

PAULO ROBERTO HAUSER

UNIVERSALIDADE EM MAPAS DE BAIXA DIMENSIONALIDADE E
REDES HIERÁRQUICAS : UMA ABORDAGEM UNIFICADA POR
GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO

TESE DE
DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1989 -

*Aos meus pais Zeno (in memoriam)
e Noemia.*

AGRADECIMENTOS

A Constantino Tsallis, pela orientação competente e segura, pelo ambiente de trabalho flexível e frutífero.

A Evaldo M. F. Curado, pela estreita colaboração, pelas inúmeras discussões que propiciaram um ambiente agradável e fecundo de trabalho. Aos amigos Ananias, Luciano e Uriel, pelas discussões proveitosas e pelo ambiente de camaradagem em que convivemos.

À Aglaé, Anna, Edson, Daniel, Francisco, Helio, Marcelo, Welles, Fortunato e Ladário pelas discussões em seminários do grupo. À Myriam e Vanda pela atenção e carinho que sempre me dispensaram. Aos funcionários da biblioteca, pela sua presteza, e em particular, à Conceição e Socorro, Vera e Bahiano, Fátima e a dupla de "xeroqueiros" Zé Gordo e Elias.

À Fatima Dantas pela presteza e dedicação na datilografia desta tese. Aos funcionários do CBPF que colaboraram na execução deste trabalho.

Ao Armando, Colatto e Gerson pelas providenciais hospedagens.

Ao Departamento de Física da UFSC, pela concessão de licença de afastamento para a conclusão desta tese.

RESUMO

Esta tese tem duas partes. Na primeira parte estudamos a criticalidade de mapas de baixa dimensionalidade em um contexto de grupo de renormalização (RG).

Primeiramente tratamos do surgimento do caos do mapa $1 - a|x|^z$ para z real ≥ 1 . Estudamos detalhadamente as criticalidades associadas com o limite $k \rightarrow \infty$ das seqüências p^k [$p = 2, 3$ e 4 que correspondem, respectivamente, as seqüências MSS R^{*k} , $(RL)^{*k}$, $(RL^2)^{*k}$]. O formalismo adotado reproduz para a_p e δ_p , e para todos os valores de p , os comportamentos assintóticos corretos do limite $z \rightarrow 1$. Discutimos $a^*(b)$ e δ associados a bifurcação do mapa $T(x,y) = (1-a|x|^z + y, -bx)$ (mapa de Hénon generalizado) com $b \geq 0$ e $z \geq 1$. Para z fixo verificamos que as RG apresentam apenas duas classes de universalidade, a conservativa $b = 1$ e a não conservativa $b \neq 1$.

Na segunda parte discutimos a universalidade em redes hierárquicas. Estudamos detalhadamente, a dependência dos expoentes críticos do comprimento de correlação e do calor específico de Percolação de ligações dos parâmetros A , C e b , dos quais dependem a dimensão intrínseca D e a conectividade Q . Verificamos que redes de mesmo D e Q apresentam expoentes críticos que dependem dos aspectos topológicos da rede. Provamos que redes planares conectadas pela transformação de dualidade exibem relações entre seus expoentes críticos de Potts do comprimento de correlação ν e os seus expoentes críticos de Potts do calor específico (α) coincidem. Para uma classe mais restrita de redes, as redes diamante e trança, provamos que outra transformação preserva os expoentes ν e α .

ABSTRACT

This thesis has two parts. In the first one we study the criticality of low-dimensional maps, within a unified renormalization-group (RG) frame-work. We discuss the onset of chaos appearing in the $1 - a|x|^z$ map for real $z \geq 1$. In particular, we study with some detail the criticality associated with the $k \rightarrow \infty$ limit of the p^k p-furcation sequences [$p = 2, 3$ and 4 , which correspond, respectively, to the R^{*k} , $(RL)^{*k}$ and $(RL^2)^{*k}$ MSS sequences]. The present RG recover, for both a_p and δ_p and all values of p , the exact asymptotic behaviors in the $z \rightarrow 1$ limit. We discuss $a^*(b)$ and δ associated with the bifurcation road to chaos of a Hénon-like map generalized as follows: $T(x,y) = (1-a|x|^z + y, -bx)$; ($b \geq 0$, $z \geq 1$). For fixed z , we obtain only two universality classes, namely the conservative ($b = 1$) and the non-conservative ($b \neq 1$) ones.

In the second part we discuss universality of hierarchical lattices. We study bond percolation on variety of hierarchical lattices, within an exact renormalization-group framework. It is observed that correlation length and specific heat critical exponents, in general both depends on the parameters D and Q , and on the topology of the lattices. We prove that the duality transformation for a Potts ferromagnet two-rooted planar hierarchical lattice preserves the thermal eigenvalue. This leads to a relation between the correlation length critical exponents ν of a hierarchical lattice and its corresponding dual lattice. Using hyperscaling, we show that their specific heat critical exponents coincide. For a smaller class of hierarchical lattices - namely of diamond or tress types - we prove that another transformation also preserves ν and α .

SUMÁRIO

	página
Agradecimentos - - - - -	i
Resumo - - - - -	ii
Abstract - - - - -	iii
Lista de Figuras - - - - -	iv
Lista de Tabelas - - - - -	v
CAPÍTULO I - Introdução - - - - -	1
CAPÍTULO II - Criticalidade das Rotas para o Caos do	
Mapa 1 - $a x ^z$ - - - - -	7
2.1- Introdução - - - - -	7
2.2- Iteração Funcional e Estabilidade dos	
Ciclos - - - - -	8
2.3- Sequências de MSS - - - - -	14
2.4- Grupos de Renormalização - - - - -	15
2.5- A Criticalidade do Mapa 1- $a x ^z$ - - - - -	20
2.6- Resultados - - - - -	22
CAPÍTULO III - Classes de Universalidade do Mapa	
de Hénon - - - - -	30
3.1- Introdução - - - - -	30
3.2- Grupo de Renormalização - - - - -	31
3.3- Resultados - - - - -	34
CAPÍTULO IV - Transições de Fases em Redes	
Hierárquicas e Universalidade - - - - -	39
4.1- Introdução - - - - -	39
4.2- Redes Hierárquicas de Ligações - - - - -	40
4.3- Universalidade em Redes Hierárquicas - - - - -	41
4.4- Grupo de Renormalização e Expoentes	
Críticos - - - - -	43
4.5- Resultados - - - - -	44
CAPÍTULO V - Transformações e Expoentes Críticos do	
Ferromagneto de Potts em Redes Hierárquicas	
Planares - - - - -	51
5.1- Introdução - - - - -	51
5.2- Transformações de Dualidade - - - - -	53
5.3- Transformações em Redes Diamante e Trança -	56

CAPÍTULO VI - Conclusões - - - - -	59
Apêndice A - - - - -	64
Referências Bibliográficas - - - - -	68

LISTA DE FIGURAS

2.2.1: Esquema de bifurcações e a estabilidade dos ciclos das seqüências 2^k e $3*2^k$ - - - - -	11
2.2.2: Raízes da equação $x = f_a^{(3)}(x)$ em função de a - - -	12
2.2.3: Raízes da equação $x = f_a^{(4)}(x)$ em função de a - - -	13
2.2.4: Raízes da equação $x = f_a^{(4)}(x)$ em função de a para valores típicos de z - - - - -	13
2.6.1: $a_{p;b',b}^*$ das RG em função de z - - - - -	26
2.6.2: $\delta_{z;b',b}$ das RG em função de z - - - - -	27
2.6.3: $\delta_{p;b',b}$ das RG em função de z - - - - -	28
3.3.1: Fluxo das RG no espaço (a,b) do mapa de Hénon - -	35
3.3.2: a_c, a_d, δ_c e δ_d do mapa de Hénon generalizado - -	37
4.2.1: Geração de redes hierárquicas - - - - -	40
4.5.1: Redes hierárquicas com $D = 2$ e $Q = 1$ - - - - -	46
4.5.2: Redes hierárquicas com $A = 8, C = 2$ e $b = 3$ - - -	47
4.5.3: Redes hierárquicas com $A = 12, C = 2$ e $b = 4$ - - -	47
4.5.4: Redes hierárquicas com $A = 13, C = 3$ e $b = 3$ - - -	48
4.5.5: Redes hierárquicas com $A = 6, C = 3$ e $b = 2$ e $A = 6, C = 2$ e $b = 3$ - - - - -	49
4.5.6: Redes diamante e trança com $A = 4, C = 2$ e $b = 2$ -	50
5.1.1: Redes diamante e trança conectadas pelas transformações \tilde{T}, T_{DT} e T_{TD} - - - - -	52
A.1: Grafos com dois terminais - - - - -	65

LISTA DE TABELAS

2.4.1: a^* e δ para vários p e p' - - - - -	20
2.6.1: a_p^* e δ_p em função de z - - - - -	29
4.5.1: Valores típicos de p^* , λ e ν_p de redes diamante- -	46
4.5.2: p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes com A = 9, b = 3 e C = 3 - - - - -	46
4.5.3: p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes com A = 8, b = 3 e C = 2 - - - - -	47
4.5.4: p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes com A = 12, b = 2 e C = 2 - - - - -	47
4.5.5: p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes com A = 13, b = 3 e C = 3 - - - - -	48
4.5.6: p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes com A = 6, b = 2 e C = 3 e A = 6, b = 3 e C = 2 - - - - -	49
4.5.7: p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes diamante e trança com A = 4, b = 2 e C = 2 - - - - -	50

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A solução e a compreensão de sistemas dinâmicos não-lineares tem sido um desafio fascinante deste século.

Muitos dos problemas importantes da física, química, biologia, engenharia etc., como a turbulência, ruídos em circuitos eletrônicos e a não previsibilidade do tempo, são de difícil solução por serem essencialmente não-lineares. As soluções de sistemas dinâmicos não-lineares são em geral complexas, apresentando desde soluções periódicas até soluções caóticas.

Embora o problema da turbulência não tenha sido ainda resolvido, desenvolvimentos recentes têm contribuído para uma melhor compreensão do fenômeno da turbulência, introduzindo novos conceitos e abordagens cuja repercussão abrange os mais diversos campos como hidrodinâmica, plasma, cosmologia, engenharia elétrica etc.

Uma contribuição importante foi, sem dúvida, o trabalho pioneiro de Edward Lorenz [1] de 1963. Lorenz montou um sistema simplificado de equações diferenciais para descrever o movimento de fluidos na atmosfera. Os resultados numéricos encontrados por Lorenz mostram que equações totalmente

determinísticas apresentavam soluções erráticas (o que viria a ser chamado mais tarde de atrator estranho).

Em 1971, D. Ruelle e F. Takens [2] estudando sistemas dissipativos, introduziram o conceito de atratores estranhos relacionando-o com a turbulência. Estes trabalhos representam importantes marcos na teoria do caos determinístico. Entretanto, foi no estudo de sistemas dinâmicos simples que nasceram muitas idéias importantes. T. Li e J. Yorke [3], R. May [4] estudaram sistemas dinâmicos modelados por mapas iterativos unidimensionais da forma $x_{i+1} = f_a(x_i)$ (onde a é um parâmetro), sendo $f_a(x_i)$ uma função simples que no caso de May é o mapa logístico $f_a(x) = ax(1-x)$, encontrando soluções periódicas e caos.

M. Henón [5] propôs um mapa bidimensional da forma $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (1 - ax_i^2 + y_i, -bx_i)$ como uma abordagem reducionista para descrever sistemas como o proposto anteriormente por Lorenz, verificando que este sistema dinâmico simples apresenta um atrator estranho. Estudos detalhados de muitos autores como M. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein [6], M. Feigenbaum [7,8], Grossman e Thomae [9], Couillet e Tresser [10] em mapas unidimensionais constituídos de funções unimodais [6] levaram ao conceito de classes de universalidade na transição para o caos. Mais especificamente, na transição para o caos via a duplicação de período. No entanto, entre estes autores apenas Feigenbaum mostrou claramente que em mapas unimodais a transição para o caos depende apenas do máximo da função $f_a(x)$ e não de seus detalhes. As implicações desta importante descoberta não foram imediatamente

entendidas. Posteriormente, a realização de experiências em sistemas convectivos tipo Rayleigh-Benard, osciladores elétricos não-lineares, reações de Belousov-Zhabotinskii [11,13] vieram enfatizar a abrangência da universalidade na transição para o caos.

A descoberta que uma grande [11-14,37,50] variedade de sistemas exhibe transições para o caos que são universais e quantitativamente mensuráveis representa um avanço comparável aos obtidos na teoria de transições de fase em matéria condensada.

Em matéria condensada, as propriedades físicas dos sistemas na vizinhança de um ponto de transição de fase contínua (sem coexistência de fases), dependem do comportamento cooperativo das variáveis microscópicas do sistema. Verifica-se [15,16] que sistemas físicos com interações intermoleculares diferentes apresentam o mesmo comportamento crítico, o que quer dizer que exibem o mesmo conjunto de expoentes críticos, apresentando deste modo, um comportamento universal. A universalidade também explica porque os sistemas podem ser descritos com razoável precisão nas proximidades do ponto crítico por modelos de muitos corpos de relativa simplicidade.

Em sistemas magnéticos, um dos modelos mais simples e mais utilizado é o modelo de Ising [17,18]. Neste modelo, o magneto é constituído de momentos magnéticos microscópicos que se orientam apenas em uma determinada direção, podendo o momento estar para cima ou para baixo. Ising [19] resolveu este modelo para um sistema unidimensional e constatou que não ocorria magnetização espontânea a temperatura finita. Onsager

[20] calculou exatamente a função partição do modelo de Ising e campo nulo em duas dimensões, verificando a existência de transição de fase a temperatura finita. Em três dimensões pode-se calcular os expoentes críticos por métodos numéricos (séries, simulações de Monte Carlo etc.) e verifica-se que o jogo de expoentes obtidos é distinto do obtido por Onsager.

Em sistemas magnéticos, em geral, os expoentes críticos dependem apenas do modelo que governa as interações microscópicas e da dimensão Euclideana em que o sistema está imerso e do alcance das interações. Ou seja, um modelo disposto em uma rede planar, seja ela quadrada, triangular, hexagonal etc. apresenta os mesmos expoentes críticos, o que vale para uma dimensão Euclideana qualquer.

Outro modelo muito utilizado é o modelo de Potts [55,58], que vem a ser uma generalização do modelo de Ising. O modelo de Potts apresenta um comportamento crítico mais rico e complexo, contendo como casos particulares o modelo de Ising, a percolação de ligações (transições de fase geométricas) entre outros.

Apesar da simplicidade destes modelos poucos resultados exatos em redes regulares (Redes de Bravais) são conhecidos, sendo os obtidos por Onsager um raro exemplo.

Nos últimos anos muita atenção tem sido dedicada ao estudo de transições de fase em redes hierárquicas [21-29, 59-63]. Em redes hierárquicas, a realização de cálculos exatos é possível. Contudo, existem diferenças fundamentais entre redes regulares e redes hierárquicas. Redes regulares são homogêneas e apresentam invariância translacional, enquanto que

redes hierárquicas são, em geral, altamente inhomogêneas e não apresentam invariância translacional. Tais diferenças implicam que parâmetros apropriados para definir a dimensão e a conectividade destas redes devem ser definidos [22,23]. A dimensão (dimensão intrínseca) destas redes em geral difere da dimensão Euclídeana em que ela está imersa. Estes aspectos peculiares levaram vários autores [23,27-29] a discutir a questão da universalidade em redes hierárquicas.

A existência de comportamentos universais em sistemas dinâmicos não-lineares e em sistemas magnéticos, permite tratá-los com uma linguagem comum, a do formalismo de grupos de renormalização [38,43]. Na primeira parte desta tese estudamos a criticalidade de mapas de baixa dimensionalidade. No capítulo II fazemos um estudo detalhado da criticalidade do mapa $1 - a|x|^z$ para z real ($z \geq 1$), usando o método do grupo de renormalização da igualdade das derivadas [34,35] determinamos os pontos críticos a^* e as razões de p -furcações de várias rotas para o caos, como a de bifurcações, trifurcações e tetrafurcações.

No capítulo III, discutimos em um contexto de grupo de renormalização [31], $a^*(b)$ e δ (razões de bifurcações) associadas com a rota para o caos do mapa $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (1 - a|x|^z + y_i, -bx_i)$ com $b \geq 0$ e $z \geq 1$, bem como a questão da classe de universalidade.

Na segunda parte, estudamos a questão da universalidade do modelo de Potts em redes hierárquicas, através de grupos de renormalização exatos. No capítulo IV fazemos um estudo detalhado da dependência, dos expoentes

críticos do comprimento de correlação e do calor específico, dos parâmetros que caracterizam a rede hierárquica.

