

JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA

PROPRIEDADES GEOMETROTERMODINÂMICAS  
DE MODELOS COSMOLÓGICOS

-TESE DE DOUTORADO-



CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

Rio de Janeiro

-1990-

a Beatriz, Josélia, Laura  
e Leôncio.

## AGRADECIMENTOS

- ao professor Jayme Tiomno, pela sua orientação e ajuda nos momentos difíceis no decorrer deste trabalho, por nossas estimulantes discussões e por me ensinar o valor do princípio de tolerância na colaboração científica.
- aos meus pais e irmãos, por todo sacrifício que permitiu minha educação.
- a Josélia, Laura e Leôncio, por toda paciência e carinho que me dedicaram durante a realização deste trabalho. Que me perdoem as horas da lazer subtraídas.
- ao amigo Ioav Waga, pela leitura crítica do manuscrito, por suas valiosas sugestões e por nossa intensa colaboração, facilmente identificável ao longo deste trabalho.
- a M.J.D. Assad, por nossas discussões e cooperação na busca das soluções cosmológicas do tipo FRW. Sem dúvida uma experiência extremamente rica sob os mais variados aspectos.
- a M.O. Calvão, M.A.S. Nobre e R. Portugal, pelo companheirismo e solidariedade e também pela cooperação que resultou em vários artigos.
- aos professores do CBPF: C.A.P. Galvão, M. Novello, M.J. Rebouças, I.D. Soares, J.M. Salim e A.F. da F. Teixeira, S.J.B. Duarte e T. Kodama, pelo estímulo permanente e por nossas instigantes discussões.
- aos colegas do DRP, por nossa fraternal convivência e pelas críticas e sugestões ao presente trabalho.
- ao amigo Janilo Santos, pela tranquilidade transmitida e pela compreensão e incentivo recebido não só durante este trabalho, mas ao longo de toda nossa convivência.
- a Luiz G. de Lima e Adnanci M. de Lima pelo apoio logístico na fase final da "batalha".
- aos funcionários do CBPF pela paciência e boa vontade com que realizam suas tarefas.
- à Helena de Souza Ferreira pelo excelente trabalho de datilografia.
- ao Departamento de Física da UFRN, instituição à qual pertencço, pela oportunidade concedida.
- à CAPES pela concessão de bolsa.

## RESUMO

A relação entre as diferentes temperaturas presentes em um plasma radiativo é examinada e o significado físico da temperatura de Eckart é discutido. Uma lei de evolução para a temperatura de um fluido imperfeito relativístico é deduzida. Com este resultado um método geral de obtenção do comportamento termodinâmico de um modelo cosmológico arbitrário é descrito. O procedimento é aplicado, em um grau crescente de complexidade, para modelos homogêneos e isotrópicos (tipo FRW) e inhomogêneos e anisotrópicos (tipo Szekeres), cujas soluções gerais são simultaneamente estabelecidas.

As propriedades geometrodinâmicas de tais modelos são também investigadas. Para soluções do tipo FRW com fluido perfeito, mostra-se que a dinâmica do fator de escala se reduz à que descreve o movimento de uma partícula clássica. Modelos fechados são análogos a osciladores harmônicos e o tempo que decorre entre duas singularidades consecutivas é calculado em função do parâmetro da equação de estado. Mostra-se também que uma subclasse dos modelos inhomogêneos do tipo Szekeres evolue para modelos do tipo FRW para quaisquer valores do índice adiabático da equação de estado e do parâmetro de curvatura da seção espacial.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO I</u> - FLUIDOS RELATIVÍSTICOS .....	7
1.1 - Alguns Conceitos em Termodinâmica de Não- -Equilíbrio .....	7
1.2 - Teoria Relativística Geral de Fluidos Imper feitos .....	11
1.3 - Equação de Evolução da Temperatura .....	18
1.4 - O Plasma Radiativo: Coeficientes de Trans - porte e a Temperatura de Equilíbrio Local..	20
<u>CAPÍTULO II</u> - MODELOS COSMOLÓGICOS HOMOGENEOS E ISOTRÓPI- COS .....	29
2.1 - Introdução .....	29
2.2 - Equações Básicas .....	31
2.3 - O Limite Adiabático .....	34
2.4 - O Caso Não-Adiabático .....	48
<u>CAPÍTULO III</u> - MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS EM EQUILÍ- BRIO TERMODINÂMICO .....	53
3.1 - Introdução .....	53
3.2 - Modelos Inomogêneos de Szekeres .....	56
3.3 - Modelos do Tipo Szekeres: Formulação Unifi- cada, Interpretação de Dois Fluidos e Novas Soluções Exatas .....	61
3.4 - A Forma Canônica das Soluções .....	68

3.5 - Soluções Especiais .....	71
3.6 - Quantidades Cinemáticas e Evolução .....	73
<u>CAPÍTULO IV</u> - MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS COM FLUXO DE CALOR .....	80
4.1 - Introdução .....	80
4.2 - Os Modelos .....	82
4.3 - Evolução .....	86
4.4 - Aspectos Termodinâmicos .....	89
4.5 - Comentários Finais .....	93
<u>APÊNDICE A</u> - FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS .....	96
<u>APÊNDICE B</u> - SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO TI PO FRW .....	102
<u>APÊNDICE C</u> - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO TIPO SZEKERES: SOLU ÇÃO E CASOS PARTICULARES .....	110
<u>APÊNDICE D</u> - EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA MÉTRICAS DO TIPO SZEKERES (CLASSE II) .....	114
<u>APÊNDICE E</u> - SOBRE A TERMODINÂMICA DE MODELOS DO TIPO SZEKERES COM FLUIDO SIMPLES .....	117
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	124

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>		<u>PÁG.</u>
2.3.1	- Tempo de vida dos modelos fechados em função do parâmetro $\gamma$ .....	47

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>		<u>PÁG.</u>
3.2.1	- Evolução dos modelos cosmológicos de Szekeres P, H e E pertencentes à classe II .....	60

## NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Assinatura da métrica: (+---)

Índices repetidos são somados sobre todo o espectro de valores indicados no texto.

Diferencial parcial:  $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \phi_{,\mu}$

Simetrização de tensores:  $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

Antissimetrização de tensores:  $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$

Derivada material covariante: o ponto significa derivada ao longo das linhas de matéria;  $\dot{\rho} = u^\alpha \rho_{||\alpha}$ ,  $\dot{q}^\beta = u^\alpha q^\beta_{||\alpha}$ ..., etc.

Em nossas unidades  $8\pi G = c = 1$ .

Derivada covariante:  $D_\beta u^\alpha = u^\alpha_{||\beta}$ .

"A natureza ama esconder-se"

(fragmentos, Heráclito de Éfeso)

O universo é grande e cabe  
nesta janela sobre o mar.  
O mar é grande e cabe  
na cama e no colchão de amar.  
O amor é grande e cabe  
no breve espaço de beijar.

(Amar se aprende amando,  
Carlos D. de Andrade).

## INTRODUÇÃO

A cosmologia é a parte da física onde se investiga a estrutura de larga escala do universo. Em princípio, seu principal objetivo é a obtenção de um modelo cosmológico que prediga os resultados das observações astronômicas. No contexto da relatividade geral, o estudo teórico das questões cosmológicas pode ser iniciado quando se conhece a estrutura geométrica do espaço-tempo, a qual é determinada, via as equações de Einstein, pela distribuição de matéria do universo. Todavia, como em qualquer outro ramo da física, a construção de modelos cosmológicos envolve o uso de hipóteses simplificadoras, que visam tornar o problema matematicamente tratável.

Usualmente, é adotado o ponto de vista da física clássica macroscópica. Supõe-se que a matéria do universo constitui um fluido, ou seja, as irregularidades locais, tais como estrelas e galáxias, não são consideradas. Isto significa que o problema é abordado no espírito da termodinâmica, a qual na descrição de um gás não estuda o comportamento individual de átomos e moléculas, e sim, define quantidades macroscópicas (pressão, densidade, temperatura, etc) e estuda suas relações. Esta hipótese básica de trabalho, relacionada com a estrutura de larga escala, implica que a descrição do cosmos tem necessariamente um certo conteúdo fenomenológico. De fato, o teste de qualquer particular modelo exige que observadores locais meçam as quantidades macroscópicas de interesse físico. Neste sentido, como observado por Gehéniou e colaboradores <sup>(1)</sup>, a área interdisciplinar da cosmologia é a legítima herdeira

dos métodos e técnicas ordinariamente empregados em hidrodinâmica ou mais geralmente na teoria termodinâmica para processos fora de equilíbrio.

Historicamente, o comportamento geometrodinâmico das soluções cosmológicas (singularidades, evolução, movimento de partículas de teste, etc), tem sido mais cuidadosamente investigados do que os aspectos relacionados com as propriedades térmicas (distribuição de temperatura, produção de entropia, etc). No entanto, além de ser essencial para completar a mencionada descrição fenomenológica, a análise termodinâmica de modelos cosmológicos mais gerais pode ter consequências observacionais. Por exemplo, a presente entropia adimensional por partícula, que é uma medida da razão entre o número de fótons e de bárions no universo atual ( $n_\gamma/n_b \sim 10^8$ ), pode ter sido gerada através de processos dissipativos que ocorreram no universo primitivo (8,70). Nesse contexto, o primeiro objetivo do presente trabalho é responder à seguinte questão: Como a análise termodinâmica de um modelo cosmológico arbitrário pode, pelo menos em princípio, ser realizada de forma completa?

Por outro lado, o tratamento termodinâmico de um fluido em expansão (universo) pressupõe, como será visto na parte principal do texto, um conhecimento pelo menos parcial de sua dinâmica. Por sua vez, esta também exige uma bateria de hipóteses adicionais que vão bem além da simples possibilidade de uma descrição hidrodinâmica. Assim, por exemplo, as hipóteses de homogeneidade e isotropia espacial conduziram para uma classe de soluções cosmológicas razoavelmente idealizadas. Em tais modelos, todas as propriedades são determinadas a partir

do conhecimento de uma única função de escala universal, a qual depende apenas do tempo. Curiosamente, mesmo em uma situação aparentemente simples, os aspectos dinâmicos e térmicos não foram examinadas em todo o seu possível grau de generalidade (ver Capítulo II).

Mais recentemente, modelos do universo onde as possíveis inomogeneidades de grande escala são consideradas, vêm sendo bastante investigados (75-79,91-98). Como veremos nos Capítulos III e IV, para modelos inomogêneos a situação é no mínimo bastante insatisfatória. Existem poucas soluções cosmológicas inomogêneas exatas que podem ser utilizadas como modelos realísticos para o universo. Além disso, na maioria das soluções conhecidas, o tratamento termodinâmico tem sido ignorado ou estudado de forma incompleta (113-117).

Nesse contexto, como mais uma contribuição no sentido de preencher as duas lacunas mencionadas acima, discutiremos no presente trabalho uma série de aspectos dinâmicos e térmicos de modelos cosmológicos homogêneos e inomogêneos.

Por simplicidade todos os nossos resultados, demonstrações, etc, serão apresentados na base de coordenadas  $\{x^\alpha\}$ . As linhas gerais de desenvolvimento do nosso trabalho são as seguintes:

Apresentamos, no Capítulo I, os conceitos básicos da termodinâmica relativística para processos fora de equilíbrio. A expressão geral do tensor de energia-momentum para um fluido imperfeito relativístico e as relações constitutivas são obtidas no contexto das chamadas teorias de primeira ordem. Deduzimos também uma lei de evolução para a temperatura de fluidos

imperfeitos, que permanece válida mesmo quando todos os processos dissipativos atuam simultaneamente. Além disso, em conexão com a teoria cinética, a relação entre as diferentes temperaturas presentes em um plasma radiativo é examinada e o significado físico e operacional da temperatura de Eckart é discutido. Finalmente, através de um procedimento alternativo, a expressão do coeficiente de viscosidade volumar radiativa, originalmente determinada por Weinberg<sup>(8)</sup>, é reobtida.

No Capítulo II, investigamos o comportamento dinâmico e térmico das cosmologias homogêneas e isotrópicas. A solução geral e unificada para os modelos do tipo FRW contendo um fluido perfeito é apresentada e a termodinâmica é discutida em detalhe. Mostra-se também que a equação descrevendo a dinâmica do fator de escala é reduzida, na forma conforme, à equação de movimento de uma partícula clássica. Os modelos fechados são análogos a osciladores harmônicos, e o tempo que decorre entre duas singularidades consecutivas é expresso como uma função contínua do parâmetro da equação de estado. Fechando o capítulo, a análise termodinâmica é estendida a fim de incluir uma classe de modelos com viscosidade volumar. A lei de temperatura e a dependência temporal do fator de escala são explicitamente determinadas e todos os resultados são comparados com o caso adiabático.

No Capítulo III, uma motivação teórica para o estudo de modelos inomogêneos é discutida e o critério de inomogeneidade espacial, utilizado no corpo deste trabalho, é definido. Em seguida, as soluções inomogêneas de Szekeres (classe II), na forma originalmente estudada por Bonnor e Tomimura, são apresenta

das. Na sequência, supondo que o meio material dos modelos pode ser interpretado como uma mistura de dois fluidos, uma nova classe de soluções do tipo Szekeres é estabelecida. Suas propriedades dinâmicas são detalhadamente examinadas e mostra-se que uma subclasse de tais modelos evolui para soluções do tipo FRW para quaisquer valores dos parâmetros livres das cosmologias homogêneas e isotrópicas.

Finalmente, no Capítulo IV, uma classe de soluções parabólicas do capítulo anterior é generalizada através da introdução de uma corrente de calor no meio material. Os aspectos dinâmicos e térmicos de tais modelos são examinados. Uma subclasse de tais soluções evolui para as cosmologias do tipo FRW no limite de grandes valores do tempo cosmológico. Mostra-se também que a distribuição de temperatura que determina o fluxo de calor tem as propriedades físicas esperadas.

É importante mencionar que os principais resultados matemáticos utilizados nos capítulos estão expostos nos Apêndices A, B, C e D. Contudo, o tema do Apêndice E tem um "status" diferente dos anteriores, pois constitui um resultado adicional sobre termodinâmica de modelos do tipo Szekeres <sup>(112)</sup>. Por ter sido obtido na formulação de fluido simples, a qual não corresponde à linha de desenvolvimento enfatizada nos capítulos 3 e 4, consideramos mais conveniente descrever tais resultados em separado.

Para finalizar, com o intuito de facilitar uma eventual consulta por parte de pesquisadores interessados no assunto, mencionamos que o nosso contato com a literatura indica que as contribuições originais do presente trabalho encontram-se nas

seguintes seções: 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 2.4, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 ,  
4.2, 4.3, 4.4 e também nos Apêndices B, C e E. Tais resulta -  
dos foram publicados nas referências citadas no texto.

## CAPÍTULO I

### FLUIDOS RELATIVÍSTICOS

Neste capítulo, considerando os postulados da termodinâmica de processos irreversíveis, obteremos a forma mais geral do tensor de energia-momentum (TEM) para um fluido imperfeito relativístico e também uma expressão para a lei de evolução de sua temperatura em função dos fluxos dissipativos. Inicialmente apresentaremos os conceitos e as limitações da teoria termodinâmica padrão para processos fora de equilíbrio. A conexão entre esta teoria fenomenológica e a teoria cinética dos gases será feita, no final do capítulo, através de um exemplo específico conhecido como plasma radiativo, o qual nos permitirá compreender melhor o conceito de temperatura em sistemas fora de equilíbrio térmico. Os resultados que se seguem serão amplamente utilizados no corpo deste trabalho.

#### 1.1 - ALGUNS CONCEITOS EM TERMODINÂMICA DE NÃO-EQUILÍBRIO

A fim de unificar dentro de um único e coerente esquema todos os fenômenos irreversíveis ocorrendo em fluidos simples ou misturas, a teoria termodinâmica padrão para processos fora de equilíbrio (clássica ou relativística), foi construída tendo os seguintes princípios como base conceitual <sup>(2,4)</sup>:

P1. Princípio de Equilíbrio Local (PEL)

P2. Princípio de Entropia (PE)

O PEL postula que dentro dos elementos infinitesimais<sup>(\*)</sup> de volume do fluido existe um estado de equilíbrio (local) embora o fluido, de um ponto de vista global, se encontre fora de equilíbrio. Experimentalmente isto significa que os valores das grandezas termodinâmicas associados as diversas "células", tais como a pressão termostática e a temperatura são as mesmas que seriam obtidas como se cada "célula" fosse subitamente isolada permitindo-se que chegasse ao equilíbrio<sup>(9)</sup>. Analiticamente o PEL implica que a relação de equilíbrio de Gibbs permanece localmente válida quando expressa em termos de variáveis específicas, ou seja, através de quantidades extensivas por unidade de partícula ou de massa. No domínio relativístico, a relação fundamental de Gibbs, toma a seguinte forma local<sup>(2,8)</sup>

$$Tds = d(\rho/n) + pd(1/n) \quad , \quad (1.1.1)$$

onde  $s$  é a entropia específica por partícula e  $T$ ,  $\rho$ ,  $n$  e  $p$  denotam respectivamente a temperatura, a densidade da matéria-energia, a concentração de partículas e a pressão local no fluido. Como uma consequência do PEL, é geralmente admitido que o fluido deve satisfazer às mesmas equações de estado que são válidas no equilíbrio, as quais são naturalmente independentes dos gradientes<sup>(5)</sup>.

---

(\*) Este termo tem aqui uma acepção hidrodinâmica. Os elementos são pequenos relativamente às dimensões do sistema, porém suficientemente grandes a fim de conter um grande número de partículas. Deste modo não apenas as médias podem ser efetuadas, como refletem ainda uma propriedade local.

O segundo princípio nos diz que na presença de processos irreversíveis existe uma produção de entropia por unidade de volume e por unidade de tempo ou, equivalentemente, uma fonte local de entropia  $\sigma$  a qual, pela segunda lei da termodinâmica, é sempre positivo definida. Matematicamente tal princípio implica, a nível clássico ou relativístico, na existência de uma equação de balanço para a densidade de entropia tendo  $\sigma$  como um termo de fonte. No contexto da relatividade especial tal equação tem a seguinte forma (2,3):

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial X^\alpha} = \sigma \geq 0 \quad , \quad (1.1.2)$$

onde  $S^\alpha$  é o quadrivetor fluxo de entropia. Nesta equação a entropia deve ser visualizada como uma espécie de "calórico" não conservado dotado de uma fonte local não negativa (quantidades conservadas têm divergência nula). A forma explícita da corrente de entropia será deduzida adiante.

As equações (1) e (2), que são as expressões matemáticas dos dois princípios básicos, fornecem as chaves de acesso à teoria fenomenológica de fluidos imperfeitos relativísticos. Como será visto na próxima seção, combinando-as com as equações de movimento do fluido, é possível determinar simultaneamente as relações fenomenológicas obedecidas pelos fluxos dissipativos presentes no TEM, bem como a própria expressão analítica da fonte de entropia  $\sigma$ . Além disso, a teoria de equilíbrio é recuperada no limite em que a produção de entropia desaparece ( $\sigma=0$ ).

A abordagem descrita acima tem sido sistematicamente aplicada tanto a nível clássico quanto no domínio relativístico (2,3,4). Sua extensão para a teoria da relatividade geral

(TRG) é imediata se o campo gravitacional varia lentamente ao longo de um livre caminho médio ou de um livre tempo médio das partículas do fluido <sup>(8)</sup>. Nestas condições a validade do princípio de equivalência permite que equações covariantes sob transformações de coordenadas gerais sejam estabelecidas pela técnica usual de acoplamento mínimo: a substituição simultânea da matriz de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  pelo tensor métrico riemanniano  $g_{\alpha\beta}$  e das derivadas do espaço-tempo plano por derivadas covariantes. Acoplamentos termogravitacionais diferentes do referido acima, apesar de ser uma possibilidade teórica, não serão considerados neste trabalho <sup>(17)</sup>.

Finalmente, é importante mencionar algumas limitações da teoria assim construída, as quais são decorrentes da adoção do primeiro princípio (PEL). De fato, a validade do PEL está restrita aos processos que estão fora, porém permanecem próximos ao equilíbrio. Isto ocorrerá se os gradientes de espaço e tempo das funções de estado são suficientemente pequenos, de modo que relações fenomenológicas lineares possam fornecer uma descrição adequada de tais processos. Para gases diluídos, por exemplo, como foi demonstrado por Prigogine <sup>(10)</sup>, a idéia de proximidade do equilíbrio pode também ser justificada via teoria cinética. Neste caso, os resultados obtidos na teoria fenomenológica coincidem com aqueles derivados por meio da equação de Boltzmann, se na expansão da função de distribuição apenas o primeiro termo é retido; isto é, tomando-se  $F = F_0 + F_1$ , onde  $F_0$  é a função de distribuição para os estados de equilíbrio com  $|F_1/F_0| \ll 1$ . Em virtude da linearidade das equações fenomenológicas resultantes e da mencionada justificativa cinética, a versão da termodinâmica de não equilíbrio construída a partir dos

dois princípios básicos é também denominada de teoria de primeira ordem. Alguns autores<sup>(13, 20)</sup> preferem caracterizar as teorias de primeira ordem pelo fato do fluxo de entropia ter, no máximo, termos lineares nos gradientes (ver eq. (1.2.20)).

## 1.2 - TEORIA RELATIVÍSTICA GERAL DE FLUIDOS IMPERFEITOS

Os estados termodinâmicos de um fluido simples relativístico estão caracterizados por um tensor de energia-momento  $T^{\alpha\beta}$ , uma corrente de partículas  $N^\alpha$  e uma corrente de entropia  $S^\alpha$ . As equações de movimento do fluido estão contidas nas leis de conservação

$$T^{\alpha\beta}{}_{||\beta} = 0 \quad , \quad (1.2.1)$$

$$N^\alpha{}_{||\alpha} = 0 \quad . \quad (1.2.2)$$

Como foi visto, a segunda lei da termodinâmica exige que a intensidade da fonte de entropia deve ser não negativa, ou seja,

$$S^\alpha{}_{||\alpha} \geq 0 \quad . \quad (1.2.3)$$

### 1.2a - Limite Adiabático

Escolhendo um referencial hidrodinâmico arbitrário, cuja quadrivelocidade  $u^\alpha$  satisfaz

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \quad , \quad (1.2.4)$$

as variáveis primárias  $T^{\alpha\beta}$ ,  $N^\alpha$  e  $S^\alpha$  tomam no limite adiabático as seguintes formas<sup>(2, 3, 6)</sup>:

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - p h^{\alpha\beta} \quad , \quad (1.2.5)$$

$$N^\alpha = n u^\alpha \quad , \quad (1.2.6)$$

$$S^\alpha = n s u^\alpha \quad , \quad (1.2.7)$$

onde o tensor

$$h^{\alpha\beta} := g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \quad , \quad (1.2.8)$$

é o projetor sobre o espaço de repouso local no referencial  $u^\alpha$  o qual por (1.2.8) satisfaz

$$h^\alpha_\beta u^\beta = 0 \quad , \quad (1.2.9)$$

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\lambda = h^\alpha_\lambda \quad , \quad (1.2.10)$$

$$h^\alpha_\alpha = 3 \quad . \quad (1.2.11)$$

As quantidades  $\rho$ ,  $p$ ,  $n$ ,  $s$  juntamente com a temperatura  $T$  são invariantes (escalares) de simples interpretação; são valores próprios medidos pelos observadores co-móveis com os elementos de volume do fluido<sup>(2)</sup>. Tais grandezas estão relacionadas através da lei de Gibbs (1.1.1). Como veremos adiante, a partir do limite adiabático da teoria geral, segue das eqs. (1.1.1)-(1.2.2) e (1.2.5)-(1.2.7) que a produção de entropia é nula, como seria esperado para os estados de equilíbrio térmico.

### 1.2b - Estados Fora de Equilíbrio

Em princípio, para incluir processos dissipativos, tais como, condução de calor e viscosidade, é preciso introduzir termos adicionais nas variáveis primárias descrevendo o fluido perfeito. Antes de exibir tais modificações devemos observar que a presença do processo de transferência de calor

levanta uma interessante questão relacionada com a definição da quadrivelocidade (\*)  $u^\alpha$ . É preciso especificar se  $u^\alpha$  é a quadrivelocidade do transporte de energia ou a do transporte de partículas. Na abordagem de Landau-Lifschitz (11)  $u^\alpha$  é definido como sendo a quadrivelocidade do transporte de energia ("dynamic frame"). Na abordagem de Eckart (2)  $u^\alpha$  é tomado como sendo aquela do transporte de partículas ("kinematic frame"). Ambas as teorias admitem implicitamente que os gradientes de espaço e tempo das grandezas físicas são pequenos de forma que apenas os termos de primeira ordem nos desvios do equilíbrio precisam ser considerados. Em particular, a menos de algumas identificações envolvendo os fluxos de calor e difusão de partículas, as expressões para a taxa de produção de entropia são iguais. De fato, excluindo certos critérios de estabilidade para perturbações de densidade, as duas teorias são equivalentes (12). Contudo, sendo a de Eckart mais conveniente no contexto cosmológico, nós a adotaremos no presente trabalho.

As equações de movimento do fluido estão contidas, como no caso de equilíbrio, nas leis de conservação (1.2.1) e (1.2.2). Além disso, desde que a densidade de número de partículas seja medida por um observador co-móvel com o elemento de volume do fluido ("kinematic frame"), a corrente de partículas é ainda definida pela equação (1.2.6). Contudo, ao TEM (1.2.5) é adicionado três novos campos (2, 3, 13)

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - (p-\pi)h^{\alpha\beta} + q^\alpha u^\beta + q^\beta u^\alpha + \pi^{\alpha\beta} , \quad (1.2.12)$$

---

(\*) Classicamente não existe ambiguidade. A quadrivelocidade hidrodinâmica está associada ao fluxo da massa. Contudo, na Relatividade um fluxo de energia envolve necessariamente um fluxo de massa.

onde  $q^\alpha$ ,  $\pi$  e  $\pi^{\alpha\beta}$  denotam respectivamente o fluxo de calor, a pressão viscosa ("bulk viscosity") e o estresse viscoso ("shear viscosity stress"). Os fluxos  $q^\alpha$  e  $\pi^{\alpha\beta}$  pertencem ao espaço de repouso local de  $u^\alpha$  e satisfazem os seguintes vínculos:

$$u^\alpha q_\alpha = u^\alpha \pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta} - \pi_{\beta\alpha} = 0 \quad . \quad (1.2.13)$$

É bem conhecido <sup>(6,14)</sup> que a decomposição geral do tipo (1.2.12), satisfazendo os vínculos acima, pode ser realizada indistintamente para qualquer tensor simétrico de segunda ordem. No entanto, o significado das parcelas irredutíveis são fixados a partir de considerações físicas relacionadas com a grandeza em questão. Para o TEM de um fluido imperfeito, as expressões dos campos  $\pi$ ,  $q^\alpha$  e  $\pi^{\alpha\beta}$ , bem como o termo de correção na corrente de entropia (1.2.7), serão determinados através de restrições impostas pelo segundo princípio básico, isto é, que a intensidade da fonte de entropia é não negativa. É o que veremos a seguir.

Pelo princípio de equilíbrio local as variações da entropia específica  $s$  (fora de equilíbrio) estão restritas pela equação (1.1.1). Tomando a derivada covariante de (1.1.1) ao longo das linhas de universo da matéria e usando as eqs. (1.2.2) e (1.2.6) verifica-se facilmente que

$$T(ns u^\alpha)_{||\alpha} = \dot{\rho} + (\rho+p)\theta \quad , \quad (1.2.14)$$

onde  $\theta = u^\alpha_{||\alpha}$  é a taxa de expansão e o ponto denota derivada covariante ao longo das linhas de matéria. Para calcular o lado direito da equação acima, multiplicamos (1.2.1) escalarmente

por  $u^\alpha$  e usamos a decomposição (1.2.12). Após algumas manipulações a lei de conservação da energia toma a forma abaixo

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{||\beta} = \dot{\rho} + (\rho + p - \pi)\theta + q^\alpha{}_{||\alpha} - \dot{u}_\alpha q^\alpha - u_\alpha{}_{||\beta} \pi^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.2.15)$$

Sabe-se também que a derivada de  $u^\alpha$ , presente no último termo da expressão acima, satisfaz à seguinte decomposição (6,14)

$$u_\alpha{}_{||\beta} = \dot{u}_\alpha u_\beta + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} + w_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}, \quad (1.2.16)$$

onde

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta (u_{\mu||\nu} + u_{\nu||\mu} - \frac{2}{3} \theta h_{\mu\nu}), \quad (1.2.17)$$

e

$$w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^\mu{}_\alpha h^\nu{}_\beta (u_{\mu||\nu} - u_{\nu||\mu}), \quad (1.2.18)$$

são respectivamente os tensores de cisalhamento ("shear") e rotação dos elementos de volume do fluido. Portanto, considerando que o tensor  $\pi^{\alpha\beta}$  satisfaz os vínculos (1.2.13), segue de (1.2.16)-(1.2.18) que a lei de conservação da energia (1.2.15), pode ser reescrita como ..

