbação, devido a fótons virtuais e pares elétron-pósitron.

Depois de algum tempo, concluiu-se que esse mecanismo não é aplicável a todas as TQC, ou seja, nem todas elas são renormalizáveis. Dessa forma, a renormalizabilidade de uma dada teoria passou a ser um critério para aceitação, desta como uma teoria fisicamente aceitável. Uma vez que tinha se chegado a um resultado tão forte que determinaria, a partir daquele dia, as teorias interessantes ou não, e já que a QED satisfazia esse critério, começou-se a perguntar se esta teoria possuía alguma

característica especial que fosse crucial na determinação de sua renormalizabilidade. A resposta foi positiva e esta propriedade é a invariância da QED sobre as transformações de Gauge.

1.b TEORIAS DE GAUGE

Esta classe de teorias de campo não apenas regulam as interações [10], como também, a partir de 1976, através de C. Becchi, R. Stona e A. Rouet, oferecem um programa de renormalização a partir de técnicas algébricas [11]. Então, partindo-se da chamada simetria BRST do "Quantum Action Principle" [12], e da probabilidade de nilpotência deriva-se as condições de estabilidade e sobre a presença da anomalia na teoria.

O primeiro passo no sentido da formação do princípio de Gauge foi dado por Einstein, ao formular a sua Teoria da Relatividade Geral. Ele percebeu que ao exigirmos que os resultados físicos fossem invariantes frente às transformações gerais de coordenadas (dependentes do ponto do espaço-tempo), diferentemente das transformações de Lorentz (independentes do ponto) - características da Relatividade Especial - teríamos naturalmente, que introduzir um campo compensador: no caso, o Campo Gravitacional.

A partir desse aspecto notamos um importante fato: a invariância sobre transformações locais são capazes de dar origem a interações, enquanto que aquelas globais não. Com essa

idéia. Weyl [10] tentou obter, utilizando transformações de escala (Gauge), um fundamento para as interações eletromagnéticas, ele não foi feliz. Somente mais tarde pôde-se mostrar que a Eletrodinâmica Quântica é realmente uma Teoria de Gauge (o nome foi mantido), mas as transformações envolvidas são aquelas que modificam localmente a fase das funções de onda dos elétrons. Isto é, a Lagrangiana de Dirac só se mantém invariante frente a uma transformação de fase local, pertencente ao grupo $U(1)$, se adicionarmos à teoria um campo compensador ou campo de Gauge, o qual tem as mesmas propriedades do campo eletromagnético.

A primeira tentativa de, usando o princípio de Gauge, descrever uma outra interação foi proposta em um artigo de 1954, escrito por Yang-Mills [10]. Nesse artigo, eles tentavam construir um modelo baseado em uma invariância frente ao grupo $SU(3)$ local, para explicar os processos envolvendo os hádrons, de tal forma que as partículas mediadoras da interação envolvida fossem os píons. Essa primeira tentativa utilizando um grupo não-Abeliano foi frustrada, pois nem as massas dos bósons de Gauge foram tratadas de uma forma consistente, nem estes eram partículas fundamentais (fato que parece ser necessário ao usarmos o princípio de Gauge na formulação das interações).

Posteriormente, nos anos 60 e 70, foram desenvolvidos de maneira precisa os modelos não-Abelianos que, levando em conta o princípio de Gauge, davam uma representação dessa feita consistente, no que diz respeito às massas dos bósons de Gauge envolvidos para as duas forças básicas da natureza ainda não

explicadas: a força fraca, responsável pelo decaimento beta e a força forte, que dá conta dos processos envolvendo os quarks. Tais modelos, formulados por Weinberg, Salam e Glashow [13], o qual, na verdade, dava uma formulação unificada para as interações eletromagnéticas e fracas, e a Cromodinâmica Quântica, sofreram suficiente comprovação experimental - sobretudo pela observação: das massas previstas para os W^{\pm} e Z^0 (mediadores das forças fracas), de processos envolvendo correntes neutras e indícios da presença de jets.

O acúmulo de resultados positivos levou o princípio de Gauge a assumir uma posição privilegiada em Teoria Quântica de Campo. Desta forma, qualquer avanço nessa área, basicamente as propostas no sentido de se obter uma teoria unificada das forças conhecidas, deve conter no seu bojo esse princípio.

Apesar de todo esse quadro favorável, podemos nos perguntar se a descrição das interações é o único papel que o princípio de Gauge pode representar no palco da física de partículas. No contexto da resposta a essa pergunta aparecem os Modelos de Gauge Estendidos.

1.c MODELOS DE GAUGE ESTENDIDOS

Estes modelos são caracterizados pela presença de diferentes campos, em número arbitrário, associados a um mesmo grupo de transformações de Gauge Abelianas ou não-Abelianas. A justificativa mais importante dentre aquelas já obtidas é, sem dúvida, a demonstração da existência de graus de liberdade

suficientes e independentes para cada um dos campos introduzidos no modelo [14].

Inicialmente, dois aspectos emergem a partir dos modelos de Gauge Estendidos.

Primeiro, uma vitória da simetria sobre a teoria de grupo. As Teorias de Gauge têm sido guiadas pela condição de que o número de campos potenciais associados a um grupo de Gauge simples deve ser igual à dimensão da representação adjunta deste grupo [1]. Entretanto, os modelos estendidos modificam este contexto, trazendo uma nova rota não apenas para dar origem a uma física sem Higgs, mas também trabalhando como um outro método para se gerar quanta.

O segundo aspecto é de que a relação entre quanta e campo não é mais unívoca. Na Teoria de Gauge usual campos com spin-1, spin-3/2, spin-2 têm as suas componentes espúrias diminuídas através de invariâncias locais, restando associado ao campo apenas aquele quanta com spin mais elevado. Tal situação agora modifica-se: Existirá uma série de quanta embutidos dentro de um grupo de campos com spin $> 1/2$ que deverão compor a espectroscopia física dos modelos estendidos.

Na verdade, estes modelos são o assunto desta tese. No capítulo 3, damos as suas características gerais, comparando-os com as teorias de Gauge usuais. Depois disso, analisamos uma Lagrangiana Estendida com simetria frente ao grupo $U(1)$, atingindo assim nosso objetivo principal desse capítulo, a chamada espectroscopia consistente. Isso quer dizer que determinaremos para esse exemplo de modelo estendido algumas propriedades dos quanta associados aos campos contidos

na teoria, de tal forma que os resultados obtidos serão consistentes, ou seja, independentes da parametrização em que estivermos escrevendo estes campos.

A independência de uma teoria com reparametrização, ou ainda, dos resultados físicos determinados a partir desta, não é um fato trivial. Assim, no capítulo 2, fizemos um estudo do comportamento de um modelo envolvendo campos escalares complexos, frente à mudanças de base dos campos da teoria. O nosso maior interesse nesse capítulo é a demonstração da invariância da física do modelo ao considerarmos à transformação mencionada.

Finalmente, no capítulo 4, utilizando o resultado da espectroscopia consistente, procuramos apresentar uma possível realidade experimental que acomoda tais modelos estendidos.

CAPÍTULO II

CAMPO ESCALAR COMPLEXO

2.a LAGRANGIANA NÃO-DIAGONAL, EQUAÇÃO DE MOVIMENTO E QUANTIDADES RELEVANTES PARA DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Como ponto de partida para o entendimento do porquê do modelo que estaremos estudando neste capítulo, considere o seguinte problema:

Suponha que depois de analisarmos os dados provenientes de vários experimentos diversos, envolvendo muitos e diferentes partículas sem spin e carregadas eletricamente, constataremos a conservação de algumas quantidades nos processos analisados. A descrição teórica de tais leis de conservação implicaria, em uma primeira fase, na construção de uma Lagrangiana contendo: os multipletes de campos apropriados para descrição do tipo de matéria envolvida, e uma simetria relacionando tais campos, que pudesse de forma unívoca gerar as cargas conservadas observadas na prática.

Sabemos que essa descrição é bem estabelecida [15]

para as interações conhecidas envolvendo tais partículas. Por exemplo, mésons- π eletricamente carregados interagindo com núcleons. Nesse caso, teremos uma Lagrangiana para o setor de matéria escalar dada por (a menos de um termo de auto-interação):

$$\mathcal{L} = -\vec{\pi}^{\dagger} \square \vec{\pi} - \vec{\pi}^{\dagger} M^2 \vec{\pi}, \quad \vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad (1)$$

onde M^2 é uma matriz real quadrada diagonal de dimensão 3. Assim, vemos que as massas e os propagadores são relacionados um-a-um com cada um dos mésons- π considerados. Em outras palavras, não temos o aparecimento de termos que misturem os campos.

Imagine agora que queiramos explorar essa possibilidade, ou seja, reescrever a Lagrangiana (1) acima em termos de campos, de tal modo que, os novos propagadores e as novas massas não estejam mais univocamente relacionadas a um, e a somente um, desses novos campos. Estaríamos nós descrevendo o mesmo sistema físico que no caso anterior? A reparametrização que fizemos na nossa Lagrangiana é capaz de alterar a física contida nesta última?

A principal motivação deste capítulo é responder a essas questões, e isso será feito usando argumentos os mais físicos possíveis. Apesar de bastante relevantes por si, essas questões não são, para muitos, motivação suficiente para embrenhar-se nesse estudo, assim para estes e os demais também, mostramos no final do capítulo uma pequena aplicação dos nossos

resultados, no proprio modelo em estudo. Mas, devemos ressaltar que, como ja foi dito, a maior motivação dos resultados obtidos nesse capítulo está na sua utilização na seqüência do trabalho.

Seja, então, a Lagrangiana mais geral para N campos escalares complexos, invariante de Lorentz, possuindo uma simetria global U(1) e um termo quártico de interação:

$$\mathcal{L} = -\varphi^\dagger \square K \varphi - \varphi^\dagger M^2 \varphi - \Lambda_{abcd} \varphi_a^* \varphi_b \varphi_c^* \varphi_d, \quad (2)$$

onde temos: K, M² matrizes N-dimensionais Hermiteanas;

φ matrizes coluna N-dimensionais; e

Λ_{abcd} complexo e exibindo as seguintes

propriedades: $\Lambda_{abcd} = \Lambda_{badc}^*$, $\Lambda_{abcd} = \Lambda_{dabc}^*$,

$\Lambda_{abcd} = \Lambda_{bcda}^*$ e $\Lambda_{abcd} = \Lambda_{dcba}^*$,

$$a,b,c,d = 1,2,\dots,N.$$

É importante ressaltarmos que a simetria U(1) global é construída a partir de uma única carga para todos os campos escalares. Em outras palavras, teremos (usando a representação exponencial):

$$\varphi_i(x) \xrightarrow{U(1)} \varphi_i'(x) = e^{iq\alpha} \varphi_i(x), \quad (3)$$

q é a carga e α um parâmetro real independente das coordenadas do espaço-tempo. Note-se que, apenas por questão de simplicidade, adotamos a mesma carga, q, para todos os campos φ_i . Mais adiante, veremos que esta é uma escolha particular e que a invariância U(1) poderá ser realizada em termos dos campos φ_i através da transformação:

$$\varphi_i' = (e^{i\alpha Q})_{ij} \varphi_j, \quad (4)$$

onde Q é a matriz quadrada N -dimensional de cargas, e não necessariamente é diagonal. Assim, a Lagrangiana (2) será o ponto de partida para a nossa formulação consistente do modelo em questão.

Uma vez que o elemento principal do nosso modelo foi introduzido, podemos passar para a fase da determinação das equações de movimento e quantidades conservadas a nível clássico. Todas elas serão de grande valia ao escrevermos o setor quântico, as primeiras na obtenção das funções de Green (ou propagadores) e as últimas, quando escritas em forma operatorial, na construção do espaço de Fock da teoria.

2.a.1 Equações de Movimento

Iniciamos pelas equações de Euler-Lagrange, as quais a nível clássico fornecem a dinâmica da Teoria. Estas são, em sua forma geral para um sistema de infinitos graus de liberdade, dadas por [16]:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L} [\phi_i^e, \partial_\mu \phi_i^e]}{\partial \partial_\mu \phi_i^e(x)} - \frac{\partial \mathcal{L} [\phi_i^e, \partial_\mu \phi_i^e]}{\partial \phi_i^e(x)} = 0. \quad (5)$$

No nosso caso, o índice interno e terá dois valores distintos, o que para um dado campo (valor especificado de i) gera equações para este e para o seu complexo conjugado. Na verdade, é fácil mostrar que estamos escrevendo uma equação para uma

partícula (caracterizada por uma massa e um sinal de carga) e outra para a sua anti-partícula (mesma massa e sinal contrário ao da partícula). E o índice i está nos apontando um dado campo no multiplete considerado.

Ao introduzirmos a Lagrangiana (2) nas Equações de Euler-Lagrange (5), obteremos para o campo φ_α :

$$K_{\alpha i}^* \square \varphi_i^* + M_{\alpha i}^{2*} \varphi_i^* + \Lambda_{\alpha abc}^* \varphi_a^* \varphi_b^* \varphi_c^* = 0, \quad (6)$$

e o complexo conjugado das equações acima para o campo φ_α^* . (Aqui entra um extra falando sobre os propagadores (massas e resíduos) do campo.)

Na verdade, não obteremos as funções de Green para os campos escalares diretamente da equação (6), visto que isso é muito complicado. Usaremos para essa finalidade o método perturbativo, ou seja, supondo que a presença da interação cause um leve desvio da teoria livre, calcularemos, usando essa teoria como ponto de partida, os propagadores que nos interessam. Logo, passa a ser essencial o conhecimento da função de Green para a teoria livre (sem a interação quártica). Sua obtenção é imediata e pode ser feita a partir da Lagrangiana (2), tomando para isso o inverso do operador que se encontra no termo quadrático nos campos. Assim, o propagador para a teoria livre será dado por:

$$\Delta = \langle T \varphi^\dagger \varphi \rangle \equiv i \bar{\Delta}^0 = -i (\square K + M^2)^{-1},$$

ou ainda em componentes,

$$\bar{\Delta}_{ij}^0 = \frac{-\text{cof} (\square + K^{-1} M^2)_{ji}}{\det (\square + K^{-1} M^2)} K_{ij}^{-1}, \quad (7)$$

onde cof e det são abreviações para cofator e determinante, respectivamente. É interessante notarmos que na construção de (7), tivemos que exigir que a matriz K (coeficiente do termo cinético) fosse inversível, ou seja, $\text{det } K \neq 0$. A razão física disso pode ser vista, se tomarmos a forma diagonal de K . A condição sobre o determinante de K nos diz que este não pode ter auto-valores nulos. Assim, todos os campos nesta nova parametrização têm termo cinético, com isso, propagação.

Na verdade, essa não é a única condição que devemos impor sobre a matriz K [17]. De fato, considerando-se o caso ordinário de um campo escalar complexo, cujo propagador é dado por:

$$\Delta_F(K) = \frac{i}{k^2 - m^2},$$

observamos que a norma dos estados físicos de uma partícula é dada por:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi_{\text{phis}}^+(f) \varphi_{\text{phis}}(f) | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \left[-2\pi_i \text{Res } \Delta(\omega, \mathbf{k}) |f(\omega, \mathbf{k})|^2 \Big|_{\omega=\text{pólos}} \right] = \\ &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\text{Res } \Delta(\omega, \mathbf{k}) |f(\omega, \mathbf{k})|^2 \Big|_{\omega=\text{pólos}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

onde $f(x)$ é uma função com suporte compacto em M^4 .

Vemos que a positividade de tal norma depende fortemente do valor do resíduo do propagador nos pólos da componente temporal do quadri-vetor número de onda. Assim, no nosso caso específico, podemos obter a partir de (7) que a norma só será

positiva definida, ou ainda, as partículas descritas pelos campos considerados só serão físicos (e não ghosts), se a matriz K também for positiva definida. Isso significa que seus autovalores devem ser maiores que zero.

Uma característica bastante importante dos quanta que estamos descrevendo, com a ajuda dos campos escalares, são as suas massas. Essas podem ser lidas do propagador (7), mas devemos ressaltar que estas não são as massas físicas, as quais só serão obtidas após renormalizarmos a teoria. Assim, estes parâmetros de massa são dados como os pólos do propagador, ou seja, os autovalores da matriz $K^{-1}M^2$.

Este resultado nos impõe uma nova restrição aos parâmetros livres iniciais, só que desta vez a condição recairá sobre os elementos da matriz M^2 . Nós queremos que os quanta de nosso modelo representem partículas físicas. Isto requer, entre outras coisas, que sua linha de mundo, no espaço de Minkowski seja tipo tempo ou tipo-luz: $ds^2 \geq 0$. Daí tiramos que:

$$m_i^2 = k^2 \geq 0, \quad (9)$$

onde os m_i^2 são os autovalores da matriz $K^{-1}M^2$.

Já vimos que K é positivo-definida; por outro lado, (9) exige que $K^{-1}M^2$ seja não-negativo-definida, de tal modo que seus autovalores sejam não-negativos e, assim, partículas taquiônicas venham a ser eliminadas do espectro.

As quantidades conservadas que estamos interessados em calcular são obtidos a partir do Teorema de Noether. Elas são provenientes da invariância (ou alteração pela soma de uma derivada total) da Ação, frente ao grupo de Poincaré e a um

grupo de transformação interno (exclusivamente dos Campos). Essa invariância dá origem a um quadri-vetor corrente cuja quadri-divergência é nula. Daí, tiramos imediatamente a expressão para a conservação no tempo de uma carga (a componente temporal do quadri-vetor corrente) que é, na verdade, identificada como o gerador da transformação considerada.

A expressão geral para a quadri-corrente citada acima, considerando que estamos sobre a camada de massa, é dada por [18]:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i^e} \phi_i^e - \epsilon^\mu_\nu \delta x^\nu, \quad (10)$$

tal que:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (11)$$

e o tensor momento-energia Θ^μ_ν é dado por [18]:

$$\Theta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i^e} \partial_\nu \phi_i^e - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (12)$$

2.a.2 Tensor Momento-Energia

A primeira quantidade a ser calculada será o Tensor-Momento Energia $\Theta_{\mu\nu}$, este está dado pela expressão (12) acima. Assim, introduzindo a nossa Lagrangiana (2) nessa definição, obtemos:

$$\Theta_{\mu\nu} = 2K_{ij} \partial_\nu \phi_i^* \partial_\mu \phi_j - \eta_{\nu\mu} \mathcal{L},$$

ou ainda,

$$e_{\mu\nu} = 2K_{ij} \partial_\nu \phi_i^* \partial_\mu \phi_j - \eta_{\nu\mu} (K_{ij} \partial^\mu \phi_i^* \partial_\mu \phi_j - M_{kl}^2 \phi_k^* \phi_l + \Lambda_{abcd} \phi_a^* \phi_b \phi_c^* \phi_d) . \quad (13)$$

A partir do Tensor Momento-Energia, podemos obter imediatamente a Hamiltoniana do modelo, para o caso em questão. Ela será bastante importante no setor quântico, tanto para fornecer a evolução temporal dos operadores relevantes, quanto na determinação do vácuo da teoria. Assim, a Hamiltoniana será obtida ao tomarmos a componente temporal-temporal do tensor $e_{\mu\nu}$ e escrevê-la em função dos momentos canônicos, dados por:

$$\pi_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_l} = K_{il} \dot{\phi}_l^* , \quad (14)$$

e π_l^* resulta de tirarmos o complexo conjugado da expressão acima. Logo ficamos com:

$$\dot{\mathcal{H}}_{00} = K_{ij}^{-1} \pi_l \pi_j^* + K_{ij} \nabla_\mu \phi_i^* \nabla_\mu \phi_j + M_{kl}^2 \phi_k^* \phi_l + \Lambda_{abcd} \phi_a^* \phi_b \phi_c^* \phi_d . \quad (15)$$

Observando a expressão (15) pode surgir uma dúvida bastante procedente, em relação a positividade da parcela da Hamiltoniana que representa o setor livre do modelo que estamos analisando (sem considerarmos a interação quártica). A resposta a essa questão só poderá ser dada ao introduzirmos posteriormente reparametrizações explícitas do modelo em estudo.

2.a.3 Tensor Momento-Angular

Retomando a expressão geral (10), iremos obter o tensor (de três índices) Densidade de Momento Angular do modelo. Diferentemente do Tensor Momento-Energia, que foi obtido ao considerarmos a invariância da Ação frente a uma translação no espaço-tempo, o tensor DMA resultará de considerarmos uma transformação do Grupo de Lorentz. Esta é caracterizada pela seguinte modificação infinitesimal nas coordenadas:

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu X^\nu \quad \text{onde} \quad \omega^\mu{}_\nu = -\omega_\nu{}^\mu \quad (16)$$

descreve os seis parâmetros do grupo. E nos campos:

$$\delta \phi_\theta^i(x) = \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})_{\theta i} \phi_i^\gamma(x) \quad (17)$$

$\Sigma_{\alpha\beta}$ são os geradores do grupo. A representação em que os geradores serão escritos, vai depender da natureza do campo (escalar, vetorial, espinorial, etc...) que está sendo transformado. Introduzindo as variações (16) e (17) na forma geral da corrente (10), obtemos o tensor DMA com a ajuda da (11):

$$M_{k\lambda}^\mu = X_k^\mu \theta_{\lambda} - X_\lambda^\mu \theta_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu^i} (\Sigma_{k\lambda})_{\theta i} \phi_i^\gamma(x) \quad (18)$$

e é óbvio que $\partial_\mu M_{k\lambda}^\mu = 0$. É interessante constatar que este tensor é formado por duas parcelas, ou ainda, duas densidades de momento angular. Aquela dada pelas duas primeiras parcelas do lado direito de (18), está descrevendo essencialmente

alterações do sistema físico em estudo no espaço-tempo. Assim é imediato associar esta a densidade de MA Orbital, e a outra devido ao fato de estar associada a transformações nos campos (ou ainda, no espaço interno), só pode descrever a DMA de Spin.

Para o caso de campos escalares, não temos a contribuição do spin, para DMA, assim ficamos apenas com a DMA orbital:

$$M_{\alpha\lambda}^{\mu} = X_{\alpha}^{\mu} e_{\lambda}^{\mu} - X_{\lambda}^{\mu} e_{\alpha}^{\mu} . \quad (19)$$

2.a.4 Carga

A última das transformações que iremos considerar, relaciona apenas os Campos da Teoria, ou seja, se desenrola no espaço interno do modelo. A este ponto, ainda não consideramos nenhuma simetria nos campos além daquela U(1). Isso só será interessante quando introduzirmos a discussão acerca das diversas parametrizações em que podemos apresentar a teoria. Então, na parametrização em que obtemos uma forma diagonal para as matrizes cinética e de massa, falaremos sobre grupos de simetrias com mais parâmetros, e suas propriedades frente às diferentes parametrizações.

Assim, para escrever o quadri-vetor corrente (11), que nesse caso se reduz a:

$$J^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i^{\theta}} \delta \phi_i^{\theta} , \quad (20)$$

pois as transformações das coordenadas do espaço-tempo são

nula. ($\delta x^\mu = 0$). Teremos que considerar a forma infinitesimal da transformação (3), que se escreve para o campo $\varphi_1(x)$:

$$\begin{matrix} U(1) \\ \varphi_1(x) \longrightarrow \varphi_1'(x) = (1 + iqa) \varphi_1(x) \Rightarrow \delta\varphi_1(x) = iqa \varphi_1(x), \end{matrix} \quad (21)$$

e o complexo conjugado para o campo $\varphi_1^*(x)$. Logo, para essa simetria U(1) global, J^μ será dado:

$$J^\mu = i (\varphi^+ K \partial^\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^+ K \varphi) . \quad (22)$$

É interessante percebermos que a passagem da forma global da simetria U(1), para uma local, forçosamente obrigaria o aparecimento na teoria de um campo vetorial compensador (nos modelos usuais), a fim de que a teoria se mantivesse invariante frente ao grupo considerado. Seria o caso de termos o aparecimento do campo eletromagnético, por exemplo. O que veremos no próximo capítulo é que o fato de termos apenas o parâmetro α não implica, necessariamente, na presença de somente um campo de Gauge, assim poderíamos ter muitos campos compensadores (cujas transformações seriam dadas em termos do α) se acoplado à corrente de matéria escalar (22).

2.b Ω E LAGRANGIANA DIAGONAL

No início do capítulo ressaltamos que a descrição que íamos utilizar para encarar o problema proposto era diferente daquela usualmente utilizada. Assim, depois de determinarmos diversas grandezas e equações relevantes na solução clássica, e num passo posterior quântica, podemos nos perguntar se essa

formulação que demos é equivalente ou não àquela convencional. Na verdade, estaremos interessados em determinar a equivalência entre as duas descrições, pois em caso contrário, não estaríamos falando sobre o mesmo sistema físico.

Como ponto de partida da nossa demonstração, devemos construir a transformação que nos levará de uma parametrização para a outra. Nesse processo introduziremos a matriz composta Ω , que desempenhará um papel central em nossa discussão. Depois de estabelecida a nova parametrização, vem a pergunta sobre quais seriam os critérios para considerarmos as duas descrições equivalentes. A resposta surge de forma natural quando pensamos no sistema físico que estamos estudando: partículas e suas diversas propriedades. Essas propriedades, de natureza intrínseca ou extrínseca, desempenham um papel fundamental na solução do sistema físico, tanto a nível clássico como quântico. Daí, vemos claramente que a demonstração de que tais propriedades, derivadas nas duas diferentes parametrizações não se alteram (são idênticas), seria uma condição necessária e suficiente para concluirmos quanto a equivalência entre tais parametrizações. Um resultado bastante interessante que iremos percebendo à medida que formos evoluindo nessa análise, é que o campo propriamente dito não é uma dessas propriedades essenciais da partícula, podendo assim ser redefinido conforme a conveniência, desde que a redefinição satisfaça a um certo número de restrições de caráter geral.

