

JORGE EDUARDO STEPHANY RUIZ

OPERADORES DE DESORDEM E QUANTIZAÇÃO DE SÓLITONS EM $D > 3$

Tese de doutorado

Orientador: Prof. Eduardo C. Marino

Puc/RJ

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-Março de 1989-

RESUMO

O método de quantização de sólitons baseado no princípio de dualidade ordem desordem é utilizado para estudar vários sistemas de Teoria de Campos em dimensão maior que 2.

Calculam-se as funções de correlação dos vórtices do Modelo de Higgs Abeliano e dos laços de Wilson de QCD em 2+1 dimensões na ordem mais baixa da série perturbativa.

Para os modelos com simetrias não abelianas em 3+1 dimensões são introduzidos operadores não locais associados aos monopolos magnéticos utilizando o formalismo da quantização ordem desordem. O método geral para o cálculo de funções de correlação de monopolos é estabelecido e a realização operatorial explícita para o campo de monopolos é obtida.

A generalização para dimensões superiores e sólitons estendidos é discutida.

SUMARIO

| | |
|--|-----|
| Resumo | II |
| Sumario | III |
| Lista de Figuras | V |
| 1. Introdução | 1 |
| 2. Sólitons | 7 |
| 2.1 Kinks | 7 |
| 2.2 Vórtices | 10 |
| 2.3 O monopolo magnético | 15 |
| 2.4 Quantização de sólitons | 23 |
| 2.5 Quantização de sólitons em teorias de calibre | 25 |
| 3. Dualidade ordem-desordem | 27 |
| 3.1 Dualidade no modelo de Ising em $D=2$ | 27 |
| 3.2 Dualidade em modelos bidimensionais | 33 |
| 3.3 Os sistemas duais de 't Hooft | 37 |
| 3.4 O método de quantização dos vórtices | 40 |
| 4. Função de correlação dos vórtices | 51 |
| 4.1 Regras de Feynman para o campo externo | 51 |
| 4.2 Função de correlação de dois pontos | 54 |
| 5. Funções de correlação dos laços de Wilson na formulação dual em 3-D | 64 |
| 5.1 Os laços de Wilson como operadores de desordem de um modelo com simetria $Z(N)$ em 3 dimensões | 64 |
| 5.2 Valor esperado de $W(\mathcal{C})$ | 67 |
| 5.3 A função de correlação $\langle W(\mathcal{C})W(\mathcal{C}') \rangle$ | 70 |
| 5.4 A massa do glueball | 75 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 6. | O método de quantização de monopolos | 77 |
| 6.1 | <i>O operador de desordem</i> | 78 |
| 6.2 | <i>A função de correlação de dois pontos</i> | 80 |
| 6.3 | <i>Realização explícita do operador de desordem</i> | 90 |
| 6.4 | <i>Fixação de calibre e invariância BRS</i> | 96 |
| 7. | O operador da corda e outras generalizações | 98 |
| 7.1 | <i>Operadores de sólitons em D dimensões</i> | 98 |
| 7.2 | <i>Cordas como linhas de fluxo em teorias de calibre</i> | 100 |
| 8. | Conclusões | 105 |
| | Apêndices | 108 |
| | Apêndice A: Cálculos perturbativos | 108 |
| | Apêndice B: Integração em D dimensões | 116 |
| | Apêndice C: O modelo de Higgs Abelian (MHA) | 119 |
| | Apêndice D: Demonstração de alguns resultados do | |
| | Capítulo 4 | 128 |
| | Apêndice E: O modelo de Georgi-Glashow (MGG) | 138 |
| | Apêndice F: Demonstração de alguns resultados do | |
| | Capítulo 6 | 146 |
| | Apêndice G: Transformações de calibre no MGG | 153 |
| | Referências | 157 |

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Capítulo 1

- 2-1 Condições de contorno para vórtices
- 2-2 O vácuo e o Ouriço

Capítulo 3

- 3-1 A rede e as variáveis duais
- 3-2 Funções de correlação de variáveis de desordem
- 3-3 O kink e o antikink
- 3-4 Os defeitos na função de correlação de desordem no MHA
- 3-5 O campo externo da eq.(15)
- 3-6 Deformações do campo externo
- 3-7 O campo externo da eq.(17)

Capítulo 4

- 4-1 Regras de Feynman para o campo externo na fase simétrica
- 4-2 Regras de Feynman para o campo externo na fase quebrada
- 4-3 O cilindro inclinado
- 4-4 Coordenadas do cilindro inclinado
- 4-5 Vértice adimensionais
- 4-6 Um gráfico de ordem $(1/e)^0$
- 4-7 Gráfico genérico de ordem $(1/e)^0$

Capítulo 5

- 5-1 Regras de Feynman para $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$
- 5-2 A curva \mathcal{C} escolhida
- 5-3 Dependência de I^W como função de R

Capítulo 7

- 7-1 Suporte do campo externo associado ao operador da corda

CAPÍTULO 1

Introdução

Um mecanismo muito interessantes que faz melhorar a nossa compreensão dos sistemas físicos consiste no fato de que freqüentemente os modelos teóricos considerados resultam possuir uma riqueza de estruturas muito maior que a necessária para explicar os fenômenos físicos para cujo estudo foram introduzidos. Nesses casos os modelos predizem novos fenômenos, cuja ocorrência ou não ocorrência, contribui para esclarecer a física dos sistemas envolvidos. Isto tem sucedido com particular freqüência no desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos onde talvez o exemplo mais espetacular seja a predição das antipartículas a qual resulta naturalmente do formalismo da segunda quantização.

Um outro exemplo deste tipo de predições em Teoria Quântica de Campos que tem atraído muito interesse nos últimos anos é a que promove à categoria de partículas do espectro físico os sólitons clássicos que aparecem em modelos não lineares. Neste trabalho estudamos alguns métodos desenvolvidos recentemente que contribuem à melhor compreensão desta idéia.

Os sólitons são soluções estáveis com energia finita das equações clássicas de movimento de modelos de Teoria de Campos. No caso de sólitons topológicos a estabilidade aparece associada à existência de uma corrente dita topológica que é conservada de

forma independente das equações de movimento e cuja carga resulta quantizada mesmo classicamente. Exemplos de sólitons são os kinks no modelo de Sine-Gordon e no modelo Φ_2^4 , os vórtices do modelo de Higgs Abelião, os skyrmions do modelo sigma não linear e os monopolos de 't Hooft-Polyakov em modelos de Yang-Mills com quebra espontânea da simetria.

Do ponto de vista clássico os sólitons são de grande importância no estudo das propriedades de sistemas descritos por equações não lineares. A compreensão de suas propriedades tem tido desenvolvimentos apreciáveis utilizando diversas técnicas entre as quais uma das mais bem sucedidas tem sido o método de espalhamento inverso.

Quânticamente os sólitons tem que se manifestar de alguma forma. Isto se vê intuitivamente no contexto da quantização com integrais de trajetória onde as configurações de sólitons resultam ser mínimos locais do expoente do integrando no funcional do vácuo fornecendo-lhe uma estrutura adicional que ele não tem em teorias sem sólitons.

A forma como se espera que os sólitons se manifestem é como novos setores do espaço de Hilbert superselecionados pelo valor da carga topológica [Fröhlich,1976]. Isto quer dizer que os sólitons quânticos são novas partículas diferentes das associadas com os campos fundamentais da lagrangeana.

Uma vez aceita esta interpretação os sólitons começam a ter um grande interesse fenomenológico. No caso dos monopolos este interesse decorre de sua aparição nos modelos de grande unificação (por ex. [Coleman,1983]). Em tais modelos os monopolos têm

interesse cosmológico já que se prediz uma alta taxa de produção deles em alguma das etapas iniciais do Universo. Eles têm também interesse devido ao chamado efeito Rubakov-Callan [Rubakov,1982] [Callan, 1982] que consiste na catálise do processo de decaimento de prótons nos modelos de grande unificação devido à presença de monopolos.

O interesse fenomenológico dos sólitons em modelos tridimensionais está vinculado à possível relação dos modelos de Teoria de Campos com sistemas de Materia Condensada. O MHA ou modelo de Ginzburg-Landau por exemplo serve para descrever algumas das propriedades de superconductores e superfluidos normais enquanto que o modelo σ não linear com simetria $O(3)$ resulta do limite de baixas energias do antiferromagneto de Heisenberg [Haldane,1988] [Fradkin e Stone,1988]. A importância dos sólitons quânticos nestes e outros sistemas é uma questão que tem o maior interesse.

A conexão entre os sólitons clássicos e os novos setores do espaço de Hilbert foi feita inicialmente em forma explícita somente em modelos em duas dimensões. Usando as técnicas de bosonização (por ex. [Swieca,1977]) se pode estabelecer a equivalência entre os sólitons de teorias bosónicas e os férmions fundamentais de diferentes modelos [Coleman,1975] [Mandelstam, 1975a] [Belvedere et al,1979]. Também, já dentro do contexto da Teoria de Campos axiomática Fröhlich mostrou a necessidade de introduzir os novos setores do espaço de Hilbert para poder obter completude assintótica no modelo σ Sine-Gordon e no modelo \mathbb{S}_2^4 .

Em três e mais dimensões onde não tem sido possível desenvolver

as técnicas de bosonização a generalização destes resultados não é imediata. Para agravar a situação mesmo os cálculos semiclássicos que em 2-D dão informação importante sobre os sólitons quânticos [Dashen et al, 1974,1975] para a maioria dos modelos em três e mais dimensões resultam extremamente complicados. Apesar de sua importância o problema da construção de operadores de interpolação entre o setor de vácuo e os setores de sólitons não tinha sido resolvido até recentemente, como também não existia um caminho delineado para sua abordagem. De fato excluindo os trabalhos de Ezawa [Ezawa, 1978,1979] e de 't Hooft ['t Hooft,1978] é difícil conseguir na literatura trabalhos que nos quais se discuta este problema.

A generalização adequada a $D > 2$ dos resultados da bosonização pode ser feita introduzindo a generalização das variáveis duais dos modelos de Mecânica Estatística [Kramers e Wannier, 1942] seguindo a formulação de Kadanoff e Ceva [Kadanoff e Ceva, 1971]. Estas idéias foram aplicadas com êxito em Teoria Quântica de Campos inicialmente em modelos em 2-D [Marino e Swieca,1980] [Marino et al,1982] [Marino, 1983,1984]. O método consiste em caracterizar as novas variáveis μ (variáveis duais, de desordem ou de sóliton) utilizando uma álgebra operatorial (álgebra dual) entre elas e os campos fundamentais da teoria que leve em conta as propriedades topológicas dos sólitons. Isto permite partindo de uma prescrição para a função de correlação $\langle \mu^* \mu \rangle$ a construção de representações explícitas dos operadores de sóliton.

Recentemente Marino [Marino,1988] foi capaz de construir operadores de desordem μ associados aos vórtices do MHA em 3-D

depois de reconhecer a necessidade do operador μ não ser mais local e ter que depender de uma curva fechada espacial \mathcal{C} para poder levar em conta as propriedades topológicas dos vórtices. Nesta tese apresentamos vários resultados relacionados com a aplicação desta construção a modelos em 3 dimensões e sua generalização a modelos em mais dimensões com simetrias não necessariamente abelianas. Nosso resultado principal é a construção de operadores de desordem associados a sólitons com simetria não abeliana (monopolos) em dimensão arbitrária. Mostramos que tais operadores devem depender de superfícies fechadas $D-2$ dimensionais e que podem ser caracterizados por uma álgebra dual que exprime o conteúdo topológico não trivial dos modelos.

A organização deste trabalho é como se segue:

No capítulo 2 fazemos uma revisão das propriedades clássicas dos sólitons com ênfase nos aspectos que precisaremos nos desenvolvimentos posteriores e fazemos também uma breve referência aos principais trabalhos onde o problema quântico associado é tratado.

No capítulo 3 descrevemos as idéias de dualidade Ordem-desordem e sua aplicação a modelos de Mecânica Estatística e de TQC em 2 e 3 dimensões.

No capítulo 4 mostramos o cálculo da função de correlação de vórtices do MHA na aproximação de árvore nas fases simétrica e quebrada.

No capítulo 5 discutimos a formulação dual da cromodinâmica em 3-D [Aragão et al, 1987] que identifica os laços de Wilson como

variáveis de desordem e utiliza variáveis de ordem locais. Mostramos o cálculo da função de correlação de laços de Wilson nesta formulação e discutimos sua relação com a massa do glueball.

No capítulo 6 construímos detalhadamente o operador de monopolo do modelo de Georgi-Glashow com simetria $O(3)$ a partir da prescrição para a função de correlação de dois pontos e mostramos que satisfaz a álgebra dual adequada.

No capítulo 7 generalizamos os resultados do capítulo 6 para dimensão arbitrária e discutimos como lidar com sólitons estendidos.

No capítulo 8 damos nossas conclusões e discutimos algumas aplicações do trabalho desenvolvido nesta tese.

Incluimos 7 apêndices para estabelecer as convenções utilizadas nos cálculos e para detalhar alguns destes.

Nossas contribuições originais são as contidas nos capítulos 4, 6 e 7 e o cálculo da função de correlação de laços de Wilson mostrado nas secções (5.3) e (5.4).

CAPÍTULO 2

Sólitons

2.1 Kinks

O fato subjacente que motiva a realização da pesquisa apresentada nesta tese é a existência, em modelos de teoria de campos de soluções clássicas estáveis e com energia finita das equações de movimento. Elas podem ocorrer devido a uma particular relação entre o grupo de simetria do modelo e as características topológicas inerentes à dimensão do espaço tempo no qual o modelo está definido. (Ver por exemplo os artigos [Rajaraman,1975] e [Coleman, 1975] e os livros [Rajaraman,1982] e [Rebbi e Soliani, 1984]). Estas soluções estáveis, são englobadas sob o nome genérico de sólitons [Zabusky e Kruskal,1965]. Porém alguns autores preferem usar o nome de ondas solitárias reservando o de sólitons para aquelas que colidem conservando a velocidade e a forma ([Soliani e Rebbi, 1984] [Rajaraman,1982,]). O mecanismo "topológico" para construir as soluções estáveis baseia-se no fato de que para uma configuração dos campos com energia finita a densidade de energia $H(x)$ tem que se anular no infinito espacial. Portanto, esta configuração tem que se aproximar por cada direção no infinito espacial de um dos zeros do potencial. Não precisa, no entanto, de tender ao mesmo mínimo em todas as direções. A estabilidade se obtém quando é possível escolher uma condição de contorno no infinito espacial que não possa evoluir continuamente

à condição de contorno de uma das soluções triviais. Isto pode-se conseguir quando o grupo de simetria quebrado (isto é o grupo cociente entre o grupo de simetria inicial e o grupo de simetria remanescente ou equivalentemente a variedade dos vácuos clássicos) é topologicamente equivalente à esfera $S_{D-2}(R \rightarrow \infty)$ que é onde se impõem as condições de contorno. Quando este é o caso, o sistema possui uma corrente conservada dita topológica. Ela é conservada identicamente em forma independente das equações de movimento [Bogomol'nyi, 1976]. O modelo Φ^4 em $(1+1)D$, que é dado pela lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \Phi^2 - \frac{1}{4}h\Phi^4 - \frac{1}{4h}\mu^4, \quad h > 0 \quad (1)$$

onde h e μ são parâmetros do sistema, apresenta uma simetria $Z(2)$ que para valores negativos de μ^2 é espontaneamente quebrada. Com efeito, a lagrangeana é invariante sob as transformações

$$\Phi \longrightarrow -\Phi = e^{i\pi} \Phi, \quad (2)$$

e, no entanto, o vácuo da teoria não. Isto, ao nível clássico, tem a sua manifestação no fato de o potencial clássico

$$V = \frac{1}{2}\mu^2 \Phi^2 + \frac{1}{4}h\Phi^4 + \frac{1}{4h}\mu^4 = \frac{1}{4h}(h\Phi^2 + \mu^2)^2 \quad (3)$$

ter dois mínimos

$$\Phi_{\pm} = \pm \left(\frac{\mu^2}{h} \right)^{1/2} \quad (4)$$

que estão relacionados pela transformação (2). As configurações de campo com energia finita devem ter como valores limites para $x = \pm\infty$ algum destes zeros do potencial. Uma solução que tende a zeros

diferentes para $x = \infty$ e para $x = -\infty$, por exemplo

$$\Phi(x \rightarrow \infty) \rightarrow \Phi_+ \quad (5a)$$

$$\Phi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \Phi_- \quad (5b)$$

será estável pois não pode ser deformada continuamente em nenhuma das soluções triviais, mantendo simultaneamente a energia finita. Requerendo ainda que a solução seja estática é muito simples calcular uma expressão explícita com as propriedades desejadas [Coleman, 1975]. É o chamado kink. Ele só pode existir pela equivalência topológica entre o infinito espacial em (1+1)D (formado pelo conjunto discreto de pontos $(-\infty, +\infty)$) e o conjunto também discreto de mínimos do potencial (4). Uma outra forma de expressar isto é observando que o sistema possui uma corrente topológica

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi, \quad \partial^\mu J_\mu = 0 \quad (6)$$

chamada desta maneira porque o fato de ela ter divergente nulo resulta das propriedades do espaço tempo (neste caso concreto a antisimetria do tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu}$), e não de alguma simetria da lagrangeana. A carga

$$Q = \int_C dx^\mu J_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx J_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi'(x) = \Phi(\infty) - \Phi(-\infty) \quad (7)$$

toma para as soluções com comportamento assintótico dado por (5) o valor $2\Phi_+$ enquanto que para soluções com comportamento assintótico trivial ela é nula.

2.2 Vórtices

A generalização destas idéias a sistemas nos quais o grupo de simetria envolvido é um grupo contínuo requer sair do espaço bidimensional. No caso mais simples o grupo da simetria que é quebrada é o grupo $U(1)$ o qual é topologicamente equivalente ao círculo S_1 e portanto é natural escolher o espaço de $(2+1)D$ cujo infinito espacial é isomorfo a S_1 . O modelo em questão é o modelo de Higgs Abeliiano (MHA) e as soluções que nos interessam são os chamados vórtices de Nielsen e Olesen [Nielsen e Olesen, 1973], introduzidos por Nielsen e Olesen na teoria quântica de campos (trabalhando em $(3+1)D$ com simetria axial). Este tipo de estrutura já tinha sido descoberto por Abrikosov [Abrikosov, 1957] como soluções das equações da teoria de Ginzburg-Landau [Ginzburg e Landau, 1950] da supercondutividade.

O modelo de Higgs Abeliiano (MHA) é descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L}^{HA} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) - V(\Phi) \quad , \quad (1)$$

onde,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2a)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2b)$$

$$V(\Phi) = \mu^2\Phi^*\Phi + \frac{h}{4}(\Phi^*\Phi)^2 + \frac{\mu^4}{h} = \frac{1}{4h}(h\Phi^*\Phi + 2\mu^2)^2 \quad . \quad (3)$$

e h, μ e e são parâmetros do modelo. Esta lagrangeana é invariante sob as transformações de calibre

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (4)$$

$$\Phi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \Phi(x) \quad , \quad (5)$$

Para valores negativos de μ^2 , e somente para estes a simetria é espontaneamente quebrada, o que também neste caso se manifesta classicamente pelo fato de o potencial ter mais de um mínimo. Como a simetria subjacente é contínua, temos um conjunto infinito e contínuo de zeros do potencial.

Além da corrente elétrica conservada devido à invariância U(1) da lagrangeana, existe uma corrente topologicamente conservada

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \quad , \quad \partial_\nu J_T^\nu = 0 \quad , \quad (6)$$

que tem a carga associada

$$\phi = \int d^2x J_T^0 = \int d^2x B = \oint A_i dx^i \quad , \quad (7)$$

a qual não é outra coisa que o fluxo magnético total que atravessa o plano espacial (x^1, x^2) (no termo mais à direita em (7) a integral de linha é sobre uma curva plana no infinito). Isto porque em 3D o campo elétrico é o vetor $E_i = F_{0i}$ e o campo magnético é $B = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} F_{ij}$.

Os vórtices de Nielsen e Olesen [Nielsen e Olesen, 1973] são soluções das equações de movimento com energia finita e carga topológica (fluxo magnético) diferente de zero, duas propriedades que como já se discutiu estão muito ligadas. A construção dos vórtices segue as mesmas linhas que a dos kinks. Primeiro temos que identificar os mínimos do potencial (3), as quais são configurações do campo de Higgs da forma,

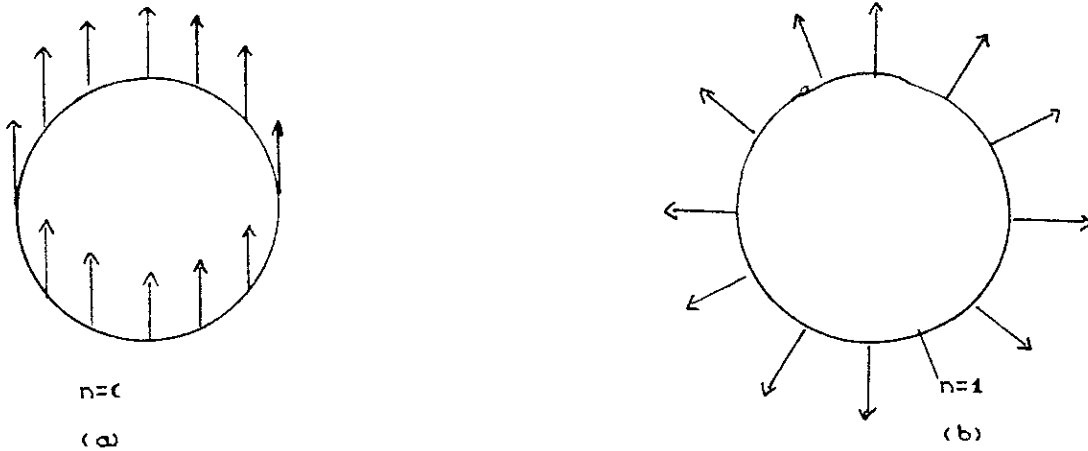
$$\Phi^m = \left(\frac{-2\mu^2}{h} \right)^{1/2} e^{i\alpha} \quad , \quad (8)$$

isto é, configurações com módulo constante e fase arbitrária.

Uma condição necessária para a solução ter energia finita é que o campo de Higgs a grandes distâncias da origem, tenda em cada direção a algum dos mínimos do potencial:

$$\Phi(x \rightarrow \infty) \rightarrow \left(\frac{-2\mu^2}{h} \right)^{1/2} e^{i\alpha(x)} \quad (9)$$

Duas possíveis condições de contorno estão representadas esquematicamente na (Fig 2-1).



Condições de contorno para vórtices

Fig 2-1

A energia neste modelo (da mesma forma que no eletromagnetismo em 4D) pode ser escrita unicamente em termos dos campos E e B que são invariantes de calibre. A condição de energia finita sobre o campo vetorial impõe que os campos E e B sejam nulos no infinito, o que quer dizer que o potencial tem que tender a um puro calibre,

$$A_\mu(x \rightarrow \infty) \rightarrow -\partial_\mu \alpha(x) \quad (10)$$

A invariância de calibre requer que $\alpha(x)$ seja a mesma em (9) e em (10). Para obtermos soluções estáveis que não possam decair nas soluções triviais temos que escolher $\alpha(x)$ de maneira tal que a carga topológica seja diferente de zero, dado que ela é

conservada. De (7) e (10),

$$\phi = \oint A_i dx^i = -\oint \partial_i \alpha(x) dx^i = -[\alpha(2\pi) - \alpha(0)] \quad (11a)$$

Como o campo escalar Φ tem o requerimento físico de ser univocamente definido a função α obedece à

$$\alpha(x+2\pi) = \alpha(x) + \frac{2n\pi}{e} \quad (11b)$$

e o fluxo magnético resulta quantizado em unidades de $2\pi/e$.

$$\phi = -\frac{2n\pi}{e} \quad (11c)$$

onde n é o chamado índice topológico da solução (ver (Fig 2.1)).

De soluções com o mesmo valor de ϕ , dizemos que pertencem à mesma classe de homotopia. Cada classe de homotopia pode ser pensada como formada por configurações como a da (Fig 2-1b), tais que o campo Φ dá o mesmo número de voltas sobre um eixo perpendicular ao plano, quando damos uma volta ao redor da origem. Intuitivamente é claro que duas soluções pertencentes a classes de homotopia diferentes (diferente número de voltas) não podem ser deformadas continuamente uma na outra, e isso é o que expressa a lei de conservação topológica.

Para construir a solução propriamente dita, escolhemos a função $\alpha(x)$, por exemplo

$$\alpha(x) = \arg(x) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (12)$$

e determinamos a dependência radial postulando que os campos têm o comportamento assintótico fixado por ela [Nielsen e Olesen, 1973].

$$A_l(x) = -A(x) \partial_l \alpha(x) \quad , \quad A(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \quad (13a)$$

$$\Phi(x) = f(x) e^{i\alpha(x)} \quad , \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{-2\mu^2/h} \quad (13b)$$

Este comportamento assintótico, que chamaremos comportamento assintótico dos vórtices clássicos, é da forma requerida pelas eqs. (9) e (10). Poder-se-ia pensar em obter uma condição de contorno trivial fazendo a transformação de calibre de parâmetro $-\alpha(x)$, mas então a estabilidade topológica se manifesta no fato de $\alpha(x)$ não estar definida no espaço todo, apresentando pelo menos uma singularidade. Não é portanto, uma função de calibre permitida. Nesse sentido podemos dizer que a singularidade de $\alpha(x)$, que no exemplo (12) está na origem, é a que garante a estabilidade do vórtice.

Introduzindo (13) nas equações de movimento encontra-se um conjunto de equações diferenciais acopladas que podem ser resolvidas em forma aproximada [Nielsen e Olesen, 1973]. Em coordenadas polares, θ e ρ temos que

$$\alpha(x) = \theta \quad (14)$$

e a solução aproximada está dada por:

$$A(\rho) \cong \frac{n}{e} \left[1 - e^{\sqrt{-2\mu^2/h} \rho} K_1(e^{\sqrt{-2\mu^2/h} \rho}) + \dots \right] \quad (15a)$$

$$f(\rho) \cong \sqrt{-2\mu^2/h} \left[1 + O(e^{-\sqrt{-2\mu^2/h} \rho}) \right] \quad (15b)$$

onde K_1 é a função de Bessel modificada de ordem 1. No caso particular,

$$\rho^2 = 2h \quad , \quad (16)$$

no qual a lagrangeana (1) é o setor bosónico de um sistema supersimétrico [Fayet,1976] é possível construir uma solução exata das equações de movimento [de Vega e Schaposnik, 1976]. O campo magnético H se calcula facilmente de (15) usando a simetria do sistema,

$$|H| = \frac{M}{\rho} K_0(M\rho) \quad (17)$$

onde M é a massa adquirida pelo bóson vetorial da teoria e K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero.

$$M^2 = -\frac{2e^2\mu^2}{h} \quad (18)$$

Como podemos ver de (15) e (17) a solução apresenta duas escalas $\lambda = \frac{1}{M}$ e $\xi = (-2\mu^2)^{-1/2}$ dadas pelo decaimento exponencial tanto de H como de Φ . Na teoria da supercondutividade, estes dois parâmetros são interpretados como o comprimento de penetração do campo magnético dentro de uma amostra supercondutora e o comprimento de coerência dos pares de elétrons. No MHA λ e ξ são, respectivamente, os comprimentos de de Broglie do fóton com massa e da partícula de Higgs.

Uma generalização possível destas soluções que além de carga magnética porta carga elétrica pode ser obtida ao acrescentar à lagrangeana o chamado termo de Chern-Simons [Paul e Khare,1986] [de Vega e Schaposnik,1986a,b].

2.3 O monopolo magnético

Para sistemas com simetria não abeliana a exigência de energia finita sobre as soluções clássicas leva a restrições sobre a

topologia do grupo de calibre em conexão com o espaço tempo no qual estamos trabalhando. Isto quer dizer que não é possível construir sólitons topológicos clássicos para todo grupo compacto. Neste capítulo consideraremos o mais simples dos sistemas não abelianos em quatro dimensões que admite sólitons topológicos, o qual é o modelo de Georgi-Glashow. Ele consiste de um tripleto de campos escalares acoplados a um tripleto de campos de calibre em forma invariante sob transformações de $O(3)$. Este modelo foi introduzido [Georgi e Glashow, 1972] como modelo de unificação sem correntes neutras antes da detecção experimental das mesmas. Para detalhes do modelo remetemos o leitor ao Apêndice E. Uma solução com energia finita para este modelo foi encontrada originalmente por Polyakov [Polyakov, 1975] e 't Hooft ['t Hooft, 1975], e devido ao fato de apresentar carga magnética é conhecida como o monopolo de 't Hooft-Polyakov. O monopolo de 't Hooft-Polyakov é estudado amplamente em vários artigos de revisão, por exemplo [Goddard, Olive, 1978] e [Actor, 1979].

O modelo de Georgi-Glashow está definido pela lagrangeana (ver também o Apêndice E)

$$L^{GG} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^a (D_\mu \Phi)^a - V(\Phi) \quad , \quad (1)$$

onde

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + e \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2a)$$

$$(D_\mu \Phi)^a \equiv (D_\mu \Phi)^a = \partial_\mu \Phi^a + e \epsilon^{abc} W_\mu^b \Phi^c \quad (2b)$$

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^a \Phi^a + \frac{h}{4} (\Phi^a \Phi^a)^2 + \frac{\mu^2}{4h} \quad (2c)$$

Em (1) e (2) Φ^a é o tripleto de campos escalares na

representação adjunta de $O(3)$, W_μ é o tripleto de campos de calibre. ϵ^{abc} é o tensor de Levi-Civita e μ, h e \bullet são constantes de acoplamento.

Para valores negativos de μ^2 o potencial clássico (2c) apresenta um conjunto contínuo de mínimos dados por

$$|\Phi^a \Phi^a| = -\frac{\mu^2}{h} \quad (3)$$

No espaço interno o isovetor Φ^a , na configuração que representa um dos mínimos, tem módulo constante, dado por (3), e pode apontar em qualquer direção. Vemos então que a variedade dos mínimos definida por (3) é isomorfa à esfera S_2 (a superfície esférica comum) pois cada ponto da esfera define uma e só uma direção. Como para os vórtices podemos fazer a análise sobre a densidade de energia das soluções a grande distância da origem e chega-se à conclusão que o campo W_μ^a tem que ser um puro calibre enquanto que o campo escalar em cada direção do infinito espacial tem que se aproximar a um dos mínimos (3). Pela forma das transformações de calibre do sistema ((E.8a) e (E.8b)) devemos ter

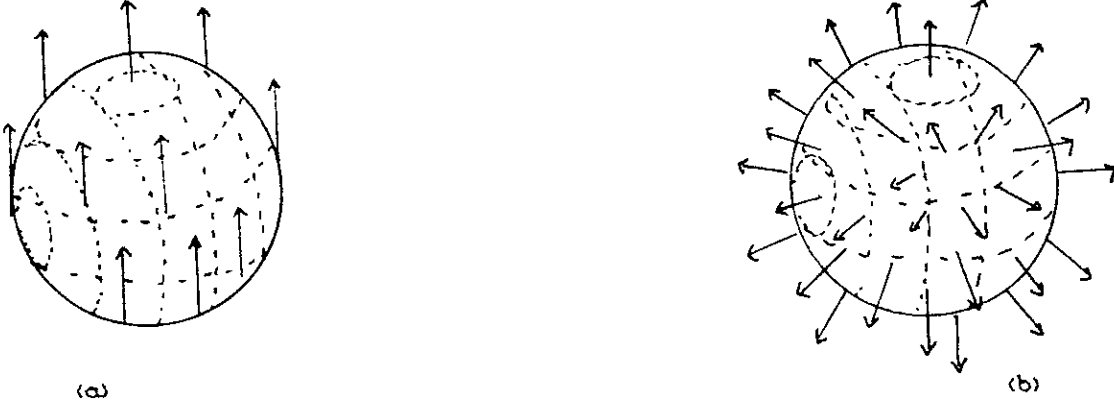
$$\Phi^a(\theta, \varphi, r) \longrightarrow \hat{v}^a(\theta, \varphi) \left[-\frac{\mu^2}{h} \right]^{1/2} \quad (4a)$$

$$T^a W_\mu^a(\theta, \varphi, r) \longrightarrow \frac{i}{\bullet} U(\theta, \varphi) \partial_\mu U^{-1}(\theta, \varphi) \quad (4b)$$

onde T^a são os geradores hermitianos de $O(3)$ e $U(\theta, \varphi)$ é um elemento de $O(3)$ que pode ser escolhido como a rotação que leva o vetor unitário \hat{z} no vetor unitário \hat{v} .

Para obter a solução com propriedades topológicas interessantes deve-se escolher $\hat{v}(\theta, \varphi)$, isto é, a configuração assintótica dos campos, de forma tal que não possa ser deformada continuamente na

condição de contorno dos mínimos absolutos (3). Representando cada ponto do infinito espacial por um ponto numa esfera na (Fig. 2-2) temos uma configuração que (vemos intuitivamente), satisfaz nosso requerimento.



O vácuo e o ouriço

Fig 2-2

Pelo aspecto da (Fig. 2-2b) Polyakov deu o nome de ouriço à solução que se encontra a partir desta condição de contorno. Com efeito para esta escolha temos

$$\Phi^a(\theta, \varphi, r) \longrightarrow \hat{r}^a(\theta, \varphi) \left[-\frac{\mu^2}{h} \right]^{1/2} \quad (5)$$

onde $\hat{r}(\theta, \varphi)$ é o versor na direção (θ, φ) . Em outras palavras (5) é o "mapeamento" topologicamente mais simples (a identidade) da esfera S_2 (do infinito espacial) na esfera S_2 (dos vácuos clássicos).

Para obter o comportamento assintótico de W_μ^a segundo (4c) temos que determinar a rotação $\mathcal{R}(\theta, \varphi)$ que leva o vetor unitário \hat{z} no vetor unitário \hat{r} , ou pictoricamente a (Fig 2-2a) na (Fig 2-2b). Para tanto lembremos (ver Apêndice G) que uma rotação genérica toma a forma

$$\mathcal{R} = e^{i\omega^a T^a} \quad (6)$$

sendo $w = \sqrt{\omega^a \omega^a}$ o ângulo da rotação e $\hat{n} = \hat{\omega}/\omega$, o vetor unitário na direção do eixo da rotação. A família de rotações que nos interessam é a que leva o versor \hat{z} no versor $\hat{r}(\theta, \varphi)$

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi) \hat{z} = \hat{r}(\theta, \varphi) \quad (7)$$

Portanto o ângulo da rotação será

$$\cos w(\theta, \varphi) = \hat{z} \cdot \hat{r}(\theta, \varphi) = \cos \theta$$

$$w(\theta, \varphi) = \theta \quad (8a)$$

e o versor do eixo \hat{n} será

$$\hat{n}(\theta, \varphi) = \frac{\hat{z} \times \hat{r}(\theta, \varphi)}{|\hat{z} \times \hat{r}(\theta, \varphi)|} = \frac{\hat{\varphi}}{\text{sen} \theta} \quad (8b)$$

Resumindo,

$$\omega^1(\theta, \varphi) = -\theta \text{sen} \varphi \quad (9a)$$

$$\omega^2(\theta, \varphi) = \theta \text{cos} \varphi \quad (9b)$$

$$\omega^3(\theta, \varphi) = 0 \quad (9c)$$

Na representação adjunta (ver Apêndice G)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\theta, \varphi) = \mathbb{1} + i \frac{\omega^a(\theta, \varphi)}{\omega(\theta, \varphi)} T^a \text{sen} w(\theta, \varphi) \\ - \left[\frac{\omega^a(\theta, \varphi)}{\omega(\theta, \varphi)} \right]^2 (1 - \text{cos} w(\theta, \varphi)) \quad (10a) \end{aligned}$$

podemos escrever a forma explícita

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta + \text{sen}^2\varphi(1 - \cos\theta) & -\text{sen}\varphi\cos\varphi(1 - \cos\theta) & -\cos\varphi\text{sen}\theta \\ -\text{sen}\varphi\cos\varphi(1 - \cos\theta) & \cos\theta + \cos^2\varphi(1 - \cos\theta) & -\text{sen}\varphi\text{sen}\theta \\ \cos\varphi\text{sen}\theta & \text{sen}\theta\text{sen}\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (10b)$$

Escolhendo um calibre no qual W_0^a seja zero e substituindo (10) em (4) encontramos a condição assintótica desejada:

$$\Phi(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{\mu^2}{h} \right]^{1/2} \mathcal{R}(\theta, \varphi) \hat{z} = \left[-\frac{\mu^2}{h} \right]^{1/2} \hat{r} \quad (11a)$$

$$T^a W_i^a(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i}{e} \mathcal{R}(\theta, \varphi) \partial_i \mathcal{R}^{-1}(\theta, \varphi) = -\frac{\varepsilon^{iab} \hat{r}^b}{er} T^a \quad (11b)$$

A solução propriamente dita é encontrada substituindo o ansatz,

$$\Phi(x) = \frac{\hat{r}}{r} H(e\sqrt{-\mu^2} r) \quad (12a)$$

$$W_i^a(x) = -\frac{\varepsilon^{iab} \hat{r}^b}{er} [1 - K(e\sqrt{-\mu^2} r)] \quad (12b)$$

nas equações de movimento e resolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias que resulta para $H(r)$ e $K(r)$, com as condições

$$\frac{H(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{\mu^2}{h} \right]^{1/2} \quad (13a)$$

$$K(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (13b)$$

Fazendo-se isto pode-se demonstrar que a solução encontrada é regular em todo ponto, incluindo a origem. Entretanto notemos que a transformação de calibre que corresponde ao elemento de grupo $\mathcal{R}(\theta, \varphi)$ que escrevemos acima é singular na origem. Por isso a solução encontrada não pode ser considerada como equivalente de calibre a nenhuma das soluções triviais.

Não é conhecida uma expressão explícita para $H(r)$ e $K(r)$. Os resultados numéricos (ver por ex. [Goddard e Olive, 1978 pag 1387]) indicam que analogamente ao caso dos vórtices, a solução apresenta duas escalas de comprimento definidas pelas distâncias para as quais o campo escalar e o campo de calibre tomam seus valores assintóticos. Tais escalas estão dadas pelos comprimentos de onda $1/M$ dos bósons de calibre com massa e $1/m$ das partículas de Higgs onde $M^2 = -\frac{e^2 \mu^2}{h}$ e $m^2 = -2\mu^2$.