No capítulo V provamos a existência de relações entre os expoentes críticos de redes hierárquicas planares conectadas por transformações de dualidade e diamante-trança.

CAPÍTULO II

CRITICALIDADE DAS ROTAS PARA O CAOS DO MAPA $1 - a|x|^z$

2.1- INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos simples da forma $x' = f_a(x)$, como por exemplo, o mapa logístico ($f_a(x) = ax(1-x)$), [4], mostraram que estes apresentam uma dinâmica complicada.

Feigenbaum [8] mostrou que mapas unimodais, ou seja, mapas em que $f_a(x)$ apresenta apenas um máximo e são monotonamente crescentes à esquerda do máximo e decrescentes à sua direita, tem suas propriedades dinâmicas dependentes apenas na lei de potência que governa este máximo. Introduziu, assim, o importante conceito de classes de universalidade em sistemas dinâmicos. Mapas com $f_a(x) = 1 - a|x|^z$ são mapas unimodais com um máximo em $x = 0$ e as propriedades dinâmicas do mapa dependem apenas de z .

A descoberta [11-14,30,37,50] de que uma grande variedade de sistemas não lineares exibem transição para o caos que são universais e quantitativamente mensuráveis, representa um avanço comparável aos da teoria de transições de fase em matéria condensada.

P. Coullet e C. Tresser [10], e Derrida et al [34]

introduziram métodos de grupo de renormalização para estudar a criticalidade de sistemas dinâmicos da forma $x' = f_a(x)$, estabelecendo uma analogia com fenômenos críticos.

O mapa $x' = 1 - a|x|^z$ (2.1.1) não apresenta caos para $z < 1$ [34,36], bem como para valores do parâmetro $a < 0$ e $a > 2$.

Neste capítulo estudaremos, em detalhe, a criticalidade do mapa $1 - a|x|^z$. Na seção 2.2 ilustramos alguns aspectos dinâmicos do mapa $1 - ax^2$, mostrando o surgimento de algumas seqüências de p-furcações. Na seção 2.3 apresentamos resumidamente um método que permite classificar os ciclos simbolicamente e identificar as classes de universalidades das diversas seqüências. Nas seções subsequentes apresentaremos o método da igualdade das derivadas [34,35] e os resultados obtidos para o mapa $1 - a|x|^z$ (2.1.1), para z real $z \geq 1$ e $a \in [1,2]$ das rotas de bifurcações, trifurcações e tetrafurcações para o caos.

2.2- ITERAÇÃO FUNCIONAL E ESTABILIDADE DOS CICLOS

Consideremos a relação recursiva

$$x_{n+1} = f_a(x_n) . \quad (2.2.1)$$

Definiremos como iteração funcional a composição:

$$f_a^{(2)}(x) \equiv f_a(f_a(x)) \quad (2.2.2)$$

$$f_a^{(3)}(x) \equiv f_a(f_a(f_a(x))) , \quad (2.2.3)$$

que pode, facilmente, ser generalizada para uma ordem n qualquer. A iteração da relação recursiva (2.2.1) gera uma seqüência $\{x_i; i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ que, em geral, após algumas centenas de pontos transientes converge para um conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_p\}$ tal que $x_{i+p} = x_i$ e $x_{i+k} \neq x_i$, que constitui um ciclo de comprimento p que pode ser finito ou infinito (aperiódico).

Como caso particular, teremos $p = 1$ que corresponde ao ponto fixo

$$x^* = f_a(x^*) . \quad (2.2.4)$$

O critério de estabilidade do ponto fixo pode ser obtido facilmente, da seguinte maneira:

Consideremos um ponto muito próximo de x^* , $x_n = x^* + \epsilon_n$ e sua primeira iteração $x_{n+1} = x^* + \epsilon_{n+1}$.

$$\text{Como } x_{n+1} = f_a(x^* + \epsilon_n),$$

ou

$$x_{n+1} = f_a(x^*) + f'_a(x^*) \epsilon_n$$

obteremos $\epsilon_{n+1} / \epsilon_n = f'_a(x^*)$, o que resulta nos seguintes critérios de estabilidade:

$$a) \quad |f'_a(x^*)| < 1 \quad x^* \text{ é estável;}$$

$$b) \quad |f'_a(x^*)| = 1 \quad x^* \text{ é marginalmente estável;}$$

$$c) \quad |f'_a(x^*)| > 1 \quad x^* \text{ é instável.}$$

Um ciclo p será estável se

$$|f_a^{(p)}(x_i)| = \prod_{j=1}^p |f_a'(x_j)| < 1 \quad (2.2.5)$$

Um caso muito especial de estabilidade é

$$|f_a^{(p)}(x_i)| = 0, \quad (2.2.6)$$

neste caso, o ciclo é dito superestável.

Consideremos o mapa $f_a(x) = 1 - ax^2$. Os pontos fixos dados por $x^* = 1 - ax^{*2}$ são $x^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a}$ (onde $a \geq -0.25$ para valores reais). A solução $x^* = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2a}$ é instável para $a > -0.25$ e será sempre instável. A solução $x^* = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2a}$ é estável para $-0.25 < a < 0.75$.

Para o ciclo 2 teremos:

$$x_2^* = f_a(x_1^*) \quad \text{e} \quad x_1^* = f_a(x_2^*)$$

e obteremos os pontos do ciclo através da iteração $x_1^* = f^{(2)}(x_1^*)$ ou $x_2^* = f^{(2)}(x_2^*)$, que fornece os pontos do ciclo 2

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{4a-3}}{2a}$$

A estabilidade do ciclo 2 pode ser analisada por:

$$f^{(2)}(x_i) = f'(x_1) f'(x_2)$$

e teremos que o ciclo é estável no intervalo $0.75 < a < 1.25$.

Com auxílio computacional podemos verificar que para

$p = 4$, a região de estabilidade do ciclo é $1.25 < a < 1.3680989$, e verificar que existe uma cascata de bifurcações com período $p = 2^k$, que rapidamente converge para um ciclo infinito em $a_\infty = 1.401155$ (ver fig. 2.2.1).

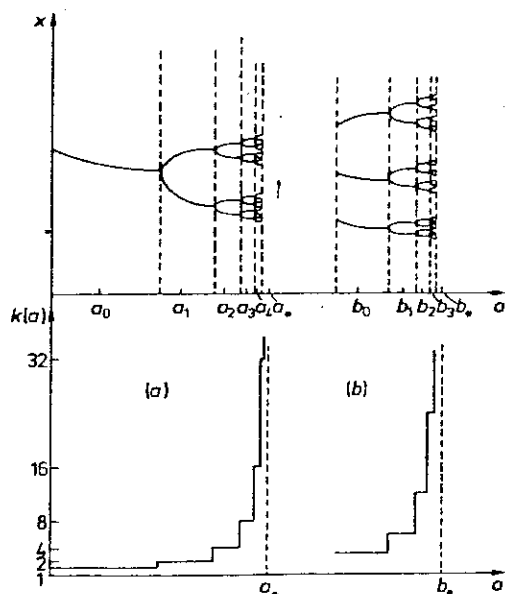


Figura 2.2.1 - Mostramos esquematicamente na parte superior desta figura as bifurcações das seqüências: (a) R^{*k} ou 2^k e (b) $P * R^{*k}$ (onde $P = RL$) ou $3 * 2^k$. Na parte inferior, exibimos as funções $k(a)$ que descrevem a estabilidade dos ciclos das seqüências (a) e (b).

Seguindo a seqüência das bifurcações, podemos determinar a razão de bifurcação

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n+1} - a_n} \quad (2.2.7)$$

que, para funções unimodais $z = 2$ é universal $\delta = 4.66920\dots$

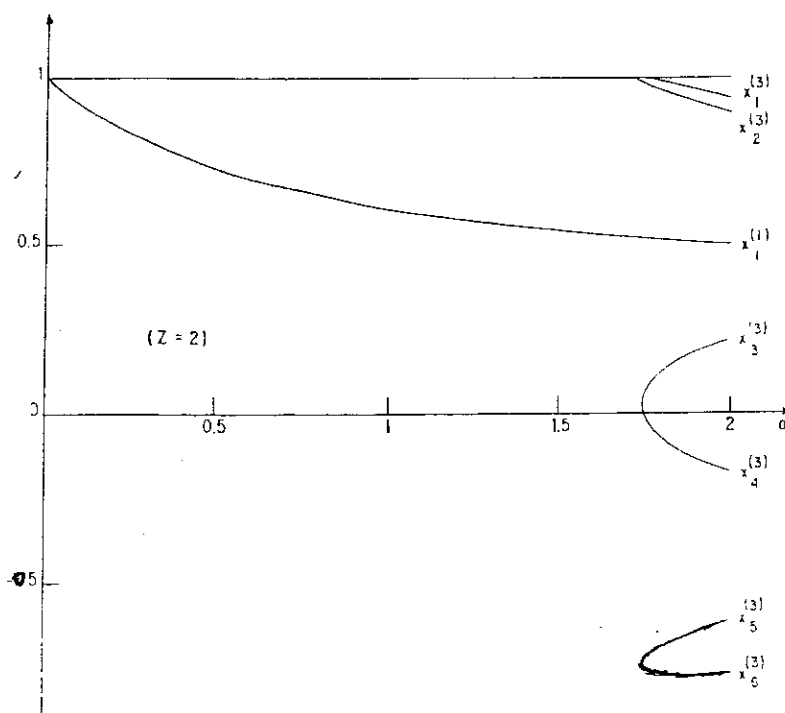


Figura 2.2.2 - Raízes da equação $x = f_a^{(3)}(x)$ em função de a .

A iteração funcional $f_a^{(3)}(x)$ gera o surgimento de um ciclo 3 para a ligeiramente maior que $a = 1.75$ (ver fig. 2.2.2). A iteração funcional $f_a^{(4)}$ apresenta, além do período 4 da cascata de bifurcações outro período desconexo (ver fig. 2.2.3). Em geral, a equação $x = f_a^{(p)}(x)$, $p = 1, 2, 3, \dots$ apresentará 2^p raízes, sendo que algumas já apareceram em períodos anteriores e, podemos ter, além de bifurcações, uma ou várias p -furcações.

Analisando com detalhe esta iteração funcional, veremos que existe um conjunto complexo de seqüências da forma 2^k , 3×2^k , 4×2^k etc. e seqüências do tipo 3^k , 4^k , etc.. O primeiro conjunto de seqüências conexo no eixo do parâmetro a deve ser distinguido do segundo que é constituído de seqüências desconexas que possuem ponto de acumulação e universalidades

diferentes, respectivamente de 3×2^k e 4×2^k . Podemos, ainda, ter um determinado ciclo p com várias seqüências independentes, cada qual pertencendo a uma classe de universalidade.

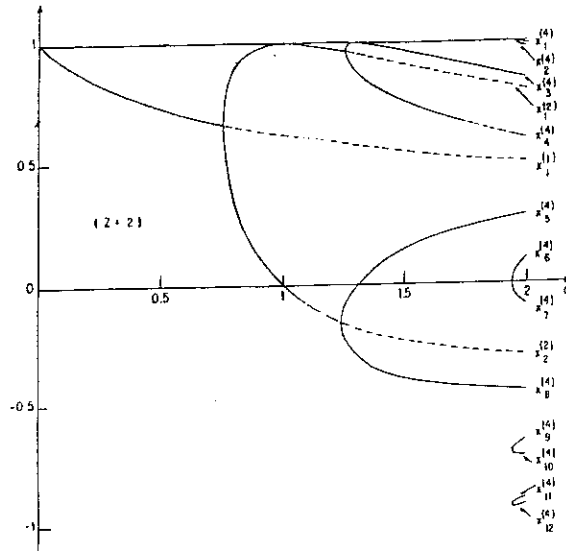


Figura 22.3 - Raízes da equação $x = f_a^{(4)}(x)$ em função de a .

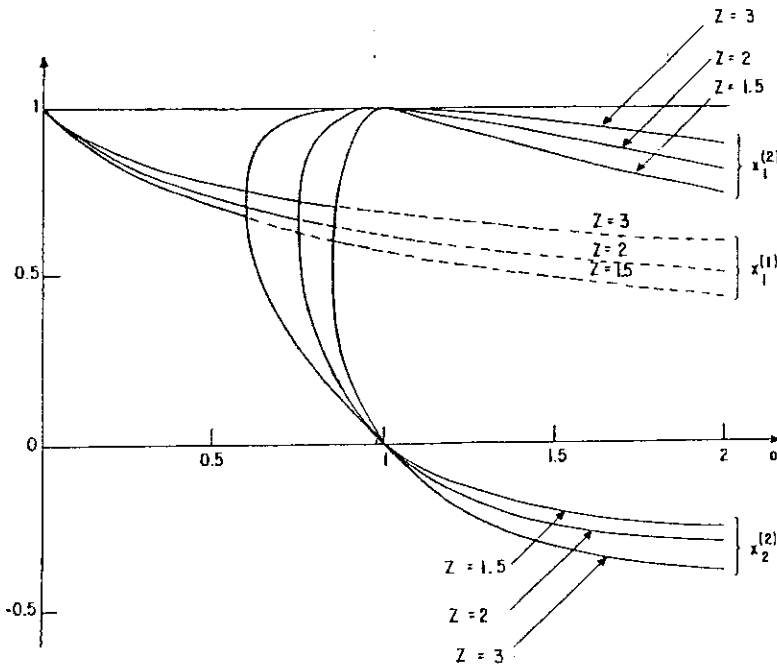


Figura 22.4 - Raízes das equações $x = f_a^{(z)}(x)$ em função de a para valores típicos de z .

Em relação ao mapa $1-a|x|^z$, podemos afirmar que para valores de a contidos no intervalo $a \in [0, 2]$ e $z \geq 1$, panoramas semelhantes ao do mapa $1-ax^2$ são encontrados e a região de estabilidade dos ciclos pode ser estudada numericamente.

2.3- SEQUÊNCIAS M.S.S.

Apresentaremos, resumidamente, o método das seqüências U introduzido por Metropolis, Stein e Stein [6].

Consideremos mapas unimodais da forma $f_a = 1 - a|x|^z$, partindo do centro do mapa $x = 0$ e acompanhando as iterações subseqüentes chamaremos de R ou L se os pontos caírem à direita ou à esquerda do centro, respectivamente. Portanto, cada seqüência periódica corresponde a uma palavra de comprimento finito. Este procedimento nos dá R para o ciclo 2, RL para o ciclo 3, RLR e RL^2 para o ciclo 4, e para o ciclo 5 teremos três seqüências: RL^3 , RL^2R e RLR^2 .

Consideremos uma palavra P. Podemos construir outra palavra com a composição $H = P \times P$, onde $x = R$ se existir um número par de símbolos R em P e $x = L$ caso contrário. H constitui o harmônico de P. Uma regra de composição mais geral * introduzida por Derrida et al. [32] permite selecionar os harmônicos de uma duplicação de períodos de uma seqüência P através da composição $P * R^{*k} = P * R * R * R \dots$. De maneira análoga, podemos obter $(RL)^{*k}$ para a quadruplicação de períodos.

Usando propriedades da operação *, Derrida et al.

[32] mostraram a existência de auto-similaridade nas seqüências MSS, ou seja, parte da seqüência se parece com a seqüência toda.

Este fato é muito importante, pois permite [33] a construção de grupos de renormalização.

2.4- GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO

Um dos problemas da teoria de bifurcações é determinar a região de estabilidade para todos os ciclos.

O conhecimento das regiões de estabilidades dos ciclos em função do parâmetro a nos permite construir a função comprimento do ciclo:

$$k(a_{n+1}) = \frac{k(a_n)}{2} \quad (2.4.1)$$

(ver fig. 2.2.1) que descreve a estabilidade de cada ciclo e $k(a) = \infty$, onde não houver ciclo estável finito. A função $k(a)$ é uma função degrau com infinitos saltos. Podemos observar que as zonas de estabilidade de dois ciclos subseqüentes são adjacentes e, para n suficientemente grande existe um ponto de acumulação a_∞ . Ou seja, conhecer $k(a)$ significa conhecer o conjunto $\{a_n\}$ onde ocorrem as bifurcações, o que permite determinar a_∞ e $\delta_{ext.}$ exatamente.

Em analogia a fenômenos críticos em matéria condensada, vamos introduzir um método de grupo de renormalização que permite a determinação de a^* e δ , que são respectivamente os valores aproximados do ponto de acumulação

a_∞ e da razão de bifurcações $\delta_{ext.}$.

Façamos as seguintes considerações:

Nos pontos superestáveis de cada ciclo.

$$s \equiv \prod_{j=1}^p f'_a(x_j) = 0. \quad (2.4.2)$$

Esta condição ocorre para um determinado valor de a que chamaremos de \tilde{a} do intervalo de estabilidade, e podemos estabelecer a condição

$$s_{p'}(\tilde{a}_{p'}) = s_p(\tilde{a}_p) = 0, \quad (2.4.3)$$

onde $s_p(a)$ é a condição de superestabilidade calculada no ponto superestável do ciclo p e $s_{p'}(\tilde{a}_{p'})$ é a condição calculada no respectivo ponto do ciclo p' .