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = \pi\theta - q^\alpha{}_{||\alpha} + \dot{u}_\alpha q^\alpha + \pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (1.2.19)$$

Inserindo este resultado na eq. (1.2.14) e definindo a corrente de entropia  $S^\alpha$  fora de equilíbrio pela expressão

$$S^\alpha = nsu^\alpha + \frac{q^\alpha}{T}, \quad (1.2.20)$$

a divergência de  $S^\alpha$  toma a forma

$$S^{\alpha}_{||\alpha} = - \frac{q^{\beta} h^{\alpha}_{\beta} (T_{||\alpha} - T \dot{u}_{\alpha})}{T^2} + \frac{\pi \theta}{T} + \frac{\pi^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} . \quad (1.2.21)$$

Portanto, o princípio de entropia poderá ser satisfeito por (1.2.21) se os fluxos forem definidos pelas seguintes relações lineares nos gradientes

$$q^{\beta} = \chi \phi^{\beta} \quad ; \quad \phi^{\beta} = h^{\beta\alpha} (T_{||\alpha} - T \dot{u}_{\alpha}) \quad , \quad (1.2.22)$$

$$\pi = \zeta \theta \quad , \quad (1.2.23)$$

$$\pi^{\alpha\beta} = \eta \sigma^{\alpha\beta} \quad , \quad (1.2.24)$$

onde  $\chi$ ,  $\zeta$  e  $\eta$  são respectivamente os coeficientes de condução térmica, viscosidade volumar ("bulk viscosity") e de cisalhamento ("shear viscosity"). Na verdade, considerando as equações (1.2.22)-(1.2.24), a intensidade da fonte de entropia dada por (1.2.21) pode ser reescrita como

$$S^{\alpha}_{||\alpha} = - \frac{\chi \phi^{\alpha} \phi_{\alpha}}{T^2} + \frac{\zeta \theta^2}{T} + \frac{\eta \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}}{T} \quad , \quad (1.2.25)$$

cuja positividade fica automaticamente garantida se, para qualquer configuração do fluido, os coeficientes fenomenológicos satisfazem  $\chi > 0$ ,  $\zeta > 0$  e  $\eta > 0$ . Além disso, considerando que no limite adiabático  $q^{\alpha} = \pi = \pi^{\alpha\beta} = 0$ , a corrente de entropia  $S^{\alpha}$  em (1.2.20) se reduz à expressão de equilíbrio (1.2.7) e a intensidade da fonte de entropia se anula, como foi anteriormente observado.

Em resumo, na formulação de Eckart, o conjunto básico de equações governando a teoria relativística de um fluido im-

perfeito de uma componente são as seguintes: as leis da conservação (1.2.1) e (1.2.2) com  $T^{\alpha\beta}$  e  $N^\alpha$  dados respectivamente por (1.2.12) e (1.2.6), a relação de equilíbrio de Gibbs em sua forma local (1.1.1) e as equações constitutivas (1.2.22)-(1.2.24), com  $q^\alpha$  e  $\pi^{\alpha\beta}$  obedecendo os vínculos (1.2.13) e ligados à intensidade da fonte de entropia pela equação (1.2.25). Note-se que tal sistema é indeterminado pois, em princípio, existem quinze equações independentes e dezessete quantidades desconhecidas, enumeradas a seguir: as três componentes independentes de cada quadrivetor  $u^\alpha$  e  $q^\alpha$ , cinco do estresse  $\pi^{\alpha\beta}$  e ainda  $\pi, \rho, p, n, T$  e  $s$ . Ab initio, da mesma forma que na teoria clássica <sup>(4)</sup>, o comportamento do fluido poderá então ser completamente especificado adicionando duas equações de estado, digamos

$$p = p(n, T) \quad (1.2.26)$$

e

$$\rho = \rho(n, T) \quad . \quad (1.2.27)$$

É importante mencionar que, apesar de bastante reveladora da física subjacente a uma grande classe de fenômenos, as teorias de primeira ordem apresentam algumas dificuldades do ponto de vista teórico e experimental. De fato as versões clássicas das relações fenomenológicas (1.2.22)-(1.2.24) não descrevem adequadamente diversos processos. Nos fenômenos de relaxação acústica, por exemplo, relações lineares não são satisfatórias no limite de alta frequência ou curtos comprimentos de ondas tal como manifestado nas experiências envolvendo propagação de ultra-som em gases rarefeitos e no espalhamento de nêutrons em líquidos <sup>(15)</sup>. O mesmo acontece com a propagação de fónons em sólidos no limite de baixas temperaturas <sup>(16)</sup>. As equações

constitutivas (1.2.22)-(1.2.24) determinam também um conjunto de equações parabólicas, indicando a possibilidade de velocidades infinitas para a propagação de sinais térmicos e viscosos. Além disso, não existe um problema de valor inicial bem definido para fluidos em rotação<sup>(13)</sup>. Aparentemente, tais dificuldades podem ser evitadas, através de uma extensão das teorias de primeira ordem, conhecida como termodinâmica estendida. Tal teoria originalmente proposta por Muller<sup>(18,19)</sup> foi posteriormente melhor fundamentada por Israel<sup>(20)</sup>, Pavón e colaboradores<sup>(21)</sup>. A diferença fundamental entre esta última e a teoria padrão aqui apresentada, é que a hipótese de equilíbrio local é abandonada. Conseqüentemente, a forma local da lei de Gibbs (1.2.12) é modificada pela presença de termos dependentes dos fluxos dissipativos. Em virtude das correções da termodinâmica estendida serem mais efetivas em regimes fortemente transientes, tais correções não serão consideradas no presente trabalho.

### 1.3 - EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO DA TEMPERATURA<sup>(7)</sup>

Mesmo na ausência de processos dissipativos, um fluido que encontra-se localmente em um estado de expansão ( $\theta > 0$ ) ou contração ( $\theta < 0$ ) deve, naturalmente, modificar sua temperatura ao longo do tempo. Portanto, a fim de completar a solução do problema termodinâmico devemos, no caso geral, determinar a influência dos processos fora de equilíbrio na taxa de variação local de sua temperatura. Mostraremos agora que a equação de evolução da temperatura é uma consequência natural das leis de conservação, da relação de Gibbs e da equação de estado (1.2.27). De fato, se  $\rho = \rho(n, T)$  então

$$\dot{\rho} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n \dot{T} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T \dot{n} \quad . \quad (1.3.1)$$

Substituindo a equação acima na lei de conservação da energia (1.2.19) e usando a conservação do número de partículas podemos escrever

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n \dot{T} = \left[ n \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T - \rho - p \right] \theta + \pi \theta + \dot{u}_\alpha q^\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} - q_{||\alpha}^\alpha \quad . \quad (1.3.2)$$

Por outro lado, o fato de que  $ds$  na lei de Gibbs (1.1.1) é uma diferencial exata implica que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{nT} \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T - \left( \frac{\rho+p}{n} \right) \right] \right\} \right]_n = \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{nT} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n \right\} \right]_T \quad , \quad (1.3.3)$$

ou ainda

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_n = \rho + p - n \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T \quad . \quad (1.3.4)$$

Inserindo a eq. (1.3.4.) em (1.3.2) obtemos que

$$\frac{\dot{T}}{T} = - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n \theta + \frac{1}{T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n} \left[ \pi \theta + \dot{u}_\alpha q^\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} - q_{||\alpha}^\alpha \right] \quad . \quad (1.3.5)$$

Como esperado, se fluxos dissipativos estão ausentes,  $q^\alpha = \pi = \pi^{\alpha\beta} = 0$ , a eq. (1.3.5) nos diz que no regime de expansão ( $\theta > 0$ ), a temperatura diminui, o contrário ocorrendo para estados de colapso ( $\theta < 0$ ). Note também que as correções dissipativas em (1.3.5), incluindo a divergência do fluxo de calor, são de segunda ordem nos desvios do equilíbrio. É fácil mostrar também que se apenas o processo de transferência de calor é

considerado, a substituição de (1.2.22) em (1.3.5) conduz à forma relativística da equação de Fourier para fluidos em movimento.

#### 1.4 - O PLASMA RADIATIVO: COEFICIENTES DE TRANSPORTE E A TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO LOCAL <sup>(22)</sup>

A teoria macroscópica descrita nas secções anteriores pouco tem a dizer a respeito dos coeficientes de transporte, as constantes de proporcionalidade entre as forças e os fluxos termodinâmicos, além da positividade dos mesmos. Em princípio, tais coeficientes devem ser dependentes das variáveis termodinâmicas locais ( $n, T$ ) e da espécie de sistema em questão. É também esperado, para sistemas que se encontrem fora mas próximos do equilíbrio, que estes coeficientes sejam independentes dos gradientes.

Um dos objetivos básicos da teoria cinética relativística é fornecer uma base de sustentação para a abordagem fenomenológica, ou seja, reproduzir a partir das interações entre as partículas do fluido, as quantidades primárias (TEM, fluxo de entropia e de partículas), suas leis macroscópicas (conservação de energia, produção de entropia, etc) bem como obter os coeficientes de transporte.

Com a finalidade de discutir o conceito de temperatura no contexto das teorias de primeira ordem bem como exemplificar um cálculo de coeficientes de transporte, consideraremos a seguir um sistema específico, de particular interesse em problemas de astrofísica e cosmologia, para o qual os resultados

cinéticos estão bem estabelecidos.

O plasma radiativo <sup>(8,23)</sup> é um sistema constituído por uma mistura de dois fluidos cuja componente básica são quanta de radiação (fótons, neutrinos ou grávitons) de livre tempo médio finito  $\tau$ . A segunda componente é um meio material de livre tempo médio  $\tau_m$ , suposto em equilíbrio térmico na temperatura  $T_m$ . Isto significa que  $\tau_m \ll \tau$ , de modo que todas as propriedades de transporte do plasma são devidas exclusivamente aos quanta da radiação. Por hipótese, a radiação está fora porém próxima ao equilíbrio com a matéria, de tal forma que é suficiente obter a correção na sua função de distribuição de equilíbrio até termos de primeira ordem no livre tempo  $\tau$ .

Foi Thomas <sup>(23)</sup> quem obteve pela primeira vez a solução correta da equação de Boltzmann relativística para este sistema, tendo calculado os coeficientes de transporte de condução térmica e viscosidade de cisalhamento. Weinberg <sup>(8)</sup>, derivou uma expressão para o coeficiente de viscosidade volumar, mostrando que o fluido de duas componentes comporta-se na realidade como um fluido simples na formulação de Eckart. Uma considerável simplificação dos resultados de Thomas foi posteriormente estabelecida, através de uma formulação manifestamente covariante, por Masaki <sup>(24)</sup> e Straumann <sup>(25)</sup>. A discussão dos métodos e técnicas utilizados na obtenção das soluções da equação de transporte relativística está além dos objetivos do presente trabalho. Assim, ao obter o TEM do plasma, que será apresentado a seguir, omitiremos os cálculos relativos à correção da função de distribuição dos quanta. Para maiores detalhes veja as refs. <sup>(24)</sup> e <sup>(25)</sup>.

O tensor de energia momentum da mistura é dado por

$$T^{\alpha\beta} = T_{(m)}^{\alpha\beta} + T_{(r)}^{\alpha\beta} \quad , \quad (1.4.1)$$

onde

$$T_{(m)}^{\alpha\beta} = \rho_m(T_m, n) u^\alpha u^\beta - p_m(T_m, n) h^{\alpha\beta} \quad , \quad (1.4.2)$$

é o TEM do meio material suposto em equilíbrio na temperatura  $T_m$ . O TEM da radiação  $T_{(r)}^{\mu\nu}$  deve ser calculado cineticamente. Por definição <sup>(25)</sup>:

$$T^{\alpha\beta} = g \int_{K^0 \geq 0} K^\alpha K^\beta F(X, K) \frac{d^3 K}{K^0} \quad , \quad (1.4.3)$$

onde  $K^\alpha$  é o 4-momentum da radiação ( $K^\alpha K_\alpha = 0$ ) e  $F(X, K)$  é a função de distribuição, invariante de Lorentz, dos quanta de radiação.  $F$  é normalizada de tal modo que  $gF(X, K)d^3X d^3K$  é o número de quantas no elemento de volume  $d^3X$ , com 3-momentum  $\vec{K}$  cuja extremidade está localizada no elemento  $d^3K$ . O fator  $g$  é igual a  $(2\pi)^{-3}$  vezes o número de estados de spin dos quanta de radiação (em nossas unidades  $\hbar = K_B = c = 1$ ).

Por hipótese, a radiação está próxima ao equilíbrio com o meio material. Nesse caso, podemos tomar

$$F = F_0 + F_1$$

com  $|F_1/F_0| \ll 1$  e

$$F_0(x, K) = \left[ \exp\left(\frac{u^\alpha K_\alpha}{T_m}\right) - 1 \right]^{-1} \quad , \quad (1.4.4)$$

onde  $u^\alpha$  é a 4-velocidade do meio material. Para  $F = F_0$ , é fácil

mostrar que (1.4.3) se reduz ao TEM de equilíbrio <sup>(23)</sup>, ou seja,

$$g \int_{K^0 \geq 0} K^\alpha K^\beta F_0 \frac{d^3 K}{K^0} = NT_m^4 u^\alpha u^\beta - \frac{1}{3} N T_m^4 h^{\alpha\beta} \quad (1.4.5)$$

com a constante  $N = \frac{\pi^2}{30} g$ . Para completar o TEM devemos obter o termo de interação tomando  $F = F_1$  em (1.4.3), com  $F_1$  satisfazendo a equação de Boltzmann para radiação

$$K^\alpha \frac{\partial F_0}{\partial X^\alpha} = L(F_1) \quad , \quad (1.4.6)$$

onde  $L$  é o operador de colisão. Após uma conveniente linearização do termo colisional Straumann <sup>(25)</sup> demonstrou que

$$\begin{aligned} g \int_{K^0 \geq 0} K^\alpha K^\beta F_1 \frac{d^3 K}{K^0} = & - 4NT_m^4 \tau (u^\alpha u^\beta - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta}) (\frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{1}{3} \theta) \\ & + \frac{4NT_m^3 \tau}{3} (h^{\alpha\lambda} u^\beta + h^{\beta\lambda} u^\alpha) (T_m |_{\lambda} - T_m \dot{u}_\lambda) \\ & + \frac{4NT_m^4 \tau}{15} \sigma^{\alpha\beta} \quad . \quad (1.4.7) \end{aligned}$$

Portanto, das expressões (1.4.1)-(1.4.5) e (1.4.7) segue que

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = & \left\{ \rho_m(T_m, n) + NT_m^4 \left[ 1 - 4\tau \left( \frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{1}{3} \theta \right) \right] \right\} u^\alpha u^\beta + \\ & \left\{ p_m(T_m, n) + \frac{NT_m^4}{3} \left[ 1 - 4\tau \left( \frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{1}{3} \theta \right) \right] \right\} h^{\alpha\beta} + \\ & \frac{4NT_m^3 \tau}{3} (h^{\alpha\lambda} u^\beta + h^{\beta\lambda} u^\alpha) (T_m |_{\lambda} - T_m \dot{u}_\lambda) + \frac{4NT_m^4 \tau}{15} \sigma^{\alpha\beta} \quad . \quad (1.4.8) \end{aligned}$$

Comparando a equação acima com a forma geral (1.2.12), para o

TEM na formulação de Eckart, obtém-se diretamente os coeficientes de viscosidade de cisalhamento ( $\eta$ ) e condução térmica ( $\chi$ ) em função da temperatura da matéria e do livre tempo médio  $\tau$ . No entanto, a expressão para o coeficiente de viscosidade volumar não é imediatamente reconhecível de (1.3.8). Como observado por Weinberg<sup>(8)</sup> isto ocorre porque as quantidades físicas acima estão expressas em termos da temperatura da matéria  $T_m$ , enquanto na abordagem de Eckart a temperatura é definida de acordo com a hipótese de equilíbrio local. Para obter o coeficiente de viscosidade volumar  $\zeta$ , Weinberg introduziu na mistura o que ele denominou de temperatura de Eckart  $T$ , impondo que a densidade de energia comóvel  $u_\alpha u_\beta T^{\alpha\beta}$  seja igual à densidade de energia total  $\rho(n, T)$  para o equilíbrio térmico a temperatura  $T$ . Schweizer<sup>(26)</sup>, generalizando o trabalho de Weinberg no contexto das teorias de segunda ordem, referiu-se à temperatura de Eckart como sendo a temperatura fisicamente relevante na mistura. Assim, é interessante obter o coeficiente  $\zeta$  de tal maneira que torne explícito a conexão entre a temperatura de Eckart e um procedimento operacional que permita, pelo menos em princípio, realizar a sua medição. Como sugerido por Yourgrau et al.<sup>(9)</sup>, um procedimento que parece consistente com a hipótese de equilíbrio local, mesmo no caso de misturas, é o seguinte: "Para medir a temperatura em um ponto arbitrário de um fluido fora de equilíbrio térmico, isole um pequeno elemento de volume na vizinhança do ponto e permita à matéria contida nele chegar ao equilíbrio. A temperatura medida para este estado de equilíbrio definirá a temperatura no ponto considerado". No que se segue demonstraremos que tal prescrição operacional não apenas conduz naturalmente a temperatura de Eckart, mas proporcio

na também um método mais simples de obter a expressão do coeficiente de viscosidade volumar do plasma radiativo.

Primeiramente deve ser observado que o coeficiente deve surgir da parte isotrópica de (1.4.8) [compare com a forma padrão de Eckart (1.2.12)]. Assim, nós consideraremos, sem perda de generalidade, apenas os dois primeiros termos no TEM (1.4.8).

Definindo a temperatura cinética efetiva da radiação

$$T_r = T_m \left[ 1 - \tau \left( \frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{1}{3} \theta \right) \right], \quad (1.4.9)$$

a parte isotrópica  $T_I^{\alpha\beta}$  de (1.4.8) pode ser reescrita como:

$$T_I^{\alpha\beta} = \left[ \rho_m(T_m, n) + NT_r^4 \right] u^\alpha u^\beta + \left[ p_m(T_m, n) + \frac{1}{3} NT_r^4 \right] h^{\alpha\beta}. \quad (1.4.10)$$

Vemos desta expressão que a radiação comporta-se como se estivesse em equilíbrio na temperatura  $T_r$ . Note que o TEM acima possui dois termos característicos da forma de fluido perfeito. No entanto, a diferença de temperatura entre as componentes é responsável por uma troca irreversível de calor entre elas. Este é o mecanismo macroscópico que explica qualitativamente a existência da viscosidade volumar no plasma radiativo. Como demonstrado por Udey e Israel<sup>(27)</sup> o argumento é essencialmente o mesmo no caso de um fluido simples relativístico de partículas materiais<sup>(\*)</sup>.

Considerando  $T_m$  e  $n$  como variáveis termodinâmicas in

---

(\*) As partículas com velocidades próximas a da luz tendem a se comportar como uma componente radiativa.

dependentes, segue da equação de evolução (1.3.5) que

$$\frac{\dot{T}_m}{T_m} = - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n \theta + O(\tau) \quad , \quad (1.4.11)$$

ou ainda,

$$\frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{1}{3} \theta = \Omega \theta + O(\tau) \quad , \quad (1.4.12)$$

onde

$$p = p_m + p_r \quad , \quad \rho = \rho_m + \rho_r$$

e

$$\Omega = \frac{1}{3} - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n \quad . \quad (1.4.13)$$

Substituindo (1.4.12) em (1.4.9) obtemos

$$T_r = T_m (1 - \tau \Omega \theta) \quad . \quad (1.4.14)$$

Note que se  $p \rightarrow \frac{1}{3} \rho$  então  $\Omega \rightarrow 0$  e  $T_r \rightarrow T_m$ , de forma que um gás de radiação não deve apresentar viscosidade volumar.

Introduziremos agora a temperatura de Eckart  $T$  através do "Gendâken Experiment" sugerido por Yourgrau e colaboradores<sup>(9)</sup>. Esta será fixada impondo-se que qualquer elemento de volume contendo matéria e radiação, nas temperaturas  $T_r$  e  $T_m$ , quando isolado deverá termalizar na temperatura de Eckart  $T$ . Portanto, segue da calorimetria ordinária que

$$\frac{T_m - T}{T - T_r} = \frac{C_r}{C_m} \quad , \quad (1.4.15)$$

onde

$$C_m = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial T_m} \right)_n \quad , \quad (1.4.16)$$

e

$$C_r = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \rho_r}{\partial T_r} \right)_n , \quad (1.4.17)$$

são os calores específicos (por partícula) e volume constante, da matéria e da radiação, respectivamente.

Substituindo (1.4.14) em (1.4.15) obtém-se facilmente que

$$T_m = T \left( 1 + \frac{C_r}{C_r + C_m} \tau \Omega \theta \right) , \quad (1.4.18)$$

e

$$T_r = T \left( 1 - \frac{C_m}{C_r + C_m} \tau \Omega \theta \right) . \quad (1.4.19)$$

Por outro lado, usando as equações (1.4.16)-(1.4.19) mostra-se que

$$\frac{C_r}{C_r + C_m} = \frac{4NT^3}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n} + O(\tau) , \quad (1.4.20)$$

ou ainda,

$$\frac{C_m}{C_r + C_m} = 1 - \frac{4NT^3}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n} + O(\tau) = \frac{(\partial \rho_m / \partial T)_n}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n} + O(\tau) , \quad (1.4.21)$$

Portanto, as eqs. (1.4.18) e (1.4.19) podem ser reescritas como

$$T_m = T \left[ 1 + \frac{4NT^3}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n} \tau \Omega \theta \right] , \quad (1.4.22)$$

e

$$T_r = T \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4NT^3}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n} \right) \tau \Omega \theta \right] . \quad (1.4.23)$$

Note que  $T_m$ ,  $T_r$  e  $T$  diferem por termos de primeira ordem no livre tempo médio  $\tau$ . Logo, substituindo  $T_r$  dada acima no TEM (1.4.10) e isolando  $\rho_m(T_m, n)$  e  $p_m(T_m, n)$  nas expansões

$$\begin{aligned}\rho_m(T, n) &= \rho_m(T_m, n) + \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial T}\right)_n (T - T_m) + O(\tau^2) \quad , \\ p_m(T, n) &= p_m(T_m, n) + \left(\frac{\partial p_m}{\partial T}\right)_n (T - T_m) + O(\tau^2) \quad ,\end{aligned}$$

onde  $T_m - T$  é obtida de (1.4.22), é fácil demonstrar que (1.4.10) toma a seguinte forma:

$$T_I^{\alpha\beta} = \left[ \rho_m(T, n) + NT^4 \right] u^\alpha u^\beta - \left[ p_m(T, n) + \frac{1}{3} NT^4 - 4NT^4 \tau \Omega^2 \theta \right] h^{\alpha\beta} . \quad (1.4.24)$$

Finalmente, comparando a expressão acima com o tensor de energia momentum isotrópico, viscoso, na formulação de Eckart [ veja (1.2.12) ]

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - p h^{\alpha\beta} + \zeta \theta h^{\alpha\beta} \quad , \quad (1.4.25)$$

temos que

$$\zeta = 4NT^4 \Omega^2 \tau \quad , \quad (1.4.26)$$

exatamente o valor obtido por Weinberg <sup>(8)</sup>.

Para um gás de radiação ( $\Omega=0$ ) e portanto  $\zeta = 0$  como observado anteriormente. Além disso, como  $T_m$  e  $T$  diferem por termos de  $O(\tau)$ , podemos substituir diretamente  $T_m$  por  $T$  nos dois últimos termos do TEM geral (1.4.8). Segue então que os coeficientes  $\chi$  e  $\eta$ , no "calibre" de Eckart, tomam a seguinte forma:

$$\chi = \frac{4}{3} NT^3 \tau \quad , \quad (1.4.27)$$

e

$$\eta = \frac{4NT^4 \tau}{15} \quad . \quad (1.4.28)$$

## CAPÍTULO II

### MODELOS COSMOLÓGICOS HOMOGENEOS E ISOTRÓPICOS

#### 2,1 - INTRODUÇÃO

Os conceitos de homogeneidade e isotropia espacial foram introduzidos na Cosmologia Relativista por Einstein, ao formular o problema cosmológico no contexto da Relatividade Geral <sup>(28)</sup>. Homogeneidade espacial significa que observadores em diferentes posições do espaço têm a mesma visão típica e, exceto por irregularidades locais, as quantidades físicas relevantes em uma escala suficientemente grande ( $l \gtrsim 100$  Mpc) são independentes da posição. Por isotropia espacial entende-se que as propriedades físicas são independentes da direção. Tais hipóteses, razoavelmente restritivas, eram permitidas na época até pela inexistência de dados observacionais, e tinha a finalidade de tornar o problema tratável do ponto de vista matemático.

A combinação das hipóteses de homogeneidade e isotropia implica que o espaço, em larga escala, é isotrópico em torno de qualquer ponto. Geometricamente, isto significa que tal espaço é maximalmente simétrico, ou equivalentemente, de curvatura constante <sup>(29)</sup>. Existem apenas três classes de modelos que satisfazem esta condição e se tornaram tão amplamente aceitos

que os astrofísicos costumam denominá-los indistintamente de "modelo padrão" ou modelos do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Tais modelos prevêem os resultados mais antigos e melhor estabelecidos em cosmologia observacional<sup>(3)</sup>: o deslocamento para o vermelho das linhas espectrais dos objetos distantes (fluxo de Hubble), a existência da radiação cósmica de fundo (RCF), correspondente à temperatura de corpo negro de aproximadamente 3K e à abundância cósmica dos elementos leves, notadamente, do hélio e do deutério. A escolha dentre os três modelos dependeria essencialmente de medidas mais precisas da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração<sup>(6)</sup>. De modo geral, os três resultados experimentais acima evidenciam que o universo não é estático e nem estacionário e que, provavelmente, expandiu-se a partir de uma fase extremamente densa e quente (era da radiação) para o estado atual dominado pela matéria.

Apesar da enorme limitação teórica em considerar apenas espaços de curvatura constante (ver Capítulo III), não nos deteremos aqui na discussão das evidências experimentais que modernamente possam justificar as hipóteses de homogeneidade e isotropia espacial. Ao contrário, considerando a formulação para fluidos dissipativos apresentada no capítulo anterior, faremos um exame teórico das propriedades dinâmicas e térmicas do fluido autogravitante que é fonte de curvatura de modelos homogêneos e isotrópicos<sup>(\*)</sup>.

As propriedades dinâmicas, por exemplo, são determinadas a partir da solução da equação diferencial para o fator de

---

(\*) Como veremos adiante, a existência do mecanismo de viscosidade volumar é compatível com as propriedades de homogeneidade e isotropia espacial.

escala. Tal equação depende, no caso mais geral, de três parâmetros: a constante de curvatura ( $k$ ), o índice politrópico da equação de estado ( $\gamma$ ) e o coeficiente de viscosidade volumar ( $\zeta$ ). A cronologia dos modelos conhecidos ilustra claramente que as soluções dependem fortemente dos valores assumidos pelo trio de parâmetros  $\gamma$ ,  $k$  e  $\zeta$  [ver refs. (30), (32), (33) e (34)]. Na verdade, mesmo considerando  $\zeta = 0$ , soluções explícitas permitindo valores arbitrários do par  $(\gamma, k)$  não tinham sido estabelecidas até recentemente<sup>(54)</sup>. Uma situação semelhante ocorrendo com as propriedades termodinâmicas. Estas e outras questões relacionadas serão tratadas em detalhe no presente capítulo.

## 2.2 - EQUAÇÕES BÁSICAS

As propriedades geométricas dos modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos estão contidas no elemento de linha de Robertson-Walker<sup>(3), (53)</sup>

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (2.2.1)$$

A função  $\sigma(\chi)$  é definida por:

$$\sigma(\chi) = \frac{\text{sen}\sqrt{k}\chi}{\sqrt{k}} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{sen}\chi & \text{se} & k = 1 \\ \chi & \text{se} & k = 0 \\ \text{senh}\chi & \text{se} & k = -1 \end{array} \right. , \quad (2.2.2)$$

onde  $k$  é o parâmetro de curvatura da seção espacial. Se positivo, negativo ou nulo, os modelos são frequentemente denominados por fechado, aberto ou plano. Os valores diferentes de ze-

Considerando as eqs. (2.2.1) e (2.2.3) mostra-se <sup>(3)</sup> que as equações de campo de Einstein (ECE),  $G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ , reduzem-se a:

$$\rho = 3 \left( \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} \right) , \quad (2.2.4)$$

e

$$p - 3\zeta \frac{\dot{R}}{R} = - 2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{K}{R^2} . \quad (2.2.5)$$

Observamos das ECE acima que o efeito total do mecanismo de viscosidade volumar é simplesmente substituir a pressão termostática  $p$  por uma pressão termodinâmica efetiva  $p' = p - 3\zeta \frac{\dot{R}}{R}$ .

Por outro lado, as equações de conservação do número de partículas, da produção de entropia e da taxa de variação da temperatura, dados respectivamente por (1.2.2), (1.2.25) e (1.3.5) tomam as seguintes formas:

$$\dot{n} + n\theta = 0 , \quad (2.2.6)$$

$$\dot{s} = \frac{\zeta\theta^2}{nT} , \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\theta} \frac{\theta}{n} + \frac{\zeta\theta^2}{T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{n}} . \quad (2.2.8)$$

Logo, a fim de integrar as eqs. (2.2.4)–(2.2.8), além das equações de estado (1.2.26)–(1.2.27) é necessário, em geral, uma expressão para o coeficiente de viscosidade volumar  $\zeta$  o qual, apenas no limite de gás diluído, pode ser deduzido através da teoria cinética.