Podemos ver que a solução é estável, já que temos que investir uma energia infinita para fazê-la decair numa das soluções triviais. Qual é a carga topológica conservada neste caso? Para responder a esta pergunta é mais simples recorrer à teoria quântica e lembrar que como a quebra da simetria é incompleta, um dos bósons de calibre, o "fóton", não adquire massa e o correspondente potencial pode dar origem a campos de longo alcance. A carga topológica como para os vórtices, é simplesmente o fluxo total do campo magnético associado a este potencial de longo alcance. Este fluxo, como veremos está quantizado mesmo na teoria clássica.

Quando se faz a quantização da teoria em torno de um único dos vácuos (4a) que chamamos Φ_{\min} (quer dizer na ausência de sólitons), o potencial eletromagnético (ou seja, a componente do tripleto de campos que não adquire massa) resulta ser

$$A_{\mu}^0 = \Phi_{\min}^a W_{\mu}^a \quad (15)$$

Com condições de contorno topologicamente não triviais a forma adequada de definir o campo eletromagnético é a partir do tensor de intensidade de campo [t Hooft, 1974a].

Uma definição invariante é ['t Hooft, 1974a]

$$F_{\mu\nu} = \hat{\Phi}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{\epsilon^{abc}}{\bullet |\Phi|^3} \Phi^a (D_\mu \Phi^b) (D_\nu \Phi^c) \quad (16)$$

onde $\hat{\Phi}^a = \frac{\Phi^a}{|\Phi|}$. Esta proposta é feita porque se efetuamos a transformação de calibre inversa a (10) em qualquer região que não inclua a origem então

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 \quad (17)$$

com A_μ^0 dado por (15). Este $F_{\mu\nu}$ é não singular e satisfaz as equações de Maxwell em todos os pontos nos quais $\Phi \neq 0$.

De (17) se obtém para valores grandes de r

$$E_j = F_{0j} = 0 \quad (18a)$$

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} = \frac{1}{2\bullet} \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_j \hat{\Phi}^b \partial_k \hat{\Phi}^c = \frac{\hat{r}^i}{r^2} \quad (18b)$$

O campo magnético associado com $F_{\mu\nu}$ é o de um monopolo localizado na origem apesar de não existir nenhuma corda de Dirac singular. A carga magnética é neste caso

$$g = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{\bullet} \quad (19)$$

Para uma solução geral se define a carga topológica

$$N = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{S}} F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \int_{\mathbf{S}} \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a \partial_j \hat{\Phi}^b \partial_k \hat{\Phi}^c dS_i \quad (20)$$

onde se usa o teorema de Stokes para eliminar a contribuição do primeiro termo em (17). Esta carga é insensível a variações do tipo $\Phi \longrightarrow \Phi + \delta\Phi$ que respeitem as condições de contorno. Para o

monopolo de 't Hooft Polyakov a carga topológica toma o valor $N=1$.

2.4 Quantização de sólitons

Antes de passar a discutir as ideias e métodos nos quais baseamos nosso trabalho, vamos mencionar brevemente as principais técnicas que têm sido utilizadas para tentar determinar as propriedades físicas dos sólitons quantizados.

A existência de sólitons clássicos numa teoria de campo é interpretada como uma indicação de que na correspondente teoria quântica aparecem novos setores no espaço de Hilbert associados aos distintos valores da carga topológica. Inicialmente [Dashen et al ,1974] o estudo dos sólitons quânticos foi abordado utilizando o assim chamado método da fase estacionária. Por exemplo, para um modelo com um campo escalar Φ que apresente uma solução tipo sóliton Φ_s , o cálculo de amplitudes na presença de um sóliton se faz expandindo o funcional gerador em torno da solução Φ_s . Se encontra

$$\left[Z[J] \right]_{\Phi_s} = e^{iS[\Phi_s, J]} \left[\left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \right]^{1/2} + \dots \right] \quad (1)$$

Em particular (por exemplo, [Rajaraman,1975]) identificando a ação efetiva Γ com a massa em repouso do sóliton se tem

$$M_s = S[\Phi_s] + \ln \left[\det \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \right]^{1/2} + \dots \quad (2)$$

Este esquema, mesmo que permita calcular algumas propriedades dos sólitons estáticos deve ser melhorado quando se quer levar em conta o conjunto completo de soluções. O motivo é que a translação que se faz na integral funcional para obter (1) quebra em geral as

simetrias do problema (tipicamente a invariância sob translações) e, conseqüentemente, aparecem modos zeros que fazem que o determinante em (2) não esteja bem definido. Para contornar este problema usualmente se introduzem coordenadas coletivas que promovem a graus de liberdade quânticos os parâmetros de simetria das soluções. Por exemplo a invariância sob translações permite a introdução de operadores de posição e momentum para os sólitons. Este esquema tem sido de particular utilidade [Adkins et al, 1983] no estudo dos sólitons do modelo σ não linear, os chamados skyrmions [Witten, 1982]. Um tratamento alternativo consistente em regularizar diretamente nas amplitudes as divergências decorrentes dos modos zeros foi proposto em [Fadeev e Korepin, 1976], [Matveev, 1977] e [Abbot, 1978].

Para sistemas com potencial periódico uma generalização da fórmula de WKB foi obtida por Dashen et al [Dashen et al, 1975] e utilizada para calcular o espectro de energias dos estados ligados sóliton antisóliton no modelo de Sine Gordon.

O método das coordenadas coletivas foi tratado dentro do esquema da quantização canônica em [Christ e Lee, 1977] e [Tomboulis, 1975]. Este método também está relacionado com o cálculo variacional feito por Cahill [Cahill, 1974] da massa dos sólitons utilizando estados coerentes.

Jackiw e Goldstone [Goldstone e Jackiw, 1975] [Jackiw, 1977] desenvolveram um método complementar ao método da fase estacionaria que em particular permite interpretar a solução clássica como a transformada de Fourier do fator de forma dos sólitons $f(P, P') = \langle P | \Phi(0) | P' \rangle$. Um tratamento rigoroso da estrutura do espaço de Hilbert foi dado por Fröhlich [Fröhlich, 1976] quem mostrou a necessidade de considerar os setores de sólitons para

obter completeza assintótica.

2.5 Quantização de sólitons em teorias de calibre

A generalização para teorias de calibre em 3-D e 4-D dos métodos mencionados na seção anterior mesmo que não apresente em princípio novas dificuldades conceituais resulta em cálculos muito mais complicados devido à natureza contínua das simetrias envolvidas e ao fato de que em geral não se possui uma forma fechada para o sóliton destas teorias. O método das coordenadas coletivas por exemplo foi desenvolvido para teorias de gauge (com muito menos sucesso que em 2-D) por Tomboulis e Woo [Tomboulis e Woo, 1976] e o método de Cahill utilizando estados coerentes foi generalizado para o MHA por Pottinger [Pottinger, 1978].

Outros métodos foram desenvolvidos explicitamente para tentar lidar com os vórtices e monopolos quânticos. Bardakci e Samuel [Bardakci e Samuel, 1978] [Bardakci, 1979] aproveitam a liberdade de calibre para reescrever as amplitudes em presença de vórtices em termos de campos com topologia trivial e graus de liberdade adicionais que dão conta da carga topológica. A lagrangeana resultante apresenta problemas de renormalizabilidade. Um tratamento parecido foi utilizado por Mansfield [Mansfield, 1986] quem também consegue dar algum suporte à identificação dos vórtices de Nielsen e Olesen com a corda dos modelos duais. Outros tratamentos interessantes incluem simulações na rede utilizando a vorticidade com o parâmetro de ordem para estudar as transições de fase do sistema (ver [Amaral e Pol, 1988] e referências ali citadas) e o tratamento mais rigoroso dado por Ezawa ao problema da existência de operadores de sólitons [Ezawa, 1978] [Ezawa, 1979]. O problema dos instantons bidimensionais associados aos vórtices

do MHA em 3-D é estudado por Schaposnik [Schaposnik, 1978] generalizando as técnicas propostas por Polyakov [Polyakov, 1977]. Mais relacionados com as idéias de dualidade que discutiremos no próximo capítulo estão os trabalhos de 't Hooft ['t Hooft, 1978,1979,1981] e Mandelstam [Mandelstam,1975b,1979] e os trabalhos na rede de Peskin [Peskin,1978] e Einhorn e Savit [Einhorn e Savit,1979].

CAPÍTULO 3

Dualidade ordem-desordem

O conceito de dualidade, isto é a possibilidade de poder descrever um sistema físico com um novo conjunto de variáveis "duais" às variáveis originais, tem tido muita importância na compreensão das propriedades físicas de sistemas de Mecânica Estatística e, mais recentemente, de modelos de Teoria de Campos. Neste capítulo, tendo em mente a generalização que faremos destas idéias para sistemas em dimensão arbitrária, vamos revisar brevemente como é que o conceito de dualidade e o comportamento das variáveis duais pode ser utilizado para estudar as propriedades de sistemas de Mecânica Estatística e em Teoria de campo em duas e tres dimensões.

3.1 Dualidade no modelo de Ising em $D=2$

Em 1941 Kramers e Wannier [Kramers e Wannier, 1941] construíram uma transformação que permite escrever o modelo de Ising $D=2$ como um outro modelo de Ising cuja temperatura é uma função monotonamente decrescente da temperatura do modelo original. Esta transformação que se conhece pelo nome de transformação de dualidade foi generalizada para outros sistemas de Mecânica Estatística. Em particular, pode-se generalizar para praticamente qualquer sistema com simetrias abelianas em dimensão arbitrária (ver o artigo de revisão [Savit, 1980]). As idéias de dualidade foram exploradas também por Alcaraz e Köberle [Alcaraz e Köberle,

1980] [Alcaraz, 1980] para o estudo de modelos de spins a duas dimensões e de calibre a quatro dimensões com simetria $Z(N)$.

No modelo de Ising e em outros modelos que apresentam uma transição de fase paramagnética-ferromagnética, os operadores duais podem ser interpretados como variáveis de desordem no sentido de que estes operadores apresentam valor esperado nulo na fase ("ferromagnética") na qual a variável de ordem tem valor esperado diferente de zero e , pelo contrário, apresentam valor esperado diferente de zero na fase desordenada ("paramagnética").

A partir do trabalho de Kosterlitz e Thouless [Kosterlitz e Thouless, 1973] e dos trabalhos de Kogut e Fradkin [Fradkin e Susskind, 1978] [Kogut, 1979] e de Jose et al [Jose et al, 1977] se sabe que existe uma estreita relação entre a estrutura ordem-desordem, a existência de excitações topológicas e o diagrama de fase dos modelos. As excitações topológicas são configurações do sistema com energia finita e estáveis devido às propriedades topológicas do sistema. O quadro físico que se tem , identifica as variáveis duais ou operadores de desordem como operadores de criação das excitações topológicas quânticas e interpreta a transição de fase do sistema como uma condensação das ditas excitações [Kosterlitz e Thouless, 1973] [Kogut, 1979].

Dada esta interpretação é natural que as variáveis de ordem e de desordem cumpram relações de comutação particulares compatíveis com as propriedades espaço temporais dos sólitons. A identificação desta álgebra dita dual [Kadanoff e Ceva, 1971] entre as variáveis de ordem e de desordem é um passo fundamental para a caracterização das variáveis de desordem.

A álgebra dual entre as variáveis de ordem e desordem do modelo

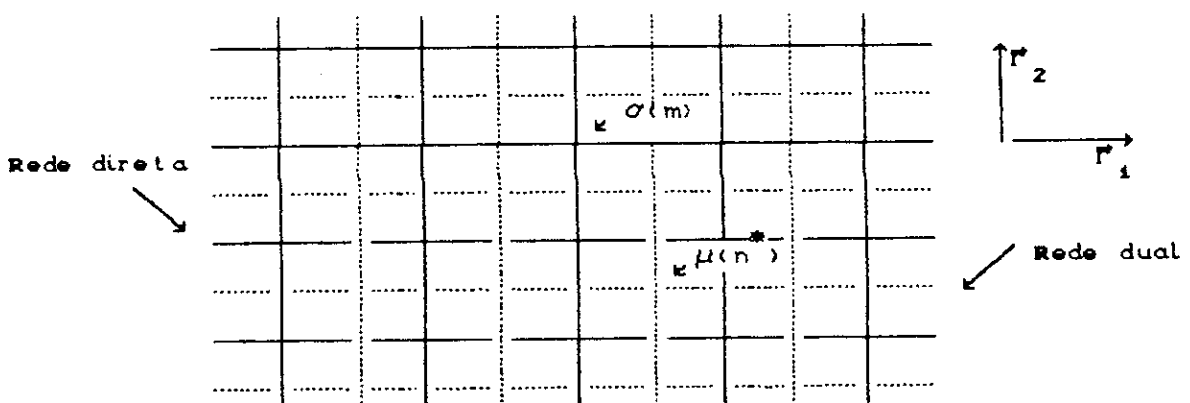
de Ising foi estabelecida por Kadanoff e Ceva [Kadanoff e Ceva, 1971] num trabalho que também inclui a prescrição para o cálculo das funções de correlação das variáveis de desordem. Para dar uma descrição mais concreta de como funcionam estas idéias vamos considerar explicitamente este sistema.

O modelo de Ising numa rede quadrada é um sistema de spins clássicos $\sigma(n)$ colocados nos vértices da rede. Cada $\sigma(n)$ pode tomar os valores ± 1 . A interação é ferromagnética entre primeiros vizinhos e supomos que o sistema se encontra em equilíbrio térmico. A energia do sistema é dada por

$$S = - \sum_{\text{sitios}} \left(\beta_1 \sigma(n+\mathbf{r}_1) \sigma(n) + \beta_2 \sigma(n+\mathbf{r}_2) \sigma(n) \right) \quad (1a)$$

onde \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são os versores nas duas direcções da rede e a função de partição é dada por

$$Z = \sum_{\langle \sigma \rangle} e^{-S[\sigma]} \quad (1b)$$



A rede e as variáveis duais

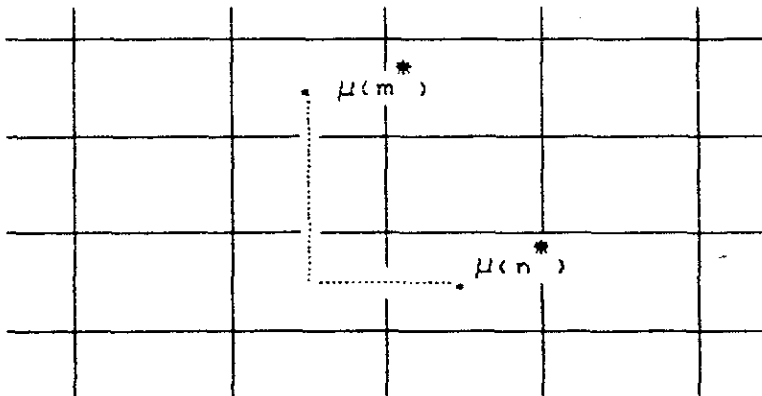
Fig 3-1

A rede dual se define agora de tal forma que os seus pontos

estejam deslocados meio espaçamento de rede com respeito aos originais (ver (Fig 3-1)).

Para introduzir as variáveis de desordem, Kadanoff e Ceva consideram uma função de partição $Z^{\mathcal{C}}$ modificada pelo que eles chamam de defeito magnético. Ela se calcula mudando em S os sinais dos acoplamentos β_1 e β_2 transversos a um caminho \mathcal{C} na rede dual (ver Fig (3-3)). Devido a que então é energeticamente favorável para os spins com acoplamentos modificados ficarem apontando em direções opostas enquanto que para os outros continua sendo favorável manter-se alinhados a modificação feita vai favorecer a criação de paredes de Bloch. As variáveis de desordem associadas a estas paredes de Bloch se introduzem definindo as funções de correlação de dois pontos da seguinte forma:

$$\langle \mu(n^*) \mu(m^*) \rangle = \frac{Z^{\mathcal{C}}}{Z} \quad (2a)$$



Funções de correlação das variáveis de desordem

Fig 3-2

Levando agora um dos extremos do caminho \mathcal{C} até o infinito em alguma direção, vemos que a presença de uma variável de desordem no ponto n^* tem o efeito de mudar o sinal do acoplamento β_2 ao

longo de uma linha que vai de n^* até o finito. No caso particular $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ temos então

$$\langle \mu(n^*) \mu(m^*) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\langle \sigma \rangle} e^{-S[\sigma]} e^{2S^{\mathcal{C}}[\sigma]} \quad (2a)$$

com

$$S^{\mathcal{C}}[\sigma] = \beta \sum_{\mathcal{C}} \sigma(n) \sigma(n+r_u) \quad , \quad r_u \in \mathcal{C} \quad (3)$$

onde \mathcal{C} é o caminho arbitrário. Considerando um outro caminho \mathcal{C}' na rede dual que conete também n^* e m^* e fazendo na soma que define $Z^{\mathcal{C}}$ a mudança de variáveis $\sigma \rightarrow -\sigma$ para os σ 's contidos pela curva fechada $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$, é fácil convencer-se que a função de correlação (2) independe da escolha de \mathcal{C} .

Usando as chamadas técnicas hamiltonianas, isto é, fazendo o limite no qual o espaçamento na direção de \hat{r}_2 ("o tempo") é zero, se mostra que este sistema é equivalente ao sistema quântico descrito por uma cadeia de operadores quânticos de spin $\hat{\sigma}(n)$ sobre uma rede unidimensional com hamiltoniana [Kogut, 1979].

$$H = -\lambda \sum_n \hat{\sigma}_3(n+1) \hat{\sigma}_3(n) - \sum_m \hat{\sigma}_1(m) \quad (4)$$

que tem a simetria

$$\sigma_3 \rightarrow -\sigma_3 \quad (5)$$

Isto significa que a função de partição do sistema pode-se escrever a partir da hamiltoniana do sistema unidimensional na forma [Kogut, 1979]

$$Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr } T^n \quad (6)$$

onde T é a matriz de transferência

$$T = e^{-\tau H} \quad (7)$$

(τ é o "tempo" contínuo).

Para construir o espaço de estados do sistema quântico temos em cada ponto da reta um spin $1/2$ com estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Atuando sobre estes estados temos operadores $\hat{\sigma}_i(n)$ ($i=1,2,3$) que comutam para $n \neq n'$ e cumprem a álgebra do momento angular para cada n fixo. Definindo também neste caso uma rede dual deslocada meio espaço de rede com respeito a rede direta é fácil verificar que os operadores duais definidos por

$$\hat{\mu}_1(n^*) = \hat{\sigma}_3(n+1) \otimes \hat{\sigma}_3(n) \quad (8a)$$

$$\hat{\mu}_3(n^*) = \prod_{m < n} \hat{\sigma}_1(m) \quad (8b)$$

cumprem também a álgebra de $SU(2)$. A transformação de dualidade neste caso consiste em reescrever a hamiltoniana (4) em termos das variáveis $\hat{\mu}$. O resultado é

$$H = -\lambda \sum_n \left[\hat{\mu}_3(n^*+1) \hat{\mu}_3(n^*) + \frac{1}{\lambda} \sum_m \hat{\mu}_1(m^*) \right] \quad (9)$$

O fato de que o coeficiente do termo de alinhamento se transforme na forma $\lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda}$ sob a dualidade leva ao comportamento relativo das temperaturas do modelo de Ising direto e dual mencionado no começo.

A variável dual $\hat{\mu}_3(n^*)$ e as variáveis de ordem $\hat{\sigma}_3(m)$ satisfazem as regras de comutação

$$\hat{\mu}_3(n^*) \hat{\sigma}_3(m) = -\hat{\sigma}_3(m) \hat{\mu}_3(n^*) \quad m < n^* \quad (10a)$$



$$\hat{\mu}_g(n^*)\hat{\sigma}_g(m) = \hat{\sigma}_g(m)\hat{\mu}_g(n^*) \quad m > n^* \quad (10b)$$



Os estados ordenados



O kink e o antikink

Fig 3-3

Levando em conta a simetria $Z(2)$ do sistema vemos que $\hat{\mu}_g(n^*)$ aplica a operação de simetria em $\hat{\sigma}_g(m)$ quando este se encontra à esquerda e o deixa inalterado quando se encontra à direita. Desta consideração ou diretamente da definição (8b) vemos que atuando sobre um estado totalmente ordenado o operador $\hat{\mu}_g(n^*)$ cria um "kink" centrado em n (ver (Fig 3-3c)).

Um estado desordenado pode então ser pensado como um condensado de kinks e antikinks o que completa o quadro físico de que falávamos anteriormente.

3.2 Dualidade em modelos bidimensionais

O conceito de dualidade resulta também de grande utilidade na discussão das propriedades físicas de modelos de Teoria de Campos em duas dimensões [Marino e Swieca, 1980], [Marino, 1980], [Marino et al, 1982]. A dualidade em tais modelos aparece estreitamente ligada com a bosonização, isto é a equivalência que existe entre bósons e férmions em duas dimensões.

O mecanismo de bosonização de fermions aparece nos trabalhos de

Klaiber [Klaiber, 1966] sobre o modelo de Thirring e de Swieca e Lowenstein sobre o modelo de Schwinger [Swieca e Lowenstein, 1971], e no trabalho de Coleman [Coleman, 1975] quem mostrou a equivalência do modelo de Thirring com massa com o sistema de Sine Gordon. Mandelstam [Mandelstam, 1975a] imediatamente depois foi capaz de fornecer uma realização completa desta equivalência ao construir explicitamente o operador fermiônico Ψ em termos do campo de Sine Gordon Φ . O chamado operador de Mandelstam Ψ pode ser interpretado como o operador de criação dos kinks do sistema de Sine Gordon.

Marino e Swieca [Marino e Swieca, 1980], [Marino, 1980] introduziram as idéias de dualidade no estudo de sistemas de Teoria de Campos em duas dimensões mostrando que para o modelo de Thirring o operador Ψ pode-se pensar como o produto das variáveis de ordem e desordem do sistema de Sine Gordon. Utilizando integrais de trajetória eles reproduziram a solução de Klaiber para as funções de Schwinger do sistema. Aplicaram também um tratamento análogo para o modelo de Schwinger.

Posteriormente Marino, Schroer e Swieca [Marino et al., 1982] generalizaram estas idéias para um sistema de campos escalares Φ e Φ^* com simetria $Z(N)$. Partindo da analogia entre a representação com integrais de trajetória no espaço euclideo do funcional de vacuo e a função de partição de um sistema de Mecânica Estatística, eles mostraram que a generalização dos métodos de Kadanoff e Ceva permite construir as funções de correlação das variáveis de desordem dos modelos com simetria $Z(N)$. Para representar a presença de um kink (variável de desordem) no ponto x , eles introduziram defeitos tipo corda ao longo de um caminho \mathcal{C}

que vai do ponto x até infinito. Impondo invariância sob a escolha de caminho é possível então mostrar que a expressão para as funções de correlação das variáveis de desordem corresponde a fazer um acoplamento mínimo com um potencial externo de Aharonov-Bohm com suporte sobre os caminhos C . Ou seja:

$$\langle \mu(x_1) \dots \mu(x_n) \mu^*(y_1) \dots \mu^*(y_m) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int D\Phi D\Phi^* e^{-S[\Phi, \Phi^*, D_\mu \Phi, (D_\mu \Phi)^*]} \quad (1a)$$

onde $-S[\Phi, \Phi^*, D_\mu \Phi, (D_\mu \Phi)^*]$ é a ação do modelo $Z(N)$ e o acoplamento mínimo está dado por

$$D_\mu = \partial_\mu - i\alpha A_\mu(z; x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_m) \quad (1b)$$

e

$$A_\mu(z; x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_m) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_i}^{\infty} \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(z-\xi) d\xi^\nu - \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}_j}^{\infty} \epsilon_{\mu\nu} \delta^2(z-\xi) d\xi^\nu$$

onde $\alpha = \frac{1}{N}$ parametriza uma transformação $Z(N)$ e $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita. Neste caso a independência de caminho aparece como uma consequência da invariância de calibre.

A partir de (1a) particularizando para a função de dois pontos pode recuperar-se uma expressão operatorial para μ em termos de Φ . Pode-se verificar então que μ e Φ satisfazem uma álgebra dual completamente copm (3.1.10). Esta álgebra se manifesta na formulação funcional pelo fato da invariância de caminho das funções mixtas $\langle \mu \Phi \Phi^* \mu \rangle$ só pode ser conseguida a menos de fatores $e^{i2\pi/N}$ que correspondem a transformações $Z(N)$.

A identificação das variáveis de desordem μ com os operadores de

criação de excitações topológicas, e o fato de que estas, ao condensarem-se, dão origem a transições de fase, fazem com que o valor esperado $\langle \mu \rangle$ forneça informação importante sobre a estrutura de fases do sistema. Em particular em [Köberle e Marino, 1983] se prova o seguinte *Teorema* para modelos bidimensionais:

Teorema de Köberle e Marino

Para um modelo bidimensional arbitrário com variáveis de ordem Φ e de desordem μ que satisfazem uma álgebra dual tem-se que

$$\langle \Phi \rangle \langle \mu \rangle = 0 \quad (2)$$

Temos então as seguintes possibilidades

$$\begin{array}{lll} \langle \Phi \rangle = 0 & , & \langle \mu \rangle \neq 0 \quad \text{desordenada} \\ \langle \Phi \rangle \neq 0 & , & \langle \mu \rangle = 0 \quad \text{ordenada} \\ \langle \Phi \rangle = 0 & , & \langle \mu \rangle = 0 \quad \text{Kosterlitz-Thouless} \end{array} \quad (3)$$

Para a fase tipo Kosterlitz-Thouless o *Teorema de Köberle e Marino* estabelece ainda que o "gap de massa" é nulo.

Um sistema no qual é possível verificar a validade deste *Teorema* é o sistema de campos escalares com simetria $O(N) \times Z(4)$ estudado por Marino [Marino, 1983]. Este sistema apresenta uma fase ordenada na qual a simetria $O(N) \times Z(4)$ é preservada e uma fase tipo Kosterlitz-Thouless na qual a simetria $Z(4)$ é quebrada a uma simetria $Z(2)$. O teorema de Coleman-Mermin-Wagner [Coleman, 1973] [Mermin e Wagner, 1966] impede que exista uma fase em que a simetria $Z(4)$ seja totalmente quebrada porque nesse caso a simetria contínua $O(N)$ também seria quebrada. Nas duas fases deste sistema a consistência das relações (3) com os cálculos de potencial efetivo pode ser verificada. Em completo acordo com o

teorema geral o "gap de massa" na fase em que $\langle \Phi \rangle = \langle \mu \rangle = 0$ é nulo.

Para contornar as limitações impostas pelo teorema de Coleman-Mermin-Wagner é conveniente considerar uma variação do sistema discutido nos parágrafos anteriores que só apresente uma simetria $Z(4)$ [Marino, 1984]. O estudo do potencial efetivo e das funções de correlação de ordem e desordem deste sistema permite estabelecer a existência de tres fases: uma fase ordenada com simetria $Z(4)$, uma fase tipo Kosterlitz-Thouless na qual a simetria $Z(4)$ é espontaneamente quebrada a uma $Z(2)$, e uma fase desordenada na qual a simetria $Z(4)$ é completamente quebrada.

Na fase simétrica as variáveis de desordem têm um comportamento trivial. Na fase com a simetria parcialmente quebrada o decaimento tipo potência da função de correlação de dois pontos das variáveis de desordem indica que kinks de massa zero acham-se presentes no espectro do sistema (Note-se que novamente o gap de massa é zero nesta fase). É interessante mencionar que recentemente Macedo e Marino [Macedo e Marino, 1988] calcularam as correções de temperatura finita a esta massa.

3.3 Os sistemas duais de 't Hooft

O fato de termos considerado modelos bidimensionais, isto é, modelos para os quais o espaço-tempo tem uma única dimensão espacial tem sido fundamental para que tanto as variáveis de ordem como as de desordem possam ser definidas em forma local. Relaxar esta condição, quer dizer admitir que a dimensão do setor espacial possa ter duas, três ou mais dimensões implica na necessidade de utilizar operadores de ordem ou de desordem não locais. Na próxima seção vamos discutir como, introduzindo operadores de desordem não

locais, podem estender-se [Marino, 1988] as idéias de dualidade a modelos de teoria de campos abelianos em três dimensões. No resto deste trabalho, no que constitui a nossa contribuição original, nos importaremos com a generalização destas idéias a modelos em dimensão arbitrária com simetrias não abelianas. No entanto nesta seção vamos resenhar brevemente o trabalho de 't Hooft ['t Hooft, 1978] no qual ele faz uso da estrutura dual ordem desordem em cromodinâmica para discutir alguns aspectos importantes como confinamento de quarks principalmente. Embora 't Hooft não ataque o problema da dinâmica quântica das variáveis de desordem, o enfoque que ele dá ao problema tem sido fundamental para nossa compreensão do significado das variáveis de desordem em sistemas com leis de conservação topológicas.

't Hooft ['t Hooft, 1978] considera um sistema de Yang-Mills com campos de Higgs Φ numa representação do grupo $U(N)/Z(N)$. Na fase na qual a simetria é completamente quebrada a existência de soluções tipo sóliton faz supor que o espaço de Hilbert apresenta novos setores nos quais estes sólitons se realizam quanticamente como partículas.

Em 3-D a presença de um desses sólitons fica caracterizada pelo comportamento dos campos em curvas espaciais, isto é, pela condição de contorno. A formulação quântica da dinâmica dos sólitons neste caso pode depender destas curvas de duas formas diferentes. Em primeiro lugar é possível dar conta do sóliton introduzindo variáveis de desordem que dependam de curvas fechadas [Marino, 1988] (ver a seção seguinte). A formulação alternativa que foi a seguida por 't Hooft é considerar variáveis de ordem não locais, ou seja, utilizar os laços de Wilson definidos por

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \text{Tr} \mathbb{P} e^{i g \oint_{\mathcal{C}} W_{\mu}(x) dx^{\mu}} \quad (1)$$

Conde \mathbb{P} significa ordenamento ao longo da curva \mathcal{C} em lugar dos campos de calibre W_{μ} . Pode-se então introduzir variáveis de desordem locais Φ com simetria $Z(N)$, novamente interpretadas como operadores de criação dos sólitons. Estas variáveis ficam caracterizadas pela álgebra dual a tempos iguais

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) \Phi(x) = \Phi(x) \mathcal{W}(\mathcal{C}) e^{i \frac{2\pi n}{N}} \quad (2)$$

onde \mathcal{C} é uma curva tipo espaço e n é o numero de voltas que \mathcal{C} dá em torno de x . A relação (2) pode ser interpretada também no contexto da teoria $Z(N)$ com campos fundamentais Φ . Nesse caso $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ resulta ser a variável de desordem pois aplica ou não a transformação de simetria sobre $\Phi(x)$ dependendo de se x está ou não contido em \mathcal{C} . Este fato é explorado em [Aragão et al, 1987] para calcular o valor esperado do laço de Wilson no contexto da teoria dual (ver o capítulo 5).

Em 4-D como veremos no capítulo 6 para sistemas com sólitons pontiformes é natural escolher variáveis de desordem que dependam de superficies fechadas sendo que nesse caso é possível utilizar os campos fundamentais que são locais como variáveis de ordem. Insistindo em utilizar o laço de Wilson como variável de ordem, 't Hooft se acha obrigado a introduzir variáveis de desordem que também são não locais o chamado laços de 't Hooft. Os laços de 't Hooft $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ são também operadores definidos sobre curvas fechadas \mathcal{C} A álgebra dual neste caso é então

$$\mathcal{W}(\mathcal{C})\mathcal{B}(\mathcal{C}') = \mathcal{B}(\mathcal{C}')\mathcal{W}(\mathcal{C})e^{i\frac{2\pi n}{N}} \quad (3)$$

onde agora n é o número de vezes que a curva \mathcal{C}' gira em torno de \mathcal{C} numa determinada direção.

't Hooft utiliza o fato das variáveis de ordem e desordem do sistema decaírem (para curvas \mathcal{C} grandes) como a exponencial do perímetro ou da área da curva para caracterizar as distintas fase do sistema. No caso em que a variável de ordem decai como o perímetro e a de desordem decai como a área se tem o modo de Higgs no qual todas as partículas têm massa. No caso contrário em que a variável de ordem é a que decai como a área se tem uma fase em que os graus de liberdade de cor são confinados. Por último pode-se ter uma fase na qual o mecanismo de Higgs quebre a simetria U(1) parcialmente. Nesse caso tanto a variável de ordem quanto a de desordem decairão exponencialmente como a área da curva.

3.4 O método de Quantização dos vórtices

Para a generalização das idéias de dualidade a sistemas em 3-D uma diferença fundamental que aparece em relação ao que ocorre em 2-D é a necessidade que se tem, para a completa descrição do sistema de definir operadores não locais, que vão depender de um ponto x e de uma curva fechada espacial.

Nesta seção trabalhando com o Modelo de Higgs Abelian (MHA), (ver Apêndice C e seção 2.2) vamos descrever o método [Marino, 1988] que generaliza a 3-D as idéias de dualidade ordem-desordem.

Da mesma forma como em 2-D ou no modelo de Ising, no MHA existem variáveis de desordem μ necessárias para a completa descrição da teoria. A não trivialidade destas variáveis está

vinculada à existência dos sólitons estáveis na teoria clássica sendo por isso interessante estudá-las no MHA já que este pode sustentar vórtices clássicos estáveis. As variáveis de desordem são interpretadas (na fase em que a simetria é quebrada e que tais vórtices existem classicamente) como os operadores de criação e aniquilação dos vórtices quânticos a menos de possíveis fatores que determinam as propriedades de transformação sob o grupo de Poincaré. Se está supondo então uma estrutura do espaço de Hilbert similar à que Frohlich [Frohlich,1976] mostra rigorosamente que existe nos modelos bidimensionais e que como se viu nas seções anteriores tem no conceito de dualidade uma descrição natural. Mas, qual é a forma da álgebra dual em três dimensões?. Para responder a esta pergunta é bom voltar ao contexto clássico. Em três dimensões a caracterização de um vórtice precisa da especificação do comportamento dos campos em toda uma curva, a fronteira no infinito espacial, e não apenas de um número finito de pontos como ocorre em 2-D. Assim, enquanto que em 2-D o operador de desordem é local e a álgebra dual entre $\mu(y)$ e $\Phi(x)$ pode se basear na noção de x ficar à esquerda ou à direita de y , em 3-D esta noção não tem mais sentido e a que a substitui é, ao considerar a relação de comutação entre $\mu(x, \mathcal{C})$ e $\Phi(y)$, a de o ponto y ficar dentro ou fora da área \mathcal{J} limitada pela curva \mathcal{C} . A álgebra dual a tempos iguais entre as variáveis de desordem $M(y, \mathcal{C})$ e as variáveis de ordem Φ e A_μ toma a forma [Marino, 1988]

$$\mu(y, \mathcal{C}) \Phi(x) = e^{-i\alpha(x) \Theta_2(x, \mathbb{R}^2 - \mathcal{J})} \Phi(x) \mu(y, \mathcal{C}) \quad (1a)$$

$$\mu(y, \mathcal{C}) A_\nu(x) = \left[A_\nu(x) + \frac{1}{e} \Theta_2(x, \mathbb{R}^2 - \mathcal{J}) \partial_\nu \alpha(x) \right] \mu(y, \mathcal{C}) \quad (1b)$$

onde $\theta_2(\mathbb{R}^2 - \mathcal{J})$ é a função bidimensional de Heaviside com suporte no complemento do disco \mathcal{J} com respeito a \mathbb{R}^2 e $\alpha(x)$ é uma função na classe de homotopia que tem índice topológico 1. O ponto y do qual depende o operador de desordem μ corresponde à localização da singularidade da função α . Para justificar (1) reparemos que $\mu(y, \mathcal{C})$ impõe sobre os campos $A_\mu(x)$ e $\Phi(x)$ o comportamento assintótico (2.2.13) da configuração clássica do vórtice, sómente quando x esta fora do disco \mathcal{J} , ou seja, figurativamente quando x esta fora do vórtice. A álgebra (1) deve ser generalizada para tempos diferentes. Isto em princípio teria que ser feito a partir das equações de evolução, como se faz com a função de Pauli-Jordan usualmente. No entanto a distância entre o ponto (x, t) e os pontos da curva \mathcal{C} é tipo espaço podemos fazer a seguinte generalização: Para $t' \geq t$ simplesmente se troca (x, t) por (y, t') em (1). Para $t' < t$ os operadores por motivos de causalidade devem comutar:

$$\left[\mu(y, t, \mathcal{C}), \Phi(x, t') \right] = 0 \quad (2a)$$

$$\left[\mu(y, t, \mathcal{C}), A_i(x, t') \right] = 0 \quad (2b)$$

A consistência destas relaciones de conmutação fica garantida pelo fato que quando se faz uma transformação de Lorentz a ordem temporal relativa dos pontos tipo espaço respecto a \mathcal{C} não se altera

A descrição da estrutura interna do vórtice, que viria dada pelo que ocorre no disco \mathcal{J} , é inalcançável nesta formulação. Em princípio podemos supor que em analogia com o que acontece em alguns dos modelos bidimensionais, nos quais o operador do sóliton escrito em termos das variáveis de ordem satisfaz uma equação de

movimento cuja lagrangeana pode ser identificada (O operador de Mandelstam no modelo Sine-Gordon-Thirring por exemplo), aqui também seria possível em princípio obter uma descrição do sistema com o campo μ como variável fundamental. Em tal descrição, provavelmente perderíamos informação sobre o setor "normal" da teoria. As dificuldades matemáticas afastam por enquanto esta possibilidade pelo que esta linha não vai ser pesquisada no que se segue mas é bom destacar que a forma natural de fazê-lo, uma vez que se tenha uma representação operatorial para $\mu(x, \mathcal{E})$, é calcular a equação de movimento de Heisenberg

$$i\partial_t \mu(y, t, \mathcal{E}) = \left[\mu(y, t, \mathcal{E}), H \right] ,$$

onde H é a hamiltoniana do MHA.

