

José Luiz Matheus Valle

A SUPERSIMETRIA COMO UMA POSSIVEL ORIGEM PARA
MODELOS DE GAUGE ESTENDIDOS

Tese de
MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO
1989

A meus pais

Agradecimentos

Durante o desenvolvimento do trabalho que resultou nesta tese, tive a felicidade de trabalhar com várias pessoas, a quem agradeço profundamente: R. M. Doria e J. A. Helayél-Neto, pela proposta dos temas e pelo muito que me ensinaram; S. A. Dias e M. A. Cattacini Kneipp, com quem tive a oportunidade de trabalhar durante o desenvolvimento do que é apresentado, respectivamente, nos capítulos 2 e 3 desta tese; e vários outros colegas, a quem peço desculpas por não citá-los nominalmente aqui.

RESUMO

O ponto central desta tese consiste na análise de como a supersimetria pode interferir nos graus-de-liberdade de uma simetria de gauge local e, conseqüentemente, como permite uma possível extensão do princípio de gauge. É feita, inicialmente, uma breve revisão da formulação de superespaço para a supersimetria (1,0) em duas dimensões. Contemplando-se o caso de teorias de gauge, mostramos que, mediante o relaxamento do chamado vínculo convencional, emerge naturalmente um modelo de gauge estendido, caracterizado pela presença de dois potenciais vetoriais transformando-se sob um único grupo de simetria. Finalmente, as etapas fundamentais do programa de renormalização deste modelo estendido são estabelecidas e discutidas.

SUMÁRIO

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Sumário	v
Introdução	1
1 - Introdução a Supersimetria	6
1.1 - O Grupo de Lorentz	6
1.2 - A Supersimetria $N=1/2 - D=2$	15
1.2.a - O formalismo de Campos Componentes	15
1.2.b - O formalismo de Supercampos	17
1.3 - Equações de movimento e simetrias	24
2 - Covariantização de Gauge da Supersimetria $N=1/2 - D=2$	27
2.1 - O processo de covariantização	27
2.2 - O caso standard	31
2.2.a - A ação para o caso standard	31
2.2.b - Equações de movimento	35
2.2.c - Correntes de Noether	37
2.3 - A ação natural	41
2.3.a - Propriedades do campo B_-	42
2.3.b - Equações de movimento	49
2.3.c - Correntes de Noether	50
2.4 - Supersimetria e o Modelo de Gauge Estendido	51
3 - Aspectos gerais sobre a renormalizabilidade do Modelo de Gauge Estendido	52
3.1 - Idéias gerais sobre o Modelo de Gauge Estendido	52
3.2 - Contagem de potências para campos físicos	56
3.2.a - Descrição do problema	56
3.2.b - Propagadores	60
3.2.c - Vértices e a expressão para δ	60
3.2.d - Relações topológicas	62
3.2.e - δ para o Modelo de Gauge Estendido	63
3.3 - Gráficos primitivamente divergentes	65
3.4 - Identidades de Ward	67

3.4.a - As identidades de Ward para a Eletrodinâmica	67
3.4.b - As identidades de Ward para o Modelo de Gauge Estendido: Campos Construtores	70
3.4.c - AS identidades de Ward para o Modelo de Gauge Estendido: Campos Físicos	73
Conclusão	80
Referências	86

INTRODUÇÃO

Poucos conceitos têm sido tão fundamentais no desenvolvimento da Física deste século como a noção de simetria. O seu advento no âmbito das teorias físicas permite-nos classificar as partículas fundamentais como representações irredutíveis, não-unitárias, dos grupos de simetrias do espaço-tempo, e criar modelos de como elas interagem, via simetrias internas. Os números quânticos, que são a essência da interpretação de partícula, aparecem naturalmente pela utilização deste conceito: massa e spin podem ser entendidos como números associados a invariâncias perante transformações de coordenadas no espaço-tempo, enquanto carga elétrica e cor, por exemplo, aparecem quando impomos a invariância da ação perante um tipo especial de simetrias internas, as chamadas simetrias de gauge [1].

Simetrias globais do tipo espaço-tempo surgem quando impomos a invariância das leis da Física perante transformações entre observadores sem aceleração relativa e considerando a constância da velocidade da luz. Como nos outros casos, podemos tratar este problema como invariância perante um grupo de Lie, cujos geradores serão as cargas conservadas da simetria em questão. Para simetrias do espaço-tempo, o grupo é o chamado Grupo de Poincaré [2], e as cargas conservadas são a energia

(translação no tempo), momentum (translação no espaço), momentum angular (rotações espaciais) e mais tres grandezas sem significado físico, associadas aos boosts de Lorentz.

Simetrias internas são associadas a transformações que não atuam sobre as coordenadas espaço-temporais. A mais usual é aquela que envolve uma transformação de fase: se escolhermos os campos de uma teoria como complexos, o fato de que a ação tem que ser real implica na invariância desta perante uma transformação de fase dos campos. No caso Abelian (grupo $SO(2) \sim U(1)$), a quantidade conservada que temos é a carga elétrica, e a natureza complexa dos campos nos conduz à interpretação de partícula e antipartícula. Quando a simetria interna em questão é tomada local (ou seja, os parâmetros da transformação são funções das coordenadas espaço-temporais), podemos formular o que se chama teoria de gauge, e a simetria local pode ser interpretada como uma forma de interação entre as partículas, sendo a força mediada por um bóson vetorial de gauge [1].

É interessante notar, porém, que este procedimento classifica as partículas fundamentais em dois blocos distintos: num deles, temos as partículas de spin semi-inteiro, os férmions, que são os constituintes básicos da matéria; no outro, temos as partículas de spin inteiro, os já mencionados bósons, que estão diretamente ligados às simetrias de gauge. Alguns destes bósons aparecem como os próprios mediadores da interação, enquanto que outros como partículas escalares carregadas que induzem o mecanismo da quebra espontânea da simetria. A este ponto, aparece naturalmente uma das motivações para se

introduzir a idéia da supersimetria [3], que permite, exatamente, eliminar esta distinção: num modelo supersimétrico, a cada partícula é associado um ou mais parceiros supersimétricos, e cada multiplete é constituído por partículas com spins diferentes tendo o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Outra maneira de colocar a questão é que a transformação de supersimetria envolve transformações tanto internas quanto de natureza espaço-temporais. Estas características peculiares da supersimetria vêm do (ou implicam no) fato de que seus geradores são operadores de caráter spinorial, cuja álgebra fecha por anti-comutação. Por questões ligadas à unitariedade das representações, sempre buscamos geradores de simetrias que sejam hermitianos, e na supersimetria isto significa que seus geradores devam ser spinores de Majorana (spinores com carga nula, que sempre podem ser tomados como objetos reais numa certa representação). A maior parte destes pontos será discutida em detalhes no primeiro capítulo, onde construiremos um específico modelo supersimétrico.

Embora extremamente bem sucedido, o conceito de simetria não foi, ainda, capaz de resolver um dos mais fascinantes problemas da física teórica deste século: tornar consistentes entre si as teorias quântica e da gravitação. Mesmo os mais recentes desenvolvimentos, como as teorias de cordas [4], não tiveram, até o momento, absoluto sucesso nesta tentativa. Talvez seja necessário um reestudo do que o conceito de simetria oferece para a construção de uma teoria física, ou talvez sejamos obrigados a abandoná-lo como pedra fundamental na

construção de teorias que busquem a unificação das interações. Mudanças tão dramáticas na física só acontecem, porém, quando, por resultados experimentais ou por inconsistências teóricas, a formulação original se mostra irremediavelmente perdida.

Este trabalho é baseado na primeira opção, e procuraremos entender como é possível estender o conceito de simetria. Nossa escolha, para tentarmos compreender como isto pode ser possível, far-se-á através de um estudo da supersimetria. É um fato bem conhecido que modelos supersimétricos apresentam sempre um grande número de graus de liberdade, sendo, usualmente, necessário impormos uma série de vínculos para se obter os graus de liberdade que nos interessem em cada situação [5]. Por exemplo, quando vamos conciliar supersimetria e teorias de gauge, o número de graus de liberdade que surgem para os campos vetoriais é maior que o necessário para acomodarmos o fóton.

O procedimento utilizado para se construir teorias de gauge supersimétricas consiste na sistemática standard para se covariantizar teorias mediante o acoplamento mínimo. Começamos com uma ação escrita em termos dos supercampos de matéria complexos, e impomos a invariância da ação perante o grupo $U(1)$ local. As derivadas espaço-temporais e covariante de supersimetria não serão covariantes de gauge e, então, ao definirmos estas novas derivadas, surgirão os supercampos de gauge. Os supercampos intensidade de campo são definidos, como é usual, como os (anti-)comutadores das derivadas covariantes de gauge, e as Identidades de Bianchi nos impõem relações entre eles. É neste estágio que podemos observar o que foi mencionado

anteriormente: o número de graus de liberdade vetoriais é maior que o necessário para acomodarmos o fóton, e novos vínculos se fazem necessários. O vínculo que usualmente se impõe é o chamado vínculo convencional [6], o qual consiste, essencialmente, em anular as intensidades de campo definidas nas relações de anticomutação das derivadas covariantes de supersimetria de gauge. Este trabalho pretende mostrar que, se relaxarmos este vínculo, os novos graus de liberdade que surgirão poderão ter uma boa interpretação física, tendo números quânticos fisicamente aceitáveis. Para comparação, tanto o caso com o vínculo convencional quanto o caso com o vínculo relaxado serão tratados. Isto será feito no segundo capítulo deste trabalho.

No terceiro capítulo deste trabalho, faremos uma discussão sobre a renormalizabilidade do Modelo de Gauge Estendido. Esta análise faz-se necessária devido ao fato de que as várias maneiras pelas quais se mostra ser possível a introdução de mais de um potencial de gauge no mesmo grupo (como a discussão apresentada no segundo capítulo) são apresentadas a nível clássico. É, portanto, fundamental, observar se a teoria mantém-se consistente após o processo de quantização. Um dos aspectos mais fundamentais a serem analisados refere-se à renormalizabilidade da teoria, ou seja, à possibilidade de tornarmos a teoria calculável, obtendo-se de um modo sistemático resultados finitos no cálculo de grandezas físicas como, por exemplo, secções-de-choque para o espalhamento de partículas presentes no espectro da teoria.

CAPITULO I

INTRODUCAO A SUPERSIMETRIA

Neste capítulo, devemos rever alguns fatos essenciais de grupos do tipo $SO(1, D-1)$, dando ênfase especial às representações spinoriais de $SO(1, 1)$. Esta discussão é uma etapa necessária para se estabelecer o conceito das supersimetrias do tipo $N=1/2$, que podem ser definidas em duas e dez dimensões espaço-temporais[7].

Discutiremos, a seguir, os detalhes relevantes à formulação de teorias de campo bidimensionais baseadas na presença de uma supersimetria $N=1/2$, as quais desempenham um papel central na formulação das teorias das supercordas heteróticas [8], e que serão a base para as discussões que faremos a seguir.

1.1 - O GRUPO DE LORENTZ

Nesta seção, vamos fazer um breve estudo do Grupo de Lorentz [2] e suas representações irredutíveis finito-dimensionais (não-unitárias). Nosso objetivo maior é mostrar que, em (1+1) dimensões, podemos definir os chamados spinores de Majorana-Weyl, que serão os objetos básicos em nossa

formulação da supersimetria $N=1/2 - D=2$.

Consideremos o espaço de Minkowski D-dimensional, com métrica $\text{diag}(-1,1,\dots,1)$. Neste espaço, o Grupo de Lorentz é definido como sendo o conjunto de transformações

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega) x^{\nu} \quad (1.1)$$

sob as quais o elemento de linha

$$ds^2 \equiv dx^{\mu} \eta_{\mu\nu} dx^{\nu} \quad (1.2)$$

permanece invariante. O Grupo de Lorentz é, então, o grupo de rotações no espaço de Minkowski, e ω denota os parâmetros da transformação. Para que (1.2) seja invariante, os elementos Λ^{μ}_{ν} devem obedecer à relação:

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} \quad (1.3)$$

do que segue imediatamente que:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad (1.4)$$

$$|\Lambda^0_0| \geq 1$$

A combinação destas duas propriedades nos permite individualizar no Grupo de Lorentz a presença de quatro setores desconexos. O setor $\det \Lambda = 1$ e $\Lambda^0_0 \geq 1$ é chamado Grupo de Lorentz Restrito, e este é o único setor onde as transformações finitas podem ser construídas a partir de transformações infinitesimais (na verdade, os outros setores sequer têm as propriedades de grupo; é a união do setor acima com qualquer outro setor que não pode ser vista como um grupo cujos elementos são gerados por

transformações infinitesimais). A partir de agora, sempre que nos referirmos ao Grupo de Lorentz, estaremos nos referindo ao setor restrito.

A partir da equação, (1.2) é possível mostrar que o número de parâmetros caracterizando as transformações é dado por $D(D-1)/2$, o que nos possibilita escrever uma transformação integrada do grupo como:

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}\right) \quad (1.5)$$

com $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e $\Sigma_{\mu\nu}$ denotando os geradores do grupo.

Se consideramos uma transformação infinitesimal, tanto em

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\omega) x^{\nu} \quad (1.1)$$

quanto em

$$x'^{\mu} = \exp\left[\frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}\right]^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.6)$$

obtemos a relação:

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right]^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Esta nos fixa as matrizes $(D \times D)$ que representam os geradores $\Sigma_{\alpha\beta}$ na chamada representação vetorial:

$$\left(\Sigma_{\alpha\beta} \right)^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\alpha} \eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}_{\beta} \eta_{\alpha\nu} \quad (1.8)$$

onde μ é o índice de linha, ν o de coluna e o par $(\alpha\beta)$ indica o particular gerador a que nos referimos. De posse desta específica representação matricial para os geradores,

verificamos que estes obedecem à seguinte relação de comutação:

$$\left[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\alpha\beta} \right] = \eta_{\mu\alpha} \Sigma_{\beta\nu} + \eta_{\nu\beta} \Sigma_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\beta} \Sigma_{\nu\alpha} + \eta_{\nu\alpha} \Sigma_{\mu\beta} \quad (1.9)$$

Este comutador nos define a Álgebra de Lie do Grupo de Lorentz, e é fundamental no sentido de que qualquer conjunto de matrizes que a satisfaça fornece uma representação do grupo (mas não necessariamente inequivalente a outras representações de mesma dimensionalidade). As matrizes $\Sigma_{\mu\nu}$ dadas por (1.8) formam a representação vetorial (ou de coordenadas) do Grupo de Lorentz.

O que fizemos até este ponto aplica-se a um número arbitrário de dimensões. Vamos agora, explicitar $\Sigma_{\mu\nu}$ para o caso $D=2$. Aqui, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1)$ e existe apenas um parâmetro de transformação $\omega_{01} \equiv \omega$, com correspondente gerador $\Sigma_{01} \equiv \Sigma$. De (1.8), segue que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Então, a transformação que um vetor sofre é:

$$x' = \begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega \\ \sinh \omega & \cosh \omega \end{pmatrix} x \quad (1.11)$$

Se definirmos

$$\beta \equiv \text{tgh} \omega \quad (1.12)$$

e

$$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (1.13)$$

teremos:

$$\begin{aligned} (x^0)' &= \gamma(x^0 + \beta x^1) \\ (x^1)' &= \gamma(x^1 + \beta x^0) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Com a identificação $\beta = v/c$, esta é transformação de Lorentz que

liga dois observadores com velocidade relativa v na direção x .

Especialmente no caso de duas dimensões, é interessante mudarmos o sistema de coordenadas de (x^0, x^1) para (x^+, x^-) , com

$$x^{\pm} = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}} \quad (1.15)$$

que são conhecidas como coordenadas do cone-de-luz. Neste novo sistema, a métrica fica escrita como $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$ e $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$, e as transformações de Lorentz na direção x^+ e x^- fatorizam-se de acordo com:

$$x'^{\pm} = e^{\pm\alpha} x^{\pm} \quad (1.16)$$

ou seja: x^+ e x^- não se misturam sob uma transformação de Lorentz. Costuma-se, então, dizer que as componentes v^+ e v^- de um vetor v^{μ} têm pesos de Lorentz (+1) e (-1), respectivamente.

Vamos, agora, procurar construir uma outra representação para o Grupo de Lorentz. Para isto, reconsiderando o caso genérico de D dimensões espaço-temporais, tomemos um conjunto de D matrizes γ_{μ} , de dimensão $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ ($\lfloor D/2 \rfloor$ = parte inteira de $D/2$), que obedeçam à relação de anticomutação:

$$\{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\nu} \} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.17)$$

Esta é a chamada Álgebra de Clifford das matrizes γ . É possível mostrar que, se definirmos os geradores $\Sigma_{\mu\nu}$ através da relação

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu} \right] \quad (1.18)$$

a álgebra definida pela eq(1.9) é automaticamente satisfeita.

Isto, mais o fato delas formarem uma representação inequivalente à representação vetorial (1.8) (como veremos a seguir) implica que as transformações de Lorentz com geradores dados por (1.18) não atuam nos vetores x^μ , mas sim em outros objetos. Estes são denominados spinores, e a eq(1.18) é dita definir a representação spinorial de $SO(1, D-1)$.

No caso particular de (1+1) dimensões, uma possível escolha das matrizes γ que satisfaçam a Álgebra de Clifford é:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Com elas, o cálculo do gerador $\Sigma_{\mu\nu}$ nos conduz a:

$$\Sigma_{01} = \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{1.20}$$

Podemos, também, definir o análogo da matriz γ_5 de Dirac e introduzir o conceito de quiralidade em (1+1) dimensões através da matriz:

$$\gamma_3 \equiv \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{1.21}$$

A partir dela, podemos definir os projetores

$$\begin{aligned}P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_3}{2} \\ P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_3}{2}\end{aligned}\tag{1.22}$$

e seus respectivos autovetores como os spinores *right-handed* e *left-handed*.