A partir da Lagrangiana (2), iremos construir os passos necessários para obtermos a parametrização diagonal do sistema em estudo.

$$\mathcal{L} = -\dot{\varphi}^+ \square K \dot{\varphi} - \varphi^+ M^2 \varphi - \Lambda_{abcd} \varphi_a^* \varphi_b \varphi_c^* \varphi_d \quad (2)$$

Uma vez que K é Hermitiana, existe uma matriz S, unitária ($S^+ = S^{-1}$) que a diagonaliza [19]. Então, aplicando esta transformação nos campos, ficaremos com:

$$\tilde{\varphi} = S \varphi \quad (23)$$

E a Lagrangiana em termos dos campos $\tilde{\varphi}$ é:

$$\mathcal{L} = -\tilde{\varphi}^+ \square \tilde{K} \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^+ \tilde{M}^2 \tilde{\varphi} - \tilde{\Lambda}_{abcd} \tilde{\varphi}_a^* \tilde{\varphi}_b \tilde{\varphi}_c^* \tilde{\varphi}_d \quad (24)$$

onde \tilde{K} é diagonal e os demais coeficientes são obtidos dos correspondentes na Lagrangiana (2) por aplicação de S apropriadamente. Agora, vamos normalizar esses campos $\tilde{\varphi}$, de tal forma que o termo cinético em (24) fique proporcional à identidade. Isso é conseguido através de:

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = \tilde{K}^{1/2} \tilde{\varphi} \quad (25)$$

Essa transformação é possível, pois já havíamos imposto que k é positivo-definida. Além disso, vemos que $\tilde{K}^{1/2}$ não é unitária. Ao reescrevermos (24) na parametrização dos campos $\tilde{\tilde{\varphi}}$ obtemos:

$$\mathcal{L} = -\tilde{\tilde{\varphi}}^+ \square \tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}^+ \tilde{M}^2 \tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\Lambda}_{abcd} \tilde{\tilde{\varphi}}_a^* \tilde{\tilde{\varphi}}_b \tilde{\tilde{\varphi}}_c^* \tilde{\tilde{\varphi}}_d \quad (26)$$

O último estágio será a diagonalização da matriz Hermitiana \tilde{M}^2 , dada por:

$$\tilde{M}^2 = K^{-1/2} S M^2 S^+ K^{-1/2} \quad (27)$$

Isso será feito por R (onde R é unitária), introduzindo assim os campos ϕ :

$$\phi = R \tilde{\tilde{\varphi}} \quad (28)$$

Assim, a Lagrangiana final, na parametrização dita diagonal

ficará:

$$\mathcal{L} = -\dot{\phi}^\dagger \square \phi - \dot{\phi}^\dagger m^2 \phi - \Gamma_{ABCD} \phi_A^* \phi_B \phi_C^* \phi_D \quad (29)$$

A este ponto surge, naturalmente, a idéia da matriz Ω . Vamos escrever a relação que existe entre os campos φ e ϕ .

$$\varphi = S^+ \tilde{K}^{-1/2} R^+ \phi \quad \text{por definição escreveremos}$$

$$\Omega = S^+ \tilde{K}^{-1/2} R^+, \quad (30)$$

de tal forma que:

$$\varphi = \Omega \phi \quad \text{e} \quad \phi = \Omega^{-1} \varphi. \quad (31)$$

E as quantidades que aparecem em (29) se relacionam com aquelas dadas em (2), pelas seguintes relações notadas em função de Ω :

$$\left. \begin{aligned} \Omega^+ K \Omega &= \mathbb{1} , \\ \Omega^+ M^2 \Omega &= m^2 \text{ (} m^2 \text{ é diagonal) ,} \\ \Lambda_{abcd} \Omega_{aA}^* \Omega_{bB} \Omega_{cC}^* \Omega_{dD} &= \Gamma_{ABCD} . \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Depois disto, temos elementos suficientes para concluir a cerca do papel da matriz Ω . Ela é a responsável por uma rotação bem característica dos campos, que leva da parametrização em que a Lagrangiana é não-diagonal (existência de termos cinético e de massa mistos) para aquela diagonal. É interessante percebermos ainda que esta matriz tem algumas propriedades. A primeira vem do fato de termos um dos constituintes de Ω , a matriz $\tilde{K}^{1/2}$ não unitária. Tirando com isso a possibilidade de Ω ser uma matriz unitária: Ω é unitária se, e somente se, K é a identidade. A segunda, derivada da

relação (32), é a exigência de que Ω seja inversível, o que se expressa como:

$$\det \Omega \neq 0 . \quad (33)$$

E, se pensarmos em termos das matrizes constituintes de Ω , a condição (33) é escrita, levando em conta que R e S são matrizes unitárias, da seguinte forma:

$$\det S = 1, \quad \det \tilde{K} \neq 0 \quad \text{e} \quad \det R = 1 . \quad (34)$$

Na verdade, como já tínhamos visto, \tilde{K} é não-singular pois a matriz K deve ser escolhida positivo-definida.

Observando a forma como a matriz Ω foi construída, vemos que seus elementos dependem explicitamente dos parâmetros introduzidos na matriz cinética e na matriz de massa. Assim, vemos que as condições (34) irão fixar um conjunto de valores possíveis para os elementos de tais matrizes, os quais, são definidos conforme o modelo que estamos considerando.

É possível reescrevermos agora duas condições que haviam sido impostas sobre o nosso modelo, baseando-se em considerações físicas. Uma delas dizia que a matriz cinética deveria ser positivo-definida (p.14), e a outra restringia da mesma forma os elementos da matriz de massa (p.15). Agora podemos reescrevê-los como:

$$\tilde{K}_{ii} > 0 \quad \text{e} \quad m_{ii}^2 \geq 0 . \quad (35)$$

Com isso, os parâmetros iniciais do modelo terão, além de (34) mais estas novas condições (35) a satisfazer.

2.c ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE CERTAS GRANDEZAS FISICAS FRENTE A REPARAMETRIZAÇÃO

2.c.1 Propriedades Intrinsecas da Particula:

2.c.1.α - Massa:

A primeira das propriedades das particulas cuja identidade nas duas parametrizações estaremos interessados em demonstrar são as suas massas. Para tal, devemos inicialmente determinar os seus valores na parametrização diagonal. Estas serão dadas pelos polos do propagador, lidos da Lagrangiana (29) a qual caracteriza essa forma diagonal. Assim:

$$\langle T \phi^+ \phi \rangle \equiv i \bar{\Delta}^\phi = -1 (\square + m^2)^{-1} \quad (36)$$

$$\Delta_{ij}^\phi = \left[\frac{-1}{\square + m_i^2} \right] \delta_{ij} .$$

Da forma do propagador dado por (36), tiramos imediatamente que as massas serão dadas pelos elementos da matriz m^2 (visto que esta é diagonal). Com isso, tomando o valor das massas na parametrização não-diagonal dadas pelos autovalores da matriz $K^{-1}M^2$, vamos demonstrar sua identidade com os elementos de m^2 .

Isso é feito com a ajuda das duas primeiras equações em (32):

$$\Omega^+ M^2 \Omega = m^2, \quad \text{e} \quad \Omega^{-1} K^{-1} (\Omega^+)^{-1} = \mathbb{I},$$

multiplicando (pela esquerda) a segunda expressão pela primeira

obtemos:

$$\Omega^{-1} (K^{-1} M^2) \Omega = m^2 . \quad (37)$$

Essa expressão indica que a matriz $K^{-1}M^2$ é levada em m^2 através de uma transformação de semelhança dada por Ω . Daí, tiramos imediatamente que os autovalores das duas matrizes (os próprios elementos no caso de m^2) são idênticos. Isso indica que os parâmetros de massa são quantidades independentes da parametrização.

Uma outra quantidade que podemos estudar a partir do conhecimento dos propagadores são os resíduos (R), associados aos diversos pólos. Como havíamos visto em (8) estes desempenham um papel crucial na determinação da norma dos estados físicos. Devemos ressaltar que no nosso caso aonde temos N campos envolvidos, somente os resíduos diagonais (aqueles derivados de propagadores envolvendo um mesmo campo) serão importantes na análise destas normas físicas.

Os resíduos associados ao pólo, digamos m^2 , nas duas parametrizações, serão obtidos [20] por intermédio dos propagadores (36) e (7) no espaço dos momenta:

$$R_{ij}^{\phi} (k^2 = m^2) = \delta_{ij} , \quad (38)$$

$$R_{ij}^{\phi} (k^2 = m^2) = \frac{\text{cof} (-m^2 + K^{-1}M^2)_{ii}}{\pi_i (m^2 - m_i^2)} k_{ij}^{-1} , \quad (39)$$

onde π_i é o produtório de todos os autovalores de $K^{-1}M^2 (m_i^2)$, exceto m^2 que é o polo considerado. Essas duas quantidades se relacionam naturalmente, ao nos lembrarmos que a partir da

matriz $\bar{\Delta}$ os propagadores nas diferentes parametrizações são conectados por:

$$\bar{\Delta}^\varphi(k) = \bar{\Omega}^{-1} \bar{\Delta}^\varphi(k) (\bar{\Omega}^{-1})^t . \quad (40)$$

Dai então tiramos imediatamente a expressão entre os resíduos (38) e (39):

$$R^\varphi(k^2 = m^2) = \bar{\Omega}^{-1} R^\mu(k^2 = m^2) (\bar{\Omega}^{-1})^t . \quad (41)$$

Esse resultado nos diz que, diferentemente da matriz de massa, os autovalores da matriz dos resíduos dependem da base em que estamos descrevendo o modelo, pois (41) não é uma transformação de semelhança.

Já que o valor dos resíduos depende da parametrização, analisemos o comportamento do sinal destas quantidades em propagadores diagonais frente à tais transformações. Uma vez que o normal dos estados físicos é proporcional a tais resíduos. Isso significa que somente serão físicos os campos com valores positivos do resíduo. Começemos reescrevendo (41) da seguinte forma:

$$R^\varphi(k^2 = m^2) = \bar{\Omega} R^\varphi(k^2 = m^2) \bar{\Omega}^+ ,$$

que, matricialmente fica, para o caso diagonal:

$$R_{ii}^\varphi(k^2 = m^2) = \sum_{l,m} \bar{\Omega}_{il} R_{lm}^\varphi(k^2 = m^2) \bar{\Omega}_{im} .$$

Substituindo o valor explícito de $R_{lm}^\varphi(k^2 = m^2)$ dado em (38), chegamos a seguinte fórmula:

$$R_{ii}^\varphi(k^2 = m^2) = \sum_l (\bar{\Omega}_{il})^2 > 0 . \quad (42)$$

Assim, dados que os resíduos (em m^2) dos propagadores dos

campos ϕ_i eram positivos, o mesmo acontecerá para aqueles dos ϕ_i , ou seja, se as partículas forem físicas em uma parametrização também o serão na outra.

Ao repetirmos este procedimento para o caso dos resíduos de propagadores fora da diagonal, obtemos que a positividade destes não é garantida ao passarmos de uma parametrização para outra.

2.c.1.β - Carga:

Vimos na seção 2.a.3 que a carga (na verdade temos várias cargas possíveis) depende da simetria interna (transformação que só altera os campos) que o nosso Lagrangiano possua. Apesar disso, a forma do quadri-vetor corrente que se conserva devido à existência de tal simetria é geral, independente do tipo desta e é dado por (20):

$$J^\nu [\phi_i, \partial_\mu \phi_i] = \frac{\partial \mathcal{L} [\phi_i, \partial_\mu \phi_i]}{\partial \partial_\nu \phi_m} \delta \phi_m, \quad (20)$$

onde temos esta, escrita na parametrização não-diagonal. O que estaremos interessados em mostrar então, será que essa quadri-corrente tem o mesmo valor nas duas diferentes parametrizações. Daí seguirá imediatamente que a carga obtida a partir da componente temporal de J^μ , geradora da transformação dada também não dependerá da parametrização considerada. Assim, devemos inicialmente escrever (20) em termos dos campos diagonais ϕ_i :

$$J^\nu [\omega, \Omega \partial_\mu \phi] = \frac{\partial \mathcal{L} [\Omega \phi, \Omega \partial_\mu \phi]}{\partial \partial_\mu \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \Omega_{ml} \delta \phi_l$$

onde usamos a regra da cadeia. Com a ajuda de (31), temos ainda:

$$J^\nu [\phi_i, \partial_\mu \phi_i] = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}} [\phi_i, \partial_\mu \phi_i]}{\partial \partial_\mu \phi_n} \delta_{km} \Omega_{nk}^{-1} \Omega_{ml} \delta \phi_l.$$

$$\tilde{J}^\nu [\phi_i, \partial_\mu \phi_i] = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}} [\phi_i, \partial_\mu \phi_i]}{\partial \partial_\mu \phi_n} \delta \phi_n. \quad (43)$$

E como \mathcal{L} é um escalar frente à esta transformação (isso significa que esta tem o mesmo valor, não a mesma forma), concluímos que J^ν é também um escalar.

$$J^\nu [\phi] = \tilde{J}^\nu [\tilde{\phi}]. \quad (44)$$

Vamos deixar mais claro o que estamos tentando dizer quando nos referimos ao mesmo valor da corrente nas duas parametrizações, analisando o que está acontecendo no setor quântico.

Inicialmente, tomemos a carga dada a partir de J^ν como [16]:

$$Q(t) = \int d^3 x J^0(x^\mu). \quad (45)$$

Quanticamente, esta grandeza será um operador, e sua ação se dará sobre os estados físicos, definidos no espaço de Hilbert da teoria. Suponha que tenhamos construído o estado de uma partícula carregada pela ação do operador de criação apropriado sobre o vácuo da teoria [16]. O operador carga ao ser aplicado

sobre esse estado dará como resultado o valor numérico da carga da partícula (autovalor do operador), ou seja:

$$\hat{Q}|1\rangle = q|1\rangle. \quad (46)$$

A transformação que estamos considerando (31) será representada quanticamente quando atuando sobre o operador de carga, via teorema de Wigner [21], da seguinte forma:

$$U(\Omega) Q U(\Omega)^{-1} = \tilde{Q}. \quad (47)$$

Assim, ao deixarmos a reparametrização atuar sobre (46), obteremos a expressão:

$$U(\Omega) Q U(\Omega)^{-1} U(\Omega)|1\rangle = U(\Omega) q U(\Omega)^{-1} U(\Omega)|1\rangle$$

ou

$$\tilde{Q}|1\rangle' = q|1\rangle' \quad (48)$$

depois das definições apropriadas.

Então, o que estávamos tentando dizer antes fica bem mais claro agora. Comparando (46) e (48) vemos que, apesar de termos alterado os estados, e a forma do operador Q ter se modificado, os autovalores, ou ainda, os possíveis resultados de medidas da carga considerada das partículas permanecem inalterados.

2.c.1.γ - Spin:

A outra propriedade intrínseca importante que devemos considerar na nossa análise é o spin. Mas, para o caso específico do campo escalar, este é nulo. No próximo capítulo teremos a oportunidade de trabalhar com o campo vetorial, o qual apresenta spin não-nulo. Só então estaremos aptos a

considerar explicitamente a independência de tal quantidade frente à reparametrização.

2.c.2 Propriedades Extrínsecas da Partícula

Vamos, agora, desviar a nossa atenção para a análise do comportamento frente à transformação dada por Ω , de quantidades associadas a deslocamentos das partículas no espaço-tempo. As quantidades selecionadas devido ao importante papel que desempenham na solução do sistema considerado são o Tensor-Momento-Energia e a Densidade de Momento Angular Total obtidos no item 2.a.

Observando o quadri-vetor corrente (10), constatamos que é possível levar a termo a análise das duas quantidades mencionadas de uma maneira unificada. Isto realmente acontece, pois a primeira parcela de J^ν ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i^\Theta} \delta \phi_i^\Theta,$$

já foi analisada no item anterior, onde demonstrou-se a sua independência em relação à parametrização considerada. Na segunda parcela encontramos o Tensor Momento-Energia e a variação das coordenadas do espaço-tempo. Assim, uma vez que a matriz Ω não atua nas coordenadas, se mostrarmos que o e^μ_ν é um escalar frente a essa transformação, mostraremos que o próprio J^ν também o é.

Nossa linha de raciocínio sera bastante analoga àquela utilizada na demonstração de que a carga é independente da parametrização considerada. Inicialmente, vamos escrever o tensor momento energia (12):

$$e^{\mu}_{\nu}[\varphi_i, \partial_{\alpha}\varphi_i] = \frac{\partial \mathcal{L}[\varphi, \partial_{\alpha}\varphi]}{\partial \partial_{\mu}\varphi_i} \partial_{\nu}\varphi_i - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}[\varphi, \partial_{\alpha}\varphi],$$

Em termos dos Campos Diagonais:

$$e^{\mu}_{\nu}[\Omega\phi, \Omega\partial_{\alpha}\phi] = \frac{\partial \mathcal{L}[\Omega\phi, \Omega\partial_{\alpha}\phi]}{\partial \partial_{\mu}\phi_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial \phi_i} \Omega_{i1} \delta_{\nu} \phi_i + \\ - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}[\Omega\phi, \Omega\partial_{\alpha}\phi] .$$

Assim, com a ajuda de (31), chegamos a forma final do e^{μ}_{ν} na parametrização diagonal:

$$\tilde{e}^{\mu}_{\nu}[\phi, \partial_{\alpha}\phi] = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}[\phi, \partial_{\alpha}\phi]}{\partial \partial_{\mu}\phi_n} \partial_{\nu}\phi_n - \delta^{\mu}_{\nu} \tilde{\mathcal{L}}[\phi, \partial_{\alpha}\phi] = \\ = e^{\mu}_{\nu}[\varphi, \partial_{\alpha}\varphi] . \tag{49}$$

E, usando novamente que o Lagrangiano é um escalar frente a essa transformação, obtemos que o Tensor Momento energia, bem como o Tensor Densidade de Momento Angular são independentes da específica parametrização em que estivessem escritos.

Chegamos, então, ao resultado que estávamos almejando pois, visto que as quantidades mais relevantes na descrição do sistema físico em estudo são independentes do tipo de campo que

usamos para representá-lo, é bem razoável dizer que essas diversas reparametrizações possíveis do campo são equivalentes entre si.

A este ponto, podemos nos perguntar: o que ocorre com as simetrias geradas por essas quantidades, cujos valores não se alteram ao passarmos da formulação não-diagonal para aquela diagonal? A existência da simetria ao passarmos de uma parametrização para a outra é garantida pela simples existência da carga nos dois setores. Mas, a existência não é tudo, pois não sabemos sobre que forma a simetria dada em uma parametrização irá se revelar em outra, ou seja, será que dado um grupo de simetria sobre o qual a nossa Lagrangiana é invariante na forma diagonal, esta também o será (pelo mesmo grupo de simetria) na forma não-diagonal?

Tentando responder a essa questão, estudaremos na próxima seção o que ocorre a grupos de simetrias internas, importantes como vimos na construção de cargas (intrínsecas da partícula) conservadas. Além disso, analisaremos também o caso de simetrias discretas, mais especificamente, CPT.

2.d ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE CERTAS SIMETRIAS FRENTE À REPARAMETRIZAÇÃO

2.d.1 Simetrias Internas [22]

Ao exigirmos que nossa Lagrangiana seja invariante frente a um certo grupo interno de transformações, surgirão condições sobre os coeficientes livres da teoria, sobretudo

sobre os parâmetros de massa. Tais condições, para o nosso caso, serão mais claramente determinadas ao considerarmos a Lagrangiana na forma diagonal. Assim, tomando o parâmetro de massa como um guia, mais especificamente seu grau de degenerescência, podemos considerar alguns tipos de transformações internas pertencentes ao conjunto dos operadores unitários.

Da Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\phi^+ \square \phi - \phi^+ m^2 \phi - \Gamma_{ABCD} \phi_A^* \phi_B \phi_C^* \phi_D . \quad (22)$$

Selecionamos o primeiro caso:

2.d.1.a - Grupo SU(N):

Na sua representação fundamental, é dada por uma matriz quadrada N-dimensional, unitária cujo determinante é um. Essas características fornecem um número de parâmetros livres para tal matriz igual a $(N^2 - 1)$. Ao exigirmos que (29) seja invariante frente a uma transformação pertencente a esse grupo não-Abeliano, vemos que:

A matriz diagonal de massa m^2 deve ser proporcional à identidade, ou seja,

$$m^2 = \bar{m}^2 \mathbb{1} , \quad (30)$$

onde $\bar{m}^2 \in \mathbb{R}$.

Isso indica que os autovalores da matriz de massa são N vezes degenerados, com isso as partículas escalares serão associadas ao mesmo parâmetro de massa.

Os coeficientes do termo de interação (constantes de

acoplamento) serão escritos como:

$$\Gamma_{ABCD} = \begin{cases} \Gamma_0 \delta_{AB} \delta_{CD} & \text{ou} \\ \Gamma_0 \delta_{AD} \delta_{BC} & \text{onde } \Gamma_0 \in \mathbb{R} . \end{cases} \quad (51)$$

Logo, se reescrevermos (29) sobre as condições (50) e (51) ela ficará:

$$\mathcal{L} = -\dot{\phi}^+ \square \phi - m^2 \phi^+ \phi - \Gamma_0 (\phi^+ \phi)^2. \quad (52)$$

E agora essa Lagrangiana é invariante frente à transformação $U(\omega)$ ($U^+ U = \mathbb{I}$) pertencente ao grupo $SU(N)$. De forma explícita, os campos são transformados pelo operador $U(\omega)$, gerando os novos campos ϕ' , da seguinte forma:

$$\phi' = U(\omega)\phi . \quad (53)$$

Estes grupos são bastante importantes em teoria de campos. Dois exemplos notáveis de sua utilização são: o Modelo de Weinberg-Salam e a Cromodinâmica Quântica. No primeiro modelo, o qual é utilizado na descrição unificada das interações eletromagnéticas e fracas, encontramos no setor de matéria uma simetria $SU(2)$. Já no caso da QCD, que é a teoria mais aceita para descrição das interações entre os quarks, apresenta também nesse setor uma invariância frente ao $SU(3)$.

Uma outra forma de representarmos $U(\omega)$, ou qualquer grupo de Lie, é dada por:

$$U(\omega) = e^{i\omega_a G^a}, \quad a = 1, 2, \dots, N^2 - 1, \quad (54)$$

onde ω_a são os $(N^2 - 1)$ parâmetros do Grupo e G^a são matrizes Hermitianas, chamadas geradores. Agora podemos introduzir uma

importante propriedade de tais grupos, que é a dita álgebra do grupo de Lie:

$$[G_a, G_b] = i f_{abc} G_c, \quad (55)$$

e aí introduzimos f_{abc} , a constante de estrutura do Grupo. Essa relação (55) é muito importante na construção de representações não-fundamentais do Grupo; pois nos dá uma maneira de determinarmos os Geradores em tais situações. Como havíamos visto anteriormente, essa simetria dá origem, via teorema de Noether, à N^2-1 quadri-vetores corrente, cujo quadri-divergente é nulo. Tais quadri-vetores são dados a partir de (20),

$$J_a^\mu [\phi] = i(\partial^\mu \phi^+ G_a \phi - \phi^+ G_a \partial^\mu \phi). \quad (56)$$

E suas componentes temporais dão origem a N^2-1 cargas conservadas. Depois de vistas várias propriedades importantes da simetria considerada, na parametrização diagonal, vamos ver o que ocorre com estas no setor não-diagonal.

O primeiro passo será a determinação da transformação de simetria no novo setor, que certamente está relacionada com $U(\omega)$ por intermédio da matriz Ω . Assim partindo de (53) e aplicando a reparametrização (31), chegamos à formula:

$$\varphi' = \Omega U(\omega) \Omega^{-1} \varphi$$

a qual nos indica de forma indubitável qual é a nova forma do operador de simetria. Definimos então:

$$T(\bar{\omega}) \equiv \Omega U(\omega) \Omega^{-1} \Rightarrow \varphi' = T(\bar{\omega}) \varphi. \quad (57)$$

Percebemos imediatamente uma característica bastante interessante de $T(\bar{\omega})$: ela não é unitária, contrariamente à $U(\omega)$. Isso ocorre pois Ω , como já tínhamos visto, também não

apresenta essa propriedade. Apesar disso, os parâmetros não são alterados nem em número, nem em forma. Mostraremos isso ao tentarmos escrever a forma exponencial para o operador $T(\bar{\omega})$, com isso conseguiremos como resultado secundário a expressão para os novos geradores, em termos dos anteriores e da matriz Ω .

Começamos escrevendo $T(\bar{\omega})$ com a ajuda de (57) e (54),

$$T(\bar{\omega}) = \Omega e^{i\bar{\omega} G^a} \Omega^{-1},$$

reescreveremos a relação acima, substituindo a exponencial por sua expansão em série e introduzindo matrizes identidade quadradas N-dimensionais de forma apropriada:

$$T(\bar{\omega}) = \mathbb{1} + i\omega_a \Omega G^a \Omega^{-1} + i\omega_a i\omega_b (\Omega G^a \Omega^{-1} \Omega G^b \Omega^{-1}) + \dots$$

E sem dúvida isso também é:

$$T(\bar{\omega}) = e^{i\bar{\omega} H^a} \quad \text{onde} \quad H^a \equiv \Omega G^a \Omega^{-1}. \quad (58)$$

Vemos, assim, que os parâmetros $\bar{\omega}$ são idênticos aos iniciais ω , e obtemos em (58) a relação entre os novos e antigos geradores. Uma vez que $T(\omega)$ dá origem a uma simetria da teoria no setor não-diagonal (isso é demonstrado de forma explícita no apêndice do capítulo), é de se esperar o aparecimento de quadri-correntes. O resultado obtido acima relativo aos novos parâmetros nos indica que o número de tais quadri-correntes é o mesmo que no caso da parametrização diagonal. Elas podem ser obtidas de duas maneiras: a primeira é usando o Teorema de Noether para a simetria da Lagrangiana não-diagonal sobre $T(\omega)$, e a segunda é aplicando a transformação que relaciona os campos

na parametrização não-diagonal com aqueles diagonais, sobre (56). Os resultados obtidos serão idênticos e chegaremos a seguinte quadri-corrente:

$$J_a^\mu [\varphi] = i (\partial^\mu \varphi^+ K H_a \varphi - \varphi^+ H_a^+ K \partial^\mu \varphi), \quad (53)$$

na qual observamos explicitamente o fato dos novos geradores, contrariamente aos anteriores não serem Hermiteanos. Como último resultado, iremos mostrar que a álgebra do Grupo não se altera. Em outras palavras, se calcularmos a álgebra do Grupo $T(\omega)$ (usando para isso os novos geradores H_a), chegaremos às mesmas constantes de estrutura $f_{\alpha\beta\gamma}$, obtida para $U(\omega)$. Logo, tomando (55) e aplicando dos dois lados da expressão a transformação que nos leva dos G_a para os H_a , ficaremos com:

$$\Omega [G_a, G_b] \Omega^{-1} = \Omega (f_{abc} G_c) \Omega^{-1},$$

e depois da introdução conveniente de algumas matrizes identidade.

$$[H_a, H_b] = i f_{abc} H_c, \quad (60)$$

como desejávamos.