### 2.3 - O LIMITE ADIABÁTICO ( $\zeta = 0$ ) (7,51,54)

Neste caso, vemos da eq. (2.2.8) que equações de estado do tipo  $\rho = \rho(n,T)$  e  $p = p(n,T)$  não precisam ser simultaneamente impostas ao sistema de eqs. (2.2.4)–(2.2.8). Em princípio, uma equação do tipo  $\rho = \rho(n,p)$  ou mesmo uma equação de estado barotrópica  $\rho = \rho(p)$  é suficiente para tornar o sistema matematicamente determinado. No entanto, antes de integrar o conjunto completo de equações, consideraremos a seguinte questão: quais as limitações na forma da equação de estado  $\rho = \rho(n,p)$  que podem ser deduzidas a partir de princípios físicos gerais? Em outras palavras, sem entrar nos detalhes da microfísica satisfeita pelas partículas materiais, qual a forma geral  $\rho = \rho(n,p)$  imposta pelos princípios de conservação da energia e do número de partículas? Seguindo Tooper<sup>(42)</sup>, examinaremos esta questão supondo que o fluido está localmente submetido a um processo politrópico, ou seja, para o qual é válido uma relação do tipo<sup>(14,42,48)</sup>

$$p = Cn^\gamma, \quad (2.3.1)$$

onde  $C$  é uma constante dimensional e  $\gamma$  é o índice politrópico.

Para determinar a densidade de energia  $\rho = \rho(n,p)$  observe que as leis de conservação (1.2.1) e (2.2.6) implicam que

$$\frac{d\rho}{\rho+p} = - \frac{dn}{n}. \quad (2.3.2)$$

Substituindo a eq. (2.3.1) na equação acima obtemos

$$p \frac{d\rho}{dp} - \frac{\rho}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} \quad , \quad (2.3.3)$$

que é uma equação diferencial linear não homogênea de primeira ordem, cuja solução geral é dada por <sup>(43)</sup> :

$$\rho = Bp^{1/\gamma} + (\gamma-1)^{-1}p \quad , \quad \text{se } \gamma \neq 1 \quad (2.3.4)$$

e

$$\rho = Bp + p \ln p \quad , \quad \text{se } \gamma = 1 \quad , \quad (2.3.5)$$

onde B é uma constante arbitrária. Segue ainda da eq. (2.3.1) que a expressão (2.3.4) pode ser reescrita na seguinte forma

$$\rho = Anm + (\gamma-1)^{-1} p \quad , \quad (2.3.6)$$

onde m é a massa de repouso das partículas do fluido e A uma constante adimensional arbitrária.

A equação (2.3.6) acima permite recuperar as equações de estado ordinariamente empregadas no domínio cosmológico. Particularmente, se  $A = 0$  a eq. (2.3.6) reduz-se à conhecida equação de estado barotrópica ("gamma-law")

$$p = (\gamma-1)\rho \quad . \quad (2.3.7)$$

Além disso, se  $A = 1$  e  $p = 0$  temos o caso de poeira ( $\rho = nm$ ) , que é também descrito pela eq. (2.3.7) no limite  $\gamma = 1$ . Finalmente, se  $A = 1$  e  $\gamma = 5/3$  temos a expressão

$$\rho = nm + \frac{3}{2} p \quad . \quad (2.3.8)$$

Esta equação, como demonstrado por Juttner <sup>(44,45)</sup> usando argumentos estatísticos, corresponde à equação de estado de um gás

ideal monoatômico relativístico, no limite em que a energia térmica das partículas é bem menor do que a energia de repouso ( $K_B T \ll mc^2$ ).

Argumentos de natureza geral também podem ser utilizados a fim de impor limites nos valores admissíveis do índice  $\gamma$ . Para um gás relativístico sob condições adiabáticas, como demonstrado por Curtis<sup>(46)</sup> e Israel<sup>(47)</sup>, a velocidade do som (em unidades de velocidade da luz) é dada por  $v_s = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{1/2}$ . No caso da eq. (2.3.7), por exemplo, temos  $v_s = (\gamma-1)^{1/2}$ . Naturalmente, se esta velocidade exceder a velocidade da luz é sempre possível escolher um referencial de Lorentz local no qual uma onda acústica deslocando-se entre dois pontos A e B, chegaria em B antes de ter partido do ponto A; o que violaria o princípio de causalidade. Portanto, o índice  $\gamma$  não pode exceder o valor dois. Mostra-se também que a estabilidade contra colapso mecânico exige que  $\gamma$  seja maior ou igual à unidade<sup>(48)</sup>. No caso da lei gamma (2.3.7), tais limites ( $1 \leq \gamma \leq 2$ ) envolvem os casos usualmente considerados de maior relevância física em cosmologia, a saber: poeira ( $\gamma = 1$ ), radiação ( $\gamma = 4/3$ ) e matéria ultra-rígida ( $\gamma = 2$ ). De interesse também é o caso  $\gamma = 5/3$  na eq. (2.3.6), que deve fornecer uma descrição mais precisa do estado do meio material próximo e logo após a era do desacoplamento entre a matéria e a radiação ( $T \cong 5 \times 10^3$  °K).

A positividade da pressão termodinâmica para fluidos de partículas materiais em regimes de/ou próximos ao equilíbrio é a garantia de estabilidade contra colapso mecânico<sup>(48)</sup>. Contudo, dado o TEM de um campo físico (escalar, eletromagnético ... etc), a decomposição deste tensor em componentes irredutíveis paralelas e ortogonais à 4-velocidade  $v^\mu$  é sempre possível, ou

seja, é uma decomposição matemática <sup>(2,6)</sup> [ver eq.(1.2.12)]. Assim, para tais sistemas é interessante estudar suas propriedades termodinâmicas como se fosse um fluido, mesmo que representem estados de pressão negativa. Considere, por exemplo, o caso de um campo escalar com densidade lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad . \quad (2.3.9)$$

Calculando o TEM,  $T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi \frac{\partial L}{\partial (\partial^\beta \phi)} - L g_{\alpha\beta}$ , vemos que para modelos homogêneos e isotrópicos, podemos sempre reescrevê-lo sob a forma do TEM de fluido perfeito, isto é,

$$T_{\alpha\beta} = (\rho_\phi + p_\phi) V_\alpha V_\beta - p_\phi g_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.3.10)$$

com

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad (2.3.11a)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad , \quad (2.3.11b)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial do campo escalar<sup>(\*)</sup>. Logo, se  $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$  temos uma equação de estado do tipo matéria ultra-rígida ( $p_\phi = \rho_\phi$ ) e se  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  temos  $p_\phi = -\rho_\phi$ , a pressão é negativa se  $V(\phi)$  é positivo. Tal situação ocorre, por exemplo, no denominado cenário inflacionário do universo primitivo ("vacuum-stage"). Na verdade, o campo escalar no universo de Friedmann, para certas classes de potenciais  $V(\phi)$ , pode ser macroscopicamente descrito como um fluido perfeito satisfazendo uma lei gamma do tipo (2.3.7), com índice adiabático no intervalo  $0 \leq \gamma \leq 2$

(\*) Se variações espaciais fossem permitidas (modelos não homogêneos), um termo do tipo  $\frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2$  deveria ser adicionado às expressões da pressão e da densidade de energia.

[ver ref. (49)]. Em geral, não podemos aplicar a tais sistemas a lei de conservação do número de partículas. Restrições mais adequadas podem ser estabelecidas via as condições de energia (50). Usualmente tais sistemas satisfazem à condição de energia fraca ( $\rho > 0$ ) e de energia dominante ( $|p| \leq \rho$ ); porém, a condição de energia forte ( $\rho + 3p \geq 0$ ) é geralmente violada.

No que se segue, suporemos que o índice  $\gamma$  está restrito ao intervalo  $0 \leq \gamma \leq 2$ . Tal hipótese permitirá tratar de forma unificada a termodinâmica dos modelos para qualquer valor de  $\gamma$ , incluindo aquelas que não descrevem um fluido perfeito ordinário. Como veremos adiante, a termodinâmica que será obtida para  $\gamma$  no intervalo  $[0,1)$  é razoavelmente patológica. Contudo, seus resultados constituem uma consequência natural da descrição de fluido, se esta é explorada até as últimas consequências. Conjecturamos que tal descrição fenomenológica poderá ser reproduzida, sob certas condições, através de métodos estatísticos ou cinéticos na teoria de campo específica (temperatura finita).

Tendo em vista os comentários acima, retornaremos agora ao problema de integrar o sistema (2.2.4)-(2.2.8) para  $\zeta = 0$ . Resultados quantitativos serão exibidos apenas no caso da lei gamma (2.3.7). As consequências da equação de estado (2.3.6), no contexto dos modelos do tipo FRW, foram recentemente discutidos pelo autor e M.O. Calvão na referência (51).

Combinando as eqs. (2.2.4)-(2.2.5) e (2.3.7), obtemos que o fator de escala  $R$  satisfaz à equação diferencial de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)K = 0 \quad , \quad (2.3.12)$$

cuja integral primeira pode ser escrita como (Apêndice B)

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma-2} - K, \quad (2.3.13)$$

onde  $R_0^{3\gamma-2}$  é uma constante de integração convenientemente escolhida para dar uma descrição unificada aos modelos.

Mostraremos agora que a dependência das grandezas físicas no fator de escala  $R$  é facilmente determinada a partir da integral primeira acima.

Substituindo (2.3.13) em (2.2.4) e usando (2.3.7), obtemos para a densidade de energia e pressão

$$\rho = \frac{3}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \quad (2.3.14)$$

e

$$p = \frac{3(\gamma-1)}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \quad (2.3.15)$$

enquanto das eqs. (2.2.6) e (2.2.8) segue que

$$n = n_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3, \quad (2.3.16)$$

e

$$T = T_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-1)}, \quad (2.3.17)$$

onde  $n_0$  e  $T_0$  denotam respectivamente a densidade de número de partículas e a temperatura no instante em que  $R = R_0$ .

Para completar a análise termodinâmica do caso adiabático nós observamos que a constância da entropia específica é uma consequência da eq. (2.2.7). Na verdade, integrando a lei de Gibbs (1.1.1) com o auxílio das eqs. (2.3.16) e (2.3.17) é

fácil mostrar que a entropia específica, a menos de uma constante aditiva arbitrária, é dada por

$$s = \frac{3\gamma}{n_0 T_0 R_0^2} \quad , \quad (2.3.18)$$

a qual pode ser reescrita como [ver eq. (2.3.14)-(2.3.17)]

$$s = \frac{\rho+p}{nT} \quad . \quad (2.3.19)$$

Então, como uma função das variáveis de estado,  $s$  satisfaz a denominada relação de Euler<sup>(52)</sup> (potencial químico nulo) como esperado para estados de equilíbrio.

Analisemos as consequências da lei de evolução da temperatura (2.3.17). Se  $\gamma > 1$  a pressão é positiva com a temperatura decrescendo ao longo da expansão. Contudo, se  $\gamma < 1$  (pressão negativa), temos um resultado não esperado. Neste caso, a temperatura cresce durante a expansão. Particularmente, para um estágio de vácuo ( $\gamma = 0$ ), temos de (2.3.17)  $T \sim R^3$ .

É importante enfatizar que nossos resultados permanecem válidos para todos os valores do parâmetro da curvatura  $k$ . Além disso, a dependência de todas as quantidades termodinâmicas com o fator de escala  $R$  foi determinada considerando apenas a integral primeira (2.3.13). Naturalmente, para obter a dependência temporal de qualquer grandeza física é suficiente substituir na respectiva expressão as soluções de  $R(t)$ , obtidas a partir de (2.3.12) ou equivalentemente, de (2.3.13). Como é bem conhecido, o comportamento das soluções depende fortemente dos valores dos parâmetros  $\gamma$  e  $k$ . Alguns livros-texto<sup>(3,6,53)</sup> e mesmo a literatura mais especializada<sup>(30)</sup>, exibem soluções apenas para valores isolados do par  $(\gamma, k)$ , perdendo assim

a unidade e continuidade do espectro completo de soluções. Na verdade, a solução geral e unificada da eq. (2.3.12), para todos os valores dos parâmetros  $\gamma$  e  $k$ , foi recentemente estabelecida na referência (54). Como demonstrado no Apêndice B [eq. (B.13)], tal solução toma a seguinte forma:

$$t(R) - t_0 = \frac{2R_0}{3\gamma-2} K^{-A} (1-K)^{1/2} F(R_0) - \frac{2R_0 K^{-A}}{3\gamma-2} [1-K(R/R_0)^{3\gamma-2}]^{1/2} F(R), \quad (2.3.20)$$

onde  $A = \frac{3\gamma}{2(3\gamma-2)}$ ,  $t_0 = t(R_0)$  é uma constante de integração e  $F(R)$  a função hipergeométrica

$$F(R) = F \left[ \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1-K(R/R_0)^{3\gamma-2} \right]. \quad (2.3.21)$$

O índice  $\gamma$  nas eqs. (2.3.14)-(2.3.21) não está matematicamente restrito a qualquer intervalo. Em particular, soluções de vácuo, originalmente estabelecidas usando-se a constante cosmológica, podem ser recuperadas no limite  $\gamma = 0$ , ou seja,  $p = -\rho$ . Neste caso, combinando as eqs. (2.3.14)-(2.3.15), obtemos para a constante cosmológica o valor  $\Lambda = 3R_0^{-2}$ . A escala de tempo  $t_0$  é ajustável para cada valor de  $\gamma$ , de modo a fixar as escalas de tempo usualmente consideradas na literatura.

Através de uma transformação linear na função hipergeométrica (Apêndice B), a solução acima pode ser reescrita em uma forma alternativa:

$$t(R) - t(R_0) = \frac{2R_0}{3\gamma-2} (1-K)^{1/2} G(R_0) - \frac{2R_0}{3\gamma-2} \left( 1-K(R/R_0)^{3\gamma-2} \right)^{1/2} (R/R_0)^{3\gamma/2} G(R), \quad (2.3.20a)$$

onde

$$G(R) = F\left(\frac{3\gamma-1}{3\gamma-2}, 1, \frac{3}{2}; 1-K(R/R_0)^{3\gamma-2}\right) \quad (2.3.21a)$$

A conveniência no uso de uma outra solução está associada com a simplicidade matemática na obtenção de certos casos limites. Observe também que as soluções acima, em geral, não podem ser invertidas obtendo-se  $R$  como uma função do tempo. Isto acontece somente se  $K = 0$ . De fato, tomando o limite  $K \rightarrow 0$  nas eqs. (2.3.20a)-(2.3.21a), como demonstrado no Apêndice B [eq. (B.19)], temos para qualquer valor de  $\gamma$

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \frac{3\gamma}{2} \frac{(t-t_0)}{R_0} \right]^{2/3\gamma} \quad (2.3.22)$$

Considerando a identidade <sup>(55)</sup>  $\lim_{d \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{d})^d = e^x$ , a equação acima fornece para  $\gamma = 0$  a solução cosmológica de de-Sitter <sup>(30)</sup>

$$R = R_0 e^{\frac{t-t_0}{R_0}} \quad (2.3.23)$$

Além disso, fixando a escala de tempo na eq. (2.3.22) em  $t_0 = 2R_0/3\gamma$ , nós recuperamos a forma restrita das soluções planas (não inclui de Sitter), usualmente apresentadas na literatura <sup>(30)</sup>

$$R(t) = R_0 \left( \frac{3\gamma t}{2R_0} \right)^{2/3\gamma} \quad (2.3.24)$$

Um aspecto que também merece ser examinado, pois permite uma visualização mais simples da dinâmica dos modelos do tipo FRW, está relacionado com as soluções (2.3.20) - (2.3.21) quando expressos em forma paramétrica <sup>(54)</sup>. Introduzindo a variá

vel tempo conforme  $\eta$  satisfazendo

$$d\eta = dt/R \quad , \quad (2.3.25)$$

e definindo um novo fator de escala  $Y$  pelas transformações

$$Y = \ln R \quad (\gamma = 2/3) \quad (2.3.26)$$

$$Y = R^{(3\gamma-2)/2} \quad (\gamma \neq 2/3) \quad , \quad (2.3.27)$$

a equação (2.3.12) toma a seguinte forma:

$$Y'' = 0 \quad (\gamma = 2/3) \quad (2.3.28)$$

$$Y'' + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)^2 KY = 0 \quad (\gamma \neq 2/3) \quad , \quad (2.3.29)$$

onde uma linha denota derivada ordinária com relação à variável  $\eta$ .

O caso  $\gamma = 2/3$  comporta-se sempre como uma partícula livre. Se  $Y' = 0$  e  $K = 1$  temos o modelo estático de Einstein ( $R = R_0$ ) e se  $Y' \neq 0$ , é o modelo de Milne<sup>(30)</sup> ( $R \propto t$  para qualquer  $k$ ). Mais interessante do ponto de vista físico é o caso  $\gamma \neq 2/3$ . Segue da eq. (2.3.29) que o comportamento dinâmico do fator de escala  $Y$  é igual ao de uma partícula livre ( $K=0$ ), um oscilador harmônico ( $K=1$ ) ou um "anti-oscilador" ( $K=-1$ ).

Integrando a eq.(2.3.29) temos a seguinte solução geral:

$$Y = Y_0 \frac{\text{sen}\sqrt{K}(\omega\eta+\delta)}{\sqrt{K}} \quad , \quad (2.3.30)$$

onde  $Y_0$  e  $\delta$  são constantes de integração e  $\omega$ , a frequência do oscilador ("anti-oscilador"), é dependente do parâmetro  $\gamma$

$$\omega = \left| \frac{3\gamma-2}{2} \right| \quad . \quad (2.3.31)$$

A integral primeiro (2.3.13) pode ser reescrita em termos de  $Y$  como

$$\frac{1}{2} Y'^2 + \frac{1}{2} K\omega^2 Y^2 = \frac{1}{2} \omega^2 R_0^{3\gamma-2} \quad , \quad (2.3.32)$$

e substituindo a eq. (2.3.30) na expressão acima temos  $Y_0 = R_0^{(3\gamma-2)/2}$ . Portanto, escolhendo a "fase"  $\delta = 0$  e usando a inversa da transformação (2.3.27), obtemos para o fator de escala

$$R(\eta) = R_0 \left[ \frac{\text{sen}\sqrt{K} \left| \frac{3\gamma-2}{2} \right| \eta}{\sqrt{K}} \right]^{2/(3\gamma-2)} \quad , \quad (2.3.33)$$

que é a solução paramétrica unificada para  $R$  se  $\gamma \neq 2/3$ . Note que o intervalo de variação do parâmetro  $\eta$  depende de  $K$ . Se  $K = 1$ ,  $0 \leq \eta \leq \frac{2\pi}{3\gamma-2}$  e se  $K = 0, -1$  temos  $0 \leq \eta < \infty$ .

A solução  $t(\eta)$  é obtida por substituição direta da expressão acima nas eqs. (2.3.20)-(2.3.21) ou (2.3.20a)-(2.3.21a). Para as eqs. (2.3.20)-(2.3.21) temos:

$$t(\eta) - t_0 = \frac{2R_0 K^{-A}}{3\gamma-2} (1-K)^{1/2} F(\eta_0) - \frac{2R_0}{3\gamma-2} K^{-A} F(\eta) \cos(\sqrt{K} \left| \frac{3\gamma-2}{2} \right| \eta) \quad , \quad (2.3.34)$$

onde  $\eta_0 = \frac{(\text{arcsen}^{-1}\sqrt{K})}{\sqrt{K}} (3\gamma-2)/2$  e  $F(\eta)$  é dada por

$$F(\eta) = F \left[ \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)} \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{3}{2} \quad ; \quad \cos^2 \sqrt{K} \left| \frac{3\gamma-2}{2} \right| \eta \right] \quad , \quad (2.3.35)$$

com expressões semelhantes para o caso das eqs. (2.3.20a)-

-(2.3.21a). Para modelos de poeira ( $\gamma=1$ ) e radiação ( $\gamma=4/3$ ), as soluções unificadas<sup>(\*)</sup> obtidas a partir das eqs. (2.3.20), (2.3.34) e (2.3.35) são<sup>(54)</sup>:

(a) Poeira ( $\gamma = 1, p = 0$ )

$$t(R) = \frac{R_0}{K} \left[ \frac{\arcsen \sqrt{K} (R/R_0)^{1/2}}{\sqrt{K}} - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/2} \left(1 - K \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/2}\right) \right] \quad (2.3.36)$$

Forma paramétrica:

$$R(\eta) = R_0 \left( \frac{\sen \sqrt{K} \frac{\eta}{2}}{\sqrt{K}} \right)^2, \quad t(\eta) = \frac{2R_0}{K} \left( \eta - \frac{\sen \sqrt{K} \eta}{\sqrt{K}} \right), \quad (2.3.36a)$$

onde  $0 \leq \eta \leq \pi$  se  $K = 1$  e  $0 \leq \eta < \infty$  se  $K = 0, -1$ .

(b) Radiação ( $\gamma = 4/3, p = 1/3\rho$ )

$$t(R) = \frac{R_0}{2K} \left\{ 1 - \left[ 1 - K \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (2.3.37)$$

Forma paramétrica:

$$R(\eta) = R_0 \frac{\sen \sqrt{K} \eta}{\sqrt{K}}, \quad t(\eta) = \frac{R_0}{K} (1 - \cos \sqrt{K} \eta), \quad (2.3.37a)$$

onde  $0 \leq \eta \leq \pi/2$  se  $K = 1$  e  $0 \leq \eta < \infty$  se  $K = 0, -1$ .

As equações (2.3.29) e (2.3.30), implicam que  $Y_0 = R_0^{3\gamma-2}$  é um valor máximo de  $Y$  no caso dos modelos fechados, o que apon

---

(\*) Um algoritmo para determinar todas as soluções da equação (2.3.12), que são redutíveis a funções elementares, está apresentado no Apêndice B.

ta também para o caráter cíclico de tais modelos. Como demonstrado no Apêndice B,  $R_0$  é um valor máximo para o fator de escala  $R$  somente se  $\gamma > \frac{2}{3}$ , isto é, quando as soluções satisfazem à condição de energia forte. De fato, se  $\gamma < \frac{2}{3}$   $R = R_0$  é uma condição de mínimo (estacionário se  $\gamma = \frac{2}{3}$ ). Os modelos com  $\gamma > \frac{2}{3}$  partem de uma singularidade ( $R = 0$ ) em um instante que pode ser fixado em  $t = 0$ . Após atingirem o máximo  $R = R_0$ , inicia-se o recolapso de volta à singularidade. Vemos da eq. (2.3.33) que, na variável "tempo conforme" o retorno à singularidade ocorrerá para o valor máximo  $\eta^*$  tal que  $\omega\eta^* = \pi$ , ou seja,  $\eta^* = \frac{2\pi}{3\gamma-2}$ . Para saber que tempo real este valor de  $\eta^*$  corresponde na coordenada tempo cosmológico, devemos primeiro fixar a escala de tempo  $t_0$  na eq. (2.3.34), tal que  $t(n=0) = 0$ . Em seguida, tomamos  $K = 1$  e substituímos  $n^*$  nas eqs. (2.3.34) e (2.3.35). Feito isto, considerando a identidade de Gauss (eq. A.25), obtém-se facilmente a seguinte expressão <sup>(54)</sup>:

$$T = \frac{2R_0 \pi^{1/2}}{3\gamma-2} \frac{\Gamma\left(\frac{3\gamma}{2(3\gamma-2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{6\gamma-2}{2(3\gamma-2)}\right)} \quad (\gamma > 2/3) \quad , \quad (2.3.38)$$

onde  $\Gamma$  é a função Gamma.

Como esperado, o tempo de vida dos modelos fechados diminui com o crescimento do índice  $\gamma$ . Este é um efeito típico da relatividade geral. A densidade de massa gravitacional efetiva na TRG é definida <sup>(60)</sup> como  $\rho_e = \rho + 3p = (3\gamma - 2)\rho$ . Logo, quanto maior o valor de  $\gamma$  maior será a desaceleração gravitacional (que contribui para deter a expansão a partir da singularidade. Este resultado pode ser mais facilmente entendido pela analogia com os osciladores harmônicos. A constante elástica na eq. (2.3.29) ,

$K_E = \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)$ , cresce com o valor de  $\gamma$ . Portanto, para massas unitárias (universos) oscilando com igual amplitude ( $R = R_0$ ), o menor período transcorrerá para o oscilador de maior constante elástica.

É interessante comparar também o tempo de vida dos modelos fechados, expresso na eq. (2.3.38), com o limite superior  $T_V \leq R_0 \pi$ , estabelecido por Tolman e Ward<sup>(56)</sup>. O valor máximo corresponde ao modelo de poeira ( $p = 0$ ). Tal resultado foi obtido a partir de considerações gerais, isto é, sem envolver a integração das ECE ou mesmo uma forma particular para a equação de estado. A única condição imposta foi a não negatividade da pressão e da densidade de energia. De fato, tomando  $\gamma = 1$  na eq. (2.3.38) temos  $T_V = R_0 \pi$ , que é o valor máximo no intervalo das pressões positivas ( $\gamma \geq 1$ ). No entanto, se o fluido satisfaz à condição de energia forte ( $\gamma \geq 2/3$ ), segue da eq.(2.3.38) que o tempo de vida dos modelos pode crescer indefinidamente (ver Fig. 2.1).

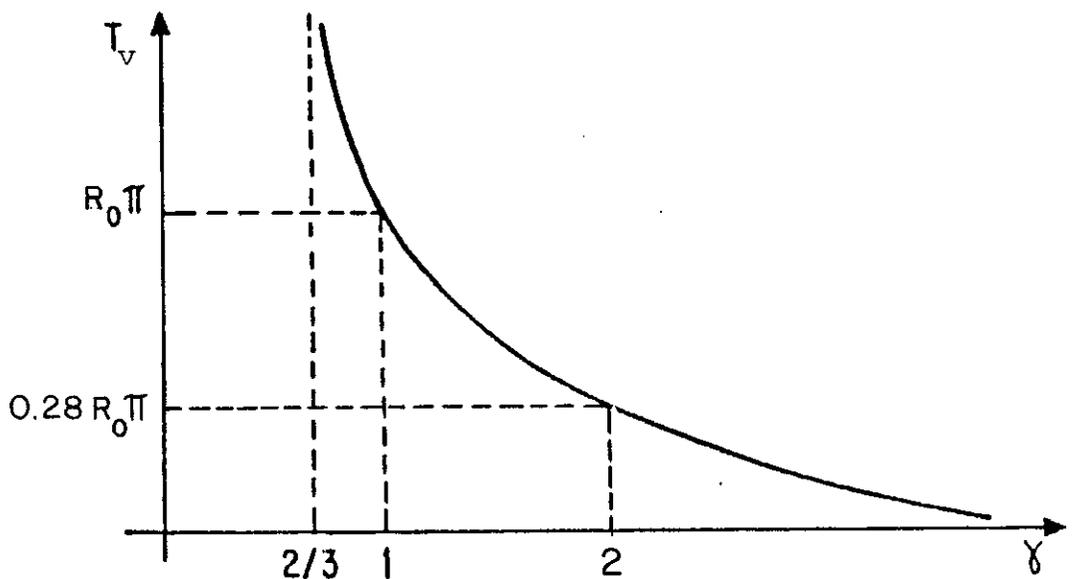


FIGURA 2.1 - Tempo de vida dos modelos fechados em função do parâmetro  $\gamma$ .

## 2.4 - LIMITE NÃO-ADIABÁTICO ( $\zeta \neq 0$ ) <sup>(7)</sup>

Considerando o sistema completo de equações (2.1.4)-(2.1.8) examinaremos agora a influência da viscosidade no comportamento físico dos modelos apresentados na seção anterior. Para determinar as quantidades dinâmicas, seguindo Belinskii e Khalatinikov <sup>(33)</sup>, suporemos que o coeficiente de viscosidade volumar é uma função potência da densidade de energia

$$\zeta = \alpha \rho^\nu, \quad (2.4.1)$$

onde  $\alpha$  é uma constante dimensional e o parâmetro  $\nu$  está restrito ao intervalo  $0 \leq \nu \leq 1$ .