Que (1.20) é inequivalente a (1.10) pode ser visto pelo fato de que, se elas fossem equivalentes, seus autovalores seriam iguais, o que obviamente não acontece. De fato, quando fazemos a mudança de coordenadas (1.15), estamos indo justamente para a base que diagonaliza (1.10), cujos autovalores são ± 1 . Os autovalores da representação matricial dos geradores do Grupo de Lorentz são chamados cargas de Lorentz (x^+ tem carga de Lorentz $+1$, como já previamente dito).

Voltando a (1.20), vemos que a transformação de Lorentz sofrida por um spinor ψ é:

$$\psi' = \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Analogamente ao caso de x^+ e x^- , ψ_1 e ψ_2 não se misturam sob uma transformação de Lorentz. Spinores com tal propriedade são chamados spinores de Weyl (ou quirais), e dizemos que ψ_1 (ψ_2) é um spinor de Weyl right-handed (left-handed) com quiralidade $+1$ (-1) e carga de Lorentz $-1/2$ ($+1/2$).

Uma outra característica que podemos atribuir a um spinor ψ é que ele seja de Majorana. Para isto, vamos definir a operação conjugação de carga representada no espaço spinorial por uma matriz unitária C , e o correspondente spinor conjugado de carga, ψ_c , dado por:

$$\psi_c \equiv C\bar{\psi}^T \quad (1.24)$$

onde

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.25)$$

e

$$C (\gamma^\mu)^\tau C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (1.26)$$

onde τ denota a operação de transposição.

O nome conjugado de carga vem do fato de que as equações de movimento para ψ e ψ_c são as mesmas, a menos do sinal no termo de interação com o campo eletromagnético, $e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$. Dizemos, então, que ψ e ψ_c possuem massas iguais e cargas de sinais contrários, sendo interpretados como associados à partícula e antipartícula. Definimos o spinor de Majorana [9] como aquele que descreve uma partícula de spin-1/2 e auto-conjugada de carga

$$\psi = \psi_c \quad (1.27)$$

o que, necessariamente, indica ser uma partícula neutra. A partícula de Majorana é, então, a sua própria antipartícula.

Na representação das matrizes γ definida por (1.19), a partir de (1.26) podemos tomar $C=\gamma^0$, assim resultando que o conjugado de carga coincide com o próprio complexo conjugado

$$\psi_c = \psi^* \quad (1.28)$$

Consequentemente, spinores de Majorana na representação (1.19) são tais que:

$$\psi = \psi^* \quad (1.29)$$

O spinor ψ com que estamos trabalhando na lei de transformação (1.23) possui, então, duas características essenciais: a primeira é que as suas duas componentes, ψ_1 e ψ_2

são spinores de Weyl; e a segunda é que, se os tomarmos reais serão spinores de Majorana. Podemos, assim, unir estas duas propriedades e definirmos o spinor de Majorana-Weyl left e right-handed

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

onde ψ e λ são números reais.

É importante frisar que estes resultados [9] dependem tanto da dimensão do espaço-tempo quanto da específica representação ds matrizes γ com que estamos trabalhando. Realmente, spinores de Weyl só podem ser definidos em dimensões pares e, mesmo nestes casos, um spinor genérico ψ só poderá ser posto sob a forma $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}$, com χ right-handed e η left-handed na dita representação de Weyl das matrizes γ ; por outro lado, spinores de Majorana só são reais na chamada representação de Majorana das matrizes γ e, finalmente, spinores de Majorana-Weyl só existem em dimensões do tipo $2(\text{mod } 8)$, onde podemos construir a chamada representação de Majorana-Weyl das matrizes γ (caso de (1.16)).

Isto completa a relação dos fatos básicos referentes ao grupo de Lorentz de que precisamos para o nosso estudo da supersimetria $N=1/2 - D=2$, que, a seguir, passamos a formular e da qual faremos amplo uso no próximo capítulo. Vamos, agora, fazer um estudo introdutório de supersimetria e estabelecer o formalismoo que será utilizado no próximo capítulo.

1.2 - A SUPERSIMETRIA N=1/2 - D=2

1.2.a - O Formalismo de campos componentes

Consideremos um campo escalar real, A , e um campo spinorial de Majorana-Weyl left-handed, λ , os quais sofrem as seguintes transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} A' &= A \\ \psi'_L &= e^{\alpha/2} \psi_L \end{aligned} \quad (1.31)$$

Para escrevermos a ação livre para A e λ , usamos que a ação deve ter carga de Lorentz e dimensão de massa nulas (trabalharemos com chamado sistema natural de unidades, no qual adota-se $\hbar=c=1$)

Os termos cinéticos para A e ψ_L são dados pela ação [10]:

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu A \partial^\mu A + i \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L \right] \quad (1.32)$$

ou, nas coordenadas do cone-de-luz:

$$S = - \int d^2x \left[\partial_+ A \partial_- A + \sqrt{2} i \lambda \partial_- \lambda \right] \quad (1.33)$$

As dimensões de massa de A e λ são:

$$\begin{aligned} [A] &= 0 \\ [\lambda] &= 1/2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

A partir de agora, trataremos λ como o campo de Majorana-Weyl left-handed.

Queremos construir uma transformação linear que leve A em λ e vice-versa. A única possibilidade de mantermos os objetos transformados com as mesmas características que os campos originais é tomando a transformação como sendo:

$$\begin{aligned} A' &= A - 2^{1/4} i \epsilon \lambda \\ \lambda' &= \lambda + 2^{-1/4} \epsilon \partial_- \psi \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde ϵ é um spinor de Majorana-Weyl de quiralidade oposta a λ , ou seja, ϵ é um spinor right-handed, e os fatores $2^{\pm 1/4}$ foram colocados para uso futuro.

Para que (1.35) seja uma simetria do modelo, porém, é necessário que a densidade Lagrangiana, ou a ação, seja invariante perante esta transformação. Usando-se (1.35), obtém-se que:

$$\delta S = 2^{1/4} i \epsilon \int d^2 x \partial_- \left[\lambda \partial_+ A \right] \quad (1.36)$$

Se impusermos a condição de que os campos caem a zero no infinito, chegamos a $\delta S = 0$. de modo que as transformações (1.35) constituem uma simetria de S. Tais transformações são um exemplo muito simples de uma transformação de supersimetria, cuja característica essencial é de ser gerada por um parâmetro de natureza spinorial.

Um outro modelo simples com supersimetria que podemos estabelecer é formulado em termos de um spinor de Majorana-Weyl, ψ_R , e um campo escalar, F, que possui dimensão de massa e não exhibe, portanto, um termo cinético. A ação livre que se propõe é dada por [10]:

$$S = \int d^2 x \left[-\sqrt{2} i \psi \partial_- \psi - F^2 \right] \quad (1.37)$$

F é chamado campo auxiliar, pois sua equação de movimento é uma relação algébrica entre os campos (um vínculo).

A transformação de supersimetria neste caso pode ser

escrita como:

$$\begin{aligned}\psi' &= \psi - 2^{-1/4} \epsilon F \\ F' &= F + 2^{1/4} i \epsilon \partial_- \psi\end{aligned}\tag{1.38}$$

resultando daí que

$$\delta S = -2^{1/4} i \epsilon \int d^2 x \partial_- (\psi F)\tag{1.39}$$

o que confirma ser (1.38) uma transformação de supersimetria.

1.2.b - O formalismo de Supercampos

A discussão da seção anterior mostra-nos que é possível contruirem-se transformações unindo, no mesmo multiplete, campos com estatísticas diferentes. Podemos fazer uma analogia com a Relatividade Restrita, onde x^0 e x^1 possuem assinaturas diferentes na métrica. Sabemos que existe um formalismo onde esta diferença desaparece, o formalismo covariante. Este formalismo possui tanto a vantagem de ser mais simples quanto nos possibilita um entendimento geométrico da teoria (invariância sob rotações e translações do Grupo de Poincaré). O que vamos procurar aqui é como podemos construir um formalismo covariante para a supersimetria.

Com este propósito, devemos inicialmente introduzir o conceito de superespaço [11], parametrizado pelas coordenadas $z^A = (x^+, x^-, \theta)$, onde θ é um spinor de Majorana-Weyl right-handed de natureza Grassmanniana (anticomutante). Supercampos são funções diferenciáveis definidas neste espaço estendido, $\Phi(z^A)$, e deverão possuir como suas componentes os campos usuais da

teoria (da mesma maneira que o 4-vetor A_μ possui os potenciais vetor, \vec{A} , e escalar, ϕ). Cada supercampo deverá acomodar campos componentes com spins diferentes, pois devemos construir um formalismo tal que as transformações entre eles seja a transformação de supersimetria, em analogia com as transformações de Lorentz, que são responsáveis pela mistura entre \vec{A} e ϕ . A maneira mais direta de se construir um supercampo com estas propriedades é mediante a sua expansão em potências de θ :

$$\Phi(x^+, x^-, \theta) = A(x^+, x^-) + \theta B(x^+, x^-) \quad (1.40)$$

Como $\theta^2=0$, devido à sua natureza Grassmanniana, a expansão termina com o termo linear. Na verdade, qualquer modelo supersimétrico com um número finito de coordenadas Grassmannianas no superespaço possui uma expansão finita de seus supercampos em relação a essas variáveis.

A transformação de coordenadas mais geral que envolva apenas uma translação em θ deve ser do tipo:

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta + \epsilon \\ x'^+ &= x^+ \\ x'^- &= x^- + i\epsilon\theta \end{aligned} \quad (1.41)$$

Este é o motivo pelo qual chamamos este modelo de supersimetria $N=1/2$: as transformações de supersimetria mantêm invariante uma parte do espaço-tempo e efetuam uma translação uniforme ao longo do setor ortogonal àquele invariante.

Para se obter uma representação diferencial do gerador da supersimetria, impomos que um supercampo arbitrário se

transforme segundo a lei:

$$\Phi'(x'^+, x'^-, \theta') = \Phi(x^+, x^-, \theta) \quad (1.42)$$

Expandindo o lado esquerdo em primeira ordem, teremos

$$\delta\Phi \equiv \Phi'(x^+, x^-, \theta) - \Phi(x^+, x^-, \theta) \equiv -\epsilon Q\Phi = -\epsilon (\partial_\theta + i\theta\partial_-)\Phi \quad (1.43)$$

Então, o gerador da supersimetria, Q , pode ser representado por:

$$Q = \partial_\theta + i\theta\partial_- \quad (1.44)$$

de onde vemos que a aplicação de duas transformações de supersimetria resulta em uma translação:

$$Q^2 = i\partial_- \quad (1.45)$$

Vamos definir o supercampo escalar real, Φ , através da seguinte expansão em componentes:

$$\Phi(x^+, x^-, \theta) = A(x^+, x^-) + 2^{1/4} i\theta\lambda(x^+, x^-) \quad (1.46)$$

onde A é um campo escalar real e λ um campo de Majorana-Weyl left-handed (pois escolhemos θ right-handed). Para termos um campo spinorial right-handed entre as componentes, definimos o supercampo spinorial Ψ :

$$\Psi(x^+, x^-, \theta) = 2^{1/4} \psi(x^+, x^-) + \theta F(x^+, x^-) \quad (1.47)$$

com ψ Majorana-Weyl right-handed e F um campo escalar real. A partir de (1.43), podemos calcular as transformações para as

componentes de Φ ,

$$\begin{aligned} A' &= A - 2^{1/4} \epsilon \lambda \\ \lambda' &= \lambda + 2^{-1/4} \epsilon \theta_- A \end{aligned} \quad (1.48)$$

e de Ψ :

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi - 2^{-1/4} \epsilon F \\ F' &= F + 2^{1/4} \epsilon \theta_- \psi \end{aligned} \quad (1.49)$$

obtendo-se, assim, as transformações (1.35) e (1.38), respectivamente.

Isto sugere que à ação (1.33) deva corresponder uma ação, $S[\Phi]$, que a reproduza em componentes (idem para $S[\Psi]$). Como teremos que trabalhar com derivadas, precisamos ver se ∂_{\pm} e ∂_{θ} são derivadas covariantes de supersimetria. As derivadas espaciais não oferecem problema, mas a presença do termo linear em θ na definição de Q faz com que $\langle \partial_{\theta}, Q \rangle$ não se anule. Contudo, se definirmos $D \equiv \partial_{\theta} - i\theta \partial_-$ podemos ver que $\langle D, Q \rangle = 0$. Então, propomos, em substituição a ∂_{θ} , a seguinte derivada covariante de supersimetria:

$$D \equiv \partial_{\theta} - i\theta \partial_- \quad (1.50)$$

tal que

$$\delta(D\Phi) = -\epsilon Q(D\Phi) \quad (1.51)$$

$$\delta(D\Psi) = -\epsilon Q(D\Psi)$$

de (1.50), segue imediatamente que

$$D^2 = -i\partial_- \quad (1.52)$$

No superespaço, a ação deve ser escrita como

$$S[\Sigma] = \int d^2x d\theta P(\Sigma) \quad (1.53)$$

onde $P(\Sigma)$ é um polinômio no supercampo genérico Σ e suas derivadas ($\partial_+\Sigma, \partial_-\Sigma, D\Sigma$). Do fato que a derivada segunda spinorial é nula, não é possível definir-se a integração como a inversa da diferenciação. Para evitar este problema, simplesmente definimos a integração sobre variáveis Grassmannianas identicamente à diferenciação [12]:

$$\int d\theta a = 0 \quad (1.54)$$

$$\int d\theta (a + b\theta) = b$$

Estas duas regras básicas nos conduzem a um modo bastante prático de se calcular integrais como (1.53):

$$\int d\theta F(\theta) = \theta_\theta F(\theta) = [D F(\theta)]|_{\theta=0} \quad (1.55)$$

ou seja:

$$S = \int d^2x \left[D P(\Sigma) \right] \Big|_{\theta=0} \quad (1.56)$$

A expressão $\theta=0$ será omitida a partir de agora.

Vamos construir as ações livres para os supercampos que definimos anteriormente. Como $[P(\Sigma)] = 3/2$ e sua carga de Lorentz é $(-1/2)$, o único termo possível para o supercampo escalar é:

$$S = \int d^2x d\theta (D\Psi)(\theta_+\Psi) \quad (1.57)$$

enquanto que para o supercampo spinorial Ψ :

$$S = - \int d^2x d\theta \Psi D\Psi \quad (1.58)$$

Para se construir um termo de massa, notemos que $P(\Sigma)$ deve possuir: a) um parâmetro m de massa tal que $[m]=1$, e b) o produto de dois supercampos. Como $[P]=3/2$, a dimensão do produto de campos deve ser $1/2$. É natural tomarmos:

$$S = \int d^2x d\theta m\Phi\Psi \quad (1.59)$$

o que, em componentes nos dá:

$$S = m \int d^2x (AF + i\lambda\phi) \quad (1.60)$$

Que não é possível construir termos de massa apenas para Φ ou Ψ é evidente do fato que seus spinores componentes são quirais e estes, por argumentos de invariância de Lorentz, são necessariamente não massivos[13].

Para terminar esta seção, vamos discutir como podemos introduzir termos de interação neste modelo. Em geral, quando escrevemos termos de interação, procuramos fazer com que a constante de acoplamento seja adimensional (ao quantizarmos a teoria este é um requisito necessário, embora não suficiente, para a renormalizabilidade), ou tenha dimensão positiva de massa (neste caso a teoria quântica é dita ser super-renormalizável). Para o primeiro caso, a dimensão do polinômio $P[\Sigma]$ deve ser $[P[\Sigma]]=3/2$. Como o supercampo Φ é adimensional, sua auto-interação e sua interação com o supercampo Ψ é facilmente encontrada: simplesmente multiplicamos o polinômio livre por um funcional de Φ [10]:

$$S_{\text{aut}\Phi} = \int d^2x d\theta f[\Phi](D\Phi)(\partial_+\Phi) \quad (1.61)$$

$$S_{\Phi\Psi} = - \int d^2x d\theta f[\Phi]\Psi(D\Psi) \quad (1.62)$$

É interessante notar que não podemos construir termos de auto-interação para o supercampo spinorial Ψ . Isto vem do fato de Ψ ter dimensão canônica $[1/2]$ e peso de Lorentz $(-1/2)$. Suponhamos, então, que os supercampos fermiônicos tenham um índice de "flavour", Ψ^i ($i=1,2,\dots$), e que na super-ação apareçam, também, os operadores ∂_+ , ∂_- e D . Proponhamos, assim, a seguinte ação:

$$S = g \int d^2x d\theta \Psi^m(D\Psi)^n(\partial_+\Psi)^p(\partial_-\Psi)^q \quad (1.63)$$

onde g é a constante de acoplamento. Definindo $M \equiv m+n+p+q$, o requisito de invariância de Lorentz impõe que:

$$\frac{1}{2} - \frac{M}{2} + \frac{n}{2} - p + q = 0 \quad (1.64)$$

ao passo que a imposição de que o parâmetro g seja adimensional nos dá:

$$\frac{1}{2} + \frac{M}{2} + \frac{n}{2} + p + q = 2 \quad (1.65)$$

Somando-se e subtraindo-se (1.63) e (1.64), chegamos a:

$$n + 2q = 1 \quad (1.66)$$

$$M + 2p = 2 \quad (1.67)$$

Como m, n, p e q são inteiros não-negativos, a única solução para

(1.66) e (1.67) é:

$$\begin{aligned} m &= n = 1 \\ p &= q = 0 \end{aligned} \tag{1.68}$$

o que nos dá apenas o termo cinético (1.58). Assim, como já adiantado acima, mostra-se que não se pode escrever um termo de auto-interação para os supercampos fermiônicos Ψ .