Consideremos agora o cálculo da função de correlação de variáveis de desordem centradas em pontos do espaço tempo x e y . Para introduzir as propriedades topológicas do sistema dentro da formulação vamos considerar uma função de calibre α que pertence à classe de homotopia com $n=1$. Suporemos também que ela é compatível com os requerimentos de causalidade (2). Por exemplo

$$\alpha(z; x, y) \equiv \Theta(x^0 - z^0) \arg(z - x) - \Theta(z^0 - y^0) \arg(z - y) \quad (3a)$$

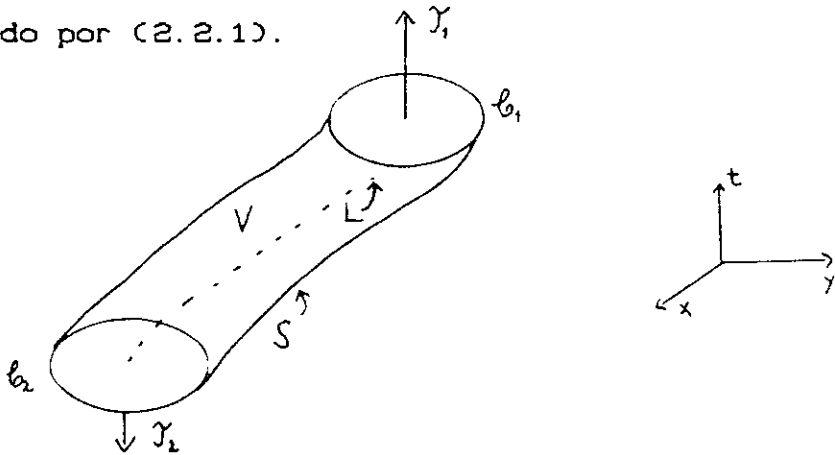
que se interpreta como representando um vórtice em (x^0, x) e um antivórtice em (y^0, y) . O campo magnético que corresponde ao último termo em (7a) é o de duas cordas de Dirac indo de $(-\infty, x)$ a (x^0, x) e de (y^0, y) a (∞, y) respectivamente. A generalização para uma curva L arbitrária se faz tomando $\alpha_L(z; x, y)$ tal que

$$F_{\mu\nu}(\alpha_L) = \frac{1}{2}[\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu] \alpha_L(z; x, y) = \int_{x,L}^y e^{\mu\nu\rho} \delta^3(z-\xi) d\xi_\rho \quad (3b)$$

Seguindo as idéias de Kadanoff e Ceva [Kadanoff e Ceva, 1971] e o método de quantização de kinks de Marino et al, [Marino, Swieca, 1980] [Marino et al, 1982] o operador de desordem $\mu(x, \xi)$ é introduzido na teoria dando uma prescrição para a função de correlação de dois pontos. Isto se faz partindo da expressão da amplitude de vacuo no formalismo de integrais de trajetória,

$$Z[0] = \int D\tilde{\phi} D\tilde{\phi}^* DA_\mu e^{i\int d^3x \mathcal{L}^{HA}} \quad (4)$$

onde \mathcal{L}^{HA} vem dado por (2.2.1).



Os defeitos na função de correlação de desordem no MHA

Fig 3-4

Em analogia direta com os modelos bidimensionais vamos assumir que a função de correlação das variáveis de desordem sejam obtidas deformando a ação sobre os discos mínimos \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 definidos pelas curvas tipo espaço ξ_1 e ξ_2 , numa curva L que una os pontos x e y, e numa superfície S que conecte as curvas ξ_1 e ξ_2 e que juntamente com os discos \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 fecha um volume V. Então,

$$\langle \mu(x, \xi_1) \mu^*(y, \xi_2) \rangle = Z[0]^{-1} \int D\tilde{\phi} D\tilde{\phi}^* DA_\mu e^{i\int d^3x \mathcal{L}^{of}} \quad (5)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = \mathcal{L}^{\text{HA}} + \mathcal{L}_c + \int_S d^2\xi_\mu \psi^\mu \delta^3(z-\xi) + \int_{\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2} d^2\eta_\mu \chi^\mu \delta^3(z-\eta) + \int_{x,L}^y d\xi^\mu \Omega_\mu \delta^3(z-\xi) \quad (6)$$

\mathcal{L}^{HA} é a lagrangeana do MHA (2.2.1). Os operadores ψ_μ, Ω_μ e χ_μ tem que ser fixados impondo que (6) seja independente da escolha da superfície S e da curva L que são arbitrárias. \mathcal{L}_c é um contratermo de renormalização que é introduzido para compensar possíveis singularidades e que também tem que ser determinado (ver Fig 3-4).

O que se acha [Marino,1988] é que a função de correlação das variáveis de desordem pode ser entendida em termos de uma acoplamento externo de tal forma que a lagrangeana efetiva (6) que aparece em (5) pode ser escrita na forma compacta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ef}}(F_{\mu\nu}, A_\mu, \Phi, S) &= \mathcal{L}\left[F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S), A_\mu, \Phi\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S)\right]^2 + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \end{aligned} \quad (7)$$

onde $\tilde{F}_{\mu\nu}(S)$ se define a partir do campo externo

$$\tilde{A}_\mu(S) = -\frac{\alpha}{\bullet} \int_S d^2\xi_\mu \delta^3(z-\xi) + \frac{1}{\bullet} \Theta_9(V_S) \partial_\mu \alpha \quad (8)$$

na forma

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(S) = \partial_\mu \tilde{A}_\nu(S) - \partial_\nu \tilde{A}_\mu(S) \quad (9)$$

onde $\Theta_9(V_S)$ é a função de Heaviside com suporte em V_S e temos suspendido a indicação dos argumentos e o sub-índice L de $\alpha_L(z;x,y)$.

A invariância de superfície pode ser vista como consequência simples do fato de que sob a mudança de variáveis

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{\bullet} \left[\partial_\mu \Theta_S(\Delta V) \right] \alpha + \frac{1}{\bullet} \Theta_S(\Delta V) \partial_\mu \alpha \quad (10)$$

$$\Phi \longrightarrow e^{-i\alpha \Theta_S(\Delta V)} \Phi \quad (11)$$

temos que

$$A_\mu + \tilde{A}_\mu(S) \longrightarrow A_\mu + \tilde{A}_\mu(S') \quad (12)$$

$$F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S) \longrightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(S') \quad (13)$$

sendo que $|D_\mu \Phi|^2$ e os termos de autointeração em $V(\Phi)$ são invariantes. Fazendo a translação $A_\mu \longrightarrow A_\mu - \tilde{A}_\mu(S)$, na integral funcional se pode ter a expressão alternativa para a função de correlação [Marino, 1988]

$$\langle \mu(x, \mathcal{E}_1) \mu^*(y, \mathcal{E}_2) \rangle = Z[0]^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* e^{i \int d^3z \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \right)} \quad (14a)$$

onde

$$\tilde{D}_\mu \Phi = \left[\partial_\mu + ie(A_\mu - \tilde{A}_\mu(S)) \right] \Phi \quad (14b)$$

A liberdade que se tem para escolher a superfície S pode agora ser aproveitada para modificar a expressão (14a) da função de desordem para uma forma que seja mais conveniente para extrair uma representação do operador $\mu(x, \mathcal{J})$. A forma mais conveniente que toma a função de correlação (14) para nosso objetivo de identificar o operador $\mu(x, \mathcal{J})$ se consegue fazendo a mudança de variáveis na integral funcional que corresponde à transformação de

calibre com parâmetro $\alpha_L(x,y;z)$.

Utilizando as propriedades de causalidade de α que fazem com que ela seja compatível com (2) o campo externo toma a forma

$$\tilde{A}_\mu(S) = -\frac{\alpha}{e} \int_S d^2 \xi_\mu \delta^3(z-\xi) + \frac{1}{e} \Theta(R^3 - V_S) \partial_\mu \alpha \quad (15)$$

cuja representação gráfica é a da (Fig 3-5).

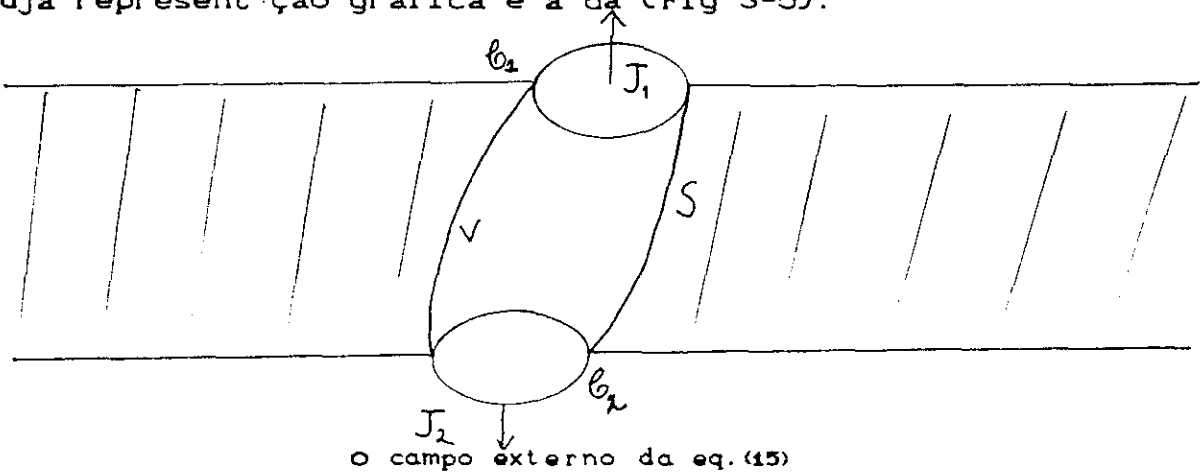
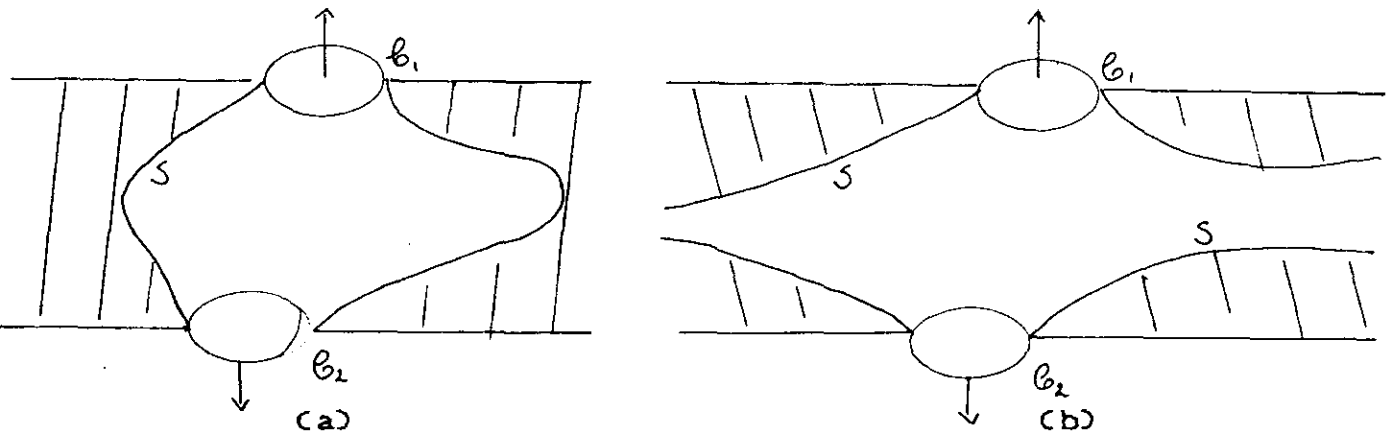


Fig 3-5

A superfície pode agora ser deformada continuamente fazendo mudanças de variáveis na integral funcional que correspondem a transformações de calibre regulares como se mostra na (Fig 3-6).



Deformações do campo externo

Fig 3-6

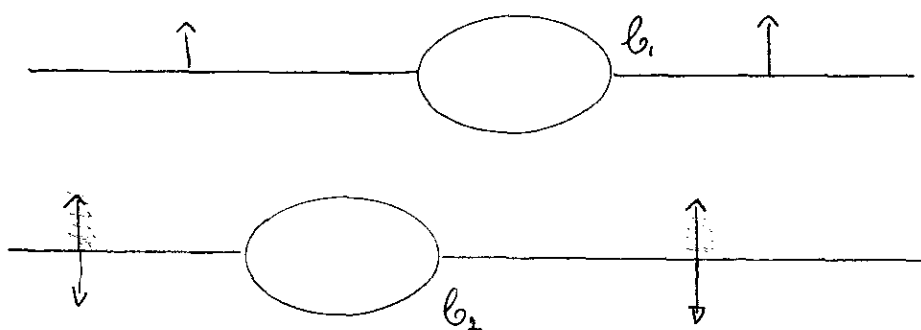
No limite se chega a uma configuração de campo externo como a da

(Fig 3-7) que corresponde a

$$\tilde{A}_\mu(S) = \tilde{A}_\mu(S_1) + \tilde{A}_\mu(S_2) \quad (17)$$

$$\tilde{A}_\mu(S_i) = -\frac{1}{\epsilon} \alpha(x_i; z) \int_{S_i} d^2 \xi_\mu \delta^3(z - \xi) \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

onde $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $S_i = \mathbb{R}^2 - \mathcal{J}_i$.



O campo externo (17)

Fig 3-7

A função $\alpha(x_i; z)$ adequada em cada caso é a que ignora a presença do outro operador. Por exemplo, $\alpha(x_1; z) = \alpha(x, y = \infty; z)$. Note-se que a orientação relativa das superfícies na (Fig 3-7) é oposta uma da outra. Se pode identificar agora o fator $\mu(x, \mathcal{J}_1)$ na função de correlação $\langle \mu(x, \mathcal{J}_1), \mu^*(y, \mathcal{J}_2) \rangle$ com a superfície S_1 e o outro operador com a outra superfície. Pode-se então partindo de (14a) escrever uma expressão para o valor esperado de $\mu(x, \mathcal{J})$

$$\begin{aligned} \langle \mu(x, \mathcal{J}_1) \rangle &= Z[0]^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* e^{i \int d^3 z \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |\tilde{D}_\mu(S_1)\Phi|^2 - V(\Phi) \right)} \\ &= Z[0]^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* e^{i \int d^3 z \mathcal{L}^{HA}} e^{i \int d^3 z \tilde{A}_\mu(S_1) J_\mu} e^{i \int d^3 z \tilde{A}_\mu(S_1) \tilde{A}_\mu(S_1) |\Phi|^2} \end{aligned} \quad (17a)$$

onde J_μ é a corrente electromagnética do sistema

$$J_\mu = i[\Phi^* D_\mu \Phi - (D_\mu \Phi)^* \Phi] \quad (17b)$$

De (17a) se identifica

$$\mu(x, \xi_1) = e^{i \int d^3 z \tilde{A}_\mu(S_1) J_\mu} \quad (18a)$$

e o fator de renormalização

$$Z_R = e^{i \int d^3 z \tilde{A}_\mu(S_1) \tilde{A}_\mu(S_1) |\Phi|^2} \quad (18b)$$

no qual, como se vê, aparecem integrais duplas de superfície.

Devido à mencionada diferença de orientação entre S_1 e S_2 o sinal no expoente para $\mu^*(x, \xi_1)$ é oposto e temos

$$\mu^*(x, \xi_1) = e^{-i \int d^3 z \tilde{A}_\mu(S_1) J_\mu} = [\mu(x, \xi_1)]^* \quad (19)$$

Em forma explícita em termos dos momentos canônicos conjugados $\pi = (D^0 \Phi)^*$ e $\pi^* = D^0 \Phi$ o expoente em (18a) é

$$E \equiv i \int_{S_1} d^2 z \tilde{A}_\mu(S_1) J_\mu = \int_{S_1} d^2 \xi_0 \alpha(x; \xi) [\Phi^* D_0 \Phi - (D_0 \Phi)^* \Phi] \quad (20)$$

Usando a relação canônica de comutação entre Φ e π , podemos calcular a relação de comutação entre as variáveis de ordem e desordem. Resulta

$$e^{E(x, \xi_1)} \Phi(y, t) e^{-E(x, \xi_1)} = e^{\left\{ i \alpha(x; y) \Theta_2(y; S_1) \right\}} \Phi(y, t) \quad (21)$$

Passando o fator $\mu^{-1}(x, \xi_1) = e^{-E(x, \xi_1)}$ ao lado direito de (21) obtemos a álgebra dual (1). O cálculo para Φ^* é completamente

análogo. Para calcular as regras de comutação com o campo vetorial se introduz a lei de Gauss $\partial_i F^{i0} = \bullet J^0$ em (20). Obtemos a seguinte forma para o operador de desordem

$$\mu(x, \mathcal{E}_1) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{S_1} d^2 \vec{\eta} \alpha(x; \eta) \partial_i [\pi^i(\vec{\eta}, t), A^j(y, t)]} \quad (22)$$

onde $\pi^i = F^{i0}$. É interessante notar que esta mesma representação para o operador de desordem é a que se encontra fazendo as transformações de superfície das (Fig 3-5), (Fig 3-6) e (Fig 3-7) diretamente sobre a forma (14) da função de correlação, quer dizer antes de fazer a translação (13). Utilizando que as regras de comutação entre A_i e π^j são canônicas obtemos (1b).

CAPÍTULO 4

Função de correlação dos vórtices

4.1 Regras de Feynman para o campo externo

Neste capítulo nosso objetivo é calcular os primeiros termos da série perturbativa da função de correlação de dois pontos $\langle \mu(x, \mathcal{E}) \mu^*(y, \mathcal{E}') \rangle$ das variáveis de desordem no MHA. Para este fim utilizaremos as ferramentas do Apêndice C e em particular será conveniente trabalhar no espaço euclidiano.

No capítulo anterior para garantir a invariância da função de correlação $\langle \mu(\mathcal{E}), \mu^*(\mathcal{E}') \rangle$ sob escolha de superfície utilizamos o fato da lagrangeana clássica ser invariante de calibre. No entanto para que o problema quântico fique bem definido a integral funcional tem que ser modificada introduzindo os fantasmas de Faddeev e Popov [Faddeev e Popov, 1967] que impedem a integração sobre variáveis redundantes. Dependendo de estarmos considerando o modelo na fase quebrada ou na fase simétrica esta modificação leva a termos que utilizar as lagrangeanas quânticas $\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA}, S}$ ou $\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA}, Q}$ dadas pelas fórmulas (2) e (19) do Apêndice C e que dependem além dos campos Φ e A_μ dos fantasmas η e η^* . A invariância de calibre se traduz na invariância BRS [Becchi et al., 1974] (ver Apêndice A). As fórmulas (3.4.5) e (3.4.7) para a função de correlação $\langle \mu(\mathcal{E}) \mu^*(\mathcal{E}') \rangle$ têm que ser substituídas por

$$\langle \mu(x, \mathcal{E}_1, \mu^*(y, \mathcal{E}_2) \rangle = Z^{-1}[0] \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^3z \mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA}, F}(\mathbf{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbf{F}_{\mu\nu} + \tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu})} \quad \mathbf{F} = \mathbf{S}, \mathbf{Q} \quad (1)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathbf{E}}^{\text{HA}, \mathbf{F}}$ é a lagrangeana euclideana dada por (C2.a) ou (C15) e o índice $\mathbf{r}=\mathbf{s}, \mathbf{a}$ indica se é a fase simétrica ou a fase quebrada a que estamos considerando. No primeiro caso escolhemos fazer fixação de calibre utilizando o calibre de Lorentz enquanto que na fase com a simetria quebrada a escolha recai no calibre R_{ξ} (Ver Apêndice C). A transformação de BRS toma a forma

$$\delta_{\beta} A_{\mu} = \partial_{\mu} \omega \quad , \quad \delta_{\beta} \Phi = -i\omega \quad (2a)$$

$$\delta_{\beta} \eta^{*} = \frac{i}{\alpha} F \beta^{*} \quad , \quad \delta_{\beta} \eta = \frac{i}{\alpha} F \beta \quad (2b)$$

onde β é um parametro grassmaniano que não depende das coordenadas, F é a condição de calibre e $\omega = (\beta^{*} \eta + \eta^{*} \beta)$. Escolhendo $\beta^{*} \beta = 1$, podemos sempre escolher novas variáveis $\eta'(z) = \eta(z) - \beta f(z)$ com $f(z)$ uma função arbitrária. Então $\omega(z) = \omega'(z) + f(z)$. Escolhendo $f(z) = \alpha_{\mathbf{L}}(z; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \otimes_{\mathbf{3}} (\Delta V)$ é imediato verificar que as parcelas de fixação de gauge e dos fantasmas da lagrangiana quântica são invariantes sob a transformação (2) assim com também é invariante o setor de materia. O termo cinético dos campos de gauge, da mesma forma que como acontecia com a transformação clássica, se transforma na forma

$$F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(\mathcal{S}) \longrightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(\mathcal{S}') \quad (3)$$

o que garante a invariância de superfície de (1). Em (3) $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ é a fronteira de ΔV e $\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathcal{S})$ é dado por (3.4.9).

Fazendo a translação na integral funcional $A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \tilde{A}_{\mu}(\mathcal{S})$, temos a expressão alternativa equivalente a (3.4.14)

$$\langle \mu(\mathbf{x}, \mathcal{E}_1, \mu^{*}(\mathbf{y}, \mathcal{E}_2)) \rangle = Z^{-1}[0] \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^{*} \mathcal{D}A_{\mu} e^{-\int d^3z \mathcal{L}_{\mathbf{E}, \mathbf{ef}}^{\text{HA}, \mathbf{F}}} \quad \mathbf{r}=\mathbf{s}, \mathbf{a} \quad (4)$$

onde conforme o caso teremos:

$$\mathcal{L}_{E,ef}^{HA,S} = \mathcal{L}_{E,Quan}^{HA,S} + \mathcal{L}_{ext}^{HA,S} \quad (5a)$$

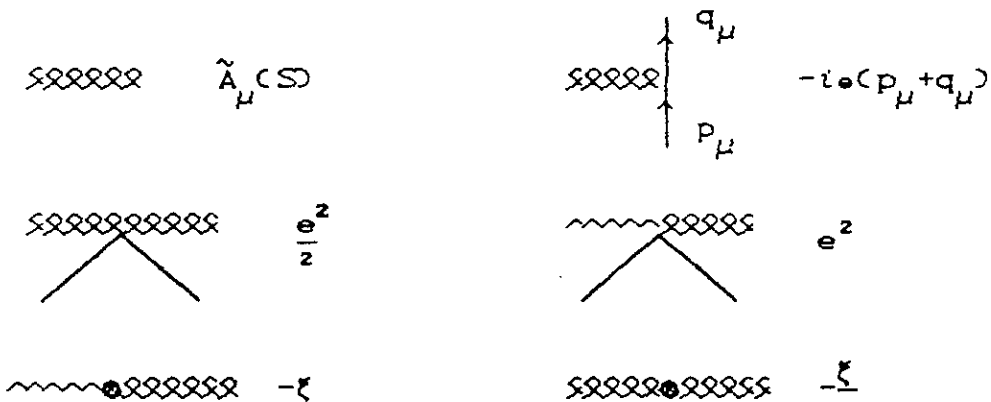
$$\mathcal{L}_{E,ef}^{HA,Q} = \mathcal{L}_{E,Quan}^{HA,Q} + \mathcal{L}_{ext}^{HA,Q} \quad (5b)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E,ext}^{HA,S} = & \frac{\kappa}{2} \left[\partial_\mu \tilde{A}^\mu(\mathcal{S}) \partial_\rho \tilde{A}^\rho(\mathcal{S}) - \partial_\mu \tilde{A}^\mu(\mathcal{S}) \partial_\nu A^\nu \right] + i e \tilde{A}_\mu(\mathcal{S}) [\Phi^* \partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^* \Phi] \\ & + e^2 \left[\tilde{A}_\nu(\mathcal{S}) \tilde{A}^\nu(\mathcal{S}) - 2 \tilde{A}_\nu(\mathcal{S}) A^\nu \right] |\Phi|^2 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E,ext}^{HA,Q} = & \frac{\xi}{2} \left[\partial_\mu \tilde{A}^\mu(\mathcal{S}) \partial_\rho \tilde{A}^\rho(\mathcal{S}) - \partial_\mu \tilde{A}^\mu(\mathcal{S}) \partial_\nu A^\nu \right] - e \tilde{A}_\mu(\mathcal{S}) [\Phi_1 \partial_\mu \Phi_2 - \partial_\mu \Phi_1 \Phi_2] \\ & + \left[\frac{1}{2} M^2 + \frac{e^2}{2} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + b e^2 \Phi_1 \right] \left[\tilde{A}_\nu(\mathcal{S}) \tilde{A}^\nu(\mathcal{S}) - 2 \tilde{A}_\nu(\mathcal{S}) A^\nu \right] \end{aligned} \quad (6b)$$

Os parâmetros de calibre κ e ξ , a massa do bóson de gauge M e o parâmetro de quebra da simetria tem as definições usuais [Abers e Lee, 1974] (Ver Apêndice C).



Regras de Feynman para o campo externo na fase simétrica. Aqui \sim é o propagador vetorial \bullet — \bullet o propagador escalar

Fig 4-1

Observe-se que pela diferente escolha de calibre nas diferentes fases não se obtém (6a) a partir de (6b) fazendo a translação (Apêndice C (20)) do campo Φ em seu valor esperado. Lembremos que

a particular escolha de calibre na fase quebrada faz com que o termo do tipo $\partial_\mu \tilde{\Phi} A^\mu$ não apareça na lagrangeana. Da discussão do capítulo anterior fica claro que o termo $\tilde{A}_\nu(S) \tilde{A}^\nu(S) |\Phi|^2$ é o que deve ser considerado como termo de renormalização.

As "lagrangeanas externas" (6a) e (6b) nos fornecem os conjuntos de regras de Feynman das (Fig 4-1) e (Fig 4-2) que devem acrescentar-se as discutidas no Apêndice C. Nelas $\times\times\times\times$ é a representação gráfica do campo externo $\tilde{A}_\mu(S)$.

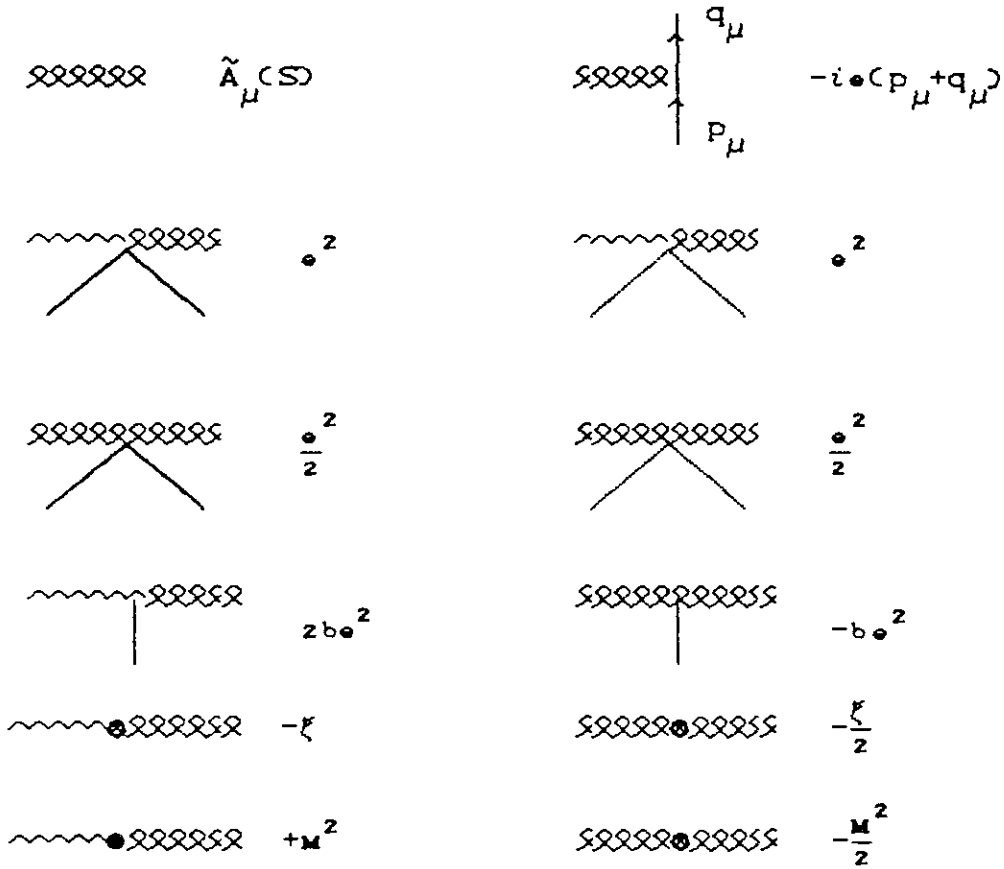
4.2 Função de correlação de dois pontos.

Dispondo de uma expressão explícita para o operador $\mu(x, \mathcal{E})$ podemos tentar obter informações acerca das propriedades físicas dos vórtices quânticos, estudando o comportamento das funções de correlação do dito operador $\mu(x, \mathcal{E})$. O teorema de Araki [Araki, 1960] [Araki et al, 1962] estabelece que a grandes distâncias espaciais a função de correlação de dois pontos decai exponencialmente com a distância com uma rapidez determinada pela massa das partículas. Embora este teorema só seja rigorosamente válido para operadores locais é de esperar que continue sendo válido para operadores que estejam confinados a um setor compacto do espaço-tempo já que para grandes distâncias eles serão aproximadamente locais.

Na fase quebrada do MHA, onde as propriedades topológicas da variedade dos mínimos do potencial permitem classicamente a existência de vórtices estáveis, esperamos que quânticamente tais vórtices também se achem presentes determinando que a função de correlação a tempos iguais $\langle \mu(x, \mathcal{C}_1), \mu^*(y, \mathcal{C}_2) \rangle$ tenha o comportamento assintótico

$$\langle \mu(x, C_1), \mu^*(y, C_2) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} e^{-M_V |x-y|} \quad (1)$$

onde M_V é a massa do vórtice.



Regras de Feynman para o campo externo na fase quebrada

Fig 4-2

Na fase simétrica, pelo contrário, não se esperam vórtices quânticos. Não tendo partículas que interpolar o operador $\mu(x, C)$ é trivial pelo que sua função de correlação obedecerá

$$\langle \mu(x, C_1), \mu^*(y, C_2) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 1 \quad (2)$$

A partir da expressão (4.1.4) o cálculo de $\langle \mu(x, C_1), \mu^*(y, C_2) \rangle$ é um cálculo padrão de uma amplitude na presença de um campo externo. Sua expansão perturbativa toma a forma (Ver apêndice A)

$$\langle \mu(x, C_1), \mu^*(y, C_2) \rangle = e^{-\Lambda(x, y; \xi_1, \xi_2)} \quad (3)$$

onde $\Lambda(x, y; \xi_1, \xi_2)$ está dado pela soma de todos os gráficos com campos $\tilde{A}_\nu(S)$ colocados como pernas externas.

$$-\Lambda(x, y; \xi_1, \xi_2) = \sum \text{GRAFICOS COM PERNAS } \tilde{A}_\nu(S) \quad (4)$$

Vamos tentar calcular $\Lambda(x, y; \xi_1, \xi_2)$ fazendo uma dupla expansão em potências de \hbar e nas constantes de acoplamento. Para a série em potências de \hbar sabemos [Coleman e Weinberg, 1973] que os gráficos com n laços são proporcionais a $(\hbar)^{n-1}$ pelo que os termos dominantes, que constituem a aproximação de árvore são os que não tem laço nenhum. Por outro lado como se vê de (3.4.8) cada campo externo contribui com um fator e^{-1} , enquanto que os vértices que podem ser utilizados para construir gráficos sem laços (e que são respectivamente os últimos dois da (Fig 4-1) na fase simétrica e os 4 últimos da (Fig 4-2) na fase quebrada) não dependem de e nem de \hbar . Podemos estabelecer então um esquema de aproximação em potências de $\frac{1}{e}$ e em potências de \hbar dentro da aproximação de árvore.

Na fase simétrica os gráficos a calcular são os seguintes

$$-\Lambda_S = \text{diagrama com 4 pernas externas} + \text{diagrama com 4 pernas externas e um laço} \quad (5)$$

Utilizando as regras de Feynman da (Fig 4-1) temos

$$\begin{aligned} -\Lambda_S = & -\frac{1}{2\kappa} \int d^3z \partial_\mu \tilde{A}^\mu(S, z) \partial_\nu \tilde{A}^\nu(S, z) + \\ & + \frac{1}{2\kappa} \int d^3z_1 d^3z_2 \partial_\rho \tilde{A}^\rho(S, z_1) \partial_\mu^1 \partial_\nu^2 D_{\mu\nu}^E(z_1 - z_2, \kappa, m=0) \partial_\sigma \tilde{A}^\sigma(S, z_2) \quad (6) \end{aligned}$$

onde $D_{\mu\nu}^E(x)$ é o propagador vetorial euclidiano (ver (C5)).

Utilizando a identidade (6b) do Apêndice C

$$\partial_\mu \partial_\nu D_{\mu\nu}^E(z, \kappa, M=0) = -\kappa \delta(z)$$

obtemos imediatamente o resultado esperado:

$$-\Lambda_S = 0 \quad (7)$$

Dentro da aproximação, independentemente da escolha de $\alpha(x, y; z)$, se encontra que o operador $\mu(x, C)$ não interpola partículas refletindo a incapacidade do sistema de sustentar vórtices estáveis nesta fase.

Na fase quebrada o cálculo é muito mais trabalhoso pelo que deixaremos para o Apêndice D o esclarecimento de várias das passagens entre as fórmulas apresentadas no texto. Os gráficos que contribuem são:

$$-\Lambda = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} \quad (8)$$

Começemos por observar que a soma dos três primeiros gráficos em (8) se anula. Com as regras da (Fig 4-2)

$$\begin{aligned} F &\equiv \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \\ &= -\frac{\xi}{2} \int d^3z \partial_\mu \tilde{A}^\mu(S, z) \partial_\nu \tilde{A}^\nu(S, z) + \\ &+ \frac{\xi^2}{2} \int d^3z_1 d^3z_2 \partial_\rho \tilde{A}^\rho(S, z_1) \partial_\mu^4 \partial_\nu^2 D_{\mu\nu}^E(z_1 - z_2, \xi, M) \partial_\sigma \tilde{A}^\sigma(S, z_2) \\ &- \frac{\xi^2 M^2}{2} \int d^3z_1 d^3z_2 \partial_\rho \tilde{A}^\rho(S, z_1) \partial_\mu^4 D_{\mu\nu}^E(z_1 - z_2, \xi, M) \tilde{A}_\nu(S, z_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Para obter $F = 0$ basta verificar a identidade

$$-\partial_\nu \delta(z) - \xi \partial_\nu \partial_\mu \partial_\sigma D_{\mu\sigma}^E(z, \xi, M) + M^2 \partial_\mu D_{\mu\nu}^E(z, \xi, M) = 0 \quad (11)$$

Ela se mostra substituindo a fórmula (B.24). Fica então

$$-\Lambda = \text{diagrama} + \text{diagrama} \\ = -\frac{M^2}{2} \int d^3z \tilde{A}^\mu(S, z) \tilde{A}_\mu(S, z) + \quad (12)$$

$$+ \frac{M^2}{2} \int d^3z_1 d^3z_2 \tilde{A}^\mu(S, z_1) D_{\mu\nu}^E(z_1 - z_2, \xi, M) \tilde{A}_\nu(S, z_2)$$

Substituindo a expressão (3.4.8) do campo externo

$$\tilde{A}_\mu(S) = -\frac{\alpha}{\circ} \int_S d^2\xi_\mu \delta^3(z - \xi) + \frac{1}{\circ} \ominus_3(V_S) \partial_\mu \alpha \quad (13)$$

encontra-se

$$\Lambda = \Lambda_S + \Lambda_V + \Lambda_{VS} = -\frac{M^2}{2\circ^2} \left(I_S + I_V + I_{VS} \right) \quad (14)$$

Aqui Λ_S é o termo que contém duas integrais de superfície, Λ_{VS} é o termo que tem uma e Λ_V é o termo que não tem nenhuma. As expressões para I_S , I_{SV} e I_V são:

$$I_S = \int_S d^2\xi_\mu \int_S d^2\eta_\nu \alpha(\xi) \left[-\delta^3(\xi - \eta) + M^2 D_{\mu\nu}^E(\xi - \eta) \right] \alpha(\eta) \quad (15a)$$

$$I_V = \int_V d^3z_1 \int_V d^3z_2 \partial_\mu \alpha(z_1) \left[-\delta^3(z_1 - z_2) \partial_\mu - M^2 D_{\mu\nu}^E(z_1 - z_2) \partial_\nu \right] \alpha(z_2) \quad (15b)$$

$$I_{VS} = \int_V d^3z \int_S d^2\xi_\mu \alpha(\xi) \left[\delta^3(\xi - z) \partial_\nu - M^2 D_{\mu\nu}^E(\xi - z) \partial_\nu \right] \alpha(z) \quad (15c)$$

Em (15) suprimimos a referência explícita à dependência da função $\alpha(x, y; z)$ nos extremos x e y da corda de singularidades. Fica subentendido que $\alpha(z)$ preenche os requerimentos de

causalidade estabelecidos na seção (3.4).