Neste caso segue das eqs. (2.2.4), (2.2.5), (2.3.7) e (2.4.1) que o fator de escala  $R$  satisfaz à equação de FRW generalizada [ver eq. (2.3.12)]

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)K - \frac{\alpha}{2} 3^{1+\nu} (\dot{R}^2+K)^\nu R^{1-2\nu} \dot{R} = 0, \quad (2.4.2)$$

para a qual infelizmente não conhecemos uma integral primeira, válida para valores arbitrários dos três parâmetros  $\gamma$ ,  $K$  e  $\nu$ . Contudo, para ilustrar o tratamento termodinâmico e outras propriedades genéricas nós consideraremos os casos  $K = 0$  e  $\nu = 1/2$  mantendo  $\gamma$  arbitrário. Nestas condições a eq. (2.4.2) reduz-se a

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma-3\sqrt{3}\alpha-2}{2}\right)\dot{R}^2 = 0, \quad (2.4.3)$$

cuja integral primeira é dada por

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)-2} \quad (2.4.4)$$

Comparando a equação acima com (2.3.13) para  $K = 0$  e sua solução (2.3.22), vemos que a solução de (2.4.3) ou (2.4.4) pode ser escrita sob a forma

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \frac{3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)}{2} \frac{(t-t_0)}{R_0} \right]^{2/3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)} \quad (2.4.5)$$

Da mesma forma que no caso adiabático, as expressões da densidade de energia  $\rho$  e pressão  $p$  são facilmente obtidas combinando-se a integral primeira (2.4.4) com as eqs. (2.2.4) e (2.3.7). Temos que

$$\rho = \frac{3}{R_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)} \quad (2.4.6)$$

e

$$p = \frac{3(\gamma-1)}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)} \quad (2.4.7)$$

Naturalmente a expressão para a densidade de partículas como uma função do fator de escala não é modificada [ver eqs. (2.2.6) e (2.3.16)]

$$n = n_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \quad (2.4.8)$$

Examinaremos agora a influência da dissipação sobre a lei de evolução da temperatura. Para fluidos usuais, a positividade do calor específico implica que  $(\partial\rho/\partial T)_n > 0$ . Portanto, qualitativamente, segue da eq. (2.2.8) que o efeito da viscosidade volumar no caso de um universo em expansão ( $\theta > 0$ ), é dimi-

nuir a taxa de decaimento da temperatura. Inversamente, para estágios de colapso ( $\theta < 0$ ), a temperatura cresce mais rapidamente do que na ausência da viscosidade. Tais efeitos podem ser facilmente entendidos considerando que o universo é um sistema fechado e que a viscosidade volumar reaquece continuamente o meio material, independentemente do seu estado de expansão ou contração.

Diferentemente do caso adiabático, uma análise quantitativa do comportamento acima mencionado exige, como mostra a eq. (2.2.8), uma expressão para  $\rho(n,T)$ . Por simplicidade, vamos impor a relação pressão-temperatura usualmente aplicada a gases ideais, isto é:

$$p = nT \quad . \quad (2.4.9)$$

Assim, das eqs. (2.3.7) e (2.4.9) acima temos

$$\rho = (\gamma-1)^{-1} nT \quad , \quad (2.4.10)$$

e combinando as eqs. (2.2.4), (2.3.7), (2.4.1) e (2.4.10), se que a eq. (2.2.8) pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3 (\gamma-1-\sqrt{3}\alpha) \frac{\dot{R}}{R} \quad , \quad (2.4.11)$$

cuja solução é dada por

$$T = T_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-1-\sqrt{3}\alpha)} \quad . \quad (2.4.12)$$

Note ainda que a pressão termodinâmica,  $p' = p - 3\zeta \frac{\dot{R}}{R}$ , por (2.2.4), (2.4.1) e (2.4.4) assume a seguinte forma

$$p' = \frac{3(\gamma-1-\sqrt{3}\alpha)}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)} \quad (2.4.13)$$

A consistência das eqs. (2.4.6)-(2.4.7) e (2.4.11)-(2.4.13) é facilmente observada comparando-as com suas correspondentes para o caso adiabático. De fato, tais equações reduzem-se ao sistema de eqs. (2.3.14)-(2.3.17) no limite  $\alpha = 0$ .

Exatamente como no caso adiabático, a dependência temporal das quantidades físicas são obtidas por substituição direta da solução (2.4.5), para o fator de escala  $R(t)$ , nas respectivas expressões. Com relação a esta dependência, o efeito da viscosidade volumar em relação ao caso adiabático, é substituir o índice adiabático  $\gamma$  por um parâmetro efetivo  $\bar{\gamma} = \gamma - \sqrt{3}\alpha$  (compare as equações correspondentes nos dois casos). Observamos também que a taxa de produção da entropia específica é também uma função do fator de escala  $R$ . Manipulando as equações (2.2.4), (2.4.1), (2.4.4), (2.4.8) e (2.4.12) obtemos de (2.2.7) a seguinte expressão para a taxa de produção de entropia específica

$$\dot{s} = \frac{9\sqrt{3}\alpha}{n_0 T_0 R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-\sqrt{3}\alpha)/2} \quad (2.4.14)$$

Como esperado, o limite adiabático ( $\dot{s} = 0$ ), é recuperado da equação acima tomando o limite  $\alpha$  tendendo ao valor zero.

Finalmente, comentaremos brevemente a lei de evolução da temperatura (2.4.12). Para  $\gamma > 1+\sqrt{3}\alpha$ , a temperatura do fluido diminuirá ao longo da expansão como esperado para fluidos usuais. Contudo, para  $\gamma < 1+\sqrt{3}\alpha$ , a temperatura do fluido aumentará com a expansão. Note que agora é possível escolher um

valor de  $\gamma$  positivo, por exemplo,  $1 < \gamma < 1 + \sqrt{3}\alpha$ , de forma a garantir a positividade da pressão termostática  $p$  porém com a pressão termodinâmica  $p'$  sendo negativa [ver eqs. (2.4.7) e (2.4.13)].

Estados com pressão termodinâmica negativa em fluidos ordinários são meta-estáveis, e não estão excluídos por qualquer lei da natureza <sup>(57,58)</sup>. Em geral, tais estados estão conectados por transições de fase tal como ocorre em um líquido de van der Waals superesfriado ou superaquecido. Tais sistemas são hidrodinamicamente instáveis, sendo possível ocorrer formação de bolhas, cavidades ou mesmo um colapso espontâneo <sup>(57,59)</sup>.

Na verdade, se a pressão termodinâmica ( $p'$ ) é negativa, vemos das eqs. (2.2.4) e (2.2.5) que  $\ddot{R}$  pode ser positivo. Desta forma, tal como ocorre no cenário inflacionário, o universo pode expandir aceleradamente. Portanto, um fluido ordinário com pressão termodinâmica negativa proporciona um mecanismo alternativo aos modelos inflacionários dirigidos por uma constante cosmológica efetiva <sup>(36-38)</sup> (pressão do vácuo).

## CAPÍTULO III

### MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS EM EQUILÍBRIO TERMODINÂMICO

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

As observações astronômicas relacionadas com a distribuição de matéria visível e da radiação cósmica de fundo (RCF), são usualmente mencionadas como uma comprovação experimental das hipóteses de homogeneidade e isotropia espacial do universo <sup>(3,6,61)</sup>. De fato, a propriedade mais notável da RCF é o seu alto grau de isotropia em torno da nossa posição. A existência de uma anisotropia de dipolo ( $\Delta T/T \lesssim 10^{-3}$ ) é geralmente atribuída a um efeito de velocidade do nosso sistema em relação ao referencial no qual a RCF deve ser perfeitamente isotrópica <sup>(62)</sup>. Contudo, alguns trabalhos experimentais mais recentes <sup>(63,64)</sup> sugerem a existência de uma pequena contribuição de quadrupolo. Se confirmado, tal termo não pode ser explicado como um simples efeito de velocidade e indica anisotropia no passado ou no futuro <sup>(65)</sup>. A existência de um campo magnético cósmico é outra indicação contra a isotropia, embora os dados experimentais não sejam conclusivos pois os efeitos desse campo podem ser mascarados por campos locais <sup>(66)</sup>. Existem também indicações de uma orientação sistemática do eixo das galáxias <sup>(67,68)</sup>. Um resumo da situação observacional referente à anisotropia pode ser encontrado nas refs. <sup>(69)</sup>, <sup>(70)</sup>.

A verificação direta da hipótese de homogeneidade é bastante parecida com a da isotropia. Nos modelos expansionistas, existem horizontes de partículas, isto é, a maior distância acessível a um observador num dado instante de seu tempo próprio. Portanto, existem regiões do espaço-tempo, das quais não temos recebido nenhuma informação e estamos supondo "a priori" que tais regiões são homogêneas em larga escala.

O deslocamento das linhas espectrais das fontes de rádio indicam homogeneidade e isotropia enquanto as galáxias óticas sugerem inhomogeneidades na escala dos superaglomerados <sup>(71)</sup>. Na verdade, existem evidências de uma rica estrutura <sup>(72,73)</sup> em aglomerados, filamentos, bolhas, ... etc. Medidas relacionadas aos quasars são usualmente referidas como indicando homogeneidade, mas existem algumas análises que indicam o oposto <sup>(71)</sup>. Portanto, apesar da opinião ortodoxa de que o universo é homogêneo, a validade desta hipótese decorre principalmente de uma aplicação do "Princípio Cosmológico" ou da navalha de Occam <sup>(\*)</sup>, do que de sua comprovação experimental direta.

Por outro lado, mesmo considerando que no futuro o acúmulo de dados observacionais possa justificar o "Princípio Cosmológico", ab initio, para explicar uma certa propriedade exibida por um dado sistema físico, deve-se investigar modelos teóricos suficientemente gerais, que permitam o sistema não possuir tal propriedade. Assim, se pretendemos explicar a isotropia do universo atual devemos examinar modelos cosmológicos que no passado eram anisotrópicos. Similarmente, uma compreensão da admi-

---

<sup>(\*)</sup> William de Occam, filósofo do século XIV, defensor do critério de simplicidade na escolha entre diversas teorias.

da homogeneidade espacial do universo, exige o estudo de modelos inomogêneos.

Neste contexto, discutiremos no presente capítulo uma nova classe de cosmologias espacialmente inomogêneas. Em seguida, mostraremos que tais modelos constituem uma fase primitiva inomogênea e anisotrópica dos modelos do tipo FRW, com fluido perfeito, para cada escolha dos parâmetros  $\gamma$  e  $K$ .

É importante enfatizar que a discussão sistemática de modelos inomogêneos é uma tarefa no mínimo ingrata, pois existem diversas maneiras independentes de se introduzir as inomogeneidades. Até o presente, nenhum esquema geral de classificação, tal como o de Bianchi<sup>(74,99)</sup> para modelos homogêneos, é conhecida. A seguinte definição será suficiente para caracterizar os modelos inomogêneos que serão discutidos neste trabalho. Diremos que é espacialmente inomogêneo o modelo cuja dimensão da órbita do grupo de isometrias atuando na seção espacial é menor ou igual a dois. Em particular, isto significa que as hipersuperfícies ortogonais às linhas de fluxo do fluido não são órbitas do grupo, tal como ocorre para os modelos da classificação de Bianchi. Certamente este é um bom critério para identificar a existência de inomogeneidades pois é independente de sistema de coordenadas. Por tal definição vemos também porque é impossível um esquema geral de classificação para modelos inomogêneos baseado no conceito de grupo de isometrias. Em princípio, devem existir várias soluções distintas sem vetores de Killing. Este é o caso, por exemplo, das soluções de Szekeres<sup>(75)</sup> que serão examinadas a seguir e generalizadas na seção subsequente.

### 3.2 - MODELOS INOMOGÊNEOS DE SZEKERES

O mais geral conjunto de soluções conhecidas das equações de Einstein, sem constante cosmológica, é constituído pelos modelos inomogêneos de Szekeres <sup>(75)</sup>. Tais soluções estão divididas em duas classes usualmente denotadas na literatura por I e II. Os modelos da classe II foram descobertos independentemente por W.B. Bonnor e N. Tomimura <sup>(76,77)</sup>.

O conteúdo material dos modelos é composto por uma poeira cujo fluxo é irrotacional, geodético e normal às hipersuperfícies  $\{t = \text{cte}\}$ . Em geral, as métricas pertencentes às duas classes não exibem vetores de Killing <sup>(78)</sup>, são do tipo D na classificação de Petrov e as geometrias das seções espaciais são conformalmente planas <sup>(79)</sup>.

A classe I inclui os modelos esfericamente simétricos de Tolman-Bondi <sup>(80,81)</sup> e a classe de modelos com simetria plana discutidos por Eardley, Liang e Sachs <sup>(82)</sup>. Tais soluções são usualmente utilizadas para modelar colapso gravitacional não-simétrico <sup>(83,84)</sup>. As soluções da classe II generalizam os modelos homogêneos de Kantowski-Sachs <sup>(85)</sup> e tem sido geralmente estudados como modelos cosmológicos <sup>(86)</sup>. O seguinte teorema, provado por Spero e Szafron <sup>(79)</sup> para as duas classes, será útil mais adiante: "Qualquer solução de Szekeres com  $\rho = \rho(t)$  é espacialmente homogênea do tipo Friedmann ou Kantowski-Sachs, ou então admite um grupo de Bianchi dos tipos I ou VI".

O espaço-tempo de Szekeres foi covariantemente caracterizado por J. Wainwright <sup>(87)</sup> em termos do seu tensor de Weyl e também por Szafron e Collins <sup>(88)</sup>, usando o esquema de simetrias intrínsecas. Mais detalhes a respeito das duas classes po

dem ser obtidos nas duas últimas referências e também nas teses (89), (90) e (98). Aqui nós estamos particularmente interessados nos modelos da classe II, pois é esta classe que está mais diretamente relacionada com o nosso trabalho.

Bonnor e Tomimura (76), estudando a evolução das soluções da classe II, mostraram que alguns de seus modelos evoluem para cosmologias de Friedmann com seção espacial euclideana ou aberta (ver Tabela 3.2.1 adiante). Portanto, em princípio, tais soluções podem descrever uma fase primordial inhomogênea do universo atual. A fim de comparar com os modelos que serão apresentados na próxima seção, faremos aqui um resumo dos principais resultados obtidos na ref. (76), doravante identificada pelas iniciais BT. Apenas os modelos mais importantes do ponto de vista físico serão considerados.

A métrica em todos os casos é a seguinte:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + h^2 dz^2) \quad , \quad (3.2.1)$$

onde

$$Q = Q(x, y, z, t) \quad , \quad R = R(t) \quad \text{e} \quad h = h(y). \quad (3.2.2)$$

As funções R e h são determinadas pelas equações diferenciais

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + K = 0 \quad , \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d^2 h}{dy^2} + Kh = 0 \quad . \quad (3.2.4)$$

As equações de campo (Apêndice D) determinam que a função Q é separável na forma

$$Q = AR + S \quad (3.2.5)$$

com a função  $A(x,y,z)$  tendo uma forma específica para cada escolha do parâmetro  $K$ , enquanto  $S(x,t)$  satisfaz à equação

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} + \ddot{R}S = \beta \quad , \quad (3.2.6)$$

onde  $\beta$  é uma função arbitrária na variável  $x$ .

Os modelos são classificados de acordo com o valor de  $K$ , o parâmetro de curvatura da seção bidimensional  $t$  e  $x$  constantes, e são denotados pela letra  $P$  (parabólico,  $K = 0$ ),  $H$  (hiperbólico,  $K = -1$ ) e  $E$  (elíptico,  $K = 1$ ), correspondendo aos modelos de Friedmann com esses valores de  $K$ .

Modelo Parabólico:  $K = 0$ ,  $h = 1$

$$A = \beta(y^2+z^2) + \sigma y + \nu z + \omega \quad (3.2.7)$$

onde  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  e  $\omega$  são funções arbitrárias na variável  $x$ .

$$R(t) = t^{2/3} \quad \text{e} \quad S = \frac{9}{5} \beta t^{4/3} + \mu t^{-1/3} \quad , \quad (3.2.8)$$

onde  $\mu$  é uma nova função arbitrária de  $x$ . A densidade de matéria é dada por

$$\rho = \frac{4A}{3QR^2} \quad . \quad (3.2.9)$$

Modelo Hiperbólico:  $K = -1$ ,  $h = \text{cosh}y$

$$A = (\sigma \text{cosh}y + \nu \text{senhy}) \text{cosh}y + \omega \text{senhy} \quad (3.2.10)$$

$$R = 2R_0 \sinh^2 \frac{\eta}{2} \quad , \quad t = 2R_0 (\sinh \eta - \eta) \quad (3.2.11)$$

$$S = \beta \frac{\eta}{2} (\coth \frac{\eta}{2} - 1) + \mu \coth \frac{\eta}{2}$$

$$\rho = \frac{6R_0 A + \beta}{QR^2} \quad . \quad (3.2.12)$$

Modelo Elíptico:  $K = 1$  ,  $h = \text{seny}$

$$A = (\sigma \cos z + \nu \text{senz}) \text{seny} + \omega \cos y \quad (3.2.13)$$

$$R = 2R_0 \text{sen}^2 \frac{\eta}{2} \quad , \quad t = R_0 (\eta - \text{sen} \eta) \quad (3.2.14)$$

$$S = \beta \frac{\eta}{2} (\cot \frac{\eta}{2} - 1) + \mu \cot \frac{\eta}{2} \quad , \quad (3.2.15)$$

$$\rho = \frac{6R_0 A - \beta}{QR^2} \quad . \quad (3.2.16)$$

Através de uma transformação na variável  $x$ , uma das cinco funções arbitrárias de cada modelo pode ser tomada igual à unidade. Os modelos dependem então de quatro funções arbitrárias distintas e nos casos H e E de uma constante arbitrária  $R_0$ . A função  $\beta$  presente no modelo parabólico, embora tendo sido denotada com a mesma letra dos modelos hiperbólicos e elípticos, desempenha no caso parabólico um papel bastante singular. Note que no modelo P a função  $\beta$  aparece tanto na expressão de A quanto na de S, o que não ocorre nos casos H e E. Este e outros aspectos das funções arbitrárias e também o fato da constante  $R_0$  não aparecer no modelo P serão elucidados, através de uma abordagem unificada para cosmologias do tipo Szekeres, na próxi

ma seção.

Finalmente resumimos na tabela abaixo as características básicas da evolução dos modelos P, H e E, tal como apresentados por Bonnor e Tomimura.

TABELA 3.2.1 - Evolução dos modelos de Szekeres P, H e E pertencentes à classe II.

Modelo	Sub casos	Evolução	
		de:	para:
P	$\mu \neq 0, \beta \neq 0$	inogêneo Kasner	inogêneo e anisotrópico
	$\mu \neq 0, \beta = 0$	inogêneo Kasner	Friedmann plano
	$\mu = 0, \beta \neq 0$	homogêneo anisotrópico	inogêneo anisotrópico
H	$\mu \neq 0, \beta \neq 0$	inogêneo K-S	Friedmann H
	$\mu \neq 0, \beta = 0$	inogêneo K-S	Friedmann H
	$\mu = 0, \beta \neq 0$	homogêneo anisotrópico	Friedmann H
E	$\pi\beta + \mu < 0$	inogêneo K-S	inogêneo e anisotrópico
	$\pi\beta + \mu = 0$	inogêneo K-S	homogêneo e anisotrópico

Dois aspectos podem ser imediatamente observados na tabela acima: (1) A função  $\beta$  gera uma evolução anômala para o caso parabólico. Note que este modelo tende a Friedmann somente se  $\beta = 0$ , o que não ocorre no caso hiperbólico. (2) O modelo elíptico (E) não tende a Friedmann. Tais pontos serão reconsiderados a seguir.

3.3 - MODELOS INOMOGÊNEOS DO TIPO SZEKERES: FORMULAÇÃO UNIFICADA, INTERPRETAÇÃO DE DOIS FLUIDOS E NOVAS SOLUÇÕES EXATAS <sup>(91)</sup>.

Considere o elemento de linha (3.2.1) dos modelos cosmológicos de Szekeres classe II na formulação de Bonnor e Tomimura:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + h^2 dz^2) \quad , \quad (3.3.1)$$

onde

$$Q = AR + SR_0 \quad , \quad R = R(t) \quad , \quad S = S(x,t) \quad \text{e} \quad A = A(x,y,z) \quad . \quad (3.3.2)$$

Note que em virtude do fator constante  $R_0$  com dimensão de tempo, a função  $S$  se torna adimensional. As funções  $R$  e  $S$  são arbitrárias e serão determinadas pelas equações de Einstein. Definimos a função  $h$  de forma similar à dos modelos do tipo FRW [ver eq. (2.2.2)]

$$h(y) = \frac{\text{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} \begin{cases} \text{sen}y & \text{se } K = 1 \\ y & \text{se } K = 0 \\ \text{sen}hy & \text{se } K = -1 \end{cases} \quad , \quad (3.3.3)$$

enquanto a função  $A$  é fixada através da seguinte expressão unificada

$$A = 4\alpha \left( \frac{\text{sen}\sqrt{K}y/2}{\sqrt{K}} \right)^2 + (\sigma \cos z + \nu \text{sen}z) \frac{\text{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} + \omega \cos\sqrt{K}y \quad . \quad (3.3.4)$$

Por simplicidade nós preferimos definir a função  $A$  todavia, esta pode ser obtida integrando-se algumas das equações de cam

po (Apêndice D).

Tomando o limite  $K \rightarrow 0$  em (3.3.4) a função A se reduz a

$$A = \alpha y^2 + (\sigma \cos z + \nu \sin z)y + \omega \quad , \quad (3.3.5)$$

a qual não coincide com a expressão (3.2.7). Contudo, transformando para novas variáveis  $y' = y \sin z$ , e  $z' = y \cos z$ , o elemento de linha da seção t e x constantes assume a forma  $dl'^2 = dy'^2 + dz'^2$ , enquanto a função A pode ser reescrita como

$$A = \alpha (y'^2 + z'^2) + \nu y' + \sigma z' + \omega \quad , \quad (3.3.6)$$

que é a requerida expressão (3.2.7) dos modelos parabólicos. Note que a eq. (3.3.4) no caso  $K = +1$  reduz-se à expressão (3.2.13) somente se  $\alpha = 0$ . O caso  $K = -1$  dado em (3.2.10) não pode ser obtido a partir de nossa eq. (3.3.4). Esta diferença ocorre porque na formulação de BT a função h para  $K = -1$  não é a continuação analítica do caso  $K = +1$ , tal como ocorre em nosso trabalho. Fisicamente as duas expressões são equivalentes mas, como veremos a seguir, a eq. (3.3.4) é fundamental para uma abordagem unificada dos vários modelos.

A forma geral da função R em (3.3.2) é invariante pela seguinte transformação de calibre

$$A \rightarrow A' = A + \delta \quad (3.3.7)$$

$$S \rightarrow S' = S - \delta (R/R_0) \quad , \quad (3.3.8)$$

onde  $\delta$  é uma função arbitrária de x. Em particular, será mostrado adiante que para  $K = \pm 1$  a função  $\alpha$  em (3.3.4) pode sem

pre ser anulada através de um calibre específico. Isto evidenciará o papel singular da função  $\alpha$  ( $\beta$  na notação de BT) no caso parabólico.

Substituindo as eqs. (3.3.2)-(3.3.4) nas equações de Einstein apresentadas no Apêndice D, estas reduzem-se a

$$\rho = \frac{3AR(\dot{R}^2+K) + 2RR_0\dot{R}\ddot{S} + SR_0(\dot{R}^2+K) - 4\alpha R}{(AR + SR_0)R^2} \quad , \quad (3.3.9)$$

$$p = -2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{K}{R^2} \quad , \quad (3.3.10)$$

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} - S(\ddot{R} + \frac{\dot{R}^2+K}{R}) = \frac{2\alpha}{R_0} \quad . \quad (3.3.11)$$

Antes de integrar o sistema de equações acima vamos mostrar como os modelos do tipo FRW são recuperados a partir das eqs. (3.3.1)-(3.3.4) e (3.3.9)-(3.3.11). Inicialmente nós observamos que a pressão  $p$  definida pela eq. (3.3.10) é uma função apenas do tempo e tem a mesma forma da pressão em modelos do tipo FRW [cf. eq. (2.2.5) com  $\zeta = 0$ ]. Além disso, se  $S = \lambda(x)R/R_0$  segue de (3.3.11) que  $\alpha = \frac{1}{2} K\lambda$ , e substituindo este valor de  $\alpha$  em (3.3.9) resulta

$$\rho = 3 \left( \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{K}{R^2} \right) \quad , \quad (3.3.12)$$

que deve ser comparada com (2.2.4). Examinemos agora o elemento de linha (3.3.1)-(3.3.4). Substituindo os valores de  $S$  e  $\alpha$  acima na expressão  $Q = AR+SR_0$  com  $A$ , dado pela eq. (3.3.4), e absorvendo a função  $\lambda$  em  $\omega$  podemos reescrever (3.3.1) na seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - A^2 R^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + h^2 dz^2) \quad , \quad (3.3.13)$$

com a função A definida por

$$A = (\sigma \cos z + \nu \operatorname{sen} z) \frac{\operatorname{sen} \sqrt{K} y}{\sqrt{K}} + \omega \cos \sqrt{K} y \quad , \quad (3.3.14)$$

que é equivalente à métrica original com  $S = \alpha = 0$ . Esta classe de modelos definida em um referencial có-movel ( $u^\alpha = \delta^\alpha_0$ ), tem um fluxo de matéria que é irrotacional e geodético. Além disso, o tensor de cisalhamento ("shear") é nulo e a taxa de expansão do fluido é dada por  $\theta = 3\dot{R}/R$ . Portanto, pelo menos localmente o elemento de linha (3.3.13) e a métrica de R-W são equivalentes. Um resultado que é coerente com o teorema de Spero. Note que a função A em (3.3.14) tem três funções arbitrárias de x, a saber,  $\sigma$ ,  $\nu$  e  $\omega$ . A presença dessas funções deve-se a uma escolha inadequada do sistema de coordenadas para descrever a métrica de Robertson-Walker. Portanto, em modelos inomogêneos mais gerais com a função A expressa por (3.3.4) e  $S \neq \lambda R_0^{-1} R$  a existência de tais funções arbitrárias não deverão ser associadas com inomogeneidades pois elas estão presentes mesmo no caso homogêneo.

Retornemos ao problema de integrar as eqs. (3.3.9) - (3.2.11). A pressão p dos modelos por (3.3.10) é uma função apenas do tempo t, enquanto  $\rho$  depende de todas as coordenadas. Portanto, uma equação de estado do tipo barotrópica,  $p = p(\rho)$ , não pode ser imposta a priori sem perda de generalidade. Na verdade, um algoritmo envolvendo uma definida escolha da pressão p tem sido bastante utilizada na literatura a fim de gerar soluções inomogêneas exatas (89, 92-94). Tal algoritmo estabele-

cido originalmente por Szafron<sup>(94)</sup> pode ser enunciado da seguinte forma<sup>(95)</sup>:

- (i) Especifique uma expressão  $p(R, \dot{R}, \ddot{R})$  e integre (3.3.10) obtendo  $R(t)$ .
- (ii) Substitua  $R(t)$  em (3.3.11) e integre a fim de obter  $S(x, t)$ .
- (iii) Da equação (3.3.9) calcule a densidade de energia do fluido substituindo as expressões de  $R(t)$  e  $S(x, t)$ .

A própria solução de Szekeres com poeira ( $p=0$ ), enquadra-se neste algoritmo. Naturalmente, as relações unindo  $p$ ,  $R$  e suas derivadas não conduzem a qualquer equação de estado barotrópica, a menos que as condições previstas no teorema de Spero sejam satisfeitas, isto é,  $\rho = \rho(t)$ .

Proporemos agora um ponto de vista alternativo a respeito do conteúdo material dos modelos de Szekeres que evitará o problema da equação de estado<sup>(91)</sup>. No contexto de tal reinterpretação é possível também obter novas soluções inomogêneas exatas e estender, de maneira compreensível, as características físicas relevantes dos modelos de Szekeres; envolvendo, por exemplo, a classe completa de modelos do tipo FRW.

Inicialmente, relembremos que a eq. (3.3.10) para a pressão é a mesma dos modelos do tipo FRW. Além disso, a densidade de energia  $\rho$  em (3.3.9) pode ser reescrita como

$$\rho = \rho_{\text{FRW}} + \Delta\rho, \quad (3.3.14)$$

onde  $\rho_{\text{FRW}}$  é definida por (3.3.12) e

$$\Delta\rho = \frac{2RR_0\dot{R}\dot{S} - 2SR_0(\dot{R}^2 + K) - 4\alpha R}{(AR + SR_0)R^2} \quad (3.3.15)$$

Portanto, as ECE permitem que o conteúdo material dos modelos de Szekeres com fluido perfeito seja interpretado como uma mistura de dois fluidos com interação: o primeiro homogêneo e isotrópico e o segundo, uma poeira inhomogênea cuja densidade é dada por (3.3.15). Assim, parece natural impor para a componente isotrópica, a equação de estado usual  $p = (\gamma - 1)\rho_{FRW}$ . Nesta descrição os modelos de Szekeres ( $p = 0$ ), são reobtidos no caso limite para o qual a mistura é reduzida a duas poeiras<sup>(\*)</sup> ( $\gamma = 1$ ).