Vamos ver que tipo de interação, a nível dos campos componentes, aparecem nas super-ações do tipo (1.61)-(1.62). Para isto, tomemos o caso mais simples, em que $f(\Phi) = g\Phi$.

Com isto:

$$\begin{aligned} S_{\text{aut}\Phi} &= -ig \int d^2x \, d\theta \, \Phi(D\Phi) \partial_+ \Phi = \\ &= -ig \int d^2x \, A(\partial_+ A \partial_- A + \gamma_{2i} \lambda \partial_+ \lambda) \end{aligned} \tag{1.69}$$

e

$$\begin{aligned} S &= -g \int d^2x \, d\theta \, \Phi \Psi (D\Psi) = \\ &= -ig \int \left\{ \gamma_{2i} \lambda \psi F + A(-\gamma_{2i} \psi \partial_- \psi - F^2) \right\} \end{aligned} \tag{1.70}$$

Estes são exemplos de ações renormalizáveis com supersimetria $N=1/2$.

1.3 - EQUACOES DE MOVIMENTO E SIMETRIAS

Vamos, agora, determinar as equações de movimento e o Teorema de Noether diretamente no superespaço, isto é, em termos

de supercampos. Começemos tomando a ação

$$S[\Phi] = \int d^2x d\theta P[\Phi, \partial_{\pm}\Phi, D\Phi, \partial_{\pm}D\Phi] \quad (1.71)$$

onde Φ denota um supercampo arbitrário e o termo em derivadas superiores foi incluído para uso futuro. Fazendo a variação funcional em Φ :

$$\delta S = \int d^2x d\theta \left[\delta\Phi \frac{\partial P}{\partial\Phi} + \delta(\partial_{\mu}\Phi) \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} + \delta(D\Phi) \frac{\partial P}{\partial(D\Phi)} + \delta(\partial_{\mu}D\Phi) \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} \right] \quad (1.72)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^2x d\theta \delta\Phi \left[\frac{\partial P}{\partial\Phi} - \partial_{\mu} \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} \mp D \frac{\partial P}{\partial(D\Phi)} \pm \partial_{\mu} D \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} \right] + \\ \int d^2x d\theta \left\{ \partial_{\mu} \left[\delta\Phi \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} + (D\delta\Phi) \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} \right] + \right. \\ \left. D \left[\delta\Phi \frac{\partial P}{\partial(D\Phi)} - \delta\Phi \partial_{\mu} \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.73)$$

onde os sinais \pm surgem devido ao fato que $D(A\bar{B}) = (D\bar{A})B \pm A(D\bar{B})$, com os sinais superiores sempre se referindo a bósons e os inferiores a férmions.

De (1.73), podemos ler a equação de movimento:

$$\frac{\partial P}{\partial\Phi} - \partial_{\mu} \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} \mp D \frac{\partial P}{\partial(D\Phi)} \pm \partial_{\mu} D \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} = 0 \quad (1.74)$$

e a expressão do teorema de Noether no superespaço:

$$\partial_{\mu} \left[\delta\Phi \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} + (D\delta\Phi) \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} \right] + \tag{1.75}$$

$$+ D \left[\delta\Phi \frac{\partial P}{\partial(D\Phi)} - \delta\Phi \partial_{\mu} \frac{\partial P}{\partial(\partial_{\mu}D\Phi)} \right] = \delta P$$

Observe que, no caso da equação de continuidade, o lado direito não deve necessariamente ser nulo, porque a simetria pode ser apenas da ação (neste caso δP será proporcional a uma derivada total). Este é precisamente o caso da supersimetria. É possível mostrar que a supersimetria é uma simetria da ação. No caso $N=1/2$, a prova é imediata: tomemos a lagrangina

$$L = \int d\theta P \tag{1.76}$$

de modo que, sob uma transformação de supersimetria:

$$\delta L = \int d\theta(-\epsilon QP) = -\epsilon \partial_{-} P \tag{1.77}$$

O que confirma que a Lagrangiana se modifica por uma derivada total. Novamente aqui vemos que, pelo fato da supersimetria $N=1/2$ não tocar no setor x^{+} do espaço-tempo, a derivada total não contém a parte ∂_{+} . Como já poderíamos ter esperado, a variação genérica encontrada para a Lagrangiana é da mesma forma que aquelas que obtivemos quando fizemos a transformação de supersimetria nos dois supercampos que introduzimos anteriormente (eq(1.36 para Φ e eq(1.39) para Ψ).

Com esta discussão, podemos finalizar este capítulo e já dispomos de elementos técnicos suficientes para passarmos ao seguinte, quando discutiremos como conciliar a supersimetria global $N=1/2$ com uma simetria local Abelian.

CAPITULO II

COVARIANTIZACAO DE GAUGE DA SUPERSIMETRIA N=1/2 - D=2

Neste capítulo, faremos a covariantização de gauge da supersimetria discutida no capítulo anterior. Para isto teremos que trabalhar com supercampos complexos, a fim de podermos introduzir transformações de fase. A idéia básica é analisarmos os graus de liberdade que surgem após a covariantização de gauge, e veremos que a teoria de gauge usual só é recuperada quando impomos um certo vínculo que não sai diretamente do processo de covariantização. Ambos os casos (com e sem este vínculo) serão discutidos.

2.1 - O PROCESSO DE COVARIANTIZACÃO

Vamos tomar os supercampos escalar complexo Φ , com componentes

$$\begin{aligned} \Phi| &= \phi \\ D\Phi| &= i2^{1/4} \psi \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde ϕ é um campo escalar complexo e ψ um spinor de Weyl

left-handed; e o supercampo quirial Ψ , com componentes

$$\begin{aligned}\Psi| &= 2^{1/4} \beta \\ D\Psi| &= F\end{aligned}\tag{2.2}$$

com β um spinor de Weyl right-handed e F um campo escalar complexo.

No capítulo anterior, determinamos a ação para o caso em que Φ e Ψ eram reais. Para o caso em que eles sejam complexos, a ação é dada por:

$$S = \int d^2x d\theta \left\{ \frac{i}{2} [(D\Phi)(\partial_+\Phi)^* - (D\Phi)^*(\partial_+\Phi)] + \Psi(D\Psi)^* + \Psi^*(D\Psi) + m(\Phi^*\Psi + \Psi^*\Phi) \right\}\tag{2.3}$$

onde os sinais e fatores i foram colocados de tal maneira que S seja real. S é invariante perante a transformação de fase global:

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= e^{iq\Lambda} \Phi \\ \delta\Psi &= e^{iq\Lambda} \Psi\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde Λ é um supercampo escalar real:

$$\begin{aligned}\Lambda| &= \alpha \\ D\Lambda| &= 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

e q é a carga associada à simetria $U(1)$ em questão.

Queremos agora promover (2.4) a uma invariância local:

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= e^{iq\Lambda(x,\theta)} \Phi \\ \delta\Psi &= e^{iq\Lambda(x,\theta)} \Psi\end{aligned}\tag{2.6}$$

O supercampo Λ se torna:

$$\begin{aligned} \Lambda| &= \alpha \\ D\Lambda| &= i2^{1/4}\eta \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tanto o escalar α quanto o spinor η são funções de (x^+, x^-) . A ação (2.3) não é invariante perante (2.6) e devemos, então, construir as derivadas covariantes de gauge para que tal aconteça:

$$\nabla_+ \equiv \partial_+ + igq\Gamma_+ \quad (2.8)$$

$$\nabla \equiv D + igq\Gamma \quad (2.9)$$

Os supercampos de gauge Γ e Γ_+ se transformam sob $U(1)$ como

$$\Gamma'_+ = \Gamma_+ - \frac{i}{g} \partial_+ \Lambda \quad (2.10)$$

$$\Gamma' = \Gamma - \frac{1}{g} D\Lambda \quad (2.11)$$

Com isto, a nova ação invariante de gauge se torna:

$$S_{\text{mat}} = \int d^2x \, d\theta \left\{ \frac{i}{2} [(\nabla\Phi)(\nabla_+\Phi)^* - (\nabla\Phi)^*(\nabla_+\Phi)] + \Psi(\nabla\Psi)^* + \Psi^*(\nabla\Psi) + m(\Phi^*\Psi + \Psi^*\Phi) \right\} \quad (2.12)$$

Observe que, para mantermos a invariância de S , não foi necessário procurarmos uma derivada covariante para ∂_- , pois esta derivada não aparece em S . Entretanto, a consistência da teoria exige que busquemos tal derivada covariante, pois ela aparece como uma espécie de torção no anticomutador da derivada de supersimetria. Assim, ao tomarmos a álgebra das derivadas covariantes de gauge [14]:

$$[\nabla_A, \nabla_B] = T_{AB}^C \nabla_C + F_{AB} \quad (2.13)$$

ou as identidades de Bianchi:

$$[\nabla_A, [\nabla_B, \nabla_C]] + [\nabla_B, [\nabla_C, \nabla_A]] + [\nabla_C, [\nabla_A, \nabla_B]] = 0 \quad (2.14)$$

certamente se fará necessário a existência de ∇_- (nas expressões acima, $[,]$ significa comutador ou anticomutador dependendo da natureza bosônica ou fermiônica das derivadas, T_{AB}^C é um termo de torção e F_{AB} a intensidade de campo). Com isto, definimos:

$$\nabla_- \equiv \partial_- + igq\Gamma_- \quad (2.15)$$

$$\Gamma_- = \Gamma_- - \frac{1}{g} \partial_- \Lambda \quad (2.16)$$

A álgebra das derivadas covariantes de gauge será:

$$\begin{aligned} \{ \nabla_+, \nabla_- \} &= -2i\nabla_- + W \\ [\nabla_+, \nabla_+] &= W_+ \\ [\nabla_-, \nabla_-] &= W_- \\ [\nabla_+, \nabla_-] &= W_{+-} \end{aligned} \quad (2.17)$$

W, W_+, W_-, W_{+-} são as intensidades de campo. Note que a álgebra tomada é a generalização da álgebra de supersimetria (nas teorias de gauge a intensidade de campo é sempre definida como o comutador das derivadas covariantes). Vamos definir as componentes dos supercampos de gauge:

$$\begin{aligned} \Gamma_+| &= A_+ \\ D\Gamma_+| &= i2^{3/4}\rho \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma| &= 2^{3/4}\xi \\ D\Gamma| &= A_- \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_-| &= B_- \\ D\Gamma_-| &= i2^{3/4}\chi\end{aligned}\tag{2.20}$$

A natureza destes campos será discutida futuramente.

O propósito deste capítulo é discutir a influência de ∇_- na teoria. Na próxima seção, mostraremos como é possível fazer com que os graus de liberdade associados a ∇_- (o supercampo Γ_-) podem ser congelados, obtendo assim a teoria de gauge usual. Depois voltaremos ao caso geral (com Γ_-) e veremos o aparecimento de um segundo campo de gauge (o campo B_-).

2.2 - O CASO "STANDARD"

2.2.a - A ação para o caso standard

Vamos, agora, discutir o chamado caso standard [15]. Observe que as relações de (anti)comutação entre os campos definem as intensidades de campo, enquanto as identidades de Bianchi impõem relações entre elas. Então, podemos impor vínculos em (2.17) e estudar as relações decorrentes de (2.14). Podemos tomar qualquer vínculo, mas o que nos interessa é anularmos a intensidade de campo da relação de anticomutação, ou seja, tomarmos:

$$W = 0\tag{2.21}$$

As identidades de Bianchi nos impõem então que, como

$$[\nabla, \langle \nabla, \nabla \rangle] = 0 \quad (2.22)$$

teremos

$$W_- = 0 \quad (2.23)$$

e como

$$[\nabla_+, \langle \nabla, \nabla \rangle + 2 \langle \nabla, [\nabla, \nabla_+] \rangle = 0 \quad (2.24)$$

teremos

$$W_{+-} = i DW_+ \quad (2.25)$$

As outras identidades não fornecem nenhuma informação. Com isto, vemos que o único tensor intensidade de campo independente é W_+ , dado por:

$$W_+ = gq(\partial_+ \Gamma_- - i D \Gamma_+) \quad (2.26)$$

Para ver que o supercampo Γ_- não é independente, basta observar que (2.21) implica em:

$$\Gamma_- = D \Gamma_+ \quad (2.27)$$

ou, em componentes:

$$\begin{aligned} B_- &= A_- \\ \chi &= -\partial_- \xi \end{aligned} \quad (2.28)$$

Também o fato que W_+ é a única intensidade de campo independente nos permite ver isto. De fato, as componentes de W_+ são:

$$\begin{aligned} W_+ | &= 2^{3/4} gq\lambda \\ DW_+ | &= gqF_{+-} \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda &\equiv \partial_+ \xi + \rho \\ F_{+-} &\equiv \partial_+ A_- - \partial_- A_+\end{aligned}\tag{2.30}$$

Ou seja: os únicos campos componentes que aparecem são A_+ e A_- (que formam o tensor intensidade de campo de gauge, F_{+-}) e seus parceiros supersimétricos ξ e ρ (que se combinam para formar o gaugino, λ).

Para termos a ação que descreve este caso, precisamos do termo livre para os campos de gauge e do termo de fixação de gauge. Para o primeiro, como queremos ter em componentes algo proporcional ao quadrado de F_{+-} , escolhemos:

$$S_{\text{gauge}} = - \frac{1}{2g^2 q^2} \int d^2x d\theta W_+ DW_+ \tag{2.31}$$

A presença da constante de acoplamento nesta expressão deve-se à maneira como definimos W_+ , desaparecendo quando trabalhamos em componentes.

Para o termo de fixação de gauge, vamos procurar quem nos leve a $\partial_+ A_- + \partial_- A_+$. Então, se definirmos o supercampo

$$G \equiv \partial_+ \Gamma + iD\Gamma_+ \tag{2.32}$$

temos, em componentes:

$$\begin{aligned}G| &= 2^{3/4} (\partial_+ \xi - \rho) \\ DG| &= \partial_+ A_- + \partial_- A_+\end{aligned}\tag{2.33}$$

tornando óbvia a escolha da ação que fixa o gauge:

$$S_{\text{f.g.}} = \frac{1}{2\alpha} \int d^2x d\theta GDG \tag{2.34}$$

(α aqui é o parâmetro que fixa o gauge).

Com isto temos a ação para o caso standard. Ela é:

$$S = S_{\text{mat}} + S_{\text{gauge}} + S_{\text{f.g.}} \quad (2.35)$$

Em componentes, cada parte de S é dada por:

$$S_{\text{gauge}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2} F_{+-} - i\sqrt{2} \lambda \theta_{-\lambda} \right\} \quad (2.36)$$

$$S_{\text{f.g.}} = \frac{1}{\alpha} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_+ A_- + \partial_- A_+)^2 + i\sqrt{2} (\partial_+ \xi - \rho) \partial_- (\partial_+ \xi - \rho) \right\} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{mat}} = & \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [(\mathcal{D}_- \phi)(\mathcal{D}_+ \phi)^* + (\mathcal{D}_- \phi)^*(\mathcal{D}_+ \phi)] + \frac{1}{2} [F^* B + FB^*] \right. \\ & + gq\xi [\psi(\mathcal{D}_+ \phi)^* \psi^* + (\mathcal{D}_+ \phi)] + \frac{1}{2} m[i\sqrt{2}(\psi^* \beta + \psi \beta^*) + \phi^* F + \phi F^*] + \\ & + \frac{i\sqrt{2}}{2} A [(\mathcal{D}_+ \psi)^* - igq\sqrt{2}\rho\phi^*] + \frac{i\sqrt{2}}{2} A^* [(\mathcal{D}_+ \psi) + igq\sqrt{2}\rho\phi] + \\ & \left. + \frac{i\sqrt{2}}{2} \beta [(\mathcal{D}_- \beta)^* + igq\sqrt{2}\xi F^*] + \frac{i\sqrt{2}}{2} \beta^* [(\mathcal{D}_- \beta) - igq\sqrt{2}\xi F] \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde

$$A \equiv \psi - i\sqrt{2}gq\xi\phi \quad (2.39)$$

$$B \equiv F + 2gq\xi\beta \quad (2.40)$$

$$\mathcal{D}_{\pm} \equiv \partial_{\pm} + igqA_{\pm} \quad (2.41)$$

2.2.b - Equações de Movimento

Vamos, agora, calcular as equações de movimento para os supercampos presentes em (2.35). Isto é uma aplicação direta da eq(1.74).

Para o supercampo de matéria Φ :

$$\frac{1}{2} (\nabla, \nabla_+) \Phi - m \Psi = 0 \quad (2.42)$$

Enquanto que para Ψ :

$$\nabla \Psi + \frac{m}{2} \Phi = 0 \quad (2.43)$$

As equações para Φ^* e Ψ^* são as complexas conjugadas das anteriores. Para o supercampo de gauge Γ_+ , obtemos como equação de movimento:

$$\partial_- W_+ + \frac{gq}{\alpha} \partial_- G = g^2 q^2 J_- \quad (2.44)$$

e, para Γ :

$$\partial_+ D W_+ - \frac{gq}{\alpha} \partial_+ D G = J \quad (2.45)$$

com

$$J_- = - \frac{1}{2} [\Phi (\nabla \Phi)^* + \Phi^* \nabla \Phi] \quad (2.46)$$

e

$$J = \frac{1}{2} [[\Phi (\nabla_+ \Phi)^* - \Phi^* \nabla_+ \Phi] + \Psi \Psi^*] \quad (2.47)$$

Que J e J_- são componentes de uma corrente conservada será

mostrado na próxima sub-seção.

