

NAMI FUX SVAITER

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM SISTEMAS DE  
COORDENADAS CURVILÍNEAS NO ESPAÇO-TEMPO DE  
MINKOWSKI E EM ESPAÇOS CURVOS

TESE de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF/CNPq

Rio de Janeiro, 1989

## AGRADECIMENTOS

- A Mario Novello e Isaias Costa, que me orientaram ao longo deste trabalho, sou imensamente grato pela dedicação e pela confiança depositada em mim.
- A Benar Fux Svaiter, pela ajuda inestimável e estímulo constante.
- A Nathalie Deruelle, pelas discussões e colaboração no curto espaço de tempo de convívio.
- A Jorge Eduardo Stephany Ruiz, Sebastião Alves Dias, Carlos Alberto de Almeida, Maurício Ortiz Calvão, Lígia Maria Coelho de Souza Rodrigues e Luiz Alberto Rezende de Oliveira, pelo incentivo e contínua troca de idéias.
- A todos os outros colegas do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, pelo interesse demonstrado em todos os momentos.
- A Sergio Levcovitz, pela revisão do manuscrito.
- A Myriam Simões Coutinho, mais do que datilógrafa, amiga.
- Ao CNPq, pela ajuda financeira sem a qual não seria possível a realização deste trabalho.

# SUMÁRIO

	Pág.
AGRADECIMENTOS .....	ii
SUMÁRIO .....	iii
ABSTRACT .....	v
RESUMO .....	vi
CAPÍTULO I - Introdução .....	1
CAPÍTULO II - O CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS .....	1
2.1 - Quantização de um campo escalar real massivo em sistemas de coordenadas curvilíneas no espaço-tempo de Minkowski e em espaços curvos .....	8
2.2 - As transformações de Bogoliubov .....	19
2.3 - As funções de Green associadas ao campo escalar - um tratamento geral .....	25
CAPÍTULO III - O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS .....	35
3.1 - Os sistemas de coordenadas ortogonais separáveis da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional .....	35
3.2 - Teoria Quântica de Campos num sistema de coordenadas não estacionário ( $d=2$ ). O sistema de coordenadas de Milne-Schuking .....	43
3.3 - Teoria Quântica de Campos no sistema de coordenadas de Rindler ( $d=2$ ) .....	58
3.4 - Teoria Quântica de Campos num sistema de coordenadas de Kalnins-Miller ( $d=2$ ) .....	66
CAPÍTULO IV - AS TRANSFORMAÇÕES DE BOGOLIUBOV, OS DIFERENTES VÁCUOS E AS DIFERENTES BASES DE FUNÇÕES .....	74
CAPÍTULO V - AS FUNÇÕES DE GREEN ASSOCIADAS AO CAMPO ESCALAR - UM TRATAMENTO ESPECÍFICO .....	77
5.1 - Os propagadores no espaço-tempo de Rindler ( $d=2$ ). .....	77

## ABSTRACT

In this study we examined the quantization of a scalar field  $\phi(x)$  in the Minkowski space time (in curvilinear coordinates), in curved spaces and the processes of generation of particles resulting from these quantizations. We studied the quantization of a real massive scalar field in systems of orthogonal separable coordinates in the bi-dimensional Minkowski space time. It was investigated the definition of the vacuum state in some of these systems through the calculation of the Bogoliubov coefficients. We calculated the propagators associated with the above mentioned systems.

In a second step we discussed the quantization of a real massive scalar field in an isotropic non singular cosmological model (homogeneous). A base of functions that is solution of the Klein-Gordon equation was presented. This work made possible the calculation of the Bogoliubov coefficients and the rate of creation of matter in this cosmological model.

The goal of this work was to shed some insight about the (still open) concept of particles as entities depending on the observer, as well as the processes of creation of matter in the context of general Relativity theory.

## RESUMO

Neste trabalho examinamos a quantização de um campo escalar  $\phi(x)$  no espaço-tempo de Minkowski (em coordenadas curvilíneas), em espaços curvos e os processos de criação de partículas que advêm destas quantizações. Iniciamos estudando a quantização de um campo  $\phi(x)$  real massivo em sistemas de coordenadas ortogonais separáveis no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional. Investigamos a definição de um estado de vácuo nos sistemas de coordenadas de Rindler, Milne e Kalnins-Miller através do cálculo dos coeficientes de Bogoliubov e mostramos como aparecem distribuições térmicas quando calculamos o valor esperado do operador número de partículas nestes vácuos. Mostramos que, apesar de termos em princípio seis diferentes vácuos, apenas dois destes são unitariamente não equivalentes.

Em seguida repetimos os cálculos já conhecidos do Propagador de Feynman no espaço-tempo de Rindler e no espaço-tempo de Milne, utilizando os modos de di Sessa. Para finalizar, mostramos que o propagador de Feynman no universo de Milne diverge se utilizamos os modos de Sommerfield. Calculamos, então, os propagadores retardados e avançados utilizando estes mesmos modos e mostramos que o resultado coincide com os propagadores associados às coordenadas cartesianas.

Numa segunda etapa tratamos da quantização de um campo escalar real massivo num modelo cosmológico não singular, espacialmente homogêneo e isotrópico, assintoticamente plano (Mo

delo de Novello e Salim). Apresentamos uma base de funções que é solução da equação de Klein-Gordon, possibilitando o cálculo dos coeficientes de Bogoliubov, interpretados como a taxa de criação de matéria neste modelo cosmológico.

Este trabalho pretende contribuir para a compreensão da noção, ainda insatisfatória, de partículas como entidades dependentes do observador, assim como os processos de criação de matéria no contexto da Relatividade Geral.

# CAPÍTULO I

## Introdução

Do esforço empreendido pelos físicos na tentativa de quantizar o campo gravitacional dentro do projeto de unificação das forças da natureza, interessantes possibilidades e novos efeitos até então desconhecidos surgiram. Embora todas as tentativas feitas até o momento, com o intuito de incorporar a gravitação num programa quântico não tenham obtido êxitos satisfatórios, importantes resultados em teoria de campos em espaços curvos e em coordenadas curvilíneas (no espaço-tempo de Minkowski) apareceram na literatura culminando com o famoso resultado de Hawking<sup>[1],[2]</sup>, demonstrando que um buraco negro é capaz de emitir radiação térmica.

Alguns anos antes Fulling<sup>[3]</sup>, trabalhando no espaço-tempo de Minkowski, demonstrou que um observador uniformemente acelerado constrói uma representação adequada da álgebra dos operadores diferente daquela construída por um observador inercial, existindo portanto uma multiplicidade de vácuos na teoria Quântica de campos num espaço-tempo plano. Dando seguimento a estas investigações, Unruh demonstrou, através da introdução de um detector hipotético, que o vácuo de Minkowski (associado a um observador inercial) para um observador acelerado não é um estado puro, mas um estado misto térmico no qual a temperatura

é proporcional à aceleração. O sistema de coordenadas naturalmente adaptado a um observador acelerado, conhecido como coordenadas de Rindler<sup>[5]</sup> foi exaustivamente estudado na literatura. Como Kalnins<sup>[6]</sup> demonstrou, no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional temos dez sistemas de coordenadas no qual a equação de Klein-Gordon é solúvel por separação de variáveis. Em todos estes sistemas de coordenadas podemos a princípio efetuar a quantização canônica de um campo clássico. No entanto a tarefa não é tão simples, pois aparecem problemas na definição do estado de vácuo. No momento em que são utilizadas transformações gerais de coordenadas a definição de estado de vácuo (invariante de Poincaré) torna-se ambígua. No espaço-tempo curvo tal problema ocorre necessariamente uma vez que o grupo de Poincaré não é um grupo de simetria de um espaço-tempo curvo. Parker<sup>[7]</sup>, Grib, Mamayev<sup>[8],[9]</sup> e outros partindo desta ambiguidade na definição de vácuo, apresentam processos de criação de matéria no contexto da Relatividade Geral. Estes autores definem vácuos em diferentes instantes de tempo, em vários modelos cosmológicos, demonstrando que estes vácuos pertencem a diferentes espaços de Hilbert (representações não equivalentes da álgebra dos operadores). Um dos modelos cosmológicos mais estudados é o chamado modelo isotrópico, descoberto por Friedman<sup>[10]</sup>, (1922) que parte da hipótese que a matéria está distribuída homogênea e isotropicamente no espaço. Uma propriedade fundamental deste modelo é seu caráter não estacionário e a existência de um estado singular com respeito ao tempo, estabelecendo a origem evolutiva do universo a partir deste estado singular - o Big-Bang. Entretanto o estudo de criação de matéria neste modelo esbarra em duas dificuldades específicas. A primeira é a existência da



singularidade, que torna a definição de um estado de vácuo inicial para os campos quânticos extremamente delicada. A segunda é a ausência de uma região assintoticamente plana, onde a teoria relativística dos campos se baseia para definir partículas. Assim se coloca o problema conceitual de como definir entidades que chamamos de partículas dentro da estrutura da Relatividade Geral, ou melhor, como combinar uma teoria Quântica, que se baseia em princípios globais com uma teoria que se baseia num princípio local - o Princípio de Equivalência<sup>[11]</sup>.

Uma das maneiras de contornar as dificuldades citadas é acoplar os campos existentes na natureza com a gravitação, introduzindo na densidade lagrangeana produtos destes campos com o tensor de curvatura e suas contrações. Novello e Salim<sup>[12]</sup> (1979), apresentam um modelo cosmológico onde adicionam à densidade lagrangeana de Einstein-Maxwell um termo do tipo  $RA_{\mu}A^{\mu}$ , bastante semelhante ao termo de Proca<sup>[13]</sup> conduzindo então a uma eletrodinâmica não linear onde o fóton adquire uma "massa" proporcional a  $R^{1/2}$ .

As equações de movimento que obtemos utilizando o Princípio Variacional admitem uma solução cujo elemento de linha é do tipo Robertson-Walker com curvatura espacial negativa. Em coordenadas esféricas ( $r = \sinh \chi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) e tempo cósmico  $t$  este elemento de linha é do tipo

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.1.1)$$

onde

$$a(t) = (a_0^2 + t^2) \quad (1.1.2)$$

sendo  $a_0$  uma constante positiva. O elemento de linha (1.1.1) pode ser escrito na forma

$$ds^2 = C(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (1.1.3)$$

onde

$$C(\eta) = a_0^2 \cosh^2 \eta \quad (1.1.4)$$

sendo  $\eta$  o tempo conforme.

As motivações que nos levaram a estudar a quantização de campos clássicos neste modelo cosmológico, assim como mecanismos de criação de partículas tornam-se transparentes se notamos que este modelo cosmológico é não singular e tende assintoticamente ( $t$  ou  $\eta \rightarrow \pm \infty$ ) a dois distintos universos de Milne<sup>[14]</sup> (Milne 1932 - Bondi 1952<sup>[15]</sup>). Assim, este modelo cosmológico é assintoticamente plano e sua evolução cósmica consiste então de um período infinito de contração até um ponto de curvatura máxima onde os invariantes geométricos não divergem (por exemplo

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{6}{a_0^2 \cosh^2 \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{6}{a_0^2} )$$

seguido por outro período infinito, agora de expansão.

Desta forma o modelo de Novello e Salim evita as dificuldades citadas anteriormente que aparecem no modelo padrão.

Além disso, neste modelo a equação de Klein-Gordon, como mostraremos, é exatamente solúvel em termos das funções de Mathieu [16], [17].

Esta possibilidade de expandir o operador de campo  $\phi(x)$  numa base de funções completa nos permite esclarecer alguns aspectos ligados à criação de matéria assim como a noção de partículas como entidades dependentes do observador. Finalizando, queremos enfatizar que o modelo cosmológico estudado não é mais um exemplo artificial para testar a teoria de campos em espaços curvos, como o modelo de Bernard e Duncan [18], mas o elemento de linha (1.1.1) aparece como solução de um sistema de equações de Einstein e Maxwell modificadas por um termo na densidade lagrangeana que quebra a invariância de gauge do eletromagnetismo.

A apresentação desta tese pretende ser auto-suficiente e foi organizada da seguinte forma: no capítulo dois, fazemos uma breve revisão da segunda quantização de um campo escalar massivo em espaços curvos, introduzindo a definição dos coeficientes de Bogoliubov assim como as funções de Green da teoria. No capítulo três, apresentamos o resultado de Kalnins descrevendo os dez sistemas de coordenadas onde a equação de Klein-Gordon é solúvel por separação de variáveis, no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional. Em seguida quantizamos um campo escalar real massivo em três destes sistemas de coordenadas, a saber, Rindler, Milne e um sistema estudado por Costa [19] e mostramos como naturalmente aparecem vácuos unitariamente não equivalentes (Efeito Fulling-Unruh). No capítulo quatro comparamos alguns destes vácuos entre si [20]. No ca

pítulo cinco, calculamos alguns propagadores associados a estes sistemas de coordenadas fazendo, para isso, um estudo detalhado de como definir frequências positivas e negativas em sistemas de coordenadas não estacionários<sup>[21]</sup>. No capítulo seis, fazemos uma revisão da segunda quantização de um campo escalar massivo na métrica de Robertson-Walker. Apresentamos, em seguida, o modelo de Bernard e Duncan e o modelo de Novello e Salim. Mostramos que a equação de Klein-Gordon para um campo massivo real é exatamente solúvel neste modelo cosmológico em termos das funções de Mathieu e harmônicos esféricos generalizados<sup>[22]</sup>. Utilizamos então esta base de funções completa para efetuarmos a quantização do campo clássico  $\Phi(x)$ , que foi expandido numa série de Fourier onde os coeficientes da expansão são os operadores de criação e destruição de quanta do campo.

Em seguida procuramos uma representação adequada da álgebra dos operadores, ou melhor, a construção dos estados físicos da teoria. Definimos um estado de vácuo  $|0^{in}\rangle$  em  $t \rightarrow -\infty$ , onde a geometria é plana e computamos por meio dos coeficientes de Bogoliubov o número de quanta presentes neste estado em  $t \rightarrow \infty$  (onde a geometria é novamente plana) após o universo evoluir através de uma fase de contração seguida por uma fase de expansão.

No limite quando o valor mínimo do fator de escala do modelo ( $a_0$ ) é muito menor que o comprimento compton associado aos quanta do campo escalar ( $ma_0 \ll 1$ ) encontramos uma expressão explícita para o número dos quanta criados devido ao caráter não estacionário do modelo. No outro limite ( $ma_0 \gg 1$ )

mostramos que não há quanta criados durante a evolução do universo.

Neste limite o comprimento compton das partículas ( $\frac{1}{m}$ ) é pequeno comparado com  $a_0$  que é o comprimento característico sobre o qual variam as dimensões do espaço-tempo.

Nos apêndices apresentamos os resultados matemáticos que foram utilizados no corpo da tese. No apêndice (A) apresentamos rapidamente propriedades de algumas funções especiais. No apêndice (B), as funções de Bessel são descritas em detalhes assim como as funções de Mathieu no apêndice (C). No apêndice (D) as autofunções associadas ao laplaciano no triespaco com seção euclidiana, com curvatura negativa e com curvatura positiva são listadas. No apêndice (E) mostramos explicitamente como encontrar alguns coeficientes que normalizam as bases de funções que utilizamos no decorrer da tese. No apêndice (F) a demonstração rigorosa de um resultado envolvendo variáveis complexas para o cálculo dos propagadores retardados e avançados no universo de Milne é feita e, finalmente no apêndice (G) fazemos a extensão analítica do teorema de adição das funções de Bessel.

## CAPITULO II

### O CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS

#### 2.1 Quantização de um campo escalar real massivo em sistemas de coordenadas curvilíneas no espaço-tempo de Minkowski e em espaços curvos

Nos últimos anos tentativas de generalizar teorias que envolvem equações de onda lineares descrevendo campos de spin zero, meio e um [23],[24] que formulamos no espaço-tempo de Minkowski para espaços-tempo curvos, trouxeram novos e interessantes resultados. Com o objetivo de evitar as dificuldades decorrentes do estudo de equações descrevendo campos de spin maior que zero, tais como o problema da invariância de gauge para o campo eletromagnético - a existência de graus de liberdade não físicos para o campo  $A_\mu(x)$  [25], estudaremos apenas o campo de spin zero. Assim, alcançaremos os mesmos resultados fundamentais daqueles obtidos com o estudo de campos de spin maior que zero simplificando de forma relevante os cálculos envolvidos.

Iniciaremos estudando um campo escalar clássico real massivo  $\phi(x^0, x^i) \equiv \phi(x)$  definido sobre um espaço-tempo de

Minkowski d-dimensional satisfazendo a equação de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu,\nu} + m^2 \phi = 0 \quad . \quad (2.1.1)$$

A equação (2.1.1) pode ser obtida usando-se o Princípio Variacional se escolhemos como densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2) \quad . \quad (2.1.2)$$

Quando a teoria for quantizada o termo  $m$  será interpretado como a massa dos quanta do campo descrevendo partículas neutras de spin zero.

A generalização da equação (2.1.1) para um espaço-tempo curvo é feita supondo uma métrica de fundo  $g_{\alpha\beta}(x)$ , isto é, um espaço-tempo  $\{M, g_{\alpha\beta}(x)\}$  clássico onde a equação de movimento satisfeita pelo campo  $\phi(x)$  é linear, desde que não exista auto-interação entre as partículas.

Como demonstrou Choquet Bruhat<sup>[26]</sup>, a existência de soluções das equações de movimentos dos campos físicos conhecidos exige uma variedade globalmente hiperbólica e orientada temporalmente, de forma que o problema de Cauchy esteja bem colocado. A generalização mais simples da equação (2.1.1) para espaços-tempo curvos é obtida simplesmente substituindo a derivada simples  $_{,\mu}$  pela derivada covariante  $_{;\mu}$  de forma que a equação de Klein-Gordon se escreva

$$g^{\mu\nu} \phi_{;\mu;\nu} + m^2 \phi = 0 \quad . \quad (2.1.3)$$

A equação (2.1.3) pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu})_{,\nu} + m^2 \phi = 0 \quad (2.1.4)$$

Com este procedimento dizemos que o campo  $\phi(x)$  está minimamente acoplado ao campo gravitacional  $g_{\alpha\beta}(x)$ . No entanto, a equação (2.1.3) não é a única generalização possível da equação (2.1.1). Poderíamos adicionar termos do tipo  $R^{\mu\nu} \phi_{,\mu;\nu}$  ou  $R\phi$  que se anulam no caso da curvatura ser zero.

Note-se que a equação (2.1.3) não é invariante sob o grupo das transformações conformes, caso o campo tenha massa nula. Uma transformação conforme na métrica  $g_{\alpha\beta}(x)$  é definida como:

$$g_{\alpha\beta}(x) \rightarrow \bar{g}_{\alpha\beta}(x) = \Omega^2(x) g_{\alpha\beta}(x) \quad (2.1.5)$$

onde  $\Omega(x)$  é uma função real, contínua e finita. Com esta transformação os símbolos de Cristoffel, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura se escrevem como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Omega^{-1} (\delta_{\mu}^{\rho} \Omega_{;\nu} + \delta_{\nu}^{\rho} \Omega_{;\mu} - g_{\mu\nu} g^{\rho\alpha} \Omega_{;\alpha}) \quad (2.1.6)$$

$$R^{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{R}^{\nu}_{\mu} = \Omega^{-2} R^{\nu}_{\mu} - (d-2) \Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{;\mu;\rho} g^{\rho\nu} + (d-2) \Omega^{-d} (\Omega^{d-2})_{;\rho;\sigma} g^{\rho\sigma} \delta^{\nu}_{\mu} \quad (2.1.7)$$

$$R \rightarrow \bar{R} = \Omega^{-2} R + 2(d-2) (\Omega^{-3})_{;\mu;\nu} g^{\mu\nu} +$$



$$+ (d-1)(d-4)(\Omega^{-4})_{;\mu\Omega;\nu} g^{\mu\nu} . \quad (2.1.8)$$

Podemos encontrar também como se comporta o campo  $\phi(x)$  sob a transformação (2.1.5):

$$\phi(x) \rightarrow \bar{\phi}(x) = \Omega^{(2-d)/2} \phi(x) . \quad (2.1.9)$$

Se exigimos que a equação de Klein-Gordon (2.1.3) para um campo de massa nula seja invariante sob a transformação definida pela equação (2.1.5), temos que modificá-la adicionando um termo proporcional ao escalar de curvatura, a saber:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{;\mu})_{;\nu} + (m^2 + \xi(d)R)\phi = 0 \quad (2.1.10)$$

onde  $\xi(d) = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}$  .

Quando utilizamos este procedimento dizemos que existe um acoplamento não-mínimo entre o campo  $\phi(x)$  e a geometria. Pode-se mostrar que existe um conjunto de soluções da equação (2.1.10) que forma uma base no espaço das soluções desta equação. Vamos então definir um produto interno  $( , )$  no espaço das soluções da equação (2.1.10).

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas soluções da equação (2.1.10). O produto escalar  $(f,g)$  é definido como

$$\begin{aligned} (f,g) &= -i \int (f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g^*) \sqrt{-g}_\Sigma d\Sigma^\mu \\ &= -i \int (f g^*_{;\mu} - f_{;\mu} g^*) \sqrt{-g}_\Sigma d\Sigma^\mu \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

onde  $d\Sigma^\mu = \eta^\mu d\Sigma$ , com  $\eta^\mu$  sendo um vetor unitário orientado para o futuro, ortogonal à hipersuperfície de Cauchy  $\Sigma$  e  $d\Sigma$  é o elemento de volume em  $\Sigma$ . Por exemplo, se escolhermos um sistema de coordenadas tal que  $\Sigma$  é a hipersuperfície  $x^0 = \text{cte}$ , então

$$d\Sigma_0 = dx^1 dx^2 \dots dx^{d-1} \quad e$$
$$d\Sigma_i = 0 \quad . \quad (2.1.12)$$

O conjunto de todas as soluções complexas de (2.1.10) que possuem quadrado integrável e cujas primeiras derivadas sobre a superfície de Cauchy  $\Sigma$  tem também quadrado integrável, formam um espaço de Soboleff<sup>[27]</sup>  $H^1$ .

O produto escalar definido pela equação (2.1.11) é hermitiano. Entretanto, para as soluções da equação de Klein-Gordon, este não é positivo definido. Isto é:

$$(f, g)^* = (g, f) \quad .$$

Segue-se daí que

$$(f^*, g^*) = - (f, g)^* = - (g, f) \quad .$$

A equação (2.1.10), da mesma forma que a equação (2.1.1) também pode ser obtida de um princípio variacional se postulamos a seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - (m^2 + \xi (d) R) \phi^2) \quad . \quad (2.1.13)$$

O momento canonicamente conjugado à  $\phi(x)$  é definido como

$$\pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\phi_{,0})} = \sqrt{-g} g^{0\mu} \phi_{, \mu} \quad (2.1.14)$$

A passagem da teoria clássica para uma teoria quântica se fundamenta em três pontos:

- 1º) A álgebra dos operadores
- 2º) As equações dinâmicas
- 3º) A construção dos estados físicos

Vamos examinar cada um dos itens acima e mostrar como se torna problemática a construção dos estados físicos quando tentamos formular uma teoria de campos quânticos em espaços curvos ou em coordenadas curvilíneas no espaço-tempo de Minkowski.

Para a construção da álgebra dos operadores, devemos postular que  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  são operadores agindo num espaço de Hilbert dos estados físicos e pedir que as seguintes relações de comutação se cumpram:

$$[\phi(x), \phi(x')]_{\Sigma} = [\pi(x), \pi(x')]_{\Sigma} = 0 \quad (2.1.15.a)$$

e

$$[\phi(x^0, x^i), \pi(x^0, x'^i)]_{\Sigma} = i \delta^{d-1}(x^i - x'^i) \quad (2.1.15.b)$$

A covariância da teoria nos garante que as rela-

ções de comutação (2.1.15) independem da hipersuperfície tipo espaço  $\Sigma$  escolhida.

No estudo das equações dinâmicas cabe aqui uma importante observação. Na teoria de campos formulada no espaço-tempo de Minkowski em coordenadas cartesianas, conhecendo-se a densidade Lagrangeana podemos obter o tensor momento-energia  $T^{\mu\nu}$  e os geradores de translações:

$$p^\nu = \int T^{\mu\nu} d\Sigma_\mu \quad (2.1.16)$$

onde o Hamiltoniano é a componente zero da expressão acima. Uma forma de generalizar para espaços curvos ou coordenadas curvilíneas o Hamiltoniano, é defini-lo como

$$H = \int \sqrt{-g} d\Sigma_\mu T^{\mu\nu} \xi_\nu \quad (2.1.17)$$

onde  $\xi^\mu$  é um vetor de Killing do tipo tempo. No entanto, se este vetor de Killing não existe nem mesmo assintoticamente, a definição de um Hamiltoniano  $H$  torna-se problemática. A existência de um vetor de Killing do tipo tempo torna a equação (2.1.17) bem definida, podendo-se demonstrar que as equações de movimento (2.1.10) coincidem com as equações de Heisenberg.

Já examinamos o primeiro e o segundo itens expostos acima, faltando apenas o exame dos problemas que surgem quando desejamos construir um espaço dos vetores estados  $|i\rangle$  que descrevem os possíveis estados físicos do sistema numa métrica de fundo curva. Para isto, vamos rever sucintamente a construção do espaço dos vetores estados no espaço-tempo de Min

kowski. Vamos então estudar a quantização do campo  $\phi(x)$  em um toro  $(d-1)$  dimensional de lado  $L$ , o que corresponde a assumir condições periódicas utilizando um sistema de coordenadas cartesianas  $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ .

A equação (2.1.1) admite um conjunto completo  $(u_k, u_k^*)$  onde

$$u_k(x) = \frac{1}{(2\omega L^{d-1})^{1/2}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega x^0)} \quad (2.1.18)$$

Os modos  $u_k(x)$  têm frequência positiva definida (momento  $\vec{k}$  e energia  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ) e qualquer solução da equação (2.1.1) pode ser escrita como uma série de Fourier envolvendo  $u_k(x)$  e  $u_k^*(x)$ .

O operador de campo  $\phi(x)$  é expandido como:

$$\phi(x) = \sum_k a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x) \quad (2.1.19)$$

onde  $a_k$  e  $a_k^\dagger$  são operadores que agem no espaço dos estados físicos.

Para o campo escalar, o produto interno definido pela equação (2.1.11) não é positivo definido. Podemos escolher a base  $\{u_k, u_k^*\}$  de forma que

$$(u_k(x), u_k^*(x)) = 0$$

$$(u_k(x), u_{k'}(x)) = \delta_{kk'}$$

$$(u_k^*(x), u_{k'}^*(x)) = -\delta_{kk'} \quad (2.1.20)$$

(Temos, então, um conjunto ortonormal completo  $\{u_k, u_k^*\}$ ).

Como estamos quantizando o campo  $\Phi(x)$  em um toro  $(d-1)$  dimensional, temos que

$$k_i = \frac{2\pi j_i}{L} \quad j_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nesta tese usamos alternadamente a quantização no toro de lado  $L$  (discreta) e a quantização num volume infinito ( $L \rightarrow \infty$ , quantização contínua). A passagem do discreto para o contínuo é trivial e é feita substituindo o somatório da equação (2.1.19) por uma integral:

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{d-1} \sum_k \rightarrow \int d^{d-1} k$$

e

$$\delta_{k k'} \rightarrow \delta^{(d-1)}(k - k') .$$

Substituindo a equação (2.1.19) em (2.1.20) encontramos as relações de comutação para os operadores  $a_k$  e  $a_k^\dagger$ , a saber:

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k k'}$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 . \quad (2.1.21)$$

Podemos então construir o espaço de Hilbert dos estados físicos encontrando uma representação adequada da álgebra

bra dos operadores.

Uma representação conveniente é a chamada representação de Fock. Os vetores estado são constituídos a partir do estado de vácuo  $|0\rangle$ , o estado de zero partículas. O estado de vácuo tem a propriedade de ser aniquilado por qualquer operador de destruição  $a_k$ ,

$$a_k |0\rangle = 0 \quad \forall k .$$

O estado de uma partícula  $|1_k\rangle$  é construído aplicando-se o operador  $a_k^\dagger$  no estado do vácuo, isto é,

$$|1_k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle .$$

Desta forma podemos construir estados de várias partículas

$$\begin{aligned} |n_{k_1} \dots n_{k_j}\rangle &= (n_{k_1}! \dots n_{k_j}!)^{-1/2} (a_{k_1}^\dagger)^{n_{k_1}} \dots \\ &\dots (a_{k_j}^\dagger)^{n_{k_j}} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Utilizando a Hamiltoniana canônica

$$H = \int d^{d-1}x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{L})$$

e a expansão do operador de campo  $\phi(x)$  (2.1.19) chegamos a:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \quad (2.1.23)$$

O operador acima é divergente quando calculamos seu valor esperado no estado do vácuo e para contornarmos esta dificuldade, usamos o ordenamento normal ( $: :$ ).

$$:H: = H_{\text{reg}} = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (2.1.24)$$

de forma que  $\langle 0 | H_{\text{reg}} | 0 \rangle = 0$ . (2.1.25)

O ordenamento normal equivale a subtrairmos a quantidade  $\frac{1}{2} \sum_k \omega_k$  do valor esperado do operador  $H$  no estado do vácuo. O método utilizado para a renormalização do operador  $H$  se torna problemático quando trabalhamos em espaços curvos pois, de alguma forma, a energia do estado de vácuo deve ser responsável pela curvatura do espaço-tempo, não podendo ser desprezada. Finalmente temos que o operador número de partículas associado no modo  $k$  é dado por

$$N_k = a_k^\dagger a_k \quad (2.1.26)$$

É claro que

$$N = \sum_k N_k \quad (2.1.27)$$

e

$$[N, H] = 0 \quad (2.1.28)$$

Os problemas ligados às ambiguidades na definição de partículas aparecem quando notamos que a repre



sentação da álgebra dos operadores não é univocamente determinada. Para mostrar isto, vamos introduzir o conceito de transformação de Bogoliubov.

## 2.2 As Transformações de Bogoliubov

Em 1958 Bogoliubov<sup>[28]</sup>, estudando um sistema de fermions, introduziu um conjunto de transformações lineares nas bases que expandem um campo fermiônico  $\psi(x)$  de tal forma que as relações de comutação ficam preservadas, razão pela qual chamou-as de transformações canônicas.