Concluimos, assim, que o grupo de simetria se preserva de forma generalizada sob reparametrizações. É certo que $T(\omega)$ não pertence a $SUC(N)$, mas o número de parâmetros, as cargas geradas (como já tínhamos visto em 2.c.1.β, estas não se alteram) e a álgebra em termos dos novos geradores são preservados. Isto nos permite falar sobre uma preservação de $U(\omega)$ sob a ação de Ω .

2.d.1.6 - Simetria $[U(1)]^N$:

Para deixarmos mais claro o significado dessa simetria, tomemos um campo qualquer ϕ_i na parametrização diagonal. A esse campo aplicamos uma transformação do grupo Abelian $U(1)$, como em (3), com uma carga q_j . Em relação a essa transformação, os demais campos diferentes daquele escolhido terão carga nula. Repetiremos esse processo para os campos restantes, introduzindo assim mais $N-1$ transformações do grupo $U(1)$.

Em relação ao multiplete de N campos diagonais, essas transformações podem ser representadas por um operador unitário $U(\omega)$, como no caso anterior. A grande diferença aparecerá quando considerarmos o número de parâmetros, pois na simetria que estamos analisando agora temos N deles, um para cada $U(1)$ individual introduzido.

Na representação exponencial esse operador $U(\omega)$ se escreve:

$$U(\omega) = e^{i\omega_a Y_a} \quad a = 1,2,\dots,N \quad (61)$$

onde agora os geradores são matrizes quadradas N -dimensionais, Hermiteanas, cujos elementos são dados por:

$$(Y_a)_{aa} = q_a, \quad \text{os demais são nulos.} \quad (62)$$

Podemos ainda derivar uma representação matricial bem definida para $U(\omega)$. Esse processo nos leva a uma matriz diagonal N -dimensional, cujos seus elementos serão os operadores de $U(1)$ correspondentes a cada campo aos quais estão associados as

cargas não nulas. Escrevendo de forma explícita teremos:

$$U_{jl}(\omega) = e^{iq\omega_j} \delta_{jl}, \quad j,l = 1,2,\dots,N. \quad (63)$$

Exigindo que essa seja uma simetria de (29), descobrimos que esse é o caso oposto no que diz respeito à degenerescência da matriz de massa. A condição que temos é que na verdade não há nenhuma condição, ou seja, todos os parâmetros de massa podem ser diferentes. Esse caso nos permite começar o modelo com N campos escalares complexos cujas massas associadas são distintas. Isso pode ser representado da seguinte forma:

$$m_{ij}^2 = m_i^2 \delta_{ij} \quad \text{onde } m_i \neq m_j \quad \text{se } i \neq j, \quad i,j = 1,2,\dots,N. \quad (64)$$

Já para as constantes de acoplamento, as condições são idênticas as do caso anterior, logo dadas por (51).

Como vimos, a transformação que estamos considerando apresenta N parâmetros, assim devido a invariância do nosso Lagrangiano frente a essa simetria obteremos N quadri-vetores corrente conservadas, dadas por:

$$J_a^\mu[\phi] = i(\partial^\mu \phi^+ Y_a \phi - \phi^+ Y_a \partial^\mu \phi). \quad (65)$$

Uma outra diferença em relação ao caso anterior é a ausência da álgebra do Grupo a qual ligava os geradores entre si. Isso ocorre pois no presente caso o Grupo considerado é abeliano, daí o comutador entre dois geradores é nulo.

A seqüência natural do nosso estudo da simetria $[U(1)]^N$ considerada é a passagem para a parametrização não-diagonal dos campos. Analisando atentamente o presente

caso, vemos que o tratamento usado na simetria $SU(N)$ é completamente aplicável aqui, guardada as devidas diferenças. Dessa forma obteremos a nova transformação de simetria $T(\omega)$:

$$T(\omega) = e^{i\omega_a Q_a} \quad \text{onde} \quad Q_a = \Omega Y_a \Omega^{-1} \quad (66)$$

e os N parâmetros não foram alterados.

Além das novas quadri-correntes conservadas,

$$J_a^\mu[\varphi] = i(\partial^\mu \varphi^+ K Q_a \varphi - \varphi^+ Q_a^+ K \partial^\mu \varphi) . \quad (67)$$

Devido a semelhança no tratamento dos dois casos, as conclusões tiradas para o primeiro também são aplicáveis aqui diretamente:

$$\begin{aligned} \text{2.d.1.}\gamma - \text{Simetria} \quad & SU(N_1) \otimes SU(N_2) \otimes \dots \otimes SU(N_p) \otimes \\ & \otimes [U(1)]^k: \end{aligned}$$

$$N_1 + N_2 + \dots + N_p + K = N .$$

Essa simetria é, na verdade, uma combinação daquelas dos itens anteriores. A transformação em sua forma matricial é dada por uma matriz quadrada N -dimensional unitária, composta por $p \times K$ subespaços de dimensões variadas, tal que a dimensão total deve ser igual à N . Em p desses subespaços, de dimensões maiores que 1, atuam os grupos $SU(N_i)$ distintos e nos K restantes com dimensões igual à unidade agem os $U(1)$.

A determinação de todas as propriedades de cada um dos grupos envolvidos nessa simetria, tais como: quadri-correntes conservadas, geradores, álgebras, etc...; pode ser feita em analogia aos itens 2.d.1.α (para os $SU(N_i)$) e 2.d.1.β (os $U(1)$), bem como a passagem da parametrização diagonal para

aquela não-diagonal. Só queremos ressaltar que essa simetria nos possibilita a introdução de conjuntos distintos de campos, tais que as massas associadas aos campos de um dado conjunto são idênticas entre si, enquanto que para conjuntos diferentes encontramos massas diversas. Assim, essa simetria é um estágio intermediário entre os casos anteriores no que se refere à degenerescência da matriz de massa.

2.d.2 Simetrias Discretas (CPT) [22]

Nesta seção iremos estudar o comportamento, frente à reparametrização, das simetrias discretas: Inversão Espacial (Paridade), Conjugação de Carga, Inversão Temporal e, finalmente, todas as três aplicadas de uma só vez, a chamada Reflexão Forte (CPT). De forma mais precisa iremos, inicialmente, introduzir as modificações sofridas pelos campos de uma dada parametrização frente às transformações mencionadas acima. De posse desse resultado, transformaremos os campos (com a ajuda da matriz Ω), introduzindo assim uma nova base, em relação aos quais reescreveremos nossa teoria. Finalmente, obteremos a nova forma das simetrias discretas nessa parametrização, em função daquela obtida na parametrização original e de Ω , responsável pela rotação dos campos.

A existência de tais simetrias em uma dada teoria é um fato bastante importante, pois a partir delas podemos introduzir regras de seleção que limitariam os decaimentos possíveis. Como exemplos de teorias que são invariantes frente

a essas transformações discretas temos: o Eletromagnetismo, a Gravitação, etc... Assim, o que devemos esperar é que um dado processo envolvendo a interação eletromagnética evolua da mesma forma que sua imagem no espelho (paridade), ou no sentido inverso do fluxo normal do tempo (IT), ou ainda, que seja o mesmo, não importando se estamos descrevendo interações entre partículas ou antipartículas (CC). Na verdade, podemos ainda considerar transformações formadas pela combinação de C, P e T, duas a duas, ou como já mencionamos, todas juntas CPT. Nem todos os processos conhecidos na Natureza satisfazem tais simetrias discretas, aqueles envolvendo a interação fraca violam explicitamente a paridade, além da transformação conjunta CP.

No nosso estudo, exigiremos que nosso modelo seja invariante frente às simetrias discretas consideradas em uma dada parametrização, e analisaremos o que ocorre com essa invariância depois de termos transformado os campos. A parametrização que escolheremos como ponto de partida será aquela em que o modelo toma sua forma diagonal. Podemos justificar essa escolha a partir da observação das parcelas que compõem a Lagrangiana na parametrização não-diagonal. Estas são do tipo (2):

$$G_{ij} \varphi_i \varphi_j, \quad \Theta_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\delta.$$

Logo, ao exigirmos que o modelo escrito dessa forma seja invariante frente às transformações discretas, estaremos impondo restrições aos elementos das matrizes-coeficiente. Basicamente, devido ao fato dos campos independentes que

compõem cada um dos termos acima poderem ter diferentes naturezas em relação à C, P e T (escalares ou pseudo-escalares) ficam proibidos os coeficientes que misturem tais campos.

É certo também que, mesmo trabalhando na parametrização diagonal, teremos que impor uma restrição sobre o coeficiente Γ_{ABCD} (29). Este será reescrito de tal forma que tenhamos os quatro campos presentes no termo de interação iguais dois a dois como em (51).

Assim, a Lagrangiana que servirá como ponto de partida é escrita:

$$\mathcal{L} = -\phi^+ \square \phi - \phi^+ m^2 \phi - \Gamma_0 (\phi^+ \phi)^2 . \quad (68)$$

A primeira das transformações discretas que iremos analisar é a paridade. Então, devido a nossa escolha, os campos $\phi_i(x)$ sofrerão as seguintes modificações [15]:

$$\phi(x) \xrightarrow{P} \phi'(x') = \eta_P \phi(x) , \quad (69)$$

onde η_P é uma matriz quadrada N-dimensional diagonal cujos seus elementos podem assumir os valores ± 1 . O + para o caso de termos o campo associado a esse elemento um escalar e o - para um campo pseudo-escalar. Temos ainda a seguinte modificação do quadri-vetor derivada ∂_μ [15]:

$$\partial_\mu \xrightarrow{P} \partial'_\mu = \partial^\mu . \quad (70)$$

Usando as leis de transformação (69) e (70) é imediato mostrar que (68) não se altera (observe que $[m^2, \eta_P] = 0$, visto que ambas são matrizes diagonais), daí

dizemos que nessa parametrização o modelo é invariante frente a inversão espacial. Vejamos, a seguir, o que ocorre ao rodarmos os campos.

Na forma não-diagonal, obtida da diagonal por aplicação aos campos $\phi(x)$ da matriz Ω (31), teremos novas leis de transformações obtidas a partir de (69). Elas ficam na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \Omega\phi(x) \Rightarrow \varphi'(x') = \Omega\phi'(x') = \Omega\eta_p\phi(x) \Rightarrow \\ \varphi'(x') = \Omega\eta_p\Omega^{-1}\varphi(x) , \end{aligned}$$

ou ainda, se definirmos:

$$\mathcal{P} \equiv \Omega\eta_p\Omega^{-1} \quad \text{teremos} \quad \varphi'(x') = \mathcal{P}\varphi(x) . \quad (71)$$

Uma vez definida a modificação que os campos não-diagonais sofrem sobre a inversão espacial, vejamos se esta continua sendo uma simetria do modelo. Isso será feito tomando como ponto de partida (2), e analisando separadamente cada uma de suas parcelas:

$$\text{Termos cinético - } (\partial_\mu\varphi)^+ K(\partial^\mu\varphi) \xrightarrow{P} (\partial'_\mu\varphi')^+ K(\partial'^\mu\varphi') =$$

$$\text{aplicando (71),} \quad = \partial'_\mu\varphi'^+ P^+KP \partial'^\mu\varphi.$$

Assim, para que tenhamos invariância devemos mostrar que:

$$\mathcal{P}^+K\mathcal{P} = (\Omega^+)^{-1} \eta_p^+ \Omega^+ K \Omega \eta_p \Omega^{-1} = K . \quad (72)$$

Mas, observando (32) vemos que isso pode ser reescrito como:

$$\mathcal{P}^+K\mathcal{P} = (\Omega^+)^{-1} \eta_p^2 \Omega^{-1} .$$

Da definição de η_p tiramos que $\eta_p^2 = 0$, daí usando novamente (32), concluímos pelo resultado (72).

Termo de massa - $\varphi^+ M^2 \varphi \xrightarrow{P} \varphi'^+ M^2 \varphi' \stackrel{(71)}{=}$

$$= \varphi^+ \mathcal{P}^+ M^2 \mathcal{P} \varphi = \varphi^+ (\Omega^{-1})^+ \eta_p^+ \Omega^+ M^2 \Omega \eta_p \Omega^{-1} \varphi . \quad (76)$$

Devemos mostrar que a expressão acima se reduz a $\varphi^+ M^2 \varphi$, para garantir a invariância desse termo. Para isso, usemos mais uma vez a expressão (32),

$$\varphi^+ \mathcal{P}^+ M^2 \mathcal{P} \varphi = \varphi^+ (\Omega^{-1})^+ \eta_p^+ m^2 \eta_p \Omega^{-1} \varphi, \quad \text{ou ainda}$$

$$= \varphi^+ (\Omega^{-1})^+ m^2 \Omega^{-1} \varphi \stackrel{(32)}{=} \varphi^+ M^2 \varphi ,$$

o que demonstra nossas expectativas.

Termo de Interação -

$$\Lambda_{abcd} \varphi_a^* \varphi_b \varphi_c^* \varphi_d \xrightarrow{P} \Lambda_{abcd} \varphi_a'^* \varphi_b' \varphi_c'^* \varphi_d' \stackrel{(71)}{=}$$

$$= \Lambda_{abcd} \mathcal{P}_{a\alpha}^* \mathcal{P}_{b\beta} \mathcal{P}_{c\gamma}^* \mathcal{P}_{d\delta} \varphi_\alpha^* \varphi_\beta \varphi_\gamma^* \varphi_\delta . \quad (77)$$

vamos tentar mostrar que esse termo não é nada mais, nada menos do que o termo de interação inicial. Assim, continuemos utilizando (71) para introduzir Ω :

$$\begin{aligned} (77) &= \Lambda_{abcd} \left[\Omega_{ae}^* (\eta_p)_{ef} (\Omega^{-1})_{f\alpha}^* \right] \left[\Omega_{bg} (\eta_p)_{gh} (\Omega^{-1})_{H\beta} \right] \times \\ &\times \left[\Omega_{ci}^* (\eta_p)_{ij} (\Omega^{-1})_{j\gamma}^* \right] \left[\Omega_{dk} (\eta_p)_{kl} (\Omega^{-1})_{l\delta} \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta \varphi_\gamma^* \varphi_\delta . \end{aligned}$$

Agrupando os termos convenientemente, ficaremos com:

$$(77) = (\Lambda_{abcd} \Omega_{ae}^* \Omega_{bg}^* \Omega_{ci}^* \Omega_{dk}^*) (\eta_p)_{ef} (\eta_p)_{gh} (\eta_p)_{ij} (\eta_p)_{kl} \times \\ \times \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta}^* (\Omega^{-1})_{j\gamma}^* (\Omega^{-1})_{i\delta}^* \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^* .$$

De (32) vemos que isso pode ser escrito ainda em termos de Γ_{egik} , como:

$$(77) = \Gamma_o \delta_{eg} \delta_{ik} (\eta_p)_{ef} (\eta_p)_{gh} (\eta_p)_{ij} (\eta_p)_{kl} \times \\ \times \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta}^* (\Omega^{-1})_{j\gamma}^* (\Omega^{-1})_{i\delta}^* \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^* . \\ = \Gamma_o \delta_{fh} \delta_{jl} \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta}^* (\Omega^{-1})_{j\gamma}^* (\Omega^{-1})_{i\delta}^* \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^* ,$$

onde usamos os δ_{eg} e δ_{ik} além da forma explícita de η_p .

$$(77) = \Gamma_o (\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{f\beta}^* (\Omega^{-1})_{j\gamma}^* (\Omega^{-1})_{j\delta}^* \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$\stackrel{(32)}{=} \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^* ,$$

verificando, assim, a preservação desse termo e, finalmente, de todo o modelo frente à transformação de paridade nessa parametrização.

Considere, agora, a Conjugação de Carga, na forma diagonal da Teoria (68), os campos se modificam como [15]:

$$\phi(x) \xrightarrow{C} \phi'(x') = \eta_o \phi^*(x), \quad (78)$$

onde η_c é definida de forma análoga à η_f . Temos ainda que:

$$\phi^+(x) \xrightarrow{C} \phi'^+(x') = \phi^l(x)\eta_c. \quad (79)$$

E, finalmente [15]:

$$\partial_\mu \xrightarrow{C} \partial'_\mu = -\partial_\mu. \quad (80)$$

É imediato verificar a invariância de (68) frente a estas transformações. Assim, podemos passar para a nova parametrização através de Ω (31), e ver como (78) e (79) se reescrevem para os novos campos $\varphi(x)$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \Omega\phi(x) \Rightarrow \varphi'(x') = \Omega\phi'(x') = \Omega\eta_c\phi^*(x) \Rightarrow \\ \varphi'(x') = \Omega\eta_c(\Omega^{-1})^* \varphi(x) \end{aligned}$$

ao definirmos,

$$\mathcal{U} \equiv \Omega\eta_c(\Omega^{-1})^*,$$

ficamos com:

$$\varphi'(x') = \mathcal{U}\varphi(x). \quad (81)$$

E ainda,

$$\varphi'^+(x') = \varphi^l(x)\mathcal{U}^+ = \varphi^l(x)(\Omega^{-1})^l\eta_c\Omega^+. \quad (82)$$

O passo seguinte é a demonstração de que na nova parametrização, a Conjugação de Cargas continua sendo uma simetria do modelo, isso é feito com a ajuda de (32), (80) e (81). Mas não faremos isso explicitamente, nem para este, nem para os demais casos devido a estreita analogia entre tais procedimentos e aquele empregado no caso anterior. Adiantaremos, então, que em todos os casos a simetria inicial é mantida depois da rotação dos campos. Faremos então, agora,

um quadro do comportamento das duas transformações restantes frente à reparametrização colocando apenas resultados obtidos, como nos casos já estudados.

Inversão Temporal - *

Modificação nos Campos Diagonais [15]:

$$\phi(x) \xrightarrow{T} \phi'(x') = \eta_T \phi(x) . \quad (83)$$

Modificação no Quadri-Vetor Derivada [15]:

$$\partial_\mu \xrightarrow{T} \partial'_\mu = \partial^\mu . \quad (84)$$

Modificação nos Campos Não-Diagonais:

$$\phi(x) \xrightarrow{T} \phi'(x') = \mathcal{I} \phi(x) \quad \text{onde} \quad \mathcal{I} \equiv \Omega^* \eta_T \Omega^{-1} . \quad (85)$$

Reflexão Forte* (CPT) -

Modificação nos Campos Diagonais [15]:

$$\phi(x) \xrightarrow{CPT} \phi'(x') = \eta_P \eta_C \eta_T \phi^*(x) . \quad (86)$$

Modificação no Quadri-Vetor Derivada [15]:

$$\partial_\mu \xrightarrow{CPT} \partial'_\mu = -\partial_\mu . \quad (87)$$

Modificação nos Campos Não-Diagonais:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) \xrightarrow{CPT} \phi'(x') = \mathcal{N} \phi^*(x) \\ \text{onde } \mathcal{N} \equiv \Omega^* \eta_P \eta_C \eta_T (\Omega^{-1})^* \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

(*) Como parte da transformação, devemos tomar o complexo conjugado de quantidades imaginárias presentes em nossa Lagrangiana.

Na seqüência do trabalho faremos uma revisão de algumas das propriedades estudadas e obtidas para o caso geral do modelo, ou seja, aquele contendo um número finito, mas qualquer N de campos. Para tal, desenvolveremos um exemplo de modelo contendo um número especificado de campos. Nele poderemos ver mais claramente, pois construiremos de forma explícita os resultados obtidos até aqui.

2.e EXEMPLO

A partir de agora, vamos obter alguns dos resultados vistos anteriormente para um modelo em que o número de campos escalares é bem definido, neste caso, dois campos.

O primeiro passo consiste em fornecermos a Lagrangiana na parametrização não-diagonal:

$$\mathcal{L} = -\dot{\varphi}^+ \square K \varphi - \varphi^+ M^2 \varphi - \frac{\lambda}{4} (\varphi^+ \varphi)^2 - \frac{\Lambda}{4} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^2, \quad (89)$$

onde:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \alpha/2 & i\beta/2 \\ -i\beta/2 & \alpha/2 \end{pmatrix}$$
$$M^2 = \gamma \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{4} (m^2 + \mu^2) \quad (89.a)$$

e λ, Λ são parâmetros adimensionais não negativos.

A passagem para a forma diagonal é feita como no item

2.b. com a ajuda da matriz Ω dada em (30). Nesse caso em estudo, suas matrizes componentes são escritas:

$$\begin{aligned}
 S \begin{pmatrix} \text{matriz que diagonaliza} \\ \text{o termo cinético} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\
 \tilde{K}^{1/2} \begin{pmatrix} \text{matriz que normaliza} \\ \text{o termo cinético} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_+} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_-} \end{pmatrix} \\
 R \begin{pmatrix} \text{matriz que diagonaliza} \\ \text{o termo de massa} \end{pmatrix} &\equiv S, \text{ este é um resultado bastante especial desse caso.}
 \end{aligned} \tag{90}$$

Logo, juntando os resultados acima, obteremos como expressão para Ω :

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_+} & 1/\sqrt{\lambda_-} \\ -i/\sqrt{\lambda_+} & i/\sqrt{\lambda_-} \end{pmatrix} \tag{91}$$

e $\lambda_+ = \alpha + \beta, \quad \lambda_- = \alpha - \beta,$

são os autovalores da matriz cinética.

E a aplicação dela em (89) nos leva para a nova parametrização, onde o modelo será escrito em termos de novos campos,

$$\mathcal{L} = -\dot{\phi}^+ \square \phi - \phi^+ m^2 \phi - \omega (\phi^+ \tilde{K}^{-1} \phi)^2 - \frac{\Lambda}{16\lambda_+ \lambda_-} (\phi_1^* \phi_2 + \phi_2^* \phi_1)^2 \tag{92}$$

esses campos são relacionados aos antigos por:

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_+} & i\sqrt{\lambda_+} \\ \sqrt{\lambda_-} & -i\sqrt{\lambda_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \Omega^{-1} \varphi. \tag{93}$$

Em (92) temos ainda o aparecimento das matrizes diagonalizadas, tanto de massa quanto o quadrado da inversa daquela que normaliza o termo cinético, esta última dada em (90).

$$m^2 = \left(\frac{m^2 + \mu^2}{2} \right) \begin{bmatrix} \lambda_- / \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_+ / \lambda_- \end{bmatrix}; \quad \tilde{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_+ & 0 \\ 0 & 1/\lambda_- \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\text{e o parâmetro real } \omega = \frac{\lambda_-}{4} + \frac{\lambda_+}{16} .$$

É importante observarmos que os autovalores de m^2 , correspondem as massas das partículas descritas pelos campos do modelo (independentemente da parametrização).

Como tínhamos visto, ainda no item 2.b. os parâmetros livres da teoria (coeficientes dos termos de massa, cinético, etc...) sofrem certas restrições (34) e (35), as quais podem ser determinadas explicitamente no caso em estudo. Isso nos leva, então, a:

$$\alpha > \beta \quad \text{e} \quad m^2 + \mu^2 > 0 . \quad (95)$$

Na seqüência do exemplo, iremos determinar de forma explícita o que ocorre a uma simetria interna global ao passarmos de uma parametrização para outra. Iremos considerar o caso de uma simetria frente a um grupo não-Abeliano, o SU(2) e a um outro Abeliano, o U(1). O nosso estudo seguirá estreitamente os passos dados no item 2.d.1, começando como lá com o grupo não-abeliano.

Considerando como ponto de partida a Lagrangiana (92), ao exigirmos que esta seja invariante frente a SU(2), ganhamos as condições (50) e (51) sobre os parâmetros livres do

modelo. No nosso caso, estas se escrevem como:

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \Lambda = 0. \quad (96)$$

daí tirarmos imediatamente que:

$$m^2 = \bar{m}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{onde } \bar{m}^2 = (m^2 + \mu^2)/2, \quad (97)$$

$$\text{e finalmente } \omega = \frac{\lambda}{4}.$$

Com isso nosso modelo de partida fica agora com a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\phi^\dagger \square \phi - \bar{m}^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\omega}{\alpha^2} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (98)$$

o qual é invariante de SU(2). A forma exponencial de representarmos o grupo em estudo é facilmente obtida de (54) ao introduzirmos os geradores. Estes são, neste caso em número de três, dados simplesmente pelas matrizes de Pauli:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

E a álgebra do grupo é caracterizada pela constante de estrutura totalmente anti-simétrica ε_{abc} , definida como:

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & \text{para } a=1, b=2, c=3 \text{ e qualquer permutação par.} \\ -1 & \text{para qualquer permutação ímpar.} \\ 0 & \text{quando quaisquer dois índices são iguais.} \end{cases} \quad (100)$$

Dai tiramos a expressão (55) aplicada ao nosso exemplo,

$$[G_a, G_b] = i\epsilon_{abc} G_c \quad \text{onde } a, b, c = 1, 2 \text{ e } 3. \quad (101)$$

As três correntes conservadas, obtidas via teorema de Noether, são dadas a partir da substituição da forma explícita dos geradores (99) do SU(2) em (56). Assim, a título de demonstração obteremos $J_2^\mu[\phi]$, com a ajuda de G_2 .

$$J_2^\mu[\phi] = - \left\{ (\partial^\mu \phi_2^*) \phi_1 - (\partial^\mu \phi_1^*) \phi_2 - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1 + \phi_1^* \partial_\mu \phi_2 \right\}. \quad (102)$$

Vejamos agora o que ocorre na outra parametrização. O resultado mais importante é, sem dúvida, a obtenção da nova expressão dos geradores, pois com esse resultado poderemos construir: a forma que a transformação toma na nova parametrização (58), as novas correntes (59) e a álgebra em termos desses novos geradores (60).

Dessa forma, ao introduzirmos Ω dada em (91) (sujeita as condições (97)) e os geradores (99), em (58), os novos geradores surgirão naturalmente como:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = G_3, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -G_1$$

$$\text{e } H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -G_2. \quad (103)$$

É com um certo desapontamento que constatamos que com o nosso exemplo não seremos capazes de mostrar explicitamente a perda da unitariedade do SU(2) ao rodarmos os campos, com a ajuda de Ω . Este fato decorre de (103), pois visto que os novos

geradores são hermitianos. imediatamente concluímos que $T(\omega)$ dada em (58), será unitária.