A equação (2.4.3) permite estabelecer uma relação

$$\tilde{a}_{p'} = F(\tilde{a}_p), \quad (2.4.4)$$

onde $F(\tilde{a}_p)$ é uma função definida no ponto \tilde{a} .

Derrida et al. [34] estenderam a expressão (2.4.4.) para todo o intervalo de estabilidade do ciclo p através da igualdade das derivadas

$$s_{p'}(a') = s_p(a), \quad (2.4.5)$$

que fornece a relação recursiva

$$a' = F(a), \quad (2.4.6)$$

que é conhecido como grupo de renormalização da igualdade das derivadas.

Em analogia a grupos de renormalização no espaço real [35], teremos uma relação recursiva (2.4.6) que apresenta um ponto fixo $a^* = F(a^*)$. Nas vizinhanças do ponto fixo teremos em aproximação linear:

$$a' = F(a^*) + \left[\frac{dF}{da} \right]_{a^*} (a - a^*) + \dots \quad (2.4.7)$$

ou

$$a' = a^* + \lambda (a - a^*) + \dots \quad (2.4.8)$$

onde $\lambda \equiv \left[\frac{dF}{da} \right]_{a^*}$.

O papel da relação de escala do comprimento de correlação é descrito por:

$$k(a_{n+1}) = \frac{k(a_n)}{2}. \quad (2.4.9)$$

A função $k(a)$ diverge segundo lei de potência em $a = a^*$ da forma:

$$k(a) \sim (a^* - a)^{-\nu}. \quad (2.4.10)$$

Com as equações (2.4.8), (2.4.9) e (2.4.10) obtemos

$$\nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda}.$$

Como [7,8]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^* - a_n \sim \delta^{-n}, \quad (2.4.11)$$

onde δ é a razão das bifurcações definidas em (2.2.7) podemos através de (2.4.8) e (2.4.11) obter a relação

$$\lambda = \delta \quad (2.4.12)$$

estabelecendo uma relação direta entre o auto-valor e a razão de bifurcações.

Este formalismo pode ser utilizado para determinar a criticalidade das seqüências $P * R^{*k}$ de mapas unimodais $1 - a|x|^z$ podendo ser estendido também para seqüências desconexas como $(RL)^{*k}$ e $(RL^z)^{*k}$.

Vamos apresentar um exemplo simples para ilustrar o formalismo do grupo de renormalização.

Consideremos o mapa $1 - ax^2$.

A condição de estabilidade no ciclo 1 é dada por:

$$s_1 = -2ax_0^* = 1 - \sqrt{1+4a} . \quad (2.4.13)$$

A condição de estabilidade no ciclo 2 é

$$s_2 = 4a^2 x_1^* x_2^* = 4(1 - a) . \quad (2.4.14)$$

Pelo método de igualdade das derivadas teremos:

$$s_1(a') = s_2(a) , \quad (2.4.15)$$

$$1 - \sqrt{1+4a'} = 4(1 - a) . \quad (2.4.16)$$

Que fornece a relação recursiva:

$$a' = 4a^2 - 6a + 2, \quad (2.4.17)$$

a qual apresenta dois pontos fixos repulsores:

$$a^* = (7 \pm \sqrt{17})/8.$$

O ponto $a^* = (7 + \sqrt{17})/8 = 1.390388$ dá o valor:

$$\lambda = \left. \frac{da'}{da} \right|_{a^*} = 8a^* - 6 = 1 + \sqrt{17} = 5.12311.$$

Enquanto que no ponto $a^* = (7 + \sqrt{17})/8 = 0.35961$, o auto-valor $\lambda = 1 - \sqrt{17} = -3.12310$. Podemos descartar este ponto por duas razões: 1) o ponto se localiza numa posição anterior a primeira bifurcação; 2) o auto-valor associado a este ponto fixo é negativo não tendo nenhum significado físico.

É interessante observar que alguns autores como Derrida et al. [34] e Hu [35], ao contrário do nosso procedimento renormalizam o ciclo menor no ciclo maior. Isto implica que o ponto fixo da relação recursiva assim obtida é atrator, enquanto que pelo nosso procedimento temos um repulsor em completa analogia com transições de fase. Outra diferença é a relação entre λ e δ que, no caso destes autores é $\delta = 1/\lambda$.

O grupo de renormalização dado por (2.4.7) fornece um resultado aproximado em relação aos valores $a_{\infty} = 1.401155 \dots$ e $\delta = 4.66920 \dots$ da seqüência de bifurcações. A tabela (2.4.1) mostra a melhora quantitativa dos resultados obtidos com grupos

de renormalização, envolvendo ciclos de ordem mais elevada.

TABELA 2.4.1

p'	p	a	δ
1	2	1.39039	5.12311
1	4	1.39941	4.86448
2	4	1.40142	4.61483
exato		1.401155	4.66920

2.5- A CRITICALIDADE DO MAPA $1 - a|x|^z$

Estudamos a criticalidade do mapa

$$f_a(x) = 1 - a|x|^z \quad (2.5.1)$$

através do método do grupo de renormalização da igualdade das derivadas [34]. Calculamos os valores críticos a_p^* e as taxas δ_p das seqüências de bifurcações 2^k (ou R^{*k}), trifurcações 3^k (ou RL^{*k}), e tetrafurcações 4^k (ou $(RL^2)^{*k}$).

Adotamos o seguinte procedimento: determinamos numericamente as raízes de um ciclo p através da relação:

$$x' = f_a(x) \quad (2.5.2)$$

onde $f_a(x)$ é dado por (2.5.1). Estas raízes serão denotadas por $x_1^{(p)}$, $x_2^{(p)}$, $x_3^{(p)}$, ..., partindo de cima (fig. 2.2.4).

O auto-valor associado ao ciclo p de $f_a(x)$ é dado por

$$\lambda_p(a) \equiv \left. \frac{df_a^{(p)}(x)}{dx} \right|_{x = x_i^{(p)}} \equiv \prod_{j=1}^p \left. \frac{df^{(1)}(x)}{dx} \right|_{x = x_j^{(p)}} \quad (2.5.3)$$

onde j é um índice associado as raízes estáveis do ciclo. Por exemplo, para o ciclo 3, $j = 1, 4, 6$ (veja fig. 2.2.2). Os grupos de renormalização denotados por $RG_{b',b}^{(p)}$ para descrever o surgimento do caos de uma determinada seqüência de p -furcações são determinadas pelas seguintes relações recursivas:

$$\lambda_{b'}(a') = \lambda_b(a) \text{ para } p = 2, 3, 4, \dots \quad (2.5.4)$$

onde $b' = 1, p, p^2, p^3$ e $b = pb', p^2b', p^3b', \dots$

Para evitar confusões na nomenclatura, ilustraremos com alguns casos específicos:

(i) para $R_{12}^{(2)}$ calculamos $\lambda_1(a')$ e $\lambda_2(a)$ usando, respectivamente, as raízes $x_1^{(1)}(a')$ e $x_1^{(2)}(a)$ (ver fig. 2.2.4).

(ii) para $RG_{24}^{(2)}$ usamos $x_1^{(2)}(a')$ e $x_9^{(4)}(a)$ (ver fig. 2.2.3).

(iii) para $RG_{14}^{(2)}$ usamos as raízes $x_1^{(1)}(a')$ e $x_9^{(4)}(a)$ (ver fig. 2.2.3).

(iv) para $RG_{19}^{(3)}$ usamos $x_1^{(1)}(a')$ e $x_1^{(3)}(a)$ (ver fig. 2.2.2).

(v) para $RG_{14}^{(4)}$ usamos $x_1^{(1)}(a')$ e $x_1^{(4)}(a)$ (ver fig. 2.2.3).

Os grupos $RG_{12}^{(2)}$, $RG_{24}^{(2)}$ e $RG_{14}^{(2)}$ descrevem o surgimento de caos da seqüência de bifurcações. Enquanto que $RG_{13}^{(3)}$ e $RG_{14}^{(4)}$ descrevem o surgimento do caos por trifurcações e tetrafurcações respectivamente.

Os pontos fixos aproximados $a_{p;b',b}^*$ correspondem aos pontos fixos instáveis de (2.5.4), portanto, satisfazem a relação:

$$\lambda_{b'} \left[a_{p;b',b}^* \right] = \lambda_b \left[a_{p;b',b}^* \right] \quad p = 2, 3, 4.$$

O valor aproximado da taxa de p-furcação é dado por:

$$\begin{aligned} \delta_{p;b',b} &= \left[\frac{da'}{da} \Big|_{a = a_{p;b',b}^*} \right]^{pb'/b} \\ &= \left[\frac{d\lambda_b(a)/da}{d\lambda_{b'}(a')/da'} \Big|_{a = a_{p;b',b}^*} \right]^{pb'/b} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

2.6- RESULTADOS

Com o método descrito na seção 2.5 obtivemos os resultados apresentados nas figs. 2.6.1-3 e na tabela (2.6.1).

Discutiremos, primeiramente, o limite $z \rightarrow 1$. Para $p = 2$, os grupos $RG_{12}^{(2)}$, $RG_{14}^{(2)}$ e $RG_{24}^{(2)}$ descrevem o comportamento

assintótico exato [34] e são numericamente consistentes com:

$$a_2^*(z) \sim 1 + \phi_2(z) \quad (2.6.1)$$

e

$$\delta_2(z) \sim 2 + \frac{z-1}{\phi_2(z)} \quad (2.6.2)$$

onde

$$\phi_2(z) + (z-1) \ln \phi_2(z) + z - 1 = 0. \quad (2.6.3)$$

Note que $\lim_{z \rightarrow 1} a_2^*(z) = 1$ e $\lim_{z \rightarrow 1} \delta_2(z) = 2$.

Para $p = 3$ o mesmo ocorre com $RG_{19}^{(3)}$ e o resultado obtido é consistente com:

$$a_3^*(z) \sim \bar{a}_3(z) + \phi_3(z) \quad (2.6.4)$$

e

$$\delta_3(z) \sim \frac{(z-1)\bar{a}_3(z)}{\phi_3(z)} \quad (2.6.5)$$

onde

$$1 - \bar{a}_3(z) |\bar{a}_3(z) - 1|^2 \sim 0 \quad (2.6.6)$$

correspondem aos pontos superestáveis da seqüência RL e

$$\phi_3(z) \sim (e^2 [2\bar{a}_3(z) - 1] [\bar{a}_3(z) - 1] [\bar{a}_3(z)]^{2/(z-1)})^{-1} \quad (2.6.7)$$

A equação (2.6.4) no limite $z \rightarrow 1$ fornece $a_3^*(1) = (\sqrt{5} + 1)/2 \simeq 1.61803$ (este é o mesmo valor o qual, no

limite $z \rightarrow 1$, toda a janela 3×2^k colapsa) e $\lim_{z \rightarrow 1} \delta_3(z) = \infty$.

Para $p = 4$, o grupo $RG_{14}^{(4)}$ fornece:

$$\lim_{z \rightarrow 1} a_{4;1,4}^*(z) = [(19 + 9\sqrt{11/3})^{1/3} + (19 - 9\sqrt{11/3})^{1/3} + 11/3] \approx 1.83929 .$$

(que coincide com o valor no qual colapsou a janela 4×2^k), e

$\lim_{z \rightarrow 1} \delta_{4;1,4}(z) = \infty$, que coincidem com os valores exatos [34].

Os valores exatos de $a_p^*(1)$ satisfazem

$f_a^{(p)}(x=0, z=1) = 0$, ou

$$1 - a \left| \underbrace{1 - a \dots 1 - a}_{p-2} \right| = 0$$

$$p = 2, 3, 4, \dots \tag{2.6.8}$$

Embora não tenhamos uma prova geral, os resultados acima sugerem que no limite $z \rightarrow 1$ para todos os p , os grupos $R_{b',b}^{(p)}$ possuem um comportamento assintótico correto (para todos (b', b)) dos resultados exatos.

O limite $z \rightarrow \infty$ tem sido uma questão controversa. Alguns autores [43-45] sugerem que para $p = 2$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \delta(z) \leq 30$, enquanto resultados de outros autores [7,40-42] parecem indicar que $\lim_{z \rightarrow \infty} \delta(z) = \infty$.

Nossos resultados sugerem, em princípio, que $\delta(\infty) = \infty$, contudo, a questão demanda trabalhos futuros que permitam uma

análise mais conclusiva a respeito do comportamento dos RG neste limite.

Em relação a dependência com p , notamos que para $p=3$ e 4 $\delta_p(z)$ apresenta um mínimo na vizinhança de $z=2$ [38] (veja fig. 2.6.3 e a tabela (2.6.1)). Verificamos que aproximadamente $\delta_9^{\min}/\delta_2(2) \simeq \delta_4^{\min}/\delta_9^{\min} \simeq 15$, o que pode ser uma indicação que para seqüências $(RL^{p-2})^{*k} \delta_p^{\min}$ (ou mesmo $\delta_p(z)$ para todos os valores finitos de z) cresçam exponencialmente com p no limite $p \rightarrow \infty$. Isto implicaria que o expoente crítico do comprimento do ciclo $\nu_p(z) = \ln p / \ln \delta_p(z)$ se anularia no limite $p \rightarrow \infty$.

Os resultados entre os limites $z \rightarrow 1$ e $z \rightarrow \infty$ são uma boa aproximação quando comparados com resultados numéricos exatos [34]. No caso $p = 2$, o grupo $RG_{2,4}^{(2)}$ apresenta os melhores resultados comparativamente, a valores calculados numericamente.

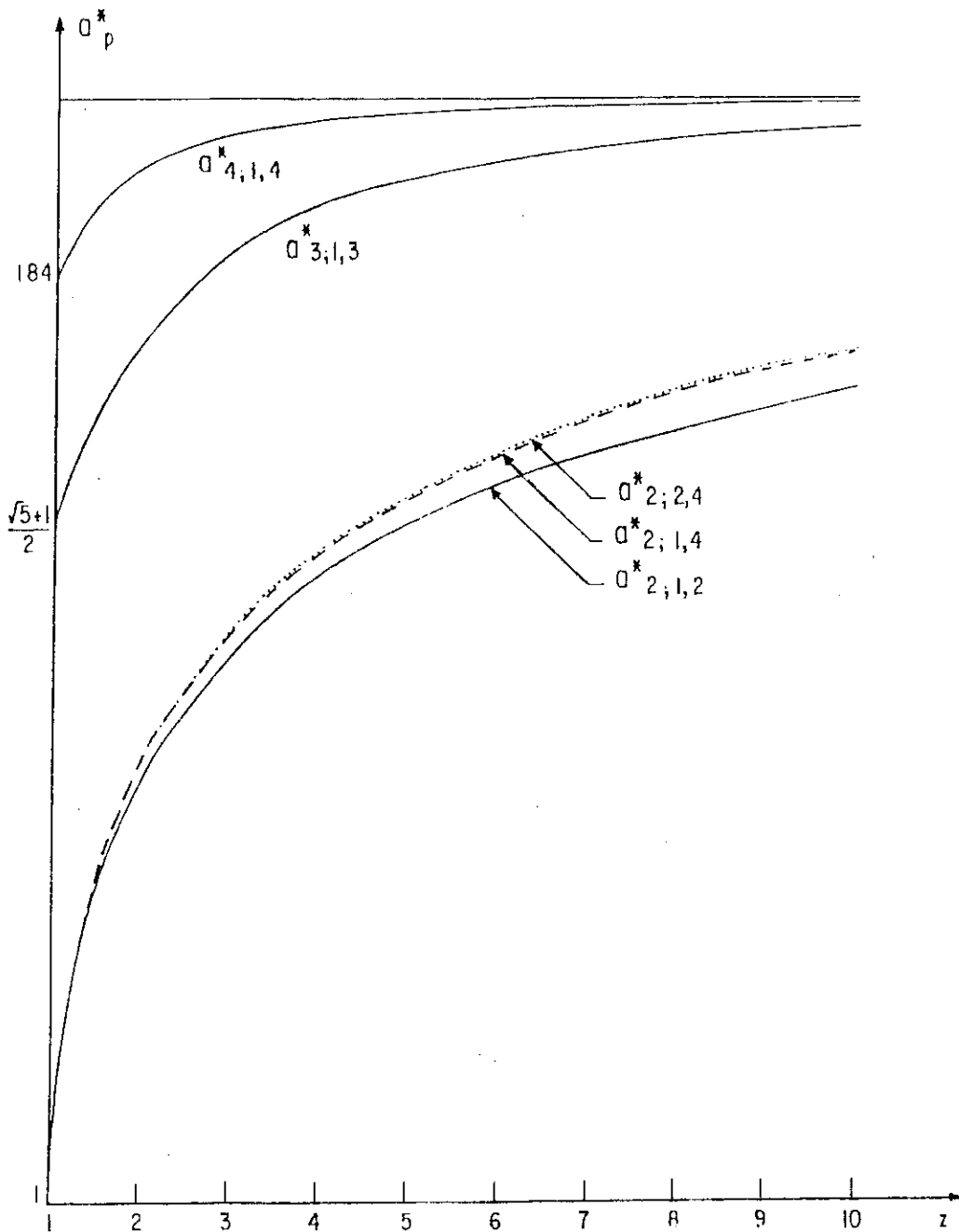


Figura 2.6.1 - As dependências em z dos pontos críticos $a_{p;b^*,b}^*$ das RG associadas as bifurcações ($p=2$), trifurcações ($p=3$) e tetrafurcações ($p=4$). Os resultados numéricos da ref. [34] estão entre as linhas pontilhada e tracejada.