Para continuar o cálculo vamos utilizar a liberdade de calibre remanescente e fazer a escolha

$$\xi = 0 \quad (16)$$

que como se discute no Apêndice C corresponde a fixar o calibre unitário. Neste calibre o propagador vetorial se reduz a

$$D_{\mu\nu}^E(x) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{M^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \Delta^E(x, M) \quad (17)$$

onde $\Delta^E(x, M)$ é o propagador escalar euclidiano (A.1). Observemos agora que em cada uma das integrais (15) o termo mais singular é o que provém do termo que temos identificado como de renormalização. Substituindo (15) e fazendo uma pequena manipulação encontramos que ditos termos singulares servem para cancelar outros que aparecem nas outras integrais. Fica

$$I_S = \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \cdot \left[\int_S (d\vec{S}' \times \vec{\nabla}') \Delta^E(r-r', M) \right] \alpha(r) \alpha(r') \quad (18a)$$

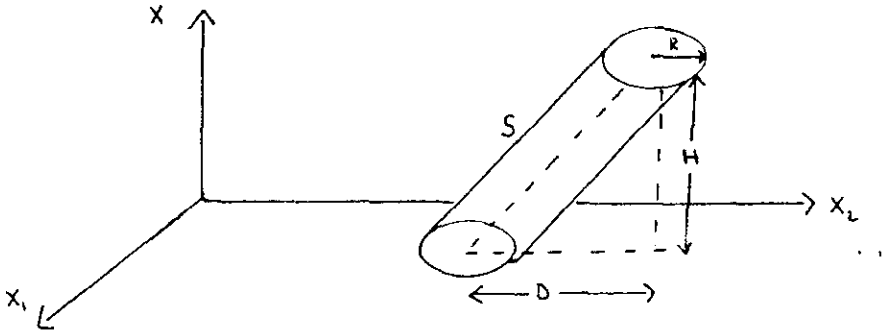
onde por comodidade aproveitamos o fato de estarmos no espaço euclidiano de 3-D e utilizamos notação vetorial identificando $\vec{\xi}$ e $d^2\xi_\mu$ com r e $d\vec{S}$, e $\vec{\eta}$ e $d^2\eta_\mu$ com r' e $d\vec{S}'$ (ver Apêndice B). Em particular teremos que $\square = \nabla^2$. Uma manipulação similar nos leva a

$$I_V = \int_V d^3r \int_V d^3r' \left[\vec{\nabla} \alpha(r) \times \vec{\nabla} \right] \cdot \left[\vec{\nabla}' \alpha(r') \times \vec{\nabla}' \right] \Delta^E(r-r', M) \quad (18b)$$

e a

$$I_S = -2 \int_S \alpha(r) (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \cdot \int_V d^3r' \left[\vec{\nabla}' \alpha(r') \times \vec{\nabla}' \right] \Delta^E(r-r', M) \quad (18c)$$

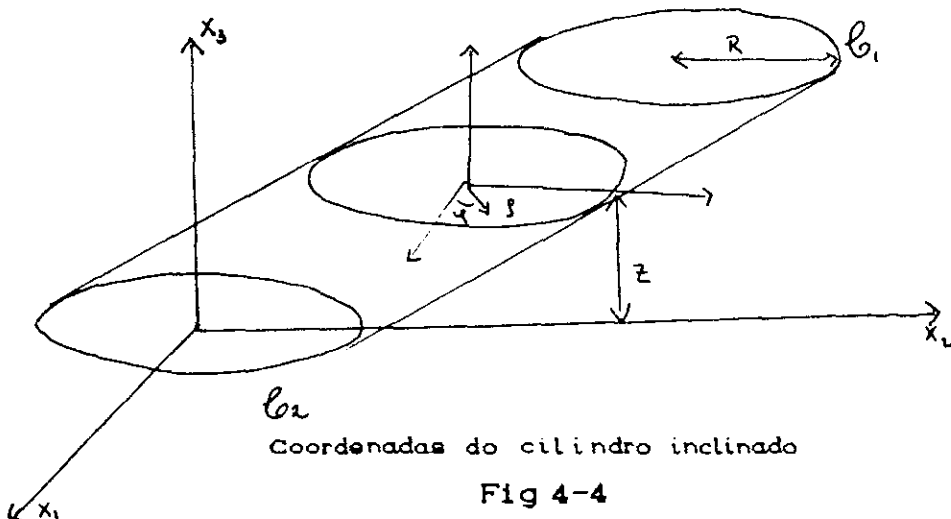
Para fazer o cálculo explícito de (18) é necessário fixar a superfície S e a função α . Como estamos interessados em calcular a função de correlação dos operadores $\mu(x, \xi_1)$ e $\mu^*(y, \xi_2)$ para pontos x e y que no espaço de Minkowski estejam muito separados espacialmente vamos escolher a superfície da (Fig 4-3).



O cilindro inclinado

Fig 4-3

As curvas ξ_1 e ξ_2 são dois círculos de raio R paralelos e em planos paralelos ao plano $z_1 z_2$. S será a superfície cilíndrica que tem fronteira $\xi_1 \cup \xi_2$ e $\alpha(r)$ se escolhe como o ângulo polar definido a partir da linha paralela ao eixo x^3 que intercepta ao eixo do cilindro sobre cada um dos planos paralelos ao plano $z_1 z_2$. As seções transversais do volume V são discos de raio R .



Coordenadas do cilindro inclinado

Fig 4-4

Para obter a função de correlação que nos interessa fazemos o

limite

$$D \longrightarrow \infty \quad H \longrightarrow \infty \quad (19)$$

onde D e H são as definidas na (Fig 4-3).

Para continuar se escolhem as coordenadas do cilindro inclinado representadas na (Fig 4-4)

Nelas a função $\alpha(z)$ é simplesmente

$$\alpha(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z^3 < 0 \\ \rho & \text{para } 0 < z^3 < H \\ 0 & \text{para } z^3 > H \end{cases} \quad (20b)$$

Deixando os detalhes do cálculo de (18) para o Apêndice D, o resultado depois de tomar o limite (19) pode ser escrito na forma

$$I \longrightarrow I^M + I^R \quad (21a)$$

$$I \longrightarrow I^M + I^R \quad (21b)$$

$$I_{vs} \longrightarrow I_{vs}^M \quad (21c)$$

onde os termos com índice M são as contribuições à massa do vórtice e os termos com índice R são divergentes. No Apêndice D mostramos a expressão explícita destes termos, e também como eles podem ser eliminados fazendo uma renormalização multiplicativa do operador de vórtice e uma subtração na sua massa. Os termos que dão contribuição para a massa do vórtice em (21) são

$$I_S^M = -4D \int_0^1 ds \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} I_0(RMS) K_0(RMS) \quad (22a)$$

$$I_V^M = I_S^M + 4\pi D K_0\left(\frac{MR}{2}\right) I_0\left(\frac{MR}{2}\right) \quad (22b)$$

$$I_{VS}^M = -2I_S^M - 4\pi D K_0\left(\frac{MR}{2}\right) I_0\left(\frac{MR}{2}\right) \quad (22c)$$

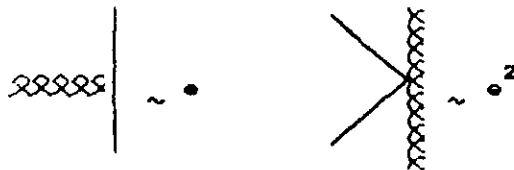
onde K_0 e I_0 são as funções de Bessel modificadas de ordem zero.

A soma dos termos de (22) se anula dando como resultado que a massa do vórtice nesta ordem de aproximação é nula.

$$M_V = \frac{-m^2 e^{-2}}{2} \left(I_S^M + I_V^M + I_{VS}^M \right) = 0 \quad (23)$$

Para entender este resultado é necessário observar que até a ordem de aproximação em (8), a série perturbativa de nosso sistema é idêntica à que apareceria se estivéssemos considerando a lagrangeana de Proca com massa m . O campo de Proca não apresenta simetria de calibre nenhuma e também não admite sólitons entre as soluções de suas equações de movimento. O espaço de Hilbert deste sistema é simplesmente o espaço de Fock e o resultado (23) é o esperado pois o operador de desordem é, nesse caso, trivial.

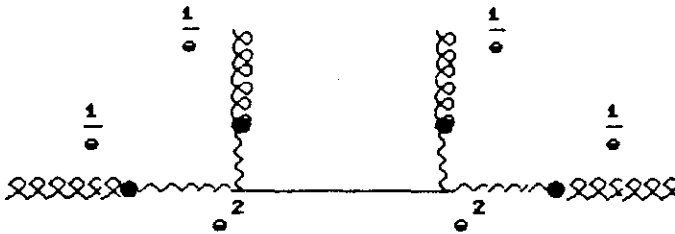
Chegamos à conclusão que para obter informações acerca do espectro de massas da teoria é necessário levar a aproximação da série perturbativa (4) a uma ordem maior, seja nas constantes de acoplamento ou no número de laços. Lamentavelmente este é um problema que leva ao cálculo de infinitos gráficos de Feynman. O motivo é o seguinte: Como os vértices da (Fig 4-5) são adimensionais (os fatores e explícitos se cancelam com os dos campos externos), eles podem ser utilizados para colocar um número arbitrário de campos externo "pendurados" de uma linha escalar sem aumentar a ordem do gráfico, dando lugar a infinitos gráficos da mesma ordem.



Vértices adimensionais

Fig 4-5

Até agora não tinham aparecido linhas escalares em nossos gráficos. Continuando na aproximação de árvore na ordem seguinte em $(\frac{1}{e})$, isto é $(\frac{1}{e})^0$, teremos, trabalhando por exemplo na fase quebrada, o gráfico da (Fig 4-6) que possui uma linha escalar (a dependência em e de cada vértice colocada explicitamente)



Um gráfico de ordem $(\frac{1}{e})^0$

Fig 4-6

Mas então teremos os infinitos gráficos da mesma ordem (Fig 4-7)

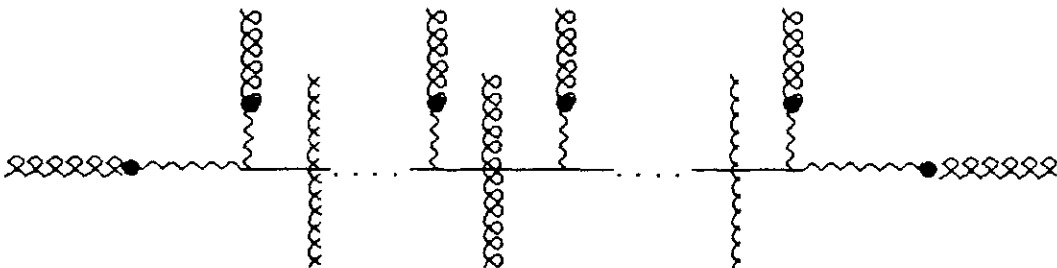
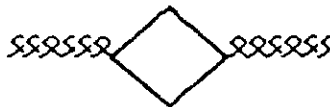


Gráfico genérico de ordem $(\frac{1}{e})^0$

Fig 4-7

Em forma parecida na aproximação a um laço temos o gráfico da ordem $(\frac{1}{e})^0$ da (Fig 4-8) que também permite gerar infinitos gráficos.



Um gráfico de um laço de ordem $(\frac{1}{e})^0$

Fig 4-8

O problema de somar estes infinitos gráficos ainda não foi resolvido.

CAPÍTULO 5

Funções de correlação de Laços de
Wilson na formulação dual em 3-D

Na seção (3.3) discutimos a relação de dualidade ordem-desordem encontrada por 't Hooft ['t Hooft,1978] entre teorias de calibre com simetria $U(1)/Z(2)$ e modelos escalares com simetria $Z(2)$ em 3-D. Vimos então, que dependendo da dinâmica dos operadores duais, a teoria de calibre pode apresentar-se numa fase confinante ou numa desconfinante. Na primeira parte deste capítulo vamos considerar a construção dos operadores de desordem nos modelos $Z(2)$ [Aragão et al,1987], e sua identificação com os laços de Wilson da teoria de calibre associada. Na segunda parte do capítulo vamos mostrar o cálculo aproximado da função de correlação de dois pontos dos laços de Wilson na formulação dual.

5.1 Os Laços de Wilson como operadores de desordem de um modelo $Z(2)$ em 3 dimensões.

Consideremos a teoria de um campo escalar complexo em 3-D descrita pela lagrangeana

$$\mathcal{L}^{\Phi} = \partial_{\mu} \Phi^{*} \partial^{\mu} \Phi - V(\Phi, \Phi^{*}) \quad (1)$$

Sejam $\mu(\mathcal{C})$ as variáveis de desordem desta teoria caracterizadas pela álgebra dual a tempos iguais

$$\mu(\mathcal{C})\Phi(x) = \begin{cases} e^{i\alpha\Phi(x)}\mu(\mathcal{C}) & x \in \mathcal{I}(\mathcal{C}) \\ \Phi(x)\mu(\mathcal{C}) & x \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}) \end{cases} \quad (2)$$

onde \mathcal{C} é uma curva espacial plana e fechada e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ é o disco contido nela.

Pode-se aqui também [Aragão et al, 1987] aplicar a prescrição tipo Kadanoff-Ceva (que generalizaremos para dimensão arbitrária e campos não abelianos no capítulo 6) para construir a função de correlação das variáveis de desordem. Introduzindo uma deformação na ação sobre uma superfície arbitrária que conecta as curvas \mathcal{C} e \mathcal{C}' , e impondo invariância sob a escolha da superfície temos:

$$\langle \mu(\mathcal{C})\mu^*(\mathcal{C}') \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* e^{i\int d^3z \left[(D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - V(\Phi, \Phi^*) \right]} \quad (3a)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - i\alpha A_\mu^{\text{ext}}(S)$ e o campo externo é neste caso sendo que α tem que ser determinado.

$$A_\mu^{\text{ext}}(S) = \int_S d^2\xi \delta^3(\xi - z) \quad (3b)$$

O tensor de intensidade do campo externo resulta ser uma corda de Dirac concentrada nas curvas \mathcal{C} e \mathcal{C}' :

$$F_{\mu\nu}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \oint_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'} \epsilon^{\mu\nu\rho} \delta^3(z - \xi) d\xi_\rho \quad (4)$$

No caso em que existisse uma simetria $U(1)$ na teoria esta corda como é bem sabido [Dirac, 1988], poderia se fazer colapsar a um ponto. Portanto a simetria máxima que o sistema admite para ter operadores de desordem não triviais é uma simetria $Z(N)$. Nesse

caso o parâmetro α tem que ter a forma $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ que corresponde a uma transformação de $Z(N)$.

O operador de desordem que se lê de (3a) é

$$\mu(\mathcal{C}) \equiv \mathcal{W}(\mathcal{C}) = e^{2\frac{\pi}{N} \int_{\mathcal{C}} d^2\xi \mu J^\mu} \quad (5)$$

onde $J_\mu = \Phi^* \partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^* \Phi$ é a corrente do sistema e \mathcal{C} é o disco contido em \mathcal{C} .

Este operador satisfaz à álgebra dual (2) com $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. Esta álgebra é exatamente a mesma que o laço de Wilson satisfaz com sua variável dual nos modelos de calibre com simetria $U(N)/Z(N)$ ['t Hooft, 1978] (ver seção (3.3)). Pode-se identificar, agora no contexto da teoria de gauge, o operador $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ com o laço de Wilson. Então, o operador inicial $\Phi(x)$ corresponde à variável dual discutida por 't Hooft.

A lagrangeana que controla as variáveis duais $\Phi(x)$, isto é a escolha específica do potencial $V(\Phi, \Phi^*)$ fica univocamente determinada quando se impõem as seguintes condições:

- a) Que a lagrangeana possua simetria $Z(N)$
- b) Que seja renormalizável
- c) Que o potencial admita quebra espontânea da simetria (para permitir a existência de sólitons)
- d) Que como a lagrangeana de Yang-Mills possua um único parâmetro dimensional.

O potencial que deve ser escolhido é

$$V(\Phi, \Phi^*) = \frac{h}{N!} (\Phi^N + \Phi^{*N}) + \frac{bf}{3!} (\Phi\Phi^*)^3 \quad (7)$$

onde h e f são constantes de acoplamento. Aragão et al [Aragão et

al,1987] estudam o potencial efetivo deste sistema na aproximação de um laço e encontram que para $N=2,3,4,5$ o sistema está bem definido numa única fase a qual apresenta a simetria quebrada. É necessário então fazer uma translação dos campos a novas variáveis com valor esperado nulo. Fazendo

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Phi_1 + \sigma_1 + i(\Phi_2 + \sigma_2) \right] \quad (8)$$

As massas das componentes reais Φ_1 e Φ_2 determinadas por

$$m_1^2 = \alpha + |\beta|, \quad m_2^2 = \alpha - |\beta| \quad (8a)$$

$$|\beta| = 2f \left(\frac{h}{4f(N-1)!} \right)^{4(N-1)} \left| 4 + (N-1)(N-5) \right|^{1/2} \quad N=2,3,4,5 \quad (8b)$$

A lagrangeana efetiva que comparece no expoente da fórmula (3a) é então, passando ao espaço euclideano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ef}}^{\Phi}(\Phi, D_{\mu}\Phi) &= \mathcal{L}^{\Phi} + \frac{1}{2}\alpha^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) \\ &+ \alpha(\Phi_2 \partial_{\mu} \Phi_1 - \partial_{\mu} \Phi_2 \Phi_1) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) + \frac{1}{2}\alpha^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) \quad (9) \\ &+ \alpha^2(\Phi_1 \sigma_1 + \Phi_2 \sigma_2) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) + \alpha(\sigma_2 \partial_{\mu} \Phi_1 - \partial_{\mu} \Phi_2 \sigma_1) A_{\mu}^{\text{ext}}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

5.2 Valor esperado de $\mathcal{W}(\mathcal{G})$

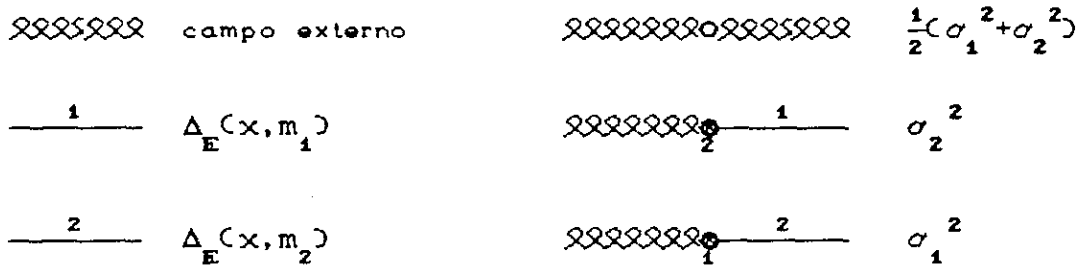
Para teorias de calibre na ausência de campos de matéria Wilson [Wilson,1974] dá o criterio para determinar se a teoria se apresenta numa fase confinante ou não. Intruduzindo "quarks" pesados não dinâmicos pode-se argumentar (por exemplo [Kogut, 1982]) que:

se $\langle \mathcal{W}(\mathcal{G}) \rangle$ decai, como $e^{-T(\text{AREA})}$ (T constante) no limite em que

a área contida em \mathcal{C} se torna muito grande, a teoria está numa fase confinante;

se, pelo contrário, $\langle \mathcal{W}(\mathcal{C}) \rangle$ decai nesse limite como $e^{-T(\text{PERIMETRO})}$, a teoria se encontra numa fase não confinante.

Munidos com a expressão (5.1.6a) para $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ em termos de sua variável dual, podemos mostrar agora o cálculo do valor esperado de $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ [Aragão et al, 1987]. Isto se faz perturbativamente com uma dupla expansão em potências de \hbar e de $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. As regras de Feynman relevantes estão na (Fig 5-1).



Regras de Feynman para $\langle \mathcal{W}(\mathcal{C}) \rangle$

Fig 5-1

Como sempre podemos escrever

$$\langle \mathcal{W}(\mathcal{C}) \rangle = e^{\Sigma(\mathcal{C})} \tag{1}$$

onde

$$\Sigma(\mathcal{C}) = \sum \text{graficos com pernas externas } A_\mu^{\text{ext}} \tag{2}$$

Dentro da aproximação de árvore até ordem α^2 temos:

$$\Sigma(\mathcal{C}) = \text{wavy line} + \text{wavy line with dot 2} \text{---} \text{1} \text{---} \text{dot 2 wavy line} + \text{wavy line with dot 1} \text{---} \text{2} \text{---} \text{dot 1 wavy line} \tag{3}$$

Com as regras de Feynman da (Fig 5-1) temos

$$\Sigma(\mathcal{C}) = -\alpha^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \int_{\mathcal{C}} d^2\xi_\mu \int d^2\eta_\mu \delta^3(\xi - \eta) \quad (4)$$

$$+ \alpha^2 \sigma_2^2 \int d^2\xi_\mu \int d^2\eta_\nu \theta_\mu^\kappa \theta_\nu^\eta \Delta_E(\xi - \eta, m_1) + \alpha^2 \sigma_1^2 \int d^2\xi_\mu \int d^2\eta_\nu \theta_\mu^\kappa \theta_\nu^\eta \Delta_E(\xi - \eta, m_2)$$

onde $\Delta_E(x, m)$ é o propagador euclidiano (A.5a).

Escolhendo a curva \mathcal{C} como um círculo de raio R no plano (x^1, x^2) (ver (Fig 5-2)),

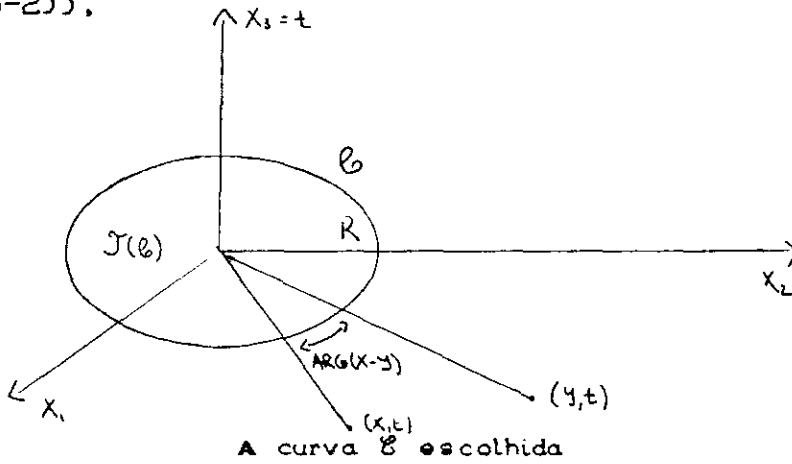


Fig 5-2

e utilizando a equação de movimento do propagador obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathcal{C}) = & -\alpha^2 \sigma_2^2 m_1^2 \int_{\mathcal{C}} d^2r' d^2r'' \Delta_E(r' - r'', z=0, m_1) \\ & -\alpha^2 \sigma_2^2 \int_{\mathcal{C}} d^2r' d^2r'' \nabla_{r'} \cdot \nabla_{r''} \Delta_E(r' - r'', z=0, m_1) + (1 \rightarrow 2) \end{aligned} \quad (5)$$

Os termos que correspondem à segunda integral em (5) apresentam uma divergência logarítmica que pode ser renormalizada em forma similar à que discutimos no capítulo 4 da função de correlação dos vórtices. A renormalização corresponde neste caso a uma renormalização multiplicativa do operador $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ e a constante de renormalização resulta depender do perímetro. Voltando ao outro

termo podemos fazer agora a mudança de variáveis $R = \frac{1}{2}(r' + r'')$ e $r = r' - r''$ e obtemos, com as técnicas mostradas na seção iii) do Apêndice D, que

$$\int_{\mathcal{I}} d^2r' d^2r'' \Delta_E(r' - r'', z=0, m_1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\pi R^2) \quad (6)$$

Concluimos, então, que para valores grandes de R , teremos

$$\Sigma(\mathcal{I}) \longrightarrow -\frac{1}{2}\alpha^2(\sigma_2^2 m_1^2 + \sigma_1^2 m_2^2)(\text{AREA}) \quad (7)$$

De acordo com o critério de Wilson isso significa que a teoria apresenta comportamento confinante.

5.3 A função de correlação $\langle \mathcal{W}(\mathcal{I}) \mathcal{W}(\mathcal{I}') \rangle$

As técnicas desenvolvidas no capítulo anterior nos permitem fazer o cálculo da função de correlação $\langle \mathcal{W}(\mathcal{I}) \mathcal{W}(\mathcal{I}') \rangle$, na aproximação de árvore e até ordem α^2 . Na formulação funcional esta função de correlação está dada por

$$\langle \mathcal{W}(\mathcal{I}) \mathcal{W}(\mathcal{I}') \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* e^{-\int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\mathcal{W}}}, \quad (1)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\mathcal{W}} = (D_{\mu} \Phi)^* D_{\mu} \Phi - V(\Phi, \Phi^*) \quad (2a)$$

e

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i\alpha A_{\mu}^{\text{ext}}(S) \quad (2b)$$

O campo externo $A_{\mu}^{\text{ext}}(S)$, de acordo com a prescrição geral para o cálculo de funções de correlação de variáveis de desordem, tem suporte numa superfície S que conecta \mathcal{I} e \mathcal{I}' .

$$A_{\mu}^{\circ xl}(S) = \int_S d^2\xi_{\mu} \delta^3(z-\xi) \quad . \quad (3)$$

Escolhendo \mathcal{C} e \mathcal{C}' como círculos de raio R , e a superfície S como o cilindro inclinado da (Fig 4-3), podemos continuar o cálculo utilizando os resultados do Apêndice D (em particular as coordenadas do cilindro inclinado da seção ii) de o dito Apêndice). No que se segue só indicamos as passagens principais.

Escrevendo

$$\langle \mathcal{V}(\mathcal{C}) \mathcal{V}(\mathcal{C}') \rangle = e^{-\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{C}')} \quad , \quad (4)$$

temos, na aproximação em que estamos trabalhando, que

$$\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \text{XXXXXXXXXX} + \text{XXXXXXXXXX} \overset{1}{\text{---}} \text{XXXXXXXXXX} \quad (5)$$

$$+ \text{XXXXXXXXXX} \overset{2}{\text{---}} \text{XXXXXXXXXX}$$

Utilizando as regras da (Fig 5-1), que continuam sendo válidas pois o único que muda é o campo externo, introduzindo a forma explícita do campo externo, e usando ainda a equação de movimento do propagador de forma análoga a como fizemos no cálculo de I_S , I_{vs} e I_v no capítulo anterior (ver (4.2.18)) temos

$$\Gamma = \Gamma^M + \Gamma^R = \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2} \left\{ -m^2 \int_S d^2\xi_{\mu} \int_S d^2\eta_{\mu} \Delta_E(\xi-\eta, m_1) + \right. \quad (6)$$

$$\left. \left(\int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}_{\xi}) \cdot \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}_{\eta}) \right) \Delta_E(\xi-\eta, m_1) \right\} + (1 \longrightarrow 2) \quad .$$

Utilizando o teorema de Stokes vemos que a segunda integral em (6) dá uma contribuição singular sobre as curvas \mathcal{C} e \mathcal{C}' . Novamente

esta contribuição pode ser renormalizada da mesma forma como as que apareceram no cálculo da função de correlação do vórtice ou no do valor esperado de $\mathcal{W}(\mathcal{C})$. O outro termo é o que nos interessa; introduzindo as coordenadas do cilindro inclinado do Apêndice D :

$$\xi = x\hat{x} + (y + z\frac{L}{H})\hat{y} + z\hat{z} \quad (7a)$$

$$d^2\xi = d\mathcal{S} = \left[\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y} - \frac{D}{H}\sin\varphi\hat{z} \right] R d\varphi dz \quad (7b)$$

temos

$$\Gamma^{\mathbf{M}} = -m_1^2 R^2 \frac{\alpha^2 \sigma^2}{z} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^H dz \int_0^H dz' \frac{e^{-m_1 |\xi - \eta|}}{4\pi |\xi - \eta|} \left[\cos\varphi \cos\varphi' + a \sin\varphi \sin\varphi' \right] + (1 \longrightarrow 2) \quad (8)$$

onde

$$a = \left[1 + \left(\frac{D}{H} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Reescalando $t = \sqrt{az}$, e fazendo o limite $\frac{D}{H} \rightarrow \infty$, o termo dos cossenos não contribui e fica

$$\Gamma^{\mathbf{M}} = \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^d dx \int_0^d dx' \frac{e^{-m_1 \sqrt{(t-t'+(E/2))^2 + A^2}}}{\sqrt{(t-t'+(E/2))^2 + A^2}} \sin\varphi \sin\varphi' + (1 \longrightarrow 2) \quad (10)$$

com

$$A^2 = 4R^2 \sin^2 \left[\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right] \sin^2 \left[\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right] \quad (11a)$$

$$E^2 = 4R^2 \sin^2 \left[\frac{\varphi - \varphi'}{2} \right] \cos^2 \left[\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right] \quad (11b)$$

$$d = \sqrt{D^2 + L^2} \quad (11c)$$

$$k_1 = \frac{m_1^2 \alpha^2 \sigma^2 R}{2} \quad (11d)$$

No limite $d \rightarrow \infty$ obtemos (ver o cálculo na seção iii) do Apêndice D para os detalhes)

$$\Gamma^{\mathbf{M}} = d \frac{k_1}{4\pi} \int_0^\infty dw \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{e^{-m_1 \sqrt{(w+(E/2))^2 + A^2}}}{\sqrt{(w+(E/2))^2 + A^2}} \text{sen}\varphi \text{sen}\varphi' +$$

$$+ (1 \longrightarrow 2) \quad (12)$$

Fazendo agora a traslação $w \rightarrow w + \frac{E}{2}$ temos

$$\Gamma^{\mathbf{M}} = \Delta\Gamma^{\mathbf{M}} + d \frac{k_1}{4\pi} \int_0^\infty dw \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{e^{-m_1 \sqrt{w^2 + A^2}}}{\sqrt{w^2 + A^2}} \text{sen}\varphi \text{sen}\varphi' +$$

$$+ (1 \longrightarrow 2) \quad (13)$$

onde

$$\Delta\Gamma^{\mathbf{M}} = d \frac{k_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{E/2} dw \frac{e^{-m_1 \sqrt{w^2 + A^2}}}{\sqrt{w^2 + A^2}} \text{sen}\varphi \text{sen}\varphi' +$$

$$+ (1 \longrightarrow 2) \quad (14)$$

Devido às propriedades de periodicidade de ε em termos das novas variáveis $v = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$ e $u = \varphi - \varphi'$ e usando o resultado (D.23) se mostra que $\Delta\Gamma^{\mathbf{M}} = 0$. O que resta, usando as novas variáveis u e v , é

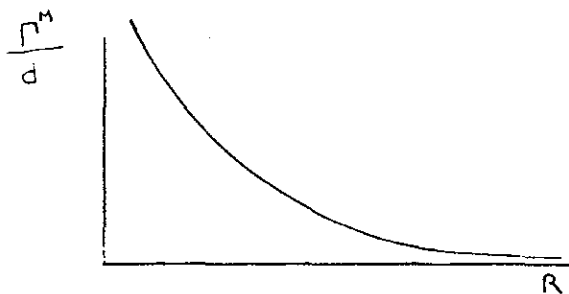
$$\Gamma^M = d \frac{k}{4\pi} \int_0^\infty dw \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi dv \frac{e^{-m_1 \sqrt{w^2 + A^2}}}{\sqrt{w^2 + A^2}} (\cos u - \cos 2v) + (1 \longrightarrow 2) \quad (15)$$

Usando [G.R 8432-9] a integração em w resulta em

$$\Gamma^M = d \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi dv K_0(m_1 A) (\cos u - \cos 2v) + (1 \longrightarrow 2) = d \frac{k}{4\pi} I^W, \quad (16)$$

sendo que no limite $d \rightarrow \infty$ temos

$$A \rightarrow 2R \left| \sin \frac{u}{2} \right| |\sin v| \quad (17)$$



Dependencia de I^W como função de R

Fig 5-4

Levando em conta o fato de A ser proporcional a R , e o comportamento da função de Bessel modificada K_0

$$\frac{d}{dR} K_0(RX) = -X K_1(RX) \leq 0, \quad X \geq 0$$

encontramos que Γ^M é uma função decrescente de R . De fato um cálculo numérico I^W nos provê com o gráfico da (Fig 5-4).

5.4 A massa do glueball

O interesse principal do cálculo que acabamos de descrever é a sua relação com o espectro de massas dos estados ligados de gluons, gluonia ou glueballs [Fritsch e Gell-Man, 1972].

Nos tratamentos de glueballs na rede ([Münster, 1981], [Bhanot e Rebbi, 1981], [Ishikawa et al, 1982 a,b], [Berg e Billoire, 1983] e, mas recentemente [Fernandez e Marinari, 1988]) os operadores de Wilson de plaqueta são utilizados para construir estados que não sejam ortogonais aos estados de glueball. Depois se utiliza o comportamento a "grandes distâncias" para determinar através do Teorema de Araki, as massas dos glueballs. Em particular O'Carroll et al [O'Carroll et al, 1985] demonstram a existência de massas isoladas no espectro dos modelos em 3-D. Em tais tratamentos o espaçamento de rede introduz um escala de comprimento que obviamente não existe na teoria no contínuo que vimos estudando.

Supondo válido este esquema de cálculo utilizado nos modelos na rede (incluindo novamente a validade do teorema de Araki para operadores não locais) o cálculo da seção anterior nos fornece a massa dos glueballs. Sendo M_a a massa dos glueballs, temos

$$M_a = \frac{\Gamma^M}{d} \quad (1)$$

A curva da Fig 5-4 se interpreta então como uma curva de calibração da massa do glueball em função de uma escala de comprimento a que representa o tamanho do glueball. Esta escala teria que ser fornecida pelos dados experimentais.

Uma interpretação mais ambiciosa tentaria fixar dinamicamente o valor de a . Contribuições de ordem superior poderiam em princípio

modificar a curva da (Fig 5-4) de forma que ela admitisse um mínimo local o qual fixaria α . Dificuldades matemáticas no cálculo das correções tem impedido por enquanto verificar esta possibilidade.

CAPÍTULO 6

-O método de quantização de monopolos

Neste capítulo vamos as consequências do princípio de dualidade ordem-desordem em sistemas em 4-D. [Marino e Stephany Ruiz, 1989] Na literatura, isto foi feito pelo menos duas vezes; uma delas por 't Hooft ['t Hooft, 1978] no artigo discutido na seção (3.3). A outra vez por Olive e Montonen [Olive e Montonen 1977]. Estes autores propuseram a hipótese de que a teoria dual a um sistema de Yang-Mills acoplado com campos de matéria poderia ser um outro sistema do mesmo tipo, mas eles não deram nenhuma prova. No entanto, o método desenvolvido por Marino [Marino, 1988] para quantizar vórtices topológicos em sistemas tridimensionais com simetria $U(1)$ quebrada pode ser, como veremos em forma explícita neste capítulo, generalizado a qualquer dimensão, desde que se reconheceu a necessidade de introduzir operadores não locais para descrever as excitações topológicas que aparecem em modelos com simetria contínua.

Em um espaço-tempo de dimensão D , com sólitons puntiformes, as variáveis de desordem estarão associadas a uma variedade $D-2$ dimensional (uma curva fechada em 3-D) e as funções de correlação serão calculadas introduzindo um "defeito" (equivalente à troca do sinal das constantes de acoplamento, feita por Kadanoff e Ceva no modelo de Ising) na integral funcional, sobre uma variedade $D-1$ dimensional (uma superfície em 3-D). Para sólitons com estrutura

mais complexa, como poderiam ser, por exemplo, vórtices com singularidades tipo corda em 4-D [Nielsen e Olesen, 1973], [Ezawa e Tze, 1976a, 1976b] é necessário introduzir novos defeitos de acordo com a geometria e a topologia que eles apresentem (ver capítulo 7).

Em 4-D, segundo se viu na seção (2.3) os modelos com sólitons pontiformes topologicamente estáveis precisam possuir, pelo menos uma simetria $O(3)$. Neste caso, as variáveis de desordem estão associadas com 2-superfícies e a prescrição para o cálculo das funções de correlação requer a introdução de defeitos na ação sobre os 3-volumes que conectam tais 2-superfícies. Neste capítulo, vamos apresentar a formulação do método de quantização dos sólitons do modelo de Georgi-Glashow em 4-D (MGG), sólitons estes que são monopolos com carga magnética $g = \frac{n\pi}{e}$. Para facilitar a visualização geométrica, tendo em conta que agora lidamos com 4-D e, para sugerir o caminho para a generalização efetiva a um número arbitrário de dimensões, vamos seguir tão estreitamente quanto for possível a discussão da quantização dos vórtices feita na seção (3.4) é no capítulo 4.

6.1 O operador de desordem

A existência de monopolos de 't Hooft-Polyakov como solução das equações de movimento no MGG, sugere um espaço de Hilbert dividido em setores com diferente carga magnética. Fora as variáveis de ordem W_μ e Φ , temos que definir um conjunto de variáveis de desordem $\mu(x, S)$ que dependem de um ponto x e de uma 2-superfície S fechada tipo espaço, e que serão interpretadas como os operadores que criando e destruindo monopolos conectam os distintos setores

do espaço de Hilbert. Esta necessidade aparece porque em (3+1)-D a caracterização do monopolo requer especificar as condições de fronteira numa 2-esfera no infinito espacial. As variáveis de desordem ficam determinadas pelo requerimento de que satisfaçam a álgebra dual, que a tempos iguais é agora [Marino e Stephany Ruiz, 1988]

$$\mu(y, S) \Phi^A(x) = \begin{cases} g^A_B \Phi^B(x) \mu(y, S) & x \notin \mathcal{J} \\ \Phi^A \mu(y, S) & x \in \mathcal{J} \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \mu(y, S) W_\mu(x) &= \\ &= \begin{cases} W_\mu(x) \mu(y, S) & x \in \mathcal{J} \\ \left[g(\omega) W_\mu(x) g^{-1}(\omega) - i \epsilon \partial_\mu(g(\omega)) g^{-1}(\omega) \right] \mu(y, S) & x \notin \mathcal{J}, \end{cases} \end{aligned} \quad (1b)$$

onde,

$$g(\omega) = \left[e^{i\omega^\alpha(x) T^\alpha} \right] \quad (1c)$$

é um elemento do grupo com conteúdo topológico não trivial e \mathcal{J} é o 3-volume mínima contido em S.

Esta álgebra tem uma interpretação análoga à que definia o operador de vórtice. Na presença de um monopolo, o espaço fica dividido em duas regiões: uma exterior onde os campos acusam a existência do monopolo ajustando seu comportamento assintótico, e outra interior na qual a existência do monopolo não é detectada. Isto está de acordo com a visão usual do monopolo como um objeto estendido [Schiff, 1967] , [Goebel, Shaw, 1968].

Mostraremos, também neste caso [Marino e Stephany Ruiz, 1988], que o operador de desordem μ , que se encontra aplicando a

generalização pertinente da prescrição de Kadanoff e Ceva, quando atua sobre os campos de ordem quantizados, fixa o comportamento assintótico destes como sendo o das soluções clássicas tipo sóliton da teoria. Portanto, aplicado sobre os estados criados a partir de um campo de ordem, ele criará um estado com características diferentes às do que compoem o setor usual do espaço de Hilbert. O operador μ pode então ser propriamente interpretado como o operador de criação dos monopolos.