Podemos, também, determinar as equações de movimento para os campos componentes, tanto a partir de (2.36) quanto projetando as equações de movimento dos supercampos. Obtemos, para os campos de matéria:

$$(\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_- \phi)^* - \frac{m}{2} F^* = -gq [(\psi^* (\mathcal{D}_+ \xi))^* + (\mathcal{D}_+ \psi)^* \xi + \psi^* \rho - \xi \partial_+ \psi^* + i 2 \sqrt{2} g q \xi \rho \phi^*] \quad (2.48)$$

$$(\mathcal{D}_+ \psi)^* + m \beta^* = -gq [i \sqrt{2} \xi (\mathcal{D}_+ \phi)^* + \frac{1}{gq} (\partial_+ \xi - \rho) \psi^*] \quad (2.49)$$

$$(\mathcal{D}_- \beta)^* - \frac{1}{2} m \psi^* = -i \sqrt{2} g q F^* \xi \quad (2.50)$$

$$F^* + \frac{m}{2} + 2gq\beta^*\xi = 0 \quad (2.51)$$

Enquanto que, para o campo de gauge:

$$\partial_- F_{+-} + \frac{1}{\alpha} \partial_- (\partial_+ A_- + \partial_- A_+) = igqj_- \quad (2.52)$$

$$\partial_+ F_{-+} + \frac{1}{\alpha} \partial_+ (\partial_+ A_- + \partial_- A_+) = igqj_+ \quad (2.53)$$

com

$$j_- = \frac{1}{2} [\phi (\mathcal{D}_- \phi)^* - \phi^* (\mathcal{D}_- \phi)] - gq \xi (\phi \psi^* + \phi^* \psi) + \frac{i \sqrt{2}}{2} (\psi^* A - \psi A^*) \quad (2.54)$$

$$j_+ = \frac{1}{2} [\phi (\mathcal{D}_+ \phi)^* - \phi^* \mathcal{D}_+ \phi] - i \sqrt{2} \beta \beta^* \quad (2.55)$$

Já as equações de movimento para o gaugino são:

$$\partial_- \lambda + \frac{1}{\alpha} \partial_- (\partial_+ \xi - \rho) = igq \frac{\sqrt{2}}{2} (\phi^* A - \phi A^*) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- \lambda - \frac{1}{\alpha} \partial_+ \partial_- (\partial_+ \xi - \rho) = & -g^2 q^2 \rho \phi \phi^* - \frac{igq}{\sqrt{2}} (F\beta^* - F^*\beta) + \\ & - \frac{igq}{2\sqrt{2}} \left\{ \psi(\mathcal{D}_+ \phi)^* + \phi(\mathcal{D}_+ \psi)^* - \psi^*(\mathcal{D}_+ \phi) - \phi^*(\mathcal{D}_+ \psi) \right\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.2.c - Correntes de Noether

Podemos calcular as correntes conservadas associadas às simetrias U(1) e supersimetria. O cálculo é uma aplicação direta de (1.75).

Para a simetria U(1), as equações estabelecidas anteriormente nos fornecem as variações infinitesimais dos supercampos da teoria:

$$\delta\Phi = iq\Lambda\Phi \quad (2.58)$$

$$\delta\Psi = iq\Lambda\Psi \quad (2.59)$$

$$\delta\Gamma = \frac{i}{g} D\Lambda \quad (2.60)$$

$$\delta\Gamma_+ = \frac{i}{g} \partial_+ \Lambda \quad (2.61)$$

Discutiremos a questão em duas partes. Na primeira, calcularemos a corrente conservada para o caso de simetria global no superespaço. Depois mostraremos que a corrente no caso local permanece inalterada.

No caso global, o supercampo Λ torna-se simplesmente o parâmetro α :

$$\begin{aligned} \Lambda| &= \alpha \\ D\Lambda| &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

e de (2.60-61) vemos que as transformações dos supercampos de gauge são nulas:

$$\delta\Gamma = 0 \tag{2.62}$$

$$\delta\Gamma_+ = 0 \tag{2.63}$$

Para calcular a corrente, notemos que a dependencia de S em Φ e Ψ é:

$$S = S[\Phi, D\Phi, \partial_+\Phi ; \Psi, D\Psi, \partial_+\Psi] \tag{2.64}$$

com a mesma dependencia para os complexos conjugados. A aplicação de (1.75) em (2.12) resulta em:

$$iq\Lambda \langle \partial_+ J_- + DJ \rangle = 0 \tag{2.65}$$

com J_- e J dados, respectivamente, por (2.46) e (2.47). Isto era esperado: o acoplamento dos supercampos de matéria com os supercampos de gauge foi do tipo $J_\mu A^\mu$. Note que (2.65) nada mais é que a condição de consistência entre (2.44) e (2.45) (sem a presença do termo de fixação de gauge, naturalmente).

Podemos calcular (2.65) em componentes. Obtemos:

$$\partial_+(\phi^* A - \phi A^*) = i\sqrt{2} gq\rho\phi\phi^* + (F\beta^* - F^*\beta) + \tag{2.66}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \psi(D_+\phi)^* + \phi(D_+\psi)^* - \psi^*(D_+\phi) - \phi^*(D_+\psi) \right\}$$

Esta não é uma corrente conservada. Ela simplesmente estabelece uma relação de consistência entre as equações de movimento para o gaugino (eq(2.56-57)). Mas, se tomarmos a derivada de supersimetria de (2.57) obtemos, em componentes:

$$\partial_+ j_- + \partial_- j_+ = 0 \quad (2.67)$$

com j_- e j_+ dados por (2.54-55), respectivamente. Esta é a equação de conservação associada com as equações de movimento para os campos de gauge.

Vamos mostrar agora que o cálculo com simetria local nos dá o mesmo resultado. Agora todos os campos sofrem transformações infinitesimais, e observando que a dependência em Γ e Γ_+ de S é:

$$S = S[\Gamma, \partial_+ \Gamma, \partial_+ D\Gamma; \Gamma_+, D\Gamma_+, \partial_- \Gamma_+] \quad (2.68)$$

podemos escrever a expressão para a corrente conservada:

$$\begin{aligned} & \partial_+ \langle iq\Lambda j_- \rangle + D \langle iq\Lambda j \rangle + \\ & + \partial_+ \left\{ -\frac{i}{g} D\Lambda \frac{\partial P}{\partial(\partial_+ \Gamma)} + D \left(-\frac{i}{g} D\Lambda \right) \frac{\partial P}{\partial(\partial_+ D\Gamma)} \right\} + \\ & + D \left\{ \left(-\frac{i}{g} \partial_+ \Lambda \right) \frac{\partial P}{\partial(D\Gamma_+)} - \left(-\frac{i}{g} D\Lambda \right) \partial_+ \frac{\partial P}{\partial(\partial_+ D\Gamma)} \right\} + \\ & + \partial_- \left\{ \left(-\frac{i}{g} \partial_+ \Lambda \right) \frac{\partial P}{\partial(\partial_- \Gamma_+)} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Rearranjando os termos em relação à sua dependência em Λ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 & iq\Lambda \langle \partial_+ J_- + DJ \rangle + \\
 & \partial_+ \Lambda \left\{ iqJ_- - \frac{1}{g} \left[D \frac{\partial P}{\partial \langle D\Gamma_+ \rangle} + \partial_- \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_- \Gamma_+ \rangle} \right] \right\} + \\
 & + D\Lambda \left\{ iqJ - \frac{1}{g} \left[\partial_+ \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_+ \Gamma \rangle} + \partial_+ D \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_+ D\Gamma \rangle} \right] \right\} + \\
 & - \frac{1}{g} \partial_+ \partial_- \Lambda \left[\frac{\partial P}{\partial \langle \partial_+ D\Gamma \rangle} + \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_- \Gamma_+ \rangle} \right] + \\
 & - \frac{1}{g} \partial_+ D\Lambda \left[\frac{\partial P}{\partial \langle D\Gamma_+ \rangle} + i \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_+ \Gamma \rangle} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Os segundo e terceiro termos são nulos pelas equações de movimento. Os dois últimos se anulam se utilizarmos a definição das intensidades de campo (eq(2.26)). De fato:

$$\frac{\partial P}{\partial \langle \partial_+ D\Gamma \rangle} = gq \frac{\partial P}{\partial \langle DW_+ \rangle} = - \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_- \Gamma_+ \rangle} \tag{2.71}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \langle D\Gamma_+ \rangle} = -igq \frac{\partial P}{\partial \langle DW_+ \rangle} = -i \frac{\partial P}{\partial \langle \partial_+ \Gamma \rangle} \tag{2.72}$$

Com isto, temos:

$$iq\Lambda \langle \partial_+ J_- + DJ \rangle = 0 \tag{2.73}$$

Isto confirma que a corrente da simetria U(1) de (2.12) é a mesma, tanto no caso global quanto no caso local.

A outra invariância da teoria é a supersimetria. Novamente usamos (1.75) para o cálculo, com a diferença que neste caso o lado direito da expressão (δP) não é nulo, sendo

dado por

$$\delta P = -\epsilon QP \quad (2.74)$$

já que P é um supercampo. Esta é a mesma variação sofrida pelos outros supercampos. A equação que obtemos é:

$$\partial_+ \mathcal{P}_- + \partial_- \mathcal{P}_+ = J \quad (2.75)$$

com

$$\mathcal{P}_- = \frac{i}{2} [(Q\Phi^*) \nabla \Phi - (Q\Phi) (\nabla \Phi)^*] - \frac{1}{gq} (Q\Gamma) DW_+ \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \frac{1}{2} [(Q\Phi^*) \nabla_+ \Phi + (Q\Phi) (\nabla_+ \Phi)^*] + \frac{1}{2} [(Q\Psi) \Psi^* + (Q\Psi^*) \Psi] + \\ + \frac{1}{gq} (Q\Gamma_+) DW_+ - \frac{1}{2g^2 q^2} W_+ QW_+ \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} S = Q \left\{ \frac{1}{2} [\nabla \Phi (\nabla_+ \Phi)^* - (\nabla \Phi)^* (\nabla_+ \Phi)] + \frac{i}{2} [\Psi^* \nabla \Psi + \Psi (\nabla \Psi)^*] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m (\Phi^* \Psi + \Phi \Psi^*) - \frac{1}{2g^2 q^2} W_+ DW_+ \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

2.3 - A ACÇÃO NATURAL

Vamos retornar agora à discussão sobre o supercampo de gauge Γ_- . Na seção anterior, ele foi eliminado pelo vínculo $W=0$. A questão que se coloca, porém, é que este vínculo não é natural, no sentido que não é um fato que surge das simetrias da teoria. Nosso objetivo aqui é discutir este modelo na sua formulação mais natural, aquela em que apenas as simetrias do

sistema são levadas em conta [16]. Começaremos analisando quais são os graus de liberdade que surgem ao eliminarmos este vínculo.

2.3.a - Propriedades do campo B_-

Como não estamos mais impondo um vínculo sobre W , podemos determiná-lo a partir de (2.17):

$$W = 2gq(D\Gamma - \Gamma_-) \quad (2.79)$$

Mas as identidades de Bianchi ainda nos impõem relações:

De

$$[\nabla, \langle \nabla, \nabla \rangle] = 0 \quad (2.80)$$

obtemos:

$$W_- = \frac{1}{2} (DW) \quad (2.81)$$

e de

$$[\nabla_+, \langle \nabla, \nabla \rangle + 2 \langle \nabla, [\nabla, \nabla_+] \rangle = 0 \quad (2.82)$$

temos:

$$W_{+-} = -i \left(\frac{1}{2} \partial_+ W_- - DW_+ \right) \quad (2.83)$$

com W_+ sendo determinado por (2.17).

Então W e W_+ são os tensores intensidade de campo independentes.

As componentes de W_+ já foram determinadas (eq (2.29)), e para W

temos:

$$\begin{aligned}
 W| &= 2gq (A_- - B_-) \\
 DW| &= -i2^{3/4}gq(\partial_- \xi - \chi)
 \end{aligned}
 \tag{2.84}$$

Podemos construir, agora, os termos cinéticos possíveis para W . Eles são os seguintes [11]:

$$S_1 = \frac{\lambda}{(2gq)^2} \int d^2x \, d\theta \, W_+ (\partial_+ W)
 \tag{2.85}$$

$$S_2 = \frac{\lambda_1}{(2gq)^2} \int d^2x \, d\theta \, \theta (DW_+) (\partial_+ W)
 \tag{2.86}$$

$$S_3 = \frac{\lambda_2}{(2gq)^2} \int d^2x \, d\theta \, \theta (\partial_+ W)^2
 \tag{2.87}$$

Observe que apenas S_1 é um invariante supersimétrico, havendo quebra explícita de supersimetria nos dois últimos. Os parâmetros λ que multiplicam as integrais são parâmetros adimensionais a serem escolhidos dependendo da situação física que se queira (por exemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ implica na teoria sem quebra explícita de supersimetria).

Conhecidos os termos cinéticos, podemos calcular os propagadores dos campos vetoriais. Tomando

$$S_{\text{cin}} = S_{\text{gauge}} + S_1 + S_2 + S_3 + S_{\text{f.g.}}
 \tag{2.88}$$

vemos que, a parte em componentes dos campos vetoriais é:

$$\begin{aligned}
 S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_+ A_- - \partial_- A_+)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_+ A_- + \partial_- A_+)^2 + \right. \\
 \left. \frac{(\lambda + \lambda_1)}{2} (\partial_+ A_- - \partial_+ B_-) (\partial_+ A_- - \partial_- A_+) + \lambda_2 (\partial_+ A_- - \partial_+ B_-)^2 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.89}$$

Podemos reescrever esta ação de maneira manifestamente covariante de Lorentz:

$$\begin{aligned}
 S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \right. \\
 + \frac{(\lambda + \lambda_1)}{4} \varepsilon^{\rho\sigma} (\varepsilon^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}) \partial_\mu (A_\nu - B_\nu) \partial_\rho A_\sigma + \\
 \left. + \frac{\lambda_2}{4} [(\varepsilon^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}) \partial_\mu (A_\nu - B_\nu)]^2 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.90}$$

O cálculo dos propagadores segue da seguinte maneira: usando-se as definições

$$\begin{aligned}
 (P^T)^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \\
 (P^L)^{\mu\nu} &= \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}
 \end{aligned}
 \tag{2.91}$$

$$V^\mu = A^\mu - B^\mu$$

(2.90) pode ser reescrita como:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & V_\mu \end{pmatrix} \square M^{\mu\nu} \begin{pmatrix} A_\nu \\ V_\nu \end{pmatrix} \tag{2.92}$$

onde $M^{\mu\nu}$ é uma matriz com elementos operatoriais dada por:

$$M = \begin{pmatrix} P^T - \frac{1}{\alpha} P^L & \frac{1}{4} (+\lambda_1) (P^T + \varepsilon P^L) \\ \frac{1}{4} (\lambda + \lambda_1) (P^T + \varepsilon P^L) & \frac{1}{2} \lambda_2 (P^T - P^L + 2\varepsilon P^L) \end{pmatrix} \tag{2.93}$$

onde omitimos os índices de Lorentz dos projetores, e convencionamos que a contração εP^L seja entendida como $\varepsilon P^L = \varepsilon^{\mu\rho} (P^L)_{\rho\nu}$. (Na verdade, cada "elemento" de M é uma matriz 2×2 no espaço de Minkowski). Um cálculo direto nos mostra que,

sendo A, B e C objetos que comutem com os projetores:

$$(A P^T + B P^L + C \epsilon P^L)^{-1} = A^{-1} P^T + B^{-1} P^L - A^{-1} C B^{-1} \epsilon P^L \quad (2.94)$$

Isto garante que os elementos diagonais de M são inversíveis e, embora os fora da diagonal não o sejam, ainda assim podemos inverter M. O resultado que obtemos, simétrico, é:

$$M^{-1}(1,1) = \frac{-\lambda_2}{\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1)} P^T - \alpha P^L + \frac{\alpha(\lambda + \lambda_1)^2}{\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1)} \epsilon P^L \quad (2.95)$$

$$M^{-1}(1,2) = \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1)} (P^T + \epsilon P^L) \quad (2.96)$$

$$M^{-1}(2,2) = \frac{1}{\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1)} P^T - \frac{1}{\lambda_2} P^L + \frac{2\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1)^2}{\lambda_2(\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1))} \epsilon P^L \quad (2.97)$$

de onde lemos os propagadores:

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu} A_{\nu} \rangle &= \frac{1}{\square} M^{-1}(1,1) \\ \langle A_{\mu} V_{\nu} \rangle &= \frac{1}{\square} M^{-1}(1,2) \\ \langle V_{\mu} V_{\nu} \rangle &= \frac{1}{\square} M^{-1}(2,2) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Outra maneira de calcularmos os propagadores dos campos vetoriais é tratando a inversão de (2.89) como um problema matricial, ou seja, a reescrevermos como:

$$S = \int d^2x A^t K A \quad (2.99)$$

com

$$A^t = (A_+ \quad A_- \quad B_-) \quad (2.100)$$

e a matriz K, simétrica, dada por:

$$\begin{aligned} K(1,1) &= -(1 - \frac{1}{\alpha})k_+k_+ \\ K(1,2) &= (1 + \frac{1}{\alpha} - \lambda - \lambda_1)k_+k_- \\ K(1,3) &= (\lambda + \lambda_1)k_+k_- \\ K(2,2) &= -(1 - \frac{1}{\alpha} - 2(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2))k_-k_- \\ K(2,3) &= -(\lambda + \lambda_1 + 2\lambda_2)k_+k_- \\ K(3,3) &= 2\lambda_2k_-k_- \end{aligned} \quad (2.101)$$