A lei gama para a componente isotrópica implica por (3.3.12) e (3.3.10) que a função  $R$  satisfaz à equação diferencial de FRW (2.3.12), a saber:

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)K = 0 \quad , \quad (3.3.16)$$

cuja integral primeira é (2.3.13) e tem solução expressa pelas eqs. (2.3.20)-(2.3.21). Substituindo (3.3.16) em (3.3.11), a equação diferencial para a função  $S$  toma a seguinte forma

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} + \left(\frac{4-3\gamma}{3\gamma-2}\right)\ddot{R}S = \frac{2\alpha}{R_0} \quad , \quad (2.3.17)$$

cuja solução, como uma função explícita de  $R$ , tem a seguinte expressão unificada (ver Apêndice C)

$$S = \beta\left(\frac{R}{R_0}\right)F_3 + \mu\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{3\gamma-4}{2}}F_4 + \frac{2\alpha}{K}\left(\frac{R}{R_0}\right)(F_3-1) \quad , \quad (2.3.18)$$

onde  $\beta$  e  $\mu$  são duas novas funções arbitrárias de  $x$  e  $F_3$ ,  $F_4$  são duas funções hipergeométricas

<sup>(\*)</sup>Tal interpretação foi originalmente sugerida para modelos de Szekeres da classe I na referência (100).

$$F_3 = F \left[ \frac{1}{3\gamma-2}, \frac{1}{3\gamma-2}; \frac{3\gamma+2}{3\gamma-2}; K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3\gamma-2} \right] \quad (3.3.19)$$

$$F_4 = F \left[ \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{9\gamma-10}{2(3\gamma-2)}; K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3\gamma-2} \right] \quad (3.3.20)$$

Note que para  $\gamma = 1$  as eqs. (3.3.16) e (3.3.17) reduzem-se às eqs. (3.2.3) e (3.2.6) dos modelos de Szekeres. Como será mostrado adiante, as soluções gerais de  $R$  e  $S$  para  $\gamma = 1$  recaem nas soluções (3.2.7)-(3.2.16) para cada escolha de  $K$ .

As soluções inomogêneas estão completamente especificadas por (3.3.3.) e (3.3.4) para as funções  $h$  e  $A$ , (2.3.20)-(2.3.21) para a função  $R(t)$  e (3.3.18)-(3.3.20) para  $S$ . Naturalmente  $\rho_{FRW}$  e  $p$  estão definidos pelas expressões friedmanianas (2.3.14) e (2.3.15), enquanto a densidade da poeira inomogênea é estabelecida substituindo  $S$ ,  $R$  e  $A$  em (3.3.15). Casos particulares serão considerados nas seções seguintes.

É importante enfatizar que na interpretação de dois fluidos aqui apresentada, o tensor de energia-momentum de cada componente não é separadamente conservado, de modo que existe interação entre elas. Contudo, a evolução dos modelos é completamente adiabática, isto é, não existe produção de entropia. As componentes podem apenas trocar entropia entre si. Outro aspecto interessante é que pode ser adotada uma descrição de fluido simples, fazendo uso do algoritmo de Szafron. Neste caso a pressão  $p$  tem evidentemente a mesma expressão friedmanniana, isto é,  $p = \frac{3(\gamma-1)}{R^2} (R^2 + K)$ . As consequências dessa interpretação serão discutidas no final da Seção 5 e no Apêndice E.

Como observado anteriormente, a função  $\alpha$  presente na expressão de  $A$ , desempenha um papel especial no comportamento

dos modelos parabólicos. Note que se  $K \neq 0$ , as funções  $A$  e  $S$  definidas por (3.3.4) e (3.3.18) podem ser reescritas como

$$A = (\sigma \cos z + \nu \operatorname{sen} z) \frac{\operatorname{sen} \sqrt{K} y}{\sqrt{K}} + \bar{\omega} \cos \sqrt{K} y + \frac{2\alpha}{K} \quad (3.3.21)$$

e

$$S = \bar{\beta} \left(\frac{R}{R_0}\right) F_3 + \mu \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{3\gamma-4}{2}} - \frac{2\alpha}{K} \left(\frac{R}{R_0}\right), \quad (3.3.22)$$

onde

$$\bar{\omega} = \omega - \frac{2\alpha}{K} \quad \text{e} \quad \bar{\beta} = \beta + \frac{2\alpha}{K}. \quad (3.3.23)$$

Comparando as eqs. (3.3.21)-(3.3.22) com (3.3.7)-(3.3.8), vemos que existe uma transformação de calibre particular com  $\delta = \frac{2\alpha}{K}$ . Portanto, se  $K \neq 0$ , a função arbitrária  $\alpha$  pode ser eliminada das expressões (3.3.4) e (3.3.18), sem perda de generalidade. Isto significa que se  $\alpha \neq 0$  os modelos parabólicos constituem uma classe especial de soluções e como o calibre é  $\gamma$ -independente este resultado permanece válido para qualquer valor de  $\gamma$ . Em particular, isto explica porque o modelo parabólico de Szekeres ( $\gamma = 1, K = 0$ ) tem um comportamento anômalo ao longo da expansão se  $\alpha \neq 0$  ( $\beta$  na notação de BT, ver Tabela 3.2.1). Compare, por exemplo, a evolução do caso parabólico com a do modelo hiperbólico.

### 3.4 - A FORMA CANÔNICA DAS SOLUÇÕES

No que se segue, estendendo a notação utilizada por Bonnor e Tomimura, exibiremos a forma canônica dos modelos apresentados na seção anterior. O caso parabólico é determinado to-

mando-se o limite  $K \rightarrow 0$  em todas as expressões unificadas, com o termo  $\beta\left(\frac{R}{R_0}\right)$  da função  $S$  absorvido em  $AR$ . Para  $K = \pm 1$ , a liberdade de "gauge" foi utilizada a fim de eliminar a função  $\alpha$ .

### 3.4a - Modelos Parabólicos ( $K = 0$ , $h = y$ )

$$A = \alpha y^2 + (\sigma \cos z + \nu \operatorname{sen} z) y + \omega \quad (3.4.1)$$

$$S = \mu (R/R_0)^{(3\gamma-4)/2} + \frac{4\alpha (R/R_0)^{3\gamma-1}}{(3\gamma-2)(3\gamma+2)} \quad (3.4.2)$$

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \frac{3\gamma}{2} \frac{(t-t_0)^2}{R_0} \right]^{2/3\gamma}, \quad Q = AR + R_0 S \quad (3.4.3)$$

$$\rho = \rho_{FRW} + \Delta\rho, \quad \rho_{FRW} = \frac{3}{R_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \quad (3.4.4)$$

$$\Delta\rho = \frac{(3\gamma-6)\mu (R/R_0)^{-3\gamma/2} - 12\alpha (3\gamma+2)^{-1} (R/R_0)}{R_0^2 \left[ A (R/R_0)^3 + \mu (R/R_0)^{3\gamma/2} + 4\alpha (R/R_0)^{3\gamma+1} / (3\gamma-2)(3\gamma+2) \right]} \quad (3.4.5)$$

$$p = (\gamma-1)\rho_{FRW} \quad (3.4.6)$$

### 3.4b - Modelos Elípticos e Hiperbólicos ( $K = \pm 1$ , $h = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}}$ )

$$A = (\sigma \cos z + \nu \operatorname{sen} z) \frac{\operatorname{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} + \omega \cos\sqrt{K}y \quad (3.4.7)$$

$$S = \beta (R/R_0) F \left[ \frac{1}{3\gamma-2}, \frac{1}{3\gamma-2}; \frac{3\gamma+2}{3\gamma-2}; K (R/R_0)^{3\gamma-2} \right] + \mu (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} F \left[ \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}; \frac{9\gamma-10}{2(3\gamma-2)}; K (R/R_0)^{3\gamma-2} \right] \quad (3.4.8)$$

$$\rho = \rho_{\text{FRW}} + \Delta\rho \quad , \quad p = (\gamma-1)\rho_{\text{FRW}} \quad (3.4.9)$$

$$\Delta\rho = \frac{2R_0\ddot{R}\dot{S} - 2R_0S(R/R_0)^{3\gamma-2}}{(AR + SR_0)R^2} \quad , \quad (3.4.10)$$

com a função  $R(t)$  expressa por (2.3.20)-(2.3.21). Tal como nos modelos do tipo FRW, todas as soluções podem ser postas na forma paramétrica unificada, definindo o tempo conforme por  $dt = R d\eta$ . Neste caso, o fator de escala  $R(\eta)$  assume a forma friedmanniana [eq. (2.3.33)]

$$R(\eta) = R_0 \left( \frac{\text{sen}\sqrt{K} \left| (3\gamma-2)/2 \right| \eta}{\sqrt{K}} \right)^{2/(3\gamma-2)} \quad , \quad (3.4.11)$$

onde o intervalo de variação de  $\eta$  é dependente do parâmetro  $K$ . Se  $K = 1$  temos  $0 \leq \eta \leq \frac{2\pi}{3\gamma-2}$  e se  $K = 0, -1$ , temos  $0 \leq \eta < \infty$ . As funções  $S(x, \eta)$  e  $t(\eta)$  são obtidas por substituição direta de  $R(\eta)$  acima nas expressões de  $S(x, R)$  e  $t(R)$ .

Para qualquer valor de  $K$ , por uma transformação na variável  $x$ , uma das funções arbitrárias pode ser fixada igual a uma constante e como  $t_0$  é livremente ajustável, os modelos dependem de quatro funções arbitrárias e uma constante positiva  $R_0$  com dimensão de tempo. Note também que apenas duas funções arbitrárias são responsáveis pelas inomogeneidades,  $\beta$  e  $\mu$  se  $K = \pm 1$  e  $\alpha$  e  $\mu$  se  $K = 0$ . De fato, se  $K = \pm 1$  e  $\beta$  e  $\mu$  são constantes, as soluções (3.4.7)-(3.4.10) generalizam os modelos de Kantowski-Sachs e uma classe de soluções Bianchi tipo VI respectivamente <sup>(93)</sup>. Se  $K = 0$  e  $\alpha, \mu$  são constantes, nossas soluções constituem uma extensão dos modelos do tipo Bianchi I.

### 3.5 - SOLUÇÕES ESPECIAIS

A existência de uma componente do tipo FRW implica que no contexto cosmológico, as soluções mais interessantes são justamente os casos  $\gamma = 0$  (vácuo+poeira),  $\gamma = 1$  (duas poeiras) e  $\gamma = 4/3$  (radiação+poeira).

#### 3.5a - Modelos Parabólicos ( $K = 0$ )

Neste caso, as soluções  $\gamma = 0, 1$  e  $4/3$  são facilmente obtidas a partir das expressões (3.4.2)-(3.4.5). Observe que considerando a interpretação usual de fluido simples o modelo de Szekeres é reobtido para  $\gamma = 1$ .

#### 3.5b - Modelos Elípticos e Hiperbólicos ( $K = \pm 1$ )

Em geral, as funções hipergeométricas não são redutíveis a funções elementares. Contudo, para as soluções (3.4.8) e (2.3.20)-(2.3.21) isto ocorre nos casos de interesse físico (ver Apêndice C).

(i)  $\gamma = 0$  (vácuo+poeira)

$$S = \frac{3\mu}{K} \left\{ 1 - \left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 - K \right]^{1/2} \frac{\arcsen \sqrt{K} (R/R_0)}{\sqrt{K}} \right\} + \beta \left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 - K \right]^{1/2}, \quad (3.5.1)$$

$$\rho = \Lambda + \Delta\rho \quad p = -\Lambda = -3R_0^{-2} \quad (3.5.2)$$

$$\Delta\rho = -6\mu R / QR^2 \quad (3.5.3)$$

$$R = \begin{cases} R_0 \cosh(t/R_0) & \text{se } K = 1 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

$$\begin{cases} R_0 \sinh(t/R_0) & \text{se } K = -1 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

(ii)  $\gamma = 1$  (duas poeiras)

Na forma paramétrica temos [veja eq. (3.3.11)]

$$S = \mu\sqrt{K} \cot \sqrt{K} \frac{\eta}{2} + \frac{3\beta}{K} \left(1 - \frac{\eta}{2} \sqrt{K} \cot \sqrt{K} \frac{\eta}{2}\right) \quad (3.5.6)$$

$$R = R_0 \left(\frac{\text{sen}\sqrt{K}\eta/2}{\sqrt{K}}\right)^2 \quad t = \frac{R_0}{2K} \left[\eta - \frac{\text{sen}\sqrt{K}\eta}{\sqrt{K}}\right] \quad (3.5.7)$$

$$\rho = \frac{3}{R_0^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Delta\rho \quad , \quad p = 0 \quad (3.5.8)$$

$$\Delta\rho = 3R_0 (\beta R - SR_0) / QR^3 \quad (3.5.9)$$

onde  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  se  $K = 1$  e  $0 \leq \eta < \infty$  se  $K = -1$ .

(iii)  $\gamma = 4/3$  (radiação+poeira)

$$S = \beta\eta + \mu \quad (3.5.10)$$

$$R = R_0 \frac{\text{sen}\sqrt{K}\eta}{\sqrt{K}} \quad t = R_0 \left(\frac{1 - \cos\sqrt{K}\eta}{\sqrt{K}}\right) \quad (3.5.11)$$

$$\rho = \frac{3}{R_0^2} (R_0/R)^4 + \Delta\rho \quad p = R_0^2/R^4 \quad (3.5.12)$$

$$\Delta\rho = 2R_0 [\beta\sqrt{K}\cot\sqrt{K}\eta - (\beta\eta + \mu)K\cos^2\text{sec}\sqrt{K}\eta] / QR^2 \quad (3.5.13)$$

onde  $0 \leq \eta \leq \pi$  se  $K = 1$  e  $0 \leq \eta < \infty$  se  $K = -1$ .

### 3.6 - QUANTIDADES CINEMÁTICAS E EVOLUÇÃO

Tal como nos modelos de Szekeres, as soluções apresentadas nas seções anteriores não têm vetores de Killing, são do tipo D na classificação de Petrov e o fluxo de matéria é irrotacional, geodético e normal às hipersuperfícies  $\{t = \text{cte}\}$ . Os parâmetros de expansão e "shear" são

$$\theta = 2 \frac{\dot{R}}{R} + \frac{A\dot{R} + \dot{S}R_0}{AR + SR_0} \quad (3.6.1)$$

e

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = \frac{3R_0^2}{R^2} \left( \frac{R\dot{S} - S\dot{R}}{AR + SR_0} \right)^2 \quad (3.6.2)$$

No contexto da interpretação de dois fluidos a eq. (3.6.1) pode ser reescrita como

$$\theta = \theta_{\text{FRW}} + \Delta\theta \quad (3.6.3)$$

onde  $\theta_{\text{FRW}} = 3\dot{R}/R$  e

$$\Delta\theta = \frac{R_0}{R} \left( \frac{R\dot{S} - S\dot{R}}{AR + R_0S} \right) \quad (3.6.4)$$

Combinando (3.6.2) e (3.6.4) resulta que

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} (\Delta\theta)^2 \quad (3.6.5)$$

Portanto, o tensor de "shear" e a parte "anômala" do escalar de expansão estão relacionados e dependem fortemente da poeira inhomogênea pois, se  $S$  é proporcional a  $R$  então  $\Delta\theta = \sigma^{\mu\nu} = 0$ , resultando que conduz aos modelos do tipo FRW.

O comportamento assintótico (no tempo) de todos os modelos pode ser estudado através das formas canônicas das soluções e das expressões (3.6.3)-(3.6.5). A diferença essencial entre a nossa abordagem e a da ref.(76) é que nesta última o comportamento assintótico foi determinado tomando-se o limite  $t \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow \infty$ . Note que nas soluções apresentadas nas seções anteriores, a constante  $R_0$  é uma escala de tempo característica dos modelos, para quaisquer valores assumidos pelo par  $(\gamma, K)$ . Logo, em nosso estudo da evolução dos modelos os limites acima devem ser substituídos por  $R \ll R_0$  e  $R \gg R_0$  respectivamente. Em princípio, tal escala de tempo pode ser determinada a partir das observações atuais, como por exemplo, a densidade média de matéria.

Se a componente isotrópica obedece à "condição de energia forte" ( $\gamma > 2/3$ ), os modelos são sempre singulares (50). Neste caso, da mesma forma que nos modelos do tipo FRW, as soluções são essencialmente parabólicas próximo à singularidade ( $R \ll R_0$ ). À medida que o tempo passa se  $K = 0, -1$ , os fatores de escala expandem indefinidamente, de modo que o comportamento assintótico deve ser estudado para grandes valores do tempo cosmológico ( $R \gg R_0$ ). Contudo, se  $K = 1$  e  $\gamma > 2/3$ ,  $R_0$  é um valor máximo de  $R$ . Então, se uma fase do tipo FRW é esperada ocorrer, o limite correto é considerar  $R \sim R_0$ . No que se segue, o parâmetro  $\gamma$  é restrito ao intervalo físico  $1 \leq \gamma \leq 2$ . Todos os limites foram computados retendo apenas os termos dominantes nas respectivas expressões.

### A. Comportamento Próximo à Singularidade

Da equação (3.4.2) vemos que se  $R \ll R_0$  então  $AR + SR_0 \sim \mu R_0 (R/R_0)^{(3\gamma-4)/2}$ . Portanto, após uma simples transformação de coordenadas, o elemento de linha (3.3.1) toma a seguinte forma assintótica

$$ds^2 \sim dt^2 - R_0^2 (R/R_0)^{3\gamma-4} dx'^2 - R^2 (dy'^2 + dz'^2) \quad , \quad (3.6.6)$$

que é homogênea e anisotrópica se  $\gamma \neq 2$ . De fato, segue de (3.6.3)-(3.6.5) que uma conveniente escala de anisotropia é expressa por  $\Delta\theta/\theta_{FRW} \sim (\gamma-2)/2$  neste limite. Portanto, no universo primitivo, a intensidade da anisotropia diminui com o crescimento de  $\gamma$ . Em particular, se  $\gamma = 2$  o modelo é homogêneo e isotrópico nos primeiros instantes da expansão. Tal resultado é coerente com a conhecida visão não caótica da cosmologia<sup>(96)</sup> ("quiescent cosmology"). Com o mesmo grau de precisão segue também de (3.4.4) e (3.4.5) que

$$\lim_{R \ll R_0} \Delta\rho \sim \frac{3\gamma-6}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma} \quad , \quad (3.6.7)$$

e

$$\lim_{R \ll R_0} \rho \sim \frac{3(\gamma-1)}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma} \quad . \quad (3.6.8)$$

Logo, de (3.6.8), (3.4.4) e (3.4.6) nós encontramos  $p \sim \rho$  independente do valor de  $\gamma$ . Portanto, próximo à singularidade, a mistura se comporta como um fluido simples obedecendo à equação de estado de Zeldovich ("stiff-matter"). Note que neste li-

mite, a densidade da matéria da poeira é negativa [ ver equação (3.6.7)]. Contudo, a densidade da energia líquida  $\rho = \rho_{\text{FRW}} + \Delta\rho$  é sempre positiva, o que está de acordo com a condição de energia fraca. De fato, próximo à singularidade o conceito de poeira não deve ter significado físico, de modo que a mistura deve ser encarada, para todos os valores de  $\gamma$ , como uma representação macroscópica de "stiff-matter" neste limite. Tal interpretação foi sugerida na ref. (97) para uma mistura de radiação ( $\gamma = 4/3$ ) e poeira com densidade negativa.

#### B. Comportamento para Grandes Valores de $R$ ( $R \gg R_0$ )

Tal como nos modelos do tipo FRW, à medida que o tempo passa as contribuições dos termos da curvatura espacial deixam de ser desprezíveis. Assim, para  $R \gg R_0$  o comportamento assintótico deve ser separadamente examinado.

##### (i) Modelos Parabólicos ( $K = 0$ )

Se  $\alpha = 0$ , é facilmente obtido de (3.4.2) e (3.4.3) que, para  $R \gg R_0$ ,  $Q = AR + SR_0 \sim AR$ . Portanto, considerando os resultados da seção 3.3, acerca do modelo do tipo FRW, podemos dizer que tais modelos entraram na fase homogênea e isotrópica. De fato, de (3.4.4)-(3.4.6) segue que  $\Delta\theta/\theta_{\text{FRW}} \sim 0$ ,  $\rho \sim \rho_{\text{FRW}}$  e  $p \sim (\gamma-1)\rho$ . Portanto se  $\alpha = 0$ , os modelos tentem a homogeneidade e isotropia independentemente do valor de  $\gamma$ . Se  $\alpha \neq 0$ , cálculos similares mostram que os modelos são homogêneos mas anisotrópicos para  $R \gg R_0$ . Contudo, no contexto de uma interpretação de dois fluidos, tais soluções podem ser ignoradas do ponto de vista físico pois, a densidade da poeira inhomogê-

nea é negativa neste limite [veja eq. (3.4.5)].

(ii) Modelos Hiperbólicos ( $K = -1$ )

Neste caso, as funções hipergeométricas presentes na eq. (3.4.8) são formadas por séries de potências oscilantes. Portanto, uma análise direta a respeito do limite  $R \gg R_0$  é difícil de ser encaminhada a partir de tais expansões. Este problema pode ser evitado através de uma transformação linear específica. Considerando a identidade (A.23) e tomando o limite  $R \gg R_0$ , obtemos para  $K = -1$

$$F_3 \sim C_1 (R_0/R) [1 + O(\frac{R_0}{R}) + \dots] \quad , \quad (3.6.9)$$

e

$$F_4 \sim C_2 (R_0/R)^{(3\gamma-4)/2} [1 + O(\frac{R_0}{R}) + \dots] \quad , \quad (3.6.10)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são duas funções que dependem apenas de  $\gamma$ .

Substituindo os resultados acima em (3.4.8) temos que para  $R \gg R_0$ ,  $S \sim C_1 \beta + C_2 \mu$ , conseqüentemente,  $AR + SR_0 \sim AR$ . Portanto, vemos que no caso hiperbólico, a fase FRW para grandes valores do tempo cosmológico é independente da escolha das funções arbitrárias (veja Tabela 3.2.1).

(iii) Modelos Elípticos ( $K = +1$ )

Como foi anteriormente observado, neste caso uma fase do tipo FRW é esperada quando o fator de escala transversal  $R$  se encontrar próximo ao seu valor máximo  $R_0$ . A análise é bastante simplificada observando-se que na vizinhança de  $R_0$ ,  $\dot{R} \sim 0$  e  $\dot{S} = (\frac{\partial S}{\partial R})_x \dot{R} \sim 0$ , de modo que  $Q \sim AR$  indicando que a fase FRW

é atingida. De fato, segue de (3.6.3) e (3.6.4) que  $\Delta\theta/\theta \sim 0$  e portanto  $\theta \sim \theta_{\text{FRW}}$ . Além disso, de (3.4.8) e (3.3.2) mostra-se, absorvendo as funções  $\beta$  e  $\mu$  em  $A$ , que se  $R \rightarrow R_0$  então  $Q \rightarrow AR$ . Assim, tomando-se os limites apropriados, resultados análogos aos do caso hiperbólico podem ser obtidos das próprias funções hipergeométricas (3.3.19)-(3.3.20).

Para concluir este capítulo observamos que o conjunto de soluções unificadas do tipo Szekeres aqui apresentado elucidou e generalizou diversos aspectos dos modelos originais (poeira), dentre os quais destacamos os seguintes:

1. No contexto da cosmologia clássica, nossas soluções constituem o primeiro exemplo explícito de que a existência de inhomogeneidades no universo primitivo é compatível com qualquer modelo do tipo FRW no futuro, ou seja, para qualquer valor assumido pelo par  $(\gamma, K)$ .
2. Nas soluções do tipo Szekeres apenas duas funções arbitrárias,  $\beta$  e  $\mu$ , estão de fato associadas às inhomogeneidades presentes nos modelos. As três funções adicionais,  $\sigma$ ,  $\nu$  e  $\omega$ , uma das quais pode sempre ser eliminada por uma transformação de coordenadas, pertencem à descrição de modelos homogêneos em coordenadas de Szekeres. A constante  $R_0$  comum a todos os modelos é, em princípio, ajustável para cada escolha de  $\gamma$  e  $K$ , pelas observações do limite friedmanniano.
3. As soluções são razoavelmente simples. Para  $K = 0$ , por exemplo, as quantidades físicas são potências de  $t$  para qualquer valor de  $\gamma$ . Para  $K \neq 0$ , tal como ocorre nos modelos do tipo FRW, as soluções são expressas por funções hipergeométricas.

tricas. Estas se reduzem a funções elementares nos casos de interesse físico, ou seja,  $\gamma = 0, 1$  e  $4/3$ .

4. Na interpretação de dois fluidos, modelos com  $\alpha \neq 0$  devem ser descartados pois a densidade da poeira inhomogênea torna-se negativa para grandes valores do tempo cosmológico ( $R \gg R_0$ ). Este resultado além de recuperar a simetria dos modelos com relação a sua evolução, mostra que o mais amplo conjunto de soluções nesta interpretação é fornecido pelas expressões unificadas (3.4.7)-(3.4.10).
5. O conteúdo material dos modelos pode também ser visto como um fluido simples cuja pressão é a mesma dos modelos do tipo FRW. Neste caso, os modelos parabólicos com  $\alpha \neq 0$ , apesar de ter uma evolução anômala, pois é anisotrópico para  $R \gg R_0$ , constitui uma solução fisicamente aceitável do ponto de vista das condições de energia.

## CAPÍTULO IV

### MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS COM FLUXO DE CALOR (108, 109, 111)

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Historicamente, dentre os processos usualmente considerados na termodinâmica relativística de fluidos imperfeitos (Capítulo I), o que tem sido menos investigado no contexto cosmológico é o mecanismo de condução térmica. Este fato pode ser explicado observando-se que diferentemente dos processos viscosos, a presença do fluxo de calor em um fluido autogravitante implica que o espaço-tempo dos modelos deve ser inhomogêneo ou inclinado (107) ("tilted-spacetime"). Tais propriedades dificultam não apenas a obtenção de soluções exatas dos ECE para um fluido não termalizado, como também a própria análise termodinâmica dos modelos, sem o qual não é possível caracterizar univocamente o fluxo de calor (113). Em consequência, na maioria das soluções conhecidas, o tratamento termodinâmico tem sido ignorado ou considerado de forma incompleta (113-117).

No domínio da chamada cosmologia clássica, a importância do estudo de modelos com corrente de calor se justifica sob variados pontos de vista. O mais interessante deles está relacionado com o valor da entropia do universo. Como é bem conhecido, a taxa de entropia produzida por mecanismos viscosos parece ser insuficiente para explicar a alta entropia por partícula do

universo na fase atual <sup>(8)</sup>. Além disso, a influência do processo de condução térmica sobre o conhecido programa de cosmologia caótica de Misner <sup>(118-119)</sup>, não tem sido até o momento devidamente contemplada. De fato, se o universo "nasceu" altamente irregular e posteriormente foi homogeneizado e isotropizado, em parte devido à ação de processos irreversíveis, é razoável pensar que o fluxo de calor pode ter desempenhado um papel importante nos estágios iniciais da evolução cósmica.

Por outro lado, existem poucas soluções inhomogêneas exatas que podem ser utilizadas como modelos realísticos para o universo. Pelas razões expostas ao longo deste trabalho, uma extraordinária exceção é a família de soluções inhomogêneas estabelecidas por Szekeres ( $p = 0$ ). No capítulo anterior, foi obtido um conjunto de universos do tipo Szekeres pertencentes à classe II, para o qual mostrou-se que o conteúdo material pode ser interpretado como uma mistura de dois fluidos com interação. Foi visto também que as propriedades genéricas dos universos de Szekeres, interessantes do ponto de vista físico, estão presentes em tais soluções. Em particular, os modelos apresentam uma fase do tipo FRW para qualquer valor dos parâmetros  $\gamma$  e  $K$ .

Neste capítulo, supondo a existência de uma corrente de calor na mistura de dois fluidos, uma generalização dos modelos parabólicos ( $K = 0$ ) é apresentada. Diferentemente de trabalhos anteriores sobre modelos de Szekeres com fluxo de calor <sup>(108-110)</sup>, nos quais a formulação de fluido simples (algoritmo de Szafron) foi sempre adotada, a termodinâmica dos modelos foi estudada com razoável detalhe. Como será visto adiante, para tais soluções é possível deduzir uma distribuição de temperatura que evolue, no limite de grandes valores do tempo cosmológico.

gico, para a lei de temperatura dos modelos do tipo FRW.

#### 4.2 - OS MODELOS

Considere o elemento de linha do tipo Szekeres (classe II)

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2(dy^2 + h^2 dz^2) \quad , \quad (4.2.1)$$

onde

$$Q = Q(x, y, z, t) \quad , \quad R = R(t) \quad , \quad (4.2.2)$$

com a função  $h(y)$  expressa pela equação (3.3.3)

$$h(y) = \frac{\text{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} \quad , \quad K = 0, \pm 1 \quad . \quad (4.2.3)$$

Na presença de um quadrivetor fluxo de calor  $q^\alpha$ , a função  $Q$  toma a seguinte forma [Apêndice D e Refs. (109)-(111)]

$$Q = AR + R_0 S + BM \quad , \quad (4.2.4)$$

onde

$$A = A(x, y, z) \quad , \quad B = B(x, y, z) \quad , \quad S = S(x, t) \quad \text{e} \quad M = M(t) \quad .$$

$R_0$  é a constante com dimensão de tempo dos modelos de fluido perfeito (Capítulo III). As funções  $A$ ,  $B$  e  $S$  são adimensionais, de modo que  $M$  tem a mesma dimensão de  $R$ .

Estabeleceremos agora uma generalização das soluções parabólicas ( $K = 0$ ), que evoluem para os modelos do tipo FRW

mesmo na presença do fluxo de calor. Neste caso, as funções A e B tomam a seguinte forma (Apêndice D)

$$A = (\sigma \cos z + \nu \sin z)y + w \quad , \quad (4.2.5)$$

$$B = (\sigma_1 \cos z + \nu_1 \sin z)y + w_1 \quad , \quad (4.2.6)$$

onde  $\sigma$ ,  $\nu$ ,  $w$ ,  $\sigma_1$ ,  $\nu_1$  e  $w_1$  são seis funções arbitrárias na variável  $x$ .