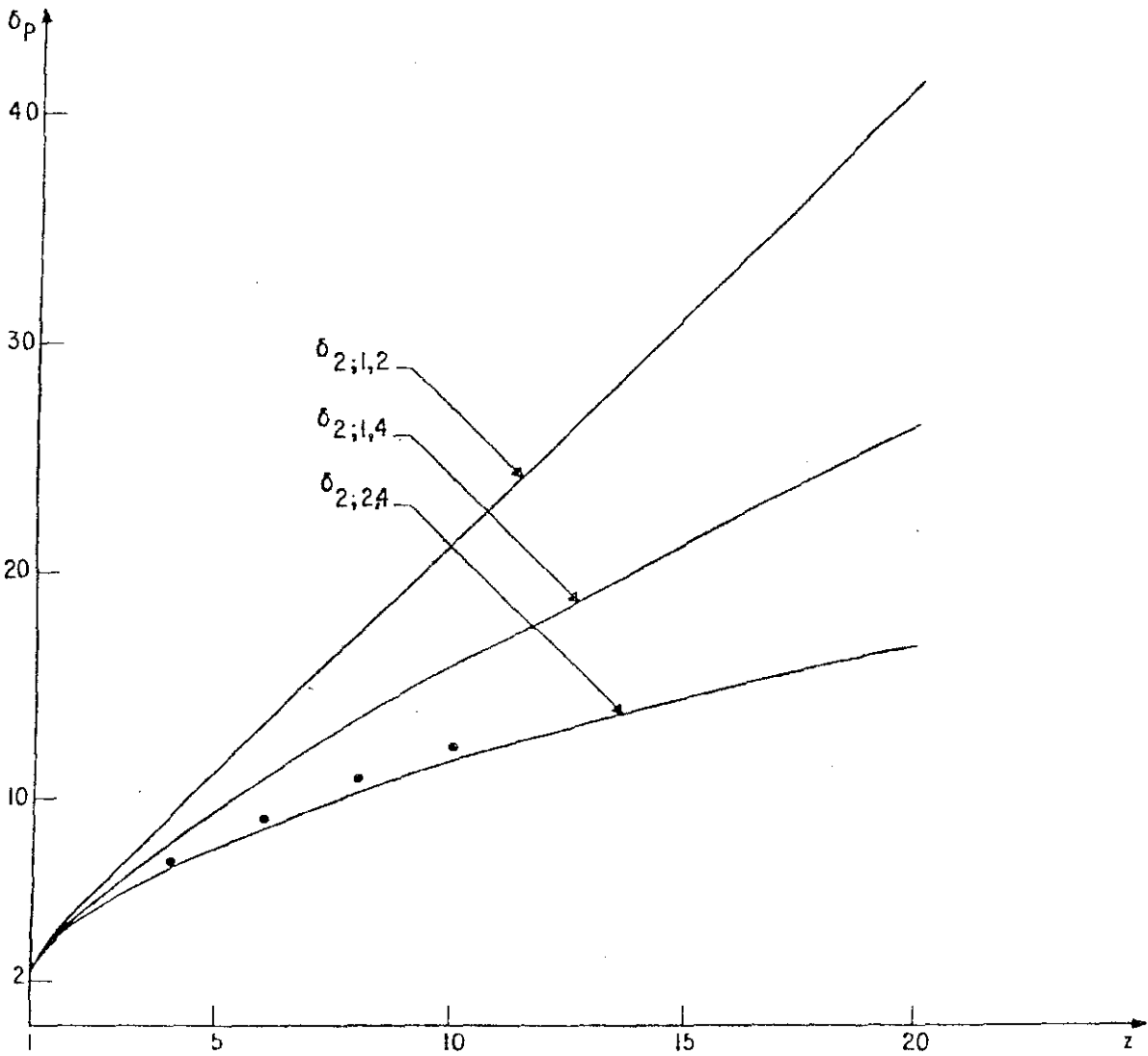


Figura 2.62 - As dependências em z das razões de bifurcações $\delta_{2;b',b}$ das RG, os pontos correspondem a resultados exatos (ref. [35-35]).

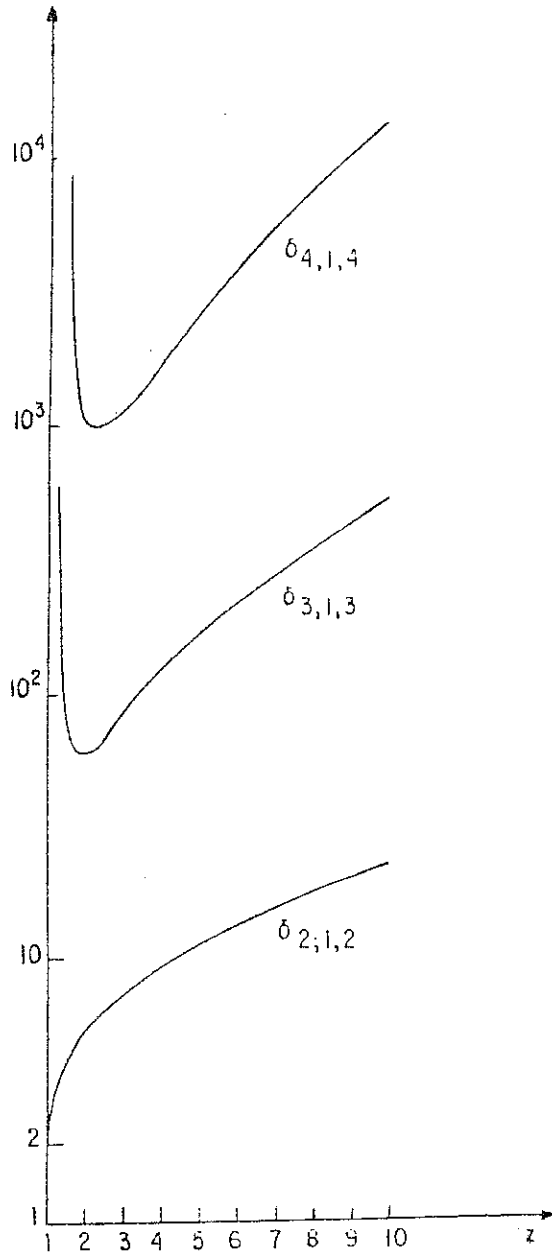


Figura 2.6.3 - As dependências em z das razões de p-furcações $\delta_{p;b',b}$ das RG, $\delta_{3;1,3}$ e $\delta_{4;1,4}$ apresentam um mínimo em $z=1.8$ e 2.3 respectivamente. O ponto indica um resultado exato da ref. [34].

TABELA 2.6.1

Z		p=2			Exact (numerical)	p=3 RG ₁₃ ⁽³⁾	p=4 RG ₁₄ ⁽⁴⁾
		RG ₁₂ ⁽²⁾	RG ₁₄ ⁽²⁾	RG ₂₄ ⁽²⁾			
1	a*	1	1	1	1	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	1.839 29
	δ	2	2	2	2	∞	∞
1.1	a*	1.125 19	1.125 42	1.125 50	1.1236		
	δ	2.846 06	2.838 18	2.830 32	2.857		
1.6	a*	1.315 61	1.320 36	1.321 58		1.730 47	1.916 88
	δ	4.213 60	4.090 24	3.969 30		66.794 6	1841.21
2	a*	1.390 39	1.399 41	1.401 42	1.401 155	1.785 97	1.942 69
	δ	5.123 11	4.864 48	4.614 83	4.669 20	61.617 5	1037.93
3	a*	1.501 81	1.519 40	1.522 50	1.519 30	1.866 56	1.973 41
	δ	7.253 24	6.559 92	5.918 71	5.988 0	85.689 2	1182.48
4	a*	1.569 25	1.592 30	1.595 75		1.907 65	1.985 44
	δ	9.314 26	8.089 56	6.999 48	7.29	123.544	1802.96
5	a*	1.616 63	1.643 04	1.646 52		1.931 70	1.991 11
	δ	11.349 9	9.522 24	7.949 66		170.607	2742.07
6	a*	1.652 52	1.680 93	1.684 32	1.683 26	1.947 13	1.994 14
	δ	13.373 4	10.885 40	8.808 31	9.299 7	226.182	4023.66
7	a*	1.681 00	1.710 56	1.713 79		1.957 68	1.995 92
	δ	15.390 1	12.193 9	9.597 17		290.059	5689.92
8	a*	1.704 33	1.734 49	1.737 55		1.965 25	1.997 04
	δ	17.402 7	13.457 2	10.330 1	10.948	362.150	7787.26
9	a*	1.723 91	1.754 30	1.757 19		1.970 89	1.997 77
	δ	19.412 6	14.682 0	11.016 8		442.412	10 363.5
10	a*	1.740 63	1.771 00	1.773 73	1.772 64	1.975 21	1.998 28
	δ	21.420 6	15.873 3	11.664 3	12.376 2	530.820	13 466.9
20	a*	1.832 86	1.859 15	1.860 78		1.991 77	
	δ	41.462 3	26.520 7	16.779 0		1860.63	
30	a*	1.873 49	1.895 65	1.896 77		1.995 85	
	δ	61.484 3	35.737 6	20.527 1		3997.91	
∞	a*	2(?)	2(?)	2(?)	2	2(?)	2(?)
	δ	∞(?)	∞(?)	∞(?)	?	∞(?)	∞(?)

Os pontos críticos (a*) e as razões de p-furcações para valores típicos de z das RG e resultados numéricos exatos das refs. [34,35].

CAPÍTULO III

CLASSES DE UNIVERSALIDADE DO MAPA DE HÉNON

3.1- INTRODUÇÃO

O mapa de Hénon [5] tem atraído muita atenção nos últimos anos porque apresenta esquemas bidimensionais de bifurcações do tipo Feigenbaum, cadeias de Birkhoff e atratores complexos [5,35,46-49] e por sua aparente relação com situações experimentais [50].

O mapa de Hénon contém casos particulares, como o mapa conservativo bi-dimensional (que preserva a área), bem como no limite extremamente dissipativo, o mapa unidimensional (não inversível) estudado por Feigenbaum [7,8].

Neste capítulo estudaremos, através de grupos de renormalização, as classes de universalidade do mapa [52]

$$T(x,y) = (1 - a|x|^z + y, -bx) \quad (3.1.1)$$

para $z \geq 1$ e $b \geq 0$ ($b > 0$ corresponde ao mapa que preserva a orientação e, por isso em princípio tem mais interesse físico). Os mapas de Hénon e Lozi são obtidos com $z = 2$ e $z = 1$, respectivamente.

O jacobiano associado a (3.1.1) é igual a b . Para $b = 1$ teremos o mapa conservativo bidimensional, $b < 1$ corresponde ao mapa dissipativo e $b > 1$ ao mapa expansivo; $b = 0$ fornece o mapa dissipativo $1 - a|x|^z$ estudado no capítulo II. Analisaremos a dependência da taxa de bifurcações δ dos parâmetros z e b .

3.2- GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

O mapa (3.1.1) apresenta uma estrutura de ciclos cuja estabilidade pode ser analisada pelos auto-valores do jacobiano

$$M_n = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} -z a \operatorname{sign}(x_i^{(n)}) |x_i^{(n)}|^{z-1} & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

onde $x_i^{(n)}$ são as abscissas do ciclo n .

Em analogia ao método da igualdade das derivadas [34] aplicado em mapas unidimensionais, vamos introduzir um método [51] no qual o grupo de renormalização é construído com a preservação do auto-valor de um ciclo n' em relação a do ciclo n .

Vamos, através de um interessante caso particular de (3.1.1), qual seja $z = 2$ e $b = 1$ (mapa de Hénon conservativo), ilustrar o método de construção do grupo de renormalização.

Consideremos, então, o mapa:

$$(x', y') = (1 - ax_1^2 - y, y) \quad (3.2.2)$$

O ponto fixo (ou ciclo $n = 1$) é dado por $(x^*, y^*) = (1 - ax^{*2} - y^*, 0)$ que fornece $x_{(1)}^{(1)} = \frac{1 + \sqrt{1+a}}{a}$, e $y_{(1)}^{(1)} = -x_{(1)}^{(1)}$, e (3.2.1) fica

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2ax_{(1)}^{(1)} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos auto-valores são dados por:

$$\lambda^2 + 2ax_{(1)}^{(1)}\lambda + 1 = 0,$$

ou

$$\lambda^2 + f_1\lambda + 1 = 0, \quad (3.2.3)$$

onde $f_1 \equiv 2ax_{(1)}^{(1)}$. O ciclo $n = 2$ é obtido por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax_2^2 + y_2 \\ -bx_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

e

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax_1^2 + y_1 \\ -bx_1 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

Substituindo as relações (3.2.5) em (3.2.4), obteremos a equação:

$$a^3x^4 - 2a^2x^2 + 8x + a - 4 = 0,$$

que fornece as abscissas do ciclo 2, que são:

$$x_1^{(2)} = \frac{1 - \sqrt{a-3}}{a} \quad e \quad x_2^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{a-3}}{a}.$$

O jacobiano do ciclo $n = 2$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2ax_1^{(1)} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2ax_2^{(1)} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fornece a equação de auto-valores:

$$\lambda^2 + 2(1 - 2a^2x_1x_2)\lambda + 1 = 0$$

ou, definindo $f_2 \equiv 2(1 - 2a^2x_1^{(2)}x_2^{(2)})$:

$$\lambda^2 + f_2\lambda + 1 = 0. \quad (3.2.6)$$

Construiremos o grupo de renormalização igualando os coeficientes de mesma potência das equações de auto-valores do ciclo 1 com os da equação do ciclo 2. No caso (3.2.3) com (3.2.6), que resulta em:

$$f_1(a') = f_2(a), \quad (3.2.7)$$

$$\sqrt{1+a'} - 1 = 2a - 7, \quad (3.2.8)$$

que pode ser escrita da forma:

$$a' = 4a^2 - 24a + 35, \quad (3.2.9)$$

com

$$a^* = \frac{25 + \sqrt{65}}{8} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{da'}{da} = 1 + \sqrt{65}. \quad (3.2.10)$$

Como vimos no caso $z = 2$ e $b = 1$ (3.2.7), não difere

na forma do grupo de um mapa unidimensional tratado no capítulo anterior. Considerando um caso geral de (3.1.1) teremos as seguintes relações recursivas:

$$\begin{aligned} & -za' \operatorname{sign} [x_1^{(1)}(a', b')] |x_1^{(1)}(a', b')|^{z-1} \\ & = z^2 a'^2 \operatorname{sign} [x_1^{(2)}(a, b)x_2^{(2)}(a, b)] \\ & \times |x_1^{(2)}(a, b)x_2^{(2)}(a, b)|^{z-1} - 2b, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$b' = b^2, \quad (3.2.12)$$

onde $x_1^{(1)}$ satisfaz $T(x, y) = (x, y)$ (lembramos que $y_1^{(1)} = -bx_1^{(1)}$ e $x_1^{(2)}$ e $x_2^{(2)}$ são soluções de $T(T(x, y)) = (x, y)$).

3.3- RESULTADOS

Usando as relações recursivas (3.2.11) e (3.2.12) obtivemos, de forma explícita para $z = 2$ e b qualquer

$$a' = 4a^2 - 8(b+1)^2 + 2b^4 + 9b^3 + 13b^2 + 9b + 2. \quad (3.3.1)$$

que, juntamente com $b' = b^2$ apresentam um ponto totalmente instável $(a_c, 1)$ onde $a_c = (25 + \sqrt{85}) / 8 = 4.1328$, o resultado numérico exato [49,51] é 4.1362, bem como dois pontos semi-estáveis $(a_d, 0)$ com $a_d = (7 + \sqrt{17}) / 8 = 1.3904$, cujo valor numérico exato é 1.4014 e (∞, ∞) (ver fig. 3.3.1).