Com isto, os propagadores são dados pela inversa de K, e obtemos:

$$\begin{aligned} \langle A_+ A_+ \rangle &= \frac{2\lambda_2(1-\alpha) + \alpha(\lambda + \lambda_1)^2}{4\Delta k_-^2} \\ \langle A_+ A_- \rangle &= \frac{-2\lambda_2(1+\alpha) - \alpha(\lambda + \lambda_1)^2}{4\Delta k_+k_-} \\ \langle A_+ B_- \rangle &= \frac{-2\lambda_2(1+\alpha) - (\lambda + \lambda_1)(2 + \alpha(\lambda + \lambda_1))}{4\Delta k_+k_-} \\ \langle A_- A_- \rangle &= \frac{2\lambda_2(1-\alpha) + \alpha(\lambda + \lambda_1)^2}{4\Delta k_-^2} \\ \langle A_- B_- \rangle &= \frac{2\lambda_2(1-\alpha) + (\lambda + \lambda_1)(2 - \alpha(\lambda + \lambda_1))}{4\Delta k_-^2} \\ \langle B_- B_- \rangle &= \frac{2\lambda_2 - 4[1 - (\lambda + \lambda_1)] - \alpha [2\lambda_2 + (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_1 + 4)]}{4\Delta k_-^2} \end{aligned} \quad (2.102)$$

onde definimos:

$$\Delta = (\lambda_1^2 + 2\lambda_2) \quad (2.103)$$

Outra questão a se estudar é como pode ocorrer a interação entre os campos. Em termos dos tensores de intensidade de campos W e W_+ , a lagrangiana de interação deve ser do tipo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^s} \int d\theta \theta^t W^m W_+^n D^p \theta_+^q \theta_-^r \quad (2.104)$$

onde \mathcal{L} satisfaz uma série de condições, que listamos abaixo.

i) interação:

$$m+n \geq 3 \quad (2.105)$$

ii) carga de Lorentz nula:

$$\frac{1}{2} - t + m - \frac{n}{2} + \frac{p}{2} - q + r = 0 \quad (2.106)$$

iii) dimensionalidade da ação:

$$\frac{1}{2} - t + m - \frac{3n}{2} + \frac{p}{2} + q + r - s = 0 \quad (2.107)$$

iv) renormalizabilidade:

$$m + n \geq s \quad (2.108)$$

Se impusermos $t=0$, temos o termo:

$$S_{int} = \frac{1}{g^4} \int d^2x d\theta \text{Tr}(WW_+^3) \quad (2.109)$$

que só é não nulo para o caso não abeliano. A outra possibilidade é tomarmos $t=1$ (tendo então quebra explícita de supersimetria). O termo de interação que obtemos é:

$$S_{int1} = \frac{\lambda_9}{g_4} \int d^2x d\theta \theta w^2 w_+ (\partial_+ w_+) \quad (2.110)$$

Também podemos construir termos de interação com os campos de matéria:

$$S_{int2} = \lambda_4 \int d^2x d\theta \theta \left[(\nabla_+ \Phi)^* (\nabla_- \Phi) (\Phi^* \Phi)^n + (\nabla_+ \Phi) (\nabla_- \Phi)^* (\Phi^* \Phi)^n \right] \quad (2.111)$$

$$S_{int3} = \lambda_5 \int d^2x d\theta \theta \left[\Psi^* (\nabla_- \Psi) (\Phi^* \Phi)^r + \Psi (\nabla_- \Psi)^* (\Phi^* \Phi)^r \right] \quad (2.112)$$

Para este caso a ação se torna:

$$S = S_{cin} + S_{int1} + S_{int2} + S_{int3} \quad (2.113)$$

2.3.b - Equações de movimento

Vamos calcular as equações de movimento decorrentes de (2.113), Para o supercampo de matéria Φ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (\nabla_- \nabla_+ \Phi - m \Psi + \frac{\lambda_4 \theta}{2} \left\{ \nabla_+ [(\nabla_- \Phi) (\Phi^* \Phi)^n] + \nabla_- [(\nabla_+ \Phi) (\Phi^* \Phi)^n] + \right. \\ \left. - \frac{n}{2} [(\nabla_+ \Phi)^* (\nabla_- \Phi) + (\nabla_+ \Phi) (\nabla_- \Phi)^*] (\Phi^* \Phi)^{n-1} \Phi \right\} + \\ \left. - \frac{i\lambda_5}{4} \theta \left\{ [\Psi^* (\nabla_- \Psi) + \Psi (\nabla_- \Psi)^*] (\Phi^* \Phi)^{r-1} \Phi \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$(2.114)$$

Enquanto que para Ψ :

$$\nabla\Psi + \frac{1}{2} m\Phi + \frac{i\lambda_5\theta}{2} \left\{ \nabla_- [\Psi(\Phi\Phi^*)^r] + (\nabla_- \Psi)(\Phi\Phi^*)^r \right\} = 0 \quad (2.115)$$

Para o supercampo de gauge Γ_+ :

$$\begin{aligned} \partial_- W_+ - i \frac{\lambda_1 + \lambda}{4} (\partial_+ DW - i\theta\partial_- \partial_+ W) + \\ - \frac{1}{4(2gq)^2} D [\theta W^2 \partial_+ W_+ + \theta\partial_+ (W^2 W_+)] = iq^2 g^2 J'_- \end{aligned} \quad (2.116)$$

Para Γ :

$$\begin{aligned} \partial_+ DW_+ + \frac{i\theta}{(2gq)^2} D [WW_+ \partial_+ W] - \partial_+ \left[\frac{\lambda_1 + \lambda}{4} \partial_+ W - \frac{i\theta}{4(2gq)^2} W^2 \partial_+ W_+ \right] + \\ - \partial_+ D \left[\frac{\lambda_1 + \lambda}{4} \partial_+ W + \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda) W_+ + \frac{\lambda_1 + \lambda}{2} \theta DW_+ + \lambda_2 \theta \partial_+ W \right] + \\ + \partial_+ \partial_+ \left[\frac{i\theta}{4(2gq)^2} W^2 W_+ \right] = -g^2 q^2 J'_+ \end{aligned} \quad (2.117)$$

Mas agora temos uma equação de movimento para Γ_- :

$$\begin{aligned} \partial_+ \left[-\frac{\lambda_1 + \lambda}{2} W_+ - \frac{\lambda_1 + \lambda}{2} \theta DW_+ - \lambda_2 \theta \partial_+ W \right] + \\ + \frac{i\theta}{(2gq)^2} WW_+ \partial_+ W_+ = ig^2 q^2 J'_+ \end{aligned} \quad (2.118)$$

onde

$$J'_- = J_- + \frac{\lambda_4 \theta}{2} [\Phi(\nabla_- \Phi)^* - \Phi^*(\nabla_- \Phi)] (\Phi^* \Phi)^n \quad (2.119)$$

$$J'_+ = \frac{\lambda_4 \theta}{2} [\Phi(\nabla_+ \Phi)^* - \Phi^*(\nabla_+ \Phi)] (\Phi\Phi^*)^0 + i\lambda_4 \theta (\Psi^* \Psi) (\Phi^* \Phi) \quad (2.120)$$

$$J' = J \quad (2.121)$$

2.3.c - Correntes de Noether

Finalizaremos esta seção com o cálculo da corrente de Noether associada à invariância U(1) da ação dada por (2.105).

A discussão feita na seção 2-2-c encontra um paralelo aqui. A diferença é que, se não impomos o vínculo convencional, novos termos surgirão na ação, e surgirá uma nova componente J_+ na equação da corrente (naturalmente, apenas (2.111) e (2.112) serão importantes para o cálculo na corrente, já que W e W_+ são invariantes de gauge). A equação de conservação que obtemos é:

$$\partial_+ J'_- + \partial_- J'_+ + DJ' = 0 \quad (2.122)$$

com J'_- , J'_+ e J' dados, respectivamente, por (2.119), (2.120) e (2.121).

2.4 - SUPERSIMETRIA E O MODELO DE GAUGE ESTENDIDO

Nesta seção, retornamos à equ(2.90), e discutiremos como podemos entender o surgimento de modelos de gauge estendidos a partir dela. Para isto, vamos redefinir os campos A_μ e B_μ da seguinte forma:

$$X_{\mu} \equiv (A_{\mu} - B_{\mu})/\sqrt{2}$$

(2.123)

$$D_{\mu} \equiv (A_{\mu} + B_{\mu})/\sqrt{2}$$

Nesta nova parametrização, a ação (2.90) é reescrita como:

$$\begin{aligned} S = & \left\{ \frac{1}{8} \left[(\partial_{\mu} D_{\nu} - \partial_{\nu} D_{\mu})^2 + (\partial_{\mu} X_{\nu} - \partial_{\nu} X_{\mu})^2 + 2(\partial_{\mu} D_{\nu} - \partial_{\nu} D_{\mu})(\partial^{\mu} X^{\nu} - \partial^{\nu} X^{\mu}) \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha} \left[(\partial_{\mu} D^{\mu})^2 + 2 \partial_{\mu} D^{\mu} \partial_{\nu} X^{\nu} + \partial_{\mu} X^{\mu} \partial_{\nu} X^{\nu} \right] + \\ & + (\lambda + \lambda_1) \left[\epsilon^{\rho\sigma} (\epsilon^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}) \partial_{\mu} X_{\nu} (\partial_{\rho} X_{\sigma} + \partial_{\sigma} D_{\rho}) \right] + \\ & \left. + \lambda_2 \left[(\epsilon^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}) (\epsilon^{\rho\sigma} + \eta^{\rho\sigma}) \partial_{\mu} X_{\nu} \partial_{\rho} X_{\sigma} \right] \right\} \end{aligned}$$

(2.124)

Como será visto no próximo capítulo (veja, por exemplo, a equ(3.5)), esta ação é, essencialmente, a ação livre utilizada como ponto de partida para os modelos de gauge estendidos, no caso em que tomamos dois campos. Enfatizamos, porém, que a ação (2.124) foi obtida a partir de um estudo desenvolvido em duas dimensões, e para uma supersimetria que apresentava certas propriedades quirais. Já a formulação dos modelos de gauge estendidos, que será apresentada no próximo capítulo, será feita em quatro dimensões. Devido a estas diferenças, postergamos uma comparação mais detalhada entre (2.124) e (3.5) até a conclusão deste trabalho, passando agora a discutir alguns pontos importantes para o estudo da renormalizabilidade dos modelos de gauge estendidos.

CAPITULO III

ASPECTOS GERAIS SOBRE A RENORMALIZABILIDADE DO MODELO DE GAUGE ESTENDIDO

No capítulo anterior, vimos como a supersimetria possibilita a inclusão de mais de um potencial de gauge transformando-se no mesmo grupo. Existem, também, outros argumentos que vêm em favor de tal inclusão [17]. Mas a possibilidade de existência por si só não é suficiente para aceitarmos completamente um modelo físico. Existe uma série de requisitos que um modelo deve cumprir, antes de ser considerado teoricamente consistente. Neste capítulo discutiremos um dos requisitos mais importantes que uma teoria Lagrangiana para a interação entre partículas deve satisfazer: a sua renormalizabilidade, aspecto necessário para que a teoria permita o cálculo de quantidades físicas.

3.1- IDEIAS GERAIS SOBRE O MODELO DE GAUGE ESTENDIDO

Começamos este capítulo com uma breve revisão sobre o modelo de gauge estendido [18]. Para o caso Abelian, adotamos N

potenciais, cujas transformações sob o grupo U(1) são dadas por:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{N} \partial_\mu \alpha \\ B'_\mu &= B_\mu + \frac{1}{N} \partial_\mu \alpha \\ &\vdots \\ N'_\mu &= N_\mu + \frac{1}{N} \partial_\mu \alpha \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podemos fazer uma reparametrização dos campos, obtendo os chamados campos construtores:

$$\begin{aligned} D_\mu &= A_\mu + B_\mu + \dots + N_\mu \\ X_{\mu,1} &= A_\mu - B_\mu \\ X_{\mu,2} &= A_\mu - C_\mu \\ &\vdots \\ X_{\mu,(N-1)} &= A_\mu - N_\mu \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esta parametrização é mais eficaz para comparações com as teorias de gauge usuais (onde aparece apenas um potencial de gauge), já que a transformação U(1) sofrida pelo campo D_μ é exatamente a do campo A_μ do eletromagnetismo, enquanto que os demais campos são invariantes de gauge:

$$\begin{aligned} D'_\mu &= D_\mu + \partial_\mu \alpha \\ X'_{\mu,i} &= X_{\mu,i} \end{aligned} \tag{3.3}$$

A ação invariante de gauge mais geral que podemos ter para estes campos é construída a partir da Lagrangiana [19]:

$$\mathcal{L} [D, X_I] = \mathcal{L}_{\text{liv}} [D, X_I] + \mathcal{L}_{\text{int}} [D, X_I] \tag{3.4}$$

com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{int}} = & \frac{1}{2} a (\partial_{\mu} D_{\nu} - \partial_{\nu} D_{\mu})^2 + \frac{1}{2} c_i (\partial_{\mu} D_{\nu} - \partial_{\nu} D_{\mu}) (\partial^{\mu} X^{\nu}_i - \partial^{\nu} X^{\mu}_i) + \\
 & + \frac{1}{2} e_{ij} \partial^{\mu} X^{\nu}_i \partial_{\mu} X_{\nu j} + \frac{1}{2} f_{ij} \partial^{\mu} X^{\nu}_i \partial_{\nu} X_{\mu j} + \frac{1}{2} g_{ij} \partial^{\mu} X_{\mu i} \partial_{\nu} X^{\nu}_j + \\
 & + \frac{1}{2\alpha} ((\partial_{\mu} D^{\mu})^2 + \frac{\sigma_i}{\alpha} (\partial_{\mu} D^{\mu}) (\partial_{\nu} X^{\nu}_i) + \frac{\sigma_i \sigma_j}{2\alpha} (\partial_{\mu} X^{\mu}_i) (\partial_{\nu} X^{\nu}_j)) \\
 & + \frac{1}{2} m_{ij}^2 X_{\mu i} X^{\mu}_j
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = a_{ijk} (\partial_{\mu} X_{\nu i}) X^{\mu}_j X^{\nu}_k + b_{ijk} (\partial_{\mu} X^{\mu}_i) X_{\nu j} X^{\nu}_k + c_{ijkl} X_{\mu i} X_{\nu j} X^{\mu}_k X^{\nu}_l
 \tag{3.6}$$

onde a usual convenção de soma sobre índices repetidos é implícita. Note o aparecimento de termos de massa envolvendo os campos $X_{\mu i}$. No entanto, os propagadores para os campos construtores não determinam uma massa para cada um destes, pois além da presença de propagadores com pólos múltiplos, estes não são diagonais na base dos campos construtores. Para isto, definimos os campos físicos $G_{\mu, I}$, parametrizados por [19]:

$$G_{\mu, I} = u_{I0} D_{\mu} + u_{Ii} X_{\mu i}
 \tag{3.7}$$

onde a matriz U, formada pelos elementos u_{I0} e u_{Ii} ,

$$U = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1,0} & u_{N-1,1} & \dots & u_{N-1,N} \end{pmatrix}
 \tag{3.8}$$

é ortogonal.

As transformações de gauge sofridas pelos campos $G_{\mu,I}$ são dadas por:

$$G'_{\mu,I} = G_{\mu,I} + u_{I0} \partial_{\mu} \alpha \quad (3.9)$$

e os propagadores destes campos devem ser da forma:

$$\langle G_{\mu,I} G_{\mu',J} \rangle = \frac{1}{\square + m_I^2} \delta_{IJ} \quad (3.10)$$

Dizemos, assim, que o campo $G_{\mu,I}$ é associado à partícula de massa m_I .

A Lagrangiana original, escrita em função dos campos físicos, também é da forma (3.4):

$$\mathfrak{L} [G_I] = \mathfrak{L}_{\text{liv}} [G_I] + \mathfrak{L}_{\text{int}} [G_I] \quad (3.11)$$

com

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\text{liv}} = & a_{IJ} \partial_{\mu} G_{\nu I} \partial^{\mu} G^{\nu J} + b_{IJ} \partial_{\mu} G_{\nu I} \partial^{\nu} G^{\mu J} + c_{IJ} \partial_{\mu} G^{\mu I} \partial^{\nu} G_{\nu J} + \\ & + d_{IJ} G_{\mu I} G^{\mu J} \end{aligned} \quad (3.12)$$

e

$$\mathfrak{L}_{\text{int}} = a_{IJK} (\partial_{\mu} G_{\nu I}) G^{\mu}_j G^{\nu}_k + b_{IJK} (\partial_{\mu} G^{\mu}_I) G^{\mu}_j G^{\nu}_k + a_{IJKL} G_{\mu I} G_{\nu j} G^{\mu}_k G^{\nu}_L \quad (3.13)$$

Os parâmetros que aparecem em (3.12) e (3.13) podem ser ligados aos parâmetros que aparecem na Lagrangiana escrita em termos dos campos construtores [20]. Dependendo da questão a ser tratada, é mais interessante trabalharmos com uma ou com outra parametrização. Os resultados físicos, porém, não podem depender

desta escolha.

Concluindo, observamos que tal extensão às teorias de gauge produz um aparecimento de termos trilineares e quadrilineares, mesmo em se tratando de um grupo Abeliano.

O objetivo deste capítulo é propor uma discussão sobre a renormalizabilidade desta teoria. A discussão será geral, no sentido que não faremos a regularização necessária para eliminarmos os infinitos que aparecerão. Primeiro, estabeleceremos a contagem de potências, a fim de individuar os gráficos primitivamente divergentes. A seguir, analisaremos as Identidades de Ward para esta teoria. Pelos motivos apresentados anteriormente, a maior parte destas questões será discutida nas duas parametrizações dos campos.