No caso de um campo bosônico vamos mostrar como aparece naturalmente as transformações de Bogoliubov. Para isto, vamos supor a existência de um segundo conjunto ortonormal completo  $\{v_j, v_j^*\}$  de forma que o operador de campo  $\phi(x)$  possa ser expandido utilizando-se a base  $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$  assim como a base  $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$ , ou melhor:

$$\phi(x) = \sum_i a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \quad (2.2.1.a)$$

e

$$\phi(x) = \sum_j b_j v_j(x) + b_j^\dagger v_j^*(x) \quad (2.2.1.b)$$

Como temos duas expansões (a princípio distintas) do operador de campo  $\phi(x)$ , temos dois estados de vácuo, isto é:

$$a_i |0\rangle = 0 \quad \forall i \quad (2.2.2.a)$$

$$b_j | \bar{0} \rangle = 0 \quad \forall j . \quad (2.2.2.b)$$

Assim, geramos dois espaços de Fock distintos. Como supomos que o conjunto ortonormal  $\{u_i, u_i^*\}$  assim como o conjunto ortonormal  $\{v_j, v_j^*\}$  são completos, podemos escrever os modos novos  $\{v_j, v_j^*\}$  como uma combinação linear dos modos antigos:

$$v_j(x) = \sum_i \alpha_{ji} u_i(x) + \beta_{ji} u_i^*(x) , \quad (2.2.3)$$

e inversamente

$$u_i(x) = \sum_j \alpha_{ji}^* v_j - \beta_{ji} v_j^*(x) \quad (2.2.4)$$

Os coeficientes da expansão (2.2.3) e (2.2.4) são chamados de coeficientes de Bogoliubov e podem ser obtidos usando-se a definição do produto interno (2.1.11) entre os modos novos e antigos

$$\alpha_{ij} = (v_i, u_j) \quad (2.2.5.a)$$

$$\beta_{ij} = - (v_i, u_j^*) . \quad (2.2.5.b)$$

Se os dois conjuntos de modos estão normalizados, os coeficientes de Bogoliubov  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  satisfazem as seguintes relações:

$$\sum_j \alpha_{ij} \alpha_{kj}^* - \beta_{ij} \beta_{kj}^* = \delta_{ik} \quad (2.2.6.a)$$

$$\sum_j \alpha_{ij} \beta_{kj} - \beta_{ij} \alpha_{kj} = 0 . \quad (2.2.6.b)$$

Da mesma forma que escrevemos o conjunto ortonormal novo como uma combinação linear do conjunto ortonormal antigo (e vice-versa) também podemos escrever os operadores  $a_j$  e  $a_j^\dagger$  como uma combinação linear de  $b_j$  e  $b_j^\dagger$  fazendo uso dos coeficientes de Bogoliubov:

$$a_i = \sum_j \alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger \quad (2.2.7.a)$$

e

$$b_j = \sum_i \alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger . \quad (2.2.7.b)$$

Quando os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{ij}$  são diferentes de zero, as duas quantizações baseadas nos modos  $\{u_i, u_i^*\}$ ,  $|0\rangle$  e  $\{v_j, v_j^*\}$ ,  $|\bar{0}\rangle$  não são necessariamente equivalentes. De fato, o vácuo  $|0\rangle$  (associado a  $a_j$  e  $a_j^\dagger$ ) contém partículas associadas aos modos  $v_j$  e da mesma forma o vácuo  $|\bar{0}\rangle$  contém partículas associadas aos modos  $u_i$ . O valor esperado do operador  $N_i = a_i^\dagger a_i$  calculado no estado de vácuo  $|\bar{0}\rangle$  é

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 , \quad (2.2.8)$$

o que nos leva a afirmar que o vácuo associado aos modos  $\{v_j, v_j^*\}$  contém  $\sum_j |\beta_{ij}|^2$  partículas associadas aos modos  $u_i(x)$ . Deste

modo, quando os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{ij}$  são nulos, os vácuos  $|0\rangle$  e  $|\bar{0}\rangle$  são ditos equivalentes.

A possibilidade de encontrarmos diferentes representações da álgebra dos operadores na Teoria Quântica de Campos foi levantada pela primeira vez por Wightman<sup>[29]</sup> (1967). Este argumenta que, devido a existência de infinitos graus de liberdade do campo clássico de Klein-Gordon, quando passarmos a Teoria Quântica construindo a álgebra dos operadores, escolhendo uma representação apropriada desta álgebra, tal representação não será única, mas apenas uma das diferentes e não equivalentes representações desta álgebra<sup>[30]</sup>. Temos então que, encontrar um argumento físico plausível, de forma a selecionar uma destas representações. Várias tentativas para elucidar este problema foram feitas. Padmanabhan<sup>[31]</sup> num interessante artigo, começa tratando um oscilador harmônico unidimensional com frequência  $\omega$  e mostra que existem estados quânticos que são invariantes sob as transformações de Bogoliubov. Neste caso, os operadores  $N$  e  $\bar{N}$  têm o mesmo valor esperado quando calculado nestes estados  $|\theta\rangle$  ou melhor:

$$\langle \theta | a^\dagger a | \theta \rangle = \langle \theta | b^\dagger b | \theta \rangle \quad (2.2.9)$$

Em seguida, generaliza o resultado acima para vários graus de liberdade.

Seguindo uma outra linha, e estudando bases de funções, Dray e Manogue<sup>[32]</sup> fazem a distinção entre conjuntos completos e conjuntos equivalentes. A questão de completeza não é trivial não tendo sido abordada pelos autores citados. Voltaremos a tratá-la

quando estudarmos os sistemas de coordenadas de Milne e de Rindler.

Dray e Manogne estudaram a equivalência de dois conjuntos ortonormais, ou seja, em que condições um conjunto pode ser expandido em termos do outro. Mostram que existem conjuntos que satisfazem as identidades de Bogoliubov (eq. 2.2.6) e que não são equivalentes! Assim, nos cálculos de produção de partículas, aonde a completeza dos modos não está bem estabelecida, os resultados obtidos podem conduzir a interpretação equivocadas.

A produção de partículas na presença de um campo elétrico é bastante conhecida na literatura<sup>[33]</sup>. Ainda na década de 40, Schiff, Snider e Weinberg<sup>[34], [35]</sup> quantizam um campo escalar na presença de um campo elétrico estático e mostram que as frequências dos modos não são necessariamente reais, não existe uma correspondência entre frequências positivas e negativas na expansão de Fourier do operador de campo e, surpreendentemente este conjunto de funções não mais forma um conjunto ortogonal.

Este resultado é conhecido na literatura como Paradoxo de Klein. Voltemos à questão das diferentes representações da álgebra dos operadores. Podemos encontrar uma expressão relacionando o vácuo  $|0\rangle$  com o vácuo  $|\bar{0}\rangle$  :

$$|0\rangle = \frac{1}{\langle 0|\bar{0}\rangle} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{jk} b_j^\dagger V_{jk} b_k^\dagger\right\} |\bar{0}\rangle \quad (2.2.10)$$

onde  $V_{jk}$  é a amplitude de criação de pares e é dada por

$$V_{jk} = i \sum_{\ell} \beta_{j\ell}^* \alpha_{\ell k}^{-1} \quad . \quad (2.2.11)$$

A amplitude  $\langle 0 | \bar{0} \rangle$  não é necessariamente convergente e para um campo bosônico, temos apenas a garantia que  $\alpha_{j\ell}^{-1}$  existe.

A questão fundamental que se coloca é: Como escolher entre dois espaços de Fock distintos gerados a partir dos vácuos  $|0\rangle$  e  $|\bar{0}\rangle$ ? O conceito de partícula torna-se nebuloso e passa então a depender da decomposição escolhida (ver eq. 2.2.1). Esperaríamos que, de acordo com o espírito da Teoria Geral da Relatividade, expresso através do Princípio da covariância geral, que sistemas de coordenadas fossem fisicamente irrelevantes. No entanto, como veremos no capítulo III, dependendo do sistema de coordenadas escolhido, temos diferentes bases de funções para expandir o operador de campo  $\phi(x)$ , tornando ambíguo o conceito de partícula. Diversas tentativas para responder a questão - Como definir partículas? - foram tentadas na literatura. Nachtman<sup>[36],[37]</sup> (1967) se utiliza do Propagador de Feynman para dar resposta a questão acima. Ainda fazendo uso do propagador de Feynman e utilizando a noção de partículas "in" e "out", Rumpf e Urbantke<sup>[38]</sup> (1977) pretenderam resolver a ambiguidade acima mencionada. Tentativa diferente é feita por Castagnino, Verbeure e Werder<sup>[39]</sup> (1975) que definem partículas por meio da diagonalização instantânea do Hamiltoniano; o mesmo método é utilizado por Grib e Mamayev e Mostepanenko<sup>[8],[9]</sup> para o modelo Cosmológico de Robertson-Walker. Este método tem a desvantagem de apresentar uma taxa infinita de produção de partículas.

Isto ocorre pois os estados de vácuo definidos em diferentes instantes de tempo pertencem a diferentes espaços de Hilbert (representações não equivalentes da álgebra dos operado

res). Um caminho para tentar solucionar o problema é formular a teoria apenas em termos das funções de Green, evitando assim discutir o problema da diagonalização do Hamiltoniano. Na seção seguinte faremos um estudo resumido das funções de Green da teoria no espaço-tempo de Minkowski em coordenadas cartesianas e em espaços curvos e depois, no capítulo cinco, apresentamos alguns exemplos bastantes elucidativos de cálculo de funções de Green em sistemas de coordenadas curvilíneas.

### 2.3 As funções de Green associadas ao campo escalar - um tratamento geral

Antes de apresentarmos as diversas funções de Green associadas ao campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski, vamos mostrar como aparece o método das funções de Green. Para isto, vamos supor a existência de um campo clássico  $\Phi(x)$  onde uma corrente externa  $j(x)$  age como fonte do campo. Assim, a equação (2.1.1) torna-se<sup>[40]</sup>

$$\eta^{\mu\nu} \Phi_{,\mu,\nu} + m^2\Phi = j(x). \quad (2.3.1)$$

Com as funções de Green, temos um poderoso método capaz de encontrar soluções da equação acima. Para isto, vamos supor a existência de  $D(x, x') = D(x - x')$ , solução da equação

$$\eta^{\mu\nu} D_{,\mu,\nu} + m^2 D = \delta^d(x - x') \quad . \quad (2.3.2)$$

Uma solução geral da equação (2.3.1) deve ter a forma:

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \int d^d x' D(x, x') j(x') \quad (2.3.3)$$

onde  $\bar{\phi}(x)$  é solução da equação de Klein-Gordon homogênea

$$\eta^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu,\nu} + m^2 \bar{\phi}(x) = 0 \quad (2.3.4)$$

O bi-escalar  $D(x, x')$  tem um significado físico bastante simples. Representa o campo no ponto  $x$  gerado por uma densidade de corrente unitária localizada no ponto  $x'$ . É importante lembrar que as soluções das equações (2.3.2) e (2.3.4) não são únicas, de forma que devemos impor condições de contorno apropriados dependendo do problema físico em consideração.

Com a teoria quantizada, as várias funções de Green da equação de Klein Gordon podem ser obtidas quando calculamos o valor esperado no vácuo do produto de operadores de campo. Vamos definir o valor esperado no vácuo do comutador e anti-comutador dos campos

$$i \Delta(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle \quad (2.3.5)$$

$$\Delta^{(1)}(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')]_+ | 0 \rangle \quad (2.3.6)$$

onde  $[\ , ]_+$  indica o anti-comutador dos operadores de campo.

Na literatura  $\Delta(x, x')$  é conhecida como a função de Pauli-Jordan ou função de Schwinger, enquanto que  $\Delta^{(1)}(x, x')$



é chamada de função de Hadamard. Estas funções de Green podem ser decompostas nas partes de frequência positiva e negativa, a saber:

$$i \Delta(x, x') = \Delta^+(x, x') - \Delta^-(x, x') \quad (2.3.7.a)$$

$$\Delta^{(1)}(x, x') = \Delta^+(x, x') + \Delta^-(x, x') \quad (2.3.7.b)$$

onde  $\Delta^+(x, x')$  e  $\Delta^-(x, x')$  são dadas por

$$\Delta^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \quad (2.3.8.a)$$

e

$$\Delta^-(x, x') = \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle \quad (2.3.8.b)$$

As funções  $\Delta^+(x, x')$  e  $\Delta^-(x, x')$  são conhecidas como as funções de Wightman. Fazendo uso da definição de  $\Delta(x, x')$  definimos as funções de Green retardadas e avançadas:

$$\Delta_R(x, x') = - \theta(x^0 - x'^0) \Delta(x, x') \quad (2.3.9.a)$$

$$\Delta_A(x, x') = \theta(x'^0 - x^0) \Delta(x, x') \quad (2.3.9.b)$$

onde

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases}$$

é a função degrau.

As funções de Wightman  $\Delta^+(x, x')$  e  $\Delta^-(x, x')$ , as

sim como a função de Pauli-Jordan,  $\Delta(x, x')$ , satisfazem a equação de Klein-Gordon homogênea

$$(\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu,\nu} + m^2 \phi) \Delta^\pm(x, x') = 0 \quad (2.3.10.a)$$

$$(\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu,\nu} + m^2 \phi) \Delta(x, x') = 0 \quad (2.3.10.b)$$

enquanto que as funções de Green  $\Delta_R(x, x')$  e  $\Delta_A(x, x')$  satisfazem a equação de Klein-Gordon não homogênea

$$(\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu,\nu} + m^2 \phi) \Delta_{A,R}(x, x') = \delta^d(x, x') \quad (2.3.11)$$

Finalmente vamos introduzir o propagador causal, definindo elementos de matriz dos operadores do campo ordenados temporalmente. Este propagador foi introduzido por Feynman e é definido como o valor esperado do produto ordenado dos operadores de campo calculado no estado de vácuo

$$\begin{aligned} i \Delta_F(x, x') &= \langle 0 | T \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - x'^0) \Delta^+(x, x') + \theta(x'^0 - x^0) \Delta^-(x, x') \quad (2.3.12) \end{aligned}$$

O propagador de Feynman  $\Delta_F(x, x')$  satisfaz a equação de Klein-Gordon não homogênea

$$(\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu,\nu} + m^2 \phi) \Delta_F(x, x') = -\delta^d(x, x') \quad (2.3.13)$$

Pode-se mostrar que

$$i\Delta_F(x) = \frac{1}{2} [\Delta^{(1)}(x) + i\epsilon(x)\Delta(x)]$$

onde  $\epsilon(x) = \frac{x^0}{|x^0|}$  é a função sinal no tempo.

Desde que  $\Delta^{(1)}(x)$  é uma função par em  $x$  enquanto que  $\Delta(x)$  e  $\epsilon(x^0)$  são funções ímpares  $\Delta_F(x)$  é uma função par em  $x$ . Enquanto  $\Delta(x, x')$  se anule fora do cone de luz, o propagador de Feynman não obedece a esta regra. Este resultado pode ser visto pela expressão do propagador de Feynman em termo da função de Hadamard e da função de Pauli Jordan. O propagador de Feynman pode ser escrito na forma

$$\Delta_F(x, x') = \frac{-i\pi}{(4\pi i)^{d/2}} \left( \frac{2m^2}{-\sigma + i\epsilon} \right)^{\frac{d-2}{4}} H^{(2)}_{\frac{1}{2}d-1} \left( 2m^2(\sigma - i\epsilon) \right)^{1/2} \quad (2.3.14)$$

onde  $\sigma = \frac{1}{2}(x-x')^2$  e  $H^{(2)}$  é a função de Hankel de segundo tipo. (o termo  $i\epsilon$  foi acrescentado para indicar o contorno correto na integração no plano complexo  $\text{Re } k_0$  x  $\text{Im } k_0$ ).

O passo seguinte é generalizar todo o formalismo exposto brevemente acima para espaços curvos Riemannianos.

Seja, então,  $M_d$  uma variedade globalmente hiperbólica, onde  $\Sigma$  é uma superfície de Cauchy na variedade. Conhecendo-se os dados de Cauchy sobre  $\Sigma$ ,  $\phi_\Sigma(x)$  e  $\dot{\phi}_\Sigma(x)$  ( $\dot{f}(x) = f(x)_{,0}$ ) uma solução para a equação de movimento para o campo  $\phi(x)$  é dada por

$$\phi(x') = \int_\Sigma G(x, x') \dot{\phi}_\Sigma(x) d\Sigma_x - \int G(x, x')_{,\mu} \eta^\mu \phi_\Sigma(x) d\Sigma_x \quad (2.3.15)$$

onde  $G(x, x')$  é a generalização da função de Pauli-Jordan para espaços-tempo curvos, satisfazendo a equação

$$g^{\mu\nu} G(x, x')_{;\mu;\nu} + (m^2 + \xi(d)R) G(x, x') = 0. \quad (2.3.16)$$

A solução para o problema de Cauchy (ver equação 2.3.15) pode ser também obtida fazendo uso da definição do produto escalar dado pela equação (2.1.11), isto é:

$$\phi(x) = -i (\phi(x'), G(x, x'))_{x'}^* . \quad (2.3.17)$$

Pode-se mostrar que  $G(x, x')$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$G(x, x') = -G(x', x)$$

$$G(x, x') = 0 \quad \text{se } x' \notin \Sigma$$

$$\eta^\mu \partial_\mu G(x, x') = \gamma^{-1/2} \delta_\Sigma(x, x') \quad \text{se } x, x' \in \Sigma$$

onde  $\partial_\mu G(x, x') = \frac{\partial}{\partial x^\mu} G(x, x')$  e  $\gamma^{-1/2} \delta_\Sigma(x, x')$  é a função delta de Dirac sobre a hipersuperfície  $\Sigma$  com métrica  $\gamma_{\mu\nu}$ .

$$\eta^\mu \partial_\mu \eta^\nu \partial'_\nu G(x, x') = 0 \quad \text{se } x, x' \in \Sigma.$$

Desta forma, este propagador  $G(x, x')$  pode ser definido exatamente como o definíamos no espaço-tempo de Minkowski

$$i G(x, x') = [\phi(x), \phi(x')] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle. \quad (2.3.18)$$

Como já tivemos a oportunidade de observar, uma teoria de campos em espaços curvos apresenta uma série de dificuldades devido, por exemplo, a ausência de simetrias que encontramos naturalmente no espaço-tempo de Minkowski. Uma destas dificuldades é a inexistência de uma maneira natural de definirmos frequências positivas e negativas dos modos soluções da equação de Klein-Gordon.

O que geralmente acontece em métricas não estacionárias ou em espaços-tempo com horizonte de eventos (Schwarzschild por exemplo) é que a base de funções que é solução da equação de onda com frequência positiva e negativa definida numa região do espaço-tempo não tem mais frequência positiva e negativa definida em outra região.

Como mostramos que podemos encontrar representações distintas da álgebra dos operadores quando utilizamos diferentes bases de funções para a expansão do operador de campo  $\phi(x)$ , vamos estudar como se comportam as diferentes funções de Green da teoria quando efetuamos uma transformação de Bogoliubov na base de funções que utilizamos na expansão do operador de campo  $\phi(x)$ . Como vimos, a existência de diferentes espaços de Fock está ligado a não anulação dos coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{ij}$  (ver eq. 2.2.8).

Seja então  $\{u_j(x), u_j^*(x)\}$  um conjunto completo solução da equação de Klein-Gordon. A expansão do propagador  $G(x, x')$  em termos destes modos é facilmente obtida e é dada por:

$$iG(x, x') = \sum_j u_j(x)u_j^*(x') - u_j^*(x)u_j(x') \quad . \quad (2.3.19.a)$$

Substituindo (2.2.4) em (2.3.19.a), encontramos:

$$i G(x, x') = \sum_i v_i(x) v_i^*(x') - v_i^*(x) v_i(x') . \quad (2.3.19.b)$$

Logo, a função de Pauli-Jordan é invariante sob as transformações de Bogoliubov definidas pelas eqs. (2.2.3) e (2.2.4). Assim,  $G(x, x')$  é conhecida na literatura como a função de Green independente do vácuo.

A segunda função de Green a ser generalizada é a função de Hadamard  $G^{(1)}(x, x')$ , que é definida como:

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')]_+ | 0 \rangle .$$

Da mesma forma que fizemos com o propagador de Pauli Jordan, podemos obter a expansão de  $G^{(1)}(x, x')$  usando o conjunto completo  $\{u_j(x), u_j^*(x')\}$ , que nos dá

$$G^{(1)}(x, x') = \sum_j u_j(x) u_j^*(x') + u_j^*(x) u_j(x') . \quad (2.3.20)$$

No entanto, a expressão (2.3.20) não é invariante sob as transformações de Bogoliubov, nos levando a uma multiplicidade de funções de Hadamard, cada uma correspondendo a uma diferente expansão do operador de campo  $\phi(x)$  (ver eq. 2.2.1). No caso de termos apenas dois espaços de Fock não equivalentes ( $\beta_{ij} \neq 0$ ) gerados por  $|0\rangle$  e  $|\bar{0}\rangle$  temos que definir

$$\bar{G}^{(1)}(x, x') = \langle \bar{0} | [\phi(x), \phi(x')]_+ | \bar{0} \rangle .$$

A terceira função de Green a ser generalizada é o propagador de Feynman que será representado por  $G_F(x, x')$ .

Assumindo a existência de dois vácuos  $|0^{in} \rangle$  e  $|0^{out} \rangle$  definidos no infinito passado e infinito futuro, Gibbons e Perry [41], [42] definem o propagador de Feynman como

$$G_F(x, x') = \frac{\langle 0^{out} | T \phi(x) \phi(x') | 0^{in} \rangle}{\langle 0^{out} | 0^{in} \rangle} \quad (2.3.21)$$

onde  $G_F(x, x')$  satisfaz a equação

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{F;\mu;\nu} (m^2 + \xi(d)R) G_F(x, x') &= \\ &= \frac{-1}{\sqrt{-g}} \delta^d(x, x') \quad . \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Supondo  $|0^{in} \rangle = |0^{out} \rangle$  podemos utilizar uma base de funções  $\{u_i(x), u_i^*(x')\}$  solução da equação (2.1.10) para a expansão de  $G_F(x, x')$ , obtendo:

$$\begin{aligned} i G_F(x, x') &= \sum_i \theta(x^0 - x'^0) u_i(x) u_i^*(x') + \\ &- \theta(x'^0 - x^0) u_i^*(x) u_i(x') \quad . \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Substituindo (2.2.4) em (2.3.23) por um cálculo direto, chegamos a:




$$\begin{aligned} i G_F(x, x') &= \sum_{i,m,n} \{\theta(x^0 - x'^0) (\alpha_{mi}^* \alpha_{ni} v_m(x) v_n^*(x') + \\ &+ \beta_{mi} \beta_{ni}^* v_m^*(x) v_n(x') - \alpha_{mi}^* \beta_{ni}^* v_m(x) v_n(x') + \\ &- \beta_{mn} \alpha_{ni} v_m^*(x) v_n^*(x') + \theta(x'^0 - x^0) (\alpha_{mi} \alpha_{ni}^* v_m^*(x) v_n(x') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta_{mi}^* \beta_{ni} v_m(x) v_n^*(x) - \alpha_{mi} \beta_{ni} v_m^*(x) v_n^*(x') + \\
 & - \beta_{mi}^* \alpha_{ni} v_m(x) v_n(x') \quad . \quad (2.3.24)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que  $G^{(1)}(x, x')$ , o propagador de Feynman  $G_F(x, x')$  não é invariante sob as transformações de Bogoliubov.

Na tabela abaixo listamos as diversas funções de Green da teoria, o comportamento frente às transformações de Bogoliubov, as simetrias e o suporte de cada uma delas [43].

TABELA 1

NOME	SÍMBOLO	COMPORTAMENTO FRENTE T.B.	SATISFAZ EQ. K-G	SUPORTE	SIMETRIAS
Pauli Jordan	$G(x, x')$	Invariante	Homogênea		$G(x, x') = -G(x', x)$
Função Green Retardada	$G_R(x, x')$	Invariante	Não Homogênea		$G_A(x, x') = G_R(x', x)$
Função Green Avançada	$G_A(x, x')$	Invariante	Não Homogênea		$G_R(x', x)$
Funções de Wightman	$G^+(x, x')$	Não Invariante	Homogênea	$M_d$	$G^+(x, x')^* = -G^+(x', x)$
	$G^-(x, x')$	Não Invariante	Homogênea	$M_d$	$G^-(x, x')^* = -G^-(x', x)$
Propagador de Feynman	$G_F(x, x')$	Não Invariante	Não Homogênea	$M_d$	$G_F^*(x, x') = -G_F(x', x)$



## CAPITULO III

### O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

#### 3.1 Os sistemas de coordenadas ortogonais separáveis da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional

Na construção de uma teoria de campos utilizando o formalismo canônico, é fundamental a identificação dos modos de frequência positiva e negativa quando expandimos o operador de campo  $\phi(x)$ , utilizando uma base completa de funções. Para que isto seja possível, temos como condição necessária a separabilidade da equação de Klein-Gordon; desta forma, selecionamos as transformações de coordenadas permitidas pela teoria.

O estudo de equações diferenciais parciais, os grupos de simetria destas equações e os sistemas de coordenadas nos quais as equações admitem soluções separáveis, tem uma longa história. Mais recentemente em 1965, Winternitz e Fris<sup>[44]</sup> mostraram explicitamente como as simetrias e a separabilidade estão intimamente ligadas.

Estes autores, utilizando o formalismo da teoria de grupos, estudaram os sistemas de coordenadas separáveis cor-

respondentes a autovalores do operador de Laplace Beltrami em espaços curvos bi-dimensionais com curvatura constante.

A seguir Miller, Boyer e Kalnins [45], [46] e [47] classificaram os sistemas de coordenadas separáveis de uma série de equações diferenciais parciais que aparecem na Física. Logo após, Kalnins e Miller usando métodos da teoria de grupos, conseguem caracterizar em termos de operadores de simetria de 2ª ordem da equação de Klein Gordon não homogênea  $\square f_{,0,0} - \square f_{,1,1} = \gamma^2 f$  os sistemas de coordenadas nas quais a equação admite soluções separáveis. Finalmente, Kalnins [6] demonstra que no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional existem apenas dez sistemas de coordenadas nos quais a equação de Klein-Gordon admite soluções separáveis.

Vamos expor os resultados encontrados por Kalnins, exibindo os sistemas de coordenadas existentes no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional ( $d=2$ ) nos quais a equação de Klein-Gordon pode ser solúvel por separação de variáveis. Como o elemento de linha é escrito na forma

$$ds^2 = g_{00}(u,v) du^2 + g_{11}(u,v) dv^2 \quad (3.1.1)$$

estes sistemas  $(u,v)$  são chamados de sistemas ortogonais.

---

Seja um operador diferencial  $Q$ , onde

$$Q = (-\partial_{x^1}^2 + \partial_x^2 + m^2), \quad Q\phi(x) = 0$$

Dizemos que  $S$  é um operador de simetria da equação  $Q\phi(x) = 0$ , se

$$[S, Q] = R(x)Q \quad \text{onde } R \in F$$

onde  $F$  é o espaço vetorial das funções complexas analíticas no interior de um aberto conexo  $D$ .

SISTEMA 1

$$S = P_1 P_2 \quad , \quad P_2^2 \quad , \quad (P_1 + P_2)^2$$

onde  $P_1 = \frac{\partial}{\partial x^0}$  ,  $P_2 = \frac{\partial}{\partial x^1}$        $M = -(x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^0})$

$$[P_1, P_2] = 0 \quad [P_1, M] = -P_2 \quad , \quad [P_2, M] = -P_1$$

sistema de coordenadas cartesiano  $(x^0, x^1)$ .

Soluções separáveis:

$$\phi(x^0, x) = \exp [i(\alpha x^0 + \beta x^1)] \quad \alpha^2 - \beta^2 = m^2 \quad . \quad (3.1.2)$$

SISTEMA 2

$$S = M^2$$

Este operador está relacionado com as coordenadas polares  $u, v$ .

$$x^0 = u \cosh v \quad 0 \leq u < \infty$$

$$x^1 = u \sinh v \quad -\infty < v < \infty \quad . \quad (3.1.3)$$

As equações separáveis são:

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \frac{\tau^2}{u^2} + m^2 \right) U(u) = 0 \quad (3.1.4.a)$$

$$\left( \frac{d^2}{dv^2} + \tau^2 \right) V(v) = 0 \quad , \quad (3.1.4.b)$$

e as soluções têm a forma

$$\phi_\tau = UV = \sqrt{u} J_\nu(mu) e^{i\tau v} \quad , \quad (3.1.5)$$

$$S \phi_{\tau} = -\tau^2 \phi_{\tau}$$

onde  $J_{\nu}(z)$  são as funções de Bessel de primeiro tipo com  $\nu^2 = \frac{1}{4} - \tau^2$ . A parametrização dada pela equação (3.1.3) cobre a região do plano  $x^1 - x^0$  dada por  $x^0 \pm x^1 > 0$ . Para os outros quadrantes, podemos definir coordenadas separáveis similares.

### SISTEMA 3

$$S = u^2 \partial_{vv} - v^2 \partial_{uu}$$

$$x^0 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad -\infty < u < \infty$$

$$x^1 = uv \quad 0 \leq v < \infty \quad (3.1.6)$$

As equações são

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + m^2 u^2 + m\lambda \right) U = 0 \quad (3.1.7.a)$$

$$\left( \frac{d^2}{dv^2} + m^2 v^2 + m\lambda \right) V = 0 \quad (3.1.7.b)$$

onde as soluções da equação de Klein-Gordon têm a forma

$$\phi_{\lambda} = UV = D_{\left(\frac{i\lambda-1}{2}\right)}(\varepsilon_1(1+i)\sqrt{m}u) D_{\left(\frac{i\lambda-1}{2}\right)}(\varepsilon_2(1+i)\sqrt{m}v) \quad (3.1.8)$$

$$S \phi_{\lambda} = -m\lambda \phi_{\lambda} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$$

onde  $D_{\nu}(z)$  é a função parabólica cilíndrica (para maiores detalhes, ver apêndice A.4).

SISTEMA 4

$$S = u^2 \partial_{vv} - v^2 \partial_{uu}$$

$$x^0 = uv \quad -\infty < u < \infty$$

$$x^1 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad 0 \leq v < \infty \quad (3.1.9)$$

As equações obtidas utilizando este sistema de coordenadas são exatamente iguais às equações do sistema 3 onde apenas substituímos  $m$  por  $im$ .