A demonstração de que a álgebra desses novos geradores é a mesma dos iniciais é bem simples, pois como vimos em (103) existe uma relação íntima entre os geradores nas duas parametrizações. E como último resultado calcularemos $J_2^\mu[\varphi]$, a partir de (59), a fim de compararmos com (102). Assim, com a ajuda de H_2 e lembrando das condições (97), obtemos:

$$J_2^\mu[\varphi] = -i\alpha \left\{ (\partial^\mu \varphi_1^*) \varphi_2 + (\partial^\mu \varphi_2^*) \varphi_1 - \varphi_1^* \partial^\mu \varphi_2 - \varphi_2^* \partial^\mu \varphi_1 \right\}. \quad (104)$$

Consideremos agora o caso de uma simetria global $[U(1)]^2$, de tal forma que neste caso tenhamos dois parâmetros e a transformação seja dada por:

$$U(\omega) = e^{i\omega Y_a}, \quad a = 1,2 \quad (105)$$

onde os geradores são:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}. \quad (105.a)$$

Dessa forma tiramos a representação matricial de $U(\omega)$ que se escreve:

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\omega q_1} & 0 \\ 0 & e^{i\omega q_2} \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Levando em conta as condições obtidas ao impormos a invariância

de (89) frente ao grupo considerado:

$$\Lambda = 0, \quad m^2 \text{ e } \tilde{K} \text{ quaisquer matrizes diagonais.}$$

Obtemos a seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\dot{\phi}^+ \square \phi = \dot{\phi}^+ m^2 \phi - \omega (\phi^+ \tilde{K}^{-1} \phi)^2, \quad (107)$$

onde os coeficientes das parcelas envolvidas são dados em (94). Vemos então claramente que, nesse caso, podemos começar com partículas (associadas aos campos considerados) de massas distintas. As correntes conservadas serão obtidas diretamente da aplicação de (65), ao valor dos geradores (105.a),

$$J_a^\mu[\phi] = iq_a (\partial^\mu \phi_a^* \phi_a - \phi_a^* \partial^\mu \phi_a). \quad (108)$$

Na outra parametrização ficaremos com novos geradores dados por (66), explicitamente estes são:

$$Q_1 = \frac{1}{2} q_1 \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{1}{2} q_2 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (109)$$

de tal forma que eles são Hermiteanos, e com isso $T(\omega)$ é também unitária, assim como $U(\omega)$. Ao aplicarmos os geradores em (66) poderemos construir a transformação $T(\omega)$ em termos dos elementos do grupo $U(1)$, considerados na parametrização diagonal. Logo ela ficará:

$$T(\omega) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\omega q_1} + e^{i\omega q_2} & i(e^{i\omega q_1} - e^{i\omega q_2}) \\ -i(e^{i\omega q_1} - e^{i\omega q_2}) & e^{i\omega q_1} + e^{i\omega q_2} \end{bmatrix}. \quad (110)$$

A qual se reduziria a (106) no caso de termos somente um $U(1)$ com a mesma carga associada a ambos os campos. Para comple-

tarmos o estudo relativo à simetria sobre o grupo abeliano, obteremos as correntes (67) na parametrização não-diagonal:

$$J_{\mu}^H(\phi) = \frac{i}{4} q_1 (\alpha \pm \beta) \left\{ \partial^{\nu} \phi_{1,1}^{*} + \partial^{\nu} \phi_{2,2}^{*} \pm (\partial^{\nu} \phi_{1,2}^{*} - \partial^{\nu} \phi_{2,1}^{*}) - c.c. \right\}$$

as quais podemos comparar com aquelas dadas em (108).

Esse foi o nosso último resultado com respeito ao estudo de simetrias desse modelo-exemplo, frente à transformações contínuas. Para encerrar o nosso pequeno exercício, consideraremos as modificações sofridas pelas reflexões C,P,T e CPT, ao mudarmos a parametrização em que estamos escrevendo o modelo.

Observando o que foi feito no item 2.d.2, vemos que inicialmente devemos fornecer a Lagrangiana apropriada (levando em conta o fato de não podermos ter parcelas contendo diferentes campos) no setor diagonal. Esta será dada por (107). Depois disso forneceremos as transformações dos campos nesse setor. Finalmente, construiremos, a partir das equações (71), (81), (85) e (88) a forma das reflexões na parametrização não-diagonal, ou seja, a modificação nos campos utilizados nesse setor. Esses resultados serão mostrados em forma de tabela para facilitar a visualização.

Modificação dos Campos no Setor Diagonal

Transformação de Paridade:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^P & 0 \\ 0 & \eta_2^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \phi'(x') = \eta^P \phi(x)$$

Conjugação de Carga:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^C & 0 \\ 0 & \eta_2^C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \phi'(x') = \eta^C \phi^*(x)$$

Inversão Temporal:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^T & 0 \\ 0 & \eta_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \phi'(x') = \eta^T \phi(x)$$

Reflexão Forte (CPT):

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^{\text{CPT}} & 0 \\ 0 & \eta_2^{\text{CPT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \phi'(x') = \eta^{\text{CPT}} \phi^*(x)$$

Modificação dos Campos no Setor Não-Diagonal.

Transformação de Paridade:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_1^P + \eta_2^P & i(\eta_1^P - \eta_2^P) \\ -i(\eta_1^P - \eta_2^P) & \eta_1^P + \eta_2^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \phi'(x') = \mathcal{P}\phi(x)$$

Conjugação de Carga:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_1^C + \eta_2^C & -i(\eta_1^C - \eta_2^C) \\ -i(\eta_1^C - \eta_2^C) & -(\eta_1^C + \eta_2^C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \phi'(x') = \mathcal{C}\phi^*(x)$$

Inversão Temporal:

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \eta_1^T + \eta_2^T & i(\eta_1^T - \eta_2^T) \\ i(\eta_1^T - \eta_2^T) & -(\eta_1^T + \eta_2^T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \varphi'(x') = \mathcal{T}\varphi(x)$$

Reflexão Forte (CPT):

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \eta_1^{\text{CPT}} + \eta_2^{\text{CPT}} & -i(\eta_1^{\text{CPT}} - \eta_2^{\text{CPT}}) \\ -i(\eta_1^{\text{CPT}} - \eta_2^{\text{CPT}}) & \eta_1^{\text{CPT}} + \eta_2^{\text{CPT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} \text{ ou } \varphi'(x') = \mathcal{A}\varphi^*(x)$$

Nosso objetivo é que com os resultados obtidos nesse pequeno exemplo, os fatos estabelecidos anteriormente neste capítulo tenham ficado mais transparentes. Tais fatos por si, formam um quadro bastante interessante, pois demonstram a equivalência na descrição de uma dada Teoria (sendo um pouco generalista), do uso de diferentes parametrizações.

Esse resultado tem sua utilização prática evidente, pois suponhamos que ao trabalharmos com uma dada Lagrangiana, queiramos demonstrar alguma propriedade, ou fazer algum cálculo. Poderemos escolher uma parametrização em que tais procedimentos sejam mais simples. Um exemplo desse tipo de aplicação pode ser visto ainda no modelo que estamos estudando nesse capítulo, se retornarmos ao item 2.a.2 e tentarmos responder a pergunta feita sobre a positividade ou não do Hamiltoniano livre da Teoria. A resposta não pode ser dada naquela ocasião, pois a forma deste na parametrização não-diagonal (na qual foi escrita a teoria inicialmente) não permite chegar a qualquer conclusão. Mas agora que sabemos que

essa parametrização é tão boa quanto qualquer outra, basta reescrevermos o Hamiltoniano livre em termos de novos campos mais convenientes.

Para decidirmos sobre essa questão, utilizaremos o setor diagonal. Assim, reescrevendo a componente temporal-temporal do Tensor momento-energia (15), em termos dos campos e dos momentos diagonais, obtemos:

$$e_{00} = \pi_i^* \pi_i + \vec{\nabla} \phi_i^* \cdot \vec{\nabla} \phi_i + m_i^2 \phi_i^* \phi_i + \Gamma_{ABCD} \phi_A^* \phi_B \phi_C^* \phi_D, \quad (111)$$

onde:

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} = \dot{\phi}_i^* .$$

Assim, é imediato a conclusão de que na teoria livre (nesse caso m^2 é positivo definido), a energia é positiva.

Como importante resultado deste capítulo, tiramos que para uma dada teoria, grandezas físicas tais como massa, carga, spin, sinal dos resíduos de propagadores diagonais (relacionados as normas dos estados físicos), tensores momento energia e momento angular total, etc..., são independentes da parametrização em que estivermos escrevendo a teoria.

Esse resultado será muito importante no próximo capítulo, aonde estaremos interessados em determinar a espectroscopia de um modelo de Gauge estendido. Isto é, vamos identificar algumas propriedades das partículas descritas pelo modelo (massa e spin), em uma dada base dos campos. Na verdade, usando como fundamento o capítulo 2, chegaremos à noção de Espectroscopia Consistente, ou seja, a existência de uma fenomenologia independente da parametrização.

APÊNDICE DO CAPÍTULO II

INDEPENDÊNCIA DE UMA SIMETRIA COM A PARAMETRIZAÇÃO

Vamos mostrar que dada a teoria descrita pela Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\varphi^+ \square K \varphi + \varphi^+ M^2 \varphi - \Lambda_{abcd} \varphi_a^* \varphi_b^* \varphi_c^* \varphi_d^* \quad (A1)$$

e ainda valendo as condições:

$$\left. \begin{aligned} \Omega^+ K \Omega &= 0 \Rightarrow K = (\Omega^+)^{-1} \Omega^{-1} \\ \Omega^+ M^2 \Omega &= m^2 \Rightarrow M^2 = (\Omega^+)^{-1} m^2 \Omega^{-1} \\ \Lambda_{abcd} \Omega_{aA}^+ \Omega_{bB}^+ \Omega_{cC}^+ \Omega_{dD}^+ &= \Gamma_{ABCD} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Lambda_{abca} &= \Gamma_{ABCD} (\Omega_{aA}^+)^{-1} \Omega_{bB}^{-1} (\Omega_{cC}^+)^{-1} \Omega_{dD}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$m^2 = \bar{m}^2 0 \quad (50)$$

$$\Gamma_{ABCD} = \begin{cases} \Gamma_{\circ} \delta_{AB} \delta_{CD} \\ \Gamma_{\circ} \delta_{AD} \delta_{BC} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (51)$$

Teremos a transformação $T(\omega)$, tal que:

$$T(\omega) = \Omega U(\omega) \Omega^{-1} \Rightarrow \varphi' = T(\omega) \varphi \text{ e } U(\omega) \text{ é unitária.} \quad (57)$$

Como uma simetria da teoria.

Dividiremos a demonstração em etapas, ou seja, consideraremos independentemente a análise de cada uma das parcelas de (2). Iniciaremos com o termo cinético.

$$\begin{aligned} -\varphi^+ \square K \varphi &\xrightarrow{T(\omega)} -\varphi^+ \square K' \varphi' = -\varphi^+ \square T^+(\omega) K T(\omega) \varphi \\ &= -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} U^+(\omega) \Omega^+ K \Omega U(\omega) \Omega^{-1} \varphi \\ &\stackrel{(32)}{=} -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} U^+(\omega) \square U(\omega) \Omega^{-1} \varphi \\ &= -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} \square \Omega^{-1} \varphi \\ -\varphi^+ \square K' \varphi' &\stackrel{(32)}{=} -\varphi^+ \square K \varphi, \end{aligned}$$

mostrando que essa parcela é invariante.

Consideraremos agora o termo de massa:

$$\begin{aligned} -\varphi^+ M^2 \varphi &\xrightarrow{T(\omega)} -\varphi^+ \square M^2 \varphi' = -\varphi^+ T^+(\omega) M^2 T(\omega) \varphi \\ &= -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} U^+(\omega) \Omega^+ M^2 \Omega U(\omega) \Omega^{-1} \varphi \\ &= -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} U^+(\omega) m^2 U(\omega) \Omega^{-1} \varphi \\ &\stackrel{(50)}{=} -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} m^2 U^+(\omega) \square U(\omega) \Omega^{-1} \varphi \\ &= -\varphi^+ \square (\Omega^+)^{-1} m^2 \square \Omega^{-1} \varphi \\ -\varphi^+ \square M^2 \varphi' &\stackrel{(32)}{=} -\varphi^+ M^2 \varphi. \end{aligned}$$

Vemos então que esta parcela também é invariante.

Finalmente, seja o termo de interação:

$$-\Lambda_{abcd} \varphi_a^* \varphi_b^* \varphi_c^* \varphi_d^* \xrightarrow{T(\omega)} -\Lambda'_{abcd} \varphi'_a \varphi'_b \varphi'_c \varphi'_d =$$

$$= -\Lambda_{abcd} T_{a\alpha}^*(\omega) T_{b\beta}^*(\omega) T_{c\gamma}^*(\omega) T_{d\delta}^*(\omega) \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$-\Lambda_{abcd} \varphi'_a \varphi'_b \varphi'_c \varphi'_d =$$

$$(A) = -\Lambda_{abcd} \left[\Omega_{ae}^* U_{ei}^*(\omega) (\Omega^{-1})_{ia}^* \right] \left[\Omega_{bg} U_{gh}(\omega) (\Omega^{-1})_{hp} \right] \times$$

$$\times \left[\Omega_{ci}^* U_{ij}^*(\omega) (\Omega^{-1})_{jr}^* \right] \left[\Omega_{dk} U_{kl}(\omega) (\Omega^{-1})_{ls} \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$(A) = -(\Lambda_{abcd} \Omega_{ae}^* \Omega_{bg}^* \Omega_{ci}^* \Omega_{dk}) U_{ef}^*(\omega) U_{gh}(\omega) U_{ij}^*(\omega) U_{kl}(\omega) \times$$

$$\times \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta} (\Omega^{-1})_{jr}^* (\Omega^{-1})_{ls} \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$(A) \stackrel{(32)}{=} -\Gamma_{egik} U_{ef}^*(\omega) U_{gh}(\omega) U_{ij}^*(\omega) U_{kl}(\omega) \times$$

$$\times \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta} (\Omega^{-1})_{jr}^* (\Omega^{-1})_{ls} \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$(A) \stackrel{(51)}{=} -\Gamma_{o'eg} \delta_{ik} U_{ef}^*(\omega) U_{gh}(\omega) U_{ij}^*(\omega) U_{kl}(\omega) \times$$

$$\times \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta} (\Omega^{-1})_{jr}^* (\Omega^{-1})_{ls} \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$(A) = -\Gamma_o U_{gf}^*(\omega) U_{gh}(\omega) U_{kj}^*(\omega) U_{kl}(\omega) \times$$

$$\times \left[(\Omega^{-1})_{f\alpha}^* (\Omega^{-1})_{h\beta} (\Omega^{-1})_{jr}^* (\Omega^{-1})_{ls} \right] \varphi_\alpha^* \varphi_\beta^* \varphi_\gamma^* \varphi_\delta^*$$

$$= -\Gamma_o (U^+(\omega))_{fg} U_{gh}(\omega) (U^+(\omega))_{jk} U_{kl}(\omega) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(\Omega^{-1})_{ia}^+ (\Omega^{-1})_{ib} (\Omega^{-1})_{ic}^+ (\Omega^{-1})_{id} \right] \psi_a^+ \psi_b \psi_c^+ \psi_d \\
 = & -\Gamma_{c f h i l} \delta_{il} (\Omega^{-1})_{ia}^+ (\Omega^{-1})_{hf} (\Omega^{-1})_{ic}^+ (\Omega^{-1})_{ld} \psi_a^+ \psi_b \psi_c^+ \psi_d \\
 = & -\Gamma_{f h j l} (\Omega^{-1})_{ia}^* (\Omega^{-1})_{hf} (\Omega^{-1})_{ic}^* (\Omega^{-1})_{ld} \psi_a^* \psi_b \psi_c^* \psi_d \\
 & -\Lambda_{abcd} \psi_a^* \psi_b^* \psi_c^* \psi_d \quad (32) - \Lambda_{\alpha\gamma\delta} \psi_\alpha^* \psi_\beta^* \psi_\gamma^* \psi_\delta
 \end{aligned}$$

Comprovando, assim, a invariância de tal termo e com isso de toda a Lagrangiana.

CAPÍTULO III

MODELO DE GAUGE ESTENDIDO

3.a MOTIVAÇÃO DO MODELO, CONSTRUÇÃO DA LAGRANGIANA NÃO-DIAGONAL E EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Já há vários anos, as teorias de Gauge [10] desfrutam de um papel de destaque na descrição dos processos envolvendo a maior parte das interações conhecidas. Na verdade, das quatro interações classificadas atualmente, três puderam ser colocadas nesse esquema. Daí resultaram os modelos da:

- Eletrodinâmica Quântica (QED) - Interações Eletromagnéticas;
- Cromodinâmica Quântica (QCD) - Interações Fortes; e o de
- Weinberg-Salam (EVI) - Interações Eletromagnéticas e Fracas, Unificadas.

Nestes três modelos, a forma como são introduzidos os Campos de Gauge que estão associados às partículas que carregam as interações - fótons na QED, W^{\pm} e Z^0 na EWI e 8 glúons na QCD - baseia-se na passagem da simetria existente no setor de matéria do modelo de global em local [23]. Em outras palavras,

ao construirmos a parte da Lagrangiana que descrevera especificamente as partículas que irão interagir através da troca de bósons de Gauge vetoriais, partículas carregadas eletricamente na QED, elétrons, múons, neutrinos entre outros, na EWI e quarks na QCD - exigimos que esta seja invariante frente a um grupo de transformações unitárias, Abelianas ou não-Abelianas, com um número de parâmetros variável, todos independentes das coordenadas do espaço-tempo - U(1) (abeliana) na QED, SU(2) na EWI e o SU(3) na QCD.

Ao permitirmos que tais parâmetros variem com o ponto do espaço-tempo, ou seja, passando da versão global do grupo de transformações para aquela que é local, observamos que a Lagrangiana perde a sua invariância. Para recuperarmos a simetria perdida, devemos modificar o modelo. Isso é feito a partir da introdução na Lagrangiana original de termos de interação entre os campos de matéria presentes e novos campos vetoriais, os bósons de Gauge. É importante percebermos que o número de campos de Gauge introduzidos na teoria é usualmente [23] tomado igual ao número de parâmetros do grupo de simetria presente ao modelo - 1 no U(1), 3 no SU(2) e 8 no SU(3).

Devido a este quadro bem sucedido, estabeleceu-se um consenso de que novas contribuições à física deveriam sofrer o guia da simetria de Gauge. Desta forma, a tendência provocada foi a de se pesquisar grupos de simetrias maiores, que fossem capazes de acomodar as partículas necessárias em um esquema de unificação. Sejam o SU(5) o SO(10) e o E_6 para a grande unificação [24], ou o SO(32), o $E(8) \times E(8)$ e o SO(16) \times SO(16) para as superstrings [25] sempre tendo em mente, como foi dito, que

fibrados [27]. Através do relaxamento de vínculos em superespaços, conseguiu-se motivar tais modelos no contexto de teorias supersimétricas [28]. Finalmente, através do mecanismo de Baulieu-Thierry Mieg pôde-se oferecer uma estrutura baseada na conhecida invariância de BRST [29]. Deste modo, estas quatro etapas formam uma base para respaldar as propriedades que venham a seguir deste princípio de Gauge estendido que (1) representa.

Na verdade, não iremos formular o modelo em termos dos campos primitivos, e sim na base dos campos construtores obtidos a partir dos primeiros pela seguinte reparametrização:

$$\begin{aligned} D_{\mu} &= A_{\mu} + B_{\mu} + C_{\mu} + \dots + N_{\mu} \\ X_{\mu 1} &= A_{\mu} - B_{\mu} \\ X_{\mu 2} &= A_{\mu} - C_{\mu} \\ &\vdots \\ X_{\mu N-1} &= A_{\mu} - N_{\mu} \end{aligned} \tag{2}$$

A este ponto, a justificativa para equivalência dos resultados físicos obtidos a partir dos campos primitivos ou construtores é fornecida pelo teorema de Borscher [30], uma vez que a transformação que relaciona os dois conjuntos é independente dos momenta das partículas descritas por tais campos. Posteriormente, ao introduzirmos a Lagrangiana do Modelo, poderemos utilizar os resultados do capítulo anterior.

Para os campos construtores (2), a transformação de Gauge (1) escreve-se:

$$\begin{aligned}
 D_{\mu}(\kappa) &\xrightarrow{U(1)} D'_{\mu}(\kappa) = D_{\mu}(\kappa) + \partial_{\mu} \alpha(x) \\
 X_{\mu_1}(x) &\xrightarrow{U(1)} X'_{\mu_1}(x) = X_{\mu_1}(x) \\
 &\vdots \\
 X_{\mu_2}(x) &\xrightarrow{U(1)} X'_{\mu_2}(x) = X_{\mu_2}(x) \\
 &\vdots \\
 X_{\mu_{N-1}}(x) &\xrightarrow{U(1)} X'_{\mu_{N-1}}(x) = X_{\mu_{N-1}}(x) .
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Logo, nessa parametrização, obtemos um campo que sofre a transformação de Gauge com o parâmetro $\alpha(x)$ e $(N-1)$ campos invariantes de Gauge. Essa propriedade de invariância de Gauge desses $(N-1)$ campos é o fundamento da outra forte motivação do Modelo de Gauge Estendido, pois a eles poderemos associar termos de massa sem nos preocuparmos em violar a simetria de Gauge.

A importância desse resultado fica mais clara quando nos lembramos de que, nos modelos acima citados, a massa dos campos de Gauge (naqueles onde os bósons vetoriais são massivos) é obtida a partir do mecanismo de Higgs, com quebra espontânea de simetria [31]. Para que este mecanismo ocorra, devemos adicionar ao modelo em estudo campos escalares complexos (associados às partículas chamadas de Higgs) massivos. Os graus de liberdade associados a alguns desses bósons de Higgs são absorvidos pelos campos de Gauge (inicialmente sem massa) depois que o vácuo físico do modelo tenha sido fixado, possibilitando assim que os bósons vetoriais se tornem massivos. Vemos, então, que tais partículas escalares desempenham um papel crucial nas teorias de Gauge atuais.

Devido a isto, muito esforço tecnológico tem sido despendido na tentativa de vê-las, em experimentos nos grandes aceleradores disponíveis. Os fatos são que, nos limites de energia atuais (da ordem de 100GeV), nada foi detectado [32], restando assim apenas a esperança na correção do mecanismo de Higgs.

O Modelo de Gauge Estendido nos fornece então, um procedimento teórico diferente daquele aceito nos dias de hoje para a geração de massa para os bósons vetoriais, sem quebrarmos a simetria de Gauge do modelo. Percebemos ainda que um dos campos vetoriais em (3), terá que ser não-massivo necessariamente, no sentido de mantermos a invariância frente à transformação de Gauge. Mas, esse resultado é intencional, visto que se espera descrever os modelos já existentes com a teoria estendida. Assim, o campo D_μ desempenhará o papel de campo do fóton.

A Lagrangiana da teoria, será escrita seguindo os critérios de máxima generalidade, invariância sob transformações de Gauge e de Lorentz, a presença de termos de massa para os (N-1) campos X_μ e argumentos de renormalizabilidade. Logo, obtemos [33]:

$$\mathcal{L} = Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} + Z_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{ij}^2 X_i^\mu X_{\mu j} \quad (4)$$

onde

$$Z^{\mu\nu} = dD^{\mu\nu} + \alpha_i X_i^{\mu\nu} + \gamma_{[ij]} X_i^\mu X_j^\nu + \beta_i \sum_i^{\mu\nu} + \quad (5a)$$

$$\rho_i g^{\mu\nu} \sum_{i\alpha}^\alpha + \gamma_{(ij)} X_i^\mu X_j^\nu + \tau_{ij} \epsilon^{\mu\nu} X_{i\alpha} X_j^\alpha,$$

$$\tilde{Z}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Z_{\rho\sigma} \quad (5b)$$

$$D^{\mu\nu} = \partial^\mu D^\nu - \partial^\nu D^\mu$$

$$X_i^{\mu\nu} = \partial^\mu X_i^\nu - \partial^\nu X_i^\mu \quad (5c)$$

$$\Sigma_i^{\mu\nu} = \partial^\mu X_i^\nu + \partial^\nu X_i^\mu$$

além de termos a matriz m^2 simétrica. Todos os coeficientes presentes em (4) são números reais, que serão ajustados conforme as necessidades físicas do modelo. Devido a este fato, eles são chamados coeficientes livres da teoria. Podemos ainda reescrever (4), separando a intensidade de campo $Z^{\mu\nu}$ em uma parte antissimétrica e outra simétrica respectivamente:

$$Z^{[\mu\nu]} = dB^{\mu\nu} + \alpha_i X_i^{\mu\nu} + \gamma_{(ij)} X_i^\mu X_j^\nu \quad (6a)$$

$$Z^{(\mu\nu)} = \beta_i \Sigma_i^{\mu\nu} + \rho_i g^{\mu\nu} \Sigma_{i\alpha}^\alpha + \tau_{(ij)} g^{\mu\nu} X_{i\alpha} X_j^\alpha + \gamma_{(ij)} X_i^\mu X_j^\nu \quad (6b)$$

Observando a Lagrangiana (4), vemos que, apesar de considerarmos a invariância de Gauge frente a um Grupo Abelian, teremos a presença de termos de interação tri-lineares e quadri-lineares. Outra característica importante revela-se a partir de (6b), na presença de uma parte simétrica na intensidade de campo $Z^{\mu\nu}$, diferentemente do usual [23]. A presença de tal termo nos sugere a possibilidade de obtermos a parte longitudinal do propagador, diferente de zero, o que implicaria na existência do próprio propagador. Isso aparecendo como uma característica nova em relação aos modelos citados,

tornaria os termos de fixação de Gauge desnecessários.