6.2 A função de correlação de dois pontos.

A função de correlação $\langle \mu(x, S_1) \mu^*(y, S_2) \rangle$ para as variáveis de desordem associadas aos monopolos é obtida deformando a ação sobre um 3-volume V que une as duas 2-superfícies S_1 e S_2 , sobre os volumes mínimos \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 e sobre o 4-espaço E que fica contido entre V e os volumes mínimos \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 limitados por S_1 e S_2 [Marino e Stephany Ruiz, 1988]. Agora não temos mais uma representação gráfica para visualizar nossa construção, porém a (Fig 3-4) pode ser pensada como uma projeção tridimensional da mesma. Temos então,

$$\langle \mu(x, S_1) \mu^*(y, S_2) \rangle = Z^{-1}[0] \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}W_\mu e^{i \int d^4z \mathcal{L}_{of}^{aa}(E, V)}, \quad (1)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{of}^{aa}(E, V) = & \mathcal{L}^{aa} + \mathcal{L}_c + \int_V d^3\xi_\mu \Psi^\mu \delta^4(z-\xi) + \int_{\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2} d^3\xi_\mu X^\mu \delta^4(z-\xi) \\ & + \int_E d^4x \Omega \delta^4(z-x) \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

Por comodidade, neste caso também vamos adiar a introdução dos termos de fixação de calibre. Em (2) \mathcal{L}^{GG} é a lagrangeana de Georgi-Glashow, (Apêndice E, (6)), \mathcal{L}_c é um contratermo e V é um 3-volume arbitrário que une S_1 e S_2 , de forma que $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup V$ limita uma região E do 4-espaço. Os funcionais Ψ_μ, X_μ e Ω devem ser determinados impondo que (1) seja, de fato, independente da escolha de V . Para fazer esta imposição toma-se um novo 3-volume V' . Vamos chamar ΔE o 4-espaço limitado por V e V' , e Γ sua fronteira:

$$E' = \Delta E + E \quad (3a)$$

$$\Gamma = V' - V \quad (3b)$$

Façamos agora uma mudança de variáveis na integral funcional que corresponda a uma transformação de calibre com suporte em ΔE . O elemento de grupo é

$$g(\Delta E) = e^{i\int_{\Delta E} \omega^{\alpha T^{\alpha}}} = e^{i\int_{\Delta E} \alpha} \quad (4)$$

onde as ω 's são as funções que determinam uma transformação de calibre com carga topológica um, como a construída no Apêndice G (ver (G.16)), e são compatíveis com condições de causalidade similares às discutidas na seção (3.4) para os vórtices, que essencialmente fixam seu valor em zero fora da faixa temporal compreendida entre x_0 e y_0 . Novamente, será o fato de as ω 's ficarem numa classe de homotopia não trivial o que nos permitirá a introdução das propriedades topológicas do sistema dentro de nossa formulação.

Os campos transformados são:

$$W'_\mu(z) = g(\Delta E) W_\mu(z) g^{-1}(\Delta E) - \frac{i}{\bullet} (\partial_\mu g(\Delta E)) g^{-1}(\Delta E) \quad (5a)$$

$$\Phi'(z) = g(\Delta E)\Phi(z) \quad (5b)$$

Utilizando a expressão geral (F.3b) para a derivada da exponencial achamos (ver Apêndice F)

$$W'_\mu = W_\mu + \delta W_\mu \quad (6a)$$

onde,

$$\delta W_\mu = A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma) + \Theta_4(\Delta E)C_\mu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega) \quad (6b)$$

Em (6) explicitamos a dependência em Γ e em ΔE através das seguintes definições (com $\alpha = \omega^2 \Gamma^2$):

$$A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma) = -\frac{\alpha}{\bullet} \oint_\Gamma d^3\xi_\mu \delta^4(z-\xi) \quad (7a)$$

$$C_\mu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega) = B_\mu^{\text{ext}}(\omega) + D^{\text{ext}}(\omega)W_\mu + W_\mu D^{\text{ext}*}(\omega) + D^{\text{ext}}(\omega)W_\mu D^{\text{ext}*}(\omega) \quad (7b)$$

$$B_\mu^{\text{ext}}(\omega) = -\frac{i}{\bullet} \left[\partial_\mu e^{i\alpha} \right] e^{-i\alpha} \quad (7c)$$

$$D^{\text{ext}}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{m!} = e^{i\alpha} - 1 \quad (7d)$$

No cálculo de (6) como se descreve no Apêndice F e para levar em conta as ambigüidades que se apresentam ao fazermos produtos de distribuições tivemos que substituir a função $\Theta_4(\Delta E)$ por uma sucessão de funções suaves. Também se preferiu utilizar a série de potências para $g(\Delta E)$ para manter a generalidade desta discussão, sendo que a representação adjunta de $O(3)$, que é a que aparece no MGG, admite uma expressão fechada (Ver Apêndices F e G)

Neste ponto é conveniente observar que usando a (3b) a expressão (8b) para δW_μ pode ser reescrita na forma

$$\delta W_\mu = \tilde{W}_\mu(V') - \tilde{W}_\mu(V) \quad (8a)$$

onde

$$\tilde{W}_\mu(V) = A_\mu^{\text{ext}}(V) + \Theta_\mu(E) C_\mu^{\text{ext}} \quad (8b)$$

e $A_\mu^{\text{ext}}(V)$ é um campo externo com suporte no 3-volume arbitrário V que conecta \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2

$$A_\mu^{\text{ext}}(V) = -\frac{\alpha}{e} \int_V d^3\xi \delta^4(z-\xi) \quad (8c)$$

Utilizando agora (ver Apêndice E) que o tensor intensidade se escreve compactamente como

$$G_{\mu\nu}(W_\mu) = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu \quad (9a)$$

e definindo com ajuda do símbolo $\mathcal{D}_\mu \bullet = \partial_\mu \bullet - ie[W_\mu, \bullet]$ uma espécie de intensidade de campo externa

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(V) = \mathcal{D}_\mu \tilde{W}_\nu(V) - \mathcal{D}_\nu \tilde{W}_\mu(V) \quad (9b)$$

achamos

$$G_{\mu\nu} \longrightarrow G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} \quad (9c)$$

onde,

$$\delta G_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}(V') - \tilde{F}_{\mu\nu}(V) - ie[\delta W_\mu, \delta W_\nu] \quad (9d)$$

Em forma explícita

$$\begin{aligned}
\delta G_{\mu\nu} = & \left\{ A_{\mu\nu}^{\text{ext}}(\Gamma) - i e [A_{\mu}^{\text{ext}}(\Gamma), A_{\nu}^{\text{ext}}(\Gamma)] + \Theta_4(\Delta E) C_{\mu\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega) \right. \\
& + \left. \left[C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega) \oint_{\Gamma} d^3 \xi_{\nu} \delta^4(z-\xi) - \mu \rightarrow \nu \right] - i e \Theta_4(\Delta E) [C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega), C_{\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)] \right. \\
& - i e \left([W_{\mu}, A_{\nu}^{\text{ext}}(\Gamma)] + [A_{\mu}^{\text{ext}}(\Gamma), W_{\nu}] \right) - \\
& - i e \Theta_4(\Delta E) \left([A_{\mu}^{\text{ext}}(\Gamma), C_{\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)] + [C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega), A_{\nu}^{\text{ext}}(\Gamma)] \right) \\
& \left. - i e \Theta_4(\Delta E) \left([W_{\mu}, C_{\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)] + [C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega), W_{\nu}] \right) \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

onde $C_{\mu\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)$ é o rotacional de $C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)$ e $A_{\mu\nu}^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E)$ é o rotacional de $A_{\mu}^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E)$. Calculando este e o rotacional de $\Theta_4(\Delta E) C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)$ e reagrupando alguns termos podemos simplificar $\delta G_{\mu\nu}$ e escrever

$$\begin{aligned}
\delta G_{\mu\nu} = & -i e [\delta W_{\mu}, \delta W_{\nu}] + \\
& + \left\{ \left[\frac{\alpha}{e} \partial_{\nu} + \frac{1}{e} \partial_{\nu} \alpha + i [\alpha, W_{\nu}] - C_{\mu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega) \right] \oint_{\Gamma} d^3 \xi_{\mu} \delta^4(z-\xi) \right. \\
& \left. + \Theta_4(\Delta E) \left[\partial_{\mu} C_{\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega) - i e [W_{\mu}, C_{\nu}^{\text{ext}}(W_{\mu}, \omega)] \right] - \mu \rightarrow \nu \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

Substituindo (11) em (2) obtemos, para o lagrangeano $\mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{ag}}(V)$ que resulta ao substituir os campos transformados (5) em $\mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{ag}}(V)$ dado por (2), a expressão

$$\mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{ag}}(V) = \mathcal{L}^{\text{ag}} - \frac{1}{4} \text{tr} \left(G_{\mu\nu} \delta G^{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right) + \mathcal{L}_c(V) + \delta \mathcal{L}_c(V)$$

$$\left[\int_{V'} - \oint_{\Gamma} \right] d^3 \xi_{\mu} (\Psi^{\mu} + \delta \Psi^{\mu}) \delta^4(z-\xi) + \int_{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2} d^3 \xi_{\mu} (X^{\mu} + \delta X^{\mu}) \delta^4(z-\xi)$$

$$+ \left[\int_E - \int_{\Delta E} \right] d^4x (\Omega + \delta\Omega) \delta^4(z-x) \quad , \quad (12)$$

onde $\delta\Psi_\mu$, $\delta\Omega$ e $\delta\chi_\mu$ são as possíveis variações dos funcionais sob a transformação (5). Esta expressão é nosso ponto de partida para identificar os funcionais ψ_μ , Ω , χ_μ e $\mathcal{L}_c(V)$. Faremos isto impondo que $\mathcal{L}_{of}^{gg'}(V) = \mathcal{L}_{of}^{gg'}(V')$, quer dizer impondo que (1) independa do volume V escolhido.

A missão do termo $\mathcal{L}_c(V)$ é cancelar as contribuições singulares quadráticas nas integrais de hiper-superfície ou nas funções de Heaviside. Tendo em mente isto, o operador Ψ_μ pode ser identificado escrevendo a equação funcional que impõe que os termos com uma integral fechada se anulem. Ela é

$$\oint_\Gamma d^3\xi_\mu \Psi^\mu \delta^4(z-\xi) - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ G_{\mu\nu} \left[-\frac{\alpha}{\bullet} \partial_\mu - \frac{1}{\bullet} \partial_\mu \alpha \right. \right. \\ \left. \left. + C_\mu^{\bullet xt}(W_\mu, \omega) + i\bullet [W_\mu, \alpha] \right] \right\} = 0 \quad , \quad (13a)$$

onde para simplificar a notação supomos que $\oint d^3\xi_\mu \delta\Psi^\mu \delta^4(z-\xi)$ só contribui ao termo e renormalização.

Pode-se escrever, também, a equação que fixa Ω simplesmente procurando os termos que são lineares em $\Theta_4(\Delta E)$. Temos

$$-\Omega - \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ G_{\mu\nu} \left[C_{\mu\nu}^{\bullet xt}(W_\mu, \omega) - \right. \right. \\ \left. \left. - i\bullet \left([C_\mu^{\bullet xt}(W_\mu, \omega), W_\nu] + [W_\mu, C_\nu^{\bullet xt}(W_\mu, \omega)] \right) \right] \right\} = 0 \quad . \quad (13b)$$

As soluções a (13a) e (13b) são, respectivamente,

$$\Psi_\mu = -\frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu} H^\nu \quad , \quad (14a)$$

com,

$$H_\nu = \frac{\alpha}{\bullet} \partial_\mu + \frac{1}{\bullet} \partial_\mu \alpha - C_\mu^{\text{ext}}(W_\mu, \alpha) - i[W_\mu, \alpha] \quad , \quad (14b)$$

é

$$\Omega = -\frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \quad , \quad (15a)$$

com,

$$I_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu^{\text{ext}}(W_\mu, \alpha) - i\alpha [W_\mu, C_\nu^{\text{ext}}(W_\mu, \alpha)] \quad . \quad (15b)$$

Temos, então,

$$\delta\Psi_\mu = -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\delta G_{\mu\nu} H^\nu + (G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}) \delta H^\nu \right] \quad , \quad (16)$$

$$\delta\Omega = -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\delta G_{\mu\nu} I^{\mu\nu} + (G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}) \delta I^{\mu\nu} \right] \quad . \quad (17)$$

Para determinar a expressão (12) de $\mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{gg}}(V)$ resta identificar χ_μ e $\mathcal{L}_c(V)$. Para tanto é conveniente reordenar (14) e (15) antes de inserir-las em (12). Definindo

$$T_{\mu\nu} = \int_{\mathcal{T}_1 \omega_2} d^3\xi_\mu C_\nu^{\text{ext}}(W_\mu, \alpha) \delta^4(z-\xi) - \mu \longrightarrow \nu \quad (18)$$

encontramos que

$$\int_V d^3\xi_\mu \Psi^\mu \delta^4(z-\xi) + \int_{\mathcal{T}_1 \omega_2} d^3\xi_\mu \chi^\mu \delta^4(z-\xi) = -\frac{1}{4} \text{tr} G^{\mu\nu} \left[\tilde{F}_{\mu\nu}(V) + T_{\mu\nu} \right] \quad (19)$$

com $\tilde{F}_{\mu\nu}(V)$ dado por (9b).

A variação de (19) dá lugar a

$$\int_V d^3\xi_\mu \delta\Psi^\mu \delta^4(z-\xi) + \int_{\mathcal{T}_1\omega_2} d^3\xi_\mu \delta X^\mu \delta^4(z-\xi) = \quad (20)$$

$$-\frac{1}{4}\text{tr}\left\{\delta G^{\mu\nu}\left[\tilde{F}_{\mu\nu}(V) + T_{\mu\nu}\right] + \left[\delta G^{\mu\nu} + G^{\mu\nu}\right]\left[\delta\tilde{F}_{\mu\nu}(V) + \delta T_{\mu\nu}\right]\right\}$$

Substituindo (19) e (20) em (12) e considerando os cancelamentos propiciados pelas escolhas (14) e (15) dos funcionais Ψ_μ e Ω , achamos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{gg}'}(V) = & \mathcal{L}^{\text{gg}} + \text{tr}\left[\frac{i_0}{4}G^{\mu\nu}[\delta W_\mu, \delta W_\nu] - \frac{1}{8}\tilde{F}^{\mu\nu}(V')\tilde{F}_{\mu\nu}(V') + \frac{1}{8}\tilde{F}^{\mu\nu}(V')\tilde{F}_{\mu\nu}(V')\right. \\ & + \frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}(V')[\delta W_\mu, \delta W_\nu] - \frac{1}{8}(i_0)^2([\delta W_\mu, \delta W_\nu])^2 - \frac{1}{4}(G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu})\delta\tilde{F}^{\mu\nu}(V) \\ & + \mathcal{L}_c(V) + \delta\mathcal{L}_c(V) + \int_V d^3\xi_\mu \Psi^\mu \delta^4(z-\xi) + \int_E d^4x \Omega \delta^4(z-x) \quad (21) \\ & \left. + \int_{\mathcal{T}_1\omega_2} d^3\eta_\mu X^\mu \delta^4(z-\eta) + \delta\left(\int_{\mathcal{T}_1\omega_2} X^\mu \delta^4(z-\xi) - \frac{1}{4}\text{tr}G_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right)\right] \end{aligned}$$

onde também usamos a expressão (9d) para $\delta G_{\mu\nu}$. Lembrando a definição (18) de $T_{\mu\nu}$ vemos que a variação dos termos de suporte em $\mathcal{T}_1\omega_2$ será nula se impusermos

$$\delta\chi_\mu = \frac{1}{2}\text{tr}\delta\left[G_\mu{}^\nu C_\nu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega)\right] \quad , \quad (22a)$$

com a solução

$$\chi_\mu = \frac{1}{2}\text{tr}\left[G_\mu{}^\nu C_\nu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega)\right] \quad . \quad (22c)$$

É agora uma questão de álgebra, a qual desenvolvemos no Apêndice F (ver parte ii)), mostrar que (21) se transforma em

$$\mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{gg}'}(V) = \mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{gg}'}(V') + J(V') - J(V) -$$

$$- \delta J(V) + \mathcal{L}_c(V) - \mathcal{L}_c(V') + \delta \mathcal{L}_c(V) \quad (23a)$$

onde

$$J(V) = \text{tr} \left[-\frac{1}{8} \tilde{F}^{\mu\nu}(V) \tilde{F}_{\mu\nu}(V) + \frac{1}{4} (i_0)^2 \tilde{F}^{\mu\nu}(V) [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] \right. \\ \left. - \frac{1}{8} (i_0)^2 \text{tr}([\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)])^2 + i_0 G^{\mu\nu} [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] \right] \quad (23b)$$

É claro agora que para que $\mathcal{L}_{of}^{aa'}(V) = \mathcal{L}_{of}^{aa'}(V')$, ou seja para que a função de correlação $\langle \mu(x, S_1) \mu^*(y, S_2) \rangle$ seja independente do 3-volume V introduzido em (1), $\mathcal{L}_c(V)$ tem que tomar o valor

$$\mathcal{L}_c(V) = J(V) \quad (24)$$

Com isto completamos nosso objetivo de identificar os funcionais $\Psi_\mu, \Omega, \chi_\mu$ e $\mathcal{L}_c(V)$ que participam da definição da função de correlação das variáveis de desordem. Substituindo (14), (15), (22) e (24) em (2) temos a expressão explícita para $\mathcal{L}_{of}^{aa'}(V)$. A expressão que resulta para a função de correlação $\langle \mu \mu^* \rangle$ pode ser simplificada se observarmos que usando (6.2.18) e (6.2.22c)

$$\int_{\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} d^3 \eta_\mu X^\mu \delta^4(z - \eta) = \frac{1}{4} \text{tr} G^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

Usando isto encontramos

$$\mathcal{L}_{of}^{aa'}(V) = \text{tr} \left[-\frac{1}{4} G^{\mu\nu}(V) \tilde{F}_{\mu\nu}(V) - \frac{1}{8} \left[\tilde{F}_{\mu\nu}(V) - i_0 ([\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)]) \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} i_0 G^{\mu\nu} [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] \right] + \mathcal{L}^{aa'} \quad (25a)$$

Reordenando temos

$$\mathcal{L}_{of}^{aa}(V) = -\frac{1}{8} \text{tr} \left\{ G_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(V) - i \circ ([W_{\mu}^{\sim}(V), W_{\nu}^{\sim}(V)]) \right\}^2 + \\ + (D_{\mu} \Phi)^T D_{\mu} \Phi - V(\Phi)$$

Usando as formas explícitas (6.2.9b) e (6.2.8b) de $\tilde{F}_{\mu\nu}(V)$ e de $\tilde{W}_{\mu}(V)$ e a definição (6.2.9a) de $G_{\mu\nu}[W_{\mu}]$ vemos que

$$G_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}(V) - i \circ ([W_{\mu}^{\sim}(V), W_{\nu}^{\sim}(V)]) = G_{\mu\nu}[W_{\mu} + \tilde{W}_{\mu}(V)]$$

Substituindo em (25a) obtemos a expressão compacta

$$\mathcal{L}_{of}^{aa}(V) = -\frac{1}{8} \text{tr} \left\{ G_{\mu\nu}[W_{\mu} + \tilde{W}_{\mu}(V)] \right\}^2 + (D_{\mu} \Phi)^T D_{\mu} \Phi - V(\Phi) \quad (25b)$$

a qual exprime na melhor forma a importância da simetria de gauge que o sistema possui na hora de definir os operadores associados aos monopolos. A invariância de volume é agora evidente se observarmos a forma (8a) que toma a variação do campo de calibre sob a mudança de variáveis (5a).

Para resumir, a função de correlação de dois pontos das variáveis de desordem associadas aos monopolos do modelo de Georgi-Glashow ou aos de um sistema de Yang-Mills qualquer que os apresente, é dada por

$$\langle \mu(x, S_1) \mu^*(x, S_2) \rangle = Z^{-1}[0] \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}W_{\mu} e^{i \int d^4z \mathcal{L}_{of}^{aa}(E, V)} \quad (28)$$

ficando $\mathcal{L}_{of}^{aa}(E, V)$ determinado por (8b) e (25).

As funções de correlação $\langle \mu(S_1) \mu(S_2) \dots \mu^*(S_n) \rangle$ podem-se obter em forma imediata introduzindo em (25b) campos externos $\tilde{W}_{\mu}(V)$ dependentes de um 3-volume V que coneta as superfícies S_j . As funções de correlação mixtas $\langle \mu \dots \Phi \dots W_{\mu} \dots \rangle$ também se calculam

introduzindo campos $\tilde{W}_\mu(V)$ na exponencial da ação dentro da integral funcional que representa as funções de correlação das variáveis de ordem. Neste caso a invariância de volume só se consegue a menos de transformações de simetria g sobre estas últimas. Esta ambigüidade é a manifestação da álgebra dual neste contexto e fazendo de volta a transformação ao espaço de Minkowski pode ser relacionada com as várias ordenações possíveis dos operadores $\mu.W_\mu$ e Φ .

6.3 Realização explícita do operador de desordem.

Podemos agora obter uma expressão alternativa da função de correlação (1), transladando o acoplamento externo ao setor de matéria da lagrangeana. Para fazer isto, observemos que usando (6.2.7), a fórmula (6.2.8b) pode ser reescrita na forma

$$W_\mu + \tilde{W}_\mu(V) = g(E)W_\mu g^{-1}(E) + A_\mu^{\text{ext}}(V) + \Theta_4(E)B_\mu^{\text{ext}}(\alpha) \quad (1)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$W_\mu' = g(E)W_\mu g^{-1}(E) \quad (2)$$

na integral funcional (6.2.25) seguida da nova mudança

$$W_\mu'' = W_\mu' + A_\mu^{\text{ext}}(V) + \Theta_4(E)B_\mu^{\text{ext}}(\alpha) \quad , \quad (3)$$

chega-se à seguinte forma para a lagrangeana efetiva que aparece na função de correlação:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{QD}}(E, V) = -\frac{1}{8} \text{tr} \left\{ G_{\mu\nu} [W_\mu] \right\}^2 + \frac{1}{2} (\tilde{D}_\mu \Phi)^T D_\mu \Phi - V(\Phi) \quad , \quad (4)$$

onde agora é a derivada covariante a que carrega a distorção que

revela a presença do monopolo

$$\left(\tilde{D}_\mu \right)_B^A \tilde{\Phi}^B = \left\{ \delta_B^A \partial_\mu - i \circ \left[g^{-1}(E) \left(W_\mu - A_\mu^{\text{ext}}(V) - \Theta_4(E) B_\mu^{\text{ext}}(\omega) \right) g(E) \right]_B^A \right\} \tilde{\Phi}^B \quad (5)$$

O produto renormalizado de operadores de desordem é identificado de (5)

$$\mu_R(x, S_1) \mu_R^*(y, S_2) = e^{i \int d^4x (L_{\text{of}}^{\text{gg}} - L^{\text{gg}})} \quad (6)$$

cuja expressão explícita não achamos ilustrativa. Podemos, no entanto, fazer as transformações equivalentes às das (Fig (3-8)) e (Fig (3-9)) feitas no caso do vórtice e que, essencialmente, consistem em levar um dos sólitons para infinito, e obter a forma do operador de desordem isolado.

Sem o auxílio da representação gráfica e mais difícil visualizar a ação das transformações. A primeira delas é uma transformação de calibre do tipo (6.2.4) que faz que o suporte dos campos externos mude de um 4-espaco E limitado pelos 3-volumes $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ e V, à faixa exterior a dito 4-espaco, lembrando-se que os requerimentos de causalidade fazem que, fora da faixa temporal entre x^0 e y^0 , os campos externos se anulam sempre.

Segue-se uma sucessão de transformações que deformam o 3-volume V, que constitui a parede interior do 4-espaco resultante até o infinito. Após isto, o novo 4-espaco E' é o conjunto vazio. Fazendo por exemplo $y^0 \rightarrow \infty$, podemos obter

$$\langle \mu(x, S_1) \rangle = Z^{-1}[0] \int \mathcal{D}\tilde{\Phi} \mathcal{D}W_\mu e^{i \int d^4z L_{\text{of}}^{\text{gg}}(\mathcal{J}_1)} \quad (7)$$

onde agora,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{GG}}(\mathcal{J}_1) = -\frac{1}{8} \text{tr} \left\{ G_{\mu\nu} [W_\mu] \right\}^2 + \frac{1}{2} \left[\tilde{D}_\mu(\mathcal{J}_1) \Phi \right]^T D_\mu(\mathcal{J}_1) \Phi - V(\Phi) \quad , \quad (8a)$$

e,

$$\tilde{D}_\mu(\mathcal{J}_1) = D_\mu + i_0 \left[A_\mu^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, E=0) \right] \quad . \quad (8b)$$

O operador de desordem é, então, identificado como sendo

$$\mu(x, S_1) = e^R \quad (9)$$

$$\begin{aligned} R &= -i_0 \int \left\{ \left[D^\mu \Phi \right]^T \left[A_\mu^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, E=0) \right] \Phi \right\} d^4z \\ &= i_0 \int \left[A_\mu^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, E=0) \right]^\alpha J_\alpha^\mu \quad , \end{aligned} \quad (10)$$

onde $J_\mu^\alpha = iT_{BC}^\alpha (D_\mu \Phi)^B \Phi^C$ é a corrente clássica (ver Apêndice E).

O fator de renormalização será

$$Z_R = e^{\left[A_\mu^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, E=0) \Phi \right]^T \left[A_\mu^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, E=0) \Phi \right]} \quad . \quad (11)$$

Com a expressão (9) pode-se verificar que $\mu(x, S_1)$ efetivamente satisfaz a algebra dual. Lembremos que

$$\begin{aligned} e^R S e^{-R} &= S + [R, S] \\ &+ \frac{1}{2} [R, [R, S]] + \frac{1}{3!} [R, [R, [R, S]]] + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Os momenta conjugados são

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}^{\text{ext}}}{\delta \dot{\Phi}} = D^0 \Phi, \quad \Pi_A = (D^0 \Phi)_A \quad (13)$$

As relações de comutação canônicas são

$$[\Phi_A(x), \Pi_B(y)] \Big|_{x^0=y^0} = i \delta_{AB} \delta(x-y) \quad (14)$$

Usando a expressão explícita para o campo externo

$$A_\mu^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3-\mathcal{J}_1, E=\emptyset) = -\frac{\alpha}{\circ} \int_{\mathbb{R}^3-\mathcal{J}_1} d^3 \xi_\mu \delta^4(z-\xi), \quad (15)$$

ou seja,

$$A_1^{\text{ext}} = 0, \quad (16a)$$

$$A_0^{\text{ext}}(V=\mathbb{R}^3-\mathcal{J}_1, E=\emptyset) = -\frac{\alpha}{\circ} \int_{\mathbb{R}^3-\mathcal{J}_1} d^3 \xi_0 \delta^4(z-\xi), \quad (16b)$$

porque, sendo o 3-volume neste caso, tipo espaço, o quadrivetor perpendicular a ele só tem componente temporal. Fazendo a integral em z na eq.(9b) temos

$$R = \int d^3 x \left\{ \Pi^T(x) \left[\alpha(x) \Phi(x) \right] \right\} \quad (17)$$

Calculemos agora o comutador de R , que é o expoente da variável de desordem com Φ (O qual é a variável de ordem),

$$\begin{aligned} [R, \Phi_A(x)] \Big|_{x^0=y^0} &= \int_{\mathbb{R}^3-\mathcal{J}_1} d^3 y \left\{ [\Pi_B(y), \Phi_A(x)] \alpha_{BC}(y) \Phi_C(y) \right\} \\ &= -i \alpha_{AB}(x) \Phi_B(x) \Theta_3(\mathbb{R}^3-\mathcal{J}_1) \quad (18) \end{aligned}$$

Daqui concluímos que

$$[\underbrace{R, [R, [R, \dots [R, \Phi_i(x)] \dots]}_{N \text{ vezes}}] = \left[-i \Theta_3(\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1) \alpha(x) \right]_{AB}^N \Phi_B(x) . \quad (19)$$

Substituindo em (12) achamos

$$\mu(y, S_1) \Phi(x) = e^{-i \alpha(x) \Theta_3(\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, x)} \Phi(x) \mu(y, S_1) . \quad (20)$$

O cálculo da relação de comutação entre μ e W_μ é um pouco mais trabalhoso, porém, também imediato. Utilizando a equação de movimento

$$\left(D^\nu G_{\nu\mu} \right)^\alpha = \bullet J_\mu^\alpha , \quad (21)$$

e substituindo em (9b)

$$R = i \int \left[A_\mu^{\text{ext}}(V = \mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1, E = \emptyset) \right]_\alpha \left(D^\nu G_{\nu\mu} \right)^\alpha d^4 z , \quad (22)$$

que usando a forma explícita de A_μ^{ext} resulta ser

$$R = -i \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1} d^3 y \omega^a(y) (D_i G^{i0})^a . \quad (23)$$

Os momenta conjugados são, agora

$$\Pi_\alpha^i = G_\alpha^{i0} . \quad (24)$$

R toma a forma

$$R = -i \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1} d^3 y \omega^a(y) D_i^{ab} \Pi^{ib}(y) . \quad (25)$$

Da mesma forma que no caso dos vórtices dado que a estrutura de calibre é fundamental para a existência dos distintos setores do espaço de Hilbert, é preciso considerar um esquema tipo Gupta-Bleuer na hora de considerar operadores quânticos. Nesse caso as relações de comutação são canônicas

$$[\Pi^{ia}(y), W^{jb}(x)] = i\delta^{ab}\eta^{ij}\delta^3(x-y) \quad (26)$$

Temos:

$$[R, W^{jb}(x)] = - \frac{i}{\circ} \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{J}_1} d^3y \omega^a(y) \left[\partial_i [\Pi^{ia}(y), W^{jb}(x)] - i\omega^{ic}(y) T_{ad}^c [\Pi^{id}(y), W^{jb}(x)] \right] \quad (27)$$

Resulta, então

$$[R, W^{jb}(x)] = \begin{cases} - \left(\frac{1}{\circ} \omega^b(x) + \varepsilon^{bcd} W_c^j(x) \omega^a(x) \right) & x \notin \mathcal{J}_1 \\ 0 & x \in \mathcal{J}_1 \end{cases} \quad (28)$$

Na região em que é diferente de zero, este resultado não é outra coisa que a variação em primeira ordem em ω do campo W^j , quando submetido a uma transformação de calibre com elemento de grupo,

$$g = e^{-i\omega^a T^a} \quad (29)$$

Calculando o seguinte comutador

$$[R, [R, W^{bj}(x)]] = \begin{cases} \varepsilon^{abc} \omega^b(x) \left(\frac{1}{e} \partial^j \omega^c(x) + \varepsilon^{ced} W_{jd}^e(x) \omega^e(x) \right) & x \notin \mathcal{J}_1 \\ 0 & x \in \mathcal{J}_1 \end{cases}$$

e os subsequentes, e usando (12), encontramos que,

$$\begin{aligned} \mu(y, S) W^j(x) &= \\ &= \begin{cases} W^j(x) \mu(y, S) & x \in \mathcal{J}_1 \\ \left[g(\omega) W^j(x) g^{-1}(\omega) - i \theta^j(g(\omega) g^{-1}(\omega)) \right] \mu(y, S) & x \notin \mathcal{J}_1 \end{cases} \quad (30) \end{aligned}$$

que é a álgebra dual esperada. O sinal (-) que aparece no expoente de (40) e (49) indica que $\mu(y, S)$ é o operador de criação dos antimonopólos. É claro que $\mu(y, S)$ e $\mu^*(y, S)$ satisfazem álgebras com sinais diferentes.

6.4 Fixação de calibre e invariância BRS

Nesta seção mostramos que a fixação de calibre e a introdução dos fantasmas de Faddeev e Popov pode ser feita sem praticamente ter que modificar a construção da seção (6.2). O tratamento é bastante similar ao dado na seção (4.1) para o MHA.

Ao fixar o calibre, o cálculo da função de correlação $\langle \mu(S_1) \mu^*(S_2) \rangle$ deve ser feito acoplado o campo $\tilde{W}_\mu(V)$ não mais com a lagrangeana clássica \mathcal{L}^{gg} e sim com a lagrangeana quântica. Esta varia de acordo com a fase que estejamos considerando e será $\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{gg, S}$ dada por (E.16a) na fase simétrica e $\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{gg, Q}$ na fase em que a simetria é espontaneamente quebrada. Nos dois casos ela tem a estrutura $\mathcal{L}_{\text{Quan}} = \mathcal{L}_E^{gg, F} + \mathcal{L}_{FC} + \mathcal{L}_{Fan}$ sendo os dois últimos termos o de fixação de calibre e o dos fantasmas de Faddeev e Popov os quais tem a forma

$$\mathcal{L}_{FC} = \frac{1}{2\kappa} F^a F^a \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{Fan} = \frac{1}{i} \int d^d y \eta_a^*(y) \frac{\delta F^a(y)}{\delta \omega_b(x)} \eta^b(x) \quad , \quad (2)$$

onde η^a são os fantasmas de Fadeev e Popov e $F^a=0$ é a condição de calibre. Esta lagrangeana é invariante sob as transformações de BRS [Becchi et al,1975] as quais sobre os campos Φ e W_μ correspondem a transformações de calibre com elemento de grupo $g(\eta)$ dado por

$$g(\eta) = e^{i\Omega^a T^a} \quad (3)$$

com $\Omega^a = \bar{\zeta}\eta + \bar{\eta}\zeta$. Aqui ζ é um parâmetro grassmaniano constante. Fazendo a transformação de BRS com

$$g(\eta) = g(\eta')g(\Delta E) \quad (4)$$

encontramos que as parcelas \mathcal{L}_{FC} e \mathcal{L}_{Fan} são invariantes e reproduzindo os cálculos da seção (6.2) podemos estabelecer que

$$G_{\mu\nu}[W_\mu] \longrightarrow g(\eta')G_{\mu\nu}[W_\mu + \delta W_\mu]g^{-1}(\eta') \quad (5)$$

com δW_μ dado por (6.2.7b). Daqui concluímos que fazendo o acoplamento do campo $\tilde{W}_\mu(V)$ com a lagrangeana quântica podemos, devido à invariância de BRS, escrever funções de correlação invariantes sob a escolha do volume V , recuperando desta forma os resultados da seção (6.2)

CAPÍTULO 7

O operador da corda e outras generalizações

7.1 Operadores de sólitons em D dimensões

O método sistemático para construir as funções de correlação de operadores de desordem em sistemas com simetrias não abelianas desenvolvido nos capítulos anteriores pode ser estendido a sistemas em qualquer número de dimensões.

Modelos em D dimensões com grupo de simetria podem apresentar sólitons puntiformes estáveis quando os mínimos do potencia clássico estão localizados numa variedade isomorfa a uma esfera S_{D-2} . Isto acontece por exemplo quando a simetria é quebrada e o grupo remanescente de simetria H é tal que G/H é isomorfo a S_{D-2} . Nesse caso os sólitons podem ser caracterizados por transformações singulares de simetria

$$g = e^{i\omega^a T^a} \quad (1)$$

que permitem (classicamente) passar de uma classe de homotopia para outra. As variáveis de desordem deste sistema devem depender de hiper-superfícies fechadas tipo espaço S_{D-2} de dimensão D-2. As funções de correlação destas variáveis por sua vez devem ser escritas em termos de hiper-superfícies V_{D-1} D-1 dimensionais embora como nos casos anteriormente tratados se tem que ter invariância sob a escolha de V_{D-1} . Para o sistema com campos de calibre W_μ e campos de matéria Φ_i numa representação adequada para permitir a ocorrência do mecanismo de Higgs a função de correlação

pode ser escrita generalizando nossas discussões anteriores na forma

$$\langle \mu(x, S_{1,D-2}) \mu^*(y, S_{2,D-2}) \rangle = \int \mathcal{D}W_\mu \mathcal{D}\Phi_i e^{i \int \mathcal{L}_{of}^D d^D z} \quad (2)$$

onde

$$\mathcal{L}_{of}^D = \mathcal{L}^D \left[G_{\mu\nu}(W_\mu) \rightarrow G_{\mu\nu}(W_\mu + \tilde{W}_\mu(V_{D-1}), D_\mu \Phi, \Phi) \right] \quad (3a)$$

com

$$\tilde{W}_\mu(V_{D-1}) = A_\mu^{ext}(V_{D-1}) + \Theta_D(E_D) C_\mu^{ext} \quad (3b)$$

Nestas expressões \mathcal{L}^D é a lagrangeana do sistema, E_D é a porção do espaço tempo contida em V_{D-1} , C_μ^{ext} é dado por (6.2.7b) e

$$A_\mu^{ext}(V_{D-1}) = -\frac{\omega^{aT^a}}{\bullet} \int_{V_{D-1}} d^{D-1} \xi_\mu \delta^D(z-\xi) \quad (4)$$

A partir e (2) podemos achar uma expressão explícita para o operador de criação de sólitons $\mu(x, S_{D-2})$

$$\mu(x, S_{D-2}) = e^{-i \int_{(R_{D-1} - \mathcal{J}_{D-1})} d^{D-1} \xi^0 \omega^{aT^a} J_0} \quad (5)$$

onde \mathcal{J}_{D-1} é a hiper-superfície tipo espaço D-1 dimensional contida em S_{D-1} e J_μ é a corrente conservada do sistema.

Utilizando regras de comutação canônicas que fazem que a integral de J_μ seja o gerador das transformações de calibre encontramos a álgebra dual

$$\mu(x, S^{D-1}) \Phi(y) = \begin{cases} \Phi(y) \mu(x, S^{D-1}) & y \in \mathcal{J}_{D-1} \\ \mu(x, S^{D-1}) \Phi(y) & y \in \mathcal{J}_{D-1} \end{cases} \quad (6)$$

que tem a mesma interpretação que as discutidas anteriormente.

7.2 Cordas como linhas de fluxo em teorias de calibre

Até agora temos considerado sistemas nos quais os sólitons clássicos que originam a existência de novos setores no espaço de Hilbert são objetos puntiformes. Não são, no entanto sistemas deste tipo, os únicos que permitem a aplicação do método de quantização de excitações topológicas baseado na estrutura ordem desordem. De fato uma adequada escolha do tipo de hipervariiedade do qual vão depender as variáveis de desordem associadas com os sólitons do modelo considerado nos permite lidar com sistemas que possuam sólitons tipo corda e ainda com estruturas mais complicadas. Nesta seção vamos tratar como exemplo uma das generalizações possíveis de nossa construção. Vamos considerar a estrutura das variáveis duais num sistema que possui sólitons estendidos tipo corda (para um tratamento das propriedades clássicas destes, ver [Ezawa e Tze, 1975a,b]). O sistema em questão não é outro que o MHA em 4-D e tem o interesse adicional de ter sido proposto como um meio de reconciliar o sucesso fenomenológico dos modelos de cordas para hadrons com as muitas vantagens da cromodinâmica quântica [Nielsen e Olesen, 1973].