SISTEMA 5

$$S = (u+v)^{-1} (u \partial_{vv} - v \partial_{uu})$$

As coordenadas são:

$$x^0 = \frac{1}{2} (u-v)^2 + u+v$$

$$x^1 = -\frac{1}{2} (u-v)^2 + u+v \quad -\infty < u, v < \infty \quad (3.1.10)$$

As soluções separáveis têm a forma

$$\phi_\lambda = UV = \phi_{\varepsilon_1}(u) \phi_{\varepsilon_2}(v) \quad \varepsilon_j = \pm 1$$

$$S \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda$$

onde

$$\phi_\lambda(z) = \left(z + \frac{\lambda}{m}\right)^{1/2} J_{\varepsilon/3} \left[ \frac{2m}{3} \left(z + \frac{\lambda}{m}\right)^{3/2} \right] \quad (3.1.11)$$

SISTEMA 6

$$S = 4 (\sinh u - \sinh v)^{-1} (\sinh u \partial_{vv} - \sinh v \partial_{uu})$$

As coordenadas separáveis são:

$$x^0 = \frac{1}{2} [\cosh (\frac{u-v}{2}) + \sinh (\frac{u+v}{2})]$$

$$-\infty < u, v < \infty$$

$$x^1 = \frac{1}{2} [\cosh (\frac{u-v}{2}) - \sinh (\frac{u+v}{2})], \quad (3.1.12)$$

e as equações separadas têm a forma:

$$(\frac{d^2}{dz^2} + m^2 \sinh z + \lambda) \phi(z) = 0 \quad z = u, v \quad (3.1.13)$$

A equação (3.1.13) é uma equação de Mathieu modificada (para maiores detalhes, veja apêndice C) e a solução é constituída de produto de funções de Mathieu.

SISTEMA 7

$$S = (e^{2u} + e^{2v})^{-1} (e^{2v} \partial_{uu} + e^{2u} \partial_{vv})$$

As coordenadas separáveis nas definidas por

$$x^0 = \sinh(u - v) + \frac{1}{2} e^{u+v}$$

$$-\infty < u, v < \infty$$

$$x^1 = \sinh(u - v) - \frac{1}{2} e^{u+v} \quad (3.1.14)$$

e as equações separadas, são:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{du^2} + m^2 e^{2u} - v^2 \right) U &= 0 \\ \left( \frac{d^2}{dv^2} - m^2 e^{2v} - v^2 \right) V &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

As soluções têm a forma

$$\phi_{\nu 2} = J_{\pm \nu}(m e^u) J_{\pm \nu}(i m e^v) \quad (3.1.16)$$

$$S \phi_{\nu 2} = v^2 \phi_{\nu 2}$$

SISTEMA 8

$$S = (e^{2v} - e^{2u})^{-1} (e^{2v} \partial_{uu} - e^{2u} \partial_{vv})$$

$$x^0 = \cosh(u - v) + \frac{1}{2} e^{(u+v)}$$

$$\infty < u, v < \infty$$

$$x^1 = \cosh(u - v) - \frac{1}{2} e^{(u+v)} \quad (3.1.17)$$

Este sistema de coordenadas é bastante semelhante ao sistema número 7. As soluções da equação de Klein Gordon toma a forma

$$\phi_{\nu 2} = J_{\pm \nu}(m e^u) J_{\pm \nu}(m e^v) \quad (3.1.18)$$

$$S \phi_{\nu 2} = -v^2 \phi_{\nu 2}$$

SISTEMA 9

$$S = (\cosh^2 u + \sinh^2 v)^{-1} (\cosh^2 u \partial_{vv} + \sinh^2 v \partial_{uu})$$

$$x^0 = \sinh u \cosh v$$

$$-\infty < u, v < \infty$$

$$x^1 = \cosh u \sinh v \tag{3.1.19}$$

A equação de Klein-Gordon separa nas equações

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \frac{m^2}{2} + \cosh 2u + \lambda \right) U = 0$$

$$\left( \frac{d^2}{dv^2} - \frac{m^2}{2} + \cosh 2v + \lambda \right) V = 0 \tag{3.1.20}$$

Temos novamente equações de Mathieu modificadas. As soluções são funções de Mathieu que obedecem

$$S \phi_\lambda = \left( \lambda - \frac{m^2}{2} \right) \phi_\lambda$$

SISTEMA 10

$$S = (\sinh^2 a - \sinh^2 b)^{-1} (\sinh^2 a \partial_{bb} - \sinh^2 b \partial_{aa})$$

Temos dois sistemas de coordenadas separáveis

$$(i) \quad x^0 = \cosh a \cosh b \quad -\infty < a < \infty$$

$$x^1 = \sinh a \sinh b \quad 0 \leq b < \infty \tag{3.1.21}$$

onde a equação de Klein-Gordon separa nas equações



$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{m^2}{2} \cosh 2z + \lambda - \frac{m^2}{2} \right) \phi(z) = 0 \quad z = a, b$$

$$S \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (3.1.22)$$

e

$$\text{ii) } x^0 = \cosh \alpha \cosh \beta \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

$$x^1 = \sinh \alpha \sinh \beta \quad 0 \leq \beta < \pi$$

onde a equação de Klein-Gordon separa nas equações

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} \right) - \frac{m^2}{2} \cosh 2z + \lambda + \frac{m^2}{2} \phi(z) = 0 \quad z = \alpha, \beta$$

$$S \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (3.1.23)$$

### 3.2 Teoria Quântica de Campos num sistema de coordenadas não estacionário (d=2). O sistema de coordenadas de Milne-Schucking

Nesta seção estudaremos, com bastante detalhe, a quantização de um campo escalar real massivo utilizando o segundo sistema de coordenadas proposto por Kalnins. Com esta escolha, as superfícies  $((x^0)^2 - (x^1)^2 = \text{cte})$  aparecem naturalmente.

A idéia de se postular relações de comutação entre os operadores de campo sobre as hipersuperfícies  $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \text{cte}$  é bem antiga, tendo sido formulada por Dirac ainda na década de 50<sup>[48]</sup>. Seguindo o princípio que o conteúdo físico de uma teo-

ria não pode depender da escolha da superfície que utilizamos para postular as relações de comutação, Tomonaga<sup>[49]</sup> e Schwinger<sup>[50]</sup> demonstram que qualquer hipersuperfície tipo espaço pode ser utilizada para se efetuar a quantização. No estudo do problema de Cauchy assim como na descrição dos vetores estados  $|\psi\rangle$  da teoria, a quantização sobre o hiperbolóide  $\eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = \text{cte} > 0$ , apresenta interessantes vantagens.

No limite não relativístico ( $c \rightarrow \infty$ ) estas superfícies tendem a  $x^0 = \text{cte}$ . Além disso, por uma transformação de Lorentz homogênea, os pontos do hiperbolóide permanecem sobre este. Desta forma, a relação de comutação entre os operadores nesta superfície bem como as condições iniciais são manifestamente invariante de Lorentz. Apesar disto, apenas na década de 70 aparecem os primeiros trabalhos fazendo uso da idéia acima exposta.

Fubini, Hansen e Jackiw<sup>[51]</sup> efetuam a quantização de um campo escalar real sem massa, utilizando estas hipersuperfícies, porém trabalhando no espaço-tempo Euclidiano. Em seguida di Sessa<sup>[52]</sup> e Sommerfield<sup>[53]</sup> utilizam a mesma hipersuperfície para a quantização de um campo massivo em duas dimensões espaço-temporais, mas, por razões que ficarão claras a seguir, as quantizações não são equivalentes.

Consideremos um espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional ( $d=2$ ) com elemento de linha

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 \quad .$$

Utilizando as transformações de coordenadas dadas pelas equações (3.1.3)

$$x^0 = \xi \cosh \eta \quad 0 < \xi < \infty \quad (3.2.1.a)$$

$$x^1 = \xi \sinh \eta \quad -\infty < \eta < \infty \quad (3.2.1.b)$$

o elemento de linha de Minkowski escrito nestas coordenadas curvilíneas é dado por

$$ds^2 = d\xi^2 - \xi^2 d\eta^2 \quad (3.2.2)$$

Esta transformação cobre apenas a região  $x^0 > |x^1|$  (cone de luz Futuro (F)). No sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ , conhecido como coordenadas de Milne-Schücking, observadores inerciais que percorrem as linhas de universo  $\eta = \text{cte}$  percebem o Universo se expandindo a partir de  $x^0 = 0$ . As superfícies  $\xi = \text{cte}$  são hipérbolas onde postulamos as relações de comutação (2.1.15) entre os operadores de campo.

As transformações definidas pelas equações (3.2.1) podem ser extendidas de forma a cobrir o cone de luz passado (F) a saber,

$$x^0 = - \xi \cosh \eta \quad 0 < \xi < \infty \quad (3.2.3.a)$$

$$x^1 = - \xi \sinh \eta \quad -\infty < \eta < \infty \quad (3.2.3.b)$$

Usaremos também as variáveis  $T, X$  definidas a partir de  $\xi$  e  $\eta$  pelas transformações:

$$(F): \quad \eta = aX \quad \xi = \frac{1}{a} e^{aT} \quad a > 0 \quad (3.2.4.a)$$

$$(P): \quad \eta = aX \quad \xi = \frac{1}{a} e^{-aT} \quad . \quad (3.2.4.b)$$

Para efetuarmos a quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Milne (F) devemos, em princípio, encontrar uma base de funções soluções da equação de Klein Gordon, a qual se escreve nas coordenadas T, X como:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} + e^{2aT} m^2 \right) \phi(T, X) = 0 \quad (3.2.5)$$

Por conveniência de notação a variável  $\xi$  será denotada por  $y$  ( $0 < y < \infty$ ). Assim a equação (3.2.5) se escreve como:

$$\left( y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + y^2 m^2 \right) \phi = 0 \quad . \quad (3.2.6)$$

Utilizando o método das separações de variáveis as soluções  $\phi_\lambda$  e  $\phi_\lambda^*$  da equação (3.2.6) são

$$\phi_\lambda \sim e^{i\lambda aX} \chi_\lambda(my)$$

e

$$\phi_\lambda^* \sim e^{-i\lambda aX} \chi_\lambda(my) \quad .$$

A parte dependente do "tempo"  $y$  é uma equação de Bessel usual

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + m^2 + \frac{\lambda^2}{y^2} \right) \chi_\lambda(my) = 0 \quad , \quad (3.2.7)$$

de forma que a equação de Klein-Gordon (3.2.6) possui dois con-

juntos completos ortonormais sobre o produto escalar (2.1.11), a saber:

$$\{u_\lambda, u_\lambda^*\} \quad e \quad \{v_\lambda, v_\lambda^*\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\lambda(y) = -\frac{i}{2\sqrt{2}} e^{\pi\lambda/2} e^{i\lambda aX} H_{i\lambda}^{(2)}(my) \\ u_\lambda^*(y) = \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{\pi\lambda/2} e^{-i\lambda aX} H_{-i\lambda}^{(1)}(my) \end{array} \right. \quad (3.2.8.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\lambda(y) = -\frac{i}{2} (\sinh \pi|\lambda|)^{-1/2} e^{i\lambda aX} J_{-i|\lambda|}(my) \\ v_\lambda^*(y) = \frac{i}{2} (\sinh \pi|\lambda|)^{-1/2} e^{-i\lambda aX} J_{i|\lambda|}(my) \end{array} \right. \quad (3.2.8.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\lambda(y) = -\frac{i}{2} (\sinh \pi|\lambda|)^{-1/2} e^{i\lambda aX} J_{-i|\lambda|}(my) \\ v_\lambda^*(y) = \frac{i}{2} (\sinh \pi|\lambda|)^{-1/2} e^{-i\lambda aX} J_{i|\lambda|}(my) \end{array} \right. \quad (3.2.9.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\lambda(y) = -\frac{i}{2} (\sinh \pi|\lambda|)^{-1/2} e^{i\lambda aX} J_{-i|\lambda|}(my) \\ v_\lambda^*(y) = \frac{i}{2} (\sinh \pi|\lambda|)^{-1/2} e^{-i\lambda aX} J_{i|\lambda|}(my) \end{array} \right. \quad (3.2.9.b)$$

onde  $H_{i\lambda}^{(1)}$  e  $H_{i\lambda}^{(2)}$  são as funções de Bessel de terceiro tipo ou função de Hankel de ordem imaginária enquanto que  $J_{i\lambda}$  é a função de Bessel de primeiro tipo de ordem imaginária [54] [55].

Como ambos os conjuntos (3.2.8) e (3.2.9) são completos, o operador de campo  $\Phi(x)$  pode ser expandido na forma

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (a_M(\lambda) \Phi_\lambda + a_M^\dagger(\lambda) \Phi_\lambda^*) \quad (3.2.10)$$

onde identificamos  $a_M(\lambda)$  e  $a_M^\dagger(\lambda)$  como operadores de destruição e criação de quanta do campo, satisfazendo as relações de comutação

$$[a_M(\lambda), a_M(\lambda')] = [a_M^\dagger(\lambda), a_M^\dagger(\lambda')] = 0$$

$$[a_M(\lambda), a_M(\lambda')] = \delta(\lambda - \lambda') \quad .$$

No entanto, para que esta identificação seja possível, é necessário distinguir modos de frequência positiva e negativa. Se o espaço-tempo tem uma geometria estacionária, existe um vetor de Killing tipo tempo  $K$  que gera um grupo de Lie uniparamétrico de isometrias. Os modos ortonormais que satisfazem,

$$L_K u = -i\omega u$$

onde  $L_K$  é a derivada de Lie com respeito à  $K$  são identificados como modos de frequência positiva. Temos, assim, uma forma trivial de definirmos modos de frequência positiva e negativa<sup>[56]</sup>, e o vácuo associado à esta escolha é chamado de vácuo de Killing ou vácuo trivial.

Como o elemento de linha  $ds^2$ , escrito nas coordenadas de Milne-Schucking é não estacionário (veja equação 3.2.2) e as linhas de universo  $X = \text{cte}$  não são curvas integrais de um vetor de Killing tipo tempo, a definição de frequência positiva e negativa se torna problemática para um observador de Milne. Diferentes soluções para este problema foram apresentadas na literatura por Sommerfield e di Sessa.

A quantização de di Sessa - di Sessa afirma que o conceito de frequência positiva e negativa exige, para a sua definição, a complexificação do espaço-tempo de Minkowski<sup>[52],[57]</sup>. Desta forma, os modos de frequência positiva serão aqueles que se anulam quando a coordenada temporal tende a  $-i\infty$ . Observa-se que

$$\lim_{i\lambda} H_{i\lambda}^{(2)}(my) = 0. \quad (3.2.11)$$

$$y \rightarrow -i\infty$$

Temos, portanto, que os modos definidos pelas equações (3.2.8.a) e (3.2.8.b) têm frequência positiva e negativa respectivamente e os modos (3.2.9.a) e (3.2.9.b), não têm frequência definida.

A construção de um espaço de Fock dos estados de várias partículas é implementada assumindo a existência de operadores de criação  $a_M^\dagger(\lambda)$  e de destruição  $a_M(\lambda)$ , de forma que

$$a_M(\lambda) |0_M\rangle = 0 \quad \forall \lambda .$$

Mostraremos, a seguir, que a quantização efetuada por di Sessa, utilizando o conjunto completo (3.2.8) para a expansão do operador de campo  $\phi(x)$ , coincide com a quantização usual (nas coordenadas cartesianas  $(x^0, x^1)$ ) que se utiliza de ondas planas  $\{u_k(x), u_k^*(x)\}$  na forma

$$u_k(x) = \frac{1}{(4\pi\omega)^{1/2}} e^{i(kx^1 - \omega x^0)} \quad (3.2.12.a)$$

$$u_k^*(x) = \frac{1}{(4\pi\omega)^{1/2}} e^{-i(kx^1 - \omega x^0)} \quad (3.2.12.b)$$

ou seja, o vácuo  $|0\rangle$ , associado à expansão do operador de campo usando como base de funções ondas planas coincide com o vácuo associado aos modos (3.2.8). Para provarmos isto, basta calcularmos os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{\mu k}$  entre os modos (3.2.12) e (3.2.8) (ver equação 2.2.8).

Utilizando a definição de  $\beta_{\mu k}$  dada pela equação (2.2.5.b) e (2.1.11), mostramos que<sup>[20]</sup>

$$\beta_{\mu k} = - \left( u_{\mu}^{\text{Milne Cart.}}, u_k^* \right) = 0 \quad . \quad (3.2.13)$$

Para esta demonstração vamos definir a variável  $z = \frac{1}{a} e^{aX}$  ( $a > 0$ ) de forma que a expressão (3.2.12.a) se escreva como:

$$u_k(y, z) = \frac{1}{(4\pi\omega)^{1/2}} e^{-i \frac{Y}{a} (az(\omega - k) + \frac{1}{az} (\omega + k))} \quad . \quad (3.2.14)$$

Substituindo as equações (3.2.14), (3.2.8) e (2.1.11) em (3.2.13), encontramos após conjugação:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu k}^* &= - \left( u_{\mu}^*, u_k^{\text{Milne Cart.}} \right) = \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-\pi\mu/2}}{(4\pi\omega)^{1/2}} \int \frac{dz}{z} (az)^{-i\mu} H_{i\mu}^{(1)}(my) \left( y \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{iyA/2} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

onde

$$A(z) = az(\omega - k) + \frac{1}{az} (\omega + k) \quad . \quad (3.2.16)$$

Então

$$\begin{aligned} \beta_{\mu k}^* &= \frac{-e^{\pi\mu/2}}{4(2\pi\omega)^{1/2}} a^{-i\mu} y \left[ \frac{i}{2} H_{i\mu}^{(1)} \right] \int dz z^{-(i\mu+1)} A(z) e^{i \frac{Y}{2} A(z)} + \\ &- \left( \frac{d}{dy} H_{i\mu}^{(1)} \right) \int dz z^{-(i\mu+1)} e^{iy/2 A(z)} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$



Necessitamos, então, calcular as duas integrais

$$\int dz z^{-(i\mu+1)} e^{i\frac{y}{2}A(z)} \quad (3.2.18.a)$$

$$\int dz z^{-(i\mu+1)} e^{i\frac{y}{2}A(z)} A(z) \quad (3.2.18.b)$$

Para o cálculo de (3.2.18.a) vamos utilizar a fórmula

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left[\frac{i\rho}{2}\left(x + \frac{B^2}{x}\right)\right] dx &= \quad \text{Im } \rho > 0 \\ &\quad \text{Im } B^2\rho > 0 \\ &= i\pi B^\alpha e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} H_{-i\alpha}^{(1)}(B\rho) \quad (3.2.19) \end{aligned}$$

Desta forma a integral (3.2.18.a) fica

$$\begin{aligned} \int dz z^{-(i\mu+1)} e^{i\frac{y}{2}A(z)} &= \\ = i\pi a^{i\mu} \left(\frac{\omega+k}{\omega-k}\right)^{-i\mu/2} e^{-\pi\mu/2} H_{i\mu}^{(1)}(my) \quad (3.2.20) \end{aligned}$$

Para o cálculo de (3.2.18.b) vamos reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned} \int dz z^{-(i\mu+1)} e^{i\frac{y}{2}A(z)} A(z) &= \\ = a(\omega-k) \int dz z^{-i\mu} e^{i\frac{y}{2}A(z)} + \frac{1}{a}(\omega-k) \int dz z^{-i\mu-2} e^{i\frac{y}{2}A(z)} \quad . \end{aligned}$$

Utilizando novamente a equação (3.2.19), temos:

$$\int dz z^{-i\mu} e^{i \frac{y}{2} A(z)} =$$

$$= i \pi \left(\frac{1}{a}\right)^{-i\mu+1} \left(\frac{\omega+k}{\omega-k}\right)^{\frac{-i\mu+1}{2}} e^{-i \frac{\pi}{2} (-i\mu+1)} H_{i\mu}^{(1)}(my)$$

e

$$\int dz z^{-i\mu-2} e^{i \frac{y}{2} A(z)} =$$

$$= i \pi \left(\frac{1}{a}\right)^{-i\mu-1} \left(\frac{\omega+k}{\omega-k}\right)^{\frac{-i\mu-1}{2}} e^{-i \frac{\pi}{2} (-i\mu-1)} H_{i\mu+1}^{(1)}(my)$$

Com os dois resultados acima, a equação (3.2.18).

b) se escreve como

$$\int dz z^{-(i\mu+1)} e^{i \frac{y}{2} A(z)} =$$

$$= \pi a^{i\mu} e^{-\pi\mu/2} m \left(\frac{\omega+k}{\omega-k}\right)^{-i\mu/2} (H_{i\mu-1}^{(1)}(my) - H_{i\mu+1}^{(1)}(my))$$

Usando que

$$H_{i\mu-1}^{(1)}(my) - H_{i\mu+1}^{(1)}(my) = 2 \frac{d}{d(my)} H_{i\mu}^{(1)}(my)$$

temos

$$\int dz z^{-(i\mu+1)} e^{i \frac{y}{2} A(z)} A(z) =$$

$$= 2\pi a^{i\mu} e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{\omega+k}{\omega-k}\right)^{-i\mu/2} \frac{d}{dy} H_{i\mu}^{(1)}(my) \quad (3.2.21)$$

Substituindo (3.2.20) e (3.2.21) em (3.2.17) ob-

temos finalmente

$$\beta_{\mu k}^* = \frac{e^{-\pi\mu/2}}{2(2\pi\omega)^{1/2}} y^\pi \left( \frac{\omega+k}{\omega-k} \right)^{-i\mu/2} \left[ H_{i\mu}^{(1)} \frac{d}{dy} H_{i\mu}^{(1)} - H_{i\mu}^{(1)} \frac{d}{dy} H_{i\mu}^{(1)} \right] = 0 .$$

Desta forma os vácuos  $|0\rangle$  e  $|0_M\rangle$  são idênticos.

Fulling, Parker e Hu [59], usando uma representação integral das funções de Hankel, chegam ao mesmo resultado. Estes autores mostram que os modos (3.2.8.a) são apenas uma superposição linear dos modos (3.2.12.a), não ocorrendo então uma mistura de frequências positivas e negativas.

A quantização de Sommerfield - Sommerfield utiliza o fato que o operador

$$D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \left( \frac{\partial}{\partial T} \phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial X} \phi \right)^2 + e^{2aT} m^2 \phi^2 \right) \quad (3.2.22)$$

gera translações em T, sendo chamado assim de gerador das dilatações. Mostra-se facilmente que D satisfaz a equação de Heisenberg

$$[\phi, D] = i \frac{\partial}{\partial T} \phi \quad (3.2.23)$$

Com o resultado acima e a propriedade adicional do comportamento assintótico de  $J_{i\lambda}$  sobre o cone de luz ( $T \rightarrow -\infty$ ,  $y \rightarrow 0$ ), isto é

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} J_{i\lambda}(my) \propto \frac{e^{i\lambda a T}}{2^{i\lambda} \Gamma(1 + i\lambda)} \quad (3.2.24)$$

$$T \rightarrow -\infty$$

$$y \rightarrow 0$$

Sommerfield define (3.2.9.a) e (3.2.9.b) como os modos de frequência de dilatação positiva e negativa, respectivamente. Substituindo (3.2.9), (3.2.10) e (3.2.24) em (3.2.22) obtemos

$$D(T) \underset{T \rightarrow -\infty}{\propto} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |\lambda| (\bar{a}_M^\dagger(\lambda) \bar{a}_M(\lambda) + \bar{a}_M(\lambda) \bar{a}_M^\dagger(\lambda)) \quad (3.2.25)$$

onde  $\bar{a}_M(\lambda)$  indica que utilizamos os modos (3.2.9) para a expansão do operador de campo  $\phi(x)$ . Construimos assim um espaço de Fock, sendo o vácuo que gera este espaço representado por  $|\bar{0}_M\rangle$ . Temos, então, que o estado fundamental satisfaz à

$$\bar{a}_M(\lambda) |\bar{0}_M\rangle = 0 \quad \forall \lambda \quad (3.2.26)$$

Mostraremos, a seguir, que o vácuo  $|0\rangle$  associado às ondas planas, não coincide com o vácuo associado à quantização efetuada por Sommerfield. Portanto, para um observador de Milne, o vácuo cartesiano  $|0\rangle$  é um estado que contém partículas. Para isto basta calcularmos os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{\mu k}$  entre os modos (3.2.9) e (3.2.12).

Um cálculo análogo ao anterior nos dá:

$$\beta_{\mu k} = - \left( \begin{matrix} \text{Milne} \\ \mathbf{v}_{\mu} \end{matrix}, \begin{matrix} \text{Cart} \\ \mathbf{u}_k^* \end{matrix} \right) =$$

$$= \frac{e^{-\pi\mu/2}}{2(\pi\omega \sinh \pi\mu)^{1/2}} \left( \frac{\omega+k}{\omega-k} \right)^{i\mu/2} \quad \mu > 0 \quad . \quad (3.2.27.a)$$

Assim

$$|\beta_{\mu k}|^2 = \frac{1}{2\pi\omega} \frac{1}{e^{2\pi\mu} - 1} \quad . \quad (3.2.27.b)$$

Substituindo (3.2.27.b) na equação (2.2.8) encontramos o número de partículas existentes no modo  $\lambda$ , isto é

$$\langle 0 | \bar{a}_M^{\dagger}(\lambda) \bar{a}_M(\lambda) | 0 \rangle = \int_0^{\infty} dk \frac{1}{2\pi\omega} \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \quad .$$

Esta quantidade diverge logaritmicamente<sup>[60]</sup>,  
pois como notou Hawking<sup>[1]</sup> temos uma taxa de produção constante de partículas num tempo infinito. A quantidade acima divergente também indica que os vácuos  $|0\rangle$  e  $|\bar{0}_M\rangle$  são unitariamente não equivalentes. A taxa de criação de partículas é dada por

$$\frac{d}{dT} \langle 0 | \bar{N}_M(\lambda) | 0 \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \quad (3.2.28)$$

que tem a forma da radiação de corpo negro. Desta forma um observador inercial no universo de Milne que constrói uma representação da álgebra dos operadores baseada no vácuo  $|\bar{0}_M\rangle$  mede o vácuo cartesiano  $|0\rangle$  como um estado térmico cuja temperatura é dada por

$$\theta = \frac{a}{2\pi} e^{-aT} \quad . \quad (3.2.29)$$

Para este observador o universo de Milne se comporta como um Big-Bang ( $T \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow \infty$  e  $T = -\infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ ).

Para terminarmos o estudo da quantização no universo de Milne, vamos comparar os vácuos  $|0_M\rangle$  e  $|\bar{0}_M\rangle$ , o que implica em calcular os coeficientes de Bogoliubov entre os modos (3.2.8) e (3.2.9). Utilizando (2.1.11), (3.2.8) e (3.2.9) temos

$$\beta_{\mu\nu} = -(v_\mu, u_\nu^*) = \left( \frac{e^{-\pi\nu}}{2 \sinh \pi\nu} \right)^{1/2} \delta(\mu - \nu) \quad (3.2.30)$$

Utilizando (2.2.8) temos

$$\langle \bar{0}_M | N_M(\nu) | \bar{0}_M \rangle = \langle N(\nu) \rangle = \int d\mu |\beta_{\mu\nu}|^2 \quad .$$

Aplicando a regra de ouro<sup>[61][62]</sup> podemos encontrar a taxa de criação de partículas associadas aos modos  $\lambda$ . Assim, o número de quanta associado ao vácuo  $|0_M\rangle$  no modo  $\lambda$ , criados do vácuo  $|\bar{0}_M\rangle$  por unidade de tempo é

$$\frac{d}{dT} \langle \bar{0}_M | N_M(\lambda) | \bar{0}_M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \quad (3.2.30.a)$$

e da mesma forma

$$\frac{d}{dT} \langle 0_M | \bar{N}_M(\lambda) | 0_M \rangle = \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \quad . \quad (3.2.30.b)$$

Todos os resultados desta seção podem ser esquematizados pelo diagrama a seguir.

$v_{\lambda}, |\bar{0}_M\rangle$

$$\langle \bar{0}_M | N_M(\lambda) | \bar{0}_M \rangle \propto \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1}$$

$$\theta = \frac{a}{2\pi} e^{-a\Gamma}$$

$$0 | \bar{N}_M(\lambda) | 0 \rangle \propto \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1}$$

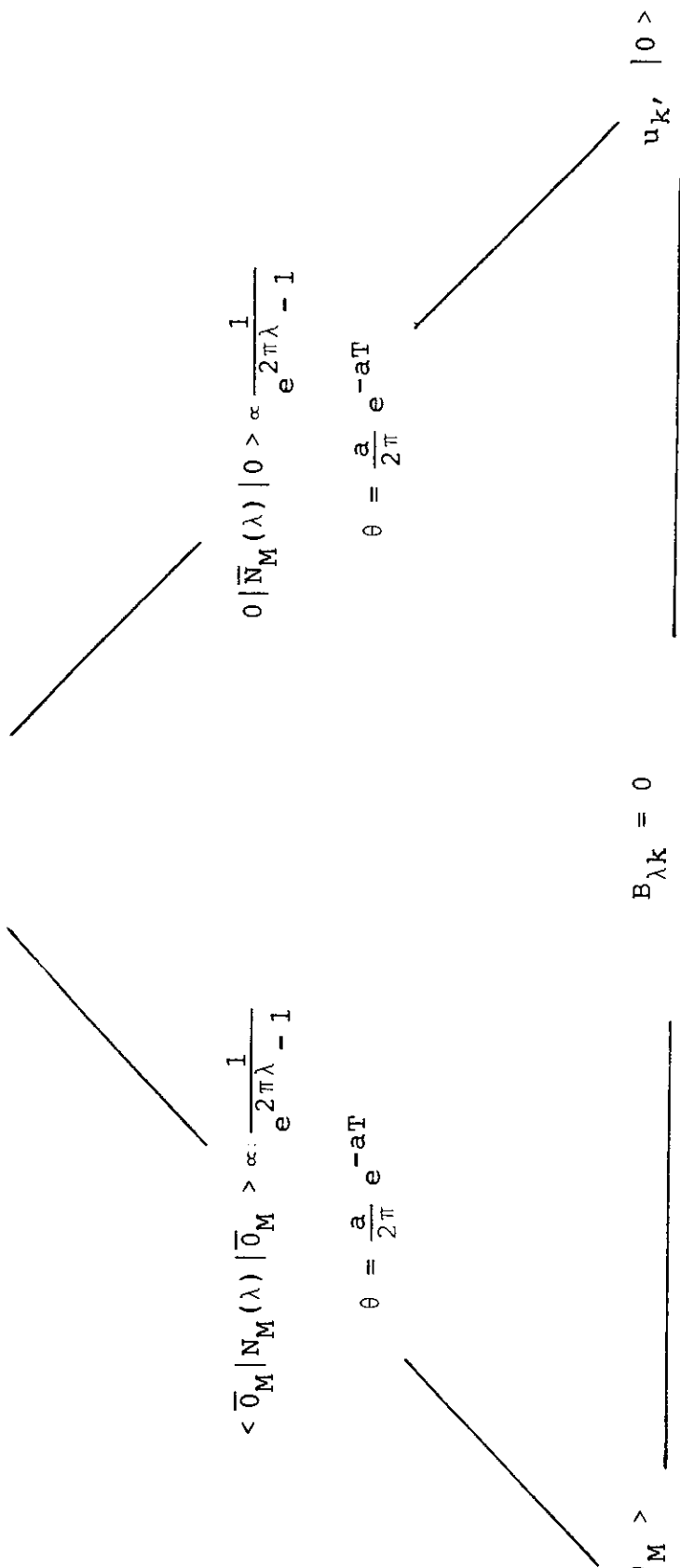
$$\theta = \frac{a}{2\pi} e^{-a\Gamma}$$

$u_{\lambda}, |0_M\rangle$

$$B_{\lambda k} = 0$$

$$\langle 0 | N_M(\lambda) | 0 \rangle = 0$$

$u_{k'}, |0\rangle$



### 3.3 Teoria Quântica de campos no sistema de coordenadas de Rindler (d = 2)

As transformações de coordenadas (3.2.1) e (3.2.3) não estão definidas em todo o espaço tempo de Minkowski. Para as regiões fora do cone de luz devem ser acrescentadas as seguintes transformações:

$$x^0 = \xi \sinh \eta \quad 0 < \xi < \infty \quad (3.3.1.a)$$

$$x^1 = \xi \cosh \eta \quad -\infty < \eta < \infty \quad (3.3.1.b)$$

para a região  $x^1 > |x^0|$  (região I) e

$$x^0 = -\xi \sinh \eta \quad 0 < \xi < \infty \quad (3.3.2.a)$$

$$x^1 = -\xi \cosh \eta \quad -\infty < \eta < \infty \quad (3.3.2.b)$$

para a região  $-x^1 > |x^0|$  (região II) (veja figura 1 abaixo).