Para deixar mais clara essa questão, vamos reescrever a Lagrangiana (4) em uma forma matricial e introduzir os projetores longitudinais ($P_{\mu\nu}^L$) e transversais ($P_{\mu\nu}^T$) os quais fornecem uma separação não-local dos campos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (7)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{2} \left[V_{\mu}^i (K_{\mu}^i \square + M^2) P_{\mu\nu}^L V_{\nu}^i + V_{\mu}^i (K_{\mu}^i \square + M^2) P_{\mu\nu}^T V_{\nu}^i \right] \quad (8)$$

onde:

$$P_{\mu\nu}^L = \frac{\partial_{\mu} \partial_{\nu}}{\square}, \quad P_{\mu\nu}^T = \epsilon_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu} \partial_{\nu}}{\square},$$

$V_{\mu}^i = \begin{pmatrix} D_{\mu}^i \\ X_{\mu i} \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna N dimensional com $i = 1, 2, \dots, N-1$.

$$K_{\mu}^i = \begin{pmatrix} d^2 & d\alpha_1 & d\alpha_2 & \dots & d\alpha_{N-1} \\ \alpha_1 d & \alpha_1^2 + \beta_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \alpha_{N-1} + \beta_1 \beta_{N-1} \\ \alpha_2 d & \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 & \dots & \alpha_2 \alpha_{N-1} + \beta_2 \beta_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N-1} d & \alpha_{N-1} \alpha_1 + \beta_{N-1} \beta_1 & \alpha_{N-1} \alpha_2 + \beta_{N-1} \beta_2 & \dots & \alpha_{N-1}^2 + \beta_{N-1}^2 \end{pmatrix} \quad (9a)$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{11}^2 & m_{12}^2 & \dots & m_{1N-1}^2 \\ 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2 & \dots & m_{2N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{N-11}^2 & m_{N-12}^2 & \dots & m_{N-1N-1}^2 \end{pmatrix} \quad (9b)$$

$$K_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\beta_1^2 + \rho_1^2) + 3\rho_1^2 & \dots & \beta_1 \beta_{N-1} + 4\rho_1 \rho_{N-1} + 2\beta_1 \rho_{N-1} \\ 0 & \beta_2 \beta_1 + 4\rho_1 \rho_2 + 2\beta_2 \rho_1 & \dots & \beta_2 \beta_{N-1} + 4\rho_2 \rho_{N-1} + 2\beta_2 \rho_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_{N-1} \beta_1 + 4\rho_{N-1} \rho_1 + 2\beta_{N-1} \rho_1 & \dots & (\beta_{N-1} + \rho_{N-1})^2 + 3\rho_{N-1}^2 \end{pmatrix} \quad (9c)$$

Teremos ainda a seguinte separação do termo de interação, em parcelas tri-lineares ($\mathcal{L}_{int}^{(3)}$) e quadri-lineares ($\mathcal{L}_{int}^{(4)}$) nos campos:

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}^{(3)} + \mathcal{L}_{int}^{(4)} \quad (10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{(3)} = & z^\mu \partial_\mu V_\nu (V^{\mu\lambda} V^\nu + 4e^{\mu\nu\sigma\rho} V_\rho \lambda V_\sigma) + t^\mu \partial_\mu V^\nu (V_\mu \wedge V_\nu) + \\ & + w^\mu \partial_\mu V^\nu (V_\nu \wedge V^\mu) + v^\mu \partial_\mu V^\nu (V_\nu \otimes V^\mu) \end{aligned} \quad (11)$$

e

$$z = \begin{bmatrix} d \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_i \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i + 4\rho_i \end{bmatrix} \quad (12a)$$

são matrizes coluna N dimensional com $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{[12]} & \dots & \gamma_{[1, N-1]} \\ 0 & \gamma_{[21]} & 0 & \dots & \gamma_{[2, N-1]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \gamma_{[N-1, 1]} & \gamma_{[N-1, 2]} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad (12b)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{(11)} & \gamma_{(12)} & \dots & \gamma_{(1N-1)} \\ 0 & \gamma_{(21)} & \gamma_{(22)} & \dots & \gamma_{(2N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \gamma_{(N-11)} & \gamma_{(N-12)} & \dots & \gamma_{(N-1N-1)} \end{pmatrix} ; \quad (12c)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1N-1} \\ 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tau_{N-11} & \tau_{N-12} & \dots & \tau_{N-1N-1} \end{pmatrix} ; \quad (12d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{(4)} = & (V^{\mu t} \Theta V_{\mu}) (V^{\nu t} \Gamma V_{\nu}) + (V^{\mu t} \Sigma V_{\mu})^2 + \\ & + e^{\mu\nu\rho\sigma} (V_{\mu}^t \lambda V_{\nu}) (V_{\rho}^t \lambda V_{\sigma}) \end{aligned} \quad (13)$$

e

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{(11)} + 2\tau_{11} & \gamma_{(12)} + 2\tau_{12} & \dots & \gamma_{(1N-1)} + 2\tau_{1N-1} \\ 0 & \gamma_{(21)} + 2\tau_{21} & \gamma_{(22)} + 2\tau_{22} & \dots & \gamma_{(2N-1)} + 2\tau_{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \gamma_{(N-11)} + 2\tau_{N-11} & \gamma_{(N-12)} + 2\tau_{N-12} & \dots & \gamma_{(N-1N-1)} + 2\tau_{N-1N-1} \end{pmatrix}$$

(14a)

$$\sum = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j_{11} & j_{12} & \dots & j_{1N-1} \\ 0 & j_{21} & j_{22} & \dots & j_{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & j_{N-11} & j_{N-12} & \dots & j_{N-1N-1} \end{pmatrix} \quad (14b)$$

Considerando-se (9c), vemos que as nossas expectativas em relação à possibilidade de determinarmos o propagador sem a adição de novos termos não correspondia à realidade. Isto porque o propagador longitudinal:

$$\langle V^\mu V^\nu \rangle_L = (K_L \square + M^2)^{-1} P_L^{\mu\nu} \quad (15)$$

é singular pois apresenta toda uma linha e uma coluna nulas (o que fornece um valor nulo para o seu determinante). Assim, a matriz dada em (15) não pode ser invertida. Como o propagador da teoria é obtido pela soma das contribuições longitudinais e transversais, esse fica indeterminado.

Seguindo os passos usuais [23], teremos que introduzir o já mencionado termo de fixação-de-Gauge G_F , a fim de garantir a existência do propagador longitudinal. Observando novamente (9), concluímos que a forma mais simples da $\mathcal{L}_{G.F.}$ é dada por [33]:

$$\mathcal{L}_{G.F.} = V_\mu^t G_F P_L^{\mu\nu} V_\nu$$

onde

$$G_F = \left(\begin{array}{c|c} 1/\xi & 0_{1N-1} \\ \hline 0_{N-11} & 0_{N-1 \times N-1} \end{array} \right), \quad \xi \text{ é um parâmetro real.} \quad (16)$$

Ao adicionarmos o termo acima a (8), a nova matriz coeficiente do setor longitudinal passaria a ter inversa, e com isso (15) também. Na intenção de generalizarmos o nosso tratamento, ao invés de usarmos (16), consideremos o termo de fixação-de-Gauge contendo uma matriz simétrica, do tipo:

$$G_F = \left(\begin{array}{c|c} 1/\xi & 2\sigma/\xi \\ \hline 2\sigma^t/\xi & \sigma^t\sigma/\xi \end{array} \right) \quad (17)$$

tal que σ é uma matriz linha N dimensional, com elementos reais.

Logo, levando esse termo para o setor longitudinal da Lagrangiana livre (8), ficaremos com:

$$\mathcal{L}_{free} = - \frac{1}{2} \left[V_\mu^t (K_T + M^2) P_T^{\mu\nu} V_\nu + V_\mu^t (B + M^2) P_L^{\mu\nu} V_\nu \right], \quad (18)$$

onde

$$B \equiv K_L + G_F. \quad (19)$$

Convém ressaltar que todas as matrizes presentes em (18) são simétricas. Isso será importante quando estivermos analisando as diferentes parametrizações sob as quais esta expressão pode ser escrita.

A este ponto, devemos chamar atenção para o fato de existir uma diferença conceitual bastante grande entre os parâmetros introduzidos por intermédio de G_F e aqueles já presentes em (4). Os últimos são importantes na definição do tipo de sistema físico que estaremos tratando, enquanto que os primeiros são introduzidos apenas como uma prescrição das

teorias de Gauge na determinação do propagador. Desta forma, os parâmetros de fixação-de-Gauge não devem aparecer em nenhum resultado físico, e podem a princípio assumir quaisquer valores.

Logo após a introdução dos campos de Gauge primitivos, uma questão bastante procedente que poderia ter sido levantada é quanto à independência dos mesmos. Somente agora, depois de termos introduzido a Lagrangiana do modelo (a especial parametrização não é relevante) é que poderemos solucioná-la. Para tal devemos introduzir as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_{\rho\eta M}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_{\eta M}} = 0 \quad (20)$$

Ao introduzirmos (7) em (20) obtemos em uma notação compacta N equações, dadas por:

$$\begin{aligned} & K_T \partial_\rho V^{\rho\eta} - \xi^{\rho\eta} B \partial_\rho V^\nu + \partial_\mu \left[z V^{\mu\lambda} \lambda V^\eta + 4\varepsilon^{\mu\eta\gamma\sigma} z V_\nu^t \lambda V_\sigma + \right. \\ & \left. + t (\xi^{\mu\eta} V_\theta^t \ominus V^\ominus + V^{\mu\lambda} \Lambda V^\eta) \right] + w \partial^\eta (V_\theta^t \eta V^\ominus) + \\ & - (z^t V^{\ominus\eta} + 4\varepsilon^{\mu\nu\eta\ominus} V_\mu^t \lambda V_\nu + V^{\ominus\lambda} \lambda V^\eta) \lambda V_\ominus + \\ & + [t^t V_{+\ominus}^\eta + 2\xi_\ominus^\eta w^t \partial_\alpha V^\alpha + \xi_\ominus^\eta V_\gamma^t \ominus V^\gamma + V_\ominus^t \Lambda V^\eta] \Lambda V^\ominus + \\ & + [V_\ominus^t \eta V^\ominus + 2y^t \partial_\alpha V^\alpha] \ominus V^\eta + \frac{1}{4} M^2 V^\eta = 0_{N \times 1} \end{aligned} \quad (21)$$

onde: $\eta \equiv \ominus + \Sigma$, $y \equiv w + t$ e $V_+^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu + \partial^\nu V^\mu$.

O procedimento a partir de agora passa pela determinação das equações independentes, ou seja, aquelas cujos campos presentes são independentes entre si. Suponha que das N equações, M são realmente independentes. Isto significa que fomos capazes de escrever os N campos vetoriais em termos de apenas M deles. Dessa forma teremos M campos que podem ser associados a partículas físicas, e as $N-M$ equações usadas para obter os M campos independentes são chamadas de equações de vínculos. Na verdade, este estudo já foi feito em [14], concluindo-se a favor da independência dos N campos construtores.

Depois de termos introduzido o Modelo de Gauge Estendido, o qual é constituído por N campos independentes rodando sob o mesmo grupo, podemos agora começar a estudá-lo propriamente. O primeiro passo será dado no próximo item aonde introduziremos a noção de Campo Físico, base na qual os N quanta presentes no modelo terão massas bem definidas.

3.1.2 CAMPOS FÍSICOS E A MATRIZ Ω

Observando a Lagrangiana do Modelo de Gauge Estendido, dada pelas expressões (8), (11) e (13), vemos que nessa parametrização é claro o fato de estarmos lidando com N campos vetoriais, descarregados cujos setores de spin-1 e zero são não-nulos. Mas é fácil também perceber que, não temos de maneira imediata uma massa física associada univocamente a um dado campo, seja no setor transversal que no longitudinal. Isto

podem ser vistos como caracteres de representações de grupo de simetria propagadas para outras representações.

Transversal -

$$\begin{aligned} \langle V_{\mu}^i V_{\nu}^j \rangle_T &= \left[(K_T^{\mu\nu} + M^2)_{ij} P_{\mu\nu}^T \right]^{-1} \\ &= \frac{\text{cof} (\square + K_T^{-1} M^2)_{ij}}{\det (\square + K_T^{-1} M^2)} (K_T^{-1})_{ij} P_{\mu\nu}^T \end{aligned} \quad (22)$$

Longitudinal -

$$\begin{aligned} \langle V_{\mu}^i V_{\nu}^j \rangle_L &= \left[(B_{\mu\nu} + M^2)_{ij} P_{\mu\nu}^L \right]^{-1} \\ &= \frac{\text{cof} (\square + B^{-1} M^2)_{ij}}{\det (\square + B^{-1} M^2)} (B^{-1})_{ij} P_{\mu\nu}^L \end{aligned} \quad (23)$$

Assim, as massas das partículas físicas ligas a partir de (22) e (23) são dadas respectivamente para as partes transversal e longitudinal pelos auto-valores de $K_T^{-1} M^2$ e $B^{-1} M^2$ (os polos dos propagadores).

É natural, então, introduzirmos uma nova reparametrização de tal forma que dado um campo nessa base, o polo do seu propagador seja a massa física associada e esse campo é o resíduo correspondente a tal polo e os 1. No entanto, essa rotação dos campos é aquela que nos leva para a forma diagonal do termo cinético da teoria, tal como no capítulo anterior para os escalares. Nesse caso, diferentemente do anterior, não poderemos diagonalizar o termo cinético de uma só vez, na verdade teremos duas possibilidades. A diagonalização

do setor transversal mantendo o setor longitudinal não-diagonalizado e vice-versa. Chamaremos os novos campos indistintamente (em ambos os casos) de campos físicos, devido a sua relação unívoca com as massas físicas. Vejamos, a seguir, um pouco sobre essas duas rotações dos campos construtores.

3.b.1 Parametrização Transversal e $\tilde{\Omega}_T$

O primeiro caso que iremos considerar é aquele em que diagonalizamos o setor transversal da Lagrangiana cinética da teoria. Os campos construtores serão ligados aos campos físicos por intermédio da matriz $\tilde{\Omega}_T$:

$$V_{\perp} = \tilde{\Omega}_T \tilde{G}_{\perp} \quad \text{ou} \quad \tilde{G}_{\perp} = \tilde{\Omega}_T^{-1} V_{\perp}. \quad (24)$$

E como no caso do capítulo anterior, $\tilde{\Omega}_T$ é uma matriz formada pelo produto de outras três matrizes:

$$\tilde{\Omega}_T = S_T^t \tilde{K}_T^{-1/2} R_T^t \quad (\tilde{\Omega}_T^{-1} = R_T \tilde{K}_T^{1/2} S_T). \quad (25)$$

Elas desempenham os mesmos papéis (guardadas as devidas diferenças) e tem as mesmas propriedades, que as matrizes correspondentes no caso escalar. $\tilde{\Omega}_T$ deve ainda satisfazer a seguinte condição:

$$\text{Invertibilidade} \Rightarrow \det \tilde{\Omega}_T \neq 0$$

a qual pode ser reescrita tendo em vista (25) e o fato de R e S serem, neste caso, matrizes ortogonais, como:

$$\det S_T = 1, \quad \det \tilde{K}_T \neq 0 \quad \text{e} \quad \det R_T = 1. \quad (26)$$

Na verdade, como já discutido no Capítulo II, \tilde{K}_T é

não-singular, pois a matriz K_T deve ser escolhida positiva-definida. Indiretamente, devido a quaisquer vínculos impostos sobre os coeficientes livres, os quais compõem a matriz Ω_T (25):

$$\Omega_T = \Omega_T(d, \alpha, \beta, m^2) \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (27)$$

esta também sofre algumas restrições. Tais vínculos podem ser necessários, por exemplo, no sentido de garantir a fisicalidade do modelo.

Logo, nessa parametrização a Lagrangiana da teoria fica escrita:

$$\mathcal{L}_{free} = G^{\mu i} (\partial_\mu + m^2) F_{\mu\nu}^T G^\nu + G^{\mu i} (\tilde{B}\partial_\mu + m^2) F_{\mu\nu}^L G^\nu \quad (28)$$

onde m^2 é diagonal e $\tilde{B} = \Omega_T^t (K_L + G_F) \Omega_T$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & z_T^i \partial^\mu G^\nu (G_\mu^t \lambda_T G_\nu) + u_T^i \partial^\mu G^\nu (G_\mu^t \Lambda_T G_\nu) + \\ & + w_T^i \partial_\mu G^\mu (G_\nu^t \Lambda_T G^\nu) + v_T^i \partial_\mu G^\mu (G_\nu^t \Theta_T G^\nu) + \\ & + (G^{\mu i} \Sigma_i G_\mu)^2 + (G^{\mu i} \Theta_i G_\mu) (G^{\nu j} \Gamma_j G_\nu) \end{aligned} \quad (29)$$

onde

$$\begin{aligned} z_T &= \Omega_T^t z, & u_T &= \Omega_T^t u, & w_T &= \Omega_T^t w, & v_T &= \Omega_T^t v, \\ \lambda_T &= \Omega_T^t \lambda \Omega_T, & \Lambda_T &= \Omega_T^t \Lambda \Omega_T, & \Theta_T &= \Omega_T^t \Theta \Omega_T, \\ \Sigma_T &= \Omega_T^t \Sigma \Omega_T & \text{e} & \Gamma_T &= \Omega_T^t \Gamma \Omega_T. \end{aligned} \quad (30)$$

É importante ressaltarmos que as condições (26) irão fornecer

restrições sobre os valores possíveis dos parâmetros livres da teoria. Outro resultado importante é, sem dúvida, os propagadores tanto para os quantas de spin 1, quanto para aqueles com spin 0:

Setor Transversal -

$$\begin{aligned} \langle G^{\mu} G^{\nu} \rangle_T &= \left[(\square + m^2)_{ij} P_{\mu\nu}^T \right]^{-1} = \\ &= \left[\frac{1}{\square + m^2} P_{\mu\nu}^T \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (31)$$

Setor Longitudinal -

$$\begin{aligned} \langle G^{\mu} G^{\nu} \rangle_L &= \left[(\tilde{E}\square + m^2)_{ij} P_{\mu\nu}^L \right]^{-1} \\ &= \frac{\text{cof} (\square + \tilde{E}^{-1} m^2)_{ik}}{\text{det} (\square + \tilde{E}^{-1} m^2)} (\tilde{E}^{-1})_{kj} P_{\mu\nu}^L \end{aligned} \quad (32)$$

onde usamos o fato de que \tilde{E} é uma matriz inversível.

Assim, da observação de (31), vemos que foi obtido o resultado desejado. Pois dado um campo físico, G_{μ} , existe um parâmetro de massa associado a sua projeção transversal, dado pelo pólo da função de Green de dois pontos apropriada. Como dissemos também, o mesmo não ocorre para o setor longitudinal nessa parametrização.

3.b.2 Parametrização Longitudinal e Ω_L

A outra possibilidade consiste na diagonalização da

parte da matriz cinética envolvendo os quanta de spin zero, enquanto que a parte dos quanta de spin um permanece não-diagonal. Nesse caso, os campos construtores são combinados pela matriz Ω_L , a qual nos leva para a base dos campos físicos:

$$V_L = \Omega_L L \quad \text{ou} \quad L = \Omega_L^{-1} V_L \quad (33)$$

Similarmente, Ω_L é escrita em termos das suas tres matrizes componentes:

$$\Omega_L = S_L^{-1} \tilde{K}_L^{-1/2} R_L^{-1} \quad (\Omega_L^{-1} = R_L \tilde{K}_L^{1/2} S_L) \quad (34)$$

Ela satisfaz às seguintes condições:

$$\text{Invertibilidade} \Rightarrow \det S_L = 1, \det \tilde{K}_L \neq 0 \text{ e } \det R_L = 1.$$

Aonde usamos o fato de S_L e R_L serem matrizes ortogonais e temos ainda que \tilde{K}_L é não-singular. O mesmo comentário que fizemos para Ω_T pode ser refeito neste caso, no que diz respeito à possível existência de condições a serem satisfeitas indiretamente por Ω_L .

A este ponto, constatamos uma importante diferença conceitual entre essa parametrização e aquela transversal. Os elementos de Ω_L são funções não só dos elementos das matrizes cinética longitudinal e de massa, como também dos coeficientes dados em G_F (os parâmetros de fixação-de-Gauge) (34):

$$\Omega_L = \Omega_L(a, b, c, m) \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (35)$$

Como tínhamos visto, a diferença entre os a e c e os coeficientes livres, é a independência dos resultados do modelo em relação aos primeiros, e a dependência não só dos resultados como a do próprio modelo que estaremos trabalhando, com os últimos. A presença de tais parâmetros em Ω_L trará uma sensível

consequencia no que diz respeito a utilização de tal base na descrição de sistemas observáveis.

Nessa parametrização a Lagrangiana do modelo fica, após aplicação de Ω_L ,

$$\mathcal{L}_{free} = L^{\mu\nu} (K_T^2 + m^2) F_{\mu\nu}^T + L^{\mu\nu} (\square + m^2) F_{\mu\nu}^L \quad (36)$$

onde $\tilde{K} = \Omega_L^T K_T \Omega_L$.

E a parcela \mathcal{L}_{int} é dada como em (29) e (30), substituindo adequadamente Ω_T por Ω_L .

Os propagadores para os dois setores serão dados neste caso por:

Setor Transversal -

$$\langle L_{\mu\nu}^T L_{\rho\sigma}^T \rangle_T = \left[(\tilde{K}_T^2 + m^2)_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^T \right]^{-1} \quad (37)$$

$$= \frac{\text{cof} (\square + \tilde{K}_T^2 m^2)_{\mu\nu\rho\sigma}}{\det (\square + \tilde{K}_T^2 m^2)} (\tilde{K}_T^{-2})_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Setor Longitudinal -

$$\langle L_{\mu\nu}^L L_{\rho\sigma}^L \rangle_L = \left[(\square + m^2)_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^L \right]^{-1} \quad (38)$$

$$= \left[\frac{1}{\square + m^2} F_{\mu\nu}^L \right] \delta_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Desta feita, a associação unívoca de um parâmetro de massa ao

campo físico é obtido no setor dos quanta de spin zero (33), em detrimento de tal relação no setor dos de spin um.

3.c EQUIVALÊNCIA ENTRE AS PARAMETRIZAÇÕES

Nossa intenção nesta subseção é reeditar o procedimento do capítulo anterior, aplicando-o ao Modelo de Gauge Estendido formulado em diferentes parametrizações. Dessa forma demonstraríamos que as propriedades intrínsecas e extrínsecas das partículas, descritas nesse caso, tais como: massa, carga, spin, tensores momento-energia e momento angular são independentes da base na qual o modelo está sendo redigido. Estaria então obtida a equivalência entre as diferentes parametrizações.

Como havíamos dito anteriormente, o tratamento feito para os campos escalares foi introduzido no sentido de fundamentar o estudo do presente caso. Por essa razão aquele foi feito de tal maneira que pudesse ser aplicado livremente em outros modelos, tal como o de Gauge Estendido. Consideraremos então, que os resultados obtidos nas parametrizações físicas, são equivalentes entre si, e ainda, aqueles obtidos na base dos campos construtores.

Falando de forma precisa, a equivalência entre as bases físicas não é um problema fechado. Existe uma forte suspeita de que a dependência de Ω_L com os parâmetros de fixação-de-Gauge, acarretaria a impossibilidade de construirmos (a teoria estando escrita na parametrização longitudinal)

estados físicos capazes de descrever sistemas observáveis. A menos que estejamos dispostos a permitir que grandezas mensuráveis dependam dos α e β_i .

No capítulo anterior deixamos de demonstrar a equivalência em diferentes parametrizações, de uma das propriedades intrínsecas comumente presentes nas partículas elementares, o spin. Não foi possível fazer isso, pois as partículas escalares não apresentam tal propriedade, ao contrário do caso em estudo. Segue então, a comprovação da independência do momento angular intrínseco com a base (seja ela física ou não) em que estamos descrevendo o Modelo de Gauge-Estendido.

O tensor densidade de momento angular de spin $S_{k\lambda}^\mu$, como visto anteriormente, é obtido ao tomarmos a seguinte parcela do TDMA. Total $M_{k\lambda}^\mu(x)$ Z(11):

$$S_{k\lambda}^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i^\alpha(x)} (\Sigma_{k\lambda}^\alpha)_i^\beta \phi_j^\beta(x) . \quad (39)$$

Assim tomando um campo vetorial genérico $A_\mu^\lambda(x)$, e a representação vetorial dos geradores do grupo de Lorentz:

$$(\Sigma_{\mu\nu}^\alpha)_\lambda^\beta = \delta_\mu^\beta \eta_{\nu\lambda} - \delta_\nu^\beta \eta_{\mu\lambda} . \quad (40)$$

Podemos facilmente reescrever a expressão (39) acima, da seguinte forma:

$$S_{k\lambda}^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_i^k(x)} A_{i\lambda}^\mu(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_i^\lambda(x)} A_{ik}^\mu(x) . \quad (41)$$

Esse tensor nos fornece os geradores das transformações

sofrida pelo campo que possui spin. Essas quantidades se conservam no tempo e são dadas pela integração em todo espaço da componente temporal de $S_{\mu k}^{\lambda}(\mathbf{x})$:

$$\bar{S}_{\mu k}^0 = \int d^3x S_{\mu k}^0(\mathbf{x}). \quad (42)$$

Na verdade, estamos interessados em "rotações intrínsecas" em torno dos eixos espaciais. Logo teremos que tomar apenas três das seis possibilidades fornecidas por (42) (lembre-se que $S_{\mu k}^{\lambda}(\mathbf{x})$ é antissimétrico nos dois primeiros índices). Uma maneira de obtermos isso é [34]: fazermos a contração de $\bar{S}_{\mu k}^0$ com o símbolo totalmente antissimétrico de três índices $\epsilon_{\mu k}$,

$$s_1 = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu k} \bar{S}_{\mu k}^0. \quad (43)$$

Dessa forma, se considerarmos s_1 , estaremos diante de uma transformação de spin do sistema em torno do eixo 1. Obtido o spin vamos analisar sua dependência com a parametrização em que escrevemos o modelo.

Quanticamente sabemos que uma dada transformação contínua do campo pode ser representada infinitesimalmente pelo comutador do mesmo com o gerador da transformação considerada. Isso se dá para o caso das translações, rotações, etc... E, particularmente, para as transformações de Lorentz. Para o caso das rotações intrínsecas, supondo que os campos são dados nas suas formas operatoriais, teremos:

$$[s_1, A_{\gamma}^{\lambda}(\mathbf{x})] = \delta A_{\gamma}^{\lambda}(\mathbf{x}), \quad (44)$$

onde, como vimos $\delta A_{\gamma}^{\lambda}(\mathbf{x}) = w^{\alpha\beta} (\sum_{\alpha\beta})_{\gamma}^{\theta} A^{\theta\lambda}(\mathbf{x})$ e os índices variam apenas de 1 a 3.