Considerando as eqs. (4.2.3)-(4.2.6), as equações de campo, apresentadas no Apêndice D, reduzem-se a:

$$\rho = \frac{(3AR + R_0 S + BM) \dot{R}^2 + 2R\ddot{R}(R_0 \dot{S} + B\dot{M})}{(AR + R_0 S + BM) R^2} \quad , \quad (4.2.7)$$

$$p = -2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad , \quad (4.2.8)$$

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} - (\ddot{R} + R^{-1}\dot{R}^2)S + R_0^{-1}B[R\ddot{M} + \dot{R}\dot{M} - (\ddot{R} + R^{-1}\dot{R}^2)M] = 0 \quad , \quad (4.2.9)$$

$$q_\alpha = (M/R) \cdot (R/Q) [0, 0, \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial z}] \quad . \quad (4.2.10)$$

onde o ponto denota derivada com relação ao tempo. Uma subclasse dos modelos com fluido perfeito (caso parabólico), apresentados no capítulo anterior, são reobtidos tomando-se  $M = 0$  ou  $\partial B/\partial y = \partial B/\partial z = 0$ . Vemos ainda que qualquer termo na função  $M$  proporcional a  $R$  não contribui para o fluxo de calor. Note também que os universos do tipo FRW com seção euclídeana são recuperados para  $M = S = 0$  (ver Capítulo III).

Generalizando a formulação adotada no capítulo anterior, consideraremos agora a descrição de dois fluidos para o meio material fora de equilíbrio térmico, cuja dinâmica é

governada pelas eqs. (4.2.7)-(4.2.10).

Inicialmente, suporemos que a eq. (4.2.7) descreve uma mistura de dois fluidos, isto é,

$$\rho = \rho_{\text{FRW}} + \Delta\rho \quad , \quad (4.2.11)$$

onde

$$\rho_{\text{FRW}} = 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad , \quad (4.2.12)$$

e  $\Delta\rho$ , a densidade da poeira inhomogênea, tem a forma abaixo

$$\Delta\rho = \frac{2R\dot{R}(R_0\dot{S}+B\dot{M}) - 2\dot{R}^2(R_0S-BM)}{(AR+R_0S+BM)R^2} \quad . \quad (4.2.13)$$

As expressões (4.2.8) e (4.2.12) são, respectivamente, a densidade de energia e pressão dos modelos do tipo FRW ( $K = 0$ ). Assim, de maneira equivalente aos modelos sem fluxo de calor, vamos supor que a componente isotrópica satisfaz uma equação de estado do tipo "lei gama", isto é,

$$p = (\gamma-1)\rho_{\text{FRW}} \quad . \quad (4.2.14)$$

Portanto, segue das eqs. (4.2.8) e (4.2.12) que a função  $R$  obedece à seguinte equação:

$$\ddot{R}R + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right) \dot{R}^2 = 0 \quad . \quad (4.2.15)$$

Além disso, das eqs. (4.2.6), (4.2.9) e (4.2.15) temos que

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} + \left(\frac{4-3\gamma}{3\gamma-2}\right) \ddot{R}S = 0 \quad , \quad (4.2.16)$$

e

$$R\ddot{M} + \dot{R}\dot{M} + \left(\frac{4-3\gamma}{3\gamma-2}\right) \ddot{R}M = 0 \quad . \quad (4.2.17)$$

Comparando as eqs. (4.2.16) e (4.2.17) acima, vemos que as funções  $S$  e  $M$  satisfazem à mesma equação diferencial, a qual coincide com a equação homogênea dos modelos do capítulo anterior [cf. eq. (3.3.17)]. De acordo com os resultados do Apêndice C, para  $\gamma \neq 2$ , as soluções gerais das eqs. (4.2.16) e (4.2.17) são as seguintes:

$$S = \beta(x) (R/R_0) + \mu(x) (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} \quad , \quad (4.2.18)$$

e

$$M = M_1 (R/R_0) + M_0 (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} \quad , \quad (4.2.19)$$

onde  $\beta$  e  $\mu$  são funções arbitrárias na variável  $x$  e  $M_1, M_0$  são constantes.

As soluções acima podem ser simplificadas observando-se que a função  $Q$  expressa pela eq. (4.2.4) é invariante pela seguinte transformação de calibre

$$A \rightarrow A' = A + \tau B + \delta \quad , \quad (4.2.20a)$$

$$S \rightarrow S' = S - \delta (R/R_0) \quad , \quad (4.2.20b)$$

$$M \rightarrow M' = M - \tau R \quad , \quad (4.2.20c)$$

onde  $\delta$  é uma função arbitrária de  $x$  e  $\tau$  é uma constante. O conjunto de transformações acima, que generalizam as eqs. (3.3.7) e (3.3.8) para  $q^\alpha = 0$ , implicam, que sem perda de generalidade, podemos descartar os termos proporcionais a  $R$  nas soluções (4.2.18) e (4.2.14), isto é, podemos tomar  $\beta = M_1 = 0$ .

Finalmente, das eqs. (4.2.4), (4.2.11), (4.2.12) ,

(4.2.13), (4.2.15), (4.2.18) e (4.2.19), temos:

$$Q = AR + \mu R_0 (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} + BM_0 (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} \quad (4.2.21)$$

$$R = R_0 \left[ 1 + \frac{3\gamma}{2} \frac{(t-t_0)}{R_0} \right]^{2/3\gamma}, \quad (4.2.22)$$

$$\rho = \rho_{FRW} + \Delta\rho, \quad p = (\gamma-1)\rho_{FRW}, \quad (4.2.23)$$

$$\rho_{FRW} = \frac{3}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma}, \quad (4.2.24)$$

$$\Delta\rho = \frac{3(\gamma-2)(\mu R_0 + BM_0)(R/R_0)^{-3\gamma/2}}{QR^2}, \quad (4.2.25)$$

$$q_\alpha = \frac{(6-3\gamma)M_0 R_0}{2QR^2} [0, 0, \sigma \cos z + v_1 \text{senz}, (v_1 \cos z - \sigma_1 \text{senz})y], \quad (4.2.26)$$

$$q = (-q^\alpha q_\alpha)^{1/2} = \frac{3|\gamma-2|M_0 R_0 (\sigma_1^2 + v_1^2)}{2QR^3}, \quad (4.2.27)$$

onde as funções A e B estão expressas nas eqs. (4.2.5) e (4.2.6). A constante  $t_0$  dos modelos do tipo FRW é ajustável para cada valor de  $\gamma$ , a fim de fixar as escalas de tempo consideradas na literatura (Capítulo II). Note que se  $\gamma = 2$  então  $q_\alpha = \Delta\rho = 0$ . Para este valor de  $\gamma$ , a solução do tipo FRW para a matéria rígida é recuperada. Finalmente, relembramos que a formulação de fluido simples pode também ser adotada de acordo com o algoritmo de Szekeres (Capítulo III).

#### 4.3 - EVOLUÇÃO

Tal como nos modelos do capítulo anterior, a função

métrica  $Q$  foi obtida adicionando-se termos que estão multiplicados por potências de  $R/R_0$  [cf. eq. (4.2.21)]. Desse modo, a evolução dos modelos é também determinada pelo comportamento da função  $R(t)$ , que é a mesma função dos modelos do tipo FRW. Segue então que se a componente isotrópica obedecer à condição de energia forte ( $\gamma \geq 2/3$ ), os modelos são sempre singulares. Neste caso, a constante  $t_0$  na eq. (4.2.22) é escolhida de modo que  $R(0) = 0$ . De forma semelhante aos modelos do tipo Szekeres sem fluxo de calor, o comportamento assintótico (no tempo) pode ser determinado retendo apenas as potências dominantes na variável  $R/R_0$ . Desde que para  $\gamma = 2$  as soluções reduzem-se ao modelo de FRW com matéria rígida, no que se segue o parâmetro estará restrito ao intervalo  $1 \leq \gamma < 2$ .

#### A - Comportamento Próximo ao Ponto Singular ( $R = 0$ )

Vemos pela eq. (4.2.21) que para  $R \ll R_0$  então  $Q \sim (BM_0 + \mu R_0) (R/R_0)^{(3\gamma-4)/2}$ . Portanto, próximo à singularidade a métrica toma a seguinte forma

$$ds^2 \sim dt^2 - (BM_0 + \mu R_0)^2 (R/R_0)^{3\gamma-4} dx^2 - R^2 (dy^2 + y^2 dz^2) \quad (4.3.1)$$

que é homogênea e anisotrópica para  $\gamma \neq 2$ . Como será demonstrado a seguir, a densidade de energia total depende apenas do tempo neste limite. De fato, segue das eqs. (4.2.21) e (4.2.23) que próximo à singularidade

$$\lim_{R \ll R_0} \Delta\rho \sim \frac{3(\gamma-2)}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma}, \quad (4.3.2)$$

um valor que é comparável ao de  $\rho_{FRW}$  [cf. eq. (4.2.24)]. Além

disso, combinando as eqs. (4.2.24) e (4.3.2) temos para a densidade de energia total

$$\lim_{R \ll R_0} \rho \sim \frac{3(\gamma-1)}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma} \quad , \quad (4.3.3)$$

e como  $p = (\gamma-1)\rho_{FRW}$ , segue das eqs. (4.2.24) e (4.3.3) que  $p \sim \rho$  independentemente do valor de  $\gamma$  no intervalo  $1 \leq \gamma < 2$ . Um resultado que também é válido para os modelos sem fluxo de calor (ver seção 3.5). Note também que  $\lim_{R \ll R_0} (q/\rho) \rightarrow 0$ , de modo que o fluxo de calor de fato não afeta o comportamento dinâmico bem próximo ao ponto singular.

#### B - Comportamento Para Grandes Valores de R ( $R \gg R_0$ )

Considerando a eq. (4.2.21) obtém-se facilmente que  $\lim_{R \gg R_0} Q \sim AR[1 + o((R/R_0)^{(3\gamma-6)/2})]$ . Portanto, desprezando termos da ordem de  $(R/R_0)^{(3\gamma-6)/2}$ , o elemento de linha (4.2.1), para  $R \gg R_0$ , toma a seguinte forma:

$$ds^2 \sim dt^2 - R^2(A^2 du^2 + dy^2 + y^2 dz^2) \quad , \quad (4.3.4)$$

que é a métrica dos modelos do tipo FRW expresso em coordenadas de Szekeres (Capítulo III). Na verdade, as eqs. (4.2.21) e (4.2.23) implicam, para  $R \gg R_0$ , que  $\rho \sim \rho_{FRW}$  isto é,  $\Delta\rho/\rho_{FRW} \rightarrow 0$ . Além disso, se  $Q \sim AR$ , temos para o parâmetro de expansão  $Q = 2 \frac{\dot{R}}{r} + \frac{\dot{Q}}{Q} \sim 3 \frac{\dot{R}}{R}$ , que é o mesmo dos modelos do tipo FRW.

Em resumo, os modelos iniciam aproximadamente homogêneos e anisotrópicos satisfazendo à equação de estado de Zeldovich ( $p \sim \rho$ ), evoluem para uma fase inhomogênea e, finalmente ,

se aproximam da era friedmanniana para grandes valores do tempo cosmológico. É interessante que para  $\gamma \sim 1$ , o presente estágio de poeira é obtido no limite  $R \gg R_0$  porém, nos instantes iniciais a equação de estado efetiva é do tipo matéria-rígida.

#### 4.4 - ASPECTOS TERMODINÂMICOS

A fim de estudar o comportamento térmico dos modelos apresentados nas seções anteriores, suporemos que a mistura de fluidos satisfaz às relações termodinâmicas da teoria relativística de fluidos imperfeitos desenvolvida por Eckart. O objetivo principal é determinar a lei de temperatura obedecida pelos modelos, levando em consideração as exigências da segunda lei da termodinâmica. Para um fluido não termalizado o princípio de entropia toma a seguinte forma [cf. eq. (1.2.25)]

$$s^\alpha{}_{;\alpha} = - \frac{q^\alpha q_\alpha}{\chi T^2} \geq 0 \quad , \quad (4.4.1)$$

onde  $q^\alpha$  satisfaz à equação de Eckart (1.2.22)

$$q^\alpha = \chi h^{\alpha\beta} (T_{;\beta} - T a_\beta) \quad . \quad (4.4.2)$$

A segunda lei da termodinâmica estará automaticamente satisfeita se a condutividade térmica  $\chi$  for positiva ou nula ( $\chi \geq 0$ ). Além disso, como observado no Capítulo I, as equações acima devem ser suplementadas com a lei de evolução da temperatura (1.3.5). Quando o fluxo de calor é o único processo dissipativo presente no fluido, tal equação é expressa por:

$$\frac{\dot{T}}{T} = - \frac{(\partial P / \partial T)_n}{(\partial \rho / \partial T)_n} \theta - \frac{q^\alpha ;_\alpha}{T (\partial \rho / \partial T)_n} + \frac{a_\alpha q^\alpha}{T (\partial \rho / \partial T)_n} \quad . \quad (4.4.3)$$

Usando a eq. (4.2.26) é fácil mostrar que a divergência do fluxo de calor é nula ( $q^\alpha ;_\alpha = 0$ ) e considerando que o movimento do fluxo é geodético ( $a^\alpha = 0$ ), a eq. (4.4.3) reduz-se a

$$\frac{\dot{T}}{T} = - \frac{(\partial P / \partial T)_n}{(\partial \rho / \partial T)_n} \theta \quad , \quad (4.4.4)$$

ou ainda,

$$\frac{\dot{T}}{T} = - \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_n \left( \frac{\dot{Q}}{Q} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad . \quad (4.4.5)$$

Em geral, a equação acima não é facilmente integrável. Para tornar isto factível suporemos que a densidade da poeira inhomogênea não depende explicitamente da temperatura. Para um fluido simples isto sempre ocorre. Contudo, na mistura de fluidos aqui considerada, tal hipótese é apenas uma aproximação, que tenderá a ser exatamente válida no limite friedmanniano. Neste caso,  $(\partial P / \partial \rho)_n = (\partial P / \partial \rho_{FRW})_n = \gamma - 1$  e assim, a eq. (4.4.5) pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{T}}{T} = -(\gamma - 1) \left( \frac{\dot{Q}}{Q} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad . \quad (4.4.6)$$

Considerando que para grandes valores do tempo cosmológico os modelos evoluem para as soluções do tipo FRW; isto implica que se  $Q \sim AR$  devemos ter  $T \sim T_{FRW}$  [ver eq. (2.3.17)]. Esta condição será satisfeita tomando para solução de (4.4.6) a seguinte expressão:

$$T = T_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2(\gamma-1)} \left(\frac{AR_0}{Q}\right)^{\gamma-1} . \quad (4.4.7)$$

Por outro lado, usando a eq. (4.2.26) para o fluxo de calor  $q^\alpha$ , as componentes da equação de Eckart (4.4.2) são as seguintes:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (4.4.8)$$

$$\chi \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{3(2-\gamma)M_0 R_0}{2QR^2} \left(\frac{\partial B}{\partial x^i}\right) , \quad i = 2, 3 \equiv y, z . \quad (4.4.9)$$

Naturalmente, para obter um tratamento termodinâmico consistente, as equações acima devem ser compatíveis com a distribuição de temperatura (4.4.7). Se a condutividade térmica do meio material fosse conhecida, uma abordagem alternativa seria integrar as eqs. (4.4.8) e (4.4.9), usando a eq. (4.4.7) para estabelecer a evolução temporal. Considerando o procedimento anterior, observamos que o vínculo (4.4.8) implica em três alternativas possíveis:

- (i)  $BM_0 + \mu R_0 = 0$
- (ii)  $A = \lambda(M_0 B + \mu R_0) , \quad \lambda = \text{constante}$
- (iii)  $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 .$

No primeiro caso os modelos reduzem-se aos do tipo FRW. No segundo, eles são homogêneos, anisotrópicos e o fluxo de calor é novamente nulo ( $q^\alpha = 0$ ). No caso não trivial (iii), todas as funções arbitrarias de  $x$  presentes na eq. (4.2.21) tornam-se constantes arbitrarias. Analisaremos agora as consequências do vínculo oriundo da não negatividade do coeficiente de condução térmica.

Calculando  $\partial T / \partial x^i$  da eq. (4.4.7) e substituindo o resultado em (4.4.9), mostra-se que a condutividade será independente do gradiente de temperatura somente se

$$B = \lambda A + \psi \quad , \quad (4.4.10)$$

onde  $\lambda$  e  $\psi$  são constantes arbitrárias. Neste caso, a condutividade térmica assume a seguinte forma

$$\chi = \frac{3(2-\gamma)M_0 \lambda A (R_0/R)^{3\gamma/2}}{2(\gamma-1)R_0 T [M_0 \psi + \mu R_0]} \quad . \quad (4.4.11)$$

Portanto,  $\chi \geq 0$  se e somente se

$$\frac{M_0 \psi + \mu R_0}{\lambda A} \geq 0 \quad . \quad (4.4.12)$$

Por simplicidade, nas expressões (4.4.10)-(4.4.12), fixaremos o valor de  $\psi$  igual a zero. Além disso, como a temperatura deve ser real e positiva, tomamos  $\lambda = +1$  e  $A \geq A_{\min} > 0$ . Portanto, as soluções com fluxo de calor aqui apresentadas estão definidas através das seguintes expressões:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 [dy^2 + y^2 dz^2] \quad , \quad (4.4.13)$$

$$Q = A \left[ R + M_0 (R/R_0)^{(3\gamma-4)/2} \right] + \mu R_0 (R/R_0)^{(3\gamma-4)/2} \quad , \quad (4.4.14)$$

$$R = R_0 \left[ 1 + \frac{3\gamma}{2} \frac{(t-t_0)^2}{R_0} \right]^{2/3\gamma} \quad , \quad (4.4.15)$$

$$A = (\sigma \cos z + \nu \operatorname{sen} z) y + w \quad (4.4.16)$$

$$\rho = \rho_{\text{FRW}} + \Delta \rho > 0 \quad (4.4.17)$$

$$\rho_{FRW} = \frac{3}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma} e \quad \Delta\rho = \frac{3(\gamma-2)(\mu R_0 + M_0 A)(R/R_0)}{QR^2} \quad (4.4.18)$$

$$P = (\gamma-1)\rho_{FRW} = \frac{3(\gamma-1)}{R_0^2} (R_0/R)^{3\gamma} \quad (4.4.19)$$

$$q_\alpha = \frac{3M_0 R_0 (\gamma-2)}{2QR^2} [0, 0, \sigma \cos z + v \sin z, (\sigma \cos z - v \sin z) y] \quad (4.4.20)$$

$$q = (-q^\alpha q_\alpha)^{1/2} = \frac{3|\gamma-2|M_0 R_0 (\sigma^2 + v^2)}{2QR^2} \quad , \quad (4.4.21)$$

$$T = T_0 (R_0/R)^{2(\gamma-1)} \left(\frac{AR_0}{Q}\right)^{\gamma-1} \quad , \quad (4.4.22)$$

$$\chi = \frac{3(2-\gamma)M_0 A (R/R_0)^{-3\gamma/2}}{2(\gamma-1)\mu R_0 T} \geq 0 \quad , \quad M_0 \geq 0 \quad e \quad \frac{A}{\mu} > 0 \quad , \quad (4.4.23)$$

$$S^\alpha_{;\alpha} = \frac{3}{2} \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)\mu M_0 (\sigma^2 + v^2)^2 (R/R_0)^{-\frac{3\gamma+12}{2}}}{AR_0^3 Q^2 T} \quad (4.4.24)$$

#### 4.5 - COMENTÁRIOS FINAIS

Na última seção foi obtida uma classe de soluções inhomogêneas com fluxo de calor, para a qual uma distribuição de temperatura física foi estabelecida e todos os vínculos termodinâmicos satisfeitos. Os modelos são do tipo I na classificação de Petrov (algebricamente geral). As hipersuperfícies espaciais são conformalmente planas e o movimento da matéria é irrotacional e geodético.

É importante mencionar que os vínculos termodinâmicos tornaram constantes as funções arbitrárias na variável  $x$  ,

usualmente presentes em soluções do tipo Szekeres. Em outras palavras, soluções com corrente de calor para métricas do tipo Szekeres (classe II), são fisicamente consistentes somente se o espaço-tempo ganha simetrias. Num certo sentido, tal resultado é uma consequência da segunda lei da termodinâmica. Resultados semelhantes foram recentemente estabelecidos na literatura para o caso de um campo eletromagnético (95,120).

A simplicidade das soluções e o fato de podermos efetuar uma análise termodinâmica completa parecem justificar a interpretação de dois fluidos para o conteúdo material dos modelos, conforme sugerido ao longo deste trabalho. Além disso, como demonstrado recentemente (112), o comportamento termodinâmico de modelos do tipo Szekeres com fluido perfeito, apresenta sérios problemas de consistência interna, quando a formulação de fluido simples é adotada (Apêndice E). Contudo, existe também um aspecto bastante indesejável na interpretação de dois fluidos. Como foi visto, a condição de energia fraca não permanece válida para a densidade da poeira inhomogênea ao longo de toda a evolução cósmica [ver eqs. (3.6.7) e (4.3.2)]. Como observado anteriormente, esta condição é satisfeita somente pela densidade de energia total ( $\rho = \rho_{FRW} + \Delta\rho$ ). Tal dificuldade está presente em todas as soluções do tipo Szekeres com mistura de dois fluidos (91,95,97,120).

Finalmente, é interessante observar que as soluções sem fluxo de calor do Capítulo III, foram estabelecidas através de uma abordagem unificada de tal modo que os modelos parabólicos ( $K = 0$ ), hiperbólicos ( $K = -1$ ) ou elípticos ( $K = 1$ ), eram obtidos por extensão analítica de uma única solução. Ape -

sar de considerarmos a presença do fluxo de calor apenas para uma subclasse dos modelos parabólicos, acreditamos que nossos resultados podem ser estendidos a todas as soluções do tipo Szekeres, pelo mesmo método do capítulo anterior.

## APÊNDICE A

### FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

Uma generalização natural da conhecida série geométrica

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad , \quad (\text{A.1})$$

é definida através da seguinte expressão:

$$F(a,b,c,z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} +$$
$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} \dots \quad , \quad (\text{A.2})$$

que é denominada série hipergeométrica. A variável  $z$  e os parâmetros constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  tomam valores no campo dos complexos. Vemos da definição (A.2) que a função hipergeométrica  $F(a,b,c;z)$  é simétrica em relação aos parâmetros  $a$  e  $b$ .

Muitas funções especiais, usualmente encontradas na física matemática, são casos particulares da hipergeométrica. Dentre estas podemos citar: os polinômios de Legendre, Laguerre, Jacobi, as funções de Bessel e também os polinômios de Hermite. Suas aplicações envolvem desde a teoria de espectros moleculares até a física dos meios contínuos <sup>(11,102)</sup>.

Introduzindo o chamado símbolo de Pochhammer <sup>(103)</sup> ,  
 $(a)_n$ , onde  $n$  é um inteiro, através da relação

$$(a)_n = (a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad , \quad (A.3)$$

com  $\Gamma$  indicando a função gamma, a série (A.2) pode ser reescrita em uma forma mais compacta, a saber:

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad . \quad (A.4)$$

Como veremos adiante, a função acima é uma integral particular da chamada equação diferencial hipergeométrica <sup>(55)</sup>

$$z(1-z) \frac{d^2F}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dF}{dz} - abF = 0 \quad . \quad (A.5)$$

Tal equação contém singularidades regulares <sup>(103)</sup> nos pontos  $z = 0$ ,  $z = 1$  e  $z = \infty$ , com expoentes dados respectivamente por  $0$  e  $1-c$ ,  $0$  e  $c-a-b$ ,  $a$  e  $b$ . Nas vizinhanças de cada ponto singular as duas soluções linearmente independentes são facilmente estabelecidas pelo método de Frobenius (série de potências).

(i)  $z = 0$ .

Seguindo Norlund <sup>(104)</sup> definimos:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\rho) z^{\rho+n} \quad (A.6)$$

Substituindo a equação acima na eq. (A.5), obtém-se a seguinte identidade

$$\rho(\rho+c-1)C_0 z^{\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(\rho+1+n)(\rho+c+n)C_{n+1}(\rho) - (\rho+a+n)(\rho+n+n)C_n(\rho)] z^{\rho+n} = 0 \quad . \quad (A.7)$$

Determinando  $C_n(\rho)$  tal que

$$(\rho+1+n)(\rho+c+n)C_{n+1}(\rho) = (\rho+a+n)(\rho+b+n)C_n(\rho) \quad , \quad (A.8)$$

a série (A.6) será solução da equação não-homogênea

$$z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+b+1)] \frac{dy}{dz} - aby = \rho(\rho+c-1)C_0(\rho)z^{\rho-1} \quad . \quad (A.9)$$

Segue da eq. (A.8) que o termo geral  $C_{n+1}$  é dado por <sup>(104)</sup>

$$C_n(\rho) = \frac{(\rho+a)_n(\rho+b)_n}{(\rho+1)_n(\rho+c)_n} C_0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ etc} \quad . \quad (A.10)$$

Portanto, considerando que  $(1)_n = \Gamma(n+1) = n!$ , a escolha na expressão acima de  $C_0 = 1$  e  $\rho = 0$  ou  $C_0 = 1$  e  $\rho = 1-c$ , implica que a eq. (A.5) tem as seguintes soluções linearmente independentes

$$F(a, b, c, z) \quad (A.11)$$

e

$$z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z) \quad . \quad (A.12)$$

As soluções acima contêm restrições sobre os valores admissíveis do parâmetro  $c$ . Para  $c = 1$  as duas soluções tornam-se idênticas e para  $c$  igual a um inteiro diferente da unidade uma das duas soluções divergirá. Em tais casos, métodos especiais devem ser utilizados na busca da segunda solução linearmente independente, a qual, em geral, pertence à classe das chamadas soluções logarítmicas da equação hipergeométrica. Um tratamento completo e razoavelmente pedagógico de tais casos pode ser encontrado nas referências (104) e (105) .

(ii)  $z = 1$  .

Para evitar a expansão em série podemos fazer uma transformação do tipo  $x = 1-z$ , com a eq. (A.5) assumindo a forma (103)

$$x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + [a+b-c+1 - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - aby = 0 \quad , \quad (A.13)$$

que é uma hipergeométrica com o parâmetro  $c$  substituído por  $a+b-c+1$  e a variável  $z$  por  $x = 1-z$ . Portanto, pelas eqs. (A.11) e (A.12), duas soluções linearmente independentes de (A.13) são:

$$F(a, b, a+b-c+1, 1-z) \quad (A.14)$$

e

$$(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) \quad , \quad (A.15)$$

supondo que  $a+b-c$  não é um inteiro.

(iii)  $z = \infty$  ,

Considerando que  $a-b$  não é um inteiro, as substituições  $y = z^{-a} y_1$  e  $z = 1/w$ , transformam a eq. (A.5) em uma hipergeométrica com parâmetros (104)  $a$ ,  $a-c+1$  e  $a-b+1$ . Portanto, a equação (A.5) tem ainda as seguintes soluções linearmente independentes (104)

$$z^{-a} F(a, a-c+1, a-b+1; 1/z) \quad (A.16)$$

e

$$z^{-b} F(b, b-c+1, b-a+1; 1/z) \quad . \quad (A.17)$$

Sabemos que uma equação diferencial de segunda ordem

contêm apenas duas soluções linearmente independentes. Portanto, as soluções (A.11)-(A.11) não são todas linearmente independentes. Na verdade, estas soluções envolvem diferentes domínios de convergência existindo, contudo, relações entre as diversas soluções na região onde os domínios estão superpostos (103,104). Tais relações são típicas para um número muito maior de soluções da equação hipergeométrica. De fato, substituindo a variável independente da equação (A.5) para uma das seguintes

$$\frac{1}{1-z}, \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1},$$

teremos ainda uma equação hipergeométrica de mesmo tipo com parâmetros modificados (103,104).

As seguintes propriedades das funções hipergeométricas, apresentadas sem prova, são bastante úteis no presente trabalho

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a}, \quad (A.18)$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) = (1-z^2)^{1/2} F\left(1, 1, \frac{3}{2}, z^2\right) = z^{-1} \arcsenz, \quad (A.19)$$

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{c-b-a} F(c-a, c-b, c, z), \quad (A.20)$$

$$[b-1-(c-a-1)z]F(a, b, c, z) + (c-b)F(a, b-1, c, z) = (c-1)(1-z)F(a, b, c-1, z) \quad (A.21)$$

$$(c-a-1)F(a, b, c, z) + aF(a+1, b, c, z) - (c-1)F(a, b, c-1, z) = 0, \quad (A.22)$$

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}\right), \quad (A.23)$$

$$\frac{d}{dz} [z^a F(a, b, c, z)] = a\Gamma(a) z^{c-1} F(a+1, b, c, z), \quad (A.24)$$

Identidade de Gauss:

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \quad , \quad (A-25)$$

se  $b > 0$  e  $c-a-b > 0$ . As propriedades acima podem ser checa-  
das nas referências (55) e (103-105).