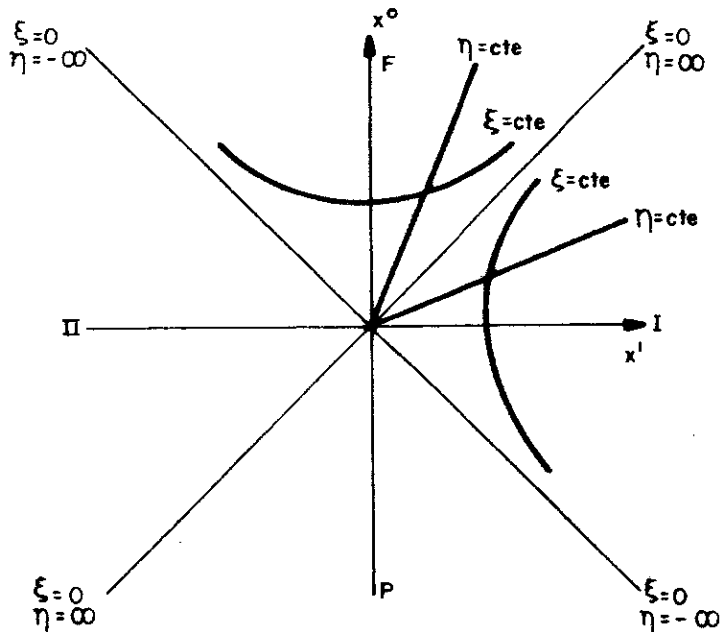


Fig.: 1



Utilizando-se o sistema de coordenadas  $(\eta, \xi)$ , escreve-se o elemento de linha  $ds^2$  como

$$ds^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 \quad . \quad (3.3.3)$$

O sistema de coordenadas  $(\eta, \xi)$  definido pelas transformações (3.3.1) e (3.3.2), conhecido como coordenadas de Rindler é o sistema de coordenadas naturalmente adaptado a um observador com aceleração própria constante [5] [63]. É interessante notar a semelhança da figura 1 com o diagrama de Kruskal que utilizamos no estudo da métrica de Schwarzschild. As coordenadas de Rindler são apropriadas para descrever a região do espaço-tempo de Minkowski que no caso de Schwarzschild seria a região  $r \geq 2m$ .

Da mesma forma que fizemos na seção anterior, vamos definir para a região I as variáveis  $T, X$  pelas transformações:

$$\eta = aT \quad (3.3.4.a)$$

$$a > 0$$

$$\xi = \frac{1}{a} e^{aX} \quad . \quad (3.3.4.b)$$

Utilizando as variáveis  $(T, X)$  o elemento de linha (3.3.3) se escreve como:

$$ds^2 = e^{2aX} (dT^2 - dX^2) \quad . \quad (3.3.5)$$

Mostra-se facilmente que a aceleração própria

de um observador de Rindler é dado por

$$\text{acel. prop.} = a e^{-aX}, \quad (3.3.6)$$

onde  $\text{acel. prop.} = |a^\alpha a_\alpha|^{1/2}$ ,

$$a^\alpha = v^\alpha;{}_\beta v^\beta \Big|_{X=\bar{X}} = a e^{-2aX} \delta_1^\alpha \Big|_{X=\bar{X}}$$

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \Big|_{X=\bar{X}} = e^{-aX} \delta_0^\mu \Big|_{X=\bar{X}}.$$

Desta forma as hiperboles

$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = \left(\frac{1}{a} e^{aX}\right)^2 = \text{cte},$$

são linhas de universo de observadores com aceleração própria constante. As curvas  $X = \text{cte}$  são curvas integrais de um vetor de Killing tipo-tempo  $B = \frac{\partial}{\partial \eta}$  ( $B^\eta = 1$ ,  $B^\xi = 0$ ), onde  $B$  é um gerador de "Boosts".

Notemos que para um observador de Rindler o cone de luz é um horizonte de eventos. Um horizonte de eventos para observador é definido como a fronteira de uma região do espaço-tempo que é causalmente isolada deste observador. Um observador de Rindler que se encontra na região I nunca receberá sinais luminosos provenientes das regiões (II) e (F), desta forma metade do espaço-tempo está desconectado causalmente deste observador.

Aplicando-se o Princípio de Equivalência, concluímos que este observador em repouso nas coordenadas de Rindler, sofre a ação de uma força gravitacional constante. Outra forma de chegarmos a este resultado é através do estudo do elemento de linha (3.3.3) que descreve um campo gravitacional estático,

gerado por uma distribuição plana infinita de matéria [64], [65].

Embora as transformações de coordenadas definidas pelas equações (3.3.1) e (3.3.2) sejam matematicamente válidas, a realização de um observador de Rindler não é fisicamente possível, uma vez que para acelerar um observador ou um detector de forma que este percorra as linhas de universo  $X = \text{cte}$ , necessitamos de uma quantidade de energia infinita [66].

A quantização do campo  $\phi(x)$  se efetua exatamente como fizemos no caso de Milne.

A equação de Klein-Gordon nas variáveis  $(T, X)$  se escreve (região I) como:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} + e^{2aX} m^2 \right) \phi(T, X) = 0 \quad (3.3.6)$$

Utilizando-se a separação de variáveis e definindo a variável

$$z = \frac{1}{a} e^{aX} \quad 0 < z < \infty \quad (3.3.7)$$

a parte espacial da equação de Klein-Gordon é uma equação de Bessel

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left( m^2 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] \chi_\nu(z) = 0, \quad 0 < \nu < \infty \quad (3.3.8)$$

de forma que os modos normais, soluções da equação (3.3.6) que têm frequência positiva e negativa respectivamente, relativa ao tempo de Rindler ( $\eta$ ), são:

$$\phi_\nu(\eta, z) = \frac{1}{\pi} (\sinh \pi \nu)^{1/2} e^{-i\nu\eta} K_{i\nu}(mz) \quad (3.3.9.a)$$

$$\phi_\nu^*(\eta, z) = \frac{1}{\pi} (\sinh \pi \nu)^{1/2} e^{i\nu\eta} K_{i\nu}(mz) \quad (3.3.9.b)$$

onde  $K_{i\nu}$  são as funções de Macdonald.

Os modos (3.3.9) estão normalizados de acordo com o produto escalar (2.1.11)

$$(\phi_\nu, \phi_\mu) = \delta(\nu - \mu) \quad (3.3.10.a)$$

$$(\phi_\nu^*, \phi_\mu^*) = -\delta(\nu - \mu) \quad (3.3.10.b)$$

$$(\phi_\nu, \phi_\mu^*) = 0 \quad (3.3.10.c)$$

(compare com 2.1.20).

Utilizando a equação (2.1.17), podemos encontrar o Hamiltoniano de Rindler

$$H = \frac{1}{2} \int dx \left( \left( \frac{\partial}{\partial T} \phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial X} \phi \right)^2 + e^{2aX} m^2 \phi^2 \right) \quad (3.3.11)$$

onde o momento canonicamente conjugado ao campo  $\phi(x)$  é dado por

$$\pi = e^{-aX} \frac{\partial}{\partial T} \phi \quad (3.3.12)$$

A quantização é implementada transformando  $\phi(x)$  e  $\pi(x)$  em operadores, obedecendo a álgebra dada pelas eqs. (2.1.15) agindo num espaço de Hilbert a ser construído. Para isto, expandimos o operador de campo  $\phi(x)$  na forma

$$\phi(\eta, z) = \int_0^\infty d\nu [a_R(\nu) \phi_\nu + a_R^\dagger(\nu) \phi_\nu^*] \quad (3.3.13)$$

Substituindo em (2.1.15) a eq. (3.3.13), encontramos as relações de comutação entre os operadores  $a_R(\nu)$  e  $a_R^\dagger(\nu)$ , a

saber:

$$[a_R(\nu), a_R^\dagger(\mu)] = \delta(\nu - \mu) \quad (3.3.14.a)$$

$$[a_R(\nu), a_R(\mu)] = [a_R^\dagger(\nu), a_R^\dagger(\mu)] = 0 \quad (3.3.14.b)$$

Assim, podemos construir um espaço dos estados, partindo de um estado  $|0_R\rangle$  tal que

$$a_R(\nu) |0_R\rangle = 0 \quad \forall \nu \quad (3.3.15)$$

Como veremos pelo cálculo dos coeficientes de Bogoliubov, o espaço de Fock gerado a partir de  $|0_R\rangle$  não coincide com o espaço de Fock gerado a partir de  $|0\rangle$ . Aqui cabe uma observação importante.

A quantização de um campo clássico numa sub-região do espaço-tempo de Minkowski conduz a uma determinada representação da álgebra dos operadores completamente diferente da representação usual<sup>[68]</sup>. Isto levou Letaw e Pfautsch<sup>[69]</sup> a conjectura de que na formulação de uma teoria de campos em sistemas de coordenadas estacionários, a existência de representações não equivalentes da álgebra dos operadores está relacionada com o fato que um dos sistemas de coordenadas tem horizonte de eventos. No entanto Sanchez e Whiting<sup>[70][71]</sup> exibem um contra-exemplo da conjectura acima. Quantizando um campo sem massa, estes autores apresentam sistemas de coordenadas sem horizonte de eventos, onde ocorre produção de partículas.

Para demonstrar a não equivalência entre  $|0\rangle$  e

$|0_R\rangle$  basta calcularmos os coeficientes de Bogoliubov entre os modos (3.2.12) e (3.3.9).

O resultado é bastante conhecido na literatura e deduções recentes são apresentadas por Lee<sup>[72]</sup> e Takagi<sup>[73]</sup>

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\mathbf{k}} &= - \left( \begin{matrix} \text{Rind.} \\ \phi_\mu \end{matrix}, \begin{matrix} \text{Cart.} \\ u_{\mathbf{k}}^* \end{matrix} \right) = \\ &= \frac{1}{[2\pi\omega (e^{2\pi\mu} - 1)]^{1/2}} \left( \frac{\omega - k}{\omega + k} \right)^{i\mu/2} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

de forma que

$$|\beta_{\mu\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2\pi\omega} \left( \frac{1}{e^{2\pi\mu} - 1} \right) \quad (3.3.17)$$

Utilizando a equação (2.2.8) encontramos um resultado idêntico à equação (3.2.28):

$$\langle 0 | a_R^+(\lambda) a_R(\lambda) | 0 \rangle \propto \frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \quad (3.3.18)$$

Assim, um detector em repouso no sistema de coordenadas de Rindler registra o vácuo cartesiano  $|0\rangle$ , como um estado térmico contendo  $\frac{1}{e^{2\pi\nu} - 1}$  partículas associadas dos modos  $\nu$ . Uma prova alternativa para a demonstração deste resultado foi efetuada por Weiss e Unruh<sup>[74]</sup> que usam o formalismo de integrais de trajetória.

Utilizando a relação de Tolman  $\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{g_{00}}}$  encontramos que a temperatura da distribuição Plankiana (3.3.18) é dada por:

$$\theta = \frac{\text{acel. pr\u00f3p.}}{2\pi} \quad (3.3.19)$$

onde

$$(\text{acel. pr\u00f3p.})^{-1} = \frac{1}{a} e^{aX} . \quad (3.3.6)$$

Com o objetivo de analisar mais cuidadosamente a situa\u00e7\u00e3o descrita, imaginemos uma fam\u00edlia de detectores em repouso em diferentes pontos no espa\u00e7o-tempo de Rindler (ver figura 2):

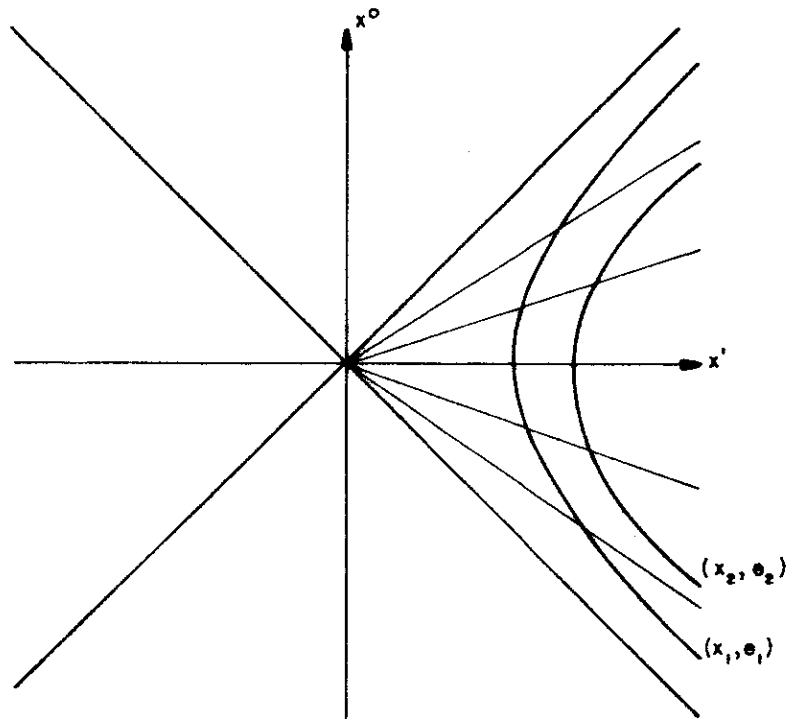


Fig. 2

Apesar de cada detector (observador) medir uma temperatura diferente ( $\theta = \frac{a}{2\pi} e^{-aX}$ ), estes est\u00e3o em equil\u00edbrio t\u00e9rmico. Para que dois corpos estejam em equil\u00edbrio t\u00e9rmico em diferentes pontos num campo gravitacional, n\u00e3o precisam ter necessariamente a mesma temperatura. Para garantirmos o equil\u00edbrio, devemos pedir que a taxa entre as temperaturas, deve ser igual ao "red shift" gravitacional que um foton sofre desde a sua emiss\u00e3o

pelo detector (A) até a absorção pelo detector (B) [65].

Assim:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\text{freq. 2}}{\text{freq. 1}} = \frac{e^{-ax_2}}{e^{-ax_1}} \quad (3.3.20)$$



Fig.: 3

(Na dedução acima, a frequência própria de radiação é dada por  $\frac{\nu}{\sqrt{g_{00}(\vec{x})}}$  [75]).

### 3.4 Teoria Quântica de Campos num sistema de Coordenadas de Kalnins-Miller (d=2)

Dentre os dez sistemas de coordenadas classificados por Kalnins e estudados por Miller o sistema de coordenadas definido pelas transformações (3.1.14) apresenta propriedades interessantes. Este sistema de coordenadas foi também estudado por Costa [76] [77], e é naturalmente adaptado a um observador ini-



cialmente inercial ( $x^0 \rightarrow -\infty$ ), que se acelera assintoticamente até atingir uma aceleração constante ( $x^0 \rightarrow \infty$ ).

Vamos definir as seguintes transformações de coordenadas:

$$x^0 + x^1 = \frac{2}{a} \sinh a (T + X) \quad (3.4.1.a)$$

$$x^0 - x^1 = -\frac{1}{a} \exp[-a(T - X)] \quad (3.4.1.b)$$

onde  $x^\mu = (x^0, x^1)$  são as coordenadas cartesianas enquanto que  $X^\mu = (T, X)$ , são as coordenadas curvilíneas em estudo.

O sistema de coordenadas  $(T, X)$  não cobre todo o espaço-tempo de Minkowski (como em Rindler ou Milne), mas apenas a região  $x^0 - x^1 < 0$ . No entanto, podemos extendê-lo analiticamente de forma a cobrir todo o espaço-tempo. (ver fig. 4).

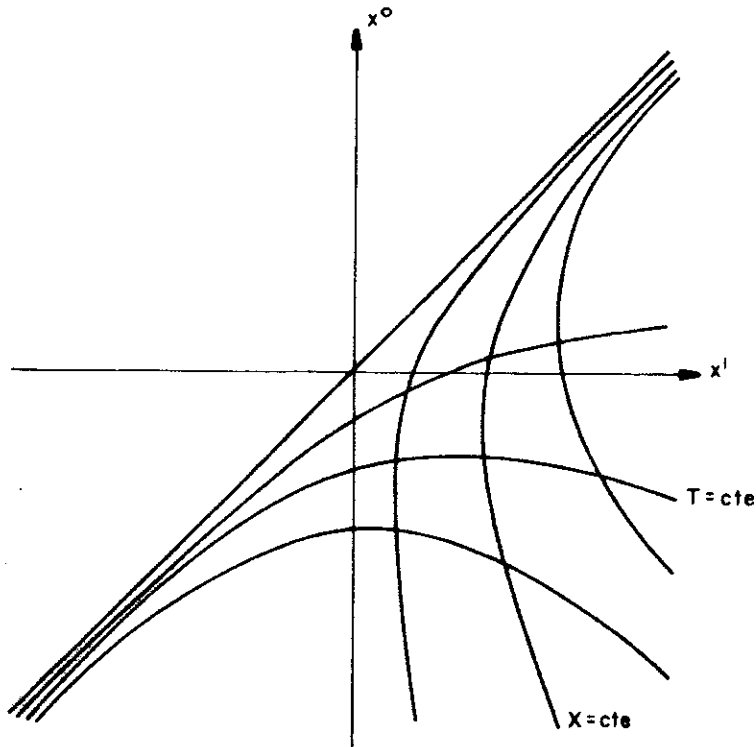


Fig.: 4

O elemento de linha  $ds^2$  escreve-se nas coordenadas  $(T, X)$  como

$$ds^2 = (e^{-2aT} + e^{2aX})(dT^2 - dX^2) \quad . \quad (3.4.2)$$

A aceleração própria de um observador que tem linha de universo  $X = \text{cte}$  é dada por

$$\text{acel. própria} = a(e^{-2aT} + e^{2aX})^{-3/2} e^{2aX} \Big|_{X = \bar{X}} \quad , \quad (3.4.3)$$

de forma que

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} \text{acel. própria}(T, \bar{X}) = 0 \quad e$$

$$T \rightarrow -\infty \quad (3.4.4.a)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{acel. própria}(T, \bar{X}) = a e^{-a\bar{X}} = a_\infty \quad . \quad (3.4.4.b)$$

$$T \rightarrow \infty$$

As superfícies  $T = T_0 = \text{cte}$  são utilizadas para postularmos as relações de comutação entre os operadores de campo na quantização. Seguindo os mesmos passos que efetuamos em Rindler e em Milne, vamos procurar uma base de funções para expandirmos qualquer solução da equação de Klein-Gordon. Nas variáveis  $(T, X)$  a equação de Klein-Gordon é escrita como

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} + m^2(e^{-2aT} + e^{2aX}) \right) \phi(T, X) = 0 \quad (3.4.5)$$

Definindo as variáveis  $y$  e  $z$  pelas transformações

$$y = \frac{1}{a} e^{-aT} \quad (3.4.6.a)$$

$$z = \frac{1}{a} e^{aX} \quad , \quad (3.4.6.b)$$

a equação de Klein Gordon (3.4.5) separa nas seguintes equações

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + m^2 + \frac{v^2}{y^2} \right] F(y) = 0 \quad (3.4.7)$$

e

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - m^2 + \frac{v^2}{z^2} \right] G(z) = 0 \quad (3.4.8)$$

onde  $\phi = F(y) G(z)$ .

Para a equação (3.4.8) temos como solução  $I_{i\nu}(mz)$  e  $K_{i\nu}(mz)$  que são, respectivamente, as funções de Bessel modificadas de primeiro tipo de ordem imaginária e as funções de Mcdonald de ordem imaginária. A solução  $I_{i\nu}(mz)$  é descartada pois diverge para  $z \rightarrow \infty$ , exatamente como no campo de Rindler (ver a equação 3.3.8). Para (3.4.7), temos como solução  $H_{i\nu}^{1,2}(my)$  e  $J_{i\nu}(my)$  exatamente como no caso de Milne (ver equação 3.2.7). Assim, existem dois conjuntos completos distintos:  $\{u_\lambda, u_\lambda^*\}$  e  $\{v_\lambda, v_\lambda^*\}$  a saber:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda(1 - e^{-2\pi\lambda}}{\pi} \right)^{1/2} H_{i\lambda}^{(1)}(my) K_{i\lambda}(mz) \end{array} \right. \quad (3.4.9.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\lambda^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda(1 - e^{-2\pi\lambda}}{\pi} \right)^{1/2} H_{-i\lambda}^{(2)}(my) K_{i\lambda}(mz) \end{array} \right. \quad (3.4.9.b)$$

e

$$\left[ \begin{array}{l} v_{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} J_{i\lambda}(my) K_{i\lambda}(mz) \\ v_{\lambda}^* = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} J_{-i\lambda}(my) K_{i\lambda}(mz) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.4.10.a) \\ (3.4.10.b) \end{array}$$

Aqui novamente se coloca a questão de como definir modos de frequência positiva e negativa num sistema de coordenadas não estacionário. Não repetiremos aqui toda a discussão já efetuada para o caso do sistema de coordenadas de Milne. A conclusão final é que o conjunto  $\{v_{\lambda}, v_{\lambda}^*\}$  satisfaz o critério de Sommerfield de frequência positiva e negativa, isto é, na superfície  $x^0 - x^1 = 0$  ( $T \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$ ) estes modos são autovetores do operador  $i \frac{\partial}{\partial T}$ .

Por outro lado, o conjunto  $\{u_{\lambda}, u_{\lambda}^*\}$  satisfaz o critério de di Sessa de frequência positiva e negativa. Denotaremos então o conjunto  $\{u_{\lambda}, u_{\lambda}^*\}$  de modos "in" enquanto que o conjunto  $\{v_{\lambda}, v_{\lambda}^*\}$  será chamado de modos "out".

Observadores inerciais ( $T \rightarrow -\infty$ ) escolhem os modos "in" como modos de frequência positiva e negativa de forma que o operador de campo  $\phi(x)$  fica expandido como

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda [a_{\lambda}^{\text{in}}(\lambda) u_{\lambda} + a_{\lambda}^{\text{in}\dagger}(\lambda) u_{\lambda}^*] . \quad (3.4.11)$$

Observadores com aceleração constante ( $T \rightarrow \infty$ ) escolhem os modos "out" para a expansão do operador de campo na forma

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda [a_A^{\text{out}}(\lambda) v_\lambda + a_\lambda^{\dagger \text{out}}(\lambda) v_\lambda^*] \quad . \quad (3.4.12)$$

Exatamente como em Milne temos dois vácuos distintos  $|0_A\rangle$  e  $|\bar{0}_A\rangle$  que geram dois diferentes espaços de Fock. Os operadores de destruição  $a_A^{\text{in}}(\lambda)$  e  $a_A^{\text{out}}(\lambda)$  aniquilam estes vácuos respectivamente, isto é:

$$a_A^{\text{in}}(\lambda) |0_A\rangle = 0 \quad \forall \lambda \quad (3.4.13.a)$$

$$a_A^{\text{out}}(\lambda) |\bar{0}_A\rangle = 0 \quad \forall \lambda \quad . \quad (3.4.13.b)$$

Um detector inercial que não mede partículas (o sistema está no estado de vácuo  $|0_A\rangle$ ) no infinito passado ( $T \rightarrow -\infty$ ) em repouso neste sistema de coordenadas ( $X = \text{cte}$ ) registrara a presença de partículas a medida que o tempo passa. O número de partículas observadas associadas aos modos  $\nu$  é dado por

$$\langle 0_A | a_A^{\text{out}\dagger}(\nu) a_A^{\text{out}}(\nu) | 0_A \rangle = \int d\mu |\beta_{\mu\nu}|^2 \quad (3.4.14)$$

onde  $\beta_{\mu\nu}$  são os coeficientes de Bogoliubov relacionando os dois conjuntos completos (3.4.9) e (3.4.10) dados por

$$\beta_{\nu\mu} = - (v_\nu, u_\mu^*) \quad . \quad (3.4.15)$$

Substituindo (2.1.11), (3.4.9) e (3.4.10) em (3.4.15), obtemos:

$$\beta_{\nu\mu} = \frac{1}{(e^{2\pi\nu} - 1)^{1/2}} \delta(\mu - \nu) \quad . \quad (3.4.16)$$

Temos, portanto, uma situação semelhante ao caso Milne. O vácuo  $|0_A\rangle$  contém uma distribuição térmica de partículas "out" cuja temperatura é dada por

$$\theta = \frac{a e^{-aX}}{2\pi} = \frac{a_\infty}{2\pi} \quad . \quad (3.4.17)$$

Para finalizar este capítulo, vamos comparar os dois vácuos  $|0_A\rangle$  e  $|\bar{0}_A\rangle$  associados respectivamente aos modos (3.4.9) e (3.4.10) com o vácuo cartesiano  $|0\rangle$  calculando os coeficientes de Bogoliubov

$$\beta_{\lambda k}^{\text{in Cart.}} = - (u_\lambda, u_k^*) \quad (3.4.18.a)$$

e

$$\beta_{\lambda k}^{\text{out Cart.}} = - (v_\lambda, u_k^*) \quad . \quad (3.4.18.b)$$

Os modos cartesianos (3.2.12) escritos nas coordenadas  $y$  e  $z$  se escrevem como

$$u_k(y, z) = \frac{1}{(4\pi\omega)^{1/2}} e^{-i/2 \left[ \frac{\omega - k}{a} \left( \frac{y}{z} - \frac{z}{y} \right) + a(\omega + k)yz \right]} \quad (3.4.19)$$

Utilizando (2.1.11), (3.4.9), (3.4.10) e (3.4.19) obtemos:

$$\beta_{\nu k}^{\text{in Cart.}} = \frac{1}{\pi(2\nu\omega a \sinh \pi\nu)^{1/2}} \text{Re} \left\{ \Gamma(1 - i) \left( \frac{\omega - k}{2a} \right)^{i\nu} \right\} \quad (3.4.20)$$

e

$$\beta_{\nu k}^{\text{out Cart.}} = \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2} \frac{e^{-\pi\nu/2}}{2\Gamma(1-i\nu) \sinh \pi\nu} \left(\frac{\omega-k}{2a}\right)^{i\nu} \quad (3.4.21)$$

logo

$$\left|\beta_{\nu k}^{\text{in Cart.}}\right|^2 = \frac{1}{2\pi^2\nu\omega a \sinh \pi\nu} \operatorname{Re}^2\left\{\Gamma(1-i\nu) \left(\frac{\omega-k}{2a}\right)\right\} \quad (3.4.22)$$

e

$$\left|\beta_{\nu k}^{\text{out Cart.}}\right|^2 = \frac{1}{2\pi\omega} \cdot \frac{1}{e^{2\pi\nu} - 1} \quad (3.4.23)$$

Temos então uma situação similar ao universo de Milne e Rindler com exceção do resultado encontrado na expressão (3.4.22). Castagnino sugere que este resultado deve-se a que o sistema de coordenadas associado ao fluido de observadores não satisfaz o critério de rigidez de Born.

No capítulo seguinte mostraremos que, apesar termos em princípio seis diferentes vácuos, apenas dois destes são unitariamente não equivalentes.

## CAPITULO IV

### AS TRANSFORMAÇÕES DE BOGOLIUBOV, OS DIFERENTES VÁCUOS E AS DIFERENTES BASES DE FUNÇÕES

No capítulo anterior, estudamos quatro diferentes sistemas de coordenadas, dois deles estáticos - o cartesiano e o de Rindler - e dois não estacionários onde chegamos a vários vácuos não equivalentes.

Mostramos como estes vácuos  $|0_M\rangle$ ,  $|\bar{0}_M\rangle$ ,  $|0_R\rangle$ ,  $|0_A^{in}\rangle$  e  $|0_A^{out}\rangle$  estão relacionados com o vácuo associado ao sistema de coordenadas cartesiano  $|0\rangle$ . Não mostramos, entretanto, como estes vácuos, definidos em diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas se relacionam entre si.

Os novos resultados que apresentaremos surgem da comparação dos vácuos  $|0_A^{in}\rangle$  e  $|0_A^{out}\rangle$  com os vácuos de Rindler ( $|0_R\rangle$ ) e de Milne ( $|0_M\rangle$  e  $|\bar{0}_M\rangle$ ).

Substituindo (3.3.9), (3.4.10) e (2.1.11) em (2.2.5.b), obtemos

$$\beta_{\mu\tau}^{Rind\ out} = -(\phi_\nu, v_\tau^*) = 0, \quad (4.1.1)$$

desta forma  $|\beta_{\mu\tau}|^2 = 0$ .