Considere, então, a rotação dos campos por intermédio

de Ω , de tal forma que somos levados para uma nova base, digamos dos vetores $B_\gamma^i(x)$:

$$A_\gamma^i(x) = \Omega^{ij} B_\gamma^j(x) \Rightarrow B_\gamma^i(x) = (\Omega^{-1})^{ij} A_\gamma^j(x) . \quad (45)$$

Nessa representação o spin $s[A_\gamma^i(x), \partial_\mu A_\gamma^i(x)]$ é reescrito da seguinte forma, em termos dos novos campos e suas derivadas:

$$\begin{aligned} s[A_\gamma^i(x), \partial_\mu A_\gamma^i(x)] &\xrightarrow{\Omega} s[\Omega B_\gamma^i(x), \partial_\mu \Omega B_\gamma^i(x)] = \\ &\rightarrow \tilde{s}[B_\gamma^i(x), \partial_\mu B_\gamma^i(x)] . \end{aligned} \quad (46)$$

Aplicando essa reparametrização à expressão, vejamos o que acontece com a transformação gerada pelo spin na base dos campos $B_\gamma^i(x)$:

$$\begin{aligned} \left[s_l \{ A_\gamma^i(x), \partial_\mu A_\gamma^i(x) \}, A_\gamma^i(x) \right] &= \delta A_\gamma^i(x) \\ &\quad \downarrow \Omega \\ \left[\tilde{s}_l \{ B_\gamma^i(x), \partial_\mu B_\gamma^i(x) \}, \Omega B_\gamma^i(x) \right] &= \Omega \delta B_\gamma^i(x) , \end{aligned}$$

onde usamos (46). E multiplicando os dois lados da expressão acima pela inversa da matriz Ω , ficamos com:

$$\left[\tilde{s}_l \{ B_\gamma^i(x), \partial_\mu B_\gamma^i(x) \}, B_\gamma^i(x) \right] = \delta B_\gamma^i(x) . \quad (47)$$

Vemos então que o novo spin força no novo campo uma transformação idêntica àquela sofrida pelos $A_\gamma^i(x)$ na antiga parametrização. Assim, os resultados físicos envolvendo o spin não dependerão da particular parametrização que tivermos

escolhido para trabalharmos.

Isto confirma a observação de que a reparametrização, sendo efetuada por uma matriz independente dos campos e suas derivadas, não altera absolutamente os spins dos campos.

3.d ESPECTROSCOPIA [35]

Avancemos um pouco mais no estudo do Modelo de Gauge Estendido. Para tal, vamos identificar os tipos de quanta com que estamos lidando, suas massas e a independência destas dos parâmetros de fixação-de-Gauge - fato que garante a fisicidade das mesmas. Durante o desenvolvimento do nosso estudo, seremos forçados a trabalhar em uma das parametrizações físicas. A escolha mais apropriada é aquela cujo setor transversal é diagonal, pois como vimos, existem dúvidas quanto à propriedade de utilizarmos a base longitudinal.

Para identificarmos as partículas envolvidas em nosso modelo, devemos observar (28) atentamente. Ela nos diz, como já tínhamos percebido, de sua representação em termos dos campos construtores (8), que estão presentes N quanta de spin-1 e N de spin-0. Os primeiros, descritos pelo setor transversal; os últimos, pelo longitudinal. Suas massas são dadas a partir dos pólos dos propagadores (31) e (32):

$$\begin{aligned}
N \text{ quanta de spin-1} &\mapsto 0, m_{\pm i}^2 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \\
N \text{ quanta de spin-0} &\mapsto \text{autovalores de } \hat{B}^{-1} m^2 \\
&\text{(fotons escalares)} \quad \text{(um deles é nulo)}
\end{aligned}
\tag{48}$$

Sabemos, com certeza, que um dos polos em ambos os setores é nulo. Isso decorre da equivalência entre as parametrizações (Capítulo II), pois na base dos campos construtores tinhamos o campo ϕ não-massivo, o que fornece o autovalor nulo para as matrizes de massa nos dois setores.

A fisicidade dos N quanta transversais é garantida por:

$m_{\perp i}^2 > 0$, não existem táquions,

$m^2 = \Omega_L^i K_T^{-1} M^2 \Omega_T$, não depende dos parâmetros de fixação-de-Gauge.

Dessa expressão, vemos claramente que as massas nesse setor são determinadas inteiramente pelos coeficientes livres, já que vale a expressão (27) e

$K_{\perp i}^T > 0$ não existem ghosts.

Já para as N partículas de spin-0, o primeiro critério dos três acima obtidos que deve ser satisfeito, é a independência dos polos com relação à α e α_L . Somente depois disso teremos possibilidade de impor condições sobre os resíduos e as massas longitudinais, para que não tenhamos a presença de ghosts e táquions, respectivamente.

Assim, devemos estudar a dependência dos autovalores de $\tilde{B}^{-1} m^2$ com os parâmetros de fixação-de-Gauge. Isso será feito de maneira mais imediata ao percebermos que a matriz dos polos longitudinais se relaciona com $(K_L + G_F)^{-1} M^2$, da seguinte forma:

$$\tilde{B}^{-1} m^2 = \Omega_T^{-1} (K_L + G_F)^{-1} M^2 \Omega_T \quad (49)$$

onde usamos (eqs. (17), (25) e (25) cap. 2).

Os dois conjuntos são transformáveis de semelhança ligando as duas matrizes, isso indica que seus autovalores são os mesmos. Dessa forma, podemos substituir a análise dos autovalores de $E^{-1}m^2$ por aqueles de $(K_L + G_F)^{-1}M^2$ (50). Nesse sentido, vamos reescrever K_L e M^2 (9), da seguinte forma:

$$K_L = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0_{1 \times N-1} \\ \hline 0_{N-1 \times 1} & s \end{array} \right), \quad M^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0_{1 \times N-1} \\ \hline 0_{N-1 \times 1} & M^2 \end{array} \right) \quad (51)$$

onde s e M^2 são matrizes $(N-1)$ -dimensional tal que ao somarmos K_L com G_F (17), obtemos:

$$K_L + G_F = \left(\begin{array}{c|c} 1/\xi & 2\sigma/\xi \\ \hline 2\sigma^1/\xi & s + \sigma^1\sigma/\xi \end{array} \right). \quad (52)$$

Os passos necessários para determinarmos os autovalores de (50) envolvem em um primeiro passo a determinação da inversa de (52), o que dá:

$$(K_L + G_F)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \xi [1 - \sigma(s + \sigma^1\sigma/\xi)^{-1}\sigma^1/\xi]^{-1} & -\sigma s^{-1} \\ \hline -(\sigma + \sigma^1\sigma/\xi)^{-1}\sigma^1 [1 - \sigma(s + \sigma^1\sigma/\xi)^{-1}\sigma^1/\xi]^{-1} & s^{-1} \end{array} \right) \quad (53)$$

E o produto desta com M^2 (51),

$$(K_L + G_F)^{-1}M^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\sigma s^{-1}M^2 \\ \hline 0 & s^{-1}M^2 \end{array} \right) \quad (54)$$

Da expressão acima obtemos imediatamente os autovalores desejados, ao resolvermos a equação secular.

$$\det \left(\begin{array}{c|c} -\lambda & -cs^{-1}M^2 \\ \hline 0 & s^{-1}M^2 - \lambda \end{array} \right) = 0$$

que pode ser escrita ainda como:

$$(-\lambda) \det (s^{-1}M^2 - \lambda) = 0. \quad (55)$$

Esse resultado nos indica que uma das massas é nula, como já sabíamos - correspondendo ao campo do fóton -, e as demais (N-1) massas nulas ou não, são dadas pelos autovalores de $s^{-1}M^2$. O ponto importante é que tais *massas são independentes dos parâmetros de fixação-de-Gauge*, dependendo apenas dos parâmetros livres da teoria (9).

Do resultado obtido acima, podemos agora evitar a presença de táquions no setor longitudinal, impondo que:

$$\text{Os autovalores de } s^{-1}M^2 \text{ não-nulos devem ser positivos.} \quad (56)$$

A condição que garante a inexistência de ghosts nesse setor, não poderá ser obtida nesse momento, pois esta envolve condições sobre os resíduos dos propagadores, dessa forma deixaremos essa discussão para o próximo item, aonde trataremos sistematicamente esse tópico.

Refletindo um pouco mais sobre o modelo, vemos que apesar de termos feito uma separação bem nítida entre dois setores, devemos nos lembrar que estes foram construídos a partir de diferentes projeções de um mesmo campo. Dessa forma, podemos perguntar se existe alguma relação entre as massas dos quanta de diferentes spins. De fato, essa relação existe e pode ser vista ao considerarmos a dependência do determinante da matriz que dá os pólos do setor longitudinal com aqueles do

setor transversal:

$$\det(\tilde{E}^{-1}m^2) = \frac{\det m^2}{\det \tilde{E}} = \frac{m_{11}^2 m_{22}^2 \dots m_{NN}^2}{\det E} \quad (37)$$

Assim, como \tilde{E} é inversível, a expressão (37) só se anulará, indicando que pelo menos um dos seus autovalores é zero, se uma das massas m_{11}^2 for nula. Isso indica que a presença de uma massa nula no setor-T determina a existência de uma massa nula também no setor-L. Esse resultado nos força a imaginar que possivelmente haja uma relação mais estreita entre o número de quanta de massa zero nos dois setores.

Para averiguarmos este fato, suponhamos que no setor-T dentre os N campos $G_{\mu I}$, M destes, independentes (tal que $M \leq N$) apareçam com massa nula. Isto é, m^2 tem autovalor zero M vezes degenerado, aos quais estão associados um sub-espaco de M autovetores linearmente independentes:

$$\begin{aligned} m^2 G_1^\mu &= 0 \\ m^2 G_{1+1}^\mu &= 0 & \text{e} & \quad \langle G_1^\mu, G_J^\nu \rangle = \delta_{IJ} |\eta_{\mu\nu}| \\ &\vdots \\ m^2 G_{1+M}^\mu &= 0 & \text{onde } \eta_{\mu\nu} & \text{ é a métrica do} \\ & & & \text{espaço de Minkowski.} \end{aligned} \quad (38)$$

Tomando agora esses vetores e deixando \tilde{E}_m atuar sobre eles, vemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{-1} m^2 G_i^\mu &= \tilde{E}^{-1} (m^2 G_i^\mu) = 0 \\ \tilde{E}^{-1} m^2 G_{i+1}^\mu &= 0 \\ &\vdots \\ \tilde{E}^{-1} m^2 G_{i+M}^\mu &= 0 \end{aligned}$$

o que demonstra que os M vetores $L_i, G_1, G_2, \dots, G_{M-1}$ são também autovetores independentes de $\hat{B}^{-1}m^2$ com autovalor zero.

Concluimos assim, que a cada quantum de spin-1 com massa zero, corresponde de forma biunívoca um quantum com massa nula no setor longitudinal.

Antes de passarmos para o próximo item, aonde estudaremos a dependência dos resíduos dos propagadores do setor-L, com os parâmetros de fixação-de-Gauge, construiremos um quadro que resume a espectroscopia do modelo.

Campos Construtores $\{V_\mu\}$ -

$$\begin{array}{l}
 D_\mu \longrightarrow 1 \text{ spin-1 de massa nula.} \\
 X_\mu^i \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N-1 \text{ spin-1} \\ N-1 \text{ spin-0} \end{array} \right\} \text{ Em princípio} \\
 \hspace{15em} \text{massivos}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} D_\mu \\ X_\mu^i \end{array}} \right\} \begin{array}{l} N \text{ spin-1} \\ N-1 \text{ spin-0} \end{array}$$

Campos Físicos Transversais $\{G_\mu\}$ -

- (i) no setor-T lêem-se N pólos correspondentes às massas dos N campos de spin-1: tem-se uma massa nula e $(N-1)$ massas em geral não nulas.
- (ii) no setor-L lêem-se igualmente um pólo nulo relacionado com o pólo nulo do setor-T (esta dependência revela no nosso modelo a analogia com o vínculo entre as massas do fóton e do seu campo compensador de spin-0 na QED) e $(N-1)$ pólos independentes dos parâmetros de fixação de Gauge correspondentes aos campos de spin-0, a princípio massivos.

3.e OS RESÍDUOS NA PARAMETRIZAÇÃO FÍSICA TRANSVERSAL [35]

Para completarmos o estudo do propagador do modelo a nível clássico, devemos analisar os resíduos associados aos pólos obtidos no item anterior. Além disso, vimos que a existência de ghosts no setor longitudinal da parametrização física transversal, depende de condições que devemos impor sobre esses mesmos resíduos.

Assim como no item anterior, a escolha de uma base na qual obtivemos os resultados pareceu natural, visto que as massas são independentes da parametrização, aqui o mesmo acontecerá. Ou seja, os resultados com repercussão física envolvendo os resíduos dos pólos associados aos propagadores dos campos $G_{\mu I}$, não dependerão dessa escolha. Sobretudo, os sinais dos resíduos dos propagadores situados na diagonal que, como já tínhamos visto no capítulo anterior, são independentes da parametrização. Trabalharemos novamente com a base transversal por motivos já expostos.

Inicialmente, da observação do propagador transversal (31) obtemos imediatamente os resíduos associados a seus pólos:

$$R_{IJ}^C = \delta_{IJ} \quad (59)$$

que, como vemos, é positivo-definido e independente dos parâmetros de fixação-de-Gauge.

O próximo passo será a determinação dos resíduos dos propagadores longitudinais. Nesse sentido, vamos reescrever (32) com o auxílio de (49) da seguinte forma:

$$\langle G_{L\mu\nu} G_{L\mu\nu} \rangle_L = \frac{1}{\square + \Omega_T^{-1} (K_L + G_F)^{-1} M^2} \Omega_T^{-1} (K_L + G_F)^{-1} (\Omega_T^{-1})^{-1} F_{L\mu\nu}^L \quad (60)$$

que, após expandirmos convenientemente o denominador, transforma-se em:

$$\langle G_{L\mu\nu} G_{L\mu\nu} \rangle_L = \Omega_T^{-1} \left[\frac{1}{\square + (K_L + G_F)^{-1} M^2} (K_L + G_F)^{-1} \right] (\Omega_T^{-1})^{-1} F_{L\mu\nu}^L \quad (61)$$

A partir da última expressão vemos que a determinação dos resíduos da função de Green, ou tal como sua dependência com parâmetros da teoria, surgirá naturalmente da observação da forma do propagador propriamente dito. A eq. (61) é composta de três fatores, o primeiro que iremos obter é aquele entre parênteses:

$$T_M = \frac{1}{\square + (K_L + G_F)^{-1} M^2} (K_L + G_F)^{-1} \quad (62)$$

Levando em conta (54), seu denominador pode ser escrito como:

$$D_{T_M} = \left(\begin{array}{c|c} \square & -\sigma_B^{-1} M^2 \\ \hline 0 & \square + \sigma_B^{-1} M^2 \end{array} \right) \quad (63)$$

Então, do produto de $D_{T_M}^{-1}$ com (63), chegaremos a uma forma para

T_M :

$$T_M = \left(\begin{array}{c|c} u & v \\ \hline v^t & t \end{array} \right) \quad \text{onde}$$

$$U = \frac{1}{\square} \left\{ t \left[1 - \sigma (s + \sigma^t \sigma / \xi)^{-1} \sigma^t / \xi \right]^{-1} - \sigma s^{-1} M^2 (\square + s^{-1} M^2)^{-1} \right. \\ \left. - (s + \sigma^t \sigma / \xi)^{-1} \sigma^t \left[1 - \sigma (s + \sigma^t \sigma / \xi)^{-1} \sigma^t / \xi \right]^{-1} \right\}$$

é um número:

$$V = - \frac{1}{\square} \sigma s^{-1} \left[1 - M^2 s^{-1} (\square + M^2 s^{-1})^{-1} \right] \quad (64)$$

é uma matriz linha (N-1)-dimensional;

$$t = (\square + s^{-1} M^2)^{-1} s^{-1}$$

é uma matriz quadrada (N-1)-dimensional.

De tal forma que o propagador (61) pode ser reescrito em termos de (64):

$$\langle G_{\mu\nu} \rangle_L = \Omega_T^{-1} \left(\begin{array}{c|c} u & v \\ \hline v^t & t \end{array} \right) (\Omega_T^{-1})^t F_{\mu\nu}^L \quad (65)$$

É bom observarmos mais atentamente os elementos da matriz T_M para identificarmos suas dependências com os parâmetros de fixação-de-Gauge. Vemos então que:

$$u = u(\alpha, \sigma_i);$$

$$v = v(\sigma_i); \text{ e}$$

$$t \text{ não depende dos parâmetros } \alpha \text{ e } \sigma_i.$$

Dai tiramos que a unica forma de termos a presença de α em algum resultado é por intermedio de u.

Resta agora, somente, fornecermos a matriz Ω_T^{-1} e sua transporta. e conhecermos os propagadores longitudinais do modelo. Infelizmente, isso não é possível, pois o cálculo de Ω_T para o caso geral, como estamos considerando, envolve a solução de equações polinomiais de ordem indeterminada (o que não faz sentido). Somente com um número determinado de campos, isto é, até quatro campos, conseguiremos obter a forma algébrica exata dos elementos de Ω_T em função dos coeficientes livres. No próximo item trataremos um caso bem simples, que dará uma idéia mais nítida do problema envolvido em calcularmos os elementos de Ω_T .

Já que não podemos fazer o tratamento mais explícito, vamos introduzir Ω^{-1} apenas formalmente, o que nos ajudará a observar, a grosso modo, aonde aparecerão as dependências em α e σ_i . Tendo em mente que os elementos de Ω_T dependem somente dos coeficientes livres, suponha que:

$$\Omega^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline W & Z \end{array} \right) \text{ onde}$$

X é um número;

Y é uma matriz linha (N-1)-dimensional; (66)

W é uma matriz coluna (N-1)-dimensional e

Z é uma matriz quadrada (N-1)-dimensional.

Logo, se introduzirmos esta matriz e sua transporta em (65),

ficaremos com o seguinte resultado para o propagador-L:

$$\langle G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \rangle_L = \left(\begin{array}{c|c} ux^2 + x(vy^l + yv^l) + yty^l & uxw^l + xvz^l + yv^l w^l + ytz^l \\ \hline uxw + xvz^l + wvy^l + zty^l & uww^l + wvz^l + zv^l w^l + ztz^l \end{array} \right) P_{\mu\nu}^L \quad (67)$$

Como vemos, então, de uma forma geral os propagadores do setor longitudinal dependem dos coeficientes livres, parâmetros de massa, ξ e σ_i . Dessa forma, quando da determinação de resultados físicos a partir do uso do propagador (67), ou ainda, como tínhamos visto no problema da existência ou não de ghosts longitudinais, devemos trabalhar com essa liberdade que o modelo oferece, ajustando convenientemente esses números, dos quais (67) depende. Na verdade, podemos fazer isso no modelo de Gauge Estendido, de duas maneiras conceitualmente bastante diferentes:

- (a) Fornecendo valores apropriados dos parâmetros ξ e σ_i , visto que nem os resultados físicos, nem o próprio modelo pode depender de tal escolha.
- (b) Ajustando os coeficientes livres de tal forma que, a dependência dos elementos de $\langle G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \rangle_L$ nos parâmetros de fixação-de-Gauge desapareça. Assim sobrariam apenas funções dos coeficientes livres, administráveis conforme os nossos interesses.

É importante percebermos que o procedimento (a) é o mais rico em termos de possibilidades deixadas livres para o modelo, pois ao mexermos com ξ e σ_i não estaremos interferindo na física do problema. O que não ocorreria se restringíssemos os coeficientes livres como é o caso no item (b). Aqui veríamos

que depois de substituirmos na Lagrangiana do modelo as condições impostas sobre os coeficientes livres, para que a dependência do propagador com os parâmetros de fixação de Gauge se anulasse, esta ficaria bastante reduzida se comparada àquela resultante do item (a).

Para pormos em prática o procedimento (a), devemos conhecer a forma explícita de (67) para, a partir daí, obtermos os valores convenientes para ξ e σ_i . Já no caso do item (b), usando a nossa maneira formal de tratar o problema, podemos avançar um pouco mais. Faremos, então, uma divisão adequada dos propagadores (67) em três conjuntos distintos, e analisaremos caso a caso as condições sobre os coeficientes livres (indiretamente) que tornam os propagadores-L independentes de α e σ_i .

$$i) \langle G_{\mu 1} G_{\nu 1} \rangle_L = x^2 u + x (vy^t + yv^t) + yty^t; \quad (68)$$

Esse conjunto é composto de um só elemento. Sua dependência nos parâmetros de fixação-de-Gauge aparecem por intermédio de u e v. Vemos então de (68) que a maneira mais simples de retirarmos essa dependência é fazendo $x (= \Omega_{11}^{-1}) = 0$. O que implicará em: $\langle G_{\mu 1} G_{\nu 1} \rangle_L = yty^t$.

$$ii) \langle G_{\mu 1} G_{\nu I} \rangle_L = uxW^t + xvz^t + yv^t w^t + ytz^t \quad (69)$$

onde $I = 2, 3, \dots, N$.

Temos N-1 propagadores como elementos do conjunto (69). Novamente, a dependência é dada pelas parcelas de $\langle G_{\mu 1} G_{\nu I} \rangle_L$ que contenham u e v. Nesse caso o procedimento que devemos seguir para que α e σ_i não apareçam mais em (69) não é tão simples. Além de exigirmo que $x = 0$, precisaremos anular y

ou W^t . Ficaremos com:

$$\langle G_{\mu I} G_{\nu I} \rangle_L = YtZ^t .$$

O terceiro e último conjunto será:

$$\text{III) } \langle G_{\mu I} G_{\nu J} \rangle_L = uWw^t + Wvz^t + Zv^tW^t + ztz^t \quad (70)$$

com $I, J = 2, 3, \dots, N$.

Nele encontramos $(N-1)^2$ elementos. Para anularmos as parcelas em que u e v aparecem, precisamos fazer apenas $W = 0$. Assim:

$$\langle G_{\mu I} G_{\nu J} \rangle_L = ztz^t .$$

O passo seguinte seria apenas o de ajustar os coeficientes livres nos termos que restaram (os quais só dependem destes), de forma a obtermos os resultados desejados.

3.f EXEMPLO

A partir de agora, iremos analisar um caso particular do modelo de Gauge Estendido. Este estará escrito na base dos campos construtores e contará com a presença de três campos. Um deles associado a massa nula (o campo que pode ser relacionado ao fóton) e dois campos invariantes de Gauge, massivos. Neste exercício estaremos interessados em colocar em prática os resultados teóricos obtidos ao longo deste capítulo. Sobretudo a noção de campo físico e a matriz Ω , e a maneira pela qual devemos ajustar os coeficientes livres para que o modelo possa descrever realmente partículas físicas.

A Lagrangiana livre do modelo, somente a parte realmente importante para os resultados que estamos interessados em obter, é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = V^{\mu l} (K_1 \square + M^2) P_{\mu l}^T V^{\nu} + V^{\mu l} (B \square + M^2) P_{\mu l}^L V^{\nu} \quad (71)$$

onde teremos:

$$\left. \begin{aligned} K_T &= \begin{pmatrix} a & 0 & b/2 \\ 0 & a & 0 \\ b/2 & 0 & a \end{pmatrix}, & M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & \mu^2/2 \\ 0 & \mu^2/2 & m^2 \end{pmatrix} \\ K_L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}, & G_F &= \begin{pmatrix} -1/\xi & -\sigma/\xi & 0 \\ -\sigma/\xi & -\sigma^2/\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= K_L + G_F = \begin{pmatrix} -1/\xi & -\sigma/\xi & 0 \\ -\sigma/\xi & s_1 - \sigma^2/\xi & s_2 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (71a)$$

(todas essas matrizes são simétricas.)

Seguindo os passos do que foi feito nos itens precedentes e as justificativas dadas para tal procedimento, iremos rodar a base em que está escrita (71), até alcançarmos aquela dos campos físicos transversais. Logo, o primeiro passo é a diagonalização da matriz cinética K_T .

Partindo da equação de autovalor para K_T ,

$$(K_T - \lambda \square) \mathbf{V} = 0,$$

chegamos a uma equação algébrica de 3º grau:

$$(a - \lambda) (a - \lambda - b^2/4) = 0$$

cujas soluções são os autovalores de K_T que estamos procurando:

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = a + b/2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = a - b/2. \quad (72)$$

A estes autovalores estão associados três autovetores linearmente independentes, que ao normalizarmos se escrevem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\longmapsto V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &\longmapsto V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &\longmapsto V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Com esse resultado, a obtenção de S a matriz ortogonal que diagonaliza K_T é imediata:

$$S = \begin{pmatrix} V_1^t \\ V_2^t \\ V_3^t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Utilizando os autovalores dados em (72) podemos construir a matriz cinética transversal diagonalizada \tilde{K}_T :

$$\tilde{K}_T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+b/2 & 0 \\ 0 & 0 & a-b/2 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Agora podemos impor a primeira condição sobre os coeficientes livres, e esta será para garantir que nenhum dos campos nesse setor seja um ghost. Exigimos que os elementos de \tilde{K}_T sejam

positivos definidos:

$$K_{ii}^T > 0$$

o que implica em, (75)

$$a > 0 \quad \text{e} \quad a > |b|/2.$$

Prosseguindo no nosso objetivo de construir a matriz Ω_T , que nos levará para o setor físico-T, devemos diagonalizar a matriz de massa transformada \tilde{M}^2 . Esta é obtida da aplicação sucessiva da rotação que diagonaliza K_T e daquela que deixa essa última matriz proporcional à identidade:

$$\tilde{M}^2 = \tilde{K}_T^{-1/2} S M^2 S^t \tilde{K}^{-1/2}.$$

Usando as expressões de \tilde{K}_T e S dadas em (73) e (74), respectivamente, obtemos o seguinte resultado para a matriz \tilde{M}^2 ,

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r & u & p \\ u & s & q \\ p & q & tu \end{pmatrix}$$

em termos dos coeficientes livres, estes novos parâmetros se escrevem:

$$\begin{aligned} r &= 4m^2/a, & u &= -\mu^2 \sqrt{\frac{Z}{a(a+b/2)}} \\ p &= \mu^2 \sqrt{\frac{Z}{a(a-b/2)}}, & s &= \frac{2m^2}{(a+b/2)} \\ q &= -\frac{2m^2}{\sqrt{a^2-b^2/4}}, & tu &= \frac{2m^2}{(a+b/2)}. \end{aligned} \quad (76)$$

Antes de começarmos os cálculos para diagonalizar \tilde{M}^2 , vamos

fazer uma previsão sobre os autovalores que iremos obter, baseados nos resultados teóricos que fomos capazes de demonstrar.