Os vórtices de Nielsen e Olesen que discutimos na seção (2.2) foram construídos inicialmente no MHA em 4-D com simetria axial. Eles foram identificados [Nielsen e Olesen, 1973] com argumentos semi-heurísticos com a corda dos modelos duais. Tassie independentemente [Tassie, 1973 a,b] chegou ao mesmo resultado. O

argumento para esta identificação é que para uma linha de fluxo magnético como a representada pelo vórtice, a ação clássica é proporcional à área varrida por ela no seu movimento.

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \sim \int d^2A \quad (1)$$

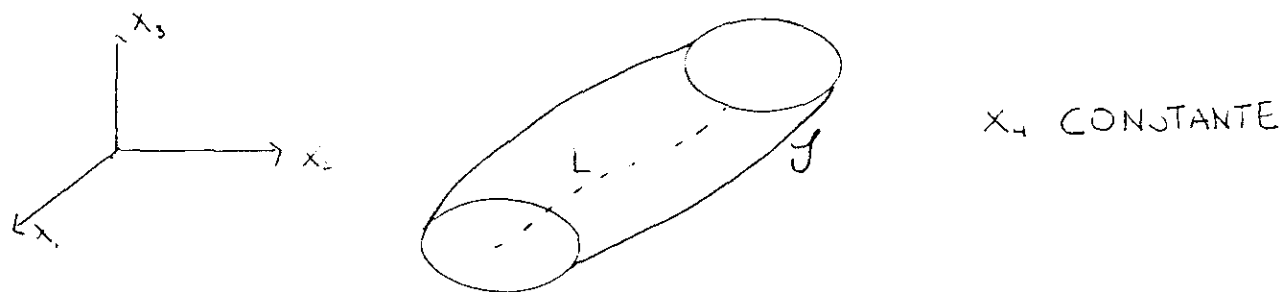
Este é precisamente o conteúdo da escolha da ação de Nambu para a corda bosónica (sobre este ponto ver também [Förster, 1974] e [Tze, 1974]). Tassie, Parisi [Parisi, 1975] 't Hooft ['t Hooft, 1974b] e Nambu [Nambu, 1974] observaram também que as linhas de fluxo magnético, quando finitas tem que começar e acabar em monopolos magnéticos. Comparando com o que ocorre para o modelo da corda a qual leva quarks pendurados nos extremos para levar em conta os números quânticos dos baryons e dos mésons, se chega à identificação de quarks e monopolos que usando outro tipo de argumentos já tinha sido proposta por Schwinger [Schwinger, 1969]

O quadro físico que emerge é bem atrativo. Os quarks possuem carga magnética (ou tipo magnético em modelos não abelianos mais realísticos) e se encontram unidos aos extremos de uma corda que é simultaneamente uma linha de fluxo magnético e uma perfuração do vacuo de Higgs. O confinamento aparece porque para separar os quarks que fazem parte de um hádron é necessário esticar a linha de fluxo que os une e isto custa uma energia por unidade de comprimento que é independente da separação entre os quarks.

A melhor compreensão de alguns aspectos das teorias de calibre desde que as idéias anteriores foram propostas, especialmente da importância da liberdade assintótica [Politzer, 1973] tem descartado a possibilidade de que as interações fortes estejam descritas por uma teoria de calibre com a simetria quebrada. Sendo que são estas últimas as que admitem linhas de fluxo magnético

como soluções o quadro anterior teve que ser abandonado. Em seu lugar se tem tentado construir ['t Hooft, 1974b, 1978, 1979, 1981] [Mandelstam, 1975, 1979] uma nova interpretação segundo a qual os quarks estão interconectados por linhas de fluxo cromoeletrico. Apesar disto a construção do operador quântico associado com as linhas de fluxo é ainda de muito interesse para estabelecer a vinculação entre as teorias de calibre e os modelos de cordas.

As variáveis de ordem no modelo de Higgs Abelian em $D=4$ são novamente os campos $\Phi(x)$ e $A_\mu(x)$. Devido à geometria dos sólitons deste modelo, como variáveis de desordem devemos escolher um conjunto de operadores $\mu(\mathcal{J}, L)$ que dependem de um caminho L e de um de uma 2-superfície fechada \mathcal{J} (ver a (Fig 7-1)).



Suporte do campo externo associado ao operador da corda

Fig 7-1

A dependência explícita no caminho L leva em conta a linha de singularidades necessárias para estabilizar o vórtice em 4-D enquanto a dependência em \mathcal{J} é a generalização adequada do que acontece no caso dos sólitons puntiformes.

A função de correlação para as variáveis de desordem tem a forma

$$\langle \mu(\mathcal{J}_1, L_1) \mu^*(\mathcal{J}_2, L_2) \rangle = Z[0]^{-1} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}A_\mu e^{i \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{NO}}} \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{of}}^{\text{NO}} = & \mathcal{L}^{\text{HA}} + \mathcal{L}_c + \int_V d^3 \zeta_{\mu} \psi^{\mu} \delta^4(z-\zeta) + \\ & \int_{T_1 \cup T_2} d^3 \eta_{\mu} \chi^{\mu} \delta^4(z-\eta) + \int_S d\zeta^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} \delta^4(z-\zeta) \end{aligned} \quad (3)$$

Em (3) T_1 e T_2 são os 3-volumes contidos em \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 , V é um 3-volume arbitrário tal que $V \cup T_1 \cup T_2$ feche uma região E do espaço tempo e S é uma superfície arbitrária com bordas L_1 e L_2 .

Para fixar os operadores ψ_{μ} , χ_{μ} e $\Omega_{\mu\nu}$ e o termo de renormalização \mathcal{L}_c temos que considerar um novo 4-Espaço E' tal que

$$E' = E + \Delta E \quad , \quad V' = V + \Delta V \quad (4)$$

Para continuar faremos uma mudança de variáveis que corresponda a fazer uma transformação de calibre com uma função de calibre α que leve em conta as propriedades dos sólitons tipo corda. A escolha natural da função α será

$$\alpha(x) = \arg \frac{x_1}{x_2} \quad (5)$$

e suas generalizações. Estas funções se caracterizam pela condição

$$[\partial_{\mu}, \partial_{\nu}] \alpha_s(z) = \int_S \int_{L_2}^{L_1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \delta^4(z-\zeta) d\zeta_{\rho} \wedge d\zeta_{\sigma} \quad (6)$$

onde S é uma superfície arbitrária com bordas L_1 e L_2 . Fazendo a mudança de variáveis

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \frac{1}{\bullet} \partial_{\mu} \left[\Theta_4(\Delta E) \alpha_s(z) \right] \quad (7a)$$

$$\Phi \longrightarrow e^{-i \left[\Theta_4 (\Delta E) \alpha_S(z) \right]_{\Phi}} \quad (7b)$$

e refazendo as demonstrações do capítulo 6 chegamos a

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}^{\text{NO}} = -\frac{1}{4} \left[F_{\mu\nu} (A_{\mu} + \tilde{A}_{\mu}) \right]^2 + \left[D_{\mu} \Phi \right]^* D_{\mu} \Phi - V(\Phi) \quad (8)$$

onde novamente

$$\tilde{A}_{\mu} = -\frac{\alpha_S}{\epsilon} \int_V d^3 \xi \delta_{\mu}^4(z-\xi) + \Theta_4(E) \partial_{\mu} \alpha_S \quad (9)$$

A singularidade de superfície que aparece ao aplicar derivadas duplas sobre α_S são fundamentais para caracterizar propriamente os sólitons deste sistema. além disto o fato que ela apareça em (8) faz que esta expressão seja o ponto de partida natural para tentar a identificação netre os sólitons tipo corda de modelos como o que estamos tratando e as cordas dos modelos duais.

Em dimensão maior que 4 existem modelos que admitem sólitons estáveis cujas singularidades formem variedades de dimensão maior que um. Para sólitons com singularidades sobre uma hipersuperfície D-n dimensional as funções de correlação dependerão, através de relações do tipo (6), de hiper-superfícies de dimensão D-n+1 .

Handwritten notes:
 $\int_V d^3 \xi \delta_{\mu}^4(z-\xi)$
 $\sim \delta_{\mu}^4(z-\xi)$
 $\sim \delta_{\mu}^4(z-\xi)$

CAPÍTULO 8

Conclusões

O estudo das propriedades dos sólitons tem atraído muito interesse e continua a fazê-lo. A aparição de estados solitônicos em modelos de supercordas [Lazarides et al,1987] e em modelos de interação eletro-fracas [Baacke et al,1987], a existência de sólitons em teorias de supersimetria [Townsend,1988] e de supergravidade [Aichelburg e Embacher,1988] e o estudo dos efeitos produzidos por sólitons a temperatura finita [Grigoriev e Rubakov, 1988] além do interesse crescente nos skyrmions dos modelos quirais são alguns dos tópicos da física de sólitons que foram estudados recentemente. Mesmo assim a inclusão dos estados solitônicos numa forma harmoniosa dentro do formalismo da Teoria Quântica de Campos principalmente em $D \geq 2$ continua sendo um dos obstáculos para decifrar o completo significado que ela possui.

O trabalho apresentado nesta tese está enquadrado dentro de um programa mais amplo [Marino e Swieca,1980] [Marino et al,1982] [Marino, 1988] [Marino e Stephany Ruiz,1989] que pretende corrigir esta situação e que está baseado no princípio de dualidade ordem-desordem. Ele constitui um avanço interessante devido a que desenvolve este programa de forma que o estudo das variáveis duais agora pode ser feito para sistemas i)em dimensão arbitrária, ii)com simetrias não abelianas e iii)com sólitons não necessariamente puntiformes. Além disto os cálculos mostrados nos

capítulos 4 e 5 mostram o caminho a seguir para obtenção de expressões explícitas das funções de correlação de sólitons em dimensão maior que 2.

A necessidade de considerar operadores não locais que já tinha aparecido no tratamento em 3-D [Marino, 1988] resulta fundamental para levar em conta as propriedades topológicas dos sólitons. Esta não localidade dos operadores por outro lado não representa um obstáculo maior para nossa formulação que o que representa para a descrição dos modelos de calibre usando laços de Wilson ou dos hádrons utilizando o modelo da bolsa. De fato as técnicas necessárias para o cálculo de funções de correlação de variáveis de desordem podem ser de utilidade no cálculo das funções de correlação de laços de Wilson (ver por ex. [Abud et al, 1982]) e de outros objetos não locais.

Nosso trabalho, por utilizar um tratamento que não é o mais usual para estudar os problemas encarados, tem também interesse conceitual. Os sistemas físicos reais têm em geral complicações que não são fáceis de levar em conta com todos seus detalhes nos modelos teóricos. Felizmente muitos deles apresentam características comuns as quais naturalmente podem ser mais facilmente compreendidas nos sistemas mais simples. É importante desenvolver novos métodos que enfatizem uma ou várias destas características comuns a varios sistemas. Nosso trabalho e em geral todo o conjunto de trabalhos já citados com os quais está relacionado enfatizam o princípio de dualidade ordem-desordem o qual prova ser de grande utilidade na hora de discutir uma ampla variedade de sistemas.

Outro aspecto interessante das técnicas utilizadas é que elas

oferecem um bom exemplo no qual os métodos funcionais e os métodos operatoriais se complementam de uma maneira efetiva para explicar o conteúdo físico dos modelos estudados.

Os resultados obtidos neste trabalho podem ser o ponto de partida ou estão estreitamente relacionados com varias aplicações de grande interesse. Entre as aplicações à física de partículas estão a utilização de nossos métodos para o estudo de monopolos em modelos de grande unificação, a conexão entre os modelos de cordas e os sólitons estendidos discutida no capítulo 7, a relação entre a bosonização abeliana e não abeliana [Witten,1984] de modelos com simetrias não abelianas e a quantização dos skyrmions dos modelos quirais. Entre as aplicações à física da materia condensada estão a discussão dos vórtices nos modelos de supercondutividade e superfluidez (ver por ex. [Wiegel,1987]) e as ideias recentes que vinculam os sólitons do modelo σ com simetria $O(3)$ em 3-D com os superconductores de alta temperatura [Dzyaloshinskii et al,1988] [Furuya e Marino,1988].

Para concluir parece-nos interessante mencionar que as ideias de dualidade e a utilização de operadores não locais aparecem também nos trabalhos recentes de Schroer [Schroer,1988], Fröhlich e Marchetti [Fröhlich e Marchetti,1988] e Sathiapalan [Sathiapalan, 1987].

APÊNDICE A

Cálculos perturbativos

i) Rotação ao espaço euclidiano

Neste apêndice estabelecemos a notação e as convenções escolhidas na construção da série perturbativa para as funções de correlação de sólitons versão euclidiana dos modelos contemplados neste trabalho (por ex. [Itzykson e Zuber, 1980]).

Vamos começar discutindo a rotação de Wick que é necessário fazer na integral funcional para que ela fique definida. Lembremos que o propagador de Feynman no espaço de Minkowski é:

$$\Delta_F(x, m) = \int d^d k \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo. Ele satisfaz a equação de Klein Gordon inhomogênea com corrente unitária:

$$\left(\square + m^2 \right) \Delta_F(x, m) = -\delta^d(x) \quad (2)$$

A rotação de Wick no espaço de momentos é da forma

$$ik_d = k_0 \quad , \quad (3)$$

No espaço direto é conveniente fazer a rotação de forma que o produto escalar tenha a regra de transformação simples:

$$x^{\mu} k_{\mu} \longrightarrow \sum_{i=0}^d x_i k_i \quad (4a)$$

ou seja

$$ix^0 = x^d \quad (4b)$$

O propagador euclidiano é então

$$\Delta_{\mathbf{E}}(x, m) = \int d^d k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \quad (5a)$$

e cumpre a equação

$$\left(\square - m^2 \right) \Delta_{\mathbf{E}}(x, m) = -\delta^d(x) \quad (6a)$$

Observemos que então

$$i\Delta_{\mathbf{F}}(x, m) \longrightarrow \Delta_{\mathbf{E}}(x, m) \quad (6b)$$

Em 3-D, $\Delta_{\mathbf{E}}(x, m)$ é calculado explicitamente e vale

$$\Delta_{\mathbf{E}}(x, m) = -\frac{e^{-m|x|}}{4\pi|x|} \quad (5b)$$

O efeito da rotação de Wick sobre cada par de índices de Lorentz contraídos no espaço de coordenadas é mudar um sinal

$$A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \longrightarrow (-1)^k A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \quad (7)$$

Para maior comodidade na hora de definir o funcional gerador das funções de Green, a lagrangeana euclidiana absorve na sua definição um sinal adicional que provém do elemento de volume da ação. Quer dizer que

$$iS = i \int d^d x \mathcal{L} \longrightarrow - \int d^d x \mathcal{L}_{\mathbf{E}} \equiv -S_{\mathbf{E}} \quad (8)$$

A regra para construir a lagrangeana euclidiana a partir da lagrangeana minkowskiana é mudar um sinal global e multiplicar cada termo por um fator (-1) elevado ao número de índices de Lorentz contraídos.

ii) O funcional gerador

Para fixar a notação, no que se segue, trabalharemos com o exemplo concreto do Modelo de Higgs Abelião (MHA) Apêndice C), mas acrescentando os índices do grupo as expressões apresentadas são válidas para qualquer outra teoria de calibre.

O funcional gerador das funções de Green euclidianas do modelo de Higgs Abelião (MHA) na formulação de integrais de trajetória é

$$Z_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* e^{-S_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*]} \quad (9a)$$

onde $S_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*]$ é dado por

$$S_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*] = \int d^d x \left(\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA}, F} + J_\mu A_\mu - K\Phi^* - \Phi K^* - l^* \eta - \eta^* l \right) \quad (9b)$$

sendo que no espaço euclideano os campos η e η^* são independentes.

Aqui $\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA}, F}$ refere-se à lagrangeana clássica acrescentada pelos termos de fixação de calibre; η e η^* são os fantasmas de Faddeev e Popov necessários para construir tais termos. O índice F distingue entre as duas fases, simétrica e quebrada nas quais pode se apresentar o sistema. Por último J_μ, K, K^*, l e l^* são correntes externas arbitrárias, sendo que as duas últimas são grassmanianas.

As funções de Green euclidianas são:

$$G_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}^E(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_l) =$$

$$Z_E^{-1}[0] \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2) \dots A_{\mu_m}(x_m) \quad (10a)$$

$$\Phi(y_1) \Phi(y_2) \dots \Phi(y_n) \Phi^*(z_1) \Phi^*(z_2) \dots \Phi^*(z_l) e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{q,F}^E} =$$

$$Z_E^{-1}[0] (-1)^m \frac{\delta}{\delta J_{\mu_1}(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_2}(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J_{\mu_m}(x_m)} \frac{\delta}{\delta K^*(y_1)} \frac{\delta}{\delta K^*(y_2)} \dots \quad (10b)$$

$$\dots \frac{\delta}{\delta K^*(y_n)} \frac{\delta}{\delta K(z_1)} \frac{\delta}{\delta K(z_2)} \dots \frac{\delta}{\delta K(z_l)} Z_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*] \Big|_{J_\mu, K, K^*, l, l^* = 0}$$

Para as funções conexas se define o funcional gerador das funções conexas $W_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*]$. É dado por

$$Z_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*] = e^{-W_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*]} \quad (11)$$

Então as funções conexas são

$$G_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}^E(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_l) =$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_1}(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_2}(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J_{\mu_m}(x_m)} \frac{\delta}{\delta K^*(y_1)} \frac{\delta}{\delta K^*(y_2)} \dots \quad (12)$$

$$\dots \frac{\delta}{\delta K^*(y_n)} \frac{\delta}{\delta K(z_1)} \frac{\delta}{\delta K(z_2)} \dots \frac{\delta}{\delta K(z_l)} W_E[J_\mu, K, K^*, l, l^*] \Big|_{J_\mu, K, K^*, l, l^* = 0}$$

Para obter a série perturbativa tem-se que isolar a parte de interação da lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{E, \text{Quon}}^{\text{HA}, F} = \mathcal{L}_0^{\text{HA}, F}(A_\mu, \Phi, \eta) + \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{HA}, F}(A_\mu, \Phi, \eta) \quad (13)$$

onde $\mathcal{L}_0^{\text{HA}, F}(A_\mu, \Phi, \eta)$ é a soma das parcelas livres correspondentes a cada um dos campos que aparecem na lagrangeana. Isto permite fatorar o funcional gerador Z_E :

$$Z_E[J_\mu, K, K^*, t, t^*] = e^{-\int d^d x L_{\text{int}}^E \left[-\frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{\delta}{\delta K^*}, \frac{\delta}{\delta K}, \frac{\delta}{\delta t^*}, \frac{\delta}{\delta t} \right]} Z_E^0[J_\mu, K, K^*, t, t^*] \quad (14)$$

onde $Z_E^0[J_\mu, K, K^*, t, t^*]$ tem por sua vez a expressão fatorada

$$Z_E^0[J_\mu, K, K^*, t, t^*] = Z_A^0[J_\mu] Z_\Phi^0[K, K^*] Z_\eta^0[t, t^*] \quad (15)$$

Em (15), os fatores no segundo termo são os funcionais geradores das lagrangeanas livres correspondentes aos campos A_μ , Φ e η respectivamente. Eles estão dados pelas seguintes expressões:

$$Z_A^0[J_\mu] = \mathcal{N}^A e^{-\frac{1}{2} \langle J_\mu(x) D_{\mu\nu}^E(x-y, m) J_\nu(y) \rangle} \quad (16)$$

$$Z_\Phi^0[K^*, K] = \mathcal{N}^\Phi e^{-\frac{1}{2} \langle K^*(x) \Delta^E(x-y, m_1) K(y) \rangle} \quad (17)$$

$$Z_\eta^0[t^*, t] = \mathcal{N}^\eta e^{-\frac{1}{2} \langle t^*(x) \Delta^E(x-y, m_2) t(y) \rangle} \quad (18)$$

onde as \mathcal{N}^a são fatores constantes, $\langle \rangle$ indica integração em todas as variáveis e $D_{\mu\nu}^E$ e Δ^E são os propagadores euclidianos livres que se relacionam com os de Feynman pela transformação genérica

$$iD^F \longrightarrow D^E \quad (19)$$

No MHA, na fase na qual a simetria $U(1)$ é espontaneamente

quebrada é conveniente decompor o campo escalar nas suas partes real e imaginária. Então, por sua vez, (17) se decompõe em dois fatores, um deles relacionado com a parte imaginária de Φ , e o outro relacionado com a parte real.

Para simplificar a notação no que se segue, no lugar da fórmula (14) vamos escrever esquematicamente

$$Z^E[J] = e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{\text{int}}(\frac{\delta}{\delta J})} Z_0[J]$$

que tem a mesma estrutura.

Para obter a série perturbativa para as funções de Green conexas se define

$$\delta = Z_0^{-1}[J] \left(e^{-\int d^d x \mathcal{L}_{\text{int}}(\frac{\delta}{\delta J})} - 1 \right) Z_0[J]$$

e se observa que

$$W^E[J] = -\ln Z^E[J] = W_0[J] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \delta^n}{n} \quad (20)$$

onde $W_0[J]$ é a soma dos expoentes de (16), (17) e (18). A partir de (20) e (12) estabelecem-se as regras de Feynman da teoria. Estas regras de Feynman permitem obter diretamente Z^E como a soma de todos os diagramas conexas e desconexos sem pernas externas. Deduz-se então que W^E é menos a soma de todos os diagramas conexas.

Na presença de campos externos, as derivadas funcionais em (12) e (20) vão passando por cima destes, deixando-os pendurados nas pernas externas dos gráficos. Desta maneira o valor esperado dos

operadores de desordem

$$\langle \mu(\mathcal{E}, x) \mu^*(\mathcal{E}', y) \rangle = e^{-\Lambda} \quad (21)$$

que como vimos em geral se obtém acoplando um campo externo, vem dado pela soma de todos os gráficos com um número arbitrário de campos externos A_{μ}^{ext} pendurados nas pernas externas. Em particular

$$-\Lambda = \sum \text{GRAFICOS COM PERNAS EXTERNAS } A_{\mu}^{\text{ext}} \quad (22)$$

iii) Fixação de calibre

As lagrangeanas do tipo (2.2.1) e (2.3.1) apresentam invariância de calibre e precisam passar pelo processo de fixação de calibre para permitir a obtenção de resultados fisicamente relevantes. Utilizando o método de Faddeev e Popov [Faddeev e Popov, 1967] ou o método mais geral de quantização BRST encontramos para o funcional do vácuo, depois de fatorar as integrais redundantes, a expressão [Ramond, 1981]

$$Z[0] = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \left| \det \frac{\delta F}{\delta \Lambda} \right| e^{i \int d^d x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\kappa} FF \right)} \quad (23)$$

onde $F = 0$ é a condição de calibre fixada, Λ é o parâmetro da transformação e κ é um parâmetro de calibre arbitrário. Utilizando ainda a identidade

$$\left| \det \frac{\delta F}{\delta \Lambda} \right| = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* e^{\int d^d x \int d^d y \eta^*(y) \frac{\delta F(y)}{\delta \Lambda(x)} \eta(x)} \quad (24)$$

se encontra que a lagrangeana efetiva quântica que aparece em (9)

é a seguinte:

$$\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA, F}} = \mathcal{L}_{\text{clas}} + \frac{1}{2\kappa} \text{FF} + \frac{1}{i} \int d^d y \eta^*(y) \frac{\delta F(y)}{\delta \Lambda(x)} \eta(x) \quad (25)$$

Em geral na derivada funcional da condição de calibre aparece uma $\delta^d(x-y)$ que passa ao espaço euclidiano como $-i\delta^d(x-y)$ pelo que (26) no espaço euclidiano toma a forma genérica

$$\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA, F}} = \mathcal{L}_{\text{clas}}^{\text{E}} + \frac{1}{2\kappa} \text{FF} + \frac{1}{i} \int d^d y \eta^*(y) \frac{\delta F(y)}{\delta \Lambda(x)} \eta(x) \quad (26)$$

onde agora em (27) a derivada funcional no terceiro termo tem que se fazer no espaço euclidiano. Esta lagrangeana quântica apresenta a invariância BRST de parâmetro grassmanniano constante β que é dada por

$$\delta_{\beta} A_{\mu} = \partial_{\mu} (\beta^* \eta + \eta^* \beta)$$

$$\delta_{\beta} \bar{\Phi} = -ie(\beta^* \eta + \eta^* \beta)$$

$$\delta_{\beta} \eta^* = \frac{i}{\alpha} F \beta^* \quad (27)$$

$$\delta_{\beta} \eta = \frac{i}{\alpha} F \beta$$

que para A_{μ} e $\bar{\Phi}$ reproduz a transformação de calibre usual.

Para teorias de calibre mais gerais o tratamento é completamente analogo com as generalizações óbvias: por exemplo se tem que considerar um multipletto de fantasmas $\eta^a(x)$, e a soma na identidade (25) tem que incluir os índices discretos para levar em conta também o determinante matricial.

APÊNDICE B

Integração em D dimensões

Neste Apêndice vamos coletar algumas fórmulas relacionadas com integrais de superfície em D dimensões e vamos calcular a derivada a função de Heaviside $\Theta_D(E^D; z)$.

i) Formas diferenciais e o Teorema de Stokes

Num espaço tempo D dimensional podem-se definir

$$0\text{-formas} \quad \omega^0 = f(x),$$

$$1\text{-formas} \quad \omega^1 = f_\mu(x) dx^\mu,$$

$$2\text{-formas} \quad \omega^2 = f_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad f_{\mu\nu} \text{ anti-simétrico}$$

$$3\text{-formas} \quad \omega^3 = f_{\mu\nu\rho}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \quad f_{\mu\nu\rho} \text{ anti-simétrico}$$

etc. A derivada exterior de uma n-forma é uma n+1-forma:

$$d(\omega^0) = \partial_\mu f(x) dx^\mu \quad (1a)$$

$$d(\omega^1) = \frac{1}{2} (\partial_\nu f_\mu - \partial_\mu f_\nu) dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (1b)$$

$$d(\omega^2) = \frac{1}{3} (\partial_\rho f_{\mu\nu} - \partial_\mu f_{\rho\nu} + \partial_\nu f_{\rho\mu}) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1c)$$

$$d(\omega^3) = \frac{1}{4} (\partial_\sigma f_{\rho\mu\nu} - \partial_\rho f_{\mu\nu\sigma} + \partial_\mu f_{\nu\sigma\rho} - \partial_\nu f_{\sigma\rho\mu}) dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \quad (1d)$$

etc.

Dada uma variedade $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ o teorema de Stokes estabelece

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \quad (2)$$

onde $\partial\Omega$ é a borda de Ω .

O elemento de hiper-superfície D-1 dimensional é

$$d^{D-1}\zeta_{\mu} = \frac{1}{D!} \epsilon^{\mu\nu_1\nu_2\cdots\nu_{D-1}} d\zeta_{\mu} \wedge d\zeta_{\nu_1} \wedge d\zeta_{\nu_2} \cdots \wedge d\zeta_{\nu_{D-1}} \quad (3)$$

Em 4-D dado um volume tridimensional parametrizado por 3 variáveis s_i , $i=1,2,3$ podemos considerar por exemplo a integração de uma 3-forma

$$I = \int_V \omega = \int_V f_{\mu\nu\rho} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \quad (4)$$

Em termos das variáveis s_i teremos

$$I = \int_V \left(f_{012} \frac{\partial(x^0, x^1, x^2)}{\partial(s_1, s_2, s_3)} + f_{013} \frac{\partial(x^0, x^1, x^3)}{\partial(s_1, s_2, s_3)} + \dots \right) ds_1 ds_2 ds_3 \quad (5)$$

onde $\frac{\partial(x^{\mu}, x^{\nu}, x^{\rho})}{\partial(s_1, s_2, s_3)}$ são os jacobianos.

ii) Derivadas de $\Theta_D(E; z)$

Seja V_{D-1} uma hiper-superfície fechada D-1 dimensional e E_D o setor do espaço tempo contido nela. Utilizando o teorema de Stokes podemos demonstrar a seguinte igualdade:

$$\partial_{\mu} \Theta_D(E^D) = - \int_{V_{D-1}} d^{D-1}\zeta_{\mu} \delta^D(z-\zeta) \quad (6)$$

A prova é como segue: Seja $\phi(x)$ uma função em C_0^{∞} . Vamos aplicar

o lado direito de (6) sobre $\varphi(x)$. Pegando por exemplo a componente zero temos

$$\begin{aligned}
 \left\langle - \int_{V_{D-1}} d^D \xi^0 \delta^D(z-\xi), \varphi \right\rangle &= - \int_{V_{D-1}} d^D \xi^0 \varphi(\xi) = \\
 &= - \frac{1}{N!} \int_{V_{D-1}} e^{i \alpha \cdot \xi} \varphi(\xi) (d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{D-1} + \text{permutações}) \\
 &= - \int_{V_{D-1}} \varphi(\xi) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{D-1} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Observando que

$$d(\varphi(\xi) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{D-1}) = \partial^0 \varphi(\xi) d\xi_0 \wedge d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{D-1} \quad (8)$$

e utilizando o teorema de Stokes temos

$$\begin{aligned}
 \left\langle - \int_{V_{D-1}} d^D \xi^0 \delta^D(z-\xi), \varphi \right\rangle &= \int_{E_D} (\partial^0 \varphi(\xi)) d\xi_0 \wedge d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{D-1} \\
 &= - \langle \Theta_D(E_D), \partial^0 \varphi(\xi) \rangle = \langle \partial^0 \Theta(E_D), \varphi(\xi) \rangle \quad (9)
 \end{aligned}$$

A prova para as outras componentes é completamente análoga.

APÊNDICE C

O Modelo de Higgs Abeliano (MHA)

No espaço de Minkowski, o modelo de Higgs abeliano (MHA) é descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L}^{\text{HA}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_{\mu} \Phi)^* D^{\mu} \Phi - V(\Phi) \quad , \quad (1a)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad , \quad D_{\mu} = \partial_{\mu} + i e A_{\mu} \quad (1b)$$

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^* \Phi + \frac{\hbar}{4} (\Phi^* \Phi)^2 + \frac{\mu^4}{\hbar} \quad . \quad (1c)$$

e e é a constante de acoplamento.

Classicamente a lagrangeana é invariante sob as transformações

$$A_{\mu}(x) \longrightarrow A_{\mu}(x) + \frac{1}{e} \partial_{\mu} \alpha(x) \quad (1e)$$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \Phi(x) \quad . \quad (1f)$$

As equações de movimento são:

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = e J_{\nu} \quad (1g)$$

$$D_{\mu} D^{\mu} \Phi = V'(\Phi) \quad , \quad (1h)$$

com a corrente

$$J_{\mu} = i [\Phi^* D_{\mu} \Phi - (D_{\mu} \Phi)^* \Phi] \quad (1i)$$

No que se segue vamos descrever as propriedades mais importantes deste sistema no espaço euclidiano nas duas fases que ele apresenta.

i) Fase simétrica

No espaço euclidiano, na fase simétrica, o MHA é definido pela seguinte lagrangeana também invariante sob as transformações (1e) e (1f)

$$\mathcal{L}_E^{HA,S} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi + V(\Phi) \quad , \quad (2a)$$

com

$$V(\Phi) = \frac{1}{4h} \left[h\Phi^* \Phi + 2\mu^2 \right]^2 \quad , \quad (2b)$$

Na fase simétrica $\mu^2 > 0$ e (2a) não é outra coisa que a eletrodinâmica escalar [Rohrlich, 1950] (ver em notação moderna [Itzykson e Zuber, 1980]) e naturalmente é possível defini-la perturbativamente. Nesta fase é conveniente fixar o calibre de Lorentz

$$F = \partial_\mu A_\mu = 0 \quad . \quad (3a)$$

Então,

$$\frac{\delta f(x)}{\delta \alpha(y)} = \partial_\mu^x \partial_\mu^y \delta(x-y) \quad , \quad (3b)$$

e comparando com (A.27) a lagrangeana quântica fica

$$\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{HA,S} = \mathcal{L}_E^{HA,S} + \frac{1}{2\kappa} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{i} \eta^* \square \eta \quad , \quad (4)$$

e consta da lagrangeana livre sem massa para o campo vetorial e

para o fantasma, da lagrangeana livre com massa para o campo escalar e da lagrangeana de interação. Neste calibre os fantasmas desacoplam e não tem nenhum papel no desenvolvimento posterior da teoria. Os propagadores livres associados com $\bar{\Phi}$ e η são $\Delta_{\mathbf{E}}(x, \mu)$ e $\Delta_{\mathbf{E}}(x, m=0)$, respectivamente, enquanto que o propagador livre para o campo vetorial é

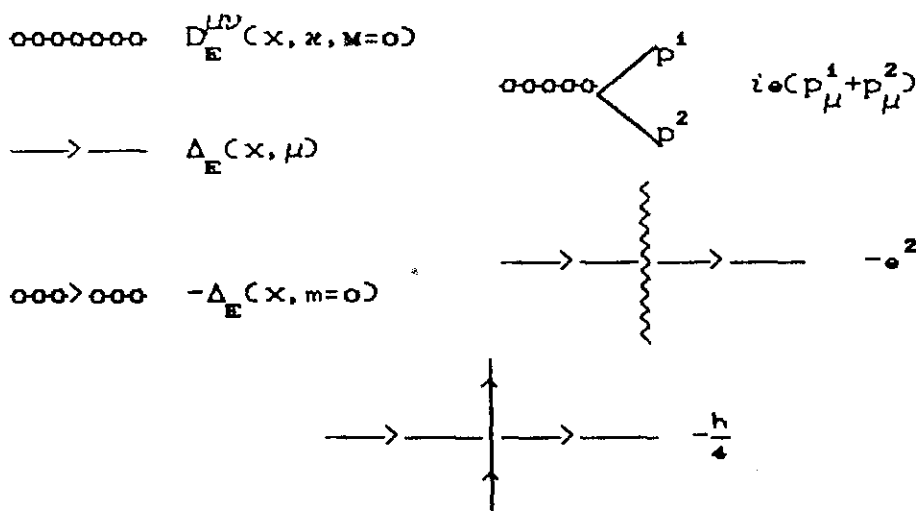
$$D_{\mathbf{E}}^{\mu\nu}(x, \kappa, m=0) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^2} e^{ikx} \left(\frac{\delta^{\mu\nu}}{k^2} + (\kappa-1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right) \quad (5)$$

Este propagador satisfaz a equação

$$\left(-\delta_{\mu\nu} \square + \frac{\kappa-1}{\kappa} \partial_\mu \partial_\nu \right) D_{\mathbf{E}}^{\mu\rho}(x, \kappa, m=0) = \delta_{\mu\rho} \delta^d(x) \quad (6a)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu D_{\mathbf{E}}^{\mu\nu}(x, \kappa, m=0) = \kappa \delta^d(x) \quad (6b)$$

As regras de Feynman obtidas desta lagrangeana aparecem na (Fig C-1).



Regras de Feynman na fase simétrica

Fig C-1

Para obter as regras no espaço de Minkowski tem-se que utilizar os propagadores de Feynman, incluir um fator i em todos os vértices e um fator (-1) nos vértices por cada índice de Lorentz contraído.

ii) Fase quebrada

Nesta seção discutimos alguns dos aspectos do MHA na fase na qual apresenta quebra espontânea da simetria. Referências gerais sobre as técnicas necessárias para o desenvolvimento da teoria são: [Itzykson, Iliopoulos e Martin, 1975] e [Itzykson e Zuber, 1981]. O MHA na fase quebrada é tratado em vários trabalhos. Entre eles [Higgs, 1966], [Appelquist et al 1973], [Lee, 1972] e [Yao, 1973].

A invariância $U(1)$ do MHA pode ser quebrada espontaneamente quando o campo Φ desenvolve um valor esperado no vácuo diferente de zero. A presença do campo de calibre permite que o bóson de Goldstone, requerido para que esta quebra seja possível, não apareça explicitamente. Através do mecanismo de Higgs [Higgs, 1966] ele é absorvido como um modo longitudinal pelo fóton que desta maneira passa a ter massa [Higgs, 1966].

Definindo o campo clássico

$$\Phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \Phi \rangle_J, \quad (7)$$

e a transformada de Legendre

$$\Gamma[\Phi_c] = W[J] - \int d^d x J(x) \Phi(x), \quad (8)$$

temos

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} = -J(x) \quad . \quad (9)$$

A condição para a quebra da simetria é então simplesmente [Coleman e Weinberg, 1973]

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} = 0 \quad , \quad \Phi_c(x) \neq 0 \quad . \quad (10)$$

Para Γ temos a serie de Taylor funcional

$$\Gamma[\Phi_c] = \int d^d x \left\{ -V_{\text{ef}}(\Phi_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_c)^2 Z(\Phi_c) + \dots \right\} \quad , \quad (11)$$

e (10) supondo invariância traslacional implica em

$$\frac{dV_{\text{ef}}(\Phi_c)}{d\Phi_c} = 0 \quad , \quad \Phi_c \neq 0 \quad . \quad (12)$$

Numa aproximação a zero laços o potencial efetivo V_{ef} coincide com o potencial clássico. Utilizando (1d), a condição para a quebra da simetria em tal aproximação é

$$V'(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi^*(h\Phi^*\Phi + 2\mu^2) = 0 \quad (13a)$$

ou

$$|\Phi|^2 = -\frac{2\mu^2}{h} \equiv b^2 \quad . \quad (13b)$$

Para esta equação ter solução é necessario que μ^2 seja menor que zero.

Para obter a série perturbativa temos que escolher um novo conjunto de campos cujo valor esperado seja nulo. Para fazer isto é preciso escolher arbitrariamente a fase de Φ na configuração de vácuo e isto é o que constitui a quebra espontânea da simetria.

Vamos escolher $\Phi = b$, real e fazer a redefinição do campo escalar em termos das suas partes real e imaginária:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Phi_1 + b + i\Phi_2 \right) \quad (14)$$

Substituindo em (2a) obtemos a menos de constantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E, \text{HA,Q}}^{\text{HA,Q}} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial_\mu \Phi_1 + \frac{1}{2} m^2 \Phi_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial_\mu \Phi_2 \\ &+ e A_\mu \left(\Phi_1 \partial_\mu \Phi_2 - \Phi_2 \partial_\mu \Phi_1 \right) + b e^2 A_\mu A_\mu \Phi_1 + b e^2 A_\mu A_\nu \left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 \right) \\ &+ b \frac{\hbar}{4} \left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 \right) \Phi_1 + \frac{\hbar}{16} \left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 \right)^2 + e b A_\mu \partial_\mu \Phi_2 \end{aligned} \quad (15)$$

onde temos definido $M^2 = e^2 b^2$ e $m^2 = \frac{2\mu^2}{4}$.