## APÊNDICE B

### SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO TIPO FRW<sup>(54)</sup>

Estabeleceremos, neste apêndice, a solução geral e unificada da equação diferencial que governa o fator de escala  $R(t)$  em modelos do tipo FRW com fluido perfeito [ver equação (2.3.12)]

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)\dot{R}^2 + \left(\frac{3\gamma-2}{2}\right)K = 0 \quad , \quad (\text{B.1})$$

onde  $\gamma$  é o índice politrópico da equação de estado  $p=(\gamma-1)\rho$ , e  $K = 0, \pm 1$  é o parâmetro de curvatura. Esta equação de evolução para  $R(t)$  tem a seguinte integral primeira<sup>(54)</sup>

$$\dot{R}^2 = (R_0/R)^{3\gamma-2} - K \quad , \quad (\text{B.2})$$

onde a constante  $R_0$ , real e positiva, é um valor específico de  $R$  comum a todos os modelos. Observe que a derivada primeira  $\dot{R}(R_0) = (1-K)^{1/2}$ , para qualquer valor de  $\gamma$ , é um extremo no caso dos modelos fechados. Segue também da eq. (B.1), que tal extremo será um máximo, um mínimo ou um ponto estacionário, dependendo do parâmetro  $\gamma$  ser, respectivamente, maior, menor ou igual a  $2/3$ .

Introduzindo um fator de escala auxiliar  $y$  dado por

$$y = (R/R_0)^{3\gamma-2} \quad , \quad (\text{B.3})$$

a equação (B.2) toma a seguinte forma:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{R_0}{3\gamma-2} (1 - Ky)^{-1/2} y^A \quad , \quad (B.4)$$

onde

$$A = \frac{3\gamma}{2(3\gamma-2)} \quad . \quad (B.5)$$

Para  $\gamma = 2/3$  (modelo de Milne <sup>(30)</sup>), a variável  $y$  não está definida. No entanto, a solução para este valor de  $\gamma$  é recuperada como um caso limite da solução geral <sup>(54)</sup>. Diferenciando (B.4) em relação a  $y$  e combinando o resultado com a equação acima obtém-se

$$y(1-Ky) \frac{d^2t}{dy^2} + [1-A-(\frac{3}{2} - A)Ky] \frac{dt}{dy} = 0 \quad . \quad (B.6)$$

É conveniente ainda introduzir uma nova variável dependente  $z$  definida por

$$z = 1 - Ky \quad , \quad (B.7)$$

na qual a eq. (B.6), para  $K \neq 0$ , assume a seguinte forma

$$z(1-z) \frac{d^2t}{dz^2} + [\frac{1}{2} - (\frac{3}{2} - A)z] \frac{dt}{dz} = 0 \quad . \quad (B.8)$$

Comparando as eqs. (A.5) e (B.8) vemos que esta última está na forma canônica de uma equação hipergeométrica com parâmetros  $a = 0$ ,  $b = \frac{1}{2} - A$ ,  $c = \frac{1}{2}$ . Portanto, a solução da eq. (B.8) é dada por [ver eqs. (A.11) e (A.12)]

$$t(z) = \ell + mz^{1/2} F(1-A, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z) \quad , \quad (B.9)$$

ou ainda na variável  $y$

$$t(y) = \ell + m(1-Ky)^{1/2} F(1-A, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1-Ky) \quad , \quad (B.10)$$

onde  $\ell$  e  $m$  são constantes. Observe que apenas a escala de tempo  $\ell$  é arbitrária desde que a integral primeira, expressa na eq. (B.4), deve ser sempre satisfeita. Derivando  $t(y)$  na equação (B.10), com o auxílio das eqs. (A.18) e (A.24) mostra-se que

$$\frac{dt}{dy} = - \frac{mK^A}{2} (1-Ky)^{-1/2} y^A \quad , \quad (B.11)$$

e comparando com (B.4) temos:

$$m = - \frac{2R_0}{3\gamma-2} K^{-A} \quad . \quad (B.12)$$

A solução  $t(R)$ , obtida substituindo-se as eqs. (B.3) e (B.12) na eq. (B.10), toma a seguinte forma:

$$t(R) - t_0 = \frac{2R_0}{3\gamma-2} K^{-A} (1-K)^{1/2} F(R_0) - \frac{2R_0 K^{-A}}{3\gamma-2} [1-K(\frac{R}{R_0})^{3\gamma-2}]^{1/2} F(R) \quad (B.13)$$

onde  $t_0 = t(R_0)$  é uma constante de integração (escala de tempo),  $A$  é a função de  $\gamma$  expressa por (B.5) e  $F(R)$  é a função hipergeométrica

$$F(R) = F\left(\frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1 - K\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3\gamma-2}\right) \quad . \quad (B.14)$$

Uma forma alternativa para a solução (B.13) pode ser obtida aplicando-se a fórmula de transformação linear (A.20) na hipergeométrica (B.14). Temos

$$F(R) = K^A (R/R_0)^{3\gamma/2} F\left[\frac{3\gamma-1}{3\gamma-2}, 1, \frac{3}{2}; 1-K(R/R_0)^{3\gamma-2}\right] , \quad (B.15)$$

Portanto, a solução (B.13) pode ser reescrita como:

$$t(R)-t_0 = \frac{2R_0}{3\gamma-2} (1-K)^{1/2} G(R_0) - \frac{2R_0}{3\gamma-2} [1-K(R/R_0)^{3\gamma-2}]^{1/2} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{3\gamma/2} G(R) \quad (B.16)$$

onde  $G(R)$  é dada por

$$G(R) = F\left[\frac{3\gamma-1}{3\gamma-2}, 1, \frac{3}{2}; 1 - K(R/R_0)^{3\gamma-2}\right] . \quad (B.17)$$

Enfatizamos que a solução  $t(R)$  expressa na equação (B.13) ou equivalentemente por (B.16), é a solução geral e unificada da eq. (B.1) para o fator de escala  $R(t)$ . Note que a transformação (B.3) põe a eq. (B.1) na forma de uma equação diferencial linear, o que permite esgotar o conjunto de soluções possíveis. Além disso, o parâmetro  $c$  em (B.14) é semi-inteiro, o que descarta a presença de soluções logarítmicas. A conveniência no uso de uma ou outra solução está associada com a simplicidade matemática na obtenção de certos casos limites. Assim, por exemplo, as soluções planas são mais facilmente obtidas a partir da forma geral (B.16). De fato, tomando o limite  $K \rightarrow 0$  na eq. (B.16) temos

$$t-t_0 = \frac{2R_0}{3\gamma-2} [1 - (R/R_0)^{3\gamma/2}] G(0) , \quad (B.18)$$

onde

$$G(0) = F\left(\frac{3\gamma-1}{3\gamma-2}, 1, \frac{3}{2}, 1\right) . \quad (B.19)$$

Pela identidade de Gauss [ver eq. (A.25)] segue que  $G(0) = -\frac{3\gamma-2}{3\gamma}$ ,

e substituindo em (B.18) temos

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \frac{3\gamma}{2} \left( \frac{t-t_0}{R_0} \right) \right]^{2/3\gamma} \quad . \quad (B.20)$$

Em geral, se  $K \neq 0$ , a função hipergeométrica presente na solução geral não é redutível a funções elementares. Portanto, é interessante saber sob que condições isto ocorre e, se possível, estabelecer um método geral (algoritmo), que permite exibir tais soluções. Para isto, é suficiente identificar aqueles valores de  $\gamma$ , para os quais a integral [ver eq.(B.4)]

$$t(y) = \frac{R_0}{3\gamma-2} \int (1-Ky)^{1/2} y^A dy \quad , \quad (B.21)$$

é expressa em termos de funções elementares. Segundo a referência (106) isto ocorrerá quando  $\gamma$  assumir valores nas seguintes sequências :

$$A = p \Rightarrow \begin{cases} \gamma_n^{(S)} = \frac{4}{3} \left( \frac{1-n}{1-2n} \right) \\ \gamma_n^{(R)} = \frac{4}{3} \left( \frac{n}{2n-1} \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$A = p + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_n^{(D)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1+2n}{n} \right) \\ \gamma_n^{(1/3)} = \frac{1}{3} \left( \frac{2n-1}{n} \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} ,$$

onde o índice de contagem foi alterado a fim de que as sequências iniciem a partir de uma solução elementar estabelecida na literatura, a saber: de Sitter, radiação, poeira e  $\gamma = 1/3$ .

A existência de tais sequências de  $\gamma$  indica a possibilidade de se construir um algoritmo para as soluções correspondentes a partir das próprias funções hipergeométricas. De fa

to, três funções hipergeométricas cujos parâmetros diferem por uma unidade satisfazem uma relação linear com coeficientes que podem depender no máximo dos argumentos <sup>(95,105)</sup> (relações de contiguidade). Assim, da solução (B.13) vemos que, dentre as quinze relações de contiguidade, devemos escolher uma para a qual o terceiro parâmetro decresce ou o segundo cresce por uma unidade. Desse modo, considerando a relação (A.18) e iniciando com uma das quatro soluções conhecidas indicadas acima, podemos obter, por aplicação sucessiva da relação de contiguidade, a expressão da hipergeométrica associada com qualquer valor  $\gamma_n$ . Exemplificaremos este método com a sequência de radiação. Outros casos podem ser vistos na referência <sup>(54)</sup>.

Se o índice  $\gamma$  pertence à sequência de radiação temos  $\gamma_n^{(R)} = \frac{4}{3} \binom{n}{2n-1}$  e  $A = n$ . Assim, a solução (B.9) toma a seguinte forma:

$$t(u_{(n)}) = \ell + m(1-u_{(n)})^{1/2} F(1-n, 1/2, 3/2; 1-u_{(n)}) \quad , \quad (B.22)$$

onde  $u_{(n)} = K(R/R_0)^{2/2n-1}$ . As sucessivas representações da hipergeométrica acima, para cada valor de  $n$ , são facilmente obtidos usando-se a relação de contiguidade (A.22). Para  $a = 1-n$ ,  $b = 1/2$  e  $c = 3/2$  segue de (A.22) que

$$(1-n)F(2-n, 1/2, 3/3; 1-u_{(n)}) + (n - \frac{1}{2})F(1-n, 1/2, 3/3; 1-u_{(n)}) - \frac{1}{2}u_{(n)}^{(n-1)} = 0. \quad (B.23)$$

Portanto, se  $n = 1$  temos uma identidade, com a solução de radiação sendo gerada diretamente de (B.22) [ver eq. (2.3.37)]. Escolhendo  $t(0) = 0$  as duas seguintes soluções na sequência são <sup>(54)</sup>:

(a)  $n = 2, \gamma = 8/9, p = -\frac{1}{9} \rho$

$$t = \frac{2a_0}{K^2} \left\{ 1 - \left[ 1 - K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/3} \right]^{1/2} - \frac{K}{2} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/3} \left[ 1 - K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \right\}$$

(b)  $n = 3, \gamma = 4/5, p = -\frac{1}{5} \rho$

$$t = \frac{8R_0^2}{3K^2} \left\{ 1 - \left[ 1 - K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/5} \right]^{1/2} - \frac{K}{8} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/5} \left[ 1 - K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/5} \right]^{1/2} \right. \\ \left. \left[ 4 + 3K \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2/5} \right] \right\}$$

A forma conforme das soluções acima são facilmente obtidas substituindo  $R(n)$  expresso pela eq. (2.3.33), nas respectivas expressões. As soluções elementares das sequências  $\gamma_n^{(D)}$ ,  $\gamma_n^{(S)}$  e  $\gamma_n^{(1/3)}$  são geradas seguindo o mesmo processo (54).

## APÊNDICE C

### SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO TIPO SZEKERES E ALGUNS CASOS ESPECIAIS<sup>(91)</sup>

A função  $S(x,t)$  dos modelos do tipo Szekeres obtidos no Capítulo III satisfaz à seguinte equação diferencial não homogênea [ver eq. (3.3.17)]

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} + \left(\frac{4-3\gamma}{3\gamma-2}\right)R\dot{S} = \frac{2\alpha}{R_0} \quad , \quad (C.1)$$

onde  $\alpha = \alpha(x)$ , é uma função arbitrária de  $x$ .  $R$  é o fator de escala dos modelos do tipo FRW e  $R_0$ , um valor específico de  $R$ , é o raio máximo dos modelos fechados. Nosso problema resume-se em obter a solução geral  $S(x,t)$  ou equivalentemente  $S(x,R)$ , para todos os valores permitidos do par  $(\gamma,K)$ . Naturalmente devemos considerar que  $R$  satisfaz à equação (B.1) com integral primeira dada pela eq. (B.2).

Aplicando na eq. (C.1) as seguintes transformações:

$$z = (R/R_0)^{3\gamma-2} \quad , \quad (C.2)$$

$$S = z^{1/(3\gamma-2)} f(z,x) \quad , \quad (C.3)$$

e usando as eqs. (B.1) e (B.2), encontra-se que  $f$  satisfaz à equação inhomogênea abaixo

$$z(1-Kz) \frac{d^2 f}{dz^2} + \left[ \frac{3\gamma+2}{2(3\gamma-2)} - \left( \frac{3\gamma}{3\gamma-2} \right) Kz \right] \frac{df}{dz} - \frac{Kf}{(3\gamma-2)^2} = \frac{2\alpha}{(3\gamma-2)^2} . \quad (C.4)$$

Se  $\alpha = 0$  e  $K = +1$ , a eq. (C.4) é uma equação diferencial hiper geométrica cujos parâmetros são  $a = b = \frac{1}{3\gamma-2}$  e  $c = \frac{3\gamma-2}{2(3\gamma-2)}$ . Se  $K = -1$ , transformando  $z \rightarrow -z$ , a mesma equação homogênea é obtida. Portanto, na variável  $Kz$  a solução da equação homogênea associada a (C.4) é dado por [ver eqs. (A.11) e (A.12)]

$$f_H^{(K)} = \beta F_3 \left( \frac{1}{3\gamma-2}, \frac{1}{3\gamma-2}, \frac{3\gamma+2}{2(3\gamma-2)}, Kz \right) + \mu z \frac{(3\gamma-6)/2(3\gamma-2)}{2(3\gamma-2)} F_4 \left( \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{9\gamma-10}{2(3\gamma-2)}, Kz \right) , \quad (C.5)$$

onde  $\beta$  e  $\mu$  são duas funções arbitrárias na variável  $x$ . Para  $K = 0$ , considerando que  $F(a,b,c,0) = 1$ , a solução acima reduz-se para

$$f_H^{(0)} = \beta + \mu z \frac{3\gamma-6}{2(3\gamma-4)} , \quad (C.6)$$

que é a solução geral da eq. (C.4) no caso  $\alpha = K = 0$  e  $\gamma \neq 2$ .

A solução da equação inhomogênea (C.4) é a soma da solução homogênea  $f_H$  mais alguma solução particular  $f_p^{(K)}$ . Uma solução particular trivial de (C.4), válida para  $K \neq 0$ , é dada por  $f_p^{(K)} = -\frac{2\alpha}{K}$ . Para  $K = 0$ , outra solução particular é a seguinte:  $f_p^{(0)} = \frac{4\alpha z}{(3\gamma-2)(3\gamma+2)}$ . Contudo, estamos interessados em uma solução particular válida para qualquer valor de  $K$ . É fácil checar que a seguinte expressão unificada é a solução procurada

$$f_p^{(K)} = \frac{2\alpha}{K} [F(\frac{1}{3\gamma-2}, \frac{1}{3\gamma-2}, \frac{3\gamma+2}{2(3\gamma-2)}, Kz) - 1] \quad . \quad (C.7)$$

Calculando o limite  $K \rightarrow 0$  na equação acima (regra de L'Hospital), obtemos o resultado esperado

$$f_p^{(0)} = \lim_{K \rightarrow 0} f_p = \frac{4\alpha z}{(3\gamma-2)(3\gamma+2)} \quad . \quad (C.8)$$

É evidente também que (C.7), para  $K \neq 0$ , é uma solução particular de (C.1). Portanto, considerando  $f = f_H + f_p^{(K)}$  e substituindo nas eqs. (C.5) e (C.7) a transformação  $z(R)$  dada em (C.2), obtemos da eq. (C.3) a seguinte solução unificada

$$S = \beta (R/R_0) F_3 + \mu (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} F_4 + \frac{2\alpha}{K} (R/R_0) (F_3 - 1) \quad , \quad (C.9)$$

onde

$$F_3 = F[\frac{1}{3\gamma-2}, \frac{1}{3\gamma-2}, \frac{3\gamma+2}{2(3\gamma-2)}, K(R/R_0)^{3-2}] \quad , \quad (C.10)$$

e

$$F_4 = F[\frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{3\gamma-4}{2(3\gamma-2)}, \frac{9\gamma-10}{2(3\gamma-2)}, K(R/R_0)^{3\gamma-2}] \quad . \quad (C.11)$$

Observamos que as soluções da equação homogênea em (B.5) são linearmente independentes somente se o parâmetro  $c = \frac{3\gamma+2}{2(3\gamma-2)}$  não for um inteiro. Se  $\gamma = (4n+2)/(6n-3)$ , onde  $n$  é um inteiro, é necessário obter as chamadas soluções logarítmicas. No entanto, como mostraremos a seguir, os casos mais importantes do ponto de vista físico, a saber:  $\gamma = 0, 1$  e  $4/3$  estão todos contidos em (B.5). Além disso, para o caso  $\gamma = 2$  ("stiff matter"), as duas

hipergeometrias em (B.5) se tornam idênticas; de forma que temos ainda uma solução particular ( $n=1$ ). Como os casos mais interessantes podem ser obtidos das eqs. (C.9)-(C.11), as soluções logarítmicas não serão discutidas neste trabalho.

Usualmente, as funções hipergeométricas não são redutíveis a funções elementares. Contudo, mostraremos agora que isto ocorre para as soluções (C.9)-(C.11) quando  $\gamma = 0, 1$  e  $4/3$ . Inicialmente relembremos que para os modelos com  $K = \pm 1$ , conforme discutido no Capítulo III, a liberdade de calibre permite eliminar a função  $\alpha$ . Portanto, nos casos hiperbólicos e elípticos precisamos considerar apenas as soluções do caso homogêneo (Capítulo III).

(i)  $\gamma = 0$  (vácuo+poeira)

A equação (C.9) reduz-se a

$$S = \beta (R/R_0) F(-1/2, -1/2, -1/2, K(R/R_0)^{-2}) + \mu (R/R_0)^{-2} F(1, 1, 5/2, K(R/R_0)^{-2}) \quad (C.12)$$

Considerando a identidade (A.18), é suficiente calcular  $F(1, 1, 5/2, z^2)$ , onde  $z^2 = K(R/R_0)^{-2}$ . Usando (A.19) e (A.21) mostra-se que  $F(1, 1, 5/2, z^2) = 3z^{-2} [1 - (1-z^2)^{1/2} z^{-1} \text{arcsenz}]$ . Substituindo este resultado em (C.12), após algumas manipulações, obtemos

$$S = \frac{3\mu}{K} \left\{ 1 - [(R/R_0)^{2-K}]^{1/2} \frac{\text{arcsen}\sqrt{K}(R_0/R)}{\sqrt{K}} \right\} + \beta [(R/R_0)^{2-K}]^{1/2} \quad (C.13)$$

(ii)  $\gamma = 1$

Neste caso temos de (C.9)-(C.11)

$$S = \beta \left(\frac{R}{R_0}\right) F[1, 1, 5/2, K(R/R_0)] + \mu \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-1/2} F[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}K(R/R_0)] . \quad (C.14)$$

Observe que as funções hipergeométricas acima têm os mesmos parâmetros presentes na eq. (C.12). Apenas o argumento foi modificado. Definindo  $z = K(R/R_0)$  e repetindo os passos do caso anterior, é facilmente obtido

$$S = \frac{3\beta}{K} \left[ 1 - \left(\frac{R_0}{R} - K\right)^{1/2} \frac{\arcsen\sqrt{K}(R/R_0)^{1/2}}{\sqrt{K}} \right] + \mu \left(\frac{R_0}{R} - K\right)^{1/2} . \quad (C.15)$$

(iii)  $\gamma = 4/3$

$$S = \beta (R/R_0) F[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, K(R/R_0)^2] + \mu . \quad (C.16)$$

Usando (A.19) e tomando  $z = K(R/R_0)^2$  na equação acima segue que

$$S = \beta \frac{\arcsen\sqrt{K}(R/R_0)}{\sqrt{K}} + \mu . \quad (C.17)$$

## APÊNDICE D

### EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA MÉTRICAS DO TIPO SZEKERES (CLASSE II)

O elemento de linha para modelo do tipo Szekeres da classe II pode ser escrito na forma abaixo <sup>(76)</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2(dy^2 + h^2 dz^2) \quad , \quad (D.1)$$

onde

$$Q = Q(x, y, z, t) \quad , \quad R = R(t) \quad e \quad h = h(y) \quad .$$

No caso mais geral considerado neste trabalho (Capítulo IV), a fonte de gravitação dos modelos é um fluido imperfeito com corrente de calor, cujo TEM é dado por:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha \quad , \quad (D.2)$$

onde  $q_\alpha$  satisfaz o vínculo  $u^\alpha q_\alpha = 0$ .

As equações de Einstein ( $G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ ) para a métrica (D.1) com TEM dado na eq. (D.2) tomam, no referencial co-móvel ( $u^\alpha = \delta^\alpha_0$ ), a seguinte forma <sup>(108-110)</sup>:

$$QR^2 \rho = Q\dot{R}^2 + 2R\dot{Q}\ddot{R} - Q_{,22} - h^{-2}(Q_{,33} + hh_{,2}Q_{,2} + hh_{,22}Q) \quad , \quad (D.3)$$

$$R^2 p = -2R\ddot{R} - \dot{R}^2 + h^{-1}h_{,22} \quad . \quad (D.4)$$

$$QRp = -Q\ddot{R} - \dot{Q}\dot{R} - \ddot{Q}R + h^{-2}R^{-1}(Q_{,33} + hh_{,2}Q_{,2}) \quad , \quad (D.5)$$

$$Q\ddot{R}p = -Q\ddot{R} - \dot{Q}\dot{R} - \ddot{Q}R + R^{-1}Q_{,22} \quad , \quad (D.6)$$

$$q_1 = 0 \quad , \quad (D.7)$$

$$Qq_2 = \dot{Q}_{,2} - Q_{,2}R^{-1}\dot{R} \quad , \quad (D.8)$$

$$Qq_3 = \dot{Q}_{,3} - Q_{,3}R^{-1}\dot{R} \quad , \quad (D.9)$$

$$0 = Q_{23} - h^{-1}h_{,2}Q_{,3} \quad , \quad (D.10)$$

onde o ponto significa derivada parcial com relação ao tempo ,  
 $Q_{,i} = \frac{\partial Q}{\partial x^i}$  ( $i = 2,3 \equiv y,z$ ) e  $h_{,2} = \frac{dh}{dy}$  . As condições  $u^\alpha = \delta^\alpha_0$   
 e o vínculo  $u^\alpha q_\alpha = 0$  implicam  $q_0 = 0$ . Portanto, considerando a eq. (D.7), o quadri vetor fluxo de calor reduz-se a  $q_\alpha = (0,0,q_2,q_3)$ . Mostra-se também que a igualdade das equações (D.5) e (D.6) e as equações (D.4) e (D.10) implicam que

$$h = \frac{\text{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} \quad , \quad (D.11)$$

e

$$Q = AR + BM + R_0S \quad , \quad (D.12)$$

onde  $R_0$  é uma constante com dimensão de tempo,  $M = M(t)$  e  $S = S(x,t)$ . As funções A e B são dadas por

$$A = 4\alpha \left(\frac{\text{sen}\sqrt{K}y/2}{\sqrt{K}}\right)^2 + (\sigma \cos z + \nu \text{sen} z) \frac{\text{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} + \omega \cos \sqrt{K}y \quad , \quad (D.13)$$

$$B = 4\alpha_1 \left(\frac{\text{sen}\sqrt{K}y/2}{\sqrt{K}}\right)^2 + (\sigma_1 \cos z + \nu_1 \text{sen} z) \frac{\text{sen}\sqrt{K}y}{\sqrt{K}} + \omega_1 \cos \sqrt{K}y \quad , \quad (D.14)$$

onde  $\alpha, \alpha_1, \sigma, \sigma_1, \nu, \nu_1, \omega$  e  $\omega_1$  são funções arbitrárias na variável x.

As equações (D.8), (D.9) e (D.12) fornecem para as

componentes do fluxo de calor as seguintes expressões:

$$q_2 = (M/R) \dot{(R/Q)} \left( \frac{\partial B}{\partial Y} \right) , \quad (D.15)$$

$$q_3 = (M/R) \dot{(R/Q)} \left( \frac{\partial B}{\partial Z} \right) . \quad (D.16)$$

Finalmente, combinando as eqs. (D.15)-(D.16) e substituindo as expressões (D.11), (D.13) e (D.14) nas eqs. (D.3), (D.4) e (D.6), as ECE (D.3)-(D-10) reduzem-se a

$$\rho = \frac{3(AR+BM+R_0S)(\dot{R}^2+K)+2R_0R\ddot{R}\dot{S}-2R_0S(\dot{R}^2+K)+2BR\ddot{R}\dot{M}-2BMR\dot{R}^2-4\alpha R-4\alpha_1 M}{(AR+BM+R_0S)R^2} , \quad (D.17)$$

$$p = -\frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{K}{R^2} , \quad (D.18)$$

$$R\ddot{S}+\dot{R}\dot{S}-S\left(\ddot{R}+\frac{\dot{R}^2+K}{R^2}\right)+\frac{B}{R_0}\left[R\ddot{M}+\dot{R}\dot{M}-M\left(\ddot{R}+\frac{\dot{R}^2+K}{R^2}\right)\right]=0 , \quad (D.19)$$

$$q = \left(\frac{M}{R}\right) \dot{\frac{R}{Q}} \left[0, 0, \frac{\partial B}{\partial Y}, \frac{\partial B}{\partial Z}\right] . \quad (D.20)$$

As equações de fluido perfeito (3.3.9)-(3.3.11) são obtidos tomando-se  $B = 0$ . Note também que qualquer termo em  $M$  proporcional a  $R$  não gera contribuição para o fluxo de calor. Fixando  $K = \alpha = \alpha_1 = 0$  nas eqs. (D.11), (D.13), (D.14) e no conjunto (D.17)-(D.19), as equações do caso parabólico consideradas no Capítulo IV são recuperadas [eqs. (4.2.7)-(4.2.9)].

## APÊNDICE E

### SOBRE A TERMODINÂMICA DE MODELOS DO TIPO SZEKERES NA FORMULAÇÃO DE FLUIDO SIMPLES <sup>(112)</sup>

Neste apêndice, examinaremos o comportamento termodinâmico de uma subclasse dos modelos do tipo Szekeres estabelecido no Capítulo 3 e posteriormente generalizada, pela introdução de um fluxo de calor, no Capítulo 4. Consideraremos apenas o caso de fluido perfeito ( $M = 0$ ) e adotaremos a formulação de Szafron (fluido simples). Como veremos adiante, o principal resultado pode ser resumido dizendo que o limite termodinâmico não segue necessariamente do limite dinâmico. Em outras palavras, se uma classe de soluções do tipo Szekeres evoluem para modelos do tipo FRW, em geral, seu comportamento termodinâmico no limite friedmanniano não será o mesmo que é usualmente apresentado por tais universos (Capítulo 2).

Os modelos são obtidos diretamente das expressões (4.4.13)-(4.4.19) fixando  $M_0 = 0$  e considerando  $\rho = \rho_{\text{FRW}} + \Delta\rho$  como a densidade de energia de um fluido simples. O elemento de linha dos modelos é o seguinte:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + y^2 dz^2) \quad , \quad (\text{E.1})$$

onde

$$Q = AR + R_0 S \quad , \quad (\text{E.2})$$

$$R = R_0 \left[ 1 + \frac{3\gamma}{2} \frac{(t-t_0)}{R_0} \right]^{2/3\gamma} , \quad (E.3)$$

$$S = \mu R_0 (R/R_0)^{\frac{3\gamma-4}{2}} , \quad (E.4)$$

$$A = (\sigma \cos z + \nu \sin z) y + w . \quad (E.5)$$

A pressão do fluido é dada por [ver eq. (4.4.19)]

$$p = \frac{3(\gamma-1)}{R_0^2} (R/R_0)^{3\gamma} , \quad (E.6)$$

enquanto a densidade de energia total, obtida das eqs. (4.4.17)-(4.4.18), pode ser reescrita com o auxílio das eqs. (E.2), (E.4) e (E.6) em três formas distintas:

$$\rho = \frac{p}{\gamma-1} \left[ \gamma-1 + (2-\gamma) \frac{AR}{Q} \right] , \quad (E.7a)$$

$$\rho = \frac{p}{\gamma-1} \left[ 1 + (\gamma-2) \left( 1 - \frac{AR}{Q} \right) \right] , \quad (E.7b)$$

$$\rho = \frac{p}{\gamma-1} \left[ \frac{AR}{Q} + \frac{1}{2} (\gamma-1) \left( 1 - \frac{AR}{Q} \right) \right] . \quad (E.7c)$$

Antes de determinar a distribuição de temperatura para os modelos descritos pelas eqs. (E.1)-(E.7), observamos que a inexistência do fluxo de calor aliado ao fato do movimento ser geodético ( $a^\alpha = 0$ ), implica que a temperatura de qualquer modelo do tipo Szekeres com fluido perfeito é uma função apenas do tempo. Este resultado segue diretamente da equação de Eckart

$$q^\alpha = \chi h^{\alpha\beta} (T_{;\beta} - T a_\beta) , \quad (E.8)$$

e do elemento de linha (E.1).