Como vimos no capítulo anterior às massas, ou ainda, os pólos dos propagadores, são independentes da base em que estamos descrevendo o modelo. Assim, devido ao fato de termos uma massa nula na parametrização dos campos construtores (71), esperamos que um dos autovalores de \tilde{M}^2 deva também ser nulo. Logo, da equação característica de 3º grau cujas raízes serão as massas do setor-T:

$$\det (\tilde{M}^2 - \rho 1) = 0, \text{ ou ainda}$$

$$\begin{aligned} \rho^3 - \frac{\rho^2}{4} [s+r+tu] - \frac{\rho}{16} [-rs+tu(r+s)+p^2+q^2+u^2] - \\ - \frac{1}{64} [rstu + 2upq - (q^2r+sp^2+u^2tu)] = 0, \end{aligned} \quad (77)$$

devemos calcular a parcela independente de ρ explicitamente em função dos coeficientes livres, e mostrar que ela é zero. Na verdade, isso realmente ocorre, ou seja:

$$rstu + 2upq - (q^2r + sp^2 + u^2tu) = 0 .$$

Este fato nos fornece uma raiz nula: $\tan \phi = 0$ e nos deixa com uma equação algébrica do 2º grau, cujas soluções serão as duas massas que estão faltando. Estas são dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_{am} 1 &= \frac{m^2(8a^2-b^2) + \sqrt{b^4 m^4 + 4a^2 \mu^4 (4a^2-b^2)}}{8a(a^2-b^2/4)} \\ \lambda_{am} 2 &= \frac{m^2(8a^2-b^2) - \sqrt{b^4 m^4 + 4a^2 \mu^4 (4a^2-b^2)}}{8a(a^2-b^2/4)} \end{aligned} \quad (78)$$

De posse dos resultados acima, podemos impor as outras condições sobre os coeficientes livre, dessa vez para que não tenhamos táquions entre os quantas do setor-T. No nosso caso elas são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{am} 1 &> 0, \\ \text{a qual é satisfeita se levarmos em conta (75) e} \\ \lambda_{am} 2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

que implica em termos a seguinte inequação envolvendo os coeficientes livres:

$$m^4(8a^2-b^2)^2 > b^4 m^4 + 4a^2 \mu^4 (4a^2-b^2)$$

esta se reduz ainda para:

$$m^4 > \mu^4/4. \quad (80)$$

Assim, se as condições (75) e (80) forem adicionadas ao fato de termos as massas (78) independentes dos parâmetros de fixação-de-Gauge, podemos garantir (como estabelecido no item 3.d) que os quanta transversais estão aptos para descrever partículas físicas.

Associados aos autovalores de \tilde{M}^2 temos três autovalores ortonormalizados, os quais, devido as suas expressões extensas em termos dos coeficientes livres, só puderam ser obtidos com a ajuda do sistema algébrico REDUCE.

O autovetor correspondente é:

$$\text{lam } \phi \text{ é } \mathbf{v}_\phi = \frac{1}{\|\mathbf{v}_\phi\|} \begin{pmatrix} -(ps - qu) \\ pu - qr \\ rs - u^2 \end{pmatrix} \text{ e } \|\mathbf{v}_\phi\| = \sqrt{\mathbf{v}_\phi^L \mathbf{v}_\phi}; \quad (81)$$

$$\text{lam } 1 \text{ é } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \begin{pmatrix} (x+\sqrt{W})p+\theta_1 \\ -((x_1-\sqrt{W})q-\theta_2) \\ (x_2+\sqrt{W})tu+2y \end{pmatrix} \text{ e } \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\mathbf{v}_1^L \mathbf{v}_1} \quad (82)$$

onde:

$$W = -2\ell_2 r + 4y_2 + y_1 - 2stu,$$

$$Y_1 = r^2 + s^2 + (tu)^2,$$

$$Y_2 = p^2 + q^2 + u^2,$$

$$\ell_2 = s + tu,$$

$$x = r - s + tu,$$

$$x_1 = r - \ell_2,$$

$$x_2 = -(s + r) + tu,$$

$$\theta_1 = 2qu, \quad \text{e}$$

$$\theta_2 = 2pu,$$

tivemos que introduzir esses novos parâmetros devido a complexidade que resultaria, caso tentássemos escrever \mathbf{v}_1 em termos daqueles usados até o momento (76). E, finalmente,

$$\text{lam } 2 \text{ é } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \begin{pmatrix} -((x-\sqrt{W})p+e_1) \\ (x_1+\sqrt{W})q-e_2 \\ (\sqrt{W}-x_2)tu-2y \end{pmatrix} \text{ e } \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_2} \quad (83)$$

Tomando esses três autovetores podemos formar a matriz R, a qual diagonaliza a matriz de massa transformada \tilde{M}^2 :

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \\ \mathbf{v}_3^t \end{pmatrix}, \quad (84)$$

o resultado explícito se encontra no Anexo. Depois desse último passo podemos, finalmente, determinar a matriz Ω_T que nos levará para a base dos campos físicos $G_{\mu i}$. De (73), (74) e (84) calculamos:

$$\Omega_T^{-1} = RK^{1/2}S \quad (85)$$

E obtemos, depois de algum tempo de CPU, os elementos da matriz Ω_T . Vamos listar aqui $(\Omega_T^{-1})_{11}$ que será útil na discussão subsequente, os demais elementos estão dados no Anexo.

$$(\Omega_T^{-1})_{11} = \frac{\left[(pu-qr) \sqrt{2a-b} + (rs-u^2) \sqrt{2a+b} \right]}{\sqrt{(4a^2-b^2)(q^2(r^2+u^2)-2(r+s)pqu+p^2(s^2+u^2)+r^2s^2-2rsu^2+u^4)}} \quad (86)$$

Nessa nova parametrização, a Lagrangiana do modelo seria reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = G^{\mu\nu} (\square + m^2) P_{\mu\nu}^T G^\nu + G^{\mu\nu} (\hat{B}\square + m^2) P_{\mu\nu}^L G^\nu,$$

tal que:

$$m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & lam\ 1 & 0 \\ 0 & 0 & lam\ 2 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \Omega_L^t \begin{pmatrix} -1/\xi & -\sigma/\xi & 0 \\ -\sigma/\xi & s_1 - \sigma^2/\xi & s_2 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} \Omega_L.$$

Como último resultado devemos verificar as condições sobre os parâmetros livres para que tenhamos partículas físicas no setor longitudinal. Começemos com as condições sobre as massas dos quanta de spin-0, as quais são obtidas a partir de:

$$(-\lambda) \det(s^{-1}M^2 - \lambda 0) = 0, \quad (55)$$

isso indica que uma das massas é nula, o que já era previsto, pois no setor transversal também obtivemos uma massa zero, e as duas restantes são dadas como as raízes de uma equação algébrica do 2º grau. A partir de (51) e (71) tiramos as matrizes s e M^2 :

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow s^{-1} = -\frac{1}{s_2^2} \begin{pmatrix} 0 & -s_2 \\ -s_2 & s_1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2m^2 & \mu^2 \\ \mu^2 & 2m^2 \end{pmatrix}.$$

Dai tiramos, ao levar (87) em (55), as raízes da equação

característica resultante:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2s_2^2} \left\{ (-s_2\mu^2 + m^2s_1) \pm \sqrt{m^4s_1^2 + 4m^4s_2^2 - 2s_1s_2m^2\mu^2} \right\} \quad (88)$$

Para não termos táquions nesse setor devemos exigir que:

$$\lambda_1 \text{ e } \lambda_2 > 0 ,$$

o que é prontamente satisfeito se valer a condição (80). Vemos também de (88) que os pólos dos propagadores longitudinais não dependem dos parâmetros de fixação-de-Gauge. Com isso, resta apenas impormos que os resíduos associados a esses pólos sejam positivos definidos. Isso pode ser feito de duas maneiras, como mostrado no item anterior. Iremos seguir aquela dada pelo procedimento (b), devido a simplicidade operacional, ressaltando o fato de que teríamos um número menor de restrições sobre os coeficientes livres, no caso de termos usado o procedimento do item (a).

Assim, inicialmente, devemos retirar a dependência do propagador longitudinal com ξ e α_i . Faremos isso explicitamente para o propagador do campo $G_{\mu 1}$:

$$\langle G_{\mu 1} G_{\nu 1} \rangle_L = x^2 u + x (vy^t + yv^t) + yty^t. \quad (88)$$

Tínhamos chegado a conclusão que, para obtermos um resultado livre de ξ e α_i , devíamos fazer:

$$x = \Omega_{11}^{-1} = 0 .$$

De (86) isso implica que:

$$(pu - qr) \sqrt{2a - b} + (rs - u^2) \sqrt{2a + b} = 0 .$$

E, depois de utilizarmos as definições (76), obtemos a seguinte condição sobre os coeficientes livres:

$$m^2 = \pm \mu^2/2 .$$

De posse desse resultado, devemos voltar aos propagadores independentes dos parâmetros de fixação-de-Gauge:

$$\langle G_{\mu_1 \nu_1} \rangle_L = y t y^t ,$$

onde:

$$t = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} m^2 (1 + s_1/s_2) & \mp m^2 (1 - s_1^2/s_2^2) - s_2 \square \\ \mp m^2 - s_2 \square & m^2 (1 \pm s_2/s_2) \end{pmatrix}$$

$$\Delta = m^2 (\pm 2s_2 - s_1) \square + s_2^2 \square^2 ,$$

e

$$y = \left[\begin{pmatrix} (\Omega_T^{-1})_{12} & (\Omega_T^{-1})_{13} \end{pmatrix} \right] \Big|_{m^2 = \pm \mu^2/2} .$$

E exigir que os resíduos correspondentes sejam positivos definidos, ganhando assim novas condições sobre os coeficientes livres. De posse de tais condições garantiríamos que os quanta do setor longitudinal poderiam também descrever partículas físicas.

APÊNDICE DO CAPÍTULO III

SOBRE AS CONVENIÊNCIAS DAS PARAMETRIZAÇÕES

Vamos mostrar aqui um exemplo da utilidade de trabalharmos em uma parametrização diferente daquela que diagonaliza a teoria. Usaremos o modelo de Gauge Estendido nas suas bases dos campos construtores e dos campos físicos transversais.

O problema que iremos tratar é a necessidade de usarmos um termo de fixação-de-Gauge. Na base dos campos construtores vimos, imediatamente, da Lagrangiana livre (8), que o termo cinético longitudinal era dado por uma matriz K_L (9), não-inversível. Dessa forma, o propagador para esse setor não existia e, com isso o próprio propagador do modelo. O que fizemos então, para remediar esse problema foi introduzir um termo $\mathcal{L}_{G.F.}$ que se somasse a parte cinética longitudinal, de tal forma que a nova matriz E resultante fosse inversível.

Imaginemos, então, que tomando a Lagrangiana (8), passássemos esta, com a ajuda de Ω_T , para a parametrização dos campos físicos transversais $G_{\mu I}$. Isso resultaria em:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = G^{\mu\lambda} (\square + m^2) F_{\mu\nu}^T G^{\nu\lambda} + G^{\mu\lambda} (\tilde{K}_L \square + m^2) F_{\mu\nu}^L G^{\nu\lambda} \quad (A1)$$

$$\text{onde } \tilde{K}_L = \Omega_T^t K_L \Omega_T.$$

A nova matriz cinética do setor longitudinal, resultante do produto especificado em (A1), é aparentemente inversível. Logo, se tivéssemos sido apresentado ao modelo nessa base, sem passarmos pelas outras, seria bastante difícil determinarmos para o caso geral (N campos) a necessidade de um termo de fixação-de-Gauge, uma vez que seríamos levados a pensar que o propagador longitudinal fosse bem definido.

Já, ao passarmos pela base dos campos V_μ , não pensaríamos dessa forma, pois:

$$\det K_L = 0, \quad (A2)$$

e com isso na nova base, ao tomarmos o determinante do termo cinético \tilde{K}_L encontraríamos:

$$\det \tilde{K}_L = \det (\Omega_T^t K_L \Omega_T) = 0,$$

o que demonstra a não inversibilidade de K_L . Dessa maneira, o propagador nessa nova parametrização também não existe.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÃO

A introdução de diferentes potenciais dentro de um mesmo grupo de simetria, cujo assunto foi tópico desta tese, oferece novas possibilidades para uma Teoria de Gauge. Assim, procuraremos abaixo, salientar algumas destas possibilidades:

4a. USO DE GRUPOS DE SIMETRIA SIMPLES NA DESCRIÇÃO DE MUITOS CAMPOS DE GAUGE

Como vimos no modelo em estudo, fomos capazes de introduzir N Campos de Gauge, todos estes associados ao mesmo grupo $U(1)$ local, caracterizado pelo parâmetro $\alpha(x)$. Este resultado vai contra a interpretação dos Modelos de Gauge atuais, nos quais o número de Campos de Gauge é idêntico ao de geradores do grupo de simetria escolhido [23].

4b. MASSA SEM O USO DO MECANISMO DE HIGGS

No nosso modelo surgem, naturalmente, bósons vetoriais massivos, sem com isso perdermos a invariância de Gauge. Este fato decorre de termos associando vários campos a um mesmo grupo de simetria. Assim, o modelo revela-se uma opção àqueles que utilizam o mecanismo de quebra espontânea de simetria [23].

4.c O APARECIMENTO DE PARTICULAS COM SPIN ZERO

Nós obtivemos com a ajuda da espectroscopia do modelo, a confirmação da presença, neste, de quanta com spin zero, provenientes do setor longitudinal. Assim, a conclusão normalmente tirada de que a cada campo de Gauge está associado um e somente um quantum, é contrariada. É bom ressaltarmos que, de forma efetiva, não existe uma maneira de evitarmos a presença do setor-L no modelo. Certamente, isto é possível na aproximação *tree level*, pois a inversão dos propagadores seria garantida apenas pela presença do termo de fixação-de-Gauge, mas veríamos que, a nível de correções radiativas, as excitações longitudinais apareceriam naturalmente.

A impossibilidade de formularmos o modelo de Gauge estendido sem o setor-L nos proíbe interpretar os quanta presentes como mediadores de alguma interação, pois como sabemos [23], estes nas teorias aceitas atualmente, apresentam apenas os modos de propagação transversais.

Existem tentativas, em andamento, de evitar-se a presença da parcela longitudinal. Estas baseiam-se na procura de simetrias globais no modelo, que dessem origem de forma efetiva à correntes conservadas [36].

4.d A POSSIBILIDADE DE ESCOLHA DE UMA PARAMETRIZAÇÃO

Depois de lermos e entendermos o capítulo 2, aprendemos que ao mudarmos, através de uma transformação Ω , o conjunto de campos com os quais escrevemos uma teoria, a física contida nela não se altera. Isto é, quantidades físicas relevantes na descrição do sistema de partículas em estudos, tais como: massa, carga, spin, tensor momento-energia, etc... não sentem a mudança da base. Vimos, ainda, que as simetrias geradas por grupos internos unitários se mantêm de uma maneira generalizada: o número de parâmetros, as constantes de estrutura e os próprios parâmetros não se alteram, apesar de perdermos o caráter unitário do Grupo. Dentro deste contexto obtivemos, também, que as simetrias discretas C,P,T, e CPT valem em qualquer parametrização considerada.

Dessa forma, ao nos depararmos com uma mudança de base satisfazendo as condições de Ω em um modelo qualquer, em teoria de campos, esta já estará plenamente justificada, pois a física descrita pelo modelo não será alterada. Mas, este não pode ser o maior mérito deste capítulo uma vez que, como já vimos, o Teorema de Borshcer [30] garante esse mesmo resultado, não só para reparametrização do tipo de Ω , como para qualquer

outra que não dependa dos momenta das partículas envolvidas no processo descrito. Com isso uma redefinição dos campos de Gauge provenientes, tanto da simetria $SU(2)$ como do $U(1)$, no modelo de Weinberg-Salam, a qual leva da base inicial para aquela em que aparecem os campos W_{μ}^{\pm} , Z_{μ}^0 (mediadores da interação fraca) e, o A_{μ} (fóton) é plenamente garantida pelo Teorema citado.

O ponto mais importante do capítulo 2 é, na verdade, despertar nossa atenção para o fato de que é, por vezes, preferível formularmos um dado modelo de campos em sua forma não-diagonal, diferentemente do que se pensa usualmente. Isso ficou explícito ao observarmos o apêndice do capítulo 3, no qual mostra-se que a necessidade de introduzirmos um termo de fixação-de-Gauge no Modelo de Gauge Estendido, só fica aparente ao trabalharmos na base dos campos construtores (não-diagonal).

Concluindo, observaríamos que, a partir da possibilidade de escolha de uma das parametrizações que a teoria oferece, pode-se simplificar o estudo de um problema físico através de uma certa parametrização conveniente de campos. Assim sendo, o estudo das simetrias e da renormalizabilidade do Modelo deverão ser conduzidos por parametrizações apropriadas.

4.e ESPECTROSCOPIA CONSISTENTE

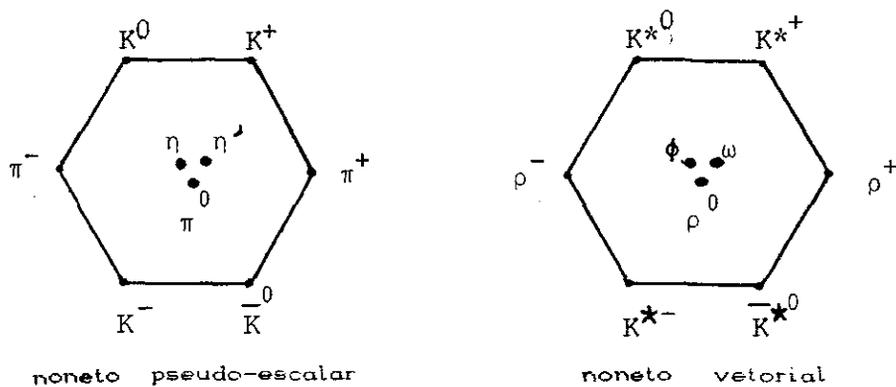
Um modelo como o nosso, envolvendo mais campos, não deve ser testado apenas por seu contexto fenomenológico. Para conseguir candidatar-se a uma teoria fisicamente sensata,

deverá possuir as virtudes da consistência. Neste sentido, o esforço do texto foi o de considerar que a espectroscopia derivada destes Modelos de Gauge Estendidos, será invariante sob qualquer parametrização que preserve o teorema de Borscher.

4.f UM MODELO MINIMO

Como analisamos, nossa teoria com N campos vetoriais contém N quanta com spin-1, onde necessariamente um deles é sem massa, e, (N-1) quanta com spin-0. Desta forma, podemos afirmar que este modelo, já de partida, contém o fóton. Resta, então, propor as possibilidades de preencher as famílias vetoriais e escalares.

Uma primeira proposta seria a de considerar os nonetos pseudo-escalar e o noneto vetorial como que reagrupados através deste modelo estendido.



Relembrando [37], a partir de quarks (u,d,s) e anti-quarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) gera-se dois tipos de mésons. Os quarks sendo férmions apresentam spin 1/2, assim as combinações

citadas entre esses e os anti-quarks resultariam em partículas de spin-1, vetores e de spin-0, escalares (na verdade pseudo-escalares). Na figura acima, à esquerda, temos o noneto de mésons pseudo-escalares e, à direita, o noneto de mésons vetoriais, ambos representando partículas cujo momento angular orbital é zero (S) [38]. Existem mais nonetos, representando combinações diferentes dos valores de spin (0 e 1) com os de momento angular orbital (P,D,F,...) [38] dando assim, nonetos cujos momentos angulares totais são distintos. Abaixo, damos algumas propriedades e as funções de onda obtidas pela combinação dos quarks e anti-quarks para certos mésons pseudo-escalares [37].

Símbolo	Massa (MeV)	Q	I	I_3	S	Vida-Média ^a	Função de Onda
π^+	140	1	1	1	0	2.6(-8)	$-u\bar{d}$
π^0	135	0	1	0	0	8.3(-17)	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$
π^-	140	-1	1	-1	0	2.6(-8)	$d\bar{u}$
k^+	494	1	1/2	1/2	-1	1.2(-8)	$u\bar{s}$
k^0	498	0	1/2	-1/2	-1	b	$d\bar{s}$
\bar{k}^0	498	0	1/2	1/2	+1	b	$-s\bar{d}$
k^-	494	-1	1/2	-1/2	+1	1.2(-8)	$s\bar{u}$

onde: Q → carga, I → isospin e S → estranheza
a → As vidas-médias estão em segundos, e 2.6(-8) significa 2.6×10^{-8} seg., etc.
b → \bar{k}^0 e k^0 não têm vidas-médias bem definidas, ao contrário das combinações lineares $(k^0 \pm \bar{k}^0)/\sqrt{2}$, que apresentam os respectivos valores 8.9(-11) e 5.2(-8).

Esse processo que se usa, atualmente, para obter os diferentes mésons e colocá-los em nonetos, conforme a semelhança de algumas das suas propriedades, é mais uma classificação do que propriamente uma descrição da dinâmica de processos envolvendo tais partículas. Podemos assim, imaginar que o Modelo de Gauge Estendido venha a preencher esse papel com os quanta do setor transversal representando os mésons vetoriais, e os quanta longitudinais descrevendo os mésons pseudo-escalares.

É importante ressaltar que, algumas das propriedades dos nonetos acima, tais como: massa, spin e invariâncias discretas, já conseguem ser reproduzidas pelo modelo estendido estudado. Entretanto, deve-se ressaltar que esta tese não desenvolveu considerações a respeito das cargas.

4.g CONCLUSÃO FINAL

Atualmente, as teorias se concentram em identificar as partículas mediadoras e deixam a explicação de um grande número de outras, consideradas como não mediadoras, para o modelo de quarks.

Tomando como exemplo a partícula J/ψ , observa-se que as Teorias de Gauge não a sinaliza. A sua compreensão é deixada para o modelo de quarks, que a cataloga como um estado ligado ($c\bar{c}$). A crítica aqui é que tal explicação não pode se desvencilhar do fato de que os quarks nunca foram avistados. A consequência disto é que os potenciais de ligação que surgem para explicar os estados excitados desta partícula são impostos

a-prioristicamente. Isto é, um modelo pretensamente teórico acaba por recair na manipulação de parâmetros fenomenológicos arbitrários, introduzidos à mão. Neste sentido, apareceria então a conveniência destes modelos estendidos. A partícula J/ψ seria testada dentro de um contexto mais teórico, embora sem chamar em causa a presença de quarks.