O espectro aparente da teoria está formado por um fóton A_μ com massa M , uma partícula escalar Φ_1 e um pretenso bóson de Goldstone representado pelo campo Φ_2 .

A lagrangeana (15) é ainda invariante de calibre. Escrevendo as transformações (1e) e (1f) em termos dos novos campos temos:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \\ \Phi_1(x) &\longrightarrow \Phi_1 \cos \alpha(x) + \Phi_2 \sin \alpha(x) + b \cos \alpha(x) - \beta \\ \Phi_2 &\longrightarrow -\Phi_2 \sin \alpha(x) + \Phi_1 \cos \alpha(x) - b \sin \alpha(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Como condição de fixação de calibre é conveniente nesta fase escolher o chamado calibre R_ζ [Fujikawa et al, 1972], [Abers e Lee, 1973]. Ele é definido por

$$\zeta \left(\partial_\mu A_\mu + \frac{b}{\zeta} \Phi_2 \right) = 0 \quad (17)$$

Então,

$$\frac{\delta f(x)}{\delta \alpha(y)} = \frac{\xi}{\bullet} \left[\partial_{\mu}^x \partial_{\mu}^y - b \frac{\bullet^2}{\xi} \Phi_1(x) + \frac{b^2 \bullet^2}{\xi} \right] \delta(x-y). \quad (18)$$

Escolhendo $x=\xi$ em (A.27) e reescalando os fantasmas na forma

$$\eta \longrightarrow \eta' = \sqrt{\xi/\bullet} \eta$$

a lagrangeana quântica toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{\text{HA, Q}} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A_{\mu} A_{\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \Phi_1 \partial_{\mu} \Phi_1 + \frac{1}{2} m^2 \Phi_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \Phi_2 \partial_{\mu} \Phi_2 \\ &+ \frac{M^2}{\xi} \Phi_2^2 + \bullet A_{\mu} \left[\Phi_1 \partial_{\mu} \Phi_2 - \Phi_2 \partial_{\mu} \Phi_1 \right] + b \bullet^2 A_{\mu} A_{\mu} \Phi_1 + b \bullet^2 A_{\mu} A_{\nu} \left[\Phi_1^2 + \Phi_2^2 \right] \\ &+ b \frac{\hbar}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \Phi_1 + \frac{\hbar}{16} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 + \bullet b A_{\mu} \partial_{\mu} \Phi_2 \\ &+ \xi \partial_{\mu} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\nu} + \frac{1}{i} \bar{\eta} \left(\square + \frac{M^2}{\xi} + \frac{b \bullet^2}{\xi} \Phi_1 \right) \eta \end{aligned} \quad (19)$$

É importante notar que o último termo em (15) é cancelado por um dos termos da parte de fixação de calibre. Também se deve notar que a massa do pretenso bóson de Goldstone Φ_2 é igual à massa do fantasma. Na série perturbativa as contribuições de um e do outro serão iguais e de sinal oposto. É por isto que este calibre é particularmente útil para ter uma visão clara da forma como opera o mecanismo de Higgs. Em particular no limite $\xi \rightarrow 0$ a massa das duas partículas indesejadas vai para infinito e elas se desacoplam do espectro físico. A lagrangeana que resulta depois deste processo é a mesma que se obtém fazendo a mudança de variáveis

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b + \varphi(x) \right] e^{-i \frac{\theta(x)}{b}} \quad (20a)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{b_0} \partial_\mu \theta(x)$$

na lagrangeana clássica. Quando se fazem as coisas desta maneira é preciso considerar na lagrangeana quântica um termo correspondente ao determinante da transformação (20) [Weinberg, 1973]. O calibre no qual fica fixada a teoria recebe o nome de calibre unitário já que nele só aparecem os graus de liberdade físicos da teoria e portanto a matriz S resultante é unitária. Em troca desta vantagem o calibre unitário apresenta dificuldades muito maiores na hora de discutir renormalizabilidade.

Em 3-D as constantes de acoplamento e e h tem dimensão positiva

$$[e] = L^{-1/2}$$

$$[h] = L^{-1}$$

e o modelo que estamos discutindo é superrenormalizável. Isto traz entre outras conseqüências que a altas energias e e h tomem valores definidos.

As regras de Feynman nesta fase são as que aparecem na (Fig C-2). O propagador vetorial massivo está dado por:

$$D_E^{\mu\nu}(x, \xi, m) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2} \left(\delta^{\mu\nu} - (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + m^2} \right) \quad (22)$$

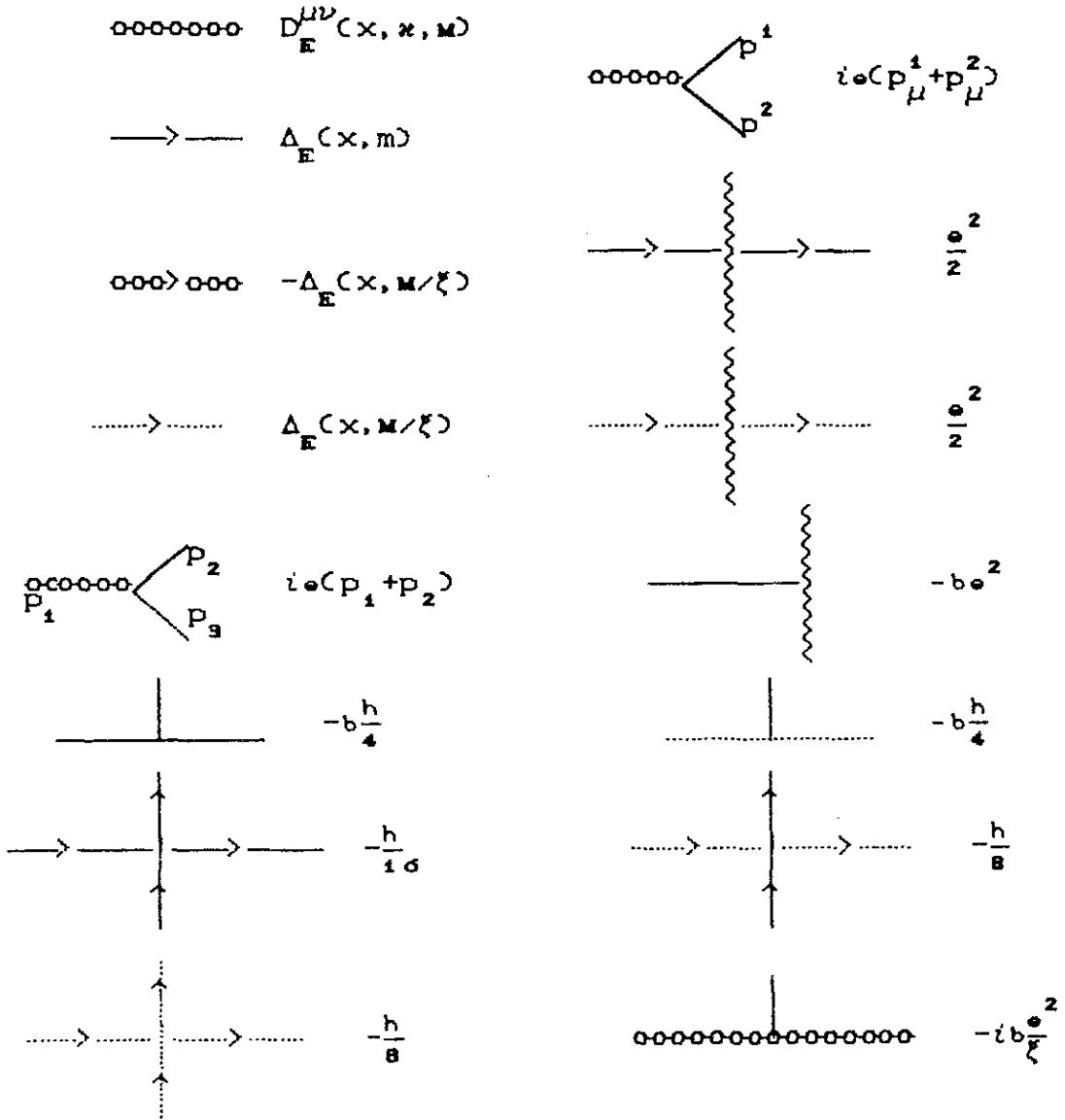
e satisfaz as equações

$$\left(\delta_{\mu\nu} (-\square + m^2) - (\xi - 1) \partial_\mu \partial_\nu \right) D_E^{\mu\rho}(x, \xi, m) = \delta_{\mu\rho} \delta^d(x) \quad (23)$$

$$\square \partial_\mu \partial_\nu D_E^{\mu\rho}(x, \xi, m) = \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu D_E^{\mu\nu}(x, \xi, m) \quad (24)$$

Note-se que o propagador sem massa está relacionado com o propagador massivo simplesmente por

$$D_E^{\mu\rho}(x, \kappa, M=0) = D_E^{\mu\rho}(x, \xi = \frac{1}{\kappa}, M=0) \quad (25)$$



Regras de Feynman na fase com simetria quebrada

Fig C-2

APÊNDICE D

Demonstração de alguns resultados do capítulo 4

i) Demonstração de (4.2.18)

É mais fácil começar com (4.2.18) e chegar a (4.2.15). Para (4.2.18a) temos:

$$\begin{aligned}
 I_s &= \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \cdot \left[\int_S (d\vec{S}' \times \vec{\nabla}') \Delta^E(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] \alpha(\mathbf{r}) \alpha(\mathbf{r}') \\
 &= \int_S \left[\epsilon^{\mu\nu\rho} d^2\xi_\mu \partial_\rho \right] \int_S \left[\epsilon^{\mu\sigma\tau} d^2\eta_\sigma \partial_\tau \right] \Delta^E(\xi-\eta) \alpha(\xi) \alpha(\eta) \\
 &= \int_S \int_S (\delta^\nu_\sigma \delta^\rho_\tau - \delta^\nu_\tau \delta^\rho_\sigma) d^2\xi_\nu d^2\eta_\sigma \partial_\rho \partial_\tau \Delta^E(\xi-\eta) \alpha(\xi) \alpha(\eta) \\
 &= \int_S \int_S d^2\xi_\nu d^2\eta_\sigma \left[\delta^\nu_\sigma \square - \partial_\sigma \partial_\nu \right] \Delta^E(\xi-\eta) \alpha(\xi) \alpha(\eta) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$= \int_S \int_S d^2\xi_\nu d^2\eta_\sigma \left[\delta^\nu_\sigma M^2 \Delta^E(\xi-\eta) - \delta^\nu_\sigma \delta^3(\xi-\eta) - \partial_\sigma \partial_\nu \Delta^E(\xi-\eta) \right] \alpha(\xi) \alpha(\eta) .$$

Reagrupando obtemos (4.2.15a)

$$I_s = \int_S d^2\xi_\mu \int_S d^2\eta_\nu \alpha(\xi) \left[-\delta^3(\xi-\eta) + M^2 D_{\mu\nu}^E(\xi-\eta) \right] \alpha(\eta) .$$

O procedimento para demonstrar (4.2.18b) e (4.2.18c) é completamente análogo, simplesmente trocando as integrais de volume pelas de superfície .

ii) *Coordenadas do cilindro inclinado*

As coordenadas adequadas para lidar com a superfície S da (Fig 4-3) são, conforme foi visto no capítulo 4, as descritas pela (Fig 4-4).

Um ponto genérico do espaço fica parametrizado por:

$$\mathbf{r} = \rho \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \left[\rho \sin \varphi + \frac{zD}{H} \right] \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} \quad (2)$$

A superfície S é caracterizada pela condição

$$\rho = R \quad (3)$$

O operador gradiente é:

$$\nabla = \hat{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{v}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

onde os vetores $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ são definidos respectivamente por

$$\hat{\mathbf{u}} = \nabla \rho = \hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi - \frac{\hat{\mathbf{z}}^D}{H} \sin \varphi \quad (5a)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \nabla \varphi = -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi - \frac{\hat{\mathbf{z}}^D}{H} \cos \varphi \quad (5b)$$

Então temos os seguintes produtos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}' &= \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{D}{H} \right)^2 \sin \varphi \sin \varphi' \\ \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}}' &= \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{D}{H} \right)^2 \cos \varphi \cos \varphi' \\ \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}' &= \sin(\varphi - \varphi') + \left(\frac{D}{H} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi' \\ \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{z}} + \frac{D}{H} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (7)$$

O elemento de superfície é:

$$d^2\xi_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\rho\sigma} d\xi^\rho \wedge d\xi^\sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\xi^\rho, \xi^\sigma)}{\partial(\varphi, z)} \right] d\varphi dz \quad (6)$$

$$d\vec{S} = d^2\vec{\xi} = \hat{r} d\varphi dz$$

iii) Dois resultados sobre integrandos periódicos

a) O cálculo de I_S^M , de I_{SV}^M e de I_V^M nos leva a considerar, no limite $h \rightarrow 0$, integrais da forma

$$I = \int_0^h dx \int_0^h dy f(x-y) \quad (8)$$

sendo que a função $f(x-y)$ tem o comportamento assintótico

$$f(x-y) \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 0 \quad \text{exponencialmente}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$r = x-y \quad (9a)$$

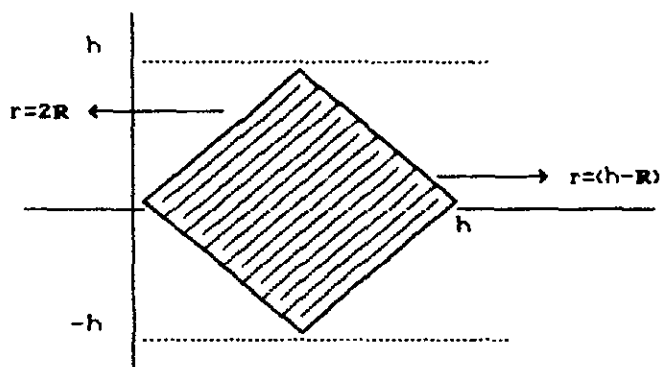
$$R = \frac{1}{2}(x+y) \quad (9b)$$

a nova região de integração é a da (Fig D-1)

A integral torna-se

$$I = 2 \left[\int_0^{h/2} dR \int_0^{2R} dr f(r) + \int_{h/2}^h dR \int_0^{2(h-R)} dr f(r) \right] \equiv (I_1 + I_2) \quad (10)$$

onde o fator 2 aparece pela simetria entre os triângulos superior e inferior da (Fig D-1).



Região de integração na fórmula (10)

Fig D-1

Considerando I_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{h/2} dR \int_0^{2R} dr f(r) = 2 \int_0^{h/2} dR \left(\int_0^h dr f(r) - \int_{2R}^h dr f(r) \right) \\
 &= h \int_0^h dr f(r) - 2 \int_0^{h/2} dR' \int_{h-2R'}^h dr f(r)
 \end{aligned} \tag{11}$$

onde na segunda parcela foi feita a mudança $R' = \frac{h}{2} - R$.

Também fazendo $R \rightarrow R' = R - \frac{h}{2}$ em I_2 temos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 2 \int_{h/2}^h dR \int_0^{h-2R} dr f(r) = 2 \int_0^{h/2} dR' \left(\int_0^h dr f(r) - \int_{h-2R'}^h dr f(r) \right) \\
 &= h \int_0^h dr f(r) - 2 \int_0^{h/2} dR' \int_{h-2R'}^h dr f(r)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Fica

$$I = I_1 + I_2 = 2h \int_0^h dr f(r) - 4 \int_0^{h/2} dR \int_{h-2R}^h dr f(r) \tag{13}$$

Fazendo a mudança $r \rightarrow r' = r - h$ na última das integrais achamos que no limite $h \rightarrow \infty$

$$\int_0^{h/2} dR \int_{h-2R}^h dr f(r) = \int_0^{h/2} dR \int_{-2R}^0 dr' f(r'+h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0 \quad (14)$$

pelas propriedades do integrando.

Concluimos que

$$I = 2h \int_0^h dr f(r) \quad (15)$$

b) O segundo resultado que precisaremos diz respeito ao cálculo de integrais da forma:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi - \varphi', \frac{\varphi + \varphi'}{2}) \quad (16)$$

onde a função g seja periódica:

$$g(\varphi - \varphi' + 2n\pi, \frac{\varphi + \varphi'}{2}) = g(\varphi - \varphi', \frac{\varphi + \varphi'}{2}) \quad (17a)$$

$$g(\varphi - \varphi', \frac{\varphi + \varphi'}{2} + n\pi) = g(\varphi - \varphi', \frac{\varphi + \varphi'}{2}) \quad (17b)$$

Fazendo a mudança

$$u = \varphi - \varphi' \quad (18a)$$

$$v = \frac{\varphi + \varphi'}{2} \quad (18b)$$

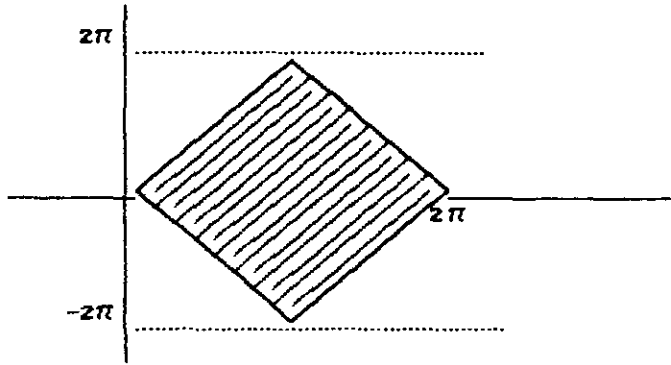
a nova região de integração é a indicada na (Fig D-2).

A integral é agora

$$J = \iint_{\Omega} dudvg(u, v) \quad (19a)$$

com

$$g(u + 2n\pi, v) = g(u, v + n\pi) = g(u, v) \quad (19b)$$



Região de integração na fórmula (19)

Fig D-2

Explicitamente

$$J = z \int_0^{\pi} dv \int_0^{2v} du g(u, v) + z \int_{\pi}^{2\pi} dv \int_0^{4\pi-2v} du g(u, v) \equiv J_1 + J_2 \quad (22)$$

Com a mudança de variáveis $v' = v - \pi$ em J_2 temos

$$J_2 = z \int_0^{\pi} dv' \int_0^{4\pi-2(v'+\pi)} du g(u, v') \quad (21)$$

Fazendo agora $u' = -(u - 2\pi)$

$$J_2 = z \int_0^{\pi} dv' \int_{2v'}^{2\pi} du g(u, v') \quad (22)$$

Somando as duas contribuições o resultado final é:

$$J = z \int_0^{\pi} dv' \int_0^{2\pi} du g(u, v') \quad (23)$$

iv) Cálculo de I_s, I_{sv} e I_v

Vamos agora derivar as equações (4.2.22) para I_s, I_{sv} e I_v .

$$I_s = \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \cdot \left[\int_S (d\vec{S}' \times \vec{\nabla}') \Delta^E(r-r') \right] \alpha(r) \alpha(r') \quad (24)$$

Utilizando o teorema de Stokes duas vezes (ver Apêndice B) e as equações (5) e (7) temos

$$I_s = - \left\{ \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} d\vec{\ell} \cdot \oint d\vec{\ell}' \alpha(r) \Delta^E(r-r') \alpha(r') - \frac{2D}{H} \oint d\vec{\ell}' \alpha(r') \cdot \int d\varphi dz \hat{y} \Delta^E(r-r') \right. \\ \left. + \left[1 + \left(\frac{D}{H} \right)^2 \right] \int d\varphi dz \int d\varphi' dz' \Delta^E(r-r') \right\} \quad (25)$$

O primeiro termo em (25) é divergente e constitui a parcela denotada por I_S^R em (4.2.21a). O segundo termo se anula porque as contribuições de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 tem o mesmo módulo e comparecem com sinais opostos.

Obtemos então

$$I_S^R \equiv - \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} d\vec{\ell} \cdot \oint d\vec{\ell}' \alpha(r) \Delta^E(r-r') \alpha(r') \quad (26)$$

$$I_S^M = a \int d\varphi dz \int d\varphi' dz' \Delta^E(r-r') \quad (27)$$

onde definimos

$$a = \left[1 + \left(\frac{D}{H} \right)^2 \right] \quad (28)$$

Utilizando a expressão (A.1.5b) do propagador euclidiano temos

$$I_S^M = -a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^H dz' \frac{e^{-M|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (29)$$

Usando os resultados de ii) a distância entre os pontos é

$$|r-r'| = \left[4R^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) + a(z-z')^2 + \frac{4}{H} DR \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) (z-z') \right]^{1/2} \quad (30)$$

Definindo agora a distância entre os vórtices

$$d = \left[D^2 + H^2 \right]^{1/2}, \quad (31)$$

reescalando $x = \sqrt{a} z$ e $x' = \sqrt{a} z'$ e completando quadrados temos

$$I_S^M = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d dx \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^d dx' \frac{e^{-M \left[(x-x' + E/2)^2 + A^2 \right]^{1/2}}}{\left[(x-x' + E/2)^2 + A^2 \right]^{1/2}} \quad (32)$$

onde

$$A^2 = \frac{4}{a} R^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) \left[1 + \frac{L}{H} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi+\varphi'}{2} \right) \right] \quad (33a)$$

$$E = -\frac{4RL}{Ha^{1/2}} \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) \quad (33b)$$

Fazendo ainda a mudança de variáveis $x'' = x' - E/2$, o limite $\frac{L}{H} \rightarrow \infty$ (que implica $d \rightarrow \infty$), e usando o primeiro resultado da seção iii), temos

$$I_S^M \rightarrow -\frac{d}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} dx'' \frac{e^{-M \left[x''^2 + A^2 \right]^{1/2}}}{\left[x''^2 + A^2 \right]^{1/2}} \quad (34)$$

sendo que no limite,

$$A^2 \rightarrow 4R^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right) \quad (35)$$

A integral em x se encontra tabelada [G.R 8.432-9]. Obtemos

$$I_S^M \longrightarrow -\frac{d}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' K_0 \left[2MR \left| \sin\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right) \right| \right] \quad (36)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero.

Esta integral cumpre as condições requeridas para aplicar o resultado da segunda parte da seção anterior. Temos

$$I_S^M \longrightarrow -\frac{d}{\pi} \int_0^\pi dv \int_0^{2\pi} du K_0 \left[2MR \left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right| \left| \operatorname{senv} v \right| \right] \quad (37)$$

Com a nova mudança $t = \sin\left(\frac{u}{2}\right)$ chegamos a

$$I_S^M \longrightarrow -4\frac{d}{\pi} \int_0^\pi dv \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} K_0 (t2MR |\operatorname{senv} v|) \quad (38)$$

A integral em t está tabelada em [G.R 6567-11]. Fica

$$I_S^M \longrightarrow -4D \int_0^{\pi/2} dv I_0 (RMS \operatorname{senv} v) K_0 (RMS \operatorname{senv} v) \quad (39)$$

onde K_0 e I_0 são funções de Bessel modificadas.

Uma última mudança de variáveis $s = \operatorname{senv} v$ nos leva à (4.2.22a).

$$I_S^M \longrightarrow -4D \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^2)^{1/2}} I_0 (RMS) K_0 (RMS)$$

Um procedimento muito similar nos leva, partindo das expressões (4.2.18b) e (4.2.18c), aos resultados (4.2.22b) e (4.2.22c), mesmo tendo que lidar nestes casos com integrais quintuplas e sêxtuplas.

v) Renormalização do campo de vórtice

Estudemos agora a renormalização do campo do vórtice. Os termos divergentes que aparecem em Λ dada por exemplo por (4.2.14) são os que denotamos por I_S^R e I_V^R . O primeiro deles aparece quando se utiliza o teorema de Stokes na expressão (4.2.18a). Tem a forma:

$$I_S^R = \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} d\bar{z} \cdot \oint_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} d\bar{z}' \alpha(r) \Delta^E(r-r', M) \alpha(r') \quad (40)$$

que depende explicitamente dos caminhos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Usando a forma explícita de A e de Δ^E temos que:

$$I_S^R(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \varphi \varphi' \cos(\varphi - \varphi') \frac{e^{-2MR \left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|}}{\left| \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right|} \quad (41)$$

Esta expressão tem uma divergência logarítmica vinda da contribuição no ponto $\varphi = \varphi'$. Introduzindo um regulador de Pauli Villars é possível fazer a subtração e ela corresponde a uma renormalização multiplicativa e dependente de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

Os termo divergentes I_V^R aparece ao fazer a segunda das integrais radiais em (4.2.18b) e considerar a contribuição para $\rho=0$. Tem a forma

$$I_V^R = -D \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_0[M\epsilon |\cos \varphi|] d\varphi \quad (42)$$

e corresponde a uma renormalização subtrativa da massa do vórtice.

APÊNDICE E

O modelo de Georgi-Glashow (MGG)

O modelo que consideramos para o nosso estudo da teoria quântica dos monopolos magnéticos consiste de um triplete de campos de calibre W_μ^a e um multiplete de campos escalares, interagindo de forma localmente invariante sob transformações do grupo $O(3)$. Precisaremos das convenções e definições que vem abaixo.

Os geradores hermitianos \tilde{T}^a cumprem as seguintes relações de comutação

$$[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = i\epsilon^{abc} \tilde{T}^c, \quad \epsilon^{123} = 1 \quad (1a)$$

$$\text{tr}(\tilde{T}^a, \tilde{T}^b) = 2\delta^{ab}. \quad (1b)$$

Na representação adjunta

$$(T^a)^b_c = -i\epsilon^{abc}, \quad (2)$$

O campo de calibre e o tensor de intensidade de campo, são

$$W_\mu \equiv W_\mu^a \tilde{T}^a \quad (3)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ie[W_\mu, W_\nu] = W_{\mu\nu} - ie[W_\mu, W_\nu] \quad (4a)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}^a \tilde{T}^a \quad (4b)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + e\epsilon^{abc} W_\mu^a W_\nu^b \quad (4c)$$

Como nos será útil na apresentação dos resultados, definimos, também, $W_{\mu\nu}$ como sendo o rotacional de W_μ .

Os campos de matéria formam um multipletto Φ^A , onde A é um índice da mesma dimensão das matrizes \tilde{T} da representação com a qual estamos trabalhando. A derivada covariante se define

$$(D_\mu)^A \Phi^B = \left(\partial_\mu - i e W_\mu^{\alpha\gamma} \tilde{T}^\alpha \right)^A \Phi^B \quad (5)$$

(Note-se que para campos reais a derivada covariante também é real já que os geradores são hermitianos).

i) Fase simétrica

Na fase simétrica o MGG fica definido pela lagrangeana,

$$\mathcal{L}^{GG} = \frac{1}{8} \text{tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^T D^\mu \Phi - V(\Phi) \quad (6)$$

onde o potencial $V(\Phi)$ toma a forma,

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^a \Phi^a + \frac{h}{4} (\Phi^a \Phi^a)^2 + \frac{\mu^4}{4h} \quad (7)$$

Esta lagrangeana é invariante sob as transformações locais de calibre

$$\Phi_A \longrightarrow \Phi'_A = U(g)_{AB} \Phi_B \quad (8a)$$

$$W_\mu \longrightarrow W'_\mu = U(g) W_\mu U^{-1}(g) - \frac{i}{e} (\partial_\mu U(g)) U^{-1}(g) \quad (8b)$$

com $U(g)$ o elemento de $O(3)$ na representação dada,

$$U(g) = e^{i \omega^{\alpha\gamma} \tilde{T}^\alpha} \quad (8c)$$

Os objetos que aparecem em (6), se transformam na forma

$$D_\mu^A \Phi^B \longrightarrow (D_\mu^A \Phi^B)' = U(g)^A_C D_\mu^C \Phi^B \quad (9a)$$

$$G_{\mu\nu} \longrightarrow G'_{\mu\nu} = U(g)G_{\mu\nu}U^{-1}(g) \quad (9b)$$

As transformações infinitesimais são

$$U(g) = 1 + \omega \overset{\alpha}{T} \quad (10)$$

onde agora ω^α são parâmetros infinitesimais. Com $\alpha = \omega \overset{\alpha}{T}$ temos

$$W'_\mu = W_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha + i[\alpha, W_\mu] \quad (11a)$$

$$\Phi'_A = \Phi_A + ie\alpha^B \Phi_B, \quad (11b)$$

Na representação adjunta

$$(D'_\mu)^a_b \Phi^b \equiv (D_\mu \Phi)^a = \partial_\mu \Phi^a + e\epsilon^{abc} W_\mu^b \Phi^c \quad (12a)$$

Utilizando notação vetorial no espaço interno,

$$(v \times u)^a = \epsilon^{abc} v^b u^c \quad (12b)$$

$$v \cdot u = v^a u^a, \quad (12c)$$

a lagrangeana (6) em componentes fica na forma,

$$\mathcal{L}^{aa} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^a (D_\mu \Phi)_a - V(\Phi) \quad (13a)$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + e(W_\mu \times W_\nu)^a \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \Phi^a + e(W_\mu \times \Phi)^a \right]^2 - V(\Phi) \quad (13b)$$

As equações de movimento são:

$$-D_\mu^A D^{\mu B} \Phi^C - \mu^2 \Phi^A - h\Phi^2 \Phi^A = 0 \quad (14a)$$

$$-(D_\nu G^{\mu\nu})^a = eJ^{\mu a} \quad (14b)$$

onde a corrente é

$$J_{\mu}^a = iT_{BC}^a (D_{\mu} \Phi)^B \Phi^C \quad (14c)$$

Em (14a) e (14c) a derivada covariante está na representação que corresponde a Φ , enquanto que em (14b) está na representação adjunta. Nesta última,

$$J_{\mu}^a = \epsilon^{abc} (D_{\mu} \Phi)^b \Phi^c \quad (14d)$$

i) Fase simétrica

Quando se passa à teoria quântica, é adequado, nesta fase, adotar o calibre de Lorentz,

$$f^a = \partial^{\mu} W_{\mu}^a = 0 \quad (15)$$

Fazendo a rotação de Wick e acrescentando os termos de fixação de calibre (ver Apêndice A), a lagrangeana quântica euclideana do modelo de Georgi-Glashow na fase simétrica é

$$\mathcal{L}_{E, \text{Quan}}^{GG, S} = \mathcal{L}_E^{GG, S} + \mathcal{L}_{FC} + \mathcal{L}_F \quad (16a)$$

Nesta expressão, a lagrangeana clássica euclideana é

$$\mathcal{L}_E^{GG, S} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (D_{\mu} \Phi)^a (D_{\mu} \Phi)_a + V(\Phi) \quad (16b)$$

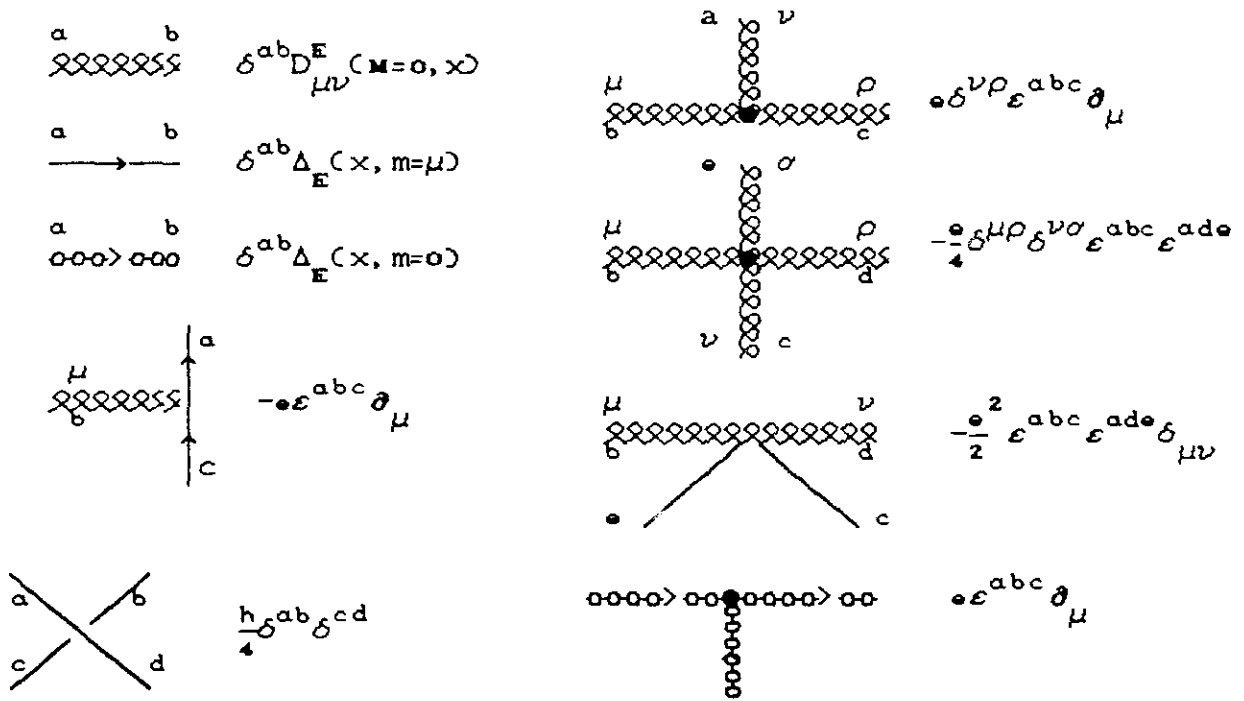
o termo de fixação de calibre é

$$\mathcal{L}_{FC} = \left(\frac{\xi}{2} \right) \left(\partial_{\mu} W_{\mu}^a \right)^2 \quad (16c)$$

e o último termo é:

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{i} \int d^4 z_1 \eta^a(z_1) \left(\frac{\delta f^a(z_1)}{\delta \omega^b(z)} \right) \eta^b(z) \quad (16d)$$

Os propagadores associados aos campos físicos W_μ^a e Φ^a são, respectivamente, $\delta^{ab} D_{\mu\nu}^E(m=0, x, \xi)$ e $\delta^{ab} \Delta_E^E(\mu, x)$, com $D_{\mu\nu}^E$ e Δ_E^E dados por (C.5) e (A.5a). O propagador associado aos fantasmas η^a é $-\delta^{ab} \Delta_E^E(m=0, x)$. A série perturbativa pode ser escrita usando as regras de Feynman da (Fig E-1) e, fora os problemas com as divergências infravermelhas, está bem definida. Nas nossas convenções para este sistema, para não alterar a tradição, XXXXXX corresponde ao campo de calibre, enquanto que eventualmente ~~~~~ será agora, o campo externo.



Regras de Feynman na fase simetrica

Fig E-1

ii) Fase com a simetria quebrada

A condição para a quebra da simetria nesta teoria é que o parâmetro μ^2 que aparece na lagrangeana seja negativo. Então na aproximação de árvore teremos os vácuos

$$\Phi^a \Phi^a = -\frac{\mu^2}{h} \quad (17)$$

No espaço interno o isovetor Φ pode apontar em qualquer direção. Escolhendo o vácuo

$$\Phi_{\text{vac}} = B \quad , \quad |B| = \sqrt{-\mu^2/h} \quad , \quad (18)$$

é conveniente decompor o campo Φ^a numa componente paralela a B e uma perpendicular, com valores esperados no vácuo nulos:

$$\Phi = (B + \vec{\psi}) + \vec{\chi} \quad (19a)$$

$$\langle \vec{\psi} \rangle = 0 = \langle \vec{\chi} \rangle \quad (19b)$$

$$B \cdot \vec{\psi} = 0 = \vec{\psi} \cdot \vec{\chi} \quad (19c)$$

Substituindo em (14), encontramos a seguinte forma para a lagrangeana do sistema nesta fase:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E^{aa,a} = & \frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + e W_\mu \times W_\nu)^2 + \frac{1}{2} g^2 (W_\mu \times B)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \vec{\psi})^2 + m^2 (\vec{\psi})^2 + (\partial_\mu \vec{\chi})^2 \right] - z_0 [\vec{\psi} \cdot (W_\mu \times \partial_\mu \vec{\chi}) + \vec{\chi} \cdot (W_\mu \times \partial_\mu \vec{\psi})] \\ & + \frac{1}{2} g^2 \left[(\vec{\psi} \times W_\mu)^2 + z (B \times W_\mu) \cdot (\vec{\chi} \times W_\mu) \right. \\ & \left. + z (B \times W_\mu) (\vec{\psi} \times W_\mu) + z (\vec{\psi} \times W_\mu) \cdot (\vec{\chi} \times W_\mu) + (\vec{\chi} \times W_\mu)^2 \right] \\ & + \kappa B \cdot \vec{\psi} (\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} + \vec{\chi} \cdot \vec{\chi}) + \frac{1}{4} \kappa (\vec{\psi} \cdot \vec{\psi} + \vec{\chi} \cdot \vec{\chi})^2 - g B \cdot (W_\mu \times \partial_\mu \vec{\chi}) \end{aligned} \quad (20)$$

Em (20), o segundo termo fornece a massa às componentes do campo de calibre perpendiculares a \vec{B} . A componente $\vec{\psi}$ do campo escalar é um campo com massa $m^2 = (-2\mu^2)$ e as componentes $\vec{\chi}$ são os "pretensos" bósons de Goldstone.