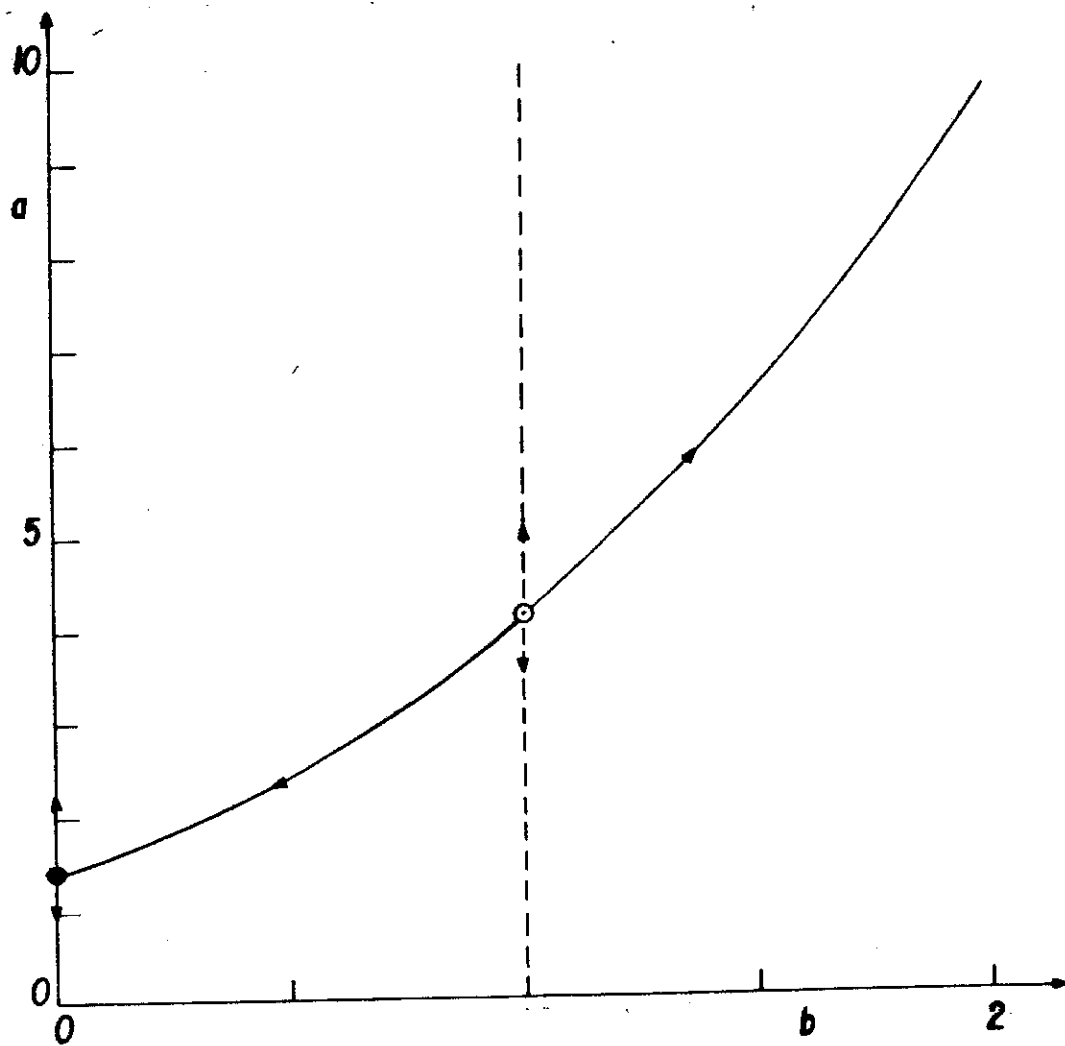


Figura 3.3.1 - Fluxo das RG no espaço dos parâmetros (a, b) corresponde a rota de bifurcações para o caos, do caso $z=2$ (mapa de Hénon). O círculo vazio denota o ponto fixo semi-estável. A linha crítica $a^*(b)$ corresponde as regiões $b < 1$ (dissipativa) e $b > 1$ (expansiva) pertencem a classe de universalidade de Feigenbaum, $b=1$ constitui uma classe diferente de universalidade .

As razões de bifurcações δ calculadas nos pontos fixos são para $b = 1$, $\delta_e = 9.0623$, o valor numérico exato é [49,51] 8.7210, e para $b = 0$, $\delta_d = 5.1231$ (o valor numérico exato é 4.6692). Os comportamentos assintóticos de $a^*(b)$ são:

$$a^* = a_d + \frac{3}{2} b \quad (b \rightarrow 0) \quad (3.3.2)$$

$$a^* = a_c b \quad (b \rightarrow 1) \quad (3.3.3)$$

e

$$a^* = a_d b^2 \quad (b \rightarrow \infty) \quad (3.3.4)$$

Num caso z qualquer, as relações recursivas apresentam uma descrição similar ao caso $z = 2$, e as equações (3.2.2-4) podem ser generalizadas para:

$$a^* = a_d(z) + a'_d(z)b \quad (b \rightarrow \infty) \quad (3.3.5)$$

$$a^* = a_c(z) \left[1 + \frac{1}{2} z (b - 1) \right] \quad (b \rightarrow \infty) \quad (3.3.6)$$

e

$$a^* = a_d(z)b^z \quad (b \rightarrow \infty) \quad (3.3.7)$$

As relações recursivas (3.2.11) e (3.2.12) (RG) fornecem uma descrição da criticalidade do mapa 3.1.1. A equação (3.2.12) ($b' = b^z$ não depende de a e z) apresenta três valores fixos: $b = 0$, $b = 1$ e $b = \infty$. As RG apresentam uma interessante propriedade: são invariantes frente à transformação $(a,b) \rightarrow (a/b^z, 1/b)$, e como consequência, a região $b > 1$ pode ser mapeada na região $b < 1$, sendo que a

linha crítica satisfaz a seguinte propriedade (possivelmente exata):

$$a^*(1/b) = a^*(b)/b^z. \quad (3.3.8)$$

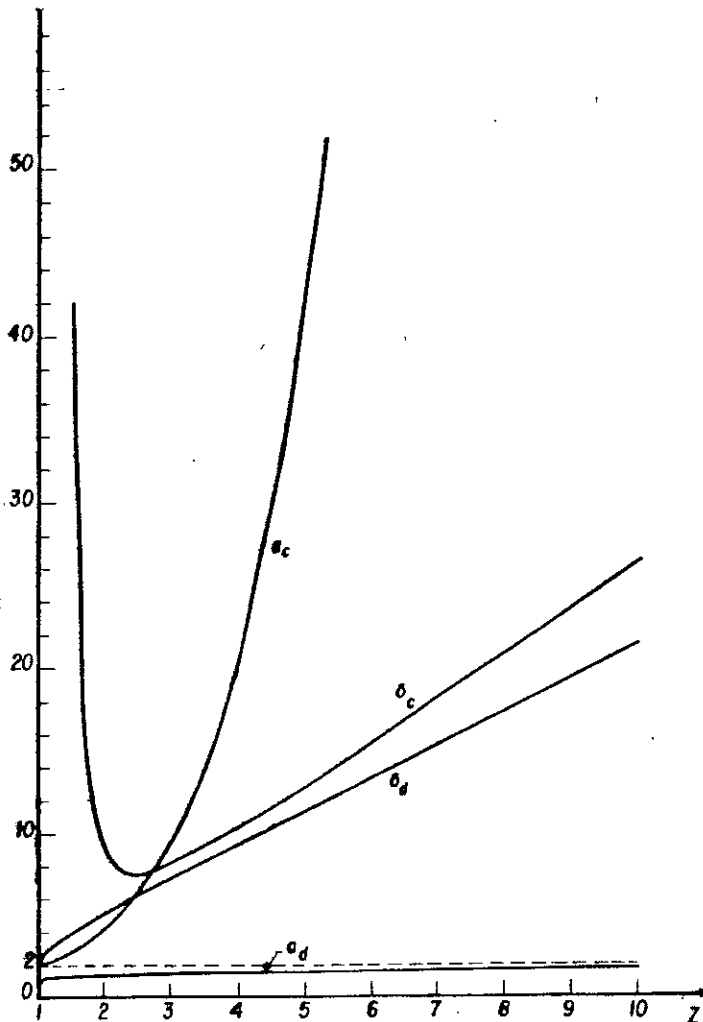


Figura 3.3.2 - A dependência em z , de a_c e a_d , e as correspondentes razões de bifurcações δ_c e δ_d associados com a rota de bifurcações para o caos do mapa de Hénon generalizado, os subscritos c e d referem-se aos casos conservativos $b = 1$ e dissipativo $b = 0$. Os casos a_d e δ_d foram reproduzidos da ref. [41].

Esta propriedade é consistente com (3.3.5-7) e as regiões $b > 1$ (expansiva) e $b < 1$ (dissipativa) pertencem a mesma classe de universalidade. Este quadro nos leva a concluir que ocorre um crossover em $b = 1$. Ou seja, enquanto que o ponto crítico a^* varia suavemente com b , as razões de bifurcações apresentam somente dois valores para um dado z , que são δ_c para $b = 1$ e δ_d para $b \neq 1$.

A fig. 3.3.2 exhibe a dependência com z de a_c , a_d , δ_c e δ_d . Verificamos que, enquanto a_d cresce monotonamente com z , tendendo aparentemente para 2 no limite $z \rightarrow \infty$, a_c cresce rapidamente, apresentando um comportamento aparentemente divergente para este limite. A razão de bifurcações δ_d cresce monotonamente com z , ao contrário de δ_c que apresenta um mínimo perto de $z = 2$.

CAPÍTULO IV

TRANSIÇÕES DE FASE EM REDES HIERÁRQUICAS E UNIVERSALIDADE

4.1- INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, uma grande quantidade de publicações [21-29] tem sido dedicada ao estudo de transições de fase em redes hierárquicas. Este grande interesse se deve ao fato de ser possível, através de processos de dizimação, obter grupos de renormalização exatos em redes hierárquicas, que fornecem expoentes críticos não clássicos.

Apesar da boa descrição qualitativa de fenômenos críticos de modelos magnéticos, como por exemplo, o modelo de Potts em redes hierárquicas, existem diferenças fundamentais entre redes hierárquicas e redes de Bravais. Redes de Bravais são invariantes por translação e homogêneas, enquanto que redes hierárquicas não apresentam tais simetrias.

Aspectos peculiares a redes hierárquicas, como a definição de parâmetros apropriados para o formalismo de grupo de renormalização têm sido tratados em vários trabalhos [22,23], em especial a definição de dimensão, conectividade e comprimento de escala.

Mais recentemente, a questão da universalidade em

redes hierárquicas têm sido discutida [23,27-29]. Neste capítulo, através de diversos exemplos, apresentamos um panorama de como os expoentes críticos do comprimento de correlação ν e uma quantidade $\hat{\nu}_p$ diretamente relacionada com o expoente crítico do calor específico variam em função dos parâmetros de uma rede hierárquica.

4.2- REDES HIERÁRQUICAS DE LIGAÇÕES

Redes hierárquicas são definidas como o limite infinito de um processo de decoração de ligações por uma célula básica. A célula básica tem dois terminais entre os quais a decoração é realizada (ver fig. 4.2.1).

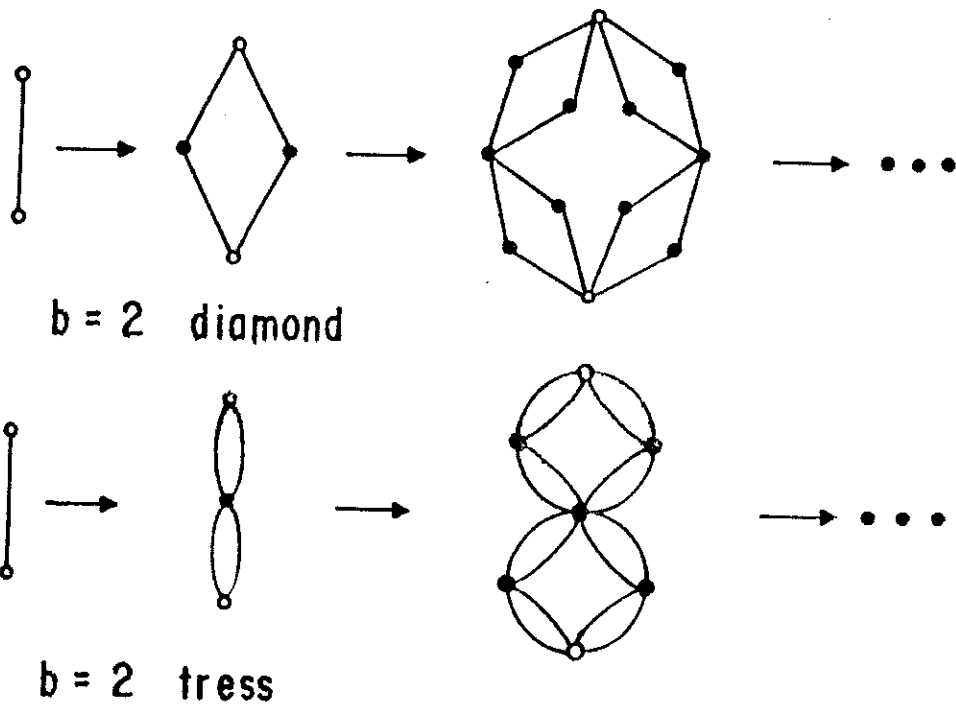


Figura 4.2.1 - Geração de redes hierárquicas diamante e trança (a) corresponde a uma ligação (b) a célula básica .

Redes hierárquicas são, em geral, altamente inhomogêneas e não apresentam invariância translacional, aspectos que contrastam com as redes de Bravais. Kaufman e Griffiths [22] notaram que era necessário definir adequadamente a dimensão e fator de escala em redes hierárquicas para que o comprimento de correlação ficasse bem definido. Esta questão foi tratada por Melrose [23], que introduziu as definições de dimensão intrínseca D , conectividade Q e do parâmetro de escala b .

Estas definições estão ligadas a célula básica (ver fig. 4.2.1(b)). O parâmetro de escala b é definido como o número de ligações associado ao menor caminho entre os dois terminais.

O número de agregação A é definido como o número de ligações da célula básica.

Outra definição conveniente é o corte mínimo C , que é definido como o número mínimo de ligações que é necessário cortar para desconectar um dos terminais.

A dimensão intrínseca e a conectividade são definidas por:

$$D \equiv \frac{\ln A}{\ln b} \quad \text{e} \quad Q \equiv \frac{\ln C}{\ln b} .$$

Em redes regulares $D = d = 1 + Q$ (onde d é a dimensão Euclideana), enquanto que em redes hierárquicas, em geral, $D > 1 + Q$ [61].

4.3- UNIVERSALIDADE EM REDES HIERÁRQUICAS

Expoentes críticos de sistemas magnéticos têm sido amplamente estudados através de modelos como Ising, Potts, Heisenberg, etc., em redes de Bravais. São conhecidos alguns resultados exatos [20,55-58], e muitos resultados com boa precisão (métodos de séries), que permitem testar o importante conceito de universalidade. Em redes de Bravais é aceito como provado, que os expoentes críticos de um sistema magnético dependem apenas da dimensão da rede e da dimensão do spin do modelo considerado, e não dos detalhes geométricos da rede.

Uma questão importante que se coloca em transições de fase em redes hierárquicas é: qual é a dependência dos expoentes críticos com os parâmetros associados com a rede.

Melrose [23,61] estudou o comportamento crítico do modelo de Ising em redes hierárquicas, e observou que redes hierárquicas imersas em uma dimensão Euclideana d exibiam expoentes críticos com dependência nos parâmetros D e Q . Frisou, contudo, que estes parâmetros não eram suficientes para caracterizar estas variações.

Mais recentemente, Hu [27] mostrou, através de um conjunto de contra exemplos de expoentes críticos do modelo de Ising em redes hierárquicas, que redes com o mesmo D e Q apresentavam expoentes distintos, atribuindo erroneamente a Melrose a assertiva: "D e Q servem de critério para a universalidade".

Estudamos o comportamento crítico, de percolação de ligações em redes hierárquicas, em uma série de conjuntos de

redes hierárquicas com parâmetros comuns, para analisar a dependência dos expoentes críticos desta particular classe de universalidade do modelo de Potts, com os parâmetros A, b e C.