Substituindo (3.3.9), (3.4.9) e (2.1.11) em (2.2.5.b), obtemos

$$\beta_{\mu\tau}^{\text{Rind in}} = - (\phi_{\mu}, u_{\tau}^*) = \frac{1}{e^{2\pi\mu} - 1} \delta(\mu - \tau) \quad (4.1.2)$$

Substituindo (3.2.7), (3.4.10) e (2.1.11) em (2.2.5.b), obtemos

$$\beta_{\nu\tau}^{\text{Milne out}} = - (v_{\nu}^{\text{Milne out}}, v_{\tau}^*) = 0 \quad (4.1.3)$$

e, finalmente, substituindo (3.2.8), (3.4.9) e (2.1.11) em (2.2.5.b), temos

$$\beta_{\rho\tau}^{\text{Milne in}} = - (u_{\rho}^{\text{Milne in}}, u_{\tau}^*) = 0 \quad (4.1.4)$$

Com os resultados obtidos acima acrescidos dos resultados (3.2.30), (3.3.16), (3.4.16) e (3.4.20), podemos construir o seguinte diagrama, onde a temperatura satisfaz uma relação de equivalência [20].

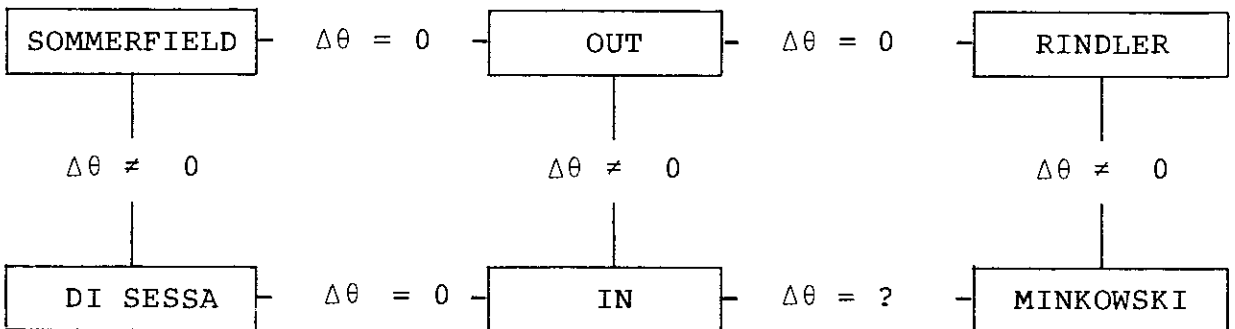


Figura: 5

A única exceção é o resultado obtido quando calculamos os coeficientes de Bogoliubov entre os modos cartesianos e os modos "in" (3.4.20). Uma análise mais profunda deste resultado ainda está para ser feita.

## CAPITULO V

### AS FUNÇÕES DE GREEN ASSOCIADAS AO CAMPO ESCALAR - UM TRATAMENTO ESPECÍFICO

#### 5.1 Os propagadores no espaço-tempo de Rindler ( $d = 2$ )

Como vimos na seção 3.3, para um observador acelerado o vácuo de Minkowski cartesiano  $|0\rangle$  é visto como um estado térmico cuja temperatura é proporcional à aceleração do observador. Se desejamos obter maior informação sobre o efeito Fulling-Unruh, devemos calcular o propagador de Feynman associado ao campo escalar no espaço-tempo de Rindler. Mostraremos que este propagador coincide com o resultado dado pela equação (2.3.14) ( $d = 2$ ), isto é, o propagador de Feynman no espaço-tempo de Rindler e no espaço-tempo de Minkowski são idênticos.

O propagador de Feynman no espaço-tempo de Rindler deve obedecer à equação [78]

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 \xi^2 \right) G_F = \\ & = - \frac{i}{\xi} \delta(\eta - \eta') \delta(\xi - \xi') \quad . \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Usando (3.3.4.a), (3.3.4.b) e (3.3.7) e substituindo os modos dados pelas equações (3.3.9.a) e (3.3.9.b) em (2.3.23), obtemos para  $T > T'$

$$\begin{aligned} i G(T, z; T', z') &= \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dv \operatorname{sen} h \pi v e^{-iva(T - T')} K_{iv}(mz) K_{iv}(mz') \quad . \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

A integral do lado direito da equação (5.1.2) é conhecida na literatura como uma transformada de Kontorovitch Lebedev [79][80]. Note que estamos integrando com relação ao índice da função de Bessel e a prova que qualquer função analítica definida dentro de um aberto D pode ser expressa por uma integral deste tipo, foi dada por Lebedev em 1951 [67].

Utilizando uma representação integral do produto de funções de Bessel [81][82]

$$K_{iv}(mz) K_{iv}(mz') = \frac{1}{2} \int d\lambda e^{iv\lambda} K_0(m\gamma_1) \quad (5.1.3)$$

onde

$$\gamma_1^2 = z^2 + z'^2 + 2zz' \operatorname{cos} h \pi \lambda \quad (5.1.4)$$

e definindo a variável  $u = a|T - T'|$ , a integral (5.1.2) se transforma em

$$i G(T, z; T, z') =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dv \sinh \pi v e^{-i v u} \int_{-\infty}^\infty d\lambda e^{i \lambda v} K_0(m\gamma_1) . \quad (5.1.5)$$

Trocando a ordem de integração e supondo que  $\text{Im } u < -\pi$  ficamos com

$$i G_F(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\lambda K_0(m\gamma_1) \int_0^\infty dv \sinh \pi v e^{-i(u-\lambda)v} . \quad (5.1.6)$$

A segunda integral da equação (5.1.6) é uma transformada de Laplace. Usando a identidade<sup>[80]</sup>

$$\int_0^\infty e^{-pt} \sinh at dt = \frac{a}{p^2 - a^2} \quad | \text{Re } p | > \text{Re } a$$

podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dv \sinh \pi v e^{-i(u-\lambda)v} = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{(\lambda-u)^2 + \pi^2} \right) . \quad (5.1.7)$$

Substituindo (5.1.7) em (5.1.6), encontramos

$$i G_F(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda K_0(m\gamma_1) \frac{1}{[(\lambda-u)^2 + \pi^2]} . \quad (5.1.8)$$

A integral (5.1.8) pode ser resolvida efetuando uma extensão analítica da variável  $\lambda$  e utilizando o teorema de Cauchy. Por um cálculo direto, obtemos finalmente:

$$G_F(x, x') = \begin{cases} -\frac{1}{4} H_0^{(2)}(m^2 \sigma)^{1/2} & m^2 \sigma > 0 \\ -\frac{i}{2\pi} K_0(-m^2 \sigma)^{1/2} & m^2 \sigma < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.1.9.a) \\ (5.1.9.b) \end{matrix}$$

onde  $\sigma = z^2 + z'^2 - 2zz' \cosh a(T - T')$  (5.1.10)

$$= \eta_{\mu\nu} (x^\mu - x'^\mu) (x^\nu - x'^\nu)$$

é o intervalo espaço-temporal entre os pontos  $(T, z)$  e  $(T', z')$ .

A coincidência deste resultado com o propagador de Feynman (2.3.12) levou Bolware <sup>[83]</sup> a afirmar que as duas quantizações (utilizando coordenadas cartesianas e coordenadas de Rindler) são equivalentes.

## 5.2 Os propagadores no espaço-tempo de Milne - as bases de funções de di Sessa e Sommerfield

Como vimos na seção (3.2), a construção de uma Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo de Milne nos levou a duas representações distintas, unitariamente não equivalentes da álgebra dos operadores. Na primeira, o espaço de Fock dos estados é gerado a partir do estado de vácuo  $|0_M\rangle$  (que coincide com o vácuo cartesiano  $|0\rangle$ ). Na segunda, o espaço de Fock dos estados é gerado a partir do estado de vácuo  $|\bar{0}_M\rangle$  que não coincide com o vácuo cartesiano  $|0\rangle$ . Mostraremos que o propagador de Feynman, quando calculado utilizando-se os modos (3.2.8), coincide com o propagador usual (eq. 2.3.14) enquanto

que o propagador de Feynman associado aos modos (3.2.9) diverge.

O cálculo do propagador de Feynman utilizando o critério de di Sessa de frequências positiva e negativa é trivial.

Substituindo os modos (3.2.8) na equação (2.3.23) ( $y^0 > y^{0'}$ ) temos

$$\begin{aligned}
 i G_F(x, x') &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda u_\lambda(x) u_\lambda^*(x') = \\
 &= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda a(X - X')} e^{\pi\lambda} H_{i\lambda}^{(2)}(my) H_{-i\lambda}^{(1)}(my') \quad (5.2.1)
 \end{aligned}$$

mas

$$H^{(1)}(z e^{i\pi/2}) = \frac{2}{i\pi} e^{-i\pi\nu/2} K_\nu(z) \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

e

$$H_\nu^{(2)}(z e^{-i\pi/2}) = -\frac{2}{\pi i} e^{i\pi\nu/2} K_\nu(z) \quad -\frac{\pi}{2} \arg z < \pi$$

de forma que a integral (5.2.1) se escreva como

$$i G_F(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda a(X - X')} K_{i\lambda}(\lambda y) K_{i\lambda}(-\lambda y'). \quad (5.2.2)$$

Utilizando a identidade<sup>[80]</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho x} K_{\nu + ix}(a) K_{\nu - ix}(b) dx = \pi \left( \frac{a + b e^\rho}{a e^\rho + b} \right) K_{2\nu}(\omega)$$

onde  $\omega = (a^2 + b^2 + 2ab \cosh \rho)^{1/2}$  e  $|\arg a| + |\arg b| + |\arg \rho| < \pi$

a expressão (5.2.2), fica

$$i G_F(x, x') = \frac{1}{2\pi} K_0(-m^2(y^2 + y'^2 - 2yy' \cosh a(X - X')))^{1/2}. \quad (5.2.3)$$

O intervalo espaço-temporal entre dois pontos no espaço-tempo de Milne, é dado por  $\sigma(y, X; y', X')$  onde

$$\sigma = y^2 + y'^2 - 2yy' \cosh a(X - X') \quad (5.2.4)$$

Substituindo (5.2.4) em (5.2.3), encontramos

$$G_F(x, x') = \begin{cases} -\frac{1}{4} H_0^{(2)}(m^2 \sigma)^{1/2} & m^2 \sigma > 0 \quad (5.2.5.a) \\ -\frac{i}{2\pi} K_0(-m^2 \sigma)^{1/2} & m^2 \sigma < 0 \quad (5.2.5.b) \end{cases}$$

Fica assim provada uma parte da afirmação anterior.

O resultado acima foi obtido por Charach<sup>[84]</sup> utilizando os modos (3.2.8) num artigo onde o autor estuda o universo de Kasner.

Para finalizar, neste trabalho calculamos as funções de Green retardadas e avançadas, utilizando o critério de Sommerfield para a escolha dos modos de frequência positiva e negativa<sup>[21]</sup>. Para isto é necessário o cálculo da função de Pauli-Jordan. Esta, como vemos, pode ser separada nas partes de frequência po



sitiva e negativa, a saber:

$$G^+(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda v_{\lambda}(x) v_{\lambda}^*(x') \quad (5.2.6.a)$$

e

$$G^-(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda v_{\lambda}^*(x) v_{\lambda}(x') . \quad (5.2.6.b)$$

Substituindo (3.2.9.a) e (3.2.9.b) em (5.2.6.a) e (5.2.6.b), encontraremos

$$G^+(\xi, \eta; \xi', \eta') = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sinh \pi |\lambda|} e^{i\lambda(\eta - \eta')} J_{-i|\lambda|}(m\xi) J_{i|\lambda|}(m\xi') . \quad (5.2.7.a)$$

$$G^-(\xi, \eta; \xi', \eta') = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sinh \pi |\lambda|} e^{-i\lambda(\eta - \eta')} J_{i|\lambda|}(m\xi) J_{-i|\lambda|}(m\xi') . \quad (5.2.7.b)$$

Fica assim demonstrada a divergência do Propagador de Feynman, pois as integrais (5.2.7.a) e (5.2.7.b) calculadas individualmente, são divergentes pois quando  $\lambda \rightarrow 0^+$ ,  $0^-$  o integrando se comporta como  $\frac{1}{\pi|\lambda|} J_0(m\xi) J_0(m\xi')$  (ordem zero) + r  $|r| < \infty$  na vizinhança da origem ( $\lambda = 0$ ). No entanto, o cálculo de  $G^+ - G^-$  elimina esta divergência.

Por outro cálculo direto, temos

$$G^+(\eta, \xi; \xi', \eta') - G^-(\xi, \eta; \xi', \eta') =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sinh \pi \lambda} e^{i\lambda(\eta - \eta')} J_{-i\lambda}(m\xi) J_{i\lambda}(m\xi') + \\
 &- \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sinh \pi \lambda} e^{i\lambda(\eta - \eta')} J_{i\lambda}(m\xi) J_{-i\lambda}(m\xi') . \quad (5.2.8)
 \end{aligned}$$

Definindo

$$f_{\lambda}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{\sinh \pi \lambda} e^{i\lambda z_1} J_{-i\lambda}(mz_2) J_{i\lambda}(mz_3) \quad (5.2.9)$$

a expressão (5.2.8) pode ser escrita como:

$$G^+ - G^- = I_1 - I_2 \quad (5.2.10)$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f_{\lambda}(\eta - \eta', \xi, \xi') \quad (5.2.11)$$

e

$$I_2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f_{\lambda}(\eta - \eta', \xi', \xi) . \quad (5.2.12)$$

Quando  $m\xi$  e  $m\xi'$  não são raízes de  $J_0$ ,  $|f_{\lambda}|$  diverge na ordem  $\lambda^{-1}$  quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Entretanto as integrais (5.2.11) e (5.2.12) são finitas se adotamos o valor principal na origem ( $\lambda = 0$ ). A função  $f_{\lambda}(z_1, z_2, z_3)$  é analítica em todo o plano complexo exceto nos pontos  $\lambda = ni$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ). Temos então infinitos polos de primeira ordem e o resíduo destes polos é fa

cilmente encontrado, isto é:

$$\text{Res}(f_\lambda; ni) = \frac{1}{\pi} e^{-nz_1} J_n(mz_2) J_n(mz_3) . \quad (5.2.13)$$

Para o cálculo de  $I_1$  e  $I_2$  podemos usar o princípio dos contornos distintos  $C$  e  $C'$  (ver figura 6).

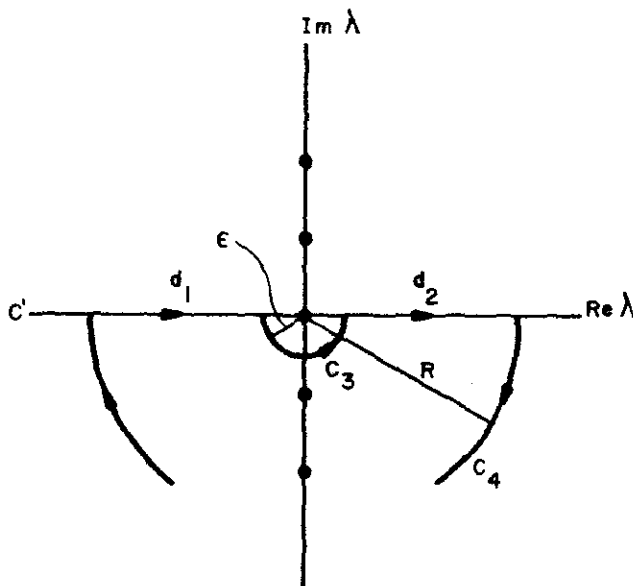
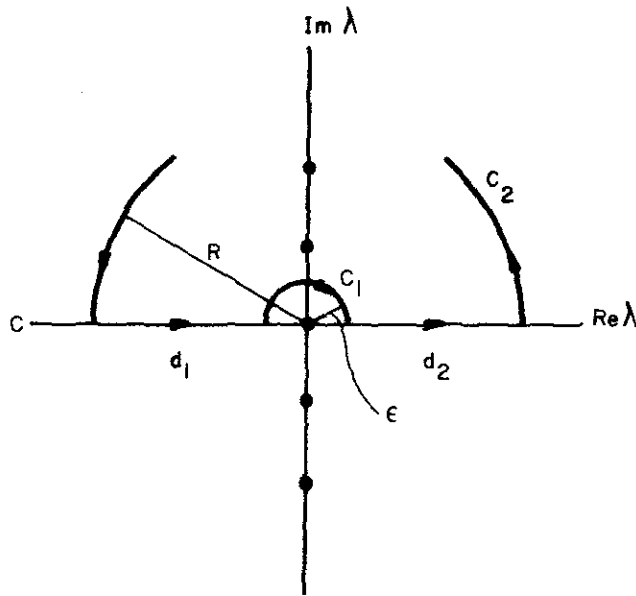


Fig.: 6

Por construção, exigimos que  $C_2$  e  $C_4$  cortem o eixo  $\text{Im } \lambda$  no ponto médio de dois polos adjacentes, isto é:

$$R = q + \frac{1}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad .$$

Podemos mostrar que

$$\lim \int_{C_2} d\lambda f_\lambda(z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{se } e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} > 1 \quad (5.2.14.a)$$

$$R = q + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$$

e

$$\lim \int_{C_4} d\lambda f_\lambda(z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{se } e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} < 1 \quad (5.2.14.b)$$

(Para uma demonstração rigorosa de (5.2.14) veja o apêndice F).

Pelo teorema de Cauchy,

$$\int_C f_\lambda(z_1, z_2, z_3) d\lambda = 2\pi i \sum_{n=1}^q \text{Res}(f_\lambda, ni) \quad (5.2.15)$$

Tomando o limite de (5.2.15) para  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow \infty$  e utilizando a equação (5.2.9), encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f_\lambda(z_1, z_2, z_3) &= i J_0(mz_2) J_0(mz_3) + \\ &+ 2i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz_1} J_n(mz_2) J_n(mz_3) \quad \text{se } e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} < 1 \end{aligned} \quad (5.2.16.a)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f_{\lambda}(z_1, z_2, z_3) = -i J_0(mz_2) J_0(mz_3) +$$

$$- 2i \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{-nz_1} J_n(mz_2) J_n(mz_3)$$

se  $e^{z_1} \frac{z_3}{z_2} < 1$ . (5.2.16.b)

Substituindo (5.2.16) em (5.2.11) e (5.2.12), te

mos:

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{4} (J_0(m\xi) J_0(m\xi') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(\eta - \eta')} J_n(m\xi) J_n(m\xi')) \\ \text{se } e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} > 1 \end{array} \right. \quad (5.2.17.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{i}{4} (J_0(m\xi) J_0(m\xi') + 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{-n(\eta - \eta')} J_n(m\xi) J_n(m\xi')) \\ \text{se } e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} < 1 \end{array} \right. \quad (5.2.17.b)$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i}{4} (J_0(m\xi) J_0(m\xi') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(\eta - \eta')} J_n(m\xi) J_n(m\xi')) \\ \text{se } e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} > 1 \end{array} \right. \quad (5.2.18.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{i}{4} (J_0(m\xi) J_0(m\xi') + 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{-n(\eta - \eta')} J_n(m\xi) J_n(m\xi')) \\ \text{se } e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} < 1 \end{array} \right. \quad (5.2.18.b)$$

O intervalo espaço-temporal nas coordenadas de Milne  $(\xi, \eta)$  é dado por

$$\begin{aligned}\sigma &= \xi^2 + \xi'^2 - 2 \xi \xi' \cosh (\eta - \eta') = \\ &= - \xi \xi' e^{-(\eta - \eta')} \left( e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} - 1 \right) \left( e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} - 1 \right).\end{aligned}\tag{5.2.19}$$

Se  $\sigma < 0$  (o que corresponde a pontos separados espacialmente) temos duas possibilidades

$$e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} > 1 \quad e \quad e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} > 1 \tag{5.2.20.a}$$

ou

$$e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} < 1 \quad e \quad e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} < 1 . \tag{5.2.20.b}$$

Nos casos dados pela equação (5.2.20),  $I_1 = I_2$  de forma que  $G(x, x') = 0$ .

Se  $\sigma > 0$  (o que corresponde a pontos separados temporalmente), temos também duas possibilidades:

$$e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} > 1 \quad e \quad e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} < 1 \tag{5.2.21.a}$$

ou

$$e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi'}{\xi} < 1 \quad e \quad e^{(\eta - \eta')} \frac{\xi}{\xi'} > 1 . \tag{5.2.21.b}$$

Utilizando (5.2.17), (5.2.18), (5.2.21) e (5.2.11), encontramos

$$G^+ - G^- = -\frac{i}{2} [\theta(\sigma) \varepsilon(\xi - \xi')] \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n(\eta - \eta')} J_n(m\xi) J_n(m\xi') \quad (5.2.22)$$

Efetuada uma extensão analítica do teorema de adição das funções de Bessel, a saber

$$J_0(mS) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') e^{in\theta} \quad (5.2.23)$$

onde

$$S = (\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cos \theta)^{1/2}$$

(Uma demonstração mais rigorosa do resultado acima é feita no apêndice G), chegamos finalmente a

$$iG = G^+ - G^- = -\frac{i}{2} [\theta(\sigma) \varepsilon(\xi - \xi') J_0(m^2\sigma)^{1/2}] \quad (5.2.24)$$

A coincidência da Função de Pauli-Jordan quando calculada utilizando-se os modos (3.1.8) ou (3.2.9), não é acidental, mas baseia-se no fato de que ambos os modos se relacionam via uma transformação de Bogoliubov.

As funções de Green retardadas e avançadas são dadas por

$$G_R(\xi, \eta; \xi', \eta') = -\theta(\xi - \xi') G(\xi, \eta; \xi', \eta') \quad (5.2.25.a)$$

$$G_A(\xi, \eta; \xi', \eta') = \theta(\xi' - \xi) G(\xi, \eta; \xi', \eta') \quad (5.2.25.b)$$

Aqui cabe a observação: No espaço-tempo de Rindler, apesar de termos duas representações distintas da álgebra dos operadores, o propagador de Feynman é univocamente definido. Por outro lado, no espaço-tempo de Milne associado às duas representações da álgebra dos operadores, temos dois propagadores de Feynman distintos associados às duas representações da álgebra dos operadores.

Apesar do propagador de Feynman associados aos modos (3.2.9) divergir, assumindo que o espectro de  $\lambda$  não contém o ponto  $\lambda = 0$ , esta divergência infravermelha pode ser eliminada e este propagador não deve coincidir com o propagador usual.

A divergência infravermelha dada pela equação (5.2.7) é semelhante a descrita por Wightman<sup>[85]</sup> e Schroer<sup>[86]</sup> na quantização de um campo escalar real sem massa, no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional ( $d=2$ ), onde a função de Wightman  $\Delta^+$  tem a forma

$$\Delta^+(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{|k|} \cos k(x^{1'} - x^1) e^{-i|k|(x^{0'} - x^0)}. \quad (5.2.26)$$

Esta divergência infravermelha não pode ser eliminada (não existem bosons livres,  $m=0$  em duas dimensões espaço-temporais), o que levou Coleman<sup>[87]</sup> a provar em outro contexto que o teorema de Golstone não vale em  $d=2$ . Uma tentativa de levantar a divergência dada pela equação (5.2.7) ou pelo menos detectar sua origem, seria aumentar as dimensões do espaço-tempo utilizando as transformações

$$x^0 = \xi \cosh \eta^1$$

$$x^1 = \xi \sinh \eta^1$$



$$x^2 = \eta^2$$

$$x^3 = \eta^3 \quad .$$

Parece-nos entretanto, que o problema continua, pois as dimensões adicionais estão congeladas, de forma que a transformação de coordenadas correta para detectar a origem do problema deve ser a transformação utilizada por Gromes, Rothe e Stech<sup>[88]</sup>, a saber:

$$\rho = (t^2 - r^2)^{1/2} \quad , \quad \xi = t(t^2 - r^2)^{-1/2}$$

onde  $(t, r, \theta, \phi)$  são as coordenadas polares usuais e escolhendo  $\xi = \cosh u$  temos

$$t = \rho \xi = \rho \cosh u$$

$$r = \rho (\xi^2 - 1)^{1/2} = \rho \sinh u$$

$$\theta = \bar{\theta}$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad .$$

Para concluir faremos alguns comentários sobre a formulação de um teoria de Campos em sistemas de coordenadas que não cobrem todo o espaço-tempo de Minkowski, mas apenas uma região deste, como os sistemas de Rindler, Milne e de Kalnins-Miller e o problema do detector dentro deste contexto. Fulling faz sérias objeções sobre os esquemas de quantização, apresentados no capítulo II, alegando que para altas energias, onde podemos

construir um pacote numa região pequena comparada à distância entre o observador e o horizonte de eventos não existiriam problemas. Estes surgem para baixas energias<sup>[89]</sup>, onde o comprimento compton das partículas, torna-se comparável a distância do observador ao horizonte e às propriedades globais do sistema de coordenadas tornam-se relevantes. Entretanto, no espaço-tempo de Rindler temos uma estrutura de quantização idêntica àquela efetuada no espaço-tempo de Minkowski. Temos uma variedade com um vetor de Killing tipo tempo, onde construímos uma representação da álgebra dos operadores na qual a simetria gerada por este vetor é implementada por um grupo de operadores unitários. Como o gerador deste grupo unitário é positivo definido, a construção de auto-estados deste operador sugere uma estrutura de partícula (Representação de Rindler-Fock).

Outra observação importante diz respeito ao problema do detector. DeWitt sugere que o estudo do detector talvez seja fundamental para o entendimento do efeito Fulling-Unruh. Esta hipótese aproxima-se do espírito da Mecânica Quântica, onde os efeitos dinâmicos do aparato experimental não podem ser desprezados. Assim, a primeira tarefa seria definir o detector.

O primeiro modelo idealizado de detector que aparece na literatura foi apresentado por DeWitt<sup>[90]</sup>. Este autor define um detector como um sistema físico pontual com graus de liberdade interna e níveis de energia  $E$  de forma que a lagrangeana de interação que acopla os graus de liberdade interna do detector com o campo  $\phi(x)$ , é dada por

$$L^1 = \alpha m(\tau) \phi(x(\tau)) \quad (5.4.27)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de acoplamento ( $\alpha \ll 1$ ) e  $m(\tau)$  é o operador momento de monopolo que satisfaz uma equação de Heisenberg de evolução:

$$m(\tau) = e^{i H_0 \tau} m(0) e^{-i H_0 \tau} \quad (5.4.28)$$

e

$$H_0 |E\rangle = E |E\rangle$$

sendo  $H_0$  a Hamiltoniana que descreve os graus de liberdade internos do detector.

Supondo que o campo se encontra no estado inicial  $|\psi_0\rangle$  e o detector no estado fundamental  $|E_0\rangle$ , a amplitude de transição  $A$  do campo ao estado  $|\psi\rangle$  e do detector ao estado  $|E\rangle$  em primeira ordem da teoria de perturbações é dada por:

$$A^{(1)} = i \alpha \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(E - E_0)\tau} \langle \psi | \phi(x^\mu(\tau)) | \psi_0 \rangle \quad (5.4.30)$$

onde  $x^\mu(\tau)$  é a linha de universo do detector parametrizada pelo tempo próprio  $\tau$ . Desta forma, a probabilidade de encontrarmos o detector no auto-estado  $|E\rangle$  e o campo no auto-estado  $|\psi_0\rangle$  é dada por:

$$P^{(1)} =$$

$$= \alpha^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-i(E-E_0)(\tau-\tau')} \langle \psi_0 | \phi(x(\tau)) \phi(x(\tau')) | \psi_0 \rangle \quad (5.4.31)$$

Note que poderíamos ter escolhido outras lagrangianas para acoplar os graus de liberdade internos do detector com o campo  $\phi(x)$ , como por exemplo, faz Hinton<sup>[91]</sup> trabalhando com

$$L^{(2)} = \alpha_2 m(\tau) \phi^2(x^\mu(\tau)) \quad (5.4.32)$$

$$L^{(3)} = \alpha_3 m(\tau) b^\mu \partial_\mu \phi(x(\tau)) \quad (5.4.33)$$

onde  $b^\mu$  é um vetor unitário definido no sistema do detector. É evidente que  $P^{(1)}$ ,  $P^{(2)}$  e  $P^{(3)}$  são diferentes, levando a diferentes respostas à questão de existência de partículas no vácuo  $|\psi_0\rangle$ .

Temos duas respostas distintas para a pergunta "O que são partículas?". A primeira baseia-se nos coeficientes de Boboliubov e a segunda, no espectro de potência  $P(\omega)$  do detector. (pode-se demonstrar que para observadores inerciais e observadores de Rindler, as duas respostas concordam). A situação complica-se quando Letaw<sup>[92]</sup> e Padmanabham<sup>[66]</sup>, estudando o modelo de DeWitt de detector, exibem resultados onde  $\beta_{\mu\nu} = 0$  mas  $P(\omega) \neq 0$  e  $P(\omega) = 0$  (o detector não mede partículas) mas  $\beta_{\mu\nu} \neq 0$ .

Uma linha mais promissora poderia ser o estudo de correntes ou do tensor Momento-Energia que são polinômios nos campos e nas suas derivadas. Parker e Fulling<sup>[93]</sup> argumentam que após um plausível procedimento de renormalização, o ten

tor Momento-Energia, que é o principal observável em um sistema físico num contexto envolvendo a gravitação, nos traz respostas sobre o problema da correta definição do estado de vácuo.

## CAPITULO 6

### O CAMPO ESCALAR EM MODELOS COSMOLÓGICOS

A quantização de um campo escalar em espaços-tempo curvos também apresenta o fenômeno de criação de partículas. A produção de partículas por campos gravitacionais que variam no tempo é análoga a produção de partículas gerada por campos elétricos. O campo gravitacional assim como os campos elétricos misturaram as frequências positivas e negativas associadas às bases de funções, permitindo a criação de pares. Nas seções seguintes examinaremos em detalhes como isto ocorre.

#### 6.1 O Campo Escalar Real e sua quantização no modelo cosmológico de Robertson-Walker

Consideremos um espaço-tempo  $M$ , quadridimensional possuindo um sub-espaço tridimensional maximalmente simétrico. Definiremos o sistema de coordenadas  $(\eta, r, \theta, \phi)$  onde  $(r, \theta, \phi)$  são coordenadas esféricas e  $\eta$ ,  $\eta_1 < \eta < \eta_2$  é o tempo conforme definido em  $\bar{M}CM$ .

O elemento de linha em  $\bar{M}$  escreve-se como

$$ds^2 = C(\eta) \left[ d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (6.1.1)$$

onde  $\epsilon = 0, \pm 1$ .

A função  $C(\eta)$  é positiva e se anula apenas quando  $\eta \rightarrow \eta_1$  ou  $\eta \rightarrow \eta_2$ . O tempo cósmico  $t$  é definido a menos de uma constante por:

$$t = \int^{\eta} d\eta' C(\eta')^{1/2} \quad (6.1.2)$$

O tempo cósmico  $t$  é uma função monotamente crescente de  $\eta$  definida no intervalo aberto  $]t_1, t_2[$ . O tempo cósmico é o tempo próprio de um observador comovente com o fluido de matéria com coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  constantes.