ANEXO

RESULTADOS COM O REDUCE

Listamos inicialmente a matriz R, que diagonaliza a matriz de massa modificada (Cap. 3, eq. (71)) em termos dos parâmetros definidos nessa ocasião. Por razões práticas essa matriz foi definida em Reduce como erre(3,3). Seus componentes são:

$$\text{erre}(1,1) := - (p^2 s - q^2 u) / \text{sqrt}((r^2 + u)^2 * q^2 - 2 * (r + s) * p * q * u + (s^2 + u)^2 * p^2 + r^2 * s^2 - 2 * r * s * u^2 + u^4)$$

$$\text{erre}(1,2) := (p * u - q * r) / \text{sqrt}((r^2 + u)^2 * q^2 - 2 * (r + s) * p * q * u + (s^2 + u)^2 * p^2 + r^2 * s^2 - 2 * r * s * u^2 + u^4)$$

$$\text{erre}(1,3) := (r * s - u) / \text{sqrt}((r^2 + u)^2 * q^2 - 2 * (r + s) * p * q * u + (s^2 + u)^2 * p^2 + r^2 * s^2 - 2 * r * s * u^2 + u^4)$$

$$\begin{aligned} \text{erre}(2,1) := & ((r - s + tu) * q + \text{sqrt}(-2*(s + tu)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + \\ & r^2 + s^2 - 2*s*t*u + tu^2 + 4*u^2)*p + 2*q*u)/(2*(\text{sqrt}(- \\ & 2*(s + tu)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2*s*t*u + \\ & tu^2 + 4*u^2)*((r - s + 3*tu)*p - (r - s - 3*tu)* \\ & q + 4*p*q*u - r*tu - s*tu + tu^3) - (2*(s + \\ & 2*tu)*r - r^2 - s^2 + 2*s*t*u - 5*tu^2 - 4*u^2)* \\ & q - (2*(s + tu)*r - 8*q^2 - r^2 - s^2 + 4*s*t*u - 5* \\ & tu^2 - 4*u^2)*p + 4*p^4 + 4*p*q*t*u*u + 4*q^4 + r^4 \\ & *tu - 2*r*tu^3 + s*tu^2 - 2*s*tu^3 + tu^4 + 2*tu * \\ & u^2) \\ & u)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{erre}(2,2) := & -((r - s - tu) * q - \text{sqrt}(-2*(s + tu)*r + 4*p^2 + 4*q^2 \\ & + r^2 + s^2 - 2*s*t*u + tu^2 + 4*u^2)*q - 2*p*u)/(2*(\\ & \text{sqrt}(-2*(s + tu)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2* \\ & s*t*u + tu^2 + 4*u^2)*((r - s + 3*tu)*p - (r - s - \\ & 3*tu)*q + 4*p*q*u - r*tu - s*tu + tu^3) - \\ & (2*(s + 2*tu)*r - r^2 - s^2 + 2*s*t*u - 5*tu^2 - 4* \\ & u^2)*q - (2*(s + tu)*r - 8*q^2 - r^2 - s^2 + 4*s*t* \\ & tu - 5*tu^2 - 4*u^2)*p + 4*p^4 + 4*p*q*t*u*u + 4* \\ & q^4 + r^4*tu - 2*r*tu^3 + s*tu^2 - 2*s*tu^3 + tu^4 + \\ & u^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2(tu^2 + u^3)} \\
 \text{erre}(2,3) := & \left(\sqrt{-2(s+tu)xr + 4xp^2 + 4xq^2 + r^2 + s^2 - 2sxtu} \right. \\
 & \left. + tu^2 + 4xu^2 \right) xtu + 2xp^2 + 2xq^2 - rxtu - sxtu + tu^2 / (2 \\
 & \times (\sqrt{-2(s+tu)xr + 4xp^2 + 4xq^2 + r^2 + s^2 - 2sxtu} \\
 & \times (tu^2 + 4xu^2) \times ((r-s+3xtu)xp^2 - (r-s-3 \\
 & \quad xtu)xq^2 + 4xp^2xq^2 - rxtu^2 - sxtu^2 + tu^3) - \\
 & (2(s+2xtu)xr - r^2 - s^2 + 2sxtu - 5xtu^2 - 4xu^2 \\
 & \quad)xq^2 - (2(s+tu)xr - 8xq^2 - r^2 - s^2 + 4sxtu \\
 & \quad - 5xtu^2 - 4xu^2)xp^2 + 4xp^4 + 4xp^2xq^2xu + 4xq^4 \\
 & \quad + r^2xtu^2 - 2rxtu^3 + s^2xtu^2 - 2sxtu^3 + tu^4 + 2x \\
 & \quad tu^2xu^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{erre}(3,1) := & ((r-s+tu)xp - \sqrt{-2(s+tu)xr + 4xp^2 + 4xq^2 + \\
 & r^2 + s^2 - 2sxtu + tu^2 + 4xu^2}) xp + 2xqxu / (2 \times (\sqrt{-2(s+tu)xr + 4xp^2 + 4xq^2 + r^2 + s^2 - 2sxtu + \\
 & tu^2 + 4xu^2} \times ((r-s+3xtu)xp^2 - (r-s-3xtu)xq^2 + 4xp^2xq^2 - rxtu^2 - sxtu^2 + tu^3) + (2(s+ \\
 & 2xtu)xr - r^2 - s^2 + 2sxtu - 5xtu^2 - 4xu^2) \times \\
 & q^2 + (2(s+tu)xr - 8xq^2 - r^2 - s^2 + 4sxtu - 5 \\
 & tu^2 - 4xu^2)xp^2 - 4xp^4 - 4xp^2xq^2xu - 4xq^4 - r^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & tu^2 + 2xrxtu - s^2xtu + 2xsxtu - tu^4 - 2xtu^2 \\
 & u))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{erre}(3,2) := & - ((r - s - tu) * q + \text{sqrt}(-2 * (s + tu) * r + 4 * p^2 + 4 * q^2 \\
 & + r^2 + s^2 - 2 * s * tu + tu^2 + 4 * u^2) * q - 2 * p * u) / (2 * \\
 & \text{sqrt}(-2 * (s + tu) * r + 4 * p^2 + 4 * q^2 + r^2 + s^2 - 2 * \\
 & s * tu + tu^2 + 4 * u^2) * ((r - s + 3 * tu) * p^2 - (r - s - \\
 & 3 * tu) * q^2 + 4 * p * q * u - r * tu^2 - s * tu^2 + tu^3) + \\
 & (2 * (s + 2 * tu) * r - r^2 - s^2 + 2 * s * tu - 5 * tu^2 - 4 * \\
 & u^2) * q^2 + (2 * (s + tu) * r - 8 * q^2 - r^2 - s^2 + 4 * s * \\
 & tu - 5 * tu^2 - 4 * u^2) * p^2 - 4 * p^2 - 4 * p * s * tu * u - 4 * \\
 & q^2 - r^2 * tu^2 + 2 * r * xt^3 - s^2 * tu^2 + 2 * s * xt^3 - tu^4 - \\
 & 2 * tu^2 * u))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{erre}(3,3) := & - (\text{sqrt}(-2 * (s + tu) * r + 4 * p^2 + 4 * q^2 + r^2 + s^2 - 2 * s * \\
 & tu + tu^2 + 4 * u^2) * tu - 2 * p^2 - 2 * q^2 + r * tu + s * tu - \\
 & tu^2) / (2 * (\text{sqrt}(-2 * (s + tu) * r + 4 * p^2 + 4 * q^2 + r^2 + \\
 & s^2 - 2 * s * tu + tu^2 + 4 * u^2) * ((r - s + 3 * tu) * p^2 - (r \\
 & - s - 3 * tu) * q^2 + 4 * p * q * u - r * tu^2 - s * tu^2 + \\
 & tu^3) + (2 * (s + 2 * tu) * r - r^2 - s^2 + 2 * s * tu - 5 * \\
 & tu^2 - 4 * u^2) * q^2 + (2 * (s + tu) * r - 8 * q^2 - r^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 + 4\varepsilon s^2 t u - 5s^2 t u^2 + 4s^2 u^2 + 4p^2 - 4s p^2 - 4s p^2 q^2 \\ & t u^3 u - 4s^2 q^2 - r^2 s^2 t u + 2s r^2 t u^3 - s^2 s^2 t u + 2s^2 s^2 t u^3 \\ & - t u^4 - 2s^2 t u^2 u^2 \end{aligned}$$

O segundo conjunto de resultados são os elementos de Ω^{-1} (Cap. 3, eq. (80)) dados em termos dos mesmos parâmetros introduzidos para R. Os valores de $\omega^{-1}(3,3)$ são:

$$\omega^{-1}(1,1) := (\text{sqrt}(2*a - b)*(p*u - q*r) + \text{sqrt}(2*a + b)*(r*s - u)) / (\text{sqrt}(2*a + b)*\text{sqrt}(2*a - b)*\text{sqrt}((r^2 + u)^2 * q^2 - 2*(r^2 + u)*p*q*u + (s^2 + u)^2 * p^2 + r^2 * s^2 - 2*r*s*u + u^4))$$

$$\omega^{-1}(1,2) := (\text{sqrt}(2*a - b)*((r - s - t*u)*q - 2*p*u) - \text{sqrt}(-2*(s + t*u)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2*s*t*u + t^2 + 4*u^2)*(\text{sqrt}(2*a - b)*q + \text{sqrt}(2*a + b)*t*u) - \text{sqrt}(2*a + b)*((2*p^2 + 2*q^2 - r*t*u - s*t*u + t^2)) / (2*\text{sqrt}(2*a + b)*\text{sqrt}(2*a - b)*((2*(s + 2*t*u)*r - r^2 - s^2 + 2*s*t*u - 5*t^2 - 4*u^2)*q^2 + (2*(s + t*u)*r - 8*q^2 - r^2 - s^2 + 4*s*t*u - 5*t^2 - 4*u^2)*p^2 - 4*p^4 - 4*p*q*t*u*u - 4*q^4 - r^2*t*u + 2*r*t^2*tu - s^2*tu + 2*s*tu^2 - t^2 - 2*tu^2*u) - \text{sqrt}(-2*(s + t*u)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2*s*t*u + t^2 + 4*u^2)*((r - s + 3*t*u)*p^2 - (r - s - 3*t*u)*q^2 + 4*p*q*u - r*tu - s*tu + tu^3))$$

$$\begin{aligned} \text{omega}^{-1}(1,3) := & - (\text{sqrt}(2*a - b) * ((r - s - tu) * q - 2*p*u) + \text{sqrt}(-2 \\ & * (s + tu) * r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2*s*tu + tu^2 \\ & + 4*u^2) * (\text{sqrt}(2*a - b) * q + \text{sqrt}(2*a + b) * tu) - \text{sqrt} \\ & (2*a + b) * (2*p^2 + 2*q^2 - r*tu - s*tu + tu^2)) / (2* \\ & \text{sqrt}(2*a + b) * \text{sqrt}(2*a - b) * (((2*(s + 2*tu) * r - r^2 \\ & - s^2 + 2*s*tu - 5*tu^2 - 4*u^2) * q + (2*(s + \\ & tu) * r - 8*q^2 - r^2 - s^2 + 4*s*tu - 5* \\ & tu^2 - 4*u^2) * p - 4*p^2 - 4*p*q*tu*u - 4*q^4 \\ & - r^2*tu + 2*r*tu^3 - s^2*tu + 2*s*tu^3 - tu^4 - \\ & 2*tu*u^2) + \text{sqrt}(-2*(s + tu) * r + 4*p^2 + 4*q^2 \\ & + r^2 + s^2 - 2*s*tu + tu^2 + 4*u^2) * ((r - s + 3* \\ & tu) * p - (r - s - 3*tu) * q + 4*p*q*u - r^2 \\ & tu^2 - s*tu^3 + tu^3))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{omega}^{-1}(2,1) := & (p*s - q*u) / (\text{sqrt}(a) * \text{sqrt}((r^2 + u^2) * q - 2*(r + s) * p * q \\ & * u + (s + u) * p^2 + r * s^2 - 2*r*s*u + u^4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{omega}^{-1}(2,2) := & ((r - s + tu) * p + \text{sqrt}(-2*(s + tu) * r + 4*p^2 + 4*q^2 + \\ & r^2 + s^2 - 2*s*tu + tu^2 + 4*u^2) * p + 2*q*u) / (2*s * \text{sqrt}(a) \\ & * (((2*(s + 2*tu) * r - r^2 - s^2 + 2*s*tu - 5*tu^2 - 4*q^2 \\ & u) * q + (2*(s + tu) * r - 8*q^2 - r^2 - s^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 4rsxtu - 5xtu^2 - 4xu^2) * p^2 - 4xp^4 - 4xp * q * \\
 & tu * u - 4xq^4 - r^2 * xtu^2 + 2xr * xtu^3 - s^2 * xtu^2 + 2 * s \\
 & xtu^3 - tu^4 - 2 * xtu * xu^2) - \text{sqrt}(-2 * (s + tu) * r \\
 & + 4xp^2 + 4xq^2 + r^2 + s^2 - 2 * s * xtu + tu^2 + 4xu^2) * \\
 & ((r - s + 3xtu) * p^2 - (r - s - 3xtu) * q^2 + 4xp * q * u \\
 & - r * tu^2 - s * tu^3 + tu^4))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{omega}^{-4}(2,3) := & -((r - s + tu) * p^2 - \text{sqrt}(-2 * (s + tu) * r + 4xp^2 + 4x \\
 & q^2 + r^2 + s^2 - 2 * s * xtu + tu^2 + 4xu^2) * p + 2 * q * u) / (2 * \\
 & \text{sqrt}(a) * ((2 * (s + 2xtu) * r - r^2 - s^2 + 2 * s * xtu - 5 * \\
 & tu^2 - 4xu^2) * q^2 + (2 * (s + tu) * r - 8 * q^2 - r^2 \\
 & - s^2 + 4 * s * xtu - 5 * tu^2 - 4 * xu^2) * p^2 - 4 * p^4 - \\
 & 4 * p * q * xtu * u - 4 * q^4 - r^2 * xtu^2 + 2 * r * xtu^3 - s^2 * \\
 & tu^2 + 2 * s * xtu^3 - tu^4 - 2 * xtu * xu^2) + \text{sqrt}(-2 * (\\
 & s + tu) * r + 4xp^2 + 4xq^2 + r^2 + s^2 - 2 * s * xtu + \\
 & tu^2 + 4xu^2) * ((r - s + 3xtu) * p^2 - (r - s - 3xtu) * \\
 & q^2 + 4 * p * q * u - r * tu^2 - s * tu^3 + tu^4))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{omega}^{-1}(3,1) := & (\text{sqrt}(2 * a - b) * (p * u - q * r) - \text{sqrt}(2 * a + b) * (r * s - u^2)) \\
 & / (\text{sqrt}(2 * a + b) * \text{sqrt}(2 * a - b) * \text{sqrt}((r^2 + u^2) * q^2 - 2 * (r \\
 & + q) * p * q * u + (s^2 + u^2) * p^2 + r^2 * s^2 - 2 * r * s * u^2 +
 \end{aligned}$$

u))

$$\begin{aligned} \omega_{(3,2)}^{-1} := & (\text{sqrt}(2*a - b) * ((r - s - t*u)*q - 2*p*u) - \text{sqrt}(-2*(s \\ & + t*u)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2*s*t*u + t*u^2 + \\ & 4*u^2) * (\text{sqrt}(2*a - b)*q - \text{sqrt}(2*a + b)*t*u) + \text{sqrt}(2*a \\ & + b) * (2*p^2 + 2*q^2 - r*t*u - s*t*u + t*u^2) / (2*\text{sqrt}(2*a \\ & + b) * \text{sqrt}(2*a - b) * (((2*(s + 2*t*u)*r - r^2 - s^2 + 2* \\ & s*t*u - 5*t*u^2 - 4*u^2)*q^2 + (2*(s + t*u)*r - \\ & 8*q^2 - r^2 - s^2 + 4*s*t*u - 5*t*u^2 - 4*u^2)*p \\ & - 4*p^4 - 4*p*q*t*u*u - 4*q^4 - r^2*t*u + 2*r*s \\ & t*u - s^2*t*u + 2*s*t*u^3 - t*u^4 - 2*t*u^2*u^2) - \\ & \text{sqrt}(-2*(s + t*u)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2 \\ & *s*t*u + t*u^2 + 4*u^2) * ((r - s + 3*t*u)*p^2 - (r - s \\ & - 3*t*u)*q^2 + 4*p*q*u - r*t*u^2 - s*t*u^2 + t*u^3 \\ &)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{(3,3)}^{-1} := & - (\text{sqrt}(2*a - b) * ((r - s - t*u)*q - 2*p*u) + \text{sqrt}(-2 \\ & *(s + t*u)*r + 4*p^2 + 4*q^2 + r^2 + s^2 - 2*s*t*u + t*u^2 \\ & + 4*u^2) * (\text{sqrt}(2*a - b)*q - \text{sqrt}(2*a + b)*t*u) + \text{sqrt} \\ & (2*a + b) * (2*p^2 + 2*q^2 - r*t*u - s*t*u + t*u^2) / (2* \\ & \text{sqrt}(2*a + b) * \text{sqrt}(2*a - b) * (((2*(s + 2*t*u)*r - r^2 \\ & - s^2 + 2*s*t*u - 5*t*u^2 - 4*u^2)*q^2 + (2*(s + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & tu) \times r - (3 \times q^2 - r^2 - s^2 + 4 \times s \times t \times u - 5 \times \\
 & tu^2 - 4 \times u^2) \times p^2 - 4 \times p^4 - 4 \times p \times q \times t \times u^2 - 4 \times q^4 \\
 & - r^2 \times t \times u^2 + 2 \times r \times t \times u^3 - s^2 \times t \times u^2 + 2 \times s \times t \times u^3 - t \times u^4 - \\
 & 2 \times t \times u^2 \times u^2 + \text{sqrt}(-2 \times (s + t \times u) \times r + 4 \times p^2 + 4 \times \\
 & q^2 + r^2 + s^2 - 2 \times s \times t \times u + t \times u^2 + 4 \times u^2) \times ((r - s + 3 \times \\
 & t \times u) \times p^2 - (r - s - 3 \times t \times u) \times q^2 + 4 \times p \times q \times u - r \times \\
 & t \times u^2 - s \times t \times u^2 + t \times u^3))
 \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- I 1) P.A.M. DIRAC. "The Principles of Quantum Mechanics" (second edition), p.273, Oxford University Press, 1935.
- I 2) W.E. LAMB, JR. & R. CRETHERFORD. "Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method". Phys. Rev., 72 (1947), 241.
- I 3) H.A. BETHE, L.M. BROWN & J.R. STEHN. "Numerical Value of the Lamb Shift", Phys. Rev., 77 (1950), 370.
C.L. SCHWARTZ & J.J. TIEMANN. "New Calculations of the Numerical Value of the Lamb Shift", Ann. Phys. 2 (1959), 178.
J. SCHWINGER. "On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron", Phys. Rev. 73 (1948), 416.
F.H. COMBLEY. "(g-2) Factors for Muon and Electron and the Consequences for QED", Rep. Prog. Phys., 42(1979), 1889.
- I 4) R.P. FEYNMAN. Proc. 1961 Solvay Conf., Interscience, New York, 1962.
P. KUSCH & H.M. FOLEY. "Precision Measurement of the Ratio of the Atomic 'g Values' in the $^2P_{3/2}$ and $^2P_{1/2}$ States of Gallium", Phys. Rev., 72 (1947), 1256;
———. "On the Intrinsic Moment of the Electron", Phys. Rev. 73 (1948), 412.
- I 5) G. ITZYKSON & J.B. ZUBER. Quantum Field Theory. McGraw-Hill, 1980.
J.D. BJORKEN & S.D. DRELL. Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, 1965.

- [6] D.J.AMIT. Field Theory, the Renormalisation Group and Critical Phenomena. McGraw-Hill, 1978.
H.M. FRIED. Functional Methods and Models in Field Theory. MIT Press, 1972.
- [7] G. PARISI, Y.S. WU. "Perturbation Theory Without Gauge Fixing". Sci. Sinica 24 (1981), 483.
P.DAMGAARD, H.HÜFFEL "Stochastic Quantization". Phys. Rep. 152 (1987), 227-398.
- [8] J.R. OPPENHEIMER. "Note on the Theory of the Interaction of Field and Matter". Phys. Rev., 35 (1930), 461.
I. WALLER. "Bemerkungen über die Rolle der Eigenenergie des Elektrons in der Quantentheorie der Strahlung". Z. Phys. , 62 (1930b), 673.
- [9] J. SCHWINGER. Quantum Electrodynamics (Selected Papers on), New York: Dover, 1958.
- [10] H. WEYL. Selecta (Birkhauser, Basel, 1955).
E. NOETHER. Nachr. Kgl. Gess. Wiss, Goettingen, 235, (1918).
R.L MILLS & C.N. YANG. "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance". Phys. Rev., 96(1954), 191.
R. UTIYAMA. "Invariant Theoretical Interpretation of Interaction". Phys. Rev., 101(1956), 1957.
G. COSTA & M. TONIN. "Renormalization of Non-Abelian Local Gauge Theories". Nuovo Cimento, 5(1975), 29.
J.C. TAYLOR. Gauge Theories of Weak Interactions. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [11] C. BECCHI, A. ROUET & R. STORA. "Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model". Comm. Math. Phys. 42 (1975), 127.
———. "Renormalization of Gauge Theories". Ann. Phys. 98 (1976), 287.
J.H. LOWENSTEIN. "Differential Vertex Operations in Lagrangian Field Theory". Comm. Math. Phys. 24 (1971),1.
O. PIGUET & A. ROUET. "Symmetries in Perturbative Quantum Field Theory". Phys. Rep. 76 (1981), 1-78.
S.P. SORELLA. Notes on the BRS renormalization: the non

linear σ -model analysis, UCP (1989).

- [12] Y.M. LAM. "Perturbation Lagrangian Theory for Scalar Fields-Ward-Takahashi Identity and Current Algebra". Phys. Rev. D6(1972), 2145;
———, "Equivalence Theorem on Bogoliubov-Parasiuk-Hopp-Zimmermann-Renormalized Lagrangian Fields Theories. D7(1973), 2943.
- T.E.CLARK & J.H.LOWENSTEIN. "Generalization of Zimmermann's Normal - Product Identity". Nucl Phys. B113 (1976), 109.
- P. BREITENLOHNER & D. MAISON. "Dimensional Renormalization and the Action Principle". Commun. Math. Phys. 52 (1977), 11.
———, Dimensionally Renormalized Green's Functions for Theories with Massless Particles I. Commun. Math. Phys. 52 (1977), 39.
———, "Dimensionally Renormalized Functions for Theories with Massless Particles II". Commun. Math. Phys. 52 (1977), 55.
- M.C. BERGÈRE & Y.M.P. LAM. "Bogolubov-Parasiuk theorem in the α -parametric representation". J.Math.Phys. 17 (1976), 1546.
- [13] S.L. GLASHOW. "Partial-Symmetries of Weak Interactions". Nucl. Phys. 22 (1961), 579.
A. SALAM. In Elementary Particle Physics (Nobel Symposium, n^o 8), ed. by N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968).
S. WEINBERG. "A Model of Leptons". Phys. Rev. Letters 19 (1967), 1264.
- [14] R.M. DORIA, H.P. von GERSDORFF & E.P. SILVA, . "Two Gauge Fields in the Same Group". CBPF preprint NF-032/84. (1984).
- [15] J.D. BJORKEN & S.D. DRELL. Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [16] L.H. RYDER. Quantum Field Theory. Cambridge Univ. Press,

1985.

- [171] J.A. HELAYEL-NETO. Notas do Curso de Supersimetria e Teorias de Campo. UCP (1988).
- [181] ————. Notas do Curso de Teorias de Gauge Quânticas. UCP (1989).
- [191] R. BRONSON.. Matrix Methods - An Introduction. Acad. Press, 1970.
- [201] E. BUTKOV. Mathematical Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968).
- [211] E.P. WIGNER. Gruppentheorie, Braunschweig Friedrich Vieweg und Sohn, 1931.
- [221] R.M. DORIA, G. OLIVEIRA NETO & F.A.B. RABELO DE CARVALHO. Preprint (a ser publicado pela UCP).
- [231] I.J.R. AITCHISON. An Informal Introduction to Gauge Field Theories. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [241] H. GEORGI & S.L. GLASHOW. "Unity of All Elementary-Particle Forces" .Phys. Rev. Lett. 32 (1974), 438.
S.L. GLASHOW. "Trinification of all Elementary Particle Forces". In: *Proced. 5th Workshop on Grand Unification*, Providence (RI), ed. K.Kang, H.Fried e P.Frampton (World Scientific Publs. Com. Pte. Ltd., (1984), 88.
M.K. GAILLARD. "An Approach to the Unification of Elementary Particle Interactions". *Lecture Notes in Physics* 160, Springer-Verlag (1982), 1.
- [251] J.H. SCHWARZ. "Superstring Theory". *Phys. Rep.* 89 (1982), 223-322.
M.B. GREEN & J.A. SCHWARZ. "Anomaly Cancellations in Super-symmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory". *Phys. Lett.* 149B (1984), 117.
———. "Infinity Cancellations in SO(32) Superstring Theory". *Phys. Lett.* 151B (1985), 21.
D.J. GROSS, J.A. HARVEY, E. MARTINEC & R. ROHM. "Heterotic String Theory-(I). The free heterotic string". *Nucl. Phys.* B256, (1985), 253.

- [26] R.M. DORIA, C. POMBO. "Two Potentials, One Gauge Group: a Possible Geometrical Motivation". *Nuovo Cimento*, 96B (1986), 153.
- C.M. DORIA, R.M. DORIA, J.A. HELAYEL-NETO. "A Kaluza-Klein Interpretation of an Extended Gauge Theory". *Rev. Bras. Fis.*, 17(1987), 351.
- [27] C.M. DORIA, R.M. DORIA, J.A. HELAYEL-NETO. "Fiber Bundle and Formulation of a class of Extended Gauge Model". UCP preprint 89/15.
- [28] S.A. DIAS, R.M. DORIA, J.L. MATHEUS VALLE. "Information on the Gauge Principle from An $N=1/2-D=2$ Supersymmetric Model". (aceito para publicação na *Rev. Bras. Fis.*).
- N. CHAIR, J.A. HELAYEL-NETO & A. WILLIAM SMITH. "A Less Constrained (2,0) Super-Yang-Mills Model". *Phys. Lett. B*233 (1989), 173.
- R.M. DORIA, F.A.B. RABELLO DE CARVALHO. "A Superspace origin for an Extended Gauge Model". UCP preprint 88/6.
- C.A.S. ALMEIDA, R.M. DORIA. "Information on the Gauge Principle from A (2,0)-Supersymmetric Gauge Model". UCP preprint 89/4.
- , A Less Constrained to (2,0) Super Yang-Mills model: the Coupling to Non-Linear α Models. UCP preprint 90/4.
- [29] L. BAULIEU & THIERRY-MIEG. "The Principle of BRS Symmetry: An Alternative approach to Yang-Mills theories". *Nucl. Phys. B*197 (1982), 477.
- L. BAULIEU. "Perturbative Gauge Theories". *Phys. Rep.* 129 (1985), 1-74.
- [30] H.J. BORCHERS. "Über die Mannigfaltigkeit der interpolierenden Felder zu einer kausalen S-matrix". *Nuovo Cimento*, 15 (1960), 784.
- , "Local Rings and the Connection of Spin with Statistics". *Comm in Math. Phys.*, 1 (1965), 281.
- H.J. BORCHERS & W. ZIMMERMANN. "On the self-adjointness of Field Operators". *Nuovo Cimento*, 31 (1964), 1047.
- [31] J. GOLDSTONE. "Field Theories with «superconductor»

- Solutions". *Nuovo Cimento*, 19 (1961), 154.
- P.W. HIGGS. "Broken Symmetries. Massless Particles and Gauge Fields". *Phys. Lett.* 12 (1964), 132.
- . "Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons". *Phys. Rev.* 145 (1966), 1156.
- F. ENGELERT & R. BROUT. "Broken symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons". *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964), 321.
- G.S. GURALNIK, G.R. HAGEN & T.W. KIBBLE. "Global Conservation Laws and Massless Particles." *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964), 585.
- T.W.B. KIBBLE. "Symmetry Breaking in Non-Abelian Gauge Theories". *Phys. Rev.* 155 (1967), 1554.
- [32] R.N. CAHN. "The Higgs Boson". *Rep. Prog. Phys.* 52, 4 (1989), 389.
- [33] L.P. COLATTO & R.M. DORIA. "On Electric and Magnetic Fields for an Extended Gauge Model". (Aceito para publicação na *Rev. Bras. Fis.*).
- [34] D.E. SOPER. *Classical Field Theory*. John Wiley & Sons Inc., 1976.
- [35] R.M. DORIA, G. OLIVEIRA NETO & F.A.B. RABELO DE CARVALHO. (aceito para publicação na UCP).
- [36] R.M. DORIA, J.A. HELAYEL-NETO & A. WILLIAM SMITH. "On the Quantum-Mechanical Consistence of an Extended Abelian Gauge Model". UCP preprint 89/6 .
- [37] D. GRIFFITHS. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [38] R. EISBERG & R. RESNICK. *Física Quântica* (2ª ed.) Ed. Campus Ltda., 1983.

"ESPECTROSCOPIA CONSISTENTE PARA UM MODELO DE GAUGE ESTENDIDO"

GIL DE OLIVEIRA NETO

Tese de Mestrado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto.

José Abdalla Helayël-Neto (Presidente)

R. Doria

Renato Melchiades Doria - Co-orientador

Clovis Wotzasek

Clovis Wotzasek

Marcelo de Souza Alves

Marcelo de Souza Alves

Renato Portugal

Renato Portugal

Rio de Janeiro, 12 de novembro de 1990