4.4- GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO E EXPOENTES CRÍTICOS

Usando o método do corte-colapso [25], obtém-se, para uma determinada rede hierárquica uma relação recursiva da forma (ver Apêndice A):

$$p' = R_b(p) . \quad (4.4.1)$$

Linearizando esta relação em torno do ponto fixo

$$p' = p^* + \lambda (p - p^*) + \dots \quad (4.4.2)$$

(onde $\lambda \equiv \left. \frac{dR_b}{dp} \right|_{p^*}$), e considerando que próximo de p^*

$$\xi \sim (p - p^*)^{-\nu} \quad (4.4.3)$$

juntamente com a relação de escala

$$\xi' = \frac{\xi}{b} , \quad (4.4.4)$$

obteremos:

$$\nu_p = \frac{\ln b}{\ln \lambda} . \quad (4.4.5)$$

A relação de hiperescala [60] relaciona os expoentes ν_p e α

$$2 - \alpha = D\nu_p, \quad (4.4.6)$$

e pode ser rescrita na forma:

$$2 - \alpha = \frac{\ln A}{\ln \lambda} \equiv \hat{\nu}_p. \quad (4.4.7)$$

4.5- RESULTADOS

Usando o método do corte-colapso para efetuar a dizimação sobre as células básicas das figs. 4.5.1 a 4.5.6, obtivemos os resultados apresentados nas tabelas (4.5.1) a (4.5.7).

Os resultados da tabela (4.5.1) referem-se a redes hierárquicas cujas células básicas são do tipo apresentado na fig. 4.5.1(c), denominadas de redes diamante, cuja célula básica é constituída por b ramos em paralelo, cada um com b ligações em série. Este tipo de rede possui $A = b^2$ e $C = b$, portanto, $D = 2$ e $Q = 1$ independentemente de b . Não apresentamos valores de $\hat{\nu}_p$, pois como $A = b^2$, a equação (4.4.7) fornece $\hat{\nu}_p = 2\nu_p$. Verificamos que os expoentes ν_p e $\hat{\nu}_p$ variam suavemente com o conjunto de parâmetros (A, C, b) . Estudos numéricos [24] sugerem que ν_p e, conseqüentemente $\hat{\nu}_p$ divergem no limite $b \rightarrow \infty$.

A tabela (4.5.2) mostra que os expoentes ν_p e $\hat{\nu}_p$ respectivamente da rede diamante com $b = 3$ (ver fig. 4.5.1(a)) e de outra rede com os mesmos parâmetros (ver fig. 4.5.1(b))

são diferentes.

Nas tabelas (4.5.3), (4.5.4) e (4.5.5) listamos valores de p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$, de várias redes com os parâmetros $\langle A = 8, C = 12, b = 3 \rangle$, $\langle A = 12, C = 2, b = 4 \rangle$ e $\langle A = 13, C = 3$ e $b = 3 \rangle$ respectivamente. Podemos verificar que para um conjunto de redes com os mesmos parâmetros $\langle A, C$ e $b \rangle$ e, portanto, mesmos D e Q , que os expoentes críticos dependem de aspectos topológicos da rede.

Na tabela (4.5.6) apresentamos os valores de p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ das redes cuja célula básica é mostrada nas figs. 4.5.5(a) que possui os parâmetros $\langle A = 6, C = 3, b = 2 \rangle$ com $D = \frac{\ln 6}{\ln 2}$ e $Q = \frac{\ln 3}{\ln 2}$ e fig. 4.5.5(b) com os parâmetros $\langle A = 6, C = 2, b = 3 \rangle$ com $D = \frac{\ln 6}{\ln 3}$ e $Q = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Estas redes possuem parâmetros D e Q diferentes. Contudo, possuem o mesmo A e λ , apresentando valores diferentes de ν_p e iguais de $\hat{\nu}_p$.

Os valores de p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ das redes diamante (ver fig. 4.5.6(a)) e trança (ver fig. 4.5.6(b)), ambas com $A = 4$, $b = 2$, $c = 2$ e $D = 2$ e $Q = 1$ são apresentados na tabela (4.5.7). Verifica-se que λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ são iguais para as duas redes.

Hu [27] obteve resultados semelhantes aos da tabela (4.5.6) para o modelo de Ising e, da Silva e Tsallis [24] verificaram para o modelo de Potts, que redes diamante e trança com o mesmo A , b e C possuem o mesmo expoente ν .

Estes resultados não são, portanto, casos singulares e como mostraremos no capítulo V, são consequência de transformações que conectam as redes hierárquicas e estabelecem relações entre seus expoentes críticos.

TABELA 4.5.1

	p^*	λ	ν_p
$b = 2$	0.618033988	1.527864	1.63528
$b = 10$	0.835079043	3.900287	1.69177
$b = 10^2$	0.966583901	11.95177	1.85626
$b = 10^4$	0.999277045	52.34204	2.32714
$b = 10^6$	0.999988617	129.5826	2.84017
$b = 10^8$	0.999999843	245.52	3.34716

Valores típicos de redes diamantes (fig. 4.5.1(c)).
Estudos numéricos [ref. 24] sugerem que $\nu_p \rightarrow \infty$ no limite $b \rightarrow \infty$

TABELA 4.5.2

Figura	p^*	λ	ν_p	$\hat{\nu}_p$
4.5.1(a)	0.6823278	1.95081	1.644028	3.28808
4.5.1(b)	0.5	1.94539	1.65090	3.30180

Redes hierárquicas com $A = 9$, $b = 3$ e $C = 3$.

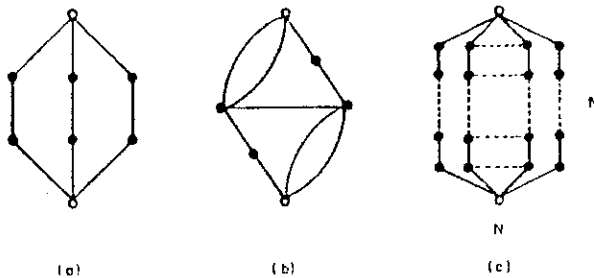


Figura 4.5.1 - Redes hierárquicas, todas com mesmo $D = 2$ e $Q = 1$, (a) e (b) possuem o mesmo A , b e C .

TABELA 4.5.3

Figura	p^*	λ	ν_p	$\hat{\nu}_p$
4.4.2(a)	0.696096	1.82312	1.82934	3.46255
4.5.2(b)	0.62881	1.85557	1.77714	3.36375
4.5.2(c)	0.78797	1.77929	1.90661	3.60881

Os valores de p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes hierárquicas com $A = 8, C = 2$ e $b = 3$.

TABELA 4.5.4

Figura	p^*	λ	ν_p	$\hat{\nu}_p$
4.5.3(a)	0.70830	2.01626	1.97690	3.54355
4.5.3(b)	0.62881	1.85557	1.77714	3.36375

Os valores de p^* , λ , ν_p e $\hat{\nu}_p$ de redes hierárquicas com $A = 12, C = 2$ e $b = 4$.

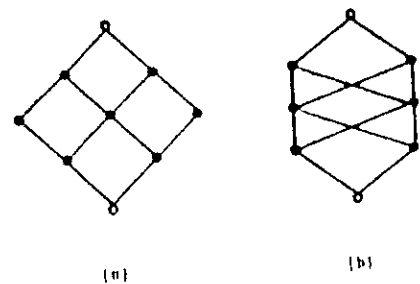
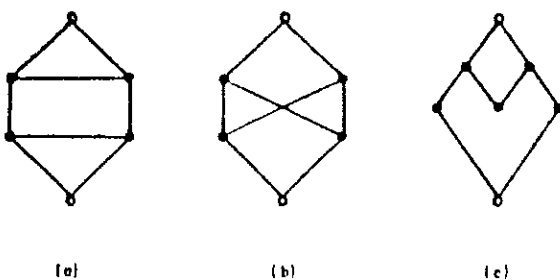


Fig.4.5.2- Redes hierárquicas com $A = 8, C = 2$ e $b = 3$.

Fig. 4.5.3- Redes hierárquicas com $A = 12, C = 2$ e $b = 4$.

TABELA 4.5.5

Figura	p^*	λ	ν_P	$\hat{\nu}_P$
4.5.4(a)	0.5	2.1729	1.37967	3.22113
4.5.4(b)	0.43662	2.19170	1.40008	3.26879
4.5.4(c)	0.62979	2.15091	1.43442	3.34900
4.5.4(d)	0.53893	2.15911	1.42733	3.33241

Os valores de p^* , λ , ν_P e $\hat{\nu}_P$ de redes hierárquicas com $A = 13, C = 3$ e $b = 3$.

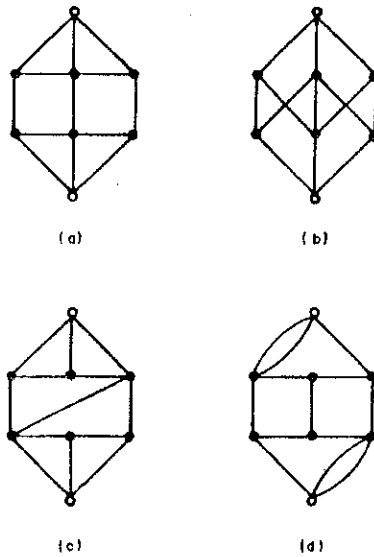


Figura 4.5.4 - Redes hierárquicas com $A = 13, C = 3$ e $b = 3$.

TABELA 4.5.6

Figura	p^*	λ	ν_P	$\hat{\nu}_P$
4.5.5(a)	0.38939068	1.6815602	1.333688	3.4475339
4.5.5(b)	0.8483749	1.6815602	2.113846	3.4475339

Os valores de p^* , λ , ν_P e $\hat{\nu}_P$ de redes hierárquicas com $A = 6, C = 3$ e $b = 2$ e $A = 6, C = 2$ e $b = 3$.

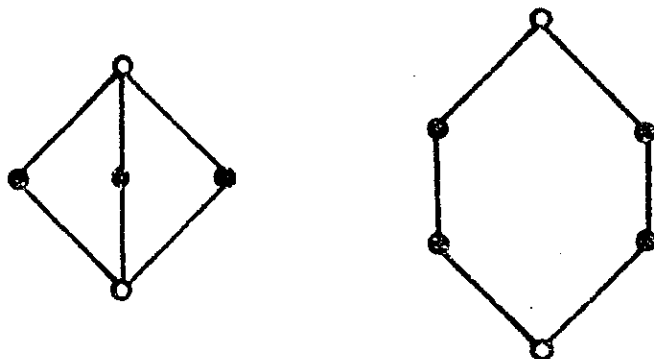


Figura 4.5.6 - Redes hierárquicas com $A = 6, C = 3$ e $b = 2$, $A = 6, C = 2$ e $b = 3$ respectivamente.

TABELA 4.5.7

Figura	p^*	λ	ν_p	$\hat{\nu}_p$
4.5.6(a)	$\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$	$(\sqrt{5}-1)^2$	$\frac{\ln 2}{2 \ln(\sqrt{5}-1)}$	$\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{5}-1)}$
4.5.6(b)	$\frac{(3-\sqrt{5})}{2}$	$(\sqrt{5}-1)^2$	$\frac{\ln 2}{2 \ln(\sqrt{5}-1)}$	$\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{5}-1)}$

Redes diamante e trança com $A = 4$, $C = 2$ e $b = 2$.

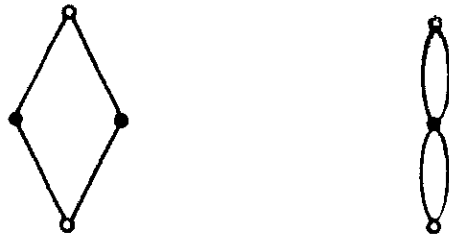


Figura 4.5.7 - Redes hierárquicas diamante e trança com $A = 4$, $C = 2$ e $b = 2$.

CAPÍTULO V

TRANSFORMAÇÕES E EXPOENTES CRÍTICOS DO FERROMAGNETO DE POTTS EM REDES HIERÁRQUICAS PLANARES

5.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo, mostraremos que os resultados apresentados nas tabelas 4.1.6 e 4.1.7, bem como os encontrados por Hu [27] e, da Silva e Tsallis [24] são consequência de transformações que conectam redes hierárquicas e que estabelecem relações entre os expoentes críticos destas redes.

Provaremos que a transformação de dualidade [25,61] do ferromagneto de Potts em redes hierárquicas planares preserva o auto-valor λ . Isto estabelece uma relação entre os expoentes críticos ν das redes conectadas pela transformação de dualidade. Usando a relação de hiperescala, podemos mostrar que os expoentes críticos do calor específico de uma rede hierárquica e o de sua dual coincidem.

Uma outra transformação [29,62] restrita a uma classe menor de redes hierárquicas, as redes diamantes e tranças generalizadas (ver fig. 5.1.1), transformam uma rede diamante generalizada em trança generalizada e vice-versa (que doravante, chamaremos abreviadamente de rede diamante e trança,

respectivamente).

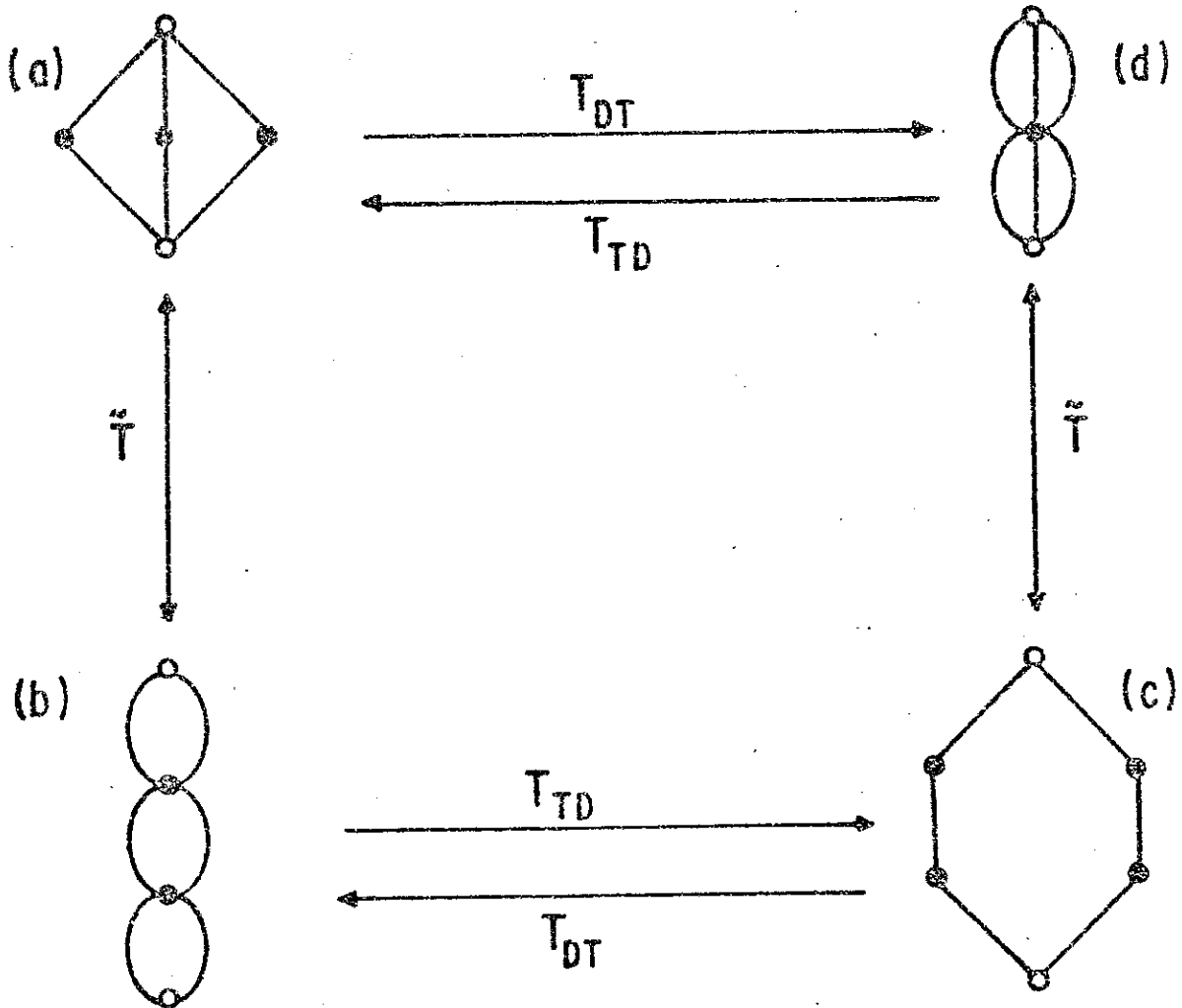


Figura 5.1.1- Nas figuras 5.1.1(a,c) e 5.1.1(b,d) mostramos respectivamente, células básicas de redes diamante e trança conectadas pelas transformações \tilde{T} , T_{DT} e T_{TD} . Círculos vazios representam os terminais e círculos cheios os sítios internos.