A equação (6.1.1) pode ser escrita como:

$$ds^2 = C(\eta) \left[ d\eta^2 - \sum_{i,j} h_{ij} dx^i dx^j \right] \quad (6.1.3)$$

onde

$$\sum_{i,j} h_{ij} dx^i dx^j = d\chi^2 + f^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1.4)$$

e

$$f(\chi) = r = \begin{cases} \text{sen } \chi & 0 \leq \chi \leq 2\pi & \epsilon = +1 \\ \chi & 0 \leq \chi \leq \infty & \epsilon = 0 \\ \text{senh } \chi & 0 \leq \chi \leq \infty & \epsilon = -1 \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Os valores da constante  $\epsilon = -1, 0$  e  $1$ , estão ligados respectivamente às seções espaciais hiperbólica, plana e fechada.

Vamos estudar a quantização de um campo escalar real  $\phi(x)$  de massa  $m$  cuja contribuição para o tensor momento e-nergia nas equações de Einstein é desprezível, de forma a não perturbar a geometria de fundo. Exigindo que a teoria seja in-variante sob o grupo das transformações conformes (ver equação 2.1.9), no caso da massa do campo ser nula, a equação de movi-mento para o campo  $\phi(x)$  é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu})_{,\nu} + (m^2 + \xi(d)R)\phi = 0 \quad (2.1.10)$$

onde  $\xi(d) = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}$ .

Como estamos trabalhando num espaço-tempo qua-dridimensional a equação de Klein-Gordon conformalmente acopla-da se escreve:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu})_{,\nu} + (m^2 + \frac{1}{6}R)\phi = 0 \quad (6.1.6)$$

A equação (6.1.6) pode ser resolvida por separa-ção de variáveis, se escolhemos

$$\phi_{\underline{k}}(x) = C^{-1/2}(\eta) y_{\underline{k}}(\underline{x}) \chi_{\underline{k}}(\eta) \quad (6.1.8)$$

onde  $y_{\underline{k}}(\underline{x})$  é solução de

$$\Delta^{(3)} y_{\underline{k}} = -k^2 y_{\underline{k}}(\underline{x}) \quad (6.1.8.a)$$



$$= - (q^2 - \epsilon) y_{\underline{k}}(\underline{x}) \quad (6.1.8.b)$$

com  $q$  assumindo os valores:

$$\begin{aligned} q &= 1, 2, \dots & \text{se } \epsilon &= 1 \\ 0 < q < \infty & & \text{se } \epsilon &= 0 \text{ ou } -1. \end{aligned}$$

O operador  $\Delta^{(3)}$  é o laplaciano associado a parte espacial da métrica e a expressão explícita das autofunções  $y_{\underline{k}}(\underline{x})$  associada às seções plana, hiperbólica e fechada, podem ser encontradas no apêndice D.

As funções  $\chi_{\underline{k}}(\eta)$  satisfazem a equação

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + q^2 + m^2 C(\eta) \right] \chi_{\underline{k}}(\eta) = 0 \quad (6.1.9)$$

Os modos  $\phi_{\underline{k}}$  são normalizados de acordo com o produto escalar dado pela equação (2.1.11), isto é:

$$(\phi_{\underline{k}}, \phi_{\underline{k}'}) = \delta(\underline{k}, \underline{k}') \quad (6.1.10)$$

Como as autofunções  $y_{\underline{k}}(\underline{x})$  já estão normalizadas, devemos impor que

$$\chi_{\underline{k}} \overleftrightarrow{\partial}_{\eta} \chi_{\underline{k}'}^* = i$$

onde  $f \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} g = f \partial_{\mu} g - g \partial_{\mu} f$ .

Chamando de  $\chi_k^{in}$  a solução da equação (6.1.9) que tem frequência positiva quando  $t \rightarrow t_1 (\eta \rightarrow \eta_1)$  podemos construir uma base de funções  $\{\chi_k^{in}, \chi_k^{in*}\}$  que gera qualquer solução da equação (6.1.9).

Não voltaremos a discutir como definir modos de frequência positiva e negativa, assunto bem abordado nos capítulos anteriores. Sendo assim, garantimos a existência de um conjunto completo  $\{\phi_k^{in}$  e  $\phi_k^{in*}\}$  com frequência definida, base para a expansão do operador de campo  $\phi$ , isto é:

$$\phi = \int d\bar{\mu}(\underline{k}) [a_{\underline{k}}^{in} \phi_{\underline{k}}^{in} + a_{\underline{k}}^{\dagger in} \phi_{\underline{k}}^{in*}] \quad (6.1.11)$$

Se  $\phi$  é um campo clássico,  $a_{\underline{k}}$  e  $a_{\underline{k}}^{\dagger}$  são funções complexas e  $d\bar{\mu}(\underline{k})$  é a medida associada às funções  $y_{\underline{k}}(x)$ , de forma que

$$\int d\bar{\mu}(\underline{k}) f(\underline{k}) \delta(\underline{k}, \underline{k}') = f(\underline{k}') \quad .$$

Da mesma forma, vamos chamar de  $\chi_k^{out}$  a solução da equação (6.1.9) que tem frequência positiva quando  $t \rightarrow t_2 (\eta \rightarrow \eta_2)$ , construindo, assim, uma outra base de funções  $\{\chi_k^{out}, \chi_k^{out*}\}$  solução da equação (6.1.9).

O operador de campo  $\phi$  é escrito, então, como

$$\phi = \int d\bar{\mu}(\underline{p}) [a_{\underline{p}}^{out} \phi_{\underline{p}}^{out} + a_{\underline{p}}^{\dagger out} \phi_{\underline{p}}^{*out}] \quad (6.1.12)$$

As equações (6.1.11) e (6.1.12) descrevem a mes

ma situação que as equações (2.2.1.a) e (2.2.1.b).

Desde que  $\{\phi_{\underline{k}}^{\text{in}}, \phi_{\underline{k}}^{*\text{in}}\}$  e  $\{\phi_{\underline{k}}^{\text{out}}, \phi_{\underline{k}}^{*\text{out}}\}$  são conjuntos completos, os modos  $\phi_{\underline{k}}^{\text{in}}$  podem ser escritos como uma combinação linear dos modos  $\phi_{\underline{k}}^{\text{out}}$  e vice-versa, a saber

$$\phi_{\underline{k}}^{\text{in}} = \int d\bar{u}(\underline{p}) [\alpha_{\underline{k}\underline{p}} \phi_{\underline{p}}^{\text{out}} + \beta_{\underline{k}\underline{p}} \phi_{\underline{p}}^{*\text{out}}] \quad (6.1.13.a)$$

ou

$$\phi_{\underline{p}}^{\text{out}} = \int d\bar{u}(\underline{k}) [\alpha_{\underline{k}\underline{p}}^* \phi_{\underline{k}}^{\text{in}} - \beta_{\underline{k}\underline{p}} \phi_{\underline{k}}^{\text{in}*}] \quad (6.1.13.b)$$

onde

$$\alpha_{\underline{k}\underline{p}} = (\phi_{\underline{k}}^{\text{in}}, \phi_{\underline{p}}^{\text{out}}) \quad \text{e} \quad (6.1.14)$$

$$\beta_{\underline{k}\underline{p}} = -(\phi_{\underline{k}}^{\text{in}}, \phi_{\underline{p}}^{*\text{out}}) \quad (6.1.15)$$

Com o campo quantizado  $a_{\underline{k}}^{\text{in}}, a_{\underline{k}}^{\dagger\text{in}}$  são respectivamente operadores de destruição e criação de quanta do campo, satisfazendo as relações de comutação

$$[a_{\underline{k}}^{\text{in}}, a_{\underline{k}'}^{\text{in}}] = [a_{\underline{k}}^{\dagger\text{in}}, a_{\underline{k}'}^{\dagger\text{in}}] = 0 \quad (6.1.16.a)$$

e

$$[a_{\underline{k}}^{\text{in}}, a_{\underline{k}'}^{\dagger\text{in}}] = \delta(\underline{k}, \underline{k}') \quad (6.1.16.b)$$

Estes operadores agindo sobre o vácuo "in"  $|0^{\text{in}}\rangle$

geram uma base de estados físicos. Como  $a_{\underline{k}}^{\text{in}}$  é o operador de destruição, temos

$$a_{\underline{k}}^{\text{in}} |0^{\text{in}}\rangle = 0 \quad \forall \underline{k} .$$

O estado de uma partícula  $|1_{\underline{k}}^{\text{in}}\rangle = a_{\underline{k}}^{\dagger \text{in}} |0\rangle$ , assim como todos os outros estados satisfazem

$$\langle 1_{\underline{k}}^{\text{in}} | 1_{\underline{k}'}^{\text{in}} \rangle = \delta(\underline{k}, \underline{k}') .$$

O operador  $N_{\underline{k}}^{\text{in}} = a_{\underline{k}}^{\dagger \text{in}} a_{\underline{k}}^{\text{in}}$  (compare com a equação 2.1.26) é chamado de operador número de quanta associado ao modo  $\underline{k}$ . Como já tivemos a oportunidade de enfatizar, a quantização envolvendo os operadores  $a_{\underline{k}}^{\text{out}}$  e  $a_{\underline{k}}^{\text{out}\dagger}$  não é necessariamente equivalente à quantização cujos vetores estados são gerados a partir de  $|0^{\text{in}}\rangle$ . Ou seja, temos um outro espaço de Fock gerado a partir de  $|0^{\text{out}}\rangle$  de forma que

$$a_{\underline{p}}^{\text{out}} |0^{\text{out}}\rangle = 0 \quad \forall \underline{p} ,$$

e por meio de uma álgebra simples, temos

$$\langle 0^{\text{in}} | a_{\underline{p}}^{\dagger \text{out}} a_{\underline{p}}^{\text{out}} | 0^{\text{in}} \rangle = \int d\bar{\mu}(\underline{k}) |\beta_{\underline{k}\underline{p}}|^2 . \quad (6.1.17)$$

Esta quantidade é interpretada como o número de quanta "out" com momento  $\underline{p}$  que existe no vácuo "in". Se as representações da álgebra dos operadores são não equivalentes ( $\beta_{\underline{p}\underline{k}} \neq 0$ ), a equação (6.1.17) fornece o número de partículas no

estado  $p$  criadas a partir de um estado de vácuo devido à evolução da geometria. A contribuição destas partículas para o tensor momento energia deve ser desprezada de forma a não alterar o elemento de linha (6.1.3).

Nas seções (6.2) e (6.3) apresentaremos dois modelos exatamente solúveis, exemplificando o que foi exposto nesta seção. Em (6.2), estudaremos um universo bi-dimensional com um elemento de linha tipo Robertson Walker, conhecido como modelo de Bernard e Duncan<sup>[18]</sup>. Este modelo tem importância apenas pedagógica pois não é solução das equações de Einstein (com duas dimensões o tensor de Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  se anula identicamente). Na seção (6.3) estudaremos um modelo onde um campo de spin um, é acoplado à gravitação com um termo de interação que quebra a invariância de gauge da teoria. O sistema de Equações de Einstein-Maxwell pode ser resolvido exatamente e uma solução encontrada apresenta um elemento de linha tipo Robertson-Walker com seção espacial negativa ( $\epsilon = -1$ ), onde não há singularidade (razão pela qual é denominado de Universo Eterno).

6.2 Um exemplo exatamente solúvel em duas dimensões. O modelo de Bernard e Duncan<sup>[18]</sup>

Seja então o elemento de linha de Robertson-Walker bi-dimensional

$$ds^2 = C(\eta) (d\eta^2 - dx^2) \tag{6.2.1}$$

onde  $C(\eta)$  é o fator conforme de escala e é dado por

$$C(\eta) = A + B \tanh \eta \quad A, B > 0 \quad . \quad (6.2.2)$$

No infinito passado e futuro, temos

$$C(\eta) = A \pm B \quad \eta \rightarrow \pm \infty \quad . \quad (6.2.3)$$

Vamos considerar a existência de um campo livre escalar real massivo definido nesse espaço-tempo.

A equação de Klein-Gordon (2.1.3) se escreve

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A + B \tanh \eta)m^2 \right] \Phi(\eta, x) = 0 \quad . \quad (6.2.4)$$

Encontrando um conjunto completo, solução da equação (6.2.4), podemos efetuar a expansão do operador de campo  $\Phi(\eta, x)$ .

Desde que  $C(\eta)$  não depende da coordenada espacial, os modos solução da equação (6.2.4) podem ser escritos como

$$u_k(\eta, x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikx} \chi_k(\eta) \quad (6.2.5)$$

e a parte da equação (6.2.4) dependente do tempo conforme  $\eta$  é

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + (k^2 + C(\eta)m^2) \right] \chi_k(\eta) = 0 \quad . \quad (6.2.6)$$

A equação (6.2.6) pode ser resolvida utilizando-se as funções hipergeométricas (ver apêndice A.2).

Os modos normalizados que são frequências posit

vas quando  $t \rightarrow -\infty$  ou  $\eta \rightarrow -\infty$ , são

$$u_k^{\text{in}}(\eta, x) = \frac{1}{(4\pi\omega_{\text{in}})} \exp\{ikx - i\omega_+ \eta - (i\omega) \ln(2 \cosh \eta)\} \cdot {}_2F_1(1 + i\omega_-, i\omega_-; 1 - i\omega_{\text{in}}; \frac{1}{2}(1 + \tanh \eta)) \quad (6.2.7)$$

Note que

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} u_k^{\text{in}}(\eta, x) = \frac{1}{(4\pi\omega_{\text{in}})^{1/2}} e^{ikx - i\omega_{\text{in}} \eta} \quad (6.2.8)$$

Da mesma forma, os modos normalizados que se comportam como frequências positivas quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $\eta \rightarrow +\infty$ , são:

$$u_k^{\text{out}}(\eta, x) = \frac{1}{(4\pi\omega_{\text{out}})^{1/2}} \exp\{ikx - i\omega_+ \eta - (i\omega_-) \ln(2 \cosh \eta)\} \cdot {}_2F_1(1 + i\omega_-, i\omega_-; 1 + i\omega_{\text{out}}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \eta)) \quad (6.2.9)$$

Note que

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} u_k^{\text{out}}(\eta, x) = \frac{1}{(4\pi\omega_{\text{out}})^{1/2}} e^{ikx - i\omega_{\text{out}} \eta} \quad (6.2.10)$$

onde introduzimos a notação

$$\omega_{\text{in}} = (k^2 + m^2(A - B))^{1/2}$$

$$\omega_{\text{out}} = (k^2 + m^2 (A + B))^{1/2}$$

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} (\omega_{\text{out}} \pm \omega_{\text{in}}) \quad . \quad (6.2.11)$$

Utilizando as expressões (2.1.11), (6.1.14), (6.1.5), (6.2.7) e (6.2.9), encontramos

$$|\alpha_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_+)}{\sinh(\pi\omega_{\text{in}}) \sinh(\pi\omega_{\text{out}})} \quad (6.1.12)$$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-)}{\sinh(\pi\omega_{\text{in}}) \sinh(\pi\omega_{\text{out}})} \quad (6.1.13)$$

onde

$$\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'} \quad e$$

$$\beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'} \quad .$$

Substituindo (6.2.13) em (6.1.17) concluimos que um detector inercial que não registra partículas (o campo se encontra no estado de vácuo) no infinito passado, registrará a presença de quanta no infinito futuro. É importante lembrar que no caso do campo ter massa zero ( $\omega_m = \omega_{\text{out}}; \omega_- = 0$ ), a teoria é invariante conforme de forma que não devemos esperar criação de partículas ( $|\beta_k|^2 = 0$ ).



6.3 Um exemplo exatamente solúvel em quatro dimensões -  
 - O modelo de Novello e Salim [22]

Em 1979 Novello e Salim [12][94] apresentaram um modelo onde a principal fonte de curvatura do espaço-tempo é um campo de spin um,  $A_\mu(x)$  acoplado à gravitação com um termo que quebra a invariância de gauge do eletromagnetismo. Este termo pode ser interpretado como gerando "massa" para o fóton. A densidade lagrangeana do modelo é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [1 + \lambda A_\mu A^\mu] R - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.3.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$  e  $\lambda$  é uma constante.

As equações de movimento derivadas da densidade lagrangeana (6.3.1), são: [95]

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\lambda R A^\mu \quad (6.3.2)$$

$$(1 + \lambda\Omega) G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{,\alpha;\beta} + \lambda \Omega_{,\mu;\nu} + \lambda R A_\mu A_\nu = -E_{\mu\nu} \quad (6.3.3)$$

onde  $\Omega = A_\mu A^\mu$ ,  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  e  $E_{\mu\nu}$  é o tensor de Maxwell

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} .$$

As equações (6.3.2) no caso de  $\lambda = 0$ , reduzem-se às equações de Maxwell no espaço curvo. O lado direito da equação (6.3.2) pode ser interpretado como um termo de fonte do campo  $A_\mu(x)$ . (No caso de  $\lambda \neq 0$ , o campo gravitacional é responsá-

vel pela criação de cargas). As equações (6.3.3) no caso de  $\lambda = 0$  reduzem-se às equações de Einstein.

Uma solução para o sistema de equações (6.3.2) e (6.3.3) é dada por

$$A_{\mu} = (A_0, \vec{0}), A_0(\eta) = \left(\frac{1}{\lambda} (1 + \tanh \eta)\right)^{1/2} \quad (6.3.4)$$

e

$$ds^2 = dt^2 - a(t) \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right] = \quad (1.1.1)$$

$$= C(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{senh}^2 \chi (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)] \quad (1.1.3)$$

onde (6.3.5)

$$a(t) = (a_0^2 + t^2) \quad (6.3.5)$$

sendo  $a_0$  uma constante positiva.

Utilizando (6.1.12), chegamos à relação que expressa o tempo cósmico  $t$  em função do tempo conforme, a saber

$$t = a_0 \text{senh } \eta$$

então

$$C(\eta) = a_0^2 \text{cosh}^2 \eta \quad . \quad (1.1.4)$$

A geometria descrita pelo elemento de linha

(1.1.1) juntamente com a equação (6.3.5), foi obtida independentemente por Melnikov e Orlov<sup>[96]</sup>. Estes autores trabalham com um campo escalar carregado conformalmente acoplado à gravitação. Este modelo está baseado numa densidade lagrangeana frequentemente considerada no contexto de Cosmologia inflacionária,

$$= \sqrt{-g} \left[ \left(1 - \frac{1}{6} \phi^2\right) R + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^2 + \sigma \phi^4 \right] \quad (6.3.8)$$

A métrica (1.1.3), juntamente com (1.1.4), é solução das equações de movimento derivadas da densidade Lagrangeana (6.3.8), com

$$a_0^2 = \frac{1}{24\sigma} \quad e$$

$$\phi(\eta) = ((2\sigma)^{1/2} a_0 \cosh \eta)^{-1} .$$

O elemento de linha (1.1.4) não apresenta singularidade temporal e é assintoticamente tangente ( $t \rightarrow \pm \infty$  ou  $\eta \rightarrow \pm \infty$ ) a dois distintos universos de Milne. A evolução cósmica deste modelo consiste então de um período de contração até um ponto onde a curvatura atinge um máximo ( $t = \eta = 0$ ) ( $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{6}{a_0^2}$ ), seguida de uma fase de expansão. A interessante propriedade de tender a um espaço-tempo de Minkowski descrito em coordenadas de Milne nos infinitos passado e futuro elimina complicações, que aparecem no modelo padrão, como definição de campos  $\phi^{in}$  e  $\phi^{out}$  etc. A semelhança com o modelo de Bernard e Duncan não pode deixar de ser mencionada, apenas com a diferença que aqui não temos um modelo artificial, mas um modelo exato on

de supomos um termo de interação não mínimo entre o campo gravitacional e o campo eletromagnético.

Nosso objetivo nesta seção é efetuar a quantização de um campo escalar real massivo definido sobre um espaço-tempo que tem como elemento de linha, a equação (6.3.6) segundo os passos que apresentamos na seção 6.1<sup>[21]</sup>.

Seja então o elemento de linha (1.1.3) dado por

$$ds^2 = C(\eta) (d\eta^2 - \frac{dr^2}{1+r^2} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)) \quad (1.1.3)$$

com

$$C(\eta) = a_0^2 \cosh^2 \eta \quad (1.1.4)$$

Ao contrário do universo de Milne (ver seção 3.2) a variedade descrita pelas equações (1.1.3) e (1.1.4) é geodesicamente completa. Notemos que:

$$\begin{aligned} C(\eta) &\xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{4} e^{2\eta}, & t &\rightarrow \frac{a_0}{2} e^\eta \\ C(\eta) &\xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} \frac{a_0^2}{4} e^{-2\eta}, & t &\rightarrow -\frac{a_0}{2} e^{-\eta}. \end{aligned}$$

Desta forma, o espaço-tempo descrito pelo elemento de linha (1.1.3) juntamente com a equação (1.1.4) tende assintoticamente a dois universos de Milne, respectivamente no infinito passado e futuro. No entanto, ao contrário dos universos de Milne (F) e (P) no espaço-tempo de Minkowski, descritos respectivamente pelas transformações de coordenadas (3.2.1) e

(3.2.3) que definem regiões disjuntas (a união destas duas regiões é alcançada mediante um procedimento analítico através da origem), no universo eterno considerado aqui, não temos horizonte de eventos. Desta forma, o procedimento analítico citado acima, torna-se desnecessário.

Para implementarmos a quantização canônica devemos resolver a equação de Klein-Gordon dado pela equação (6.1.6), nesta geometria.

Utilizando (1.1.4), (6.1.7), (6.1.8) e (6.1.9), encontramos que a parte da equação de Klein-Gordon que depende do tempo conforme  $\eta$  satisfaz uma equação de Mathieu<sup>[16][17]</sup>

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + q^2 + m^2 a_0^2 \cosh^2 \eta \right] \chi_k(\eta) = 0 \quad (6.3.9)$$

escrita em sua forma modificada, como

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k - (\lambda + 2h^2 \cosh 2\eta) \chi_k = 0 \quad (6.3.10)$$

onde

$$\lambda = - \left( q^2 + m^2 \frac{a_0^2}{2} \right) \quad e \quad (6.3.11.a)$$

$$h = \frac{ma_0}{2} \quad . \quad (6.3.11.b)$$

Consideremos a solução da equação (6.3.10) representada por  $M_{\tilde{\nu}}^{(3)}(-\eta, h)$ , onde o índice  $\tilde{\nu}$  é uma função complicada de  $\lambda$  e  $h$  (Para uma expressão explícita de  $\tilde{\nu}$  quando  $h$  é pequeno, veja apêndice C). Utilizando o teorema de Floquet, chega-

mos ao resultado que  $\tilde{\nu}$  é imaginário puro. Denominaremos:

$$\tilde{\nu} = -i\tilde{k} \quad \tilde{k} \in \mathbb{R}^+ .$$

A função  $M_{\tilde{\nu}}^{(3)}(-\eta, h)$  tem o seguinte comportamento assintótico (ver equação C.10).

$$M_{\tilde{\nu}}^{(3)}(-\eta, h) \xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} H_{\tilde{\nu}}^{(1)}(2h \cosh \eta) . \quad (6.3.12)$$

Utilizando o resultado  $\cosh \eta \xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\eta}}{2} \sim \frac{-t}{a_0}$ , e a expressão assintótica da função de Hankel  $H_{\tilde{\nu}}^{(1)}$  (ver eq. B.8) chegamos à fórmula que exhibe o comportamento assintótico de  $M_{\tilde{\nu}}^{(3)}$ , a saber:

$$M_{\tilde{\nu}}^{(3)}(-\eta, h) \xrightarrow[\substack{\eta \rightarrow -\infty \\ \text{ou} \\ t \rightarrow -\infty}]{\substack{\eta \rightarrow -\infty \\ \text{ou} \\ t \rightarrow -\infty}} \sqrt{\frac{2}{-\pi mt}} e^{-imt} e^{-\pi\tilde{k}/2} e^{-i\pi/4} \quad (6.3.13)$$

que comporta-se como um modo de frequência positiva com respeito ao tempo cósmico  $t$ . Os modos normalizados são:

$$\chi_{\underline{k}}^{\text{in}}(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi\tilde{k}/2} M_{-i\tilde{k}}^{(3)}(-\eta, h) . \quad (6.3.14)$$

Utilizando as expressões (6.1.7), (6.1.11) e (6.3.14) e o conjunto completo  $\{\phi_{\underline{k}}^{\text{in}}, \phi_{\underline{k}}^{\text{in}*}\}$  podemos expandir o operador de campo  $\Phi(x)$  definindo, assim, operadores de criação e aniquilação  $a_{\underline{k}}^{\text{in}+}$  e  $a_{\underline{k}}^{\text{in}}$  e o vácuo  $|0, \text{in}\rangle$ .

Consideremos, ainda, uma segunda solução da equação (6.3.10) designada por  $M_{\tilde{\nu}}^4(\eta, h)$ . Novamente utilizando a e-

quação (C.10), podemos encontrar o comportamento assintótico de  $M_{\tilde{\nu}}^{(4)}(\eta, h)$ :

$$M_{\tilde{\nu}}^{(4)}(\eta, h) \begin{matrix} \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \\ \text{ou} \\ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \end{matrix} H_{\tilde{\nu}}^{(2)}(2h \cosh \eta) . \quad (6.3.15)$$

Desde que  $\eta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sim \frac{t}{a_0}$  e utilizando a expressão assintótica da função de Hankel  $H_{\tilde{\nu}}^{(2)}$  (ver eq. B.8), chegamos à expressão que exhibe o comportamento assintótico de  $M_{\tilde{\nu}}^{(4)}$  a saber:

$$M_{\tilde{\nu}}^{(4)}(\eta, h) \begin{matrix} \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \\ \text{ou} \\ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \end{matrix} \frac{\sqrt{2}}{\pi m t} e^{-imt} e^{\pi \tilde{k}/2} e^{i\pi/4} . \quad (6.3.16)$$

Os modos normalizados que comportam-se como modos de frequência positiva com respeito ao tempo cósmico, são:

$$\chi_k^{\text{out}}(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\pi \tilde{k}/2} M_{-ik}^{(4)}(\eta, h) . \quad (6.3.17)$$

Da mesma forma que fizemos com o conjunto completo  $\{\phi_{\underline{k}}^{\text{in}}, \phi_{\underline{k}}^{*\text{in}}\}$  podemos utilizar o conjunto  $\{\phi_{\underline{k}'}^{\text{out}}, \phi_{\underline{k}}^{*\text{out}}\}$  para expandirmos o operador de campo  $\phi$  e definir o vácuo  $|0 \text{ out}\rangle$  na região  $t \rightarrow \infty$  (ou  $\eta \rightarrow \infty$ ).

Para encontrarmos o número de quanta "out" no estado  $\tilde{\sim}$  que existem no vácuo "in" (ver equação 6.1.7), temos que utilizar a seguinte relação entre as funções de Mathieu:

$$-\frac{4i}{\pi} M_{\tilde{\nu}}^{(3)}(-\eta) = \left( \frac{d}{d\eta} M_{\tilde{\nu}}^{(3)} M_{\tilde{\nu}}^{(4)} \right)_{\eta=0} M_{\tilde{\nu}}^{(3)}(\eta) +$$

$$- \left( \frac{d}{d\eta} M_{\tilde{\nu}}^{(3)} M_{\tilde{\nu}}^{(3)} \right)_{\eta=0} M_{\tilde{\nu}}^{(4)}(\eta) \quad (6.3.18)$$

(ver equação C.13).

Como  $\tilde{\nu} = -i\tilde{k}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $\eta \in \mathbb{R}^+$  temos que  $[M_{\tilde{\nu}}^{(4)}(\eta)]^* = M_{\tilde{\nu}^*}^{(3)}(\eta)$ , propriedade que é derivada do comportamento assintótico de  $M_{\tilde{\nu}}^{(4)}$  e  $M_{\tilde{\nu}}^{(3)}$  (ver eq. C.10).

Utilizando (22.3), temos

$$\chi_k^{in} = \alpha_k \chi_k^{out} + \beta_k \chi_k^{*out} \quad (6.3.19)$$

onde

$$\alpha_k = \delta_{kk'} \alpha_{k'}$$

$$\beta_k = \delta_{kk'} \beta_{k'}$$

Com os resultados dados pelas equações (6.3.18) e (6.3.19), chegamos à:

$$\alpha_k = -\frac{i\pi}{4} e^{\pi\tilde{k}} \left( \frac{d}{d\eta} M_{-i\tilde{k}}^{(3)}(\eta) M_{-i\tilde{k}}^{(3)}(\eta) \right)_{\eta=0} \quad (6.3.20.a)$$

$$\beta_k = -\frac{i\pi}{4} \left( \frac{d}{d\eta} M_{-i\tilde{k}}^{(3)}(\eta) M_{-i\tilde{k}}^{(4)}(\eta) \right)_{\eta=0} \quad (6.3.20.b)$$

Desde que  $\chi_k^{in}$  está normalizado, devemos ter:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = e^{2\pi\tilde{k}} \left| \left( \frac{d}{d\eta} M_{-i\tilde{k}}^{(3)} M_{-i\tilde{k}}^{(3)} \right)_{\eta=0} \right|^2 +$$



$$- \left| \left( \frac{d}{d\eta} M_{-i\tilde{k}}^{(3)} M_{-i\tilde{k}}^{(4)} \right)_{\eta=0} \right|^2 = 1 . \quad (6.3.21)$$

Os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{\underline{p}, \underline{k}}$  são dados por

$$\beta_{\underline{p}, \underline{k}} = \delta(\underline{p}, \underline{k}) \left(-\frac{i\pi}{4}\right) \left[ \frac{d}{d\eta} M_{-i\tilde{k}}^{(3)}(\eta) M_{-i\tilde{k}}^{(4)}(\eta) \right]_{\eta=0} . \quad (6.3.22)$$

A complexidade das funções de Mathieu dificulta u ma interpretação imediata da equação (6.3.22). Com o intuito de clarificar o significado da equação (6.3.22), efetuamos algumas aproximações.

A equação de Mathieu modificada da qual partimos, é dada por:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k - (\lambda + 2h^2 \cosh 2\eta) \chi_k = 0 . \quad (6.3.10)$$

Utilizando a aproximação  $\cosh 2\eta \approx \frac{1}{2} e^{2\eta}$  para  $\eta \geq 0$  e  $\cosh 2\eta \approx \frac{e^{-2\eta}}{2}$  para  $\eta \leq 0$ , consideramos o sistema de equações

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k - (\lambda - h^2 e^{-2\eta}) \chi_k = 0 \quad \eta \leq 0 \quad (6.3.23.a)$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k - (\lambda - h^2 e^{2\eta}) \chi_k = 0 \quad \eta \geq 0 . \quad (6.3.23.b)$$

Uma solução aproximada da equação (6.3.10) é solução do sistema (6.3.22) com os mesmos dados de Cauchy em  $\eta = 0$ .