3.2 - CONTAGEM DE POTÊNCIAS PARA OS CAMPOS FÍSICOS

3.2.a - Descrição do problema

Consideremos uma Lagrangiana com o seguinte conteúdo de campos:

- N campos vetoriais massivos (ou não), que sob uma transformação de gauge se transformem como:

$$G'_{\mu, I} = G_{\mu, I} + u_{I0} \partial_{\mu} \alpha \quad (3.14)$$

- um campo espinorial, covariante de gauge:

$$\begin{aligned}\psi' &= e^{i\alpha} \psi \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{-i\alpha}\end{aligned}\tag{3.15}$$

Não é necessário conhecermos explicitamente a parte livre da Lagrangiana, mas eq(3.12) constitui um exemplo bastante geral. A parte de interação, porém, é ditada pela invariância de gauge da ação. Isto significa que os vértices (termos de interação) aceitáveis são aqueles invariantes sob o grupo U(1), que é a invariância que queremos impor à ação. Nosso objetivo aqui é calcular a expressão para o grau de divergência superficial e determinar, assim, quais são os gráficos primitivamente divergentes. Para isto, precisamos ter uma expressão (genérica) para os propagadores e para os vértices da teoria. Tendo-os determinado, podemos calcular o grau de divergência superficial de cada gráfico de Feynmann, e ver, então, quais os que apresentam divergência ultra-violeta e que precisam ser regularizados.

Para entendermos o que o grau de divergência superficial de um gráfico genérico significa, vamos tomar o gráfico da figura abaixo



fig 3.1 -

onde os propagadores dos campos A e B são do tipo

$$\langle A A \rangle = \frac{1}{k^{\alpha A}}\tag{3.16}$$

e

$$\langle B B \rangle = \frac{1}{k^{\alpha_B}} \quad (3.17)$$

Após usarmos a conservação de energia-momentum nos vértices, o comportamento assintótico do gráfico acima se torna proporcional à integral

$$\int d^d k \frac{1}{(k)^{\alpha_A}} \frac{1}{(k)^{\alpha_B}} \quad (3.18)$$

Por simplicidade, estamos supondo que os vértices não possuem derivadas, sendo apenas produtos dos campos. Uma situação um pouco mais geral será discutida em breve. Então, definindo-se a quantidade

$$\delta = d - \alpha_A - \alpha_B \quad (3.19)$$

podemos estabelecer que a integral diverge (se $\delta \geq 0$) ou converge (se $\delta < 0$). A potência δ é denominada grau de divergência superficial.

De maneira geral, o grau de divergência superficial [21] de um gráfico de Feynmann é a diferença entre as potências do momentum k no numerador e no denominador. O número de potências no numerador é o número de integrais a serem calculadas, vezes a dimensão do espaço-tempo, pois cada integral contribui com $d^d k$. Cada integral significa um momentum independente e, como temos um momentum independente por loop, vemos que a potência em k no numerador é dada por (dL) , onde L é o número de loops para o gráfico em questão. Já o número de potências no denominador é, simplesmente, a soma das potências governando o comportamento assintótico de cada propagador. Para calcular (3.19), assumimos

a não-existência de vértices dependentes de k . Vamos fazer aqui a discussão um pouco mais geral, porém suficiente para o nosso problema: admitiremos a presença de vértices com uma derivada, denotado por V_g . Então, se em algum gráfico este vértice aparecer V_g vezes, temos que somar este número para o cálculo de δ :

$$\delta = dL - \sum_A \alpha_A I_A + V_g \quad (3.20)$$

onde I_A é o número de linhas internas (propagadores internos) de cada campo A , α_A as potências em k de seus respectivos comportamentos assintóticos e V_g o número de vértices dependentes em k . Para escrevermos L em termos de I_A , observemos que o número total de momenta é a soma sobre as linhas internas de cada campo, portanto soma sobre I_A , enquanto o número de momenta dependentes é o número de vértices, que vamos chamar de n (temos uma delta de conservação de energia-momentum em cada um deles), menos um, porque sempre teremos conservação de energia-momentum entre os estados iniciais e finais. Isto quer dizer que L pode ser escrito como:

$$L = \sum_A I_A - n + 1 \quad (3.21)$$

e, substituindo em (3.20):

$$\delta = -4n + 4 + (4 - \alpha_A) I_A + V_g \quad (3.22)$$

onde já tomamos o caso particular $D=4$.

3.2.b - Propagadores

Os propagadores dos campos de uma teoria são determinados pela parte livre da Lagrangiana. Não iremos explicitar qual é ela aqui mas, quando for útil um exemplo, utilizaremos a eq(3.12). Para os campos definidos em (3.14), os propagadores podem ser escritos, genericamente, como [22]:

$$\langle G_{\mu I} G_{\mu J} \rangle \cong \int d^4k \frac{1}{(k)^{2p_{IJ}}} \quad (3.23)$$

Para o campo spinorial, tomaremos o propagador de Dirac:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle \cong \int d^4k \frac{1}{(k)} \quad (3.24)$$

Isto nos fixa os fatores multiplicativos das linhas internas (as potências α_A da seção anterior) que aparecerão nas integrais:

$$\begin{aligned} \text{para } \langle G_{\mu I} G_{\nu J} \rangle & \quad \alpha_A = 2p_{IJ} \\ \text{para } \langle \bar{\psi} \psi \rangle & \quad \alpha_A = 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.2.c - Vértices e a expressão para δ

Os vértices que podemos construir são os seguintes:

tipo 1 - Vértices com uma derivada:

- um vértice envolvendo três linhas de mesmo campo $G_{\mu I}$, o qual denotaremos por V_{3GI} ;
- um vértice com duas linhas do mesmo campo e uma de um outro qualquer, denotado por $V_{2GI, GJ}$;

- um vértice com três campos diferentes, denotado por $V_{GI,GJ,GK}$.

Definimos também a soma destes vértices como sendo:

$$V_{3,I} \equiv V_{3GI} + \sum_J V_{2GI,GJ} + \sum_{J,K} \frac{1}{2!} V_{GI,GJ,GK} \quad (3.26)$$

onde a barra no somatório indica que a soma é tomada com os índices diferentes (I,J,K são sempre diferentes) e todas as somas vão de 1 a N. Observe que não há soma sobre o índice I: $V_{3,I}$ não nos dá o número total de vértices com três linhas, mas sim o número total de vértices com três linhas onde pelo menos uma seja do campo G_I . O fatorial que apareceu no último termo (e que aparecerá constantemente nas expressões a seguir) evita que, ao tomarmos a soma, o mesmo termo seja contado duas vezes.

tipo 2 - Vértices sem derivadas :

Com a mesma notação anterior, temos os seguintes vértices:

$$V_{4GI}, V_{3GI,GJ}, V_{2GI,2GJ}, V_{2GI,GJ,GK}, V_{GI,GJ,GK,GL}, V_{GI,\psi\psi},$$

e definimos:

$$V_{4,I} \equiv V_{4GI} + V_{GI,\psi\psi} + \sum_J \left(V_{3GI,GJ} + V_{2GI,2GJ} + V_{GI,3GJ} \right) + \sum_{J,K} \left(\frac{1}{2!} V_{2GI,GJ,GK} + V_{GI,2GJ,GK} \right) + \sum_{J,K,L} \frac{1}{3!} V_{GI,GJ,GK,GL} \quad (3.27)$$

Com estas definições, a expressão para δ se torna:

$$\delta = 4^{-4} \sum_I (V_{3,I} + V_{4,I}) + \sum_{I,J} [4-2p_{IJ}] I_{GI,GJ} + [4-1] I_{\psi\psi} + \sum_I V_{3,I} \quad (3.28)$$

onde o último termo é apenas uma maneira diferente de escrevermos V_3 . Utilizando as expressões para $V_{3,I}$ e $V_{4,I}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \delta = & 4 - \sum_{I,J} (4 - 2p_{IJ}) I_{GI GJ} + 3I_{\psi\psi} + \\ & - 3 \sum_I \left\{ V_{3GI} + \sum_J V_{2GI,GJ} + \sum_{J,K} \frac{1}{2!} V_{GI,GJ,GK} \right\} + \\ & - 4 \sum_I \left\{ V_{4GI} + V_{GI,\psi\psi} + \sum_J \left(V_{3GI,GJ} + V_{2GI,2GJ} + V_{GI,3GJ} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} V_{2GI,GJ,GK} + V_{GI,2GJ,GK} \right\} + \sum_{J,K,L} \frac{1}{3!} V_{GI,GJ,GK,GL} \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.2.d - Relações topológicas

As relações topológicas são uma espécie de "lei de conservação" do número de linhas (propagadores) de um dado campo. Podemos contar o número de linhas de duas maneiras. Na primeira, contamos quantas linhas saem de cada vértice, e contamos quantos vértices existem. Na segunda, simplesmente contamos o número de linhas, atribuindo um fator dois para as linhas internas (pois na contagem dos vértices elas são contadas duas vezes). Estas duas contagens nos permitem relacionar o número de vértices com o número de linhas:

$$\sum n_{iA} V_i = 2I_A + I_{AB} + E_A \quad (3.30)$$

onde n_{iA} é o número de linhas do campo A no vértice V_i , I_A é o número de linhas internas do tipo <AA>, I_{AB} é o número de linhas internas correspondendo aos propagadores mixtos do tipo <AB> e E_A é o de linhas externas.

Para o caso em consideração, existem dois tipos de relações topológicas, uma para o campo spinorial e N para os campos de gauge. Para o primeiro, a relação topológica é:

$$2I_{\psi\psi} + E_{\psi} = 2 \sum_V V_{GI\psi\psi} \quad (3.31)$$

enquanto que para os campos vetoriais temos:

$$\begin{aligned} 2I_{GIGI} + \sum_J I_{GIGJ} + E_{GI} = & \\ & 4 V_{4GI} + 3 \left(\sum_J V_{3GI,GJ} + V_{3GI} \right) + \sum_{J,K,L} \frac{1}{3!} V_{GI,GJ,GK,GI} + \\ & + 2 \sum_J \left(V_{2GI,2GJ} + V_{2GI,GJ} + \frac{1}{2!} \sum_k V_{2GI,GJ,GK} \right) + \\ & + \sum_J \left(V_{GI,3GJ} + V_{GI} + \sum_{J,K} \left(V_{GI,2GJ,GK} + \frac{1}{2!} V_{GI,GJ,GK} \right) \right) + V_{GI\psi\psi} \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.2. e - δ para o Modelo de Gauge Estendido

Das expressões (3.31) e (3.32), podemos determinar as linhas internas $I_{\psi\psi}$ e I_{GIGI} em função das outras linhas internas e dos vértices da teoria. Tomando estas expressões e

substituindo em δ , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta = & 4 - \frac{3}{2} E_{\psi} + \sum_I \left\{ (p_{II} - 2) E_{GI} + (4V_{4GI} + 3V_{3GI} + V_{GI\psi\psi}) (1 - p_{II}) \right\} + \\ & + \sum_{I,J} \left\{ (4 - 3p_{II} - p_{JJ}) V_{3GIJ} + (3 - 2p_{II} - p_{JJ}) V_{2GIJ} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left[(4 - 2p_{II} - 2p_{JJ}) V_{2GI2GJ} + (p_{II} + p_{JJ} - 2p_{IJ}) I_{GIGJ} \right] \right\} + \\ & + \sum_{IJK} \left\{ \frac{1}{2!} (4 - 2p_{II} - p_{JJ} - p_{KK}) V_{2GIGJK} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!} (3 - p_{II} - p_{JJ} - p_{KK}) V_{GIGJK} \right\} + \\ & + \sum_{IJKL} \frac{1}{4!} (4 - p_{II} - p_{JJ} - p_{KK} - p_{LL}) V_{GIGJKOL} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Com esta expressão, podemos mostrar que o número de gráficos primitivamente divergentes é finito. De fato, se utilizarmos as expressões para as linhas internas, eq(3.32), podemos reescrever δ como:

$$\delta = 4 - \frac{3}{2} E_{\psi} - \sum_I E_{GI} + \sum_I 2(1-p_{II}) I_{GIGI} + \sum_{IJ} (1-p_{IJ}) I_{GIGJ} \quad (3.34)$$

Quando p_{II} for nulo, I_{GIGI} também o é. Então, tanto neste caso quanto no caso em que p_{II} for igual a um, o termo dependente nas linhas internas se anulará (mesmo raciocínio para p_{IJ}). Nestes casos a expressão para δ se torna:

$$\delta = 4 - \frac{3}{2} E_{\psi} - \sum_I E_{GI} \quad (3.35)$$

Quando p_{II} e/ou p_{IJ} forem maiores que um, teremos um termo adicional:

$$\delta = 4 - \frac{3}{2} E_{\psi} - E_{GI} - a \quad (3.36)$$

onde a é um número positivo. Então, em ambos os casos, o número de gráficos primitivamente divergentes é finito, dependendo fundamentalmente do número de linhas externas (no segundo caso, dizemos que a teoria é super-renormalizável). Para o caso do modelo de gauge estendido, o grau de divergência superficial é dado por (3.35), caso acoplemos os campos massivos a correntes conservadas [22]. Tendo a expressão para o grau de divergência superficial, podemos determinar quais são os gráficos primitivamente divergentes, o que faremos na próxima seção, onde os determinaremos em primeira ordem de teoria de perturbação. A seguir, investigaremos as Identidades de Ward.

3.3 - GRAFICOS PRIMITIVAMENTE DIVERGENTES

Listaremos abaixo os gráficos primitivamente divergentes, à aproximação de um loop, para o caso do modelo de gauge estendido. As letras x, y etc que aparecem nos propagadores se referem ao tipo de propagador. Por exemplo, $\frac{x}{\text{---}}$ significa que o propagador é do tipo

$$\langle G_{\mu I} G_{\mu I} \rangle = \frac{1}{(k^2 - m^2)^x} \quad (3.37)$$

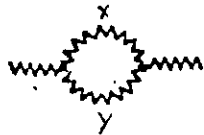
Abaixo de cada gráfico, listamos a expressão para a respectiva divergência superficial. A convenção utilizada é a de linhas cheias para propagadores de campos fermionicos (a quem sempre chamamos de elétrons) e linhas onduladas para campos

vetoriais (a quem sempre chamamos fótons).



$$\delta = 3-2x$$

fig 3.2: - gráfico de auto-energia para o elétron



(a)

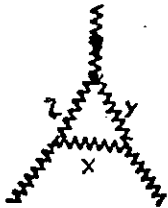
$$\delta = 6-2x-2y$$



(b)

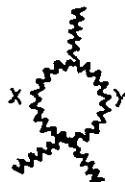
$$\delta = 2$$

fig 3.3 - gráfico de autoenergia para os campos vetoriais



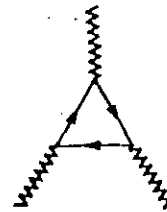
(a)

$$\delta = 7-2x-2y-2z$$



(b)

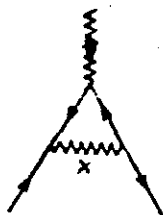
$$\delta = 5-2x-2y$$



(c)

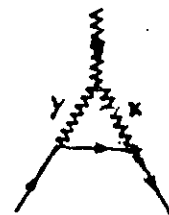
$$\delta = 1$$

fig 3.4 - aniquilacao de fótons



(a)

$$\delta = 2-2x$$



(b)

$$\delta = 4-2x-2y$$

fig 3.5 - aniquilacao de par eletron-positron pela criacao de um fóton

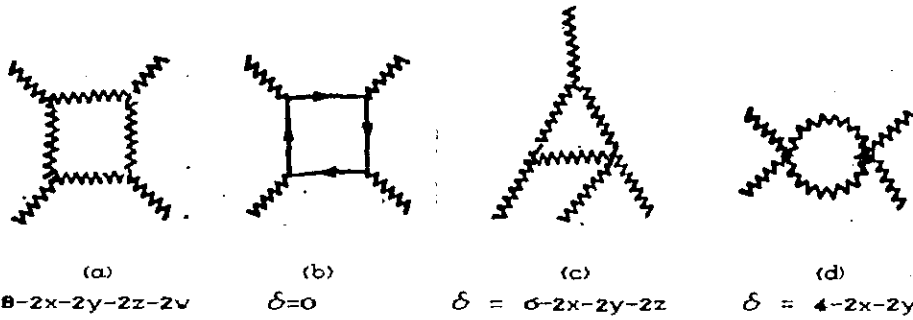


fig 3.6 - espalhamento fóton-fóton

3.4 - IDENTIDADES DE WARD

3.4.a - As identidades de Ward para a Eletrodinâmica

Outro ponto importante na análise da renormalizabilidade das teorias de gauge são as identidades de Ward [23]. Na Eletrodinâmica Quântica, sua importância vem do fato de que elas mostram que a componente escalar do propagador do campo A_μ não recebe correções radiativas (dizemos que o spin-zero permanece congelado).

Nosso objetivo nesta seção é derivar as identidade de Ward para o modelo de gauge estendido e estudar quais conclusões podemos tirar a partir delas. Antes, porém, faremos uma breve revisão das identidades de Ward para a Eletrodinâmica e obteremos um resultado que será o guia para o modelo que nos propomos a estudar. Isto também nos servirá para fixarmos a nomenclatura. Começamos escrevendo a ação para a Eletrodinâmica:

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{inv.} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J_\mu A^\mu + \bar{\xi}\psi + \bar{\psi}\xi \right] \quad (3.38)$$

onde \mathcal{L}_{inv} é a Lagrangiana invariante de gauge para os campos

A_μ , ψ e $\bar{\psi}$, dada por:

$$\mathcal{L}_{inv} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \quad (3.39)$$

com as usuais definições de $F_{\mu\nu}$ e da derivada covariante D_μ . O segundo termo em (3.38) corresponde à fixação de gauge, e os demais são os usuais termos de fonte.