Provaremos que a transformação diamante-trança T_{DT} ou, a transformação trança-diamante T_{TD} preservam os expoentes ν e α .

5.2- TRANSFORMAÇÕES DE DUALIDADE

Consideremos o modelo de Potts em uma rede hierárquica planar. O Hamiltoniano é dado por:

$$\mathcal{H} = -q J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \quad \sigma_i = 0, 1, 2, \dots, q-1 .$$

onde a soma é sobre os sítios primeiros vizinhos e δ é a delta de Kronecker. As variáveis σ estão sobre os sítios da rede hierárquica e a constante de acoplamento J está associada as ligações que conectam os sítios.

Usaremos uma variável adequada, a transmissividade térmica,

$$t \equiv \left[1 - \exp \left(- \frac{qJ}{k_B T} \right) \right] / \left[1 + (q-1) \exp \left(- \frac{qJ}{k_B T} \right) \right] \quad (5.2.1)$$

associada a cada ligação da rede hierárquica [25].

A transmissividade dual τ [25] é definida por:

$$\tau \equiv \frac{1-t}{1+(q-1)t} . \quad (5.2.2)$$

A dizimação dos sítios internos da célula básica de comprimento b , e número de agregação A , fornece uma relação da forma:

$$t' = G(t) \quad (5.2.3)$$

onde $G(t)$ é a razão entre dois polinômios de t (ver Apêndice A).

O auto-valor térmico da rede hierárquica é dado por:

$$\lambda \equiv \left. \frac{dG(t)}{dt} \right|_{t^*} \quad (5.2.4)$$

onde t^* é o ponto fixo de (5.1.3), ou seja, $t^* = G(t^*)$.

Considerando que em redes hierárquicas planares de dois terminais, a relação recursiva associada a uma célula básica está relacionada com a relação recursiva de sua dual pela equação [26]:

$$G(t) = \frac{1 - \tilde{G}(\tau)}{1 + (q-1)\tilde{G}(\tau)} \quad (5.2.5)$$

e podemos provar a seguinte propriedade:

Propriedade 1. - O auto valor térmico de uma rede hierárquica planar e o de sua dual coincidem.

A prova é imediata. Tomemos a derivada da equação (5.1.5) em relação a t e usando a regra da cadeia no lado direito (lembrando que τ é conectado com t pela equação (5.1.2)) e, finalmente efetuando as derivadas no ponto fixo t^* .

E, considerando que $\tau^* = \tau(t^*)$ e $G(t^*) = t^*$, verificamos que:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \tilde{G}} \right|_{\tilde{G} = \tau^*} = \left[\left. \frac{d\tau}{dt} \right|_{t^*} \right]^{-1} \quad (5.2.8)$$

o que leva a igualdade entre os auto-valores térmicos das redes

associadas a G e sua dual \tilde{G} , ou seja,

$$\lambda = \tilde{\lambda} , \quad (5.2.7)$$

onde λ é dado por (5.2.4) e

$$\tilde{\lambda} = \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau} \right] \Big|_{\tau^*} \quad (5.2.8)$$

Colorário 1: Seja b o comprimento de uma célula básica de uma rede hierárquica, e \tilde{b} o comprimento correspondente de sua rede dual, a equação (5.2.7) pode ser escrita como:

$$b^{1/\nu} = \tilde{b}^{1/\tilde{\nu}} , \quad (5.2.9)$$

onde ν e $\tilde{\nu}$ são, respectivamente, os expoentes críticos do comprimento de correlação da rede hierárquica e de sua dual respectivamente. Usando a definição de dimensão intrínseca, e o fato de que a transformação de dualidade preserva o número de agregação, podemos ainda rescrever (5.2.9) como:

$$D\nu = \tilde{D}\tilde{\nu} . \quad (5.2.10)$$

Corolário 2: Usando a relação de hiperescala para redes hierárquicas [60], $D\nu = 2 - \alpha$, teremos como consequência imediata:

$$\alpha = \tilde{\alpha} . \quad (5.2.11)$$

Mostrando, desta maneira, que o expoente crítico do calor

específico de uma rede hierárquica planar e o de sua rede dual são iguais. É importante notar que as relações entre os expoentes críticos dados pelas equações (5.2.10) e (5.2.11) são válidas para qualquer rede hierárquica planar. No caso particular de $b = \tilde{b}$, então teremos também $\nu = \tilde{\nu}$.

5.3- TRANSFORMAÇÕES ENTRE REDES DIAMANTES E TRANÇAS

Consideremos uma classe restrita de redes planares divididas em duas sub-classes, as redes diamantes generalizadas e as tranças generalizadas. A célula básica de uma rede diamante é constituída por n ramos em paralelo, cada um com b ligações em série.

A célula básica de uma rede trança é constituída de b sub-células em série, onde cada uma tem N ligações em paralelo. Por exemplo, as células básicas da figura (5.1.1a) e em (5.1.1c) geram redes diamantes com $b=2$, $N=3$ e $b=3$, $N=2$ respectivamente, enquanto que as das figuras (5.1.1b) e (5.1.1d) geram redes tranças com $b=3$, $N=2$ e $b=2$, $N=3$, respectivamente.

As expressões G_D (G_T) de diamante e trança, respectivamente, das redes hierárquicas com b e N quaisquer, são dadas por:

$$G_D(t, b, N) = \frac{1 - \langle (1-t)^b \rangle / [1 + (q-1)t^b]^N}{1 + (q-1) \langle (1-t)^b \rangle / [1 + (q-1)t^b]^N}, \quad (5.3.1)$$

$$G_T(t, b, N) = \left[\frac{1 - \langle (1-t) \rangle / [1 + (q-1)t]^N}{1 + (q-1) \langle (1-t) \rangle / [1 + (q-1)t]^N} \right]^b \quad (5.3.2)$$

Pelas equações (5.2.1) e (5.2.2), podemos verificar que existe uma relação entre G_D e G_T dada por

$$G_T(w, b, N) = [G_D(t, b, N)]^b, \quad (5.3.3)$$

onde $w = t^b$. Desse modo, redes diamante e trança podem ser conectadas por duas transformações: a diamante-trança T_{DT} dada por

$$T_{DT} : G_D(t, b, N) \rightarrow [G_D(t, b, N)]^b = G_T(t^b, b, N), \quad (5.3.4)$$

e sua inversa

$$T_{TD} : G_T(t, b, N) \rightarrow [G_T(t, b, N)]^{1/b} = G_D(t^{1/b}, b, N), \quad (5.3.5)$$

onde as igualdades (5.3.4) e (5.3.5) são consequência de (5.3.3). Transformações T_{DT} e T_{TD} equivalentes a estas, foram propostas por Ottavi e Albinet [62].

Propriedade 2 - Redes hierárquicas diamante e trança com os mesmos b e N possuem o mesmo expoente crítico de Potts do comprimento de correlação ν .

A prova é obtida facilmente. A equação (5.3.3) derivada em relação e efetuada em t^* , juntamente com $w^* = w(t^*) = t^*$, fornece $\lambda_T = \lambda_D$.

Como b é o mesmo para as rede diamante e trança, conectadas por T_{DT} , isto implica que $\nu_T = \nu_D$.

Corolário: Como, as redes diamante e trança conectadas por T_{DT} ou T_{TD} têm o mesmo b e o mesmo número de

agregação A, terão as mesmas dimensões intrínsecas. Através das relações de hiperescala, segue-se que seus expoentes críticos do calor específico são iguais: $\alpha_T = \alpha_D$.

É importante observar que, se $b \neq N$ ($D \neq 2$), então a rede trança não é a dual da diamante e, no caso particular $b = N$ ($D = 2$), a transformação T_{DT} é a própria transformação de dualidade. Além disso, $w(t) = \tau(t)$ o que fornece a equação do ponto crítico $t^{*b+1} + t^{*b} + t^* - 1 = 0$, que no limite $b \rightarrow 1$ se reduz a $t^{*2} + 2t^* - 1 = 0$, cuja solução é $t^* = 1/(1 + \sqrt{q})$ que é a temperatura crítica do modelo de Potts em redes auto-duais. Portanto, no limite $b \rightarrow 1$, redes diamante e trança tornam-se auto-duais.

Redes diamante e trança podem ser conectadas por transformações definidas pelas equações (5.3.5) e (5.3.3), respectivamente a de dualidade \tilde{T} e a diamante-trança T_D (ver fig. 5.1.1).

As redes hierárquicas planares conectadas por \tilde{T} possuem o mesmo α , e seus expoentes críticos do comprimento de correlação estão relacionados por $D\nu = \tilde{D}\tilde{\nu}$.

As redes hierárquicas conectadas por T_{DT} (T_{TD}) possuem o mesmo ν e α .

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos a criticalidade de sistemas dinâmicos não-lineares, modelados por mapas de baixa dimensionalidade e a criticalidade do modelo de Potts em redes hierárquicas, através de métodos de grupo de renormalização.

A linguagem de grupo de renormalização permite, portanto, analisar a criticalidade e as classes de universalidade em uma larga variedade de sistemas, de uma maneira simples, fornecendo resultados aproximados e descrição qualitativa muito útil para o entendimento destes sistemas.

Na primeira parte deste trabalho apresentamos um estudo detalhado da criticalidade do mapa dissipativo unidimensional $1 - a|x|^z$. Usamos uma metodologia de grupos de renormalização que permite a obtenção dos pontos críticos a^* e das razões de p -furcações para as seqüências 2^k ($p = 2$ bifurcações), 3^k ($p = 3$ trifurcações) e 4^k ($p = 4$ tetrafurcações) para qualquer z real ($z \geq 1$). Os resultados obtidos podem ser resumidos da seguinte maneira:

(i) Confirmamos numericamente que para $p = 2, 3, 4$ o formalismo do grupo de renormalização (RG) reproduz o comportamento assintótico exato no limite $z \rightarrow 1$, o que poderá

ser verdadeiro para todos os valores de p , de todas as seqüências existentes de p , para um determinado p , independente dos valores de b' e b dos ciclos usados para a construção do RG.

(ii) Os pontos críticos $a_p^*(z)$ crescem monotonicamente de $a_p^*(1)$ ($1 \leq a_p^*(z) \leq 2$) a 2 quando z cresce de 1 a ∞ , e satisfaz $a_2^*(z) < a_3^*(z) < a_4^*(z)$ ao longo da mesma variação de z . As taxas de bifurcações $\delta(z)$ aumentam monotonicamente, enquanto que as taxas $\delta_3(z)$ e $\delta_4(z)$ [e possivelmente todas as taxas $\delta_p(z) \forall p > 2$] apresentam um mínimo na vizinhança de $z = 2$. E $\delta_2(z) < \delta_3(z) < \delta_4(z) \forall z \geq 1$.

(iii) Os resultados obtidos na aproximação de RG para $z \gg 1$ não nos permite uma análise conclusiva do limite $z \rightarrow \infty$. Para $p = 2$ alguns autores [43-45] sugerem que $\lim_{z \rightarrow \infty} \delta_2(z) \leq 30$ enquanto outros [7,40-42] sugerem que $\lim_{z \rightarrow \infty} \delta_2(z) = \infty$.

(iv) O quadro geral descrito pelas RG sugere que para z fixo $\delta_p(z)$ cresce exponencialmente com p no limite de $p \rightarrow \infty$, se isto ocorrer então o expoente crítico do comprimento do ciclo $\nu_p(z)$ se anula no limite $p \rightarrow \infty$.

(v) A tabela (2.8.1) mostra resultados de $a_p^*(z)$ e $\delta_p(z)$ comparados com alguns resultados exatos conhecidos na literatura. Estes resultados sugerem, em princípio, que os valores exatos do ponto crítico $a^*(z)$ e das razões das

p-furcações $\delta_p^*(z)$ serão obtidos no limite:

$$a_p^*(z) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ b' < b}} a_{p,b',b}^*$$

e

$$\delta_p^*(z) = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ b' < b}} \delta_{p,b',b}^* .$$

Hu [64] mostrou que para $p = 2$ e $z = 2$, esta convergência é realizada.

Estudamos também o mapa de Hénon generalizado $(x', y') = T(x, y) = (1 - a|x|^z + y, -bx)$ que contem como caso particular o mapa $1 - a|x|^z$ para $b = 0$. Com um formalismo adequado de grupo de renormalização, discutimos $a^*(b)$ e δ associados as bifurcações deste mapa, encontrando os seguintes resultados:

(i) Para um z fixo, as relações recursivas dos RG apresentam apenas duas classes de universalidade, a dos sistemas conservativos ($b = 1$) e não conservativos ($b \neq 1$).

(ii) As RG, equações (3.2.11-12) são invariantes sob a seguinte transformação $(a, b) \rightarrow (a/b^z, 1/b)$, o que implica que a região $b > 1$ pode ser mapeada sobre $b < 1$. A região expansiva $b > 1$ e a dissipativa $b < 1$ pertencem a mesma classe de universalidade. O presente quadro implica que um crossover ocorre em $b = 1$. O que quer dizer que, enquanto a^* varia suavemente com b , as razões de bifurcações apresentam somente os valores δ_c ($b = 1$) e δ_d ($b \neq 1$) (para z fixo).

(iii) Os resultados numéricos estão em concordância com os obtidos por Derrida et al. [34,51], Bountis [49], Zisook [53], Cvitanovic [14] e Collet et al. [48], mas estão em desacordo com Hu [54] que sugere de δ varia suavemente com b .

(iv) A dependência em z das razões de bifurcações $\delta(z)$ (rota dissipativa) e $\delta_c(z)$ (rota conservativa) apresenta comportamentos bem diferentes. Enquanto que $\delta_d(z)$ cresce monotonicamente com z , $\delta_c(z)$ apresenta um mínimo próximo de $z = 2$, e diverge em $z = 1$, e possivelmente em $z \rightarrow \infty$ parecendo-se assim com o comportamento [41] das taxas de p -furcações ($p > 2$) das rotas não conservativas.

Na segunda parte deste trabalho estudamos a criticalidade do ferromagneto de Potts em redes hierárquicas, através de grupos de renormalização. Mais especificamente analisamos a questão da universalidade em redes hierárquicas.

Estudamos a dependência dos expoentes críticos do comprimento de correlação e do calor específico, dos parâmetros A (número de agregação), b (fator de escala) e C (corte mínimo) das redes hierárquicas. Verificamos que os expoentes críticos ν (do comprimento de correlação) e α (do calor específico) dependem, em geral, do conjunto de parâmetros A , b e C , bem como de aspectos topológicos das redes hierárquicas, contrastando deste modo com as redes de Bravais.

Através de exemplos verificamos a existência de relações entre expoentes de redes com aspectos topológicos diferenciados. Mostramos que estas relações são consequência

das transformações que conectam estas redes. Provamos que redes planares conectadas pela transformação de dualidade possuem o mesmo auto valor térmico λ , o que estabelece uma relação entre seus expoentes do comprimento de correlação a saber: $D\nu = \tilde{D}\tilde{\nu}$, onde D é a dimensão intrínseca da rede e \tilde{D} a de sua dual, e ν e $\tilde{\nu}$ são os respectivos expoentes críticos do comprimento de correlação, e seus expoentes críticos do calor específico são iguais.

Para uma classe especial de redes, as redes diamante e trança, provamos que a transformação T_{DT} (T_{TD}) que conecta as redes diamante e trança, estabelece a igualdade entre os expoentes ν e dos expoentes α de ambas as redes.

Uma extensão natural deste trabalho seria um estudo de a_p^* e δ_p , para $p > 5$, do mapa $1 - a|x|^z$, bem como para z grande, verificar a convergência do método das $RG_{b',b}^{(2)}$, para b' e b pertencentes a ciclos grandes, a fim de esclarecer a controvérsia existente na literatura, a respeito do comportamento de δ_2 no limite $z \rightarrow \infty$. Podemos também estender o método de igualdade das derivadas para mapas do tipo $1 - a|x|^{z_1} - b|x|^{z_2}$, para estudar sua criticalidade e existência de crossover no espaço dos parâmetros a e b .

Outro problema interessante é o estudo das transformações de dualidade e diamante-trança para o modelo cúbico em redes hierárquicas planares, bem como estudar a criticalidade de redes diamantes e tranças com $b = N$ (mesmo número de ligações em série que em paralelo) no limite $b \rightarrow 1$.