Para um fluido perfeito, temos das eqs. (1.2.2) , (1.2.6) e (1.3.5) que a temperatura em um ponto arbitrário  $\vec{x} \equiv (x, y, z)$  satisfaz à seguinte equação:

$$\dot{T}/T = (\partial p / \partial \rho)_n \dot{n}/n \quad . \quad (E.9)$$

Nos modelos do tipo FRW (Capítulo 2), a equação acima fornece

$$T_{FRW} = T_0 (R_0/R)^{3(\gamma-1)} \quad , \quad (E.10)$$

onde  $T_0$  é a temperatura para  $R = R_0$  [cf. eq. (2.3.17)].

Para modelos do tipo Szekeres a integração da eq. (E.9) é possível desde que se estabeleça uma relação unindo as grandezas  $\rho$  e  $p$ , as quais, em princípio, são funções de  $T$  e  $n$ . Inicialmente determinaremos  $n(\vec{x}, t)$ . Para o elemento de linha (E.1), a lei de conservação (2.2.6) é imediatamente integrável. Temos

$$n = f(x, y, z) / QR^2 \quad , \quad (E.11)$$

onde a função arbitrária  $f$  é estabelecida considerando que se  $Q \rightarrow AR$ ,  $n \rightarrow n_{FRW} = n_0 (R_0/R)^3$ . Portanto,

$$n = \frac{n_0 AR_0^3}{QR^2} \quad . \quad (E.12)$$

Segue da expressão acima e das eqs. (E.2) e (E.4) que o termo  $\dot{n}/n$  na eq. (E.9) pode também ser escrito de três formas distintas:

$$\dot{n}/n = -3(\dot{R}/R) \left[ \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} (2-\gamma) AR/Q \right] \quad (E.13a)$$

$$\dot{n}/n = -3(\dot{R}/R) \left[ 1 + \frac{1}{2}(\gamma-2)(1-AR/Q) \right] \quad (E.13b)$$

$$= -3(\dot{R}/R) \left[ AR/Q + \frac{1}{2} \gamma \left( 1 - \frac{AR}{Q} \right) \right] \quad (E.13c)$$

Mostraremos adiante que os conjuntos (E.7) e (E.13) desempenham papéis complementares com respeito aos possíveis comportamentos termodinâmicos apresentados pelos modelos.

Inicialmente seguiremos o procedimento convencional. Desde que  $p$  e  $T$  são funções apenas do tempo, podemos substituir  $\rho = \rho(n, T)$  por  $\rho = \rho(n, p)$ , e considerando as eqs. (E.2), (E.4), (E.6) e (E.12), os termos  $AR/Q$  e  $1-AR/Q$  presentes na eq. (E.7) podem ser calculados. Além disso, mostra-se que uma equação de estado que não depende explicitamente de  $\vec{x}$  é obtida somente se usarmos a eq. (E.7a) e não (E.7b) ou (E.7c). Neste caso temos:

$$\rho = p + \frac{\alpha(2-\gamma)}{\gamma-1} np^{1-1/\gamma} \quad (E.14)$$

onde  $\alpha = n_0^{-1} (3(\gamma-1)/R_0^2)^{1/\gamma}$  é uma constante.

Um procedimento semelhante para a eq. (13a) fornece

$$\dot{n}/n = -\frac{3\gamma}{2} \frac{\dot{R}}{R} \left[ 1 + \alpha \frac{(2-\gamma)}{\gamma} np^{-1/\gamma} \right] \quad (E.15)$$

ou ainda, usando (E.14)

$$\dot{n}/n = -\frac{3}{2} \gamma \left( \partial \rho / \partial p \right)_n \dot{R}/R \quad (E.16)$$

Substituindo o resultado acima na eq. (E.9), uma integral imediata conduz ao seguinte resultado:

$$T = T_0 (R_0/R)^{3\gamma/2} \quad . \quad (E.17)$$

Para as condições pré-estabelecidas, a lei de temperatura acima descreve o comportamento termodinâmico das soluções do tipo Szekeres. Naturalmente a expressão (E.17) não evolue para a distribuição dos modelos do tipo FRW [cf. eq. (E.10)]. Em particular, para modelos de poeira ( $p = 0$ ) temos que a temperatura  $T$  escala com  $R^{-3/2}$ , enquanto para a solução de Friedmann temos  $T = T_0 = \text{constante}$ .

A fim de recuperar a lei de temperatura dos modelos do tipo FRW, suporemos que em modelos inhomogêneos a equação de estado pode ser explicitamente dependente das coordenadas espaciais <sup>(121)</sup>  $\rho = \rho(\vec{x}, n, p)$ . Combinando as eqs. (E.2), (E.4), (E.6), (E.12), o par de equações (7b) e (16b) podem ser reescritas como:

$$\rho = \frac{p}{\gamma-1} \left[ 1 + (\gamma-2) \beta n p^{-1/2} \right] \quad (E.18)$$

e

$$\dot{n}/n = -3 \frac{\dot{R}}{R} \left[ 1 + \frac{1}{2} (\gamma-2) \beta n p^{-1/2} \right] \quad , \quad (E.19)$$

onde  $\beta(\vec{x}) = \mu [3(\gamma-1)]^{1/2} / A n_0 R_0$ . Segue das eqs. (E.18)-(E.19) que  $\dot{n}/n = -3(\gamma-1) (\partial\rho/\partial p)_n \dot{R}/R$  e da eq. (E.9), a distribuição dos modelos do tipo FRW é recuperada.

Aparentemente o paradoxo foi resolvido pois, para este caso, os limites dinâmicos e termodinâmicos se tornam consistentes. Contudo, os exemplos particulares estudados sugerem que podemos considerar outras equações de estado. De fato, introduzindo um parâmetro  $b$ , função apenas de  $\gamma$ , os conjuntos de equa

ções (7) e (13) podem ser descritos nas seguintes formas unificadas:

$$\rho = \frac{p}{\gamma-b} \left[ b + \gamma \left( \frac{1-b}{\gamma-1} \right) \frac{AR}{Q} + (\gamma-2b) \left( 1 - \frac{AR}{Q} \right) \right] , \quad (E.20)$$

e

$$\dot{n}/n = -3 \frac{\dot{R}}{R} \left[ b + (1-b) \frac{AR}{Q} + \frac{1}{2} (\gamma-b) \left( 1 - \frac{AR}{Q} \right) \right] . \quad (E.21)$$

Note que as decomposições particulares (7) e (13) são recuperadas tomando-se  $b = \frac{1}{2}$ , 1 e 0 respectivamente. Naturalmente (E.20) e (E.21) constituem apenas decomposições mais gerais das expressões de  $\rho$  e  $\dot{n}/n$ , quando expressas em termos de  $AR/Q$  e  $1-AR/Q$ . Tais decomposições não alteram os valores dessas quantidades mas conduzem a distintas equações de estado quando  $\rho$  e  $\dot{n}/n$  são expressos em funções de  $p, n$  e das coordenadas espaciais. De fato, agora a equação de estado é da forma:

$$\rho = \frac{p}{\gamma-b} \left[ b + \gamma \left( \frac{1-b}{\gamma-1} \right) \alpha n p^{-1/\gamma} + (\gamma-2b) \beta n p^{-1/2} \right] . \quad (E.22)$$

Segue também de (E.21) e (E.22) que

$$\dot{n}/n = -3(\gamma-b) \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_n \frac{\dot{R}}{R} . \quad (E.23)$$

Portanto, combinando as eqs. (E.9), (E.22) e (E.23) obtém-se

$$T = T_0 (R_0/R)^{3(\gamma-b)} , \quad (E.24)$$

que generaliza as eqs. (E.10) e (E.17) para  $b = 1$  e  $b = \frac{1}{2} \gamma$  respectivamente. Além disso, é fácil mostrar que para  $b = 0$  a eq. (E.24) reduz-se exatamente a lei de temperatura gerada pelas

decomposições (7c) e (16c).

Observe que a equação de estado (E.22) não depende explicitamente das coordenadas espaciais somente se  $b = \frac{1}{2}$ , justamente o primeiro caso considerado. Se esta condição é relaxada, existirá uma classe infinita de comportamentos termodinâmicos possíveis, parametrizada pelos valores de  $b$ . Para  $b = 1$ , a lei de temperatura dos modelos do tipo FRW é recuperada. Acreditamos que esta indeterminação na lei de temperatura tem duas origens: (i) em modelos do tipo Szekeres com fluido perfeito, não é possível supor "a priori" qualquer equação de estado unindo  $\rho$  e  $p$  a fim de integrar as equações de campo. De fato, a equação de estado (E.22) foi obtida após a integração e, da mesma forma que nos modelos tradicionais, a variável  $n$  não desempenha qualquer papel dinâmico; (ii) a lei de conservação da energia (contida nas ECE) é sempre satisfeita independente do valor assumido pelo parâmetro  $b$ . Isto significa que a entropia específica permanece constante ao longo das linhas de universo do fluido para qualquer valor de  $b$  e da dependência temporal da temperatura. Mais detalhes sobre o comportamento termodinâmico anômalo de modelos do tipo Szekeres com fluido simples podem ser vistos na referência (112).

## BIBLIOGRAFIA

- (1) - Gehéniâu, J.; Gunzig, E.; Stengers, I. - "The Universe: A Birth far from Equilibrium ?", *Found. Phys.* 17, 585 (1987).
- (2) - Eckart, C. - "The Thermodynamics of Irreversible Processes III. Relativistic Theory of the Simple Fluid" , *Phys. Rev.* 58, 919 (1940).
- (3) - Weinberg, S. - "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity", John Wiley & Sons, New York (1972).
- (4) - de Groot, S.R.; Mazur, P. - "Non-Equilibrium Thermodynamics", Dover, New York (1984).
- (5) - Glandsdorff, P.; Prigogine, I. - "Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations", J. Wiley, N. York (1979).
- (6) - Demianski, M. - "Relativistic Astrophysics", Pergamon, Oxford (1985).
- (7) - Lima, J.A.S.; Tiomno, J. - "Thermodynamic Analysis of Cosmological Models" (1989) - A ser publicado no livro em homenagem póstuma ao Professor Carlos Márcio do Amaral.
- (8) - Weinberg, S. - "Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe", *Astrop. J.* 168, 175 (1971).
- (9) - Yourgrau, W.; Van der Merwe, A.; Raw, G. - "Treatise on Irreversible and Statistical Thermophysics" - Dover, New York (1982).
- (10) - Prigogine, I. - "Le Domaine de validité de la thermodynamique des phénomènes irréversibles", *Physica* 15, 272 (1949).
- (11) - Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. - "Fluid Mechanics, Pergamon, Oxford (1985).
- (12) - Hiscock, W.A.; Lindblom, L. - "Generic Instabilities in

- First-Order Dissipative Relativistic Fluid Theories" - Phys. Rev. D31, 725 (1985).
- (13) - Hiscock, W.A.; Lindblom, L. - "Stability and Causality in Dissipative Relativistic Fluids", *Astrop. J.* 258, 798 (1982).
- (14) - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology". *Cargèse Lectures in Physics*, Vol. 6, Gordon and Breach (1973).
- (15) - Jou, D.; Casas-Vazquez, J.; Lebon, G. - "Extended Irreversible Thermodynamics", *Rep. Prog. Phys.* 51, 1105 (1989).
- (16) - Rogers, S.J. - "Transport of Heat and Approach to Second Sound in Some Isotopically Pure Alkali-Halide Crystals", *Phys. Rev. B* 3, 1440 (1971).
- (17) - Penrose, R. - "Singularities and Time-asymmetry", no livro "General Relativity, An Einstein Centenary Survey" , ed. S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge U.P., Cambridge (1979) pg. 581.
- (18) - Muller, I. - "Zum Paradoxom der Wärmeleitungs theorie" , *Zeitschrift für Physik* 198, 329 (1967).
- (19) - Muller, I. - "Toward Relativistic Thermodynamics", *Arch. Rational Mech. Anal.* 34, 259 (1969).
- (20) - Israel, W. - "Nonstationary Irreversible Thermodynamics: A Causal Relativistic Theory". *Annals of Phys.* 100, 310 (1976).
- (21) - Pavón, D.; Jou, D.; Casas-Vázquez, J. - "On a Covariant Formulation of Dissipative Phenomena", *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 36, 79 (1982).
- (22) - Lima, J.A.S., Waga, I. - "Eckart Temperature and Dissipative Effects in Friedmann Universes" - Aceito para publicação no *Physics Letters A* (1990).
- (23) - Thomas, L.H. - "The Radiation Field in a Fluid Motion" , *Quart. J. Math. (Oxford)*, 1, 239 (1930).
- (24) - Masaki, I. - "Energy-Momentum Tensor for Radiation and Radiative Viscosity", *Publ. Ast. Soc. Japan* 23, 425 (1971).

- (25) - Straumann, N. - "On Radiative Fluids", *Helvetica Physica Acta*, 49, 269 (1976).
- (26) - Schweizer, M.A. - "Transient and Transport Coefficients for Radiative Fluids" - *Astrop. J.* 258, 798 (1982).
- (27) - Udey, N.; Israel, W. - "General Relativistic Radiative Transfer: The 14-Moment Approximation", *Mon. Not. R.Ast. Soc.* 199, 1137 (1982).
- (28) - Einstein, A. - "Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade Geral", *Coleção Textos Fundamentais da Física Moderna, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian* (1980).
- (29) - Walker, A.G. - "Completely Symmetric Spaces", *J. Lond. Math. Soc.* 19, 219 (1944).
- (30) - Kramer, D.; Stephani, H.; MacCallum, M.; Herlt, E. - "Exact Solutions of Einstein Field Equations", *Deutsches Verlag der Wissenschaftler, Berlin* (1980).
- (31) - Israel, W. - "Relativistic Kinetic Theory of a Simple Gas", *J. Math. Phys.* 4, 1163 (1963).
- (32) - Murphy, G.L. - "Big-Bang Models Without Singularities", *Phys. Rev. D* 8, 4231 (1973).
- (33) - Belinskii, V.A.; Khalatnikov, I.M. - "Viscosity Effects in Isotropic Cosmologies", *Sov. Phys. JETP* 45, 1 (1977).
- (34) - Suszycki, L. - "Cosmological Models with Bulk Viscosity" - *Acta Cosmol.* 7, 147 (1978).
- (35) - Novello, M.; D'Olival, J.B. - "Non-Linear Viscous Cosmology", *Acta Phys. Pol. B* 11, 3 (1980).
- (36) - Barrow, J.D. - "The Deflationary Universe: An Instability of the De Sitter Universe", *Phys. Lett. B* 180, 335 (1986).
- (37) - Pacher, T.; Stein-Chabes, J.A.; Turner, M.S. - "Can Bulk Viscosity Drive Inflation?", *Phys. Rev. D* 36, 1603 (1987).
- (38) - Lima, J.A.S.; Portugal, R.; Waga, I. - "Bulk Viscosity-driven Asymmetric Inflationary Universe", *CBPF-NF-033/87, Phys. Rev. D*, 37, 2755 (1988).

- (39) - Coley, A.A.; Tupper, B.O.J. - "A New Look at FRW Cosmologies", GRG, 15, 977 (1983).
- (40) - Cooley, A.A.; Tupper, B.O.J. - "Exact Viscous Fluid FRW Cosmologies: The case of General K", Phys. Lett. A 100 , 495 (1984).
- (41) - Cooley, A.A.; Tupper B.O.J. - "Two-Fluid Friedmann-Robertson-Walker Cosmologies and their Numerical Predictions", Can. J. Phys. 64, 204 (1986).
- (42) - Tooper, R.F. - "Adiabatic Fluid Spheres in General Relativistic Theory", Astrop. J. 142, 1541 (1965).
- (43) - Stewart, J.M.; Ellis, G.F.R. - "Solutions of Einstein's Equations for a Fluid Which Exhibit Local Rotational Symmetry", J. Math. Phys. 9, 1072 (1968).
- (44) - Jüttner, F. - "Das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie", Ann. Phys. (Leipzig) 34, 856 (1911).
- (45) - Pauli, W. - "Theory of Relativity", Dover, New York(1981).
- (46) - Curtis, A.R. - "the Velocity of Sound in General Relativity, with a Discussion of the Problem of the Fluid Sphere with Constant Velocity of Sound", Proc. Roy. Soc. 200, 248 (1950).
- (47) - Israel, W. - "Relativistic Theory of Shock Waves", Proc. Roy. Soc. A 259, 129 (1960).
- (48) - Harrison, B.K.; Thorne, K.S.; Wakano, M.; Wheeler, J.A. - "Gravitation Theory and Gravitational Collapse", The University of Chicago Press, Chicago (1965).
- (49) - Turner, M. - "Coherent Scalar-Field Oscillations in an Expanding Universe", Phys. Rev. 28, 1243 (1983).
- (50) - Hawking, S.; Ellis, G.F.R. - "The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge, University Press, Cambridge , (1973).
- (51) - Calvão, M.O.; Lima, J.A.S. - "Nonstandard Big-Bang Models", Phys. Lett. A 141, 229 (1989).

- (52) - De Groot, S.R.; Van Leeuwen, W.A.; Van Weerth, G. - "Relativistic Kinetic Theory, Principles and Applications", North-Holland, Amsterdam (1980).
- (53) - Landau, L.D.; Lifshitz, I.M. - "The Classical Theory of Fields", Pergamon, Oxford (1985).
- (54) - Assad, M.J.D.; Lima, J.A.S. - "General and Unified Solution for Perfect Fluid Homogeneous and Isotropic Cosmological Models", CBPF-NF-050/86; Gen. Rel. and Grav. 20, 527 (1988).
- (55) - Abramowitz, M.; Stegun, I. - "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York (1985) pg. 70.
- (56) - Tolman, R.C.; Ward, M. - "On the Behavior of Non-Static Cosmological Models when the Cosmological Term is Omitted", Phys. Rev. 39, 835 (1932).
- (57) - Landau, L.D.; Lifshitz, I.M. - "Statistical Physics", Pergamon, Oxford (1985).
- (58) - Danielewicz, P. - "Shock Waves in a Hydrodynamical Model of Central Heavy Ion Collisions", Nucl. Phys. A 314, 465 (1979).
- (59) - Lukács, B.; Martinás, K. - "Thermodynamics of Negative Absolute Pressures", Central Research Institute for Physics, Report KFKI-33 (1984).
- (60) - Whittaker, F.R.S. - "On Gauss' Theorem and the Concept of Mass in General Relativity", Proc. Roy. Soc. Lond. A 149, 384 (1935).
- (61) - Peebles, P.J.E. - "The Large-scale Scale Structure of the Universe", Princeton University Press (1980).
- (62) - Peebles, P.J.E.; Wilkinson, D.T. - "Comment on the Anisotropy of the Primeval Fireball", Phys. Rev. 174, 2168 (1968).
- (63) - Bough, S.P.; Cheng, E.S. et al. - "Dipole and Quadrupole Anisotropy of the 2,7K Radiation", Astrop. J. 243, L113, (1981).
- (64) - Fabbri, R.; Guidi, I. et al. - "Measurements of the Cosmic

-Background Large-scale Anisotropy in the Millimetric Region", Phys. Rev. Lett. 23, 1563 (1980).

- (65) - Fabbri, R.; Guidi, I.; Natale, V. - "Multipole Anisotropy of the Cosmic Background Radiation in Density Wave Models", Astrop. J. 257, 17 (1982).
- (66) - Kobolov, V.M.; Reinhardt, M. and Sazonov, V.N. - "A Test of the Isotropy of the Universe", Astrop. Space Sci. 10, 363 (1971).
- (67) - Reinhardt, M. - "Orientation of Galaxies and a Magnetic Urfield", Astrop. Space Sci. 10, 363 (1971).
- (68) - Fesenko, B.I. - "Organisation of the Position Angles of Galaxies Belonging to Systems", Soviet Astron. 20, 650 (1976).
- (69) - Ellis, G.F.R. - "Limits to Verification in Cosmology", Ann. the New York Acad. Sci. 336, 130 (1980).
- (70) - MacCallum, M.A.H. - "Anisotropics and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies", op. cit. ref. (17) pg. 533.
- (71) - Wesson, P.S. - "How Homogeneous is the Universe?", Astrop. Lett. 21, 97 (1981).
- (72) - Jones, B.J.T. et al. - "Multifractal Description of the Heavy-Scale Structure of the Universe", Astrop. J. 332, L1 (1988).
- (73) - Yoshioka, S.; Ikeuchi, S. - "The Large-Scale Structure of the Universe and the Division of Space", Astrop. J. 341, 16 (1989).
- (74) - Bianchi, L. - "Sugli Spazi a Tre Dimensioni che Ammettoni un Gruppo Continuo di Movimenti", Mem. Soc. It. della Sc. 3, 267 (1897).
- (75) - Szekeres, P. - "A Class of Inhomogeneous Cosmological Models", Comm. Math. Phys. 41, 55 (1975).
- (76) - Bonnor, W.B.; Tomimura, N. - "Evolution of Szekeres Cosmological Models", Mon. Not. R. Ast. Soc. 175, 85 (1976).
- (77) - Tomimura, N. - "Certain Inhomogeneous Cosmological Models", Tese de Doutoramento, Queen College, Londres (1976).

- (78) - Bonnor, W.B.; Sulaiman, A.H.; Tomimura, N. - "Szekeres Space-Times Have no Killing Vectors", Gen. Rel. Grav. 8, 549 (1977).
- (79) - Spero, A.; Szafron, D.A. - "Spatial Conformal Flatness in Homogeneous and Inhomogeneous Cosmologies", J. Math. Phys. 19, 1536 (1978).
- (80) - Tolman, R.C. - "Effect of Inhomogeneity in Cosmological Models", Proc. Acad. Sci. USA 20, 169 (1934).
- (81) - Bondi, H. - "Spherically Symmetrical Models in General Relativity", Mon. Not. R. Astr. Soc. 107, 410 (1947).
- (82) - Eardley, D.; Liang, E.; Sachs, R. - "Velocity-Dominated Singularities in Irrotational Dust Cosmologies", J. Math. Phys. 13, 99 (1972).
- (83) - Szekeres, P. - "Quasispherical Gravitational Collapse", Phys. Rev. D, 12, 2941 (1975).
- (84) - Bonnor, W.B. - "Non Radiative Solutions of Einsteins Equations for Dust", Comm. Math. Phys. 51, 191 (1976).
- (85) - Kantowski, R.; Sachs, R.K. - "Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models", J. Math. Phys. 7, 443 (1966).
- (86) - Goode, S.W.; Wainwright, J. - "Friedmann-Like Singularities in Szekeres' Cosmological Models", Mon. Not. R. Astr. Soc. 198, 83 (1982).
- (87) - Wainwright, J. - "Characterisation of the Szekeres Inhomogeneous Cosmologies as Algebraically Special Spacetimes", J. Math. Phys. 18, 672 (1977).
- (88) - Szafron, D.A.; Collins, C.B. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies: Intrinsic Symmetries I" - J. Math. Phys. 20, 2347 (1979).
- (89) - Lima, J.A.S. - "Uma Generalização dos Modelos Cosmológicos Inhomogêneos de Szekeres", Tese de Mestrado, CBPF-RJ, (1982).
- (90) - Waga, I. - "Introdução de um Campo Eletromagnético e uma Radiação Isotrópica nos Modelos Cosmológicos de Szekeres", Tese de Mestrado, CBPF (1983).

- (91) - Lima, J.A.S.; Tiomno, J. - "Inhomogeneous Two-Fluid Cosmologies", CBPF-NF-032/87, Gen. Rel. Grav. 20,1019(1988).
- (92) - Szafron, D.A. - "Inhomogeneous Cosmologies: New Exact Solution and their Evolution", J. Math. Phys. 18,1673(1977).
- (93) - Wainwright, J. - "A Class of Inhomogeneous Perfect Fluid Cosmologies", J. Math. Phys. 18, 1668 (1977).
- (94) - Tomimura, N. - "Particular Exact Inhomogeneous Solutions with Matter and Pressure", Nuovo Cimento B, 42,1(1977).
- (95) - Lima, J.A.S.; Nobre, M.A.S.; - "Inhomogeneous Two Fluid Cosmologies with Electromagnetic Fields", CBPF-NF-072/88; Aceito para publicação no Class. and Quant. Grav.(1989).
- (96) - Barrow, J.D. - "Quiescent Cosmology", Nature, 272 , 211 (1978).
- (97) - Pollock, N.D.; Caderni, N. - "On the Introduction of Isotropic Blackbody Radiation into the Inhomogeneous Cosmological Models of Szekeres", Mon. Not. Roy. Ast.Soc. 190, 509 (1980).
- (98) - Motta, D.C. - "Modelos Cosmológicos Inomogêneos com Fluidos Dissipativos", Tese de Mestrado, Universidade Federal Fluminense (1989).
- (99) - Taub, A.H. - "Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions", Ann. Mathem., 53, 473 (1951).
- (100) - Souza, M.M. - "Hidden Symmetries of Szekeres Quasi-Spherical Solutions", Rev. Bras. Fís. 15, 379 (1985).
- (101) - Goode, S.W.; Wainwright, J. - "Singularities and Evolution of Szekeres Cosmological Models", Phys. Rev. D 26, 3315 (1982).
- (102) - Landau, L.; Lifshitz, E.M. - "Quantum Mechanics", Pergamon, Oxford (1985).
- (103) - Sneddon, I.N. - "Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry", Longmann Inc., New York (1980).
- (104) - Norlund, N.E. - "The Logarithmic Solutions of the Hypergeometric Equation", Mat. Fys. Scr. Dan. Vid. Selsk. 2 , nº 5 (1963).

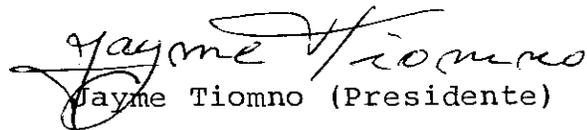
- (105) - Erdelyi, A. et al. - "Higher Transcendental Functions" , MacGraw Hill, New York (1953).
- (106) - Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. - "Tables of Integrals, Series and Products", Academic Press, New York (1980).
- (107) - King, A.R.; Ellis, G.F.R. - "Tilted Homogeneous Cosmological Models", Comm. Math. Phys. 31, 209 (1973).
- (108) - Lima, J.A.S.; Maia, M.G.R. - "Chaotic Cosmology: Inhomogeneous Models with Heat Flow", Phys. Lett. A, 110, 366 (1985).
- (109) - Lima, J.A.S. - "Szekeres Spacetimes with Heat Flow" , Phys. Lett. A 116, 210 (1986).
- (110) - Goode, S.W. - "Spatially Inhomogeneous Cosmologies with Heat Flow", Class. Quant. Grav. 3, 1247 (1986).
- (111) - Lima, J.A.S.; Tiomno, J. - "On a Class of Inhomogeneous Cosmologies with Heat Flow", Leite Lopes Feteschrift , A pioneer Physicist in the Third World, World Scientific, Singapore (1988).
- (112) - Lima, J.A.S.; Tiomno, J. - "On the Thermodynamics of One-Fluid Szekeres-Like Cosmologies", Class. Quant. Grav. 6, L93 (1989).
- (113) - Cooley, A.A. - "On the Thermodynamics of Cosmological Models with Heat Conduction", Phys. Lett. A 137, 235 (1989).
- (114) - Rebouças, M.J.; Lima, J.A.S. - "Time-Dependent, Finite , Rotating Universes", J. Math. Phys. 22, 2699 (1981).
- (115) - Maiti, S.R. - "Fluid with Heat Flux in a Conformally Flat Space-Time", Phys. Rev. D 25, 2518 (1982).
- (116) - Bradley, J.M.; Sviestins, E. - "Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow" , Gen. Rel. Grav. 16, 1119 (1984).
- (117) - Deny Yaobing - "Solutions of the Einstein Field Equations with Heat Flow", Gen. Rel. Grav. 21, 503 (1989).
- (118) - Misner, C. - "The Isotropy of the Universe", Astrop. J. 151, 431 (1968).

- (119) - Misner, C. - "Mixmaster Universe", Phys. Rev. Lett. 22, 1071 (1969).
- (120) - Tomimura, N.; Waga I. - "Inhomogeneous Cosmological Models: New Solutions with Dust, Isotropic Radiation and Electromagnetic Fields", Astrop. J., 317, 52 (1987).
- (121) - Truesdell C.; Toupin, R. - "The Classical Fields Theories", Enciclopedia of phys. Vol. 3, Springer, Berlin (1960), pg. 618.

# "PROPRIEDADES GEOMETROTERMODINÂMICAS DE MODELOS COSMOLÓGICOS"

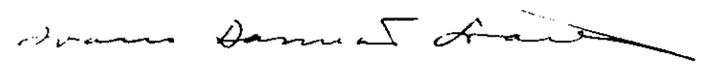
JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA

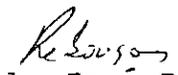
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora, os seguintes professores:

  
Jayme Tiomno (Presidente)

  
Gil da Costa Marques

  
Nazira Abache Tomimura

  
Ívano Damiano Soares

  
Marcelo José Rebouças

Rio de Janeiro, 22 de fevereiro de 1990