Conhecida a ação, podemos definir o funcional gerador das Funções de Green, $Z[J, \xi, \bar{\xi}]$:

$$Z[J, \xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \quad (3.40)$$

e o funcional gerador das Funções de Green conexas, $W[J, \xi, \bar{\xi}]$:

$$W = -i \ln Z \quad (3.41)$$

O último funcional gerador que vamos definir é o dos gráficos irreduzíveis de 1-partícula, $\Gamma(A_{\mu c}, \psi_c, \bar{\psi}_c)$:

$$\Gamma(A_{\mu c}, \psi_c, \bar{\psi}_c) = W - \int d^4x (J_\mu A^\mu + \bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi) \quad (3.42)$$

O subíndice c significa campo clássico (valor esperado do campo no vácuo na presença da fonte deste campo).

A presença do termo de fixação de gauge e das fontes na ação faz com que S deixe de ser invariante de gauge. Mas os resultados físicos da teoria, expressos em termos das Funções de Green têm que ser invariantes de gauge. Isto faz com que o gerador de tais funções, Z , deva ser invariante de gauge. Quando fizermos uma transformação $U(1)$ nos campos:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \alpha \\ \delta \psi &= i\alpha \psi \\ \delta \bar{\psi} &= -i\alpha \bar{\psi} \end{aligned} \quad (3.43)$$

a invariância de Z nos fornecerá uma equação diferencial (funcional) para ele. Esta é dada por:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} \square \partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta J_{\mu}} - \partial_{\mu} J^{\mu} + g \left[\bar{\xi} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} \right] \right\} Z = 0 \quad (3.44)$$

Esta equação pode ser reescrita para W e Γ , bastando para isto utilizarmos as equações (3.41) e (3.42). Obtemos:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} \square \partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta J_{\mu}} + i \partial_{\mu} J^{\mu} Z^{-1} + g \left[\bar{\xi} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} \right] \right\} W = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{\alpha} \square \partial_{\mu} A^{\mu} - i \partial_{\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu}} + g \left[\bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} - \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \right] = 0 \quad (3.46)$$

Esta última equação nos permite várias manipulações, relacionando diferentes tipos de gráficos. O que nos interessa, porém, é tomarmos a derivada desta expressão em relação a A_{μ} e calcularmos em $A_{\mu} = \psi = \bar{\psi} = 0$. O resultado é:

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_{\mu}(x) \delta A_{\nu}(y)} = \frac{1}{\alpha} \square \partial^{\nu} \delta(x-y) \quad (3.47)$$

Deixemos esta equação por um momento e retornemos à eq(3.38). Dela, podemos retirar a ação livre para a eletrodinâmica:

$$S_{\text{liv}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - \frac{1}{2\alpha} (\partial_{\mu} A^{\mu})^2 \right] \quad (3.48)$$

Mas é bem sabido que o funcional gerador dos gráficos irreduzíveis de 1-partícula pode ser expandido em potências de \hbar , com a sua ordem-zero, Γ_{liv} , sendo exatamente a ação livre clássica, eq(3.48). Então tomamos S_{liv} , e calculamos sua derivada segunda em relação ao campo A_{μ} , impondo no final os

campos iguais a zero. O resultado é:

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma_{liv}}{\delta A_{\mu}(x) \delta A_{\nu}(y)} = \frac{1}{\alpha} \square^{\nu} \delta(x-y) \quad (3.49)$$

e obtemos a seguinte igualdade:

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_{\mu}(x) \delta A_{\nu}(y)} = \partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma_{liv}}{\delta A_{\mu}(x) \delta A_{\nu}(y)} \quad (3.50)$$

O significado físico desta identidade, que é uma consequência da Identidade de Ward, é que a parte escalar do propagador do campo A_{μ} (o spin-zero) não sofre correções radiativas (ou seja, não sofre correções quânticas). Isto garante que a não massividade do fóton livre persiste mesmo que este passe a interagir com elétrons e pósitrons.

3.4.b - As identidades de Ward para o Modelo de Gauge Estendido:

Campos Construtores

Vamos, agora, derivar as identidades de Ward para o modelo de gauge estendido. O procedimento será o mesmo que foi utilizado na seção anterior, e nosso objetivo é trilhar o caminho até uma equação que se apresente como a equação (3.50). A discussão será levada em duas parametrizações dos campos: a dos campos construtores (eq (3.4)) e dos campos físicos (eq(3.11)).

Como sempre, começamos introduzindo o funcional gerador das Funções de Green:

$$Z = \int \mathcal{D}D_\mu \mathcal{D}X_{\mu,i} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \quad (3.51)$$

onde omitimos as dependências funcionais.

A parte em S que não é invariante de gauge é dada por:

$$S_{\text{nig}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\alpha} [\partial_\mu (D^\mu + \sigma_i X_{\mu,i}^H)]^2 + J_\mu D^\mu + J_i^H X_{\mu,i} + \bar{\xi}\psi + \bar{\psi}\xi \right\} \quad (3.52)$$

Fazendo a transformação infinitesimal de U(1) em Z, obtemos:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} + \sigma_i \frac{\delta}{\delta J_{\mu,i}} \right] + i \partial_\mu J^\mu - ie \left[\bar{\xi} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} \right] \right\} Z = 0 \quad (3.53)$$

Podemos também definir os funcionais W e Γ (neste caso devemos levar em conta a mudança nos termos de fonte), e escrever as identidades de Ward para estes funcionais, que são dadas por:

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} + \sigma_i \frac{\delta}{\delta J_{\mu,i}} \right] + \partial_\mu J^\mu Z^{-1} - ie \left[\bar{\xi} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} \right] \right\} Z = 0 \quad (3.54)$$

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \left[D_\mu + \sigma_i X_{\mu,i} \right] - \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta D_\mu} + ie \left[\bar{\psi} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \psi \frac{\delta}{\delta \psi} \right] \right\} Z = 0 \quad (3.55)$$

Para termos uma equação que nos informe sobre a componente longitudinal, derivamos (3.55) em relação a D_μ e $X_{\mu,i}$, e tomamos os campos iguais a zero. Obtemos, assim, que:

$$\partial_\mu \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta D_\mu(x) \delta D_\nu(y)} = \frac{1}{\alpha} \square \partial^\nu \delta(x-y) \quad (3.56)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta D_\mu(x) \delta X_{\nu,i}(y)} = \frac{\sigma_i}{\alpha} \square \partial^\nu \delta(x-y) \quad (3.57)$$

Agora, se tomarmos a ação livre clássica, Γ_{liv} (a qual é nada mais que (3.5)), podemos mostrar que:

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma_{liv}}{\delta D_{\mu}(x) \delta D_{\nu}(y)} = \frac{1}{\alpha} \square \partial^{\nu} \delta(x-y) \quad (3.58)$$

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma_{liv}}{\delta D_{\mu}(x) \delta X_{\nu,i}(y)} = \frac{\sigma_i}{\alpha} \square \partial^{\nu} \delta(x-y) \quad (3.59)$$

Isto implica que:

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta D_{\mu}(x) \delta D_{\nu}(y)} = \partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma_{liv}}{\delta D_{\mu}(x) \delta D_{\nu}(y)} \quad (3.60)$$

$$\partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta D_{\mu}(x) \delta X_{\nu,i}(y)} = \partial_{\mu} \frac{\delta^2 \Gamma_{liv}}{\delta D_{\mu}(x) \delta X_{\nu,i}(y)} \quad (3.61)$$

Estas duas equações garantem que a componente longitudinal do campo D_{μ} não recebe correções quânticas (é congelada). Mas observando com D_{μ} se comporta sob uma transformação de gauge, vemos que existe uma associação natural entre ele e o potencial de gauge usual (veremos em breve que tomarmos D_{μ} representando exatamente o fóton é uma escolha natural). Então, o resultado a que chegamos simplesmente estabelece que a componente longitudinal do campo sem massa é congelada, informação que teríamos que obter para termos consistência com a teoria de gauge usual, onde sabemos que este fato acontece.

Já para os campos $X_{\mu,i}$, não obtemos nenhuma informação completa sobre as suas partes longitudinais. Isto se deve ao fato que, sendo $X_{\mu,i}$ invariantes de gauge, seu acoplamento com a corrente externa não influencia as identidades de Ward.

3.4.c - Identidades de Ward para o Modelo de Gauge Estendido:

Campos Físicos

Para os campos físicos, a discussão é um pouco diferente. Observe que, neste caso, a parte não-invariante de gauge da ação é dada por:

$$S_{\text{ni g}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2\alpha} (\beta_I \partial_\mu G_I^\mu)^2 + J_{\mu, I} G_I^\mu + \bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi \right] \quad (3.62)$$

O cálculo da Identidade de Ward para Z nos fornece:

$$\left\{ \frac{i}{\alpha} \beta_I \beta_J u_{I0} \square \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_{\mu, J}} - u_{I0} \partial_\mu J_I^\mu + g \left[\bar{\xi} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} \right] \right\} Z = 0 \quad (3.63)$$

a qual, em termos de W e Γ é escrita como:

$$\left\{ \frac{i}{\alpha} \beta_I \beta_J u_{I0} \square \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_{\mu, J}} + i u_{I0} \partial_\mu J_I^\mu Z^{-1} + g \left[\bar{\xi} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}} - \xi \frac{\delta}{\delta \xi} \right] \right\} W = 0 \quad (3.64)$$

$$\left\{ \frac{i}{\alpha} \beta_I \beta_J u_{I0} \square \partial_\mu G_I^\mu - i u_{I0} \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta G_{\mu, I}} + g \left[\bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} - \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \right] \right\} = 0 \quad (3.65)$$

Se derivarmos esta equação em relação a $G_{\mu, I}$, e tomarmos os campos iguais a zero, obtemos que:

$$\frac{1}{\alpha} \beta_I \beta_J u_{I0} \square \partial_\nu \delta(x-y) = u_{I0} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, IJ} \quad (3.66)$$

onde escrevemos:

$$\Gamma_{\mu\nu, IJ} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_{\mu, I} \delta G_{\nu, I}} \quad (3.67)$$

Como os termos de fixação de gauge em (3.5) e (3.12) são iguais,

podemos ver que

$$\beta_I = (\bar{u}_{0I} + \alpha_i \bar{u}_{iI}) \quad (3.68)$$

de onde temos

$$\beta_I u_{I0} = 1 \quad (3.69)$$

E este termo desaparece de (3.66), sobrando então:

$$\frac{1}{\alpha} \beta_J \square \partial_\nu \delta(x-y) = u_{I0} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, IJ} \quad (3.70)$$

Antes de resolvermos o caso geral, vamos fazer o exemplo mais simples possível, o caso de dois campos, pois será mais fácil entendermos o caso geral depois deste exemplo. Para dois campos, (3.70) se torna:

$$u_{10} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, 11} + u_{20} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, 12} = \Delta_{\nu, 1} \quad (3.71)$$

$$u_{10} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, 12} + u_{20} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, 22} = \Delta_{\nu, 2}$$

onde definimos

$$\Delta_{\nu, I} = \frac{\beta_I}{\alpha} \square \partial_\nu \delta(x-y) \quad (3.72)$$

e usamos que $\Gamma_{\mu\nu, IJ}$ é simétrica em (I, J). É imediato, então, que não podemos reescrever este sistema tendo do lado esquerdo de cada equação apenas um dos $\Gamma_{\mu\nu, IJ}$, e do lado direito a expressão $(\square \partial_\nu \delta(x-y))$, pois temos três "incógnitas", e apenas duas equações. Também é evidente que não é interessante resolver este sistema para duas variáveis (por exemplo, $\Gamma_{\mu\nu, 11}$ e $\Gamma_{\mu\nu, 12}$) em função da terceira (neste caso, $\Gamma_{\mu\nu, 22}$), pois jamais conseguiríamos expressar as duas variáveis escolhidas em função apenas das derivadas da ação livre efetiva (o que é nosso

objetivo final), já que a terceira, colocada do lado direito, não teria como ser eliminada. Então, a única solução é desaparecermos com um destes termos, escolhendo adequadamente seus fatores multiplicativos. Por exemplo, se tomarmos $u_{20}=0$, teremos:

$$\partial^{\mu}\Gamma_{\mu\nu,11} = \frac{1}{u_{10}} \Delta_{\nu,1} \quad (3.73)$$

$$\partial^{\mu}\Gamma_{\mu\nu,12} = \frac{1}{u_{20}} \Delta_{\nu,2}$$

Logo, se formos capazes de isolar $(\square\partial_{\nu}\delta(x-y))$ em função das derivadas da ação livre efetiva $\Gamma_{\mu\nu,1j}^{liv}$, teremos mostrado que todos os propagadores longitudinais do campo $G_{\mu,1}$ não são afetados pelas correções quânticas, que é exatamente o que estamos procurando. (É evidente que se tomarmos $u_{10}=0$ teremos congelado a parte longitudinal do campo $G_{\mu,2}$) Qual o significado da escolha $u_{20}=0$? De (3.7), vemos que

$$G_{\mu,1} = u_{10} D_{\mu} + u_{11} X_{\mu,1} \quad (3.74)$$

$$G_{\mu,2} = u_{12} X_{\mu,1}$$

Então o campo D_{μ} só aparece na expansão do campo $G_{\mu,1}$ (o qual tem seu spin-zero congelado). Isto reflete o que já havíamos visto no caso dos campos construtores: apenas um spin-zero é congelado, e ele está intimamente ligado ao fato de, sendo este um modelo que procura estender a QED, deve reproduzir os resultados obtidos na Eletrodinâmica. Observe, porém, que não obtivemos o campo $G_{\mu,1}$ exatamente igual ao campo D_{μ} : para a solução de (3.71) não é necessário anularmos u_{11} . Dito de outra maneira: embora D_{μ} seja exclusivo de $G_{\mu,1}$, $G_{\mu,1}$ não é exclusivo de D_{μ} .

A generalização deste resultado é imediata: tomemos a equação

$$u_{i0} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, iJ} = \Delta_{\nu, J} \quad (3.75)$$

Só podemos congelar a parte longitudinal de um campo. Vamos escolhe-lo como sendo o campo $G_{\mu, k}$. Precisamos fazer todos os u_{i0} , $i \neq k$, nulos. Em cada uma das N equações, apenas um termo, $u_{k0} \Gamma_{\mu\nu, kI}$ (sem soma em k), restará, e teremos:

$$\Gamma_{\mu\nu, iK} = \frac{1}{u_{k0}} \Delta_{\nu, I} \quad (3.76)$$

(k fixo, $1 \leq i \leq N$)

Em relação à equação (3.7), para podermos congelar o spin-zero do k -ésimo campo, temos que impor:

$$G_{\mu, i} = u_{k0} \delta_{k, i} D_\mu + u_{i1} X_{\mu, i} \quad (3.77)$$

(sem soma em k , somado sobre i)

Vamos deixar esta expressão por um momento, e olhar o outro lado da estória, ou seja, a parte da ação livre efetiva. Como ela é a própria ação clássica, ela pode ser escrita como:

$$\Gamma_{liv} = \int d^4x \frac{1}{2} G_{\mu, I}^\mu [(A \square + D)_{IJ} \eta_{\mu\nu} + b_{IJ} \partial_\mu \partial_\nu] G_{\nu, J} \quad (3.78)$$

(soma sobre i e j implícita), onde A, B e D são matrizes $N \times N$, que podem ser determinadas à partir de (3.12). Então, derivando duplamente em relação aos campos $G_{\mu, i}$, e tomando os campos iguais a zero:

$$\partial_\mu \Gamma_{liv, iJ}^{\mu\nu} = [(a + b) \square \partial_\nu + d_{IJ} \partial_\nu] \delta(x-y) \quad (3.79)$$

Note que a presença da matriz de massa, de elementos d_{IJ} , nos impede de isolar o fator $(\square \partial_\nu \delta(x-y))$ em função apenas de $\partial_\mu \Gamma_{\mu\nu, IJ}^{liv}$. Mas, se mesmo assim o isolarmos, obtemos:

$$\square \partial^\nu \delta(x-y) = ((a+b)^{-1})_{IJ} (\partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, IJ}^{liv} - d_{IJ} \partial^\nu \delta(x-y)) \quad (3.80)$$

onde $((a+b)^{-1})_{IJ}$ significa o elemento (I, J) da inversa da matriz $(a+b)$. Isto implica que, se impusermos a condição

$$\text{Tr} [((A+B)^{-1}) D] = 0 \quad (3.81)$$

obtemos

$$\square \partial_\nu \delta(x-y) = ((a+b)^{-1})_{IJ} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, IJ}^{liv} \quad (3.82)$$

que é o resultado que estávamos buscando. Entretanto, (3.81) não parece ter nenhum significado físico (é apenas uma relação complicada entre massas e fatores de termos cinéticos), de modo que vamos procurar uma outra maneira de isolarmos $(\square \partial_\nu \delta(x-y))$. Esta nova possibilidade aparece se notarmos que a relação entre as matrizes de massa dos campos físicos e dos campos construtores é dada por:

$$d_{IJ} = \bar{u}_{iI} m_{ij} \bar{u}_{jJ} \quad (3.83)$$

onde \bar{u} é a matriz inversa de u ; e como os elementos m_{oj} são nulos (os termos de massa que aparecem em (3.5) não envolvem o campo D_μ), temos a identidade

$$u_{i0} d_{IJ} = 0 \quad (3.84)$$

Logo, multiplicando (3.79) por u_{i0} , obtemos:

$$u_{i0} \partial_\mu \delta^2 \Gamma_{\mu\nu, IJ}^{liv} = u_{i0} (a+b)_{IJ} \square \partial_\nu \delta(x-y) \quad (3.85)$$

ou

$$\square \partial_\nu \delta(x-y) = \left[\sum_{I,J} u_{I0} [(a+b)_{IJ}] \right]^{-1} \left[\sum_{I,J} u_{I0} \partial_\mu \Gamma_{\mu\nu,IJ}^{liv} \right] \quad (3.86)$$