APÊNDICE A

MÉTODO CORTE-COLAPSO

A transmissividade do modelo de Potts é dada pela equação

$$t_q^{(1)} = \frac{1 - \exp \left[\frac{-qJ}{k_B T} \right]}{1 + (q-1) \exp \left[\frac{-qJ}{k_B T} \right]} \quad (A1)$$

que se reduz à transmissividade de Ising,

$$t_i = \frac{1 - \exp \left[\frac{-2J}{k_B T} \right]}{1 + (q-1) \exp \left[\frac{-2J}{k_B T} \right]} \quad (A2)$$

se $q = 2$. O arranjo de duas ligações em série, cada uma delas com uma transmissividade $t_q^{(i)}$ $i = 1, 2$ (ver fig. A1a) apresenta, como transmissividade equivalente total $t_q^{(s)}$, obtida após se fazer o traço parcial sobre os q estados do spin central (S_q), a expressão

$$t_q^{(s)} = t_q^{(1)} \cdot t_q^{(2)} \quad (A3)$$

A transmissividade equivalente para duas ligações em paralelo ($t_q^{(p)}$) (ver fig. A1b) é dada pela expressão

$$\left[t_q^{(p)} \right]^D = \left[t_q^{(1)} \right]^D \cdot \left[t_q^{(2)} \right]^D \quad (A4)$$

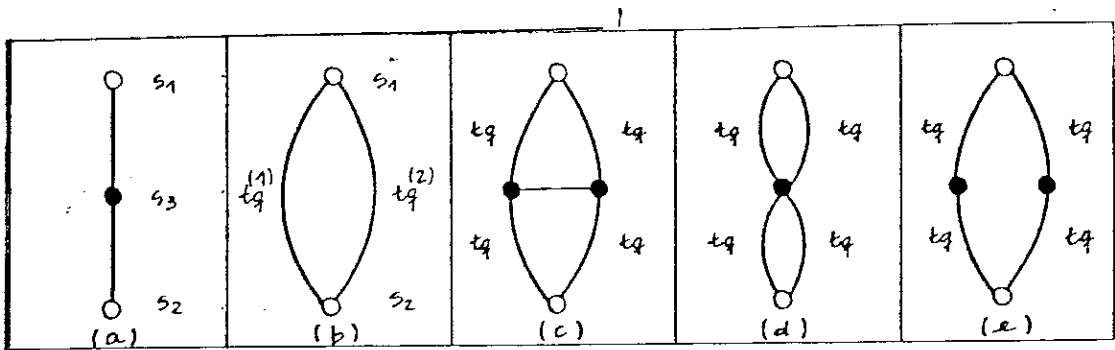


Figura A1 - Grafos de dois terminais. Os círculos cheios (vazios) representam os sítios internos (externos) do grafo

onde

$$t_q^D = \frac{1 - t_q}{1 + (q - 1) t_q} \quad (A5)$$

é a variável dual da transmissividade [25], a qual mapeia a região de alta em baixa temperatura do modelo de Potts bidimensional. O método corte-colapso [25] calcula a transmissividade equivalente [que chamamos de $G\langle t_q^{(i)} \rangle$] de qualquer grafo com dois terminais, sejam eles redutíveis ou não a arranjos em série-paralelo. Vamos supor, no caso geral, um grafo de dois terminais com transmissividades $t_q^{(i)}$. Então $G\langle t_q^{(i)} \rangle = N\langle t_q^{(i)} \rangle / D\langle t_q^{(i)} \rangle$, onde o numerador N e o

denominador D são, ambos, funções multilineares dos $\langle t_q^{(i)} \rangle$ e a cortamos (colapsamos), isto é, assumimos $t_q^{(j)} = 0$ ($t_q^{(j)} = 1$). Temos então novas transmissividades equivalentes, $G_j^{(0)}$ ($G_j^{(1)}$), que são dadas por

$$G_j^{(0)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle = N_j^{(0)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle / D_j^{(0)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle \quad (A6)$$

$$[G_j^{(1)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle = N_j^{(1)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle / D_j^{(1)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle] \quad (A7)$$

onde o conjunto $\langle t_q^{(i)} \rangle'$ exclue $t_q^{(j)}$. A multilinearidade de N e D implica que

$$N \langle \langle t_q^{(i)} \rangle \rangle = (1 - t_q^{(j)}) N_j^{(0)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle + t_q^{(j)} N_j^{(1)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle \quad (A8)$$

e

$$D \langle \langle t_q^{(i)} \rangle \rangle = (1 - t_q^{(j)}) D_j^{(0)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle + t_q^{(j)} D_j^{(1)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle \quad (A9)$$

A utilização exaustiva das eqs. (A8) e (A9) constitui o que é chamado método corte-colapso. Se a ligação a ser cortada (colapsada) apresenta, ela própria, denominador diferente de 1, então as equações acima se alteram, fornecendo, por exemplo para o numerador [onde assumimos que $t_q^{(j)} = N^{(j)} / D^{(j)}$], a expressão:

$$N \langle \langle t_q^{(i)} \rangle \rangle = (D^{(j)} - N^{(j)}) N_j^{(0)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle + N^{(j)} N_j^{(1)} \langle \langle t_q^{(i)} \rangle' \rangle \quad (A10)$$

havendo uma expressão similar para o denominador. Obviamente, se $q = 2$, os resultados obtidos se referem ao modelo de Ising. Os traços parciais sobre os sítios internos dos grafos são

realizados automaticamente. Como exemplo vamos calcular a transmissividade equivalente do grafo mostrado na fig. (A1c). Os grafos colapsado e cortado estão mostrados nas figs. (A1d e A1e), respectivamente, onde temos atuado sobre a ligação central da fig. (A1c). Obtemos

$$G^{(0)}(t_q) = \frac{N^{(0)}(t_q)}{D^{(0)}(t_q)} = \frac{2t_q^2 + (q-2)t_q^4}{1 + (q-1)t_q^4} \quad (A11)$$

e

$$G^{(1)}(t_q) = \frac{N^{(1)}(t_q)}{D^{(1)}(t_q)} = \frac{4t_q^2 + 4(q-2)t_q^3 + (q-2)^2 t_q^4}{1 + 2(q-1)t_q^2 + (q-1)^2 t_q^4} \quad (A12)$$

Portanto,

$$G(t_q) = \frac{2t_q^2 + 2t_q^3 + 5(q-2)t_q^4 + (q-2)(q-3)t_q^5}{1 + 2(q-1)t_q^3 + (q-1)t_q^4 + (q-1)(q-2)t_q^5} \quad (A13)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. N. LORENZ - "Deterministic Nonperiodic Flow". J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963).
- [2] D. RUELLE & F. TAKENS - "On the Nature of Turbulance". Commun. Math. Phys. 20, 167 (1971).
- [3] T. LI & J. YORKE - "Period Three Implies Chaos". Amer. Math. Monthly 82, 985 (1975).
- [4] R. MAY - "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics". Nature 261, 459 (1976).
- [5] M. HENON - "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor", Commun. Math. Phys. 50, 69 (1976).
- [6] M. METROPOLIS, M. L. STEIN & P. R. STEIN - "On Finite Limit Sets for Transformations on the Unit Interval". J. Combinatorial Theory 15, 25 (1973).
- [7] M. FEIGENBAUM - "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations". J. Stat. Phys. 19, 25 (1978).
- [8] M. FEIGENBAUM - "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations". J. Stat. Phys. 21, 669 (1979).
- [9] S. GROSSMAN & S. THOMAE - "Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes". Z. Naturforsch 32, 1353 (1977).
- [10] P. COULLET & C. TRESSER - "Iterations D'Endomorphismes et Groupe de Renormalisation". J. Phys. (Paris) Coll. 39, C5 (1978).
- [11] H. L. SWINNEY - "Observations of Order and Chaos in Nonlinear Systems". Physica D7, 3 (1983).
- [12] G. A. HELD, CARSON JEFFRIES & E. E. HALLER - "Observation

- of Chaotic Behavior in a Electron-Hole Plasma in Ge". Phys. Rev. Lett. 52, 1037 (1984).
- [13] T. KLINKER, W. MEYER-ILSE & W. LAUTERBORN - "Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Toda Oscillator". Phys. Lett. 101A, 371 (1984).
- [14] P. CVITANOVIC - "Universality in Chaos (or, Feigenbaum for Cyclists)". Act. Phys. Pol. 65A, 203 (1984).
- [15] VARIOS AUTORES - "Phase Transition and Critical Phenomena". Ed. C. Domb e M. S. Green (Academic Press, London, New York), vol. 1-6 (1972).
- [16] H. E. STANLEY - "Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena". Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [17] W. LENZ - "Beitrag zum Verständnis der Magnetischen Erscheinungen in Festen Körpern". Physik Z. 21, 613 (1920).
- [18] S. G. BRUSH - "History of the Lenz-Ising Model". Rev. of Mod. Phys. 39, 883 (1967).
- [19] E. ISING - "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus". Naturwissenschaften 13, 253 (1925).
- [20] L. ONSAGER - "Cristal Statistics I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition". Phys. Rev. B65, 117 (1944).
- [21] A. N. BERKER & S. OSTLUND - "Renormalisation - group calculations on finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering". J. Phys. C12, 4961 (1979).
- [22] M. KAUFMAN & R. B. GRIFFITHS - "Exactly Soluble Ising Models on Hierarchical Lattices". Phys. Rev. B24, 496 (1981).
- [23] J. R. MELROSE - "Hierarchical Lattices: Some Examples with a Comparision of Intrinsic Dimension and Connectivity and Ising Model Exponents". J. Phys. A16, 3077 (1983).
- [24] L. R. DA SILVA & C. TSALLIS - "Criticality of the Potts Ferromagnet in Migdal-Kadanoff-like Hierarchical

- Lattices". J. Phys. A20, 6013 (1987).
- [25] C. TSALLIS & S. V. F. LEVI - "Simple Method to Calculate Percolation, Ising and Potts Clusters: Renormalization Group Applications". Phys. Rev. Lett. 47, 950 (1981).
- [26] C. TSALLIS - "Pure and Random Potts-like Models: Real-Space Renormalization-Group Approach". Phys. Rep. (a ser publicado).
- [27] B. HU - "Problem of Universality in Phase Transition on Hierarchical Lattices". Phys. Rev. Lett. 55, 2316 (1985).
- [28] P. R. HAUSER & V. K. SAXENA - "Geometrical Phase Transitions on Hierarchical Lattices and Universality". Phys. Rev. B34, 8193 (1986).
- [29] P. R. HAUSER & E. M. F. CURADO - "Potts Ferromagnet: Transformations and Critical Exponents in Planar Hierarchical Lattices". J. Stat. Phys. 52, 503 (1988).
- [30] H. BAI-LIN. ed., "Chaos". Uma seleção de reprints (World Scientific, 1983).
- [31] P. COULLET & J. P. ECKMANN - "Iterated Maps on an Interval as Dynamical Systems", (Birkhäuser, Boston) (1980).
- [32] B. DERRIDA, A. GERVOIS & Y. POMEAU - "Iteration of Endomorphisms on the Real Axis and Representations of Numbers". Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 29, 305 (1978).
- [33] B. DERRIDA - "Propriétés Universelles de Certains Systèmes Discrets dans le Temps". J. Phys. (Paris), Coll. 5, 49 (1978).
- [34] B. DERRIDA, A. GERVOIS & Y. POMEAU - "Universal Properties of Bifurcations of Endomorphisms". J. Phys. A12, 269 (1979).
- [35] B. HU - "Introduction to Real-Space Renormalization-Group Methods". Phys. Rep. 91, 233 (1982).
- [36] K. TAKEYAMA & K. SATOH - "A Finite-Order Splitting-Merging Bifurcation of Bands in Iterated Maps of an Interval with a Cusp Maximum". Phys. Lett. 98A, 313 (1983).

- [37] Y. KURAMOTO & S. KOGA - "Anomalous Period Doubling Bifurcation Leading to Chemical Turbulence". Phys. Lett. 92A, 1 (1982).
- [38] B. HU & J. M. MAO - "Period Doubling: Universality and Critical Point Order". Phys. Rev. A25, 3529 (1982).
- [39] B. HU & I. I. SATHIJA - "A Spectrum of Universality Classes in Period Doubling and Period Tripling". Phys. Lett. 98A, 143 (1983).
- [40] A. MO & P. C. HEMMER - "Iterative Properties of Nonquadratic One-Dimensional Maps". Physica Scr. 29, 296 (1984).
- [41] P. R. HAUSER, C. TSALLIS & E. M. F. CURADO - "Criticality of the Routes to Chaos of the $1 - a|x|^z$ Map". Phys. Rev. A30, 2074 (1984).
- [42] J. K. BHATTACHARJEE & K. BANERJEE - "The One-Dimensional Map $1 - Cx^{2\mu}$ in the Large μ Limit". J. Phys. A20, L269 (1987).
- [43] J. P. ECKMANN & P. WITTWER - "Computer Methods and Borel Summability Applied to Feigenbaum's Equation". Lecture Notes in Physics, vol. 227 (Springer, Berlin) 1985.
- [44] J. P. VAN DER WEELE, H. W. CAPEL & R. KLUIVING - "On the Scaling Factors $\alpha(z)$ and $\delta(z)$ ". Phys. Lett. 189A, 15 (1986).
- [45] J. P. VAN DER WEELE, H. W. CAPEL & R. KLUIVING - "Period Doubling in Maps with a Maximum of Order z ". Physica 145A, 424 (1987).
- [46] P. COULLET & C. TRESSER - "Transition to Turbulence for Doubly Periodic Flows". Phys. Lett. 77A, 327 (1980).
- [47] P. COULLET, J. P. ECKMANN & H. KOCH - "On Universality for Area-Preserving Map of the Plane". Physica 3D, 457 (1981).
- [48] P. COULLET, J. P. ECKMANN & H. KOCH - "Period Doubling for Families of Maps on \mathbb{R}^n ". J. Stat. Phys. 25, 1 (1981).
- [49] T. C. BOUNTIS - "Period Doubling Bifurcations and

- Universality in Conservative Systems". *Physica* 3D, 577 (1985).
- [50] A. ARNOEDO, P. COULLET, C. TRESSER, A. LICHABER, J. MAURER & D. d'HUMIERES - "About the Observations of the Uncompleted Cascade in Raleigh-Benard Experiment". *Physica* 6D, 385 (1983).
- [51] B. DERRIDA & Y. POMEAU - "Feigenbaum's Ratios of Two-Dimensional Area Preserving Maps". *Phys. Lett.* 80A, 217 (1980).
- [52] P. R. HAUSER, E. M. F. CURADO & C. TSALLIS - "On the Universality Classes of the Hénon Map". *Phys. Lett.* 108A, 308 (1985).
- [53] A. B. ZISSOK - "Universal Effects of Dissipation in the Two-Dimensional Mappings". *Phys. Rev.* A24, 1640 (1981).
- [54] B. HU - "Dissipative Bifurcation Ratio in the Area-non-preserving". *J. Phys.* A14, L243 (1981).
- [55] R. J. BAXTER - "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics". Academic Press, London (1982).
- [56] F. Y. WU - "The Potts Model". *Rev. Mod. Phys.* 54, 235 (1982).
- [57] R. B. POTTS - "Some Generalized Order-Disorder Transformation". *Proc. Camb. Phil. Soc.* 48, 106 (1952).
- [58] M. P. M. DEN NIJS - "A Relation Between the Temperature Exponents of the Eight-Vertex and q-state Potts Model". *J. Phys.* A12, 1857 (1979).
- [59] J. R. MELROSE - "The Midgal-Kadanoff Approximation: Optimisation, Generalisation, Ising Model in External Fields and the Midgal-Kadanoff Hierarchies". *J. Phys.* A16, 1041 (1983).
- [60] C. TSALLIS - "On the Hierarchical Lattices Approximation of Bravais Lattices: Specific Heat and Correlation Length". *J. Phys.* C18, 6581 (1985).
- [61] J. R. MELROSE - "Duality on Planar Fractal and

Hierarchical Lattices". J. Phys. A16, L407 (1983).

[62] H. OTTAVI & G. ALBINET - "Mapping Between Hierarchical Lattices by Renormalization and Duality". J. Phys. A20, 2961 (1987).

[63] C. ITZYKSON & J. M. LUCK - "Zeroes of the Partition Function for Statistical Models on Regular and Hierarchical Lattices". Proc. Brasov Int. Summer School on Critical Phenomena: Theoretical Aspects (Progress in Physics 11, Birkhäuser, Boston) (1985).

[64] R. SAVIT - "Duality in Field Theory and Statistical Systems". Rev. Mod. Phys. 52, 453 (1980).

[65] B. HU & J. M. MAO - "The Eigenvalue-Matching Renormalization-Group". Phys. Lett. 108A, 305 (1985).

“UNIVERSALIDADE EM MAPAS DE BAIXA DIMENSIONALIDADE E
REDES HIERÁRQUICAS: UMA ABORDAGEM UNIFICADA POR
GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO”

PAULO ROBERTO HAUSER

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Constantino Tsallis - Presidente

Carlos Seihiti Orù Yokoi

Paulo Murilo Oliveira

Evaldo Mendonça Fleury Curado

Juan Alberto Mignaco

Rio de Janeiro, 16 de janeiro de 1990