Para  $\eta \leq 0$  defini-se a variável  $x$ , tal que

$$x = -h e^{-\eta} \quad -\infty < x < 0 \quad (6.3.23)$$

de forma que a equação (6.3.23.a) se transforma numa equação de Bessel usual

$$\frac{d^2}{dx^2} \chi_k + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \chi_k + \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{x^2}\right) \chi_k = 0 \quad (6.3.24)$$

com

$$\bar{v} = -i\bar{k}$$

$$\bar{k} = \left(q^2 + m^2 \frac{a_0^2}{2}\right)^2$$

$$\lambda = -\bar{k}^2 \quad .$$

Um conjunto ortonormal completo da equação (6.3.24) é dado por

$$\chi_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\pi\bar{k}/2} H_{-i\bar{k}}^{(1)}(h e^{-\eta}) \quad (6.3.25.a)$$

$$\chi_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\pi\bar{k}/2} H_{i\bar{k}}^{(2)}(h e^{-\eta}) \quad (6.3.25.b)$$

Para  $\eta \geq 0$  definindo a variável  $z = h e^{\eta}$ , a equação (6.3.23.b) se escreve da mesma forma que (6.3.24) onde  $0 < z < \infty$ . Uma base de funções nesta equação de Bessel é dada por

$$\chi_k^{\text{out}}(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\pi\bar{k}/2} H_{-i\bar{k}}^{(2)}(h e^{\eta}) \quad (6.3.26.a)$$

$$\chi_k^{*\text{out}}(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\pi\bar{k}/2} H_{i\bar{k}}^{(1)}(h e^{\eta}) \quad (6.3.26.b)$$

Aplicando-se a expressão

$$\chi^{\text{in}} = \alpha \chi^{\text{out}} + \beta \chi^{*\text{out}}$$

podemos determinar os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  impondo condição de condição de continuidade das soluções (6.3.25 e 26) e suas derivadas em  $\eta = 0$  ( $x = -h$  e  $z = h$ ). Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\pi\bar{k}/2} H_{-i\bar{k}}^{(1)}(h) = \alpha e^{-\pi\bar{k}/2} H_{-i\bar{k}}^{(2)}(h) + \beta e^{-\pi\bar{k}/2} H_{i\bar{k}}^{(1)}(h) \\ -e^{\pi\bar{k}/2} \frac{d}{dy} H_{-i\bar{k}}^{(1)}(y) \Big|_{y=h} = \alpha e^{-\pi\bar{k}/2} \frac{d}{dy} H_{-i\bar{k}}^{(2)}(y) \Big|_{y=h} + \end{array} \right.$$

$$\beta e^{-\pi\bar{k}/2} \frac{d}{dy} H_{i\bar{k}}^{(1)}(y) \Big|_{y=h}$$

chegamos a

$$\alpha = \frac{e^{\pi\bar{k}}}{\langle H_{-i\bar{k}}^{(2)}, H_{i\bar{k}}^{(1)} \rangle_{y=h}} \frac{d}{dy} H_{-i\bar{k}}^{(1)} H_{i\bar{k}}^{(1)} \Big|_{y=h} \quad (6.3.27.a)$$

$$\beta = \frac{e^{\pi\bar{k}}}{\langle H_{-i\bar{k}}^{(2)}, H_{i\bar{k}}^{(1)} \rangle_{y=h}} \frac{d}{dy} H_{-i\bar{k}}^{(2)} H_{-i\bar{k}}^{(1)} \Big|_{y=h} \quad (6.3.27.b)$$

onde

$$\begin{aligned} y \langle H_{\nu}^2, H_{-\nu}^{(1)} \rangle &\equiv \\ &\equiv H_{\nu}^{(2)} \left( y \frac{d}{dy} \right) H_{-\nu}^{(1)} - H_{-\nu}^{(1)} \left( y \frac{d}{dy} \right) H_{\nu}^{(2)} = \frac{4i}{\pi} e^{i\pi\nu} \end{aligned}$$

é o Wronskiano de  $H_{\nu}^{(2)}$  e  $H_{-\nu}^{(1)}$ .

No limite em que  $h$  é grande, encontramos

$$\beta \rightarrow 0$$

$$\alpha \rightarrow e^{2i(h - \pi/4)} \quad (6.3.28)$$

de forma que  $|\beta|^2 \rightarrow 0$  e  $|\alpha|^2 \rightarrow 1$ . Neste limite, como  $\beta \rightarrow 0$  não temos criação de partículas durante a evolução cósmica. Este resultado pode ser entendido se notarmos que  $h$  grande significa que o comprimento compton das partículas criadas ( $\frac{1}{m}$ ) é pequeno em comparação com  $a_0$  (comprimento característico sobre o qual a curvatura do espaço-tempo varia apreciavelmente). Desta forma, o acoplamento entre o campo  $\phi$  e a geometria, é fraco.

No outro limite, quando  $h$  é pequeno, encontramos:

$$\alpha \rightarrow \frac{\pi \bar{k}}{2 \sinh^2 \pi \bar{k}} \left( e^{\pi k} \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2i\bar{k}}}{\Gamma^2(1+i\bar{k})} - e^{\pi \bar{k}} \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{-2i\bar{k}}}{\Gamma^2(1-i\bar{k})} \right) \quad (6.3.29.a)$$

$$\beta \rightarrow \frac{\pi \bar{k}}{2 \sinh^2 \pi \bar{k}} \left( \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2i\bar{k}}}{\Gamma^2(1+i\bar{k})} - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{-2i\bar{k}}}{\Gamma^2(1-i\bar{k})} \right) \quad (6.3.29.b)$$

de forma que temos

$$|\beta|^2 = \frac{1}{2 \sinh^2 \pi \bar{k}} [1 - \cos(4\bar{k} \ln \frac{h}{2} + \epsilon)] \quad (6.3.30.a)$$

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2 \sinh^2 \pi \bar{k}} [\cosh 2\pi \bar{k} - \cos(4\bar{k} \ln \frac{h}{2} + \epsilon)] \quad (6.3.30.b)$$

onde  $\epsilon$  é uma fase independente de  $h$ .

Neste limite, onde o comprimento compton das partículas ( $\frac{1}{m}$ ) é grande em comparação com  $a_0$  (o acoplamento entre o campo e a geometria é forte) encontramos um número de partículas "out" diferente de zero no vácuo "in".

## CONCLUSÕES

Nesta tese analisamos as principais dificuldades que surgem quando generalizamos para espaços-tempos curvos e/ou para coordenadas curvilíneas a quantização canônica de um campo escalar real massivo livre.

Inicialmente estudamos o efeito Fulling-Unruh em alguns sistemas de coordenadas ortogonais separáveis no espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional ( $d = 2$ ) através do cálculo dos coeficientes de Bogoliubov. Mostramos que apesar de termos em princípio seis vácuos, apenas dois destes são unitariamente não equivalentes. O cálculo de propagadores, como as funções de Green retardadas e avançadas e o propagador de Feynman foi efetuado no espaço-tempo de Rindler e Milne. No espaço-tempo de Milne foi calculado, pela primeira vez, os propagadores retardados e avançados utilizando os modos de Sommerfield e mostramos, explicitamente, a concordância com os propagadores associados as bases de funções ondas planas nas coordenadas cartesianas. Mostramos também que o propagador de Feynman associados aos modos de Sommerfield, diverge. Em seguida quantizamos um campo escalar real massivo livre num modelo cosmológico, homogêneo e isotrópico não singular. Este, representa um universo que evolui (desde  $t = -\infty$ ) de uma fase plana ( $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ ) até outra configuração plana ( $t = +\infty$ ), passando por uma fase de contração até um ponto de curvatura máxima ( $t = 0$ ) seguido de uma fase de ex-

pansão. Transcedendo um simples paralelo com o modelo de Bernard e Duncan, cuja importância é meramente pedagógica, enfatizamos o caráter não artificial deste modelo. solução exata das equações de Einstein-Maxwell modificadas por um termo que acopla não-minimamente a gravitação e o eletromagnetismo. Neste modelo cosmológico, a equação de Klein-Gordon é exatamente solúvel, permitindo-nos utilizar os métodos padrões da teoria de campos com o intuito de calcular a taxa de produção de partículas devido à evolução do universo. A propriedade que tem este modelo de ser assintoticamente plano ( $t = \pm \infty$ ) (eliminação de singularidade) nos desvia das dificuldades encontradas no modelo padrão.

A comparação de observáveis definidos nas duas regiões assintóticas ( $t = \pm \infty$ ) foi efetuada por intermédio do cálculo de coeficientes de Bogoliubov. Mostramos que a interação gravitacional cria do vácuo  $|0^{in}\rangle$  um número de partículas diferente de zero no infinito futuro.

O estudo do operador número de partículas nos trouxe interessantes resultados. Demonstramos que, quando o comprimento compton das partículas é muito menor que  $a_0$  (comprimento característico do modelo), os coeficientes de Bogoliubov tendem a zero, portanto não temos criação de matéria durante a evolução cósmica. No outro limite, quando o comprimento compton das partículas é muito maior que  $a_0$ , (o que significa que o acoplamento entre a geometria e o campo  $\phi$  é forte), a evolução cósmica e com mecanismo efetivo para a criação de matéria. A continuação natural deste trabalho é o cálculo do propagador de Feynman e do tensor momento-energia associado ao campo escalar

neste modelo cosmológico. Outro problema a resolver seria a questão do espalhamento inverso: conhecendo-se as condições assintóticas das soluções da equação de Klein-Gordon e o espectro de  $N_k^{\text{out}}$ , qual deve ser a forma do fator conforme  $C(\eta)$ ?

Todas estas questões pretendem contribuir para a compreensão do problema conceitual de partículas como entidades dependentes do observador, efeitos de curvatura e de sistemas de coordenadas na busca da adaptação da teoria quântica de campos com a relatividade geral.

## APÊNDICE A

### A.1 A função Gamma

A função Gamma é definida pela integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{Re } z > 0 \quad . \quad (\text{A.1.1})$$

Por continuação analítica,  $\Gamma(z)$  pode ser estendida a uma função analítica em todo o plano complexo, com exceção dos polos simples em  $z = -n$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$

Equação funcional:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (\text{A.1.2})$$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen } \pi z} \quad .$$

Valores especiais:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (\text{A.1.3})$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

### A.2 A função hipergeométrica

A série hipergeométrica, convergente para  $|z| < 1$



é dada por

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \quad (\text{A.2.1})$$

onde

$$(a)_0 = 1 \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1) \quad (\text{A.2.2})$$

$$n = 1, 2 \dots$$

é conhecido como o símbolo de Pochhammer.

Por continuação analítica,  ${}_2F_1$  pode ser estendida de forma a definir uma função analítica no plano complexo  $z$  com um corte ao longo do eixo positivo real de  $+1$  a  $+\infty$ .

Representação integral:

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-1)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1+tz)^{-a} dt$$

onde  $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$ ,  $|\arg(1-z)| < \pi$

Para  $z$  fixo,  ${}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) / \Gamma(c)$  é uma função inteira dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Se  $a$  ou  $b$  é um inteiro negativo e  $c$  não o é, então a série hipergeométrica se torna um polinômio em  $z$ .

Equação diferencial:

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} u + (c - (a+b+1)z) \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

A equação (A.2.3) tem como solução  $u = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right)$ . Se  $c$  não é um inteiro, a equação (A.2.3) admite uma solução li-

nearmente independente u, onde

$$u = z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, 2-c \mid b-c+1 \mid z)$$

Simetrias:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \mid z\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} b, a \\ c \end{matrix} \mid z\right)$$

Fórmulas de Transformação:

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \mid z\right) &= (1-z)^a {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \mid \frac{z}{z-1}\right) = \\ &= (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c \\ c \end{matrix} \mid z\right) \end{aligned}$$

Casos especiais:

i) Polinômios de Legendre:

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, -n \\ 1 \end{matrix} \mid \frac{1-x}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

ii) Polinômios de Gegenbauer:

$$\begin{aligned} C_n^\nu(x) &= \frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\nu)n!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2\nu+n, \nu+\frac{1}{2} \\ \nu+\frac{1}{2} \end{matrix} \mid \frac{1-x}{2}\right) \\ & \quad n = 0, 1, 2 \dots \end{aligned}$$

iii) Polinômios de Jacobi:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+\alpha+\beta+1, -n \\ \alpha+1 \end{matrix} \mid \frac{1-x}{2}\right) \\ & \quad n = 0, 1, 2 \dots \end{aligned}$$

### A.3 A função hipergeométrica confluyente

A função  ${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$  é definida pela série

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

convergente para todos os valores de  $z$ .

Representação integral:

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$$

Para  $z$  fixo,  ${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right)/\Gamma(c)$  é uma função inteira de  $a$  e  $c$ .

Equação diferencial:

$$z \frac{d^2}{dz^2} u + (c-z) \frac{du}{dz} - au = 0 \tag{A.3.1}$$

A equação (A.3.1) tem como solução

$$u = {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) \text{ e se } c \text{ não é inteiro, esta admite uma}$$

solução independente

$$u = z^{1-c} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a-c+1 \\ 2-c \end{matrix} \middle| z\right) .$$

Fórmula de transformação:

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = e^z {}_1F_1\left(\begin{matrix} c-a \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$$

Casos especiais:

i) Polinômios de Laguerre:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) n!} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ \alpha + 1 \end{matrix} \middle| x\right) \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

ii) Funções de Bessel

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} {}_1F_1\left(\begin{matrix} \nu + 1/2 \\ 2\nu + 1 \end{matrix} \middle| 2ix\right) .$$

#### A.4 A função Parabólica Cilíndrica

A função  $u = D_\nu(x)$  é solução da equação

$$\frac{d^2}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) u = 0 \quad . \quad (A.4.1)$$

Uma solução linearmente independente é

$$u = D_{-\nu-1}(iz)$$

e, se  $\nu$  não é um inteiro,  $D_\nu(-z)$ . Se  $\nu = n = 0, 1, 2 \dots$ , então

$$D_n(z) = 2^{-n/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) H_n\left(2^{-1/2}z\right) \quad (A.4.2)$$

onde

$$H_n(z) = (-1)^n \exp(z^2) \frac{d^n}{dz^n} \exp(-z^2) \quad (A.4.3)$$

é o polinômio de Hermite de ordem  $n$ .

## APÊNDICE B

### B.1 As funções de Bessel

A função de Bessel  $J_\nu(z)$  é dada por (A.3.ii) ou por

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{(\nu+1)} {}_0F_1\left(\nu+1 \mid -\frac{z^2}{4}\right) \quad (\text{B.1.1})$$

$|\arg z| < \pi$

onde

$${}_0F_1(c|x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(c)_n n!} \quad (\text{B.1.2})$$

converge para todos os valores de  $x$ .

Equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dz^2} u + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} u + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \quad . \quad (\text{B.1.3})$$

A equação (B.1.3) tem soluções  $u_1 = J_\nu(z)$  e  $u_2 = J_{-\nu}(z)$  linearmente independentes se  $\nu$  não é inteiro. Se  $\nu = n$  ( $n$  inteiro), então  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$  e se  $\nu = n$ ,  $J_n(z)$  é a única solução de (B.1.3) que é finita na origem ( $z=0$ ).

Podemos definir a função de Bessel de segundo tipo  $Y_\nu(z)$  definida pela fórmula

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\text{sen } \pi \nu} \quad (\text{B.1.4})$$

para  $z$  arbitrário com corte ao longo do eixo real  $(-\infty, 0)$ .

As funções de Bessel de terceiro tipo ou funções de Hankel  $H_\nu^{(1)}(z)$  e  $H_\nu^{(2)}(z)$  são definidas em termos das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo pelas fórmulas

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + i Y_\nu(z) \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - i Y_\nu(z) \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

onde  $\nu$  é arbitrário e  $z$  tem um corte no eixo real  $(-\infty, 0)$ .

A seguir vamos apresentar algumas propriedades básicas das funções de Bessel.

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{i}{\text{sen } \pi \nu} (e^{-i\pi\nu} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)) \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{i}{\text{sen } \pi \nu} (J_{-\nu}(z) - e^{i\pi\nu} J_\nu(z)) \\ H_{-\nu}^{(1)}(z) &= e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z); \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z) \\ J_\nu(z)^* &= J_{\nu^*}(z) \\ (H_\nu^{(1)}(z))^* &= H_{\nu^*}^{(2)}(z) \end{aligned}$$

Continuação analítica:

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{i\pi}{2} e^{i\pi\nu/2} H_\nu^{(1)}(z e^{i\pi/2}) \quad -\pi < \arg z < \pi/2 \\ I_\nu(z) &= e^{i\pi\nu/2} J_\nu(z e^{-i\pi/2}) \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{aligned}$$

$$K_\nu(z) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\pi\nu/2} H_\nu^{(2)}(ze^{-i\pi/2})$$

$$-\pi < \arg z e^{-i\pi/2} < \frac{\pi}{2}$$

$I_\nu(z)$  e  $K_\nu(z)$  são chamadas respectivamente de Função de Bessel modificada de primeiro tipo e Função de Macdonald.

Para finalizar, vamos apresentar o comportamento assintótico das funções listadas acima.

Funções de Bessel de primeiro tipo:

Para  $x \geq 0$  e  $\nu \geq 0$  a função  $J_\nu(x)$  é real e finita e tem um comportamento oscilatório. O comportamento para pequenos e grandes argumentos é dado pelas fórmulas

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \quad x \rightarrow 0 \quad (B.1.6)$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi\right) \quad x \rightarrow \infty$$

Funções de Bessel de segundo tipo:

Para  $x > 0$  e  $\nu \geq 0$  a função  $Y_\nu(x)$  é uma função real que oscila limitada no infinito. O comportamento para argumentos pequenos e grandes é dado por

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu} \quad x \rightarrow 0 \quad \nu > 0 \quad (B.1.7)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi\right) \quad x \rightarrow \infty$$

$$Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \log \frac{2}{x} \quad x \rightarrow 0$$

Funções de Bessel de terceiro tipo:

Para  $x > 0$  e  $\nu \geq 0$ , as funções de Hankel  $H^{(1)}(x)$  e  $H^{(2)}(x)$  são funções conjugadas complexas limitadas no infinito. O comportamento para pequenos e grandes valores de  $x$  é dado por

$$H_{\nu}^{(P)}(x) \approx \mp i \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \quad x \rightarrow 0 \quad \nu > 0$$

$$H_{\nu}^{(P)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{\pi}{4})} \quad x \rightarrow \infty$$

$$H_0^{(P)}(x) \approx \mp i \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{x} \quad x \rightarrow 0$$

onde  $P = 1$  ou  $P = 2$ .

Funções de Bessel de argumento imaginário:

Para  $x > 0$  e  $\nu \geq 0$ , temos os comportamentos

$$I_{\nu}(x) \approx \frac{x^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(1 + \nu)} \quad x \rightarrow 0$$

$$K_{\nu}(x) = \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^{\nu}} \quad x \rightarrow 0$$

$$I_{\nu}(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad x \rightarrow \infty$$

$$K_{\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad x \rightarrow \infty$$



## APENDICE C

### C.1 As funções de Mathieu <sup>[16][17]</sup>

A equação de Mathieu é dada por

$$\frac{d^2}{dz^2} y + (\lambda - 2h^2 \cos 2z)y = 0 \quad . \quad (C.1.1)$$

Esta equação tem duas singularidades essenciais em  $z = \pm \infty$ . Suas soluções são funções analíticas de  $\lambda, h^2$  para  $z \in \mathbb{C}$ . Pelo teorema de Floquet as soluções tem o comportamento dado por

$$Y(z + \pi) = e^{i\pi\nu} Y(z) \quad (C.1.2)$$

devido a periodicidade do termo envolvendo o cosseno. Se  $\nu \in \mathbb{R}$  as soluções são limitadas, se  $\nu$  não é real, as soluções são instáveis.

O parâmetro  $\nu$  é uma função bastante complicada envolvendo  $\lambda$  e  $h^2$ .

Uma solução de (C.1.1),  $me_\nu(z; h^2)$  é obtida efetuando-se uma expansão de Fourier do tipo

$$me_\nu(z; h^2) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{2j}^\nu(h^2) e^{i(\nu + 2j)z} \quad . \quad (C.1.3)$$

Substituindo a série (C.1.3) na equação de Ma-

thieu (C.1.1) encontramos uma relação de recorrência para  $C_{2j}^v(h^2)$ , que expandida em série de  $h^2$ , nos dá:

$$\frac{C_{2j}^v}{C_0^v} = (-1)^j \frac{\Gamma(1+v)}{2^{2j} j! \Gamma(1+v+j)} h^{2j} + o(h^{(2j+4)}) \quad (C.1.4)$$

$$\lambda_v(h^2) = v^2 + \frac{1}{2(v^2-1)} h^4 + o(h^8) \quad (C.1.5)$$

Desta forma temos

$$\begin{aligned} me_v(z; h^2) &= e^{ivz} - h^2 \left( \frac{1}{4(v+1)} e^{i(v+z)z} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4(v-1)} e^{i(v-z)z} \right) + o(h^4) \quad (C.1.6) \end{aligned}$$

As funções  $me_v(z)$  e  $me_{-v}(z)$  ( $v \notin \mathbb{Z}$ ) formam um conjunto de soluções independentes de (C.1.1).

As funções  $me_v(z; h^2)$  têm a seguinte propriedades ( $v \notin \mathbb{Z}$ ):

$$me_{-v}(z) = me_v(-z) \quad (C.1.7)$$

Vamos considerar agora a equação de Mathieu modificada:

$$\frac{d^2}{dz^2} y - (\lambda - 2h^2 \cosh 2z)y = 0 \quad (C.1.8)$$

A equação (C.1.8) tem como solução

$$Me_v(z; h^2) = me_v(-iz; h^2) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{2r}^v(h^2) e^{(v+2r)z} \quad (C.1.9)$$

As propriedades de  $M e_{\nu}(z: h^2)$  seguem-se de (C.1.3) - (C.1.7).

Vamos procurar uma solução de (C.1.8) denominada de  $M_{\nu}^{(j)}$  com o seguinte comportamento assintótico

$$\lim M_{\nu}^{(j)}(z, h) = z_{\nu}^{(j)} (2h \cosh z) \quad \text{Re } z \rightarrow \infty \quad (\text{C.1.10})$$

onde  $z_{\nu}^{(j)}$  são as seguintes funções de Bessel:

$$\begin{aligned} z_{\nu}^{(1)} &= J_{\nu}(z) \quad , \\ z_{\nu}^{(2)} &= Y_{\nu}(z) \quad , \\ z_{\nu}^{(3)} &= H_{\nu}^{(1)}(z) \quad \text{e} \\ z_{\nu}^{(4)} &= H_{\nu}^{(2)}(z) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.1.11})$$

Os Wronskianos de duas funções  $M^{(j)}$  são os mesmos Wronskianos associados às  $z^{(j)}$ . Temos então

$$\begin{aligned} [j, K] &= M_{\nu}^{(j)} \frac{\overleftrightarrow{d}}{dz} M_{\nu}^{(K)} \equiv M_{\nu}^{(j)} \frac{d}{dz} M_{\nu}^{(K)} - M_{\nu}^{(K)} \frac{d}{dz} M_{\nu}^{(j)} \\ [3, 4] &= -\frac{4i}{\pi}; \quad [1, 3] = -[1, 4] = \frac{2i}{\pi} \end{aligned} \quad (\text{C.1.12})$$

$$[1, 2] = -[2, 3] = -[2, 4] = \frac{2}{\pi}$$

e

$$\begin{aligned} [j, K] M_{\nu}^{(j)}(-z) &= \left[ \frac{d}{dz} M_{\nu}^{(K)} M_{\nu}^{(j)} \right]_{z=0} M_{\nu}^{(j)}(z) + \\ &- \left[ \frac{d}{dz} M_{\nu}^{(j)} M_{\nu}^{(K)} \right]_{z=0} M_{\nu}^{(K)}(z) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.1.13})$$

Para finalizar, notemos que  $M_\nu^{(j)}$  e  $Me_\nu$  são relacionados pelas fórmulas:

$$M_\nu^{(1)}(z, h) = \left( \frac{M_\nu^{(1)}(0; h)}{me_\nu(0; h^2)} \right) Me_\nu(z; h^2) \quad (\text{C.1.14})$$

e

$$M_\nu^{(j)}(z, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} Z_\nu^{(j)}(2h \cosh z) \quad \forall z, \quad \text{Re } z > 0.$$

## APENDICE D

D.1 O Laplaciano  $\Delta^{(3)}$  e suas autofunções em espaços curvos<sup>[59]</sup> ( $d = 4$ )<sup>[97][98]</sup>

Vamos estudar em detalhes as autofunções  $y_{\underline{k}}$  que satisfaz a equação

$$\Delta^{(3)} y_{\underline{k}}(x) = -k^2 y_{\underline{k}}(x) \quad (\text{D.1.1})$$

onde  $\Delta^{(3)}$  é o operador Laplaciano associado à parte espacial da métrica  $g_{\mu\nu}$ . Como a seção espacial pode ser aberta ( $\epsilon = 0$  ou  $\epsilon = -1$ ) ou fechada ( $\epsilon = 1$ ) analisaremos cada caso separadamente.

### i) ( $\epsilon = 0$ ) - Seção espacial Euclidiana

As soluções de (D.1.1) para o tri-espaço euclidiano, são ondas planas:

$$y_{\underline{k}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{D.1.2})$$

$$\underline{k} = \vec{k} = (k_1, k_2, k_3) \quad -\infty < k_j < \infty .$$

### ii) ( $\epsilon = 1$ ) - Seção espacial com curvatura positiva

O elemento de linha desta seção espacial é dado por

$$\sum_{jk} j_{jk} dx^j dx^k = d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (\text{D.1.3})$$

As autofunções de (D.1.1) têm a forma

$$Y_{\underline{k}}(x) = \pi_{\ell J}^+(x) Y_J^M(\theta, \phi)$$

$$\underline{k} = (\ell, J, M)$$

$$\ell = 0, 1, \dots, \quad J = 0, 1, \dots, \ell ; M = -J \dots J$$

onde  $Y_J^M$  são os harmônicos esféricos e  $\pi_{\ell J}^+$  é definido por meio de  $\pi_{\ell J}^-$  onde  $\pi_{\ell J}^-(\chi)$  satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \pi_{\ell J}^-(\chi) &= \\ &= \left( \frac{1}{2} \pi \ell^2 (\ell^2 + 1) \dots (\ell^2 + J^2)^{-1/2} \right) \sinh^J \chi \left( \frac{d}{d \cosh \chi} \right)^{1+J} \cos \ell \chi . \end{aligned} \tag{D.1.5}$$

A função  $\pi_{\ell J}^+(\chi)$  é obtida de  $\pi_{\ell J}^-$ , simplesmente substituindo  $\ell$  por  $i\ell$  e  $\chi$  por  $-i\chi$  [87][88].

iii) ( $\epsilon = -1$ ) - Seção espacial com curvatura negativa

A métrica do tri-espaco neste caso é dada por

$$\sum_{jk} h_{jk} dx^j dx^k = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) .$$

As auto-funções de (D.1.1) são obtidas substituindo  $\chi$  por  $i\chi$  e  $\ell+1$  por  $iq$  nas fórmulas do caso ii ( $\epsilon = 1$ ). Neste caso,  $q$  é uma variável contínua. Temos então

$$Y_{\underline{k}}(x) = \pi_{qJ}^{(-)}(\chi) Y_J^M(\theta, \phi) \tag{D.1.6}$$

$$\underline{k} = (q, J, M)$$

$$0 < q < \infty \quad J = 0, 1, \dots \quad M = -J \dots J \quad .$$

Os autovalores  $-k^2$  da equação (D.1.1) são:

$$k = \begin{cases} |\vec{k}| & \epsilon = 0 \\ [\ell(\ell + 2)]^{1/2} & \epsilon = 1 \\ (q^2 + 1)^{1/2} & \epsilon = -1 \end{cases}$$

ou escrevendo de forma simplificada

$$k = (q^2 - \epsilon)^{1/2} \quad (D.1.7)$$

$$\begin{aligned} q &= 1, 2, \dots & \epsilon &= 1 \\ 0 < q < \infty & & \epsilon &= 0 \text{ ou } \epsilon = -1 \quad . \end{aligned}$$

Desta forma, qualquer função definida sobre esta variedade tri-dimensional com assinatura (+ + +) pode ser expandida numa série de autofunções de (D.1.1). A medida de integração  $\bar{\mu}(k)$  é dada em cada caso por:

$$\int \bar{\mu}(k) = \begin{cases} \int d^3 k & \epsilon = 0 \\ \sum_{\ell, J, M} & \epsilon = 1 \\ \int_0^\infty dq \sum_{J, M} & \epsilon = -1 \quad . \end{cases} \quad (D.1.8)$$

Para finalizar, queremos lembrar que as funções  $y_{\underline{k}}(x)$  são normalizadas de acordo com

$$\int d^3x h^{1/2} y_{\underline{k}}(x) y_{\underline{k}'}(x) = \delta(\underline{k}, \underline{k}') \quad (\text{D.1.9})$$

onde  $\delta(\underline{k}, \underline{k}')$  é a função  $\delta$  com respeito à medida , isto é

$$\int d\bar{u}(\underline{k}') f(\underline{k}') \delta(\underline{k}, \underline{k}') = f(\underline{k}) \quad . \quad (\text{D.1.10})$$



## APENDICE E

### E.1 A Normalização de alguns modos soluções da equação de Klein Gordon

Os modos soluções da equação de Klein-Gordon associados aos sistemas de coordenadas de Rindler, Milne e o sistema de coordenadas descrito em 3.3, estão normalizados de acordo com o produto interno (2.1.11). Vamos calcular as constantes de normalização associada a cada um destes modos.

O produto interno é definido como:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^* (\sqrt{-g_{\Sigma}}) d\Sigma^{\mu} \quad (2.1.11)$$

Seja, então,  $u$  e  $u'$  soluções da equação de Klein Gordon onde  $u = F(T) G(X)$  e  $u' = F'(T) G(x)$ .