Vamos escrever esta equação para o caso de dois campos. Mas, antes de comparar com a eq(3.76), teremos que utilizar fato de que apenas um dos u_{I0} é não nulo, pois foi esta condição que nos possibilitou escrever (3.76). Vamos utilizar esta condição *a priori*, tomando $u_{20}=0$, o que significa que a eq(3.66) está reescrita no caso particular dado por (3.73). Nestas condições, a equação anterior se torna:

$$\square \partial_\nu \delta(x-y) = \left[(a+b)_{11} + (a+b)_{12} \right]^{-1} \partial^\mu \left[\Gamma_{\mu\nu,11}^{liv} + \Gamma_{\mu\nu,12}^{liv} \right] \quad (3.87)$$

e, substituindo em (3.73):

$$\partial^\mu \Gamma_{\mu\nu,11} = \frac{\beta_1}{\alpha u_{10}} \left[(a+b)_{11} + (a+b)_{12} \right]^{-1} \partial^\mu \left[\Gamma_{\mu\nu,11}^{liv} + \Gamma_{\mu\nu,12}^{liv} \right] \quad (3.88)$$

$$\partial^\mu \Gamma_{\mu\nu,12} = \frac{\beta_2}{\alpha u_{10}} \left[(a+b)_{11} + (a+b)_{12} \right]^{-1} \partial^\mu \left[\Gamma_{\mu\nu,11}^{liv} + \Gamma_{\mu\nu,12}^{liv} \right] \quad (3.89)$$

A generalização deste resultado para o caso de N campos é imediata. Como já foi comentado, só podemos congelar o spin-zero de um campo, e este se torna o único que é expandido em termos do campo D_μ . Então, se escolhermos o campo $G_{\mu\kappa}$, eq(3.86) se torna:

$$\square \partial_\nu \delta(x-y) = \left[\sum_{K,J} [(a+b)_{KJ}] \right]^{-1} \left[\sum_{K,J} \partial^\mu \Gamma_{\mu\nu,KJ}^{liv} \right] \quad (3.90)$$

onde κ é um índice fixo. Por sua vez eq(3.88-89) se tornam:

$$\partial^\mu \Gamma_{\mu\nu, \kappa\kappa} = \frac{\beta_I}{\alpha u_{\kappa 0}} \left(\sum_J [(a+b)_{\kappa J}]^{-1} \right) \left(\sum_\mu \partial_\mu \Gamma_{\mu\nu, \kappa J}^{liv} \right) \quad (3.91)$$

Estas N equações estabelecem que os N propagadores envolvendo o campo $G_{\mu\kappa}$ são uma combinação linear dos N termos da ação livre efetiva envolvendo este mesmo campo. Isto, novamente, garante que a parte longitudinal do propagador deste campo não sofre correções radiativas. Torna-se natural, portanto, escolher este campo, $G_{\mu\kappa}$, como sendo o campo que representa a partícula não massiva da teoria, o fóton, pois este é o único campo que temos como assegurar que correções quânticas não alterarão o valor de sua massa. Isto significa que, em (3.77), torna-se natural escolhermos $u_{\kappa i} = 0$, de modo que o campo $G_{\mu\kappa}$ torna-se proporcional ao campo D_μ .

CONCLUSÃO

Procuramos discutir, neste trabalho, alguns aspectos ligados à possibilidade de se introduzir mais de um potencial de gauge para cada parâmetro de transformação do grupo de gauge em questão. Este procedimento implica que, no caso do grupo $U(1)$, aparecem N campos vetoriais transformando-se com o mesmo parâmetro $\alpha(x)$. Adotando-se tal ponto de vista, os mais relevantes fatos são que é possível introduzir-se termos de massa e de auto-interação entre os campos de gauge, já no caso Abelião, sem com isto quebrar a invariância de gauge.

Na primeira parte, discutimos a formulação de teorias de gauge supersimétricas, sem a imposição do chamado vínculo convencional. Como resultado, viu-se que foi possível gerar, no seu setor vetorial, um modelo de gauge estendido. No caso em consideração, a supersimetria $N=1/2 - D=2$, pôde-se mostrar que o relaxamento do vínculo convencional permite o aparecimento de um novo grau de liberdade, o campo B_- , a quem é possível associar uma massa física. Em seguida, viu-se também que a ação livre obtida para os graus de liberdade A_+ , A_- e B_- é, essencialmente, a ação tomada como ponto de partida para os modelos de gauge estendidos. Faremos, agora, uma análise mais cuidadosa deste fato.

Para isto, reconsideremos a equ(2.124). Devido à presença do tensor anti-simétrico de rank-2, o penúltimo termo pode ser

reescrito como:

$$(\lambda + \lambda_1) \frac{1}{4} \left[\epsilon^{\rho\sigma} (\epsilon^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}) (X_{\mu\nu} D_{\rho\sigma} + X_{\rho\sigma} X_{\mu\nu}) \right] \quad (1)$$

onde definimos:

$$X_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu \quad (2)$$

e

$$D_{\mu\nu} = \partial_\mu D_\nu - \partial_\nu D_\mu \quad (3)$$

Com isto, (2.124) pode ser reescrita como na expressão abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{8} D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} + \frac{(\lambda + \lambda_1)}{2} \epsilon^{\rho\sigma} D_{\rho\sigma} \partial_\mu X^\mu + \lambda_2 \partial_\mu X^\mu \partial_\nu X^\nu + \\ & + \frac{1}{4} [(\lambda + \lambda_1) \epsilon^{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}] D_{\mu\nu} X_{\rho\sigma} + \\ & + [\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + 2(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} + (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) \epsilon^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}] \partial_\mu X_\nu \partial_\rho X_\sigma + \\ & - [\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + 2(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} + (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2) \epsilon^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}] \partial_\mu X_\nu \partial_\sigma X_\rho + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha} \left[(\partial_\mu D^\mu)^2 + 2 \partial_\mu D^\mu \partial_\nu X^\nu + \partial_\mu X^\mu \partial_\nu X^\nu \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Assim, se escolhermos:

$$a = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$c \eta_{\mu\alpha} \eta_{\rho\beta} = \frac{1}{2} [(\lambda + \lambda_1) \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}] \quad (6)$$

$$e\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} = [2(\lambda+\lambda_1+\lambda_2)\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta} + (\lambda+\lambda_1+\lambda_2)\epsilon_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}] \quad (7)$$

$$e = -f \quad (8)$$

$$g = \lambda_2 \quad (9)$$

$$\sigma = 1 \quad (10)$$

e redefinirmos

$$\alpha \rightarrow 2\alpha \quad (11)$$

teremos a identificação de (2.124) com (3.5), a menos, contudo, de dois termos. O primeiro destes é o termo de massa que aparece em (3.5), e não possui similar em (2.124). Isto vem do fato de que o modelo supersimétrico discutido não toca na parte x^+ do cone-de-luz, sendo, num certo sentido, quirial. Como um termo de massa para um campo vetorial é do tipo $m^2 v_\mu v^\mu$, tanto a parte (+) quanto a parte (-) são necessárias para a sua construção. Devido à invariância de gauge, o termo de massa que podemos construir é do tipo $m^2(A_\mu - B_\mu)^2$, e a inexistência da componente B_+ impede o aparecimento deste termo. Numa supersimetria do tipo N=1, podemos certamente obter um termo massivo para os campos de gauge. A outra diferença é o segundo termo na equ(4), que não pode ser escrito como um dos termos de (3.5). A questão aqui é que, como já mencionado ao final do segundo capítulo, (2.124) é derivada a partir de um modelo supersimétrico bidimensional, enquanto (3.5) é tomada em D=4, e o segundo termo da eq(4) possui claramente características de um termo bidimensional.

Quanto aos aspectos ligados à renormalizabilidade do modelo de gauge abeliano estendido, um fato importante a se notar é a possibilidade de, mesmo havendo campos vetoriais massivos, a teoria ainda superar o teste da contagem de potências. Como mencionado no texto, isto acontece quando acoplamos os campos vetoriais massivos a correntes conservadas, ou, numa segunda possibilidade particular do modelo de gauge estendido, quando fazemos uma conveniente escolha dos parâmetros presentes na Lagrangiana. Pelo fato do modelo passar pela contagem de potências e possuir um esquema de regularização invariante (por exemplo, a regularização dimensional), podemos assegurar a não-existência de anomalias no modelo, o que assegura a renormalizabilidade do modelo abeliano estendido.

Concluindo, ressaltaremos quais as condições necessárias para que um modelo, tal como uma teoria de gauge com mais de um campo potencial, seja física. Observemos que não basta prever a massa de uma determinada partícula. Pode ser que a teoria que a envolva não seja física. A primeira fase para mostrarmos se uma teoria é ou não física está na investigação de sua renormalizabilidade. Isto significa que se podem efetuar os cálculos em um modo consistente. Então, o próximo passo será mostrar a existência de um espaço de Hilbert físico: um espaço com norma positivo-definida, e este espaço ser capaz de definir uma matriz S que seja unitária (para teorias de gauge temos também que mostrar que a matriz S é independente do parâmetro de gauge $\alpha(x)$ que entra no termo de fixação de gauge).

Um programa de renormalização compreende as seguintes

quatro etapas: análise dos gráficos primitivamente divergentes, contagem de potências, investigação das identidades de Ward e existência de um número finito de contra-termos. Os nossos cálculos foram efetuados apenas à ordem de 1-loop. A análise de gráficos primitivamente divergentes compreende a definição de uma integral de Feynman finita por subtração do integrando associado ao correspondente gráfico de Feynman sómente um número finito de vezes. Então, é que poderemos aplicar um determinado esquema de renormalização. Outra limitação em nosso estudo concerne o uso das identidades de Ward. É também necessário mostrar que podem ser estendidas ao nível quântico: assim, temos que resolver o problema da estabilidade associado a estas identidades de Ward e termos certeza da não presença de anomalias. Esta é a parte mais elaborada do program de renormalização. Um programa de renormalização generalizado a todas as ordens existe na literatura. Depende do "Quantum Action Principle", da localidade da teoria, e da presença de fontes externas [24]. Primeiro, se a Lagrangiana possui uma dada simetria, deve-se escrever a mesma de tal modo que seja compatível com o "Quantum Action Principle". Isto significa que, eventualmente, será necessária a introdução de algumas fontes externas. Quanto à localidade, precisamos averiguar a estrutura de pólos dos propagadores. A condição é que sejam da forma $N(k)/k^2 - m^2$, onde $N(k)$ é um polinômio nos momenta e pode conter fatores d spin e de números quânticos internos. Então, uma vez cumpridas estas etapas, temos um método geral, para todas as ordens, que através do cômputo da cohomologia da carga de BRS da

simetria em questão é capaz de testar sobre a estabilidade e a ausência de anomalias na teoria.

Quanto ao programa de unitariedade, devemos provar que a matriz S é unitária e invariante de gauge (independente de α). Como motivo de ilustração, faremos uma breve história da unitariedade em teorias de gauge. Primeiro Schroer e Lowenstein mostraram a independência de gauge da matriz S em uma QED massiva [25] (a linguagem usada foi o formalismo BPHZ e o Quantum Action Principle). Depois (dentro da mesma linguagem) Becchi, Rouet e Stora mostraram a unitariedade e independência de gauge da matriz S para os seguintes casos: um modelo Abelianiano com Higgs [26] e um modelo $SU(2)$, com quebra espontânea de simetria [27]. Mais recentemente, através da linguagem do formalismo BRS, Kugo e Ojima estudaram a questão da unitariedade [28]. Conclui-se que BRS é uma técnica muito potente para construir-se o espaço físico. Dado a nilpotência, o problema de cohomologia fica imediatamente definido.

REFERÊNCIAS

- [1] N. Yang e R. L. Mills: *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954)
R. Utiyama: *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956)
T. W. B. Kibble: *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961)
E. Abers e B. Lee: *Phys. Rep.* **9C**,1 (1973)
T. P. Cheng e L.F. Li: *Am. J. Phys.* **56**, 586 (1988)
- [2] L. Fonda e G. C. Ghirardi: "Symmetry Principles in Quantum Physics"; Marcel Dekker, New York (1970)
- [3] D. V. Volkov e V. P. Akulov: *Phys. Lett.* **46B**, 109 (1973)
J. Wess e B. Zumino: *Nucl. Phys. B* **70**, 39 (1974)
A. Salam e J. Strathdee: *Nucl. Phys. B* **76**, 477 (1974)
P. Fayet e S. Ferrara: *Phys. Rep. C* **32**, 249 (1977)
S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel: "Superspace or One Thousand and One Lessons in Superesymmetry"; Benjamin/Cummings, Reading, MA (1983)
J. Wess e J. Bagger: "Supersymmetry and Supergravity"; Princeton University Press, Princeton (1983)
P. P. Srivastava: "Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an Introduction"; Adam Hilger, Bristol-Boston (1986)
P. West: "Introduction to Supersymmetry and Supergravity"; World Scientific, Singapore (1986)
- [4] J. H. Schwarz: *Phys. Rep.* **89**, 223 (1982)
M. B. Green e J. A. Schwarz: *Phys. Lett.* **149B**, 117 (1984)

- M. B. Green e J. A. Schwarz: *Phys. Lett.* **151B**, 21 (1985)
- D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec e R. Rohm: *Nucl. Phys. B* **256**, 253 (1985)
- [5] J. Wess e B. Zumino: *Phys. Lett.* **66B**, 361 (1977)
- R. Grimm, M. Sohnius e J. Wess: *Nucl. Phys. B* **133**, 275 (1978)
- R. Grimm, J. Wess e B. Zumino: *Nucl. Phys. B* **152**, 255 (1979)
- [6] Veja S. J. Gates Jr. et al. em [3]
- [7] C. M. Hull e E. Witten: *Phys. Lett.* **160B**, 398 (1985)
- Makoto Sakamoto: *Phys. Lett.* **151B**, 115 (1985)
- Roger Brooks, Fuad Muhammad e S. J. Gates Jr.: *Nucl. Phys. B* **268**, 599 (1986)
- [8] Veja J. H. Schwarz em [4]
- [9] F. Gliozzi, J. Scherk e D. Olive: *Nucl. Phys. B* **122**, 253 (1977)
- [10] M. T. Grisaru: "World Sheet Supersymmetry"; *Spring School on Superstrings, Supersymmetry and Supergravity*, Trieste-Itália (1985)
- [11] Veja A. Salam e J. Strathdee em [3]
- [12] F. A. Berezin: "The Method of Second Quantization". Academic Press, New York (1966)
- [13] L. H. Ryder: "Quantum Field Theory"; Cambridge University Press, Cambridge (1985)

- [14] Veja S. J. Gates Jr. et al. em [3]
- [15] S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, L. Mezincescu e P. K. Townsend: *Nucl. Phys. B* 286, 1 (1987)
Veja Roger Brooks et al. em [7]
M. Evans e B. A. Ovrut: *Phys. Lett.* 171B, 177 (1986)
- [16] S. A. Dias, R. M. Doria e J. L. Matheus Valle: "Information On The Gauge Principle From An $N=1/2 - D=2$ Supersymmetric Model". U.C.P. Preprint 88/10
- [17] R. M. Doria e C. Pombo: *Nuovo Cimento* 96B, 153 (1986)
C. M. Doria, R. M. Doria e J. A. Helayël-Neto: *Rev. Bras. Fís* 17, 351 (1987)
- [18] R. M. Doria, A. W. Smith , J. A. Helayël-Neto e S. Pugnetti: *Nuovo Cimento* 91A, 398 (1986)
R. M. Doria, J. A. Helayël-Neto e C. Pombo: *Nuovo Cimento* 98A, 337 (1987)
L. P. Collato, R. M. Doria e J. A. Helayël-Neto: *Nuovo Cimento* 98A, 359 (1987)
R. M. Doria e F. A. B. Rabelo de Carvalho. *Rev. Bras. de Fís.* 18, 453 (1988)
- [19] Veja R. M. Doria e F. A. B. Rabelo de Carvalho em [18]
- [20] L. P. Collato e R. M. Doria: "On Electric and Magnetic Fields for an Extended Gauge Model". U.C.P. preprint 88/11
- [21] C. Itsykson e J. B. Zuber: "Quantum Field Theory". McGraw-Hill, New York (1980)
- [22] David G. Boulware: *Ann. Phys.* 56, 140 (1970)

- [23] J. C. Ward: *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950)
J. C. Taylor: *Nucl. Phys.* **B33**, 436 (1971)
A. A. Slavnov: *Theor. Math. Phys.* **10**, 99 (1972)
- [24] S. P. Sorella: "Notes on the BRS Renormalization: the σ -model analysis". U.C.P. preprint 89/2
- [25] J. H. Lowenstein e B. Schroer: *Phys. Rev D* **6**, 1553 (1972)
- [26] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora: *Commun. Math Phys.* **42** 127 (1975)
- [27] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora: *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976)
- [28] T. Kugo, J. Ojima: *Prog. Theor. Phys. Supp.* **66**, 1 (1979)

“A SUPERSIMETRIA COMO UMA POSSÍVEL ORIGEM PARA MODELOS DE GAUGE ESTENDIDOS”

JORGE LUIZ MATHEUS VALLE

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Renato Melchiades Dória – Coorientador

Elcio Abdalla

Prem Prakash Srivastava

Alexander William Smith - suplente

Rio de Janeiro, 28 de julho de 1989