Usando-se integração parcial, podemos mostrar que:

$$(u_k, u_{\ell}) = -i \frac{F_k \frac{d}{dT} F_{\ell}^*}{k^2 - \ell^2} \Bigg|_{T=T_0} G_k \frac{d}{dX} G_{\ell}^* \Bigg|_{X_{\text{Mín}}^{X_{\text{Máx}}}} = \delta(k - \ell) \quad (E.1.1)$$

#### i) Sistema de Coordenadas de Milne

Como vimos em (3.2), a equação de Klein - Gordon possui dois conjuntos completos de modos (3.2.8) e (3.2.5). Vamos estudar o comportamento destes modos na sub-região do espa-

ço-tempo de Minkowski descrita pelo mapeamento (3.2.3) (Milne -  
- passado).

i.1) Modos de di Sessa

$$u_{\nu}(y, X) = N H_{i\nu}^{(1)}(my) e^{i\nu a X} \quad (\text{E.1.2})$$

onde  $N$  é a constante de normalização a ser calculada, e

$$Y = \frac{1}{a} e^{-aT} \quad . \quad (3.2.4.b)$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_{\nu}(Y) &= H_{i\nu}^{(1)}(my) e \\ G_{\nu}(X) &= e^{i\nu a X} \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.1.3})$$

Devemos, então, avaliar a expressão

$$F_{\nu} \left. \frac{\leftrightarrow}{dT} F_{\mu}^* \right|_{T=T_0} = F_{\nu} \left( -a y \frac{\leftrightarrow}{dy} \right) F_{\mu}^* \left. \right|_{T=T_0} \quad (\text{E.1.4})$$

em alguma hipersuperfície  $T = \text{cte}$ . Vamos escolher a hipersuperfície definida por  $T = -\infty (Y = \infty)$ .

Usando a expressão assintótica das funções de Hankel para argumentos grandes (ver fórmula (B.1.8), temos:

$$F_{\nu}(my) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi my}} e^{imy + \frac{\pi\nu}{2} - \frac{i\pi}{4}} \quad y \rightarrow \infty \quad .$$

Desta forma,

$$F_\nu \left( -a y \frac{\overleftrightarrow{d}}{dy} \right) F_\mu^* \Big|_{y=\infty} = \frac{4ia}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}(\mu + \nu)} \quad . \quad (E:1.5)$$

Temos que calcular ainda

$$G_\nu(X) \frac{\overleftrightarrow{d}}{dX} G_\mu^*(X) \Big|_{X_{\text{Mín}}}^{X_{\text{Máx}}} \quad .$$

Usando (E.1.3), temos

$$G_\nu(X) \frac{d}{dX} G_\mu^*(X) \Big|_{X_{\text{Mín}}}^{X_{\text{Máx}}} =$$

$$= 2a(\mu + \nu) \lim_{X \rightarrow \infty} \text{sen } a(\nu - \mu)X \quad . \quad (E.1.6)$$

Substituindo (E.1.5) e (E.1.6) em (E.1.1), ficamos com

$$(u_\nu, u_\mu) = N^2 8 e^{\pi\nu} \delta(\mu - \nu) \quad (E.1.7)$$

onde usamos que  $\sigma(X) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin LX}{\pi X}$  .

Concluimos que

$$N = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\pi\nu/2} \quad .$$

Desta forma, os modos de frequência positiva (critério de di Sessa) para Milne-Passado é dado por

$$u_\nu = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\pi\nu/2} e^{i\nu ax} H_{i\nu}^{(1)}(my) \quad . \quad (E.1.8)$$

A generalização para Milne-Futuro é direta e encontramos, então, as expressões (3.2.9.a) e (3.2.9.b).

i.2) Modos de Sommerfield

$$v_\mu(y,x) = N' e^{i\mu ax} J_{i|\mu|}(my) \quad (E.1.9)$$

onde  $N'$  é a constante de normalização a ser calculada e  $v_\mu(x,y)$  são os modos de frequência positiva na região Milne-Passado.

Novamente usaremos (E.1.1) e temos:

$$G_\nu \frac{\overset{\leftrightarrow}{d}}{dx} G^* \Big|_{X \text{ Min}}^{X \text{ Max}} = 2a(\mu + \nu) \lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen } a(\nu - \mu)$$

(Resultado idêntico a (E.1.6)).

Temos que calcular, então,

$$F_\nu \frac{\overset{\leftrightarrow}{d}}{dT} F_\mu^* \Big|_{T=-\infty}^{T=\infty} \quad \text{ou} \quad \Big|_{y=0}^{y=\infty}$$

onde

$$F_\nu(y) = J_{i|\nu|}(my) \quad . \quad (E.1.10)$$

Novamente usando a expressão assintótica das funções de Bessel de primeiro tipo (ver fórmula B.1.6). temos

$$F_\nu(my) \underset{Y \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi my}} \cos\left(my - i \frac{\pi|\nu|}{2} - \frac{1}{4}\pi\right) \quad .$$

Concluimos que

$$(u_\nu, u_\mu) = N'^2 4 \sinh \pi |\mu| \delta(\mu - \nu) \quad (\text{E.1.11})$$

então

$$N' = \frac{1}{2 \sqrt{\sinh \pi |\mu|}} \quad (\text{E.1.12})$$

Desta forma, os modos de frequência positiva (critério de Sommerfield) para a região Milne Passado, é dado por

$$v_\mu(Y, X) = \frac{1}{2 \sqrt{\sinh \pi |\mu|}} e^{i\mu a X} J_{i|\mu|}(my) \quad .$$

ii) O Sistema de Coordenadas de Kalmins-Miller

Vamos calcular as constantes que normalizam os modos  $U^{\text{out}}$  e  $U_\nu^{\text{in}}$  onde

$$U_\nu^{\text{in}}(y, z) = N H_{i\nu}^{(1)}(my) K_{i\nu}(mz) \quad (\text{E.1.13.a})$$

e

$$U_\nu^{\text{out}}(u, z) = N' J_{i\nu}(my) K_{i\nu}(mz) \quad (\text{E.1.13.b})$$

de forma a satisfazer (2.1.20), isto é,

$$(U_\nu, U_\mu) = \delta(u - \mu)$$

$$(U_\nu^*, U_\mu^*) = -\delta(u - \mu) \quad e$$

$$(U_\nu, U_\mu^*) = 0 \quad .$$

Utilizando (E.1.1), temos que

$$\begin{aligned} (U_\nu^{\text{in}}, U_\mu^{\text{out}}) &= \\ &= \frac{-i}{a^2(\nu^2 - \mu^2)} \left| H_{i\nu}^{(1)}(my) \left(-ay \frac{\overleftrightarrow{d}}{dy}\right) H_{i\mu}^{(2)} \right| \left| (K_{i\nu} az \frac{\overleftrightarrow{d}}{dz} K_{i\mu}) \right|_{X \text{ M\u00e1x}}^{X \text{ M\u00edn}} \\ &\qquad\qquad\qquad T=T_0 \end{aligned} \quad (E.1.14)$$

Usando que

$$K_{i\nu}(mz) \left(az \frac{\overleftrightarrow{d}}{dz}\right) K_{i\mu}(mz) \Big|_{X \text{ M\u00edn}}^{X \text{ M\u00e1x}} = \frac{a\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} (\nu^2 - \mu^2) \delta(\mu - \nu)$$

e

$$H_{i\nu}^{(2)}(my) \left(Y \frac{\overleftrightarrow{d}}{dy}\right) H_{i\mu}^{(1)}(my) \Big|_{y=\infty} = \frac{4i}{\pi} \quad . \quad (E.1.16)$$

A prova do resultado obtido em (E.1.15) ser\u00e1 dada no c\u00e1lculo da normaliza\u00e7\u00e3o dos modos  $U_\nu^{\text{out}}$  e, substituindo em (E.1.14), obtemos

$$(U_\nu^{\text{in}}, U_\mu^{\text{in}}) = N'^2 \frac{\pi}{4\mu(1 - e^{-2\pi\mu})} \delta(\mu - \nu) \quad .$$

Conclu\u00edmos que

$$N' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{\pi} (1 - e^{-2\pi\nu})} \quad .$$

Para finalizar, vamos calcular a constante de normalização  $N$  associada aos modos  $U_\nu^{\text{out}}(yz)$ .

Novamente utilizando (E.1.1), temos

$$\begin{aligned}
 (U_\nu^{\text{out}}, U_\mu^{\text{out}}) &= \\
 &= \frac{-i N^2}{a^2 (\nu^2 - \mu^2)} J_{-i\nu}(my) \left(-ay \frac{\overleftrightarrow{d}}{dy}\right) J_{i\mu}(my) \Big|_{y=\infty} K_{i\nu}\left(az \frac{\overleftrightarrow{d}}{dz}\right) K_{i\mu} \Big|_{\text{X Min}}^{\text{X M\`ax}} \\
 &= -N^2 \frac{\pi}{\nu} \delta(\mu - \nu)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$N = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} .$$

## APENDICE F

Demonstração de (5.2.14) <sup>[21]</sup>

Sabemos que a função de Bessel  $J_\nu(z)$  é dada pela expressão

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)} . \quad (\text{F.1.1})$$

Definindo

$$(a)_0 = 1$$

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1) ,$$

Temos

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k! (v+1)_k} . \quad (\text{F.1.2})$$

Supondo que existe  $n_0 > 0$ , tal que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\nu+n| \geq n_0 .$$

Usando a definição (F.1.2),

$$|(\nu+1)_k| \geq (n_0)^k \quad \forall k \in \mathbb{N} . \quad (\text{F.1.3})$$



Usando (F.1.2) e (F.1.3), chegamos ã:

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{|(z/2)^\nu|}{|\Gamma(\nu+1)|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(-z^2/4)|^k}{k! |(\nu+1)_k|} \leq$$

$$\frac{|(z/2)^\nu|}{|\Gamma(\nu+1)|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^2/4|^k}{k! n_0^k} .$$

A desigualdade acima pode ser simplificada, de forma que obtemos

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{|(z/2)^\nu|}{|\Gamma(\nu+1)|} \exp\left(\frac{z^2}{4n_0}\right)$$

se

$$|\nu+n| \geq n_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad . \quad (\text{F.1.4})$$

Vamos supor

$$|\nu| = q + \frac{1}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad .$$

Então

$$|\nu+k| \geq \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad .$$

e usando (F.1.4), encontramos

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{|z/2|^\nu}{|\Gamma(\nu+1)|} \exp(z^2/2)$$

se

$$|\nu| = q + \frac{1}{2} \quad \text{para } q \in \mathbb{N} \quad . \quad (\text{F.1.5})$$

Usando a definição (5.2.10), temos

$$f_\lambda(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{\sinh \pi \lambda} e^{i\lambda z_1} J_{-i\lambda}(mz_2) J_{i\lambda}(mz_3).$$

Nos contornos  $C_2$  e  $C_4$

$$|\pm i\lambda| = q + \frac{1}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad . \quad (F.1.6)$$

Usando (F.1.5) e (F.1.6), temos

$$|f_\lambda(z_1, z_2, z_3)| \leq \left| \frac{1}{\sinh \pi \lambda} e^{i\lambda z_1} \right| \cdot \left| \frac{(z_3/z_2)^{i\lambda}}{\Gamma(i\lambda+1)\Gamma(-i\lambda+1)} \right| e^{\frac{m^2}{2}(z_2^2 + z_3^2)}$$

em  $C_2$  e  $C_4$ .

Mas, como  $\Gamma(i\lambda+1)\Gamma(i\lambda-1) = \frac{\pi\lambda}{\sinh \pi \lambda}$  a desigualdade acima pode ser escrita como

$$|f_\lambda(z_1, z_2, z_3)| \leq \left| \frac{1}{\lambda} (e^{z_1} z_3/z_2)^{i\lambda} \right| \frac{1}{\pi} e^{\frac{m^2}{2}(z_2^2 + z_3^2)}$$

em  $C_2$  e  $C_4$ .

A expressão  $\frac{1}{\pi} e^{\frac{m^2}{2}(z_2^2 + z_3^2)}$  não se altera no contorno  $C_2$  e  $C_4$ , desta forma vamos representá-la por  $M$ , ficando com

$$|f_\lambda(z_1, z_2, z_3)| \leq \frac{M}{|\lambda|} \left| (e^{z_1} \frac{z_3}{z_2})^{i\lambda} \right| \quad (F.1.7)$$

em  $C_2$  e  $C_4$ .

Como  $z_1 = \eta - \eta'$  que é real e  $z_2$  e  $z_3$  ( $\xi$  ou  $\xi'$ ) são positivos, então existe  $k \in \mathbb{R}$ , tal que

$$e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} = e^k \quad . \quad (\text{F.1.8})$$

Vamos estudar o caso  $e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} > 1$  ( $k > 0$ ).

Usando (F.1.7) e (F.1.8), temos

$$\left| \int_{C_2} f_\lambda(z_1, z_2, z_3) d\lambda \right| \leq \left| \int_{C_2} |f_\lambda(z_1, z_2, z_3)| |d\lambda| \right| \leq \int_{C_2} M e^{i\lambda k} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|} \quad .$$

Escolhendo a parametrização

$$C_2: \quad \lambda(\theta) = \left(q + \frac{1}{2}\right) e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

a desigualdade acima se escreve como

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} f_\lambda d\lambda \right| &\leq M \int_0^\pi |e^{i\lambda k}| d\theta = M \int_0^\pi e^{-k\left(q + \frac{1}{2}\right) \sin \theta} d\theta = \\ &= 2M \int_0^{\pi/2} e^{-\left(q + \frac{1}{2}\right) \sin \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{F.1.9})$$

Se  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , então  $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta$ .

Então,

$$e^{-k\left(q + \frac{1}{2}\right) \sin \theta} \leq e^{-k\left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{2\theta}{\pi}} \quad 0 \leq \theta < \pi$$

e

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_2} f_\lambda d\lambda \right| &\leq 2M \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2k}{\pi} (q + \frac{1}{2}) \theta} d\theta = \\
 &= -\frac{M\pi}{k(q + \frac{1}{2})} (e^{-k(q + \frac{1}{2})} - 1) \leq \frac{M\pi}{k(q + \frac{1}{2})} . \quad (F.1.10)
 \end{aligned}$$

Desta forma

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{N}}} \left| \int_{C_2} f_\lambda d\lambda \right| = 0 \quad \text{se } e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} > 1 .$$

Para o caso  $e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} < 1$  ( $k < 0$ ), o contorno  $C_4$  é o adequado, e um cálculo similar nos dá

$$\lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q \in \mathbb{N}}} \left| \int_{C_4} f_\lambda d\lambda \right| = 0 \quad \text{se } e^{z_1 \frac{z_3}{z_2}} < 1 .$$

## APENDICE G

G.1 Uma extensão analítica do teorema de adição das funções de Bessel [21]

Vamos definir

$$\begin{aligned} g(z) &= J_0 \left( m(\xi^2 + \xi'^2 - \xi\xi' \left( z + \frac{1}{z} \right)^{1/2}) \right) = \\ &= J_0 \left[ m \left( \left( \xi + \xi'z \right) \left( \xi + \frac{\xi'}{z} \right) \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.1.1})$$

$J_0$  é analítica em todo o plano complexo e a sua expansão em série de potências em torno da origem, contém apenas termos de potências pares. Desta forma, podemos eliminar a raiz quadrada de (G.1.1) e  $g(z)$  é analítica em todo o plano com plexo, com exceção da origem.

Vamos definir "outra" função:

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') z^n \quad . \quad (\text{G.1.2})$$

A série (G.1.2) é convergente para  $z \neq 0$ .

Desta forma  $h(z)$  é analítica em todo o plano com plexo, com exceção da origem.

Escolhendo  $|z| = 1$

$$z = e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') e^{in\theta} = \\ &= J_0(m\xi) J_0(m\xi') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') \cos n\theta \quad . \end{aligned}$$

Usando o teorema de adição para funções cilíndricas, encontramos

$$h(z) = J_0[m(\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cos \theta)^{1/2}] \quad .$$

Mas

$$g(z) = g(e^{i\theta}) = J_0[m(\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cos \theta)^{1/2}]$$

então  $g(z) = h(z)$  se  $|z| = 1$ .

Como  $g(z) - h(z)$  é analítica em  $\mathbb{C} - \{0\}$  e se anula em  $|z| = 1$ , então deve se anular em  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

A afirmação acima basea-se no fato de que os zeros de qualquer função analítica são isolados no interior do seu domínio (aberto e conexo) ou a função se anula em todo o domínio.

Desta forma obtemos

$$\begin{aligned} &J_0[m(\xi^2 + \xi'^2 - \xi\xi'(z + \frac{1}{z}))^{1/2}] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') z^n \quad z \neq 0. \end{aligned} \tag{G.1.3}$$

Como

$$z = e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{C}$$

então

$z(\theta) \neq 0 \quad \forall \quad \theta \in \mathbb{C}$  e usando (G.1.3), temos

$$\begin{aligned} J_0 [m(\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cos \theta)^{1/2}] &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') e^{in\theta} \quad \theta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

se  $\theta = i(\eta - \eta')$ , temos finalmente

$$J_0(m(\sigma)^{1/2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\xi) J_n(m\xi') e^{n(\eta - \eta')}$$

onde

$$\sigma = (\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi' \cosh(\eta - \eta')).$$

## REFERÊNCIAS

- [1] S.W. Hawking - "Particle Creation by Black-Holes". *Comm. Math. Phys.*, 43, 199 (1975).
- [2] J.B. Hartle and S.W. Hawking - "Path Integral Derivation of Black-Hole Radiance". *Phys. Rev.*, D,13, 2188 (1976).
- [3] S.A. Fulling - "Scalar Quantum Field Theory in a Closed Universe of Constant Curvature". PhD Thesis, Princeton (1972).
- [4] W.G. Unruh - "Notes on Black-Hole Evaporation". *Phys. Rev.*, D,14, 870 (1976).
- [5] W. Rindler - "Kruskal Space and the Uniformly Accelerated Frame". *Am. J. Phys.* 34, 1117 (1966).
- [6] G. Kalnins - "On the Separation of Variables for the Laplace Equation  $\Delta\psi + k^2\psi = 0$  in two and three Dimensional Minkowski Space". *Siam. Math. Annal*, 6, 341 (1975).
- [7] L. Parker - "Particle Creation in Expanding Universes". *Phys. Rev. Lett.*, 21, 562 (1968).
- [8] A.A. Grib, S.G. Mamayev, V.M. Mostepanenko - "Particle Creation form Vacuum in Homogeneous Isotropic Models of the Universe" - *Gen. Rel. and Grav.*, 7, 535 (1976).
- [9] A.A. Grib, S.G. Mamayev, V.M. Mostepanenko - "Vacuum Stress-Energy Tensor and Particle Creation in Isotropic Cosmological Models" - *Forch. der Phys.*, 28, 199 (1980).
- [10] L. Landau, E. Lifshitz - "Teoria do Campo" - Editora Mir. Moscou.
- [11] S. Weinberg - "Gravitation and Cosmology". Wiley, N.Y. (1972).



- [12] M. Novello e J. Salim - "Non-linear Photons in the Universe". Phys. Rev., D, 20, 377 (1979).
- [13] J.D. Jackson - "Classical Eletrodynamics Wiley".
- [14] E.A. Milne - "Nature" - (London), 269, 41 (1932).
- [15] H. Bondi - "Cosmology". C.U.P., Cambridge (1952).
- [16] J. Meixner and F.W. Schäfje - "Mathieusche Funktionen und Sphäroid Funktionen". Springer Verlag. Berlim (1974).
- [17] N.W. McLachlan - "Theory and Aplication of Mathieu Function". Dower Pub.
- [18] C. Bernard and A. Duncan - "Regularization and Renormalization of Quantum Field Theory in Curved Space-time". Annal of Phys., 107, 201 (1977).
- [19] I. Costa - "Quantenfeldtheorie in den Orthogonalen Separierbaren Koordinaten des Zweidimensionalen Minkowski-Raums". Tese de Doutorado, Un. de Viena (1985).
- [20] I. Costa and N.F. Svaiter - "Separable Coordinates ans Particle Creation III: Accelerating, Rindler and Milne Vacua". Aceito para publicação na Rev. Bras. Física.
- [21] B.F. Svaiter and N.F. Svaiter - "Quantum Field Theory in Non-Stationary Coordinate Systems and Green Functions". Notas de Física 043/88, CBPF. Submetido à publicação no Journ. of Math. Phys.
- [22] I. Costa, N. Dernelle, M. Novello and N.F. Svaiter - "Quantum Fields in Cosmological Space-times: A Soluble Example". Pre Print, CBPF, N.F., 059/88. Aceito para publicação no Classical and Quantum Gravity.
- [23] T.D. Lee - "Particle Physics and Introduction to Field Theory". Harwood Academic Publishers. N.Y. (1981).
- [24] N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov - "Quantum Fields". The Benjamin/Cumming Publishing Company. INC (1983).
- [25] G. Källen - "Quantum Eletrodynamics". Springer Verlag. N.Y. (1971).

- [26] Y. Choquet Bruhat - "Hyperbolic Partial Differential Equations on a Manifold. Battelle Rencontres, N.Y. (
- [27] P. Hajiek - "Theory of Particle Detection in Curved Space-times". Phys. Rev., D 15, 2757 (1979).
- [28] N.N. Bogoliubov - "On a Variational Principle in the Many-Body Problem". Sov. Phys. JETP, 7, 51 (1958).
- [29] A.S. Wightman - "Introduction to Some Aspects of the Relativistic Dynamics of Quantized Fields". Cargese (1974)
- [30] C. Itzykson and J.B. Zuber - "Quantum Field Theory". Mc.Graw-Hill, INC, N.Y. (1980).
- [31] T. Padmanabhan - "Quantum States whose Particle Constant is Invariant under Bogoliubov Transformation". Class. Quant. Grav., 4, 967 (1987).
- [32] T. Day and C.A. Manogue - "Bogoliubov Transformation and Completeness". Gen. Rel. and Grav., 20, 957 (1988).
- [33] A.A. Grib, V.M. Mostepamenko and V.M. Frolov - "Particle Creation from Vacuum by a Homogenous Electric Field in the Canonical Formalism". Theo. Math. Fiz, 13, 377 (1972).
- [34] H. Snyder and J. Weinberg - "Stationary States of Scalar and Vector Fields". Phys. Rev., 57, 307 (1939).
- [35] L.I. Schiff, H. Snyder and J. Weinberg - "On the Existence of Stationary States on the Mesotron Field". Phys. Rev., 57, 315 (1940).
- [36] O. Nachtman. Comm. Math. Phys., 6, 1 (1967).
- [37] O. Nachtman. Z. Phys., 208, 113 (1969).
- [38] H. Rumpf and H.K. Urbantke - "Covariant in-out Formalism for Creation by External Fields". Preprint University of Wien (1977).
- 9] M. Castagnino, A. Verbeure and P.A. Werder - "Catastrophes in the Canonical Quantization in a Expanding Universe". Il Nuov. Cim., 26B, 396 (1975).

- [40] A.O. Barut - "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles". Dover INC, N.Y. (1980).
- [41] G.W. Gibbons and M.J. Perry - "Black holes and Thermal Green Functions". Proc. R. Soc. Lond., A 358, 467 (1978).
- [42] P. Candelas and D.J. Raine - "Feynman Propagator in Curved Space-time". Phys. Rev., D 15, 1494 (1977).
- [43] G.W. Gibbons - "Quantized Fields Propagating in Plane-Waves Space-times". Comm. Math. Phys., 45, 191 (1975).
- [44] P. Winternitz and I. Fris - "Invariant Expansion of Relativistic Amplitudes and Subgroups of the Proper Lorentz Group". Sov. Phys., J.N.P. 1, C 36 (1965).
- [45] C. Boyer, E. Kalnins and W.A. Miller Jr. - "Lie Theory and Separation of Variables: The Equation  $U_t + \Delta_2 U = 0$ ". Journ. Math. Phys., 16, 499 (1975).
- [46] C. Boyer, E. Kalnins and W.M. Miller Jr. - "Symmetry and Separation of Variables for the Helmholtz and Laplace Equations". Nagoya Math., 60, 35 (1975).
- [47] G. Kalnins, W.M. Miller Jr. - "Lie Theory and Separation of Variables for  $\delta$ : Semigroup Coordinates for  $\psi_{tt} - \Delta_2 \psi = 0$ ". Journ. of Math. Phys., 16, 1531 (1975).
- [48] P.A. Dirac - "Forms of Relativistic Dynamics". Rev. Mod. Phys., 21, 372 (1949).
- [49] S. Tomonaga - "On the Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields". Prog. Theor. Phys., 1, 27 (1946).
- [50] J. Schwinger - "Quantum Electrodynamics I. A Covariant Formulation". Phys. Rev., 74, 1439 (1948).
- [51] S. Fubini, A.J. Hanson and R. Jackiw - "New Approach to Field Theory". Phys. Rev., D 7, 1732 (1973).
- [52] A. diSessa - "Quantization on Hyperboloids and Full Space-time Field Expansion". Journ. Math. Phys., 15, 1892 (1974).

- [66] T. Padmanabhan - "General Covariance, Accelerated Frames and the Particle Concept". *Ast. and Space Scien.*, 83, 247 (1982).
- [67] N.N. Lebedev - "Sur une Formule D'inversion". *Dokel Akad Nauk, SSSR.*, 52, 655 (1946).
- [68] S.A. Fulling - "Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-time". *Phys. Rev.*, D 7, 2850 (1973).
- [69] J.R. Letaw and J.D. Pfantsch - "Quantized Scalar Field in the Stationary Coordinate Systems of Flat Space-time". *Phys. Rev.*, D 24, 1949 (1981).
- [70] N. Sanchez - "Thermal and Nonthermal Particle Production Without Event Horizons". *Phys. Lett.*, 87B, 212 (1979).
- [71] N. Sanchez and B.F. Whiting - "Field Quantization for Accelerated Frames in Flat and Curved Space-times". *Phys. Rev.*, D74, 1056 (1986).
- [72] T.D. Lee - "Are Black Holes Black Bodies?". *Nucl. Phys.* B264, 437 (1986).
- [73] S. Takagi - "Vacuum Noise and Stress Induced by Uniform Acceleration". *Prog. of Theor. Phys.*, 88 (1986).
- [74] W.G. Unruh and W. Weiss - "Acceleration Radiation in Interacting Field Theories". *Phys. Rev.*, D29, 1656 (1984).
- [75] T. Frankel - "Gravitational Curvature". Freeman (1979).
- [76] I. Costa - "Separable Coordinates and Particle Creation I: The Klein-Gordon Equation". *Rev. Bras. Fís.*, 17, 585 (1987).
- [77] I. Costa - "Separable Coordinates and Particle Creation II: Two New Vacua Related to Accelerating Observers". *Journ. Math. Phys.* (a ser publicado).
- [78] P. Candelas and D.J. Raine - "Quantum Field Theory on Incomplete Manifolds". *Journ. Math. Phys.*, 17, 2101 (1976).
- [79] H. Bateman - "Tables of Integral Transformations". Vol.I, California Inst. of Technology.

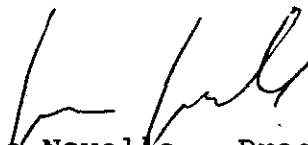
- [80] H. Bateman - "Tables of Integral Transformations". Vol.II, Califórnia Inst. of Technology.
- [81] A. Erdérlyi, W. Magnuns, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi - "Higher Transcedental Functions". Vol. I, Califórnia Inst. of Technology.
- [82] A. Erdérlyi, W. Magnuns, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi - "Higher Transcedental Functions". Vol. II, Califórnia Inst. of Technology.
- [83] I.G. Bolware - "Quantum Field in Schwarzschild and Rindler Spaces". Phys. Rev., D11, 1404 (1975).
- [84] Ch. Charach - "Feynman Propagators and Particle Creation in Linearly Expanding Bianchi Tipe-I Universes". Phys. Rev., D26, 3367 (1982).
- [85] A. Wightman - "Higher Energy Eletromagnetic Interactions and Field Theory". N.Y. (1967).
- [86] B. Schroer - "Infrateilchen in der Quantunfeldtheorie". Forts. der Phys., 11, 1 (1963).
- [87] S. Coleman - "There are no Goldstone Bosons in two Dimensions". Comm. Math. Phys., 31, 259 (1973).
- [88] D. Gromes, H.J. Rothe and B. Stech - "Field Quantization on the Surface  $X^2 = \text{constant}$ ". Nucl. Phys., B75, 313 (1974).
- [89] P. Hájicek - "On Quantum Field Theory in Curved Space-time". Il Nuov. Cim., 33 B, 597 (1975).
- [90] B.S. Dewitt - "Quantum Field Theory in Curved Space-time". Phys. Rep., 19C, 295 (1975).
- [91] K.J. Hinton - "Particle Detector Equivalence". Class. Quant. Grav., 1, 27 (1984).
- [92] J.R. Letaw - "Stationary World Lines and the Vacuum Excitation of Noninertial Detectors". Phys. Rev., D23, 1708 (1981).
- [93] S.A. Fulling and L. Parker - "Renormalization in the Theory of a Quantized Scalar Field Interacting with a Robertson-Walker Space-time". An. of Phys., 87, 176 (1974).

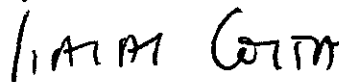
- [94] M. Novello and H. Heitzman - "An Eternal Universe". Gen. Rel. and Grav., 16, 535 (1984).
- [95] N. Svaiter - "Fotons Não Lineares no universo de Bianchi Tipo I". Tese de Mestrado, CBPF (1984).
- [96] V.N. Melnikov and V. Orlov - "Nonsingular Cosmology as a Quantum Vacuum Effect". Phys. Lett., 70A, 263 (1979).
- [97] A.Z. Dolginov and I.N. Toptygin - "Relativistic Spherical Functions II". Sov. Phys., JETP, 10, 1022 (1960).
- [98] M. Bander and C.I. Itzykson - "Group Theory and the Hydrogen Atom II". Rev. Mod. Phys., 38, 346 (1966).

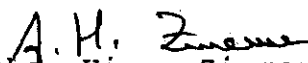
"TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS EM SISTEMAS DE COORDENADAS  
CURVILÍNEAS NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI E  
EM ESPAÇOS CURVOS"

NAMI FUX SVAITER

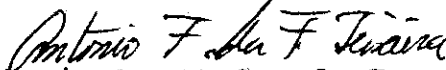
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

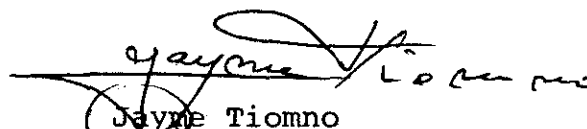
  
Mario Novello - Presidente

  
Isaias Pereira da Silva Costa - Co-orientador

  
Abraham Hirszt Zimmerman

  
Henrique Fleming

  
Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

  
Jayme Tiomno

Rio de Janeiro, 31 de maio de 1989