O calibre adequado nesta fase é o calibre R_ξ

$$F^a = \xi \left[\partial_\mu W_\mu^a + \left(\frac{ie}{\xi} \right) b^i T_{ij}^a (\chi^i + \psi^i) \right] = 0 \quad (21a)$$

Usando o fato que o campo Φ está na representação adjunta e que \vec{B} e $\vec{\psi}$ são paralelos no espaço interno, temos

$$F^a = \xi \left[\partial_\mu W_\mu^a + \left(\frac{e}{\xi} \right) (\vec{B} \times \vec{\chi})^a \right] = 0 \quad (21b)$$

Calculando a variação funcional de F^a com respeito a ω^b , e introduzindo um isovetor η^c de fantasmas de Fadeev-Popov, a lagrangeana quântica toma finalmente a forma,

$$\mathcal{L}_{\text{GG, Quan}}^{E, Q} = \mathcal{L}_0^W + \mathcal{L}_0^\psi + \mathcal{L}_0^\chi + \mathcal{L}_0^\eta + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (22)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^W &= \frac{1}{2} W_\mu^a \left[-\delta_a^b \delta_\mu^\nu \square + (1-\xi) \partial_\mu \partial_\nu \delta_a^b + \mu^2 \delta_\mu^\nu (b^2 \delta_a^b - b_a b^b) \right] W_\nu^b \\ \mathcal{L}_0^\psi &= \frac{1}{2} \psi^a \left[-\square + m^2 \right] \psi^a \\ \mathcal{L}_0^\chi &= \frac{1}{2} \chi^a \left[-\square + \frac{M^2}{\xi} \right] \chi^a \\ \mathcal{L}_0^\eta &= \frac{1}{2} \chi^a \left[\left(-\square + \frac{M^2}{\xi} \right) \delta_a^b - \left(\frac{e^2}{\xi} \right) b_a b^b \right] \chi^b \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \mu \partial_\mu W_\nu \cdot (\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu) + \frac{\mu^2}{4} (\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu)^2 + \\ &\quad - \mu \left[\vec{\psi} \cdot (\vec{W}_\mu \times \partial_\mu \vec{\chi}) + \vec{\chi} \cdot (\vec{W}_\mu \times \partial_\mu \vec{\psi}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu^2 \left[(\vec{\psi} \times \vec{W}_\mu)^2 + 2(\vec{B} \times \vec{W}_\mu) \cdot (\vec{\chi} \times \vec{W}_\mu) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& + z(\mathbf{B} \times \mathbf{W}_\mu)(\bar{\psi} \times \mathbf{W}_\mu) + z(\bar{\psi} \times \mathbf{W}_\mu) \cdot (\bar{\chi} \times \mathbf{W}_\mu) + (\bar{\chi} \times \mathbf{W}_\mu)^2 \Big] \\
& + h(\mathbf{B} \cdot \bar{\psi})(\bar{\psi} \cdot \bar{\psi} + \bar{\chi} \cdot \bar{\chi}) + \frac{h}{4} (\bar{\psi} \cdot \bar{\psi} + \bar{\chi} \cdot \bar{\chi})^2 \\
& - \left(\frac{e}{i\xi}\right)^2 \left[(\bar{\eta} \cdot \bar{\eta})(\mathbf{B} \cdot \bar{\psi}) - (\bar{\eta} \cdot \bar{\psi} + \bar{\eta} \cdot \bar{\chi})(\mathbf{B} \cdot \bar{\eta}) \right] + i\partial_\mu \bar{\eta} \cdot (\mathbf{W}_\mu \times \bar{\eta}) ,
\end{aligned}$$

onde definimos os dois parâmetros com massa da teoria

$$M^2 = e^2 b^2 \quad (24a)$$

$$m^2 = -z\mu^2 = h\frac{b^2}{z} , \quad (24b)$$

Sobre esta lagrangeana é conveniente ressaltar:

a) Como a simetria só é parcialmente quebrada, um dos campo de calibre e um dos fantasmas não tem massa.

b) Neste calibre, os fantasmas com massa e os pretensos bósons de Goldstone $\bar{\chi}$ tem a mesma massa M^2/ξ , o que permite visualizar melhor o mecanismo de Higgs; isto é, o cancelamento dos respectivos pólos na matriz S. No limite $\xi \rightarrow \infty$, dita massa torna-se infinita e, tanto uns quanto os outros, desacoplam dos modos físicos reobtendo-se, então, o calibre unitário [Weinberg, 1973]

c) O último termo em (20) é cancelado (não aparece em \mathcal{L}_{int}). Isto ocorre porque na parte de fixação de calibre aparece um outro termo igual, mas de sinal oposto. Conseqüentemente, o vértice $W_\mu \chi$, não aparece nos gráficos de Feynman da expansão perturbativa.

O propagador vetorial se diagonaliza no espaço interno, sendo igual a $D_{\mu\nu}(x, \kappa = \frac{1}{\xi}, \mathbf{m} = 0)$ para a componente paralela a \mathbf{B} , e $D_{\mu\nu}(x, \kappa = \frac{1}{\xi}, \mathbf{m})$ para as outras componentes (Ver (C.5) e (C.22)). O propagador para $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$ e $\bar{\eta}$, também é diagonal no espaço interno.

APÊNDICE F

Demonstração de alguns resultados do capítulo 6

i) Demonstração de (6.2.7)

Dado

$$g(\Delta E) = e^{i\theta(\Delta E)\omega^{\alpha-1}} = e^{i\theta(\Delta E)\alpha} \quad (1)$$

e a transformação de calibre

$$W'_\mu(z) = g(\Delta E)W_\mu g^{-1}(\Delta E) - \frac{i}{\circ} (\partial_\mu g(\Delta E)) g^{-1}(\Delta E) \quad (2)$$

queremos achar a expressão explícita para $W'_\mu(z)$ em função de α .

Observando que, para um operador arbitrário A , o qual não comuta necessariamente com a sua derivada $\partial_\mu A$

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^{n+1} &= n\partial_\mu A A^n + (n-1)[A, \partial_\mu A] A^{n-1} + \dots \\ &\dots + A^{n-2}[A, \partial_\mu A] A + A^{n-1}[A, \partial_\mu A] \quad (3a) \end{aligned}$$

calcula-se a expressão geral para a derivada da exponencial do operador usando a série de potências para a exponencial. Obtém-se

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^A &= \partial_\mu A e^A + [A, \partial_\mu A] \sum_0^\infty \frac{1}{m+2} \frac{A^m}{m!} \\ &\dots + A[A, \partial_\mu A] \sum_0^\infty \frac{1}{(m+2)(m+1)} \frac{A^m}{m!} + \dots \quad (3b) \end{aligned}$$

Definindo,

$$u_N(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(m+2)(m+3)} \cdots \frac{1}{(m+N+1)m!} A^m, \quad u_N(0) = \frac{1}{(N+1)!} \quad (3c)$$

pode-se escrever

$$\partial_{\mu} e^A = \partial_{\mu} A e^A + \int_1^{\infty} A^{N-1} [A, \partial_{\mu} A] u_N(A) \quad (3d)$$

Observando ainda que

$$g_N(x) = x^{N+1} u_N(x) \quad (4a)$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} g_N(x) = g_{N-1}(x), \quad g_N(0) = 0 \quad (4b)$$

encontramos que

$$u_N(x) = x^{-N-1} \left\{ (x-N)e^x + N + (N-1)x + \frac{(N-2)}{2} x^2 + \dots + \frac{1}{(N+1)!} x^{N-1} \right\} \quad (4c)$$

Com $A(z) = i\Theta_4(\Delta E)\alpha(z)$, temos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} &= \left\{ -i\alpha \oint_{\Gamma} d^3\xi \delta^4(z-\xi) \right\} e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} + i\Theta_4(\Delta E) \partial_{\mu} \alpha e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} \\ &+ [i\Theta_4(\Delta E)\alpha, i\partial_{\mu} \Theta_4(\Delta E)\alpha] \int_0^{\infty} \frac{1}{(m+2)m!} (i\Theta_4(\Delta E)\alpha)^m + \dots \quad (5) \end{aligned}$$

Os comutadores se simplificam,

$$[i\Theta_4(\Delta E)\alpha, i\partial_{\mu} \Theta_4(\Delta E)\alpha] = \Theta_4(\Delta E) [i\alpha, i\partial_{\mu} \alpha] \quad (6)$$

e, como

$$(\Theta_4(\Delta E))^2 = \Theta_4(\Delta E) \quad (7)$$

os fatores $(\Theta_4(\Delta E))^n$ dentro dos somatórios podem ser extraídos. Fica, então,

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} &= i \left[\circ A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) \right] e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} + \left\{ i \partial_\mu \alpha e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} + \right. \\ & \left. [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] \sum_0^\infty \frac{1}{m+2} \frac{(i\alpha)^m}{m!} + i\alpha [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] \sum_0^\infty \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(i\alpha)^m}{m!} + \dots \right\} \Theta_4(\Delta E) \\ &= i \left[\circ A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) \right] e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} + \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} &+ \Theta_4(\Delta E) \left[i \partial_\mu \alpha e^{i\alpha} + \sum_1^\infty (i\alpha)^{N-1} [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] u_N(i\alpha) \right] \\ &= i \left[\circ A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) \right] e^{i\Theta_4(\Delta E)\alpha} + \Theta_4(\Delta E) \partial_\mu \left[e^{i\alpha} \right] \end{aligned} \quad (8b)$$

onde

$$A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) = - \frac{\alpha}{\circ} \oint_\Gamma d^3 \xi \delta^4(z-\xi) \quad (9)$$

Pode-se escrever, então,

$$\begin{aligned} - \frac{i}{\circ} (\partial_\mu g(\Delta E)) g^{-1}(\Delta E) &= A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) - \\ - \Theta_4(\Delta E) \frac{i}{\circ} \left\{ i \partial_\mu \alpha e^{i\alpha} + [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] \sum_0^\infty \frac{1}{m+2} \frac{(i\alpha)^m}{m!} + \right. & \quad (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. i\alpha [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] \sum_0^\infty \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(i\alpha)^m}{m!} + \dots \right\} e^{-i\alpha} \\ &= A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) + \Theta_4(\Delta E) B_\mu^{\text{ext}}(\alpha) \quad , \quad (10b) \end{aligned}$$

onde definimos o campo externo $B_\mu^{\text{ext}}(\alpha)$

$$B_\mu^{\text{ext}}(\alpha) = - \frac{i}{\circ} \left\{ i \partial_\mu \alpha e^{i\alpha} + [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] \sum_0^\infty \frac{1}{m+2} \frac{(i\alpha)^m}{m!} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + i\alpha [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] \sum_{\sigma}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(i\omega)^m}{m!} + \dots \right\} e^{-i\alpha} \quad (11) \\
 & = \frac{1}{\sigma} \partial_\mu \alpha - \frac{i}{\sigma} \sum_{\sigma}^{\infty} (i\omega)^{N-1} [i\alpha, i\partial_\mu \alpha] u_N(i\omega) = -\frac{i}{\sigma} \left[\partial_\mu e^{i\alpha} \right] e^{-i\alpha}
 \end{aligned}$$

e usamos que

$$\Theta_4(\Delta E) e^{i\Theta_4(\Delta E)c} = \Theta_4(\Delta E) e^{i\alpha}, \quad (12)$$

Por outro lado evidenciando o primeiro termo da série de potências, e o fator $\Theta_4(\Delta E)$ nos outros,

$$\begin{aligned}
 g(\Delta E) W_\mu g^{-1}(\Delta E) = \\
 \left[1 + \Theta_4(\Delta E) \sum_{\sigma}^{\infty} \frac{(i\omega)^m}{m!} \right] W_\mu \left[1 + \Theta_4(\Delta E) \sum_{\sigma}^{\infty} \frac{(-i\omega)^m}{m!} \right] \quad (13a)
 \end{aligned}$$

$$= W_\mu + \Theta_4(\Delta E) \left[D^{\text{ext}}(\omega) W_\mu + W_\mu D^{\text{ext}*}(\omega) + D^{\text{ext}}(\omega) W_\mu D^{\text{ext}*}(\omega) \right] \quad (13b)$$

onde definimos o terceiro dos campos externos que aparecem nesta formulação,

$$D^{\text{ext}}(\omega) = \sum_{\sigma}^{\infty} \frac{(i\omega)^m}{m!} = \left[e^{i\alpha} - 1 \right] \quad (13c)$$

Com (2), (10b) e (13b) e as definições, (9), (12) e (13c) chegamos ao resultado (6.2.7)

$$W_\mu' = W_\mu + A_\mu^{\text{ext}}(\Gamma, \Delta E) + \Theta_4(\Delta E) C_\mu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega), \quad (14)$$

onde $C_\mu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega)$ é dado por

$$C_\mu^{\text{ext}}(W_\mu, \omega) = B_\mu^{\text{ext}}(\omega) + D^{\text{ext}}(\omega) W_\mu$$

$$+ W_{\mu} D^{\text{ext}*}(\alpha) + D^{\text{ext}}(\alpha) W_{\mu} D^{\text{ext}*}(\alpha) \quad (15)$$

Quando se trabalha na representação adjunta (ver Apêndice G), onde se tem a expressão fechada

$$e^{i\alpha} = \mathbb{1} + i \frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \text{sen} \omega - \left(\frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \right)^2 (1 - \cos \omega) \quad (16)$$

o elemento de grupo com suporte em ΔE se escreve na forma

$$g(\Delta E) = e^{i \Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega^{\alpha} T} = \mathbb{1} + i \frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \text{sen}[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega] - \left(\frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \right)^2 (1 - \cos[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega]) \quad (17)$$

desde que se pense a $\Theta_{\downarrow}(\Delta E)$ como o limite de funções suaves. Pode-se então calcular a derivada de $g(\Delta E)$ diretamente. Com efeito derivando os produtos temos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} g(\Delta E) &= i \left[\partial_{\mu} \left(\frac{\omega^{\alpha}}{\omega} \right) \right] T^{\alpha} \text{sen}[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega] - \left[\partial_{\mu} \left(\frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \right)^2 \right] (1 - \cos[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega]) \\ &+ i \frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \cos[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega] \Theta_{\downarrow}(\Delta E) \partial_{\mu} \omega - \left(\frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \right)^2 \text{sen}[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega] \Theta_{\downarrow}(\Delta E) \partial_{\mu} \omega \\ &+ i \frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \cos[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega] \omega \partial_{\mu} \Theta_{\downarrow}(\Delta E) - \left(\frac{\omega^{\alpha}}{\omega} T^{\alpha} \right)^2 \text{sen}[\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega] \omega \partial_{\mu} \Theta_{\downarrow}(\Delta E) \end{aligned}$$

Os quatro primeiros termos da expressão anterior se agrupam para que, no limite em que a Θ_{\downarrow} deixa de ser suave, dar o resultado $\Theta_{\downarrow}(\Delta E) \partial_{\mu} e^{i\alpha}$. Usando a propriedade (G.6a) para lidar com os outros dois termos obtemos

$$\partial_{\mu} g(\Delta E) = i \partial_{\mu} \Theta_{\downarrow}(\Delta E) \omega g(\Delta E) + \Theta_{\downarrow}(\Delta E) \partial_{\mu} e^{i\alpha} \quad (18)$$

em acordo com (8b). Daqui se segue, utilizando (12), a expressão (11)

$$\frac{1}{\circ} \left[\partial_{\mu} g(\Delta E) \right] g^{-1}(\Delta E) = \frac{1}{\circ} \partial_{\mu} \Theta_4(\Delta E) \alpha + \Theta_4(\Delta E) \frac{i}{\circ} \left[\partial_{\mu} e^{i\alpha} \right] e^{-i\alpha}. \quad (19)$$

Pelo fato de α definir uma transformação de calibre que vincula os setores com "winding number" zero e um, o segundo termo no lado direito de (19) dá, a menos de uma transformação de calibre regular a configuração assintótica de campo do monopolo de 't Hooft-Polyakov

$$B_{\mu}^{\text{ext}}(\alpha) + \frac{1}{\circ} \partial_{\mu} \alpha = -\frac{i}{\circ} \left[\partial_{\mu} e^{i\alpha} \right] e^{-i\alpha} = W_{\mu a}^{\text{mon}} T^a, \quad (20a)$$

onde (ver seção (2.3))

$$W_{i a}^{\text{mon}} = \varepsilon_{iab} \frac{\hat{r}^b}{r}. \quad (20b)$$

Nesta representação, $D^{\text{ext}}(\alpha)$ tem a forma (ver eq. (13c))

$$D^{\text{ext}}(\alpha) = i \frac{\omega^a}{\omega} T^a \text{sen} \omega - \left(\frac{\omega^a}{\omega} T^a \right)^2 (1 - \text{cos} \omega) \quad (21)$$

ii) Demonstração de (6.2.23)

Sostituindo em (6.2.21) as expressões (14a), (15a) e (22c) para Ψ_{μ} , Ω e χ_{μ} respectivamente e somando e restando $\mathcal{L}_c(V')$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{of}^{aa'}(V) = & \mathcal{L}_{of}^{aa}(V') + \text{tr} \left[\frac{i \circ}{4} G^{\mu\nu} [\delta W_{\mu}, \delta W_{\nu}] - \frac{1}{8} \tilde{F}^{\mu\nu}(V') \tilde{F}_{\mu\nu}(V') + \right. \\ & + \frac{1}{8} \tilde{F}^{\mu\nu}(V) \tilde{F}_{\mu\nu}(V) + \frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu}(V') [\delta W_{\mu}, \delta W_{\nu}] - \frac{1}{8} (i \circ)^2 ([\delta W_{\mu}, \delta W_{\nu}])^2 \\ & \left. - \frac{1}{4} (G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}) \delta \tilde{F}^{\mu\nu}(V) - \mathcal{L}_c(V') + \mathcal{L}_c(V) + \delta \mathcal{L}_c(V) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

Aplicando a transformação (6.2.5) sobre $\tilde{F}_{\mu\nu}(V)$ dado por (6.2.9b) e sobre δW_μ dado por (6.2.7) temos

$$\delta\tilde{F}_{\mu\nu}(V) = ie \left\{ 2[\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] - [\tilde{W}_\mu(V'), \tilde{W}_\nu(V)] - [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V')] \right\} \quad (23)$$

$$[\delta W_\mu, \delta W_\nu] = [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] + [\tilde{W}_\mu(V'), \tilde{W}_\nu(V')] \\ - [\tilde{W}_\mu(V'), \tilde{W}_\nu(V)] + [\tilde{W}_\nu(V'), \tilde{W}_\mu(V)]$$

Depois de substituir (23) e (6.2.9d) em (22) e reordenando alguns termos pode-se escrever

$$\mathcal{L}_{of}^{gg'}(V) = \mathcal{L}_{of}^{gg'}(V') + \left\{ J(V') - J(V) + \frac{1}{4} i \text{tr} \tilde{F}_{\mu\nu}(V) \delta\tilde{F}_{\mu\nu}(V) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \text{tr} G_{\mu\nu} [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] + \frac{1}{8} \tilde{F}^{\mu\nu}(V) \tilde{F}_{\mu\nu}(V) - i e \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}(V) [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] \right. \\ \left. - \mathcal{L}(V') + \mathcal{L}_c(V) + \delta\mathcal{L}_c(V) \right\} \quad (24)$$

Observando agora que partindo da definição (6.2.23b) podemos calcular

$$\delta J(V) = \frac{1}{4} i \text{tr} \tilde{F}_{\mu\nu}(V) \delta\tilde{F}_{\mu\nu}(V) \\ - \frac{1}{4} \text{tr} G_{\mu\nu} [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)] + \frac{1}{8} \tilde{F}^{\mu\nu}(V) \tilde{F}_{\mu\nu}(V) - i e \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}(V) [\tilde{W}_\mu(V), \tilde{W}_\nu(V)]$$

a expressão (6.2.23a) fica estabelecida

APÊNDICE G

Transformações de calibre no MGG

Neste apêndice discutimos algumas das propriedades relevantes da representação adjunta de $O(3)$ e construímos uma transformação com carga topológica $n=1$.

i) O elemento do grupo $O(3)$, na representação adjunta

Os elementos do grupo $O(3)$ na representação adjunta se escrevem na forma

$$R = e^{i\omega^a T^a} \quad (1)$$

onde T^a são os geradores hermitianos:

$$(T^a)_{bc} = -i\epsilon^a_{bc} \quad , \quad \epsilon^{123} = 1 \quad (2a)$$

Eles naturalmente cumprem as regras de comutação

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c \quad (2b)$$

Explicitamente,

$$T^1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Pode-se introduzir, também, os geradores antihermitianos,

$$L^a = iT^a \quad , \quad (4a)$$

que por sua vez, cumprem

$$[L^a, L^b] = -\varepsilon^{abc} L^c \quad . \quad (5a)$$

Então,

$$R = e^{\omega^a L^a} \quad . \quad (5b)$$

Observando que

$$\left(\omega^a L^a\right)^3 = -\omega^2 (\omega^a L^a) \quad , \quad (6a)$$

onde ω é tal que

$$\omega^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \quad , \quad (6b)$$

os termos da série de potências de (5b) podem reagrupar-se e, então, temos

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{1} + \frac{\omega^a}{\omega} L^a \operatorname{sen} \omega + \left[\frac{\omega^a}{\omega} L^a \right]^2 (1 - \cos \omega) \quad (7) \\ &= \mathbb{1} + i \frac{\omega^a}{\omega} T^a \operatorname{sen} \omega - \left[\frac{\omega^a}{\omega} T^a \right]^2 (1 - \cos \omega) \quad . \end{aligned}$$

A interpretação geométrica de ω é que o mesmo é o ângulo da rotação, sendo que

$$n_i = \frac{\omega^i}{\omega} \quad , \quad (8)$$

são as componentes do versor na direção do eixo de rotação. Isto se vê calculando o efeito de R ao agir sobre \hat{n} ,

$$R \hat{n} = \hat{n} \quad , \quad (9)$$

e sobre dois vetores perpendiculares

$$v_1 = \hat{e}_1 \times \hat{n} \quad , \quad (R\hat{v}_1) \cdot \hat{v}_1 = \cos \omega \quad , \quad (10a)$$

$$v_2 = \hat{e}_2 \times \hat{n} \quad , \quad (R\hat{v}_2) \cdot \hat{v}_2 = \sin \omega \quad , \quad (10b)$$

ii) A transformação com $n=1$

No caso abeliano, MHA, uma transformação associada com soluções que carregam n unidades de fluxo (ver (2.2.7)) é, simplesmente,

$$\alpha(x) = n \arctan \left(\frac{x^2}{x^1} \right) \quad . \quad (11)$$

No MGG, a situação é um pouco mais complicada. Como já foi discutido na seção (2.3), a condição de contorno com carga topológica (isto é, magnética) $n=1$, é aquela que associa a cada ponto da esfera S_2 (no infinito espacial), o correspondente vetor radial, no isoespaço. Graficamente temos a situação representada na (Fig 2-2b) A transformação de calibre que nos interessa é a que leva à configuração $\mathcal{F} = \mathcal{B} = \text{constante}$ (Fig 2-2a) na da (Fig 2-2b). Escolhendo

$$\mathcal{B} = b \hat{e}_3 \quad , \quad (12)$$

temos que dita transformação é aquela que para cada ponto (r, θ, ϕ) leva o vetor unitário \hat{e}_3 no vetor unitário \hat{r} . Temos,

$$R(\theta, \phi) \hat{e}_3 = \hat{r}(\theta, \phi) \quad (13)$$

O ângulo da rotação se determina por

$$\cos\omega = \hat{r} \cdot \hat{e}_3 = \cos\theta \quad (14a)$$

$$\omega = \theta \quad , \quad (14b)$$

O vetor unitário na direção do eixo será

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_3 \times \hat{r}}{|\hat{e}_3 \times \hat{r}|} = \frac{\hat{\phi}}{\text{sen}\omega} \quad (15)$$

Utilizando (8), podemos escrever este resultado na forma equivalente

$$\omega_1(\theta, \phi) = -\theta \text{sen}\phi \quad (16a)$$

$$\omega_2(\theta, \phi) = \theta \text{cos}\phi \quad (16b)$$

$$\omega_3(\theta, \phi) = 0 \quad (16c)$$

REFERÊNCIAS

- [Abers e Lee,1973] Gauge Theory. E Abers e B.W. Lee
Phys Rep 9 (1973) 1
- [Abbott,1978] Calculating quantum corrections to mass of a soliton without collective coordinates. L. Abbott
*Nucl Phys B*139 (1978) 159
- [Abrikosov,1957] On magnetic properties of superconductors of the second group. A. A. Abrikosov *Sov. Phys* 5 (1957) 1174
- [Abud et al,1982] Quantized Wilson Loops with Dimensional Regularization. M. Abud, C. G. Bollini e J. J. Giambiagi
*Nucl Phys B*204 (1982) 109
- [Actor,1979] Classical solutions of $SU(2)$ Yang-Mills theories
A. Actor *Rev of Mod Phys* 51 (1979) 461
- [Adkins et al,1975] Static properties of the Nucleons in the Skyrme Model. *Nucl Phys* b228 (1983) 552
- [Aichelburg e Embacher,1988] Supergravity Solitons I
P. C. Aichelburg e F. Embacher *Phys Rev D*37 (1988) 338
- [Alcaraz,1980] Estudo de sistemas de spins a duas dimensões e de calibre a quatro dimensões com simetria $Z(N)$. F. C. Alcaraz
Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, (1980)
- [Alcaraz e Köberle,1980] Duality and the phases of $Z(N)$ systems.
F. C. Alcaraz e R. Köberle *J. Phys A: Math Gen* 13 (1980) L153
- [Amaral e Pol,1988] Vortices in the superconducting transition of the 2+1 Abelian Higgs model. M. G. Amaral e M. E. Pol
Preprint Fisica-PUC/RJ 18/88

- [Appelquist et al,1973] Renormalization and Gauge Independence in Spontaneously Broken Gauge Theory. T Appelquist, J. Carazzone, T. Goldman e H. R. Quinn *Phys Rev D8* (1973) 1747
- [Aragão et al,1989] Duality and Confinement in three dimensional Yang-Mills theory. C. A. Aragão, E. C. Marino, G. C. Marques e M. Goldman de Castro *Int Jour of Theor Phys* (a ser publicado)
- [Araki,1960] On asymptotic behavior of vacuum expectation values at larges space-like separation. H. Araki
Ann of Phys 11 (NY) (1960) 260
- [Araki et al,1962] On the Asymptotic Behaviour of Wightman Functions in Space Like Directions. H. Araki, K. Hepp e D. Ruelle
Helv Phys Acta 35 (1962) 164
- [Baacke et al,1987] Soliton States in Electroweak Theory
J. Baacke, G. Eilam e H. Lange *Phys Lett B199* (1987) 234
- [Bardakci,1979] Local field theory for solitons
K. Bardakci *Phys Rev D19* (1979) 2357
- [Bardakci e Samuel,1978] Local field theory for solitons
K. Bardakci e S. Samuel *Phys Rev D18* (1978) 2849
- [Becchi et al,1975] The Abelian Higgs Model, Unitary of the S Operator. C. Becchi, H. Rouet e R. Stora *Phys Lett 52B* (1975) 67
- [Berg e Brilloire,1983] Glueball Spectroscopy in 4d $Su(3)$ Lattice Gauge Theory (I) B. Berg e a. Brilloire
Nucl Phys B221 (1983) 109
- [Bhanot e Rebbi,1981] $SU(2)$ String Tension , Glueball Mass and Interquark Potencial by Montecarlo Caomputataions. G. Bahnot e C. Rebbi *Nucl Phys B180(FS2)* (1981) 469
- [Cahill,1974] Extended particles and solitons
K. Cahill *Phys Lett 53B* (1974) 174

- [Callan,1982] Dyon-Fermion dynamics. C.Callan
*Phys Rev D*26 (1982) 311
- [Christ e Lee,1975] Quantum expansions of soliton solutions
N.H.Christ e T.D.Lee *Phys Rev D*12 (1975) 1606
- [Coleman,1973] There are no Goldstone Bosons in Two Dimensions
S.Coleman *Comm Math Phys* 31 (1973) 259
- [Coleman,1975] Classical lumps and their Quantum descendants.
S.Coleman in *New Phenomena in Subnuclear Physics*, A.Zichichi ed.
Plenum, NY, (1977) p.197
- [Coleman,1983] The magnetic monopole fifty years later
S.Coleman in *The Unity of the Fundamental Interactions*, A
Zichichi, ed., Plenum, NY, (1983) p.21
- [Coleman e Weinberg,1973] Radiative Corrections as the origin of
Spontaneous Symmetry Breaking. S.Coleman e E.Weinberg
*Phys Rev D*7 (1973) 1888
- [Dashen et al 1974] Nonperturbative methods and extended-hadron
models in field theory. I.Semiclassical functional methods
R.Dashen,B.Hasslacher e A.Neveu *Phys Rev D*10 (1974) 4114
- [Dashen et al,1975] Particle spectrum in model field theories from
semiclassical functional integral techniques. R.Dashen,
B.Hasslacher e A.Neveu *Phys Rev D*11 (1975) 3424
- [de Vega e Schaposnik,1976] Classical vortex solution of the
Abelian Higgs Model. H.J.de Vega e F.Schaposnik
*Phys Rev D*14 (1976) 1100
- [de Vega e Schaposnik,1986a] Electrically Charged Vortices in
Non-Abelian gauge theories with Chern Simons term. H.J.de Vega e
F.Schaposnik *Phys Rev Lett* 56 (1986) 2584
- [de Vega e Schaposnik,1986b] Vortices and electrically charged

- vortices in Non-Abelian gauge theories. H. J. de Vega e F. Schaposnik
Phys Rev D 34 (1986) 3206
- [Dzyaloshinskii et al,1988] Neutral Fermions in Paramagnetic Insulators. I. E. Dzyaloshinskii, A. Polyakov e P. Wiegmann
Phys Lett A 127 (1988) 112
- [Eguchi,1975] Coloured magnetic monopoles
T. Eguchi *Phys Lett* 59B (1975) 73
- [Einhorn e Savit,1979] Phase transition and confinement in the Abelian Higgs model. M. B. Einhorn e R. Savit
Phys Rev D 19 (1979) 1198
- [Ezawa,1978] Quantum vortex operators and superselection rules in the Higgs model. Z. F. Ezawa *Phys Rev D* 18 (1978) 2091
- [Ezawa,1979a] Quantum soliton operators for monopoles and fermionization mechanism of Dyons. Z. F. Ezawa
Phys Lett 81B (1979) 325
- [Ezawa,1979b] Local field theory for vortex solitons.
Z. F. Ezawa *Phys Lett* 82B (1979) 426
- [Ezawa e Tze,1976a] Monopoles, vortices and the geometry of Yang-Mills bundles. Z. F. Ezawa e H. C. Tze *J Math Phys* 17 (1976) 2228
- [Ezawa e Tze,1976b] Global signatures of gauge invariance.
Z. F. Ezawa e H. C. Tze *Phys Rev D* 14 (1976) 1006
- [Fayet,1976] Higgs Model and Supersymmetry
P. Fayet *Nuov Cim* 31A (1976) 626
- [Fernández e Marinari,1988] Glueball Masses and String Tension
L. A. Fernández e E. Marinari *Nucl Phys B* 295 (1988) 51
- [Förster,1974] Dynamics of relativistic vortex lines and their

- relation to dual theory. D.Förster *Nucl Phys* B81 (1974) 84
- [Fradkin e Stone,1988] Topological Terms in One and Two-Dimensional Quantum Heisenberg Antiferromagnets. E.Fradkin e M.Stone *Preprint ILL-(THD-88#12*
- [Fradkin e Susskind,1978] Order and disorder in gauge systems and magnets. E.Fradkin e L.Susskind *Phys Rev D*17 (1978) 2637
- [Fröhlich,1976] New super-selection sectors ("Soliton states") in two dimensional bose models. J.Fröhlich *Comm Math Phys* 47 (1976) 269
- [Fröhlich e Marchetti,1987] Soliton Quantization in Lattice Field Theory. J.Fröhlich e P.A.Marchetti *Comm Math Phys* 112 (1987) 343
- [Fröhlich e Marchetti,1988] Quantum Field Theory of Vortices and Anyons. Fröhlich e P.A.Marchetti *ETH Preprint* (1988)
- [Furuya e Marino,1988] Quantum Theory o skyrmions in the long wavelenght limit of antiferromagnetic spin systems K.Furuya e E.C.Marino *Fisica-PUC/RJ* 13/88
- [Georgi e Glashow,1972] Unified Weak an Electromagnetic Interactions without Neutral Currents. H.Georgi e S.L.Glashow *Phys Rev Lett* 28 (1972) 1494
- [Ginzburg e Landau,1950] V.L.Ginzburg e L.D.Landau *Jour Exp Theor Phys* 20 (1950) 1064 (em russo)
- [Goddard e Olive,1878] Magnetic monopoles in gauge field theories. P.Goddard e D.Olive *Rep Prog Phys* 41 (1978) 1357
- [Goebel e Shaw,1968] Phenomenologicals Bounds on $\pi\pi$ Scattering Lenghts C.J.Goebel e G.Shaw *Phys Lett* 27B (1968) 291
- [Goldstone e Jackiw,1975] Quantization of nonlinear waves.

- J. Goldstone e R. Jackiw *Phys Rev D* **11** (1975) 1486
- [I. S. Grandszhtein e I. M. Rizhik, 1966] Table of Integrals, Series and Products. *Academic Press* NY (1966)
- [Grigoriev e Rubakov, 1988] Soliton Pair Creation at Finite Temperatures D. Grigoriev e V. A. Rubakov *Nucl Phys B* **299** (1988) 67
- [Haldane, 1988] $O(3)$ Nonlinear σ Model and the Topological Distinction between Integer and Half-Integer-Spin Antiferromagnets in Two Dimensions. F. Haldane *Phys Rev Lett* **61** (1988) 1029
- [Higgs, 1966] Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons. P. W. Higgs *Phys Rev* **145** (1966) 1156
- [Ishikawa et al, 1982] The glueball spectrum in QCD: First results of a lattice Monte Carlo calculation. K. Ishikawa, M. Teper e G. Schierholz *Phys Lett* **110B** (1982) 399
- [Iliopoulos et al, 1975] Functional methods and perturbation theory J. Iliopoulos, C. Izykson e A. Martin *Rev of Mod Phys* **47** (1975) 165
- [Itzykson e Zuber, 1980] Quantum Field Theory. C. Itzykson e J. B. Zuber *McGraw Hill* (1980)
- [Jackiw, 1977] Quantum meaning of classical field theory. R. Jackiw *Rev Mod Phys* **49** (1977) 681
- [Jose et al, 1977] Renormalization, vortices and symmetry breaking perturbations in the two dimensional planar model. J. V. Jose, L. Kadanoff, S. Kirkpatrick e D. R. Nelson *Phys Rev B* **16** (1977) 1217
- [Kadanoff e Ceva, 1971] Determination of an operator algebra for the two dimensional Ising model. L. Kadanoff e H. Ceva *Phys Rev B* **3** (1971) 3918
- [Klaiber, 1967] The Thirring model. B. Klaiber in *Lectures in Theoretical Physics*, ed. A. Barut, Boulder (uSA) (1967) p. 141

- [Köberle e Marino,1983] Duality, mass spectrum and vacuum expectation values. R.Köberle e E.C.Marino *Phys Lett* 126B (1983) 475
- [Kogut,1979] An introduction to lattice gauge theory and spin systems. J.B.Kogut *Rev of Mod Phys* 51 (1979) 659
- [Kogut,1983] The lattice gauge theory approach to QCD. J.B.Kogut *Rev of Mod Phys* 55 (1983) 775
- [Kosterlitz e Thouless,1973] Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional models. J.M.Kosterlitz e D.J.Thouless *J.Phys c: Solid State Phys* 6 (1973) 1181
- [Kramers e Wannier,1941] Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. H.A.Kramers e G.H.Wannier *Phys Rev* 60 (1941) 252
- [Lazarides et al,1987] Magnetic Monopoles from Superstrings Models G.Lazarides, C.Pangiotakopoulos e Q.Shafi *Phys Rev D* 58 1707
- [Lee,1972] Renormalizable Massive Vector-Meson Theory. Perturbation Theory of the Higgs Phenomenon. B.W.Lee *Phys Rev D* 5 (1972) 823
- [Mandelstam,1975a] Soliton Operators for the quantized sine-Gordon equation. S.Mandelstam *Phys Rev D* 11 (1975) 3026
- [Mandelstam,1975b] Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories. S.Mandelstam *Phys Lett* 53B (1975) 476
- [Mandelstam,1979] Charge-monopole duality and the phases of non-abelian gauge theories. S.Mandelstam *Phys Rev D* 19 (1979) 2391
- [Mansfield,1986] Quantum vortices. P.Mansfield *Nucl Phys* B267 (1986) 575
- [Macedo e Marino,1988] *Phys Rev D (a ser publicado)*

- [Marino,1980] Formulação integral funcional para teorias de campo com estatística não convencional. E.C. Marino
Tese de Doutorado Puc-RJ (1980)
- [Marino,1983] The quantum kinks of two-dimensional theories of the Φ^4 type. E.C. Marino *Nucl Phys B*217 (1983) 413
- [Marino,1984] The phases and mass spectrum with quantum kinks of the $Z(4)$ symmetric Φ^4_2 theory. E.C. Marino
*Nucl Phys B*230[FS10] (1984) 149
- [Marino,1988] Quantum theory of nonlocal vortex fields
E. C. Marino *Phys Rev D*38 (1988) 3194
- [Marino e Stephany Ruiz,198] Quantum theory of nonlocal magnetic monopole fields. E.C. Marino e J. E. Stephany Ruiz
*Phys Rev D*39 (a ser publicado)
- [Marino e Swieca,1980] Order Disorder and generalized statistics
E. C. Marino e J. A. Swieca *Nucl Phys B*170[FS1] 175
- [Marino et al,1982] Euclidean functional approach for disorder variables and kinks. E. C. Marino, B. Schroer e J. A. Swieca
*Nucl Phys B*200[FS4] (1982) 473
- [Mermin e Wagner,1966] Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one or two-dimensional isotropic Heisenberg models. N. D. Mermin e H. Wagner *Phys Rev Lett* 17 (1966) 1133
- [Montonen e Olive,1977] Magnetic Monopoles as gauge particles
C. Montonen e D. Olive *Phys Lett* 72B (1977) 117
- [Münster,1981] Strong Coupling expansions for the mass gap in lattice gauge theories. G. Münster *Nucl Phys B*190[FS3] (1981) 439
- [Nambu,1974] Strings, monopoles and gauge fields.
Y. Nambu *Phys Rev D*10 (1974) 4262

- [Nielsen e Olesen,1973] Vortex-line models for dual strings.
H. B. Nielsen e P. Olesen *Nucl Phys B*61 (1973) 45
- [O'Carroll et al,1985] Glueball Mass Spectrum and mass splitting
in 2+1 strongly coupled lattice gauge theories. M. O'Carroll,
G. A. Braga e R. S. Schor *Commun Math Phys* 97 (1985) 429
- [Parisi,1975] Quark imprisonment and vacuum repulsion.
G. Parisi *Phys Rev D*11 (1975) 970
- [Paul e Khare,1986] Charged vortices in an abelian Higgs model
with Chern Simons term. S. Paul e A. Khare *Phys Lett* 174B (1986) 420
- [Peskin,1978] Mandelstam-'t Hooft duality in abelian lattice
models. M. E. Peskin *Ann of Phys* (NY) 113 (1978) 122
- [Polyakov,1975] Particle spectrum in quantum field theory
A. M. Polyakov *JETP Lett* 20 (1975) 522
- [Pottinger, 1978] Creation and Annihilation Operators for
Nielsen-Olesen Vortices in the Coherent State Approximation
D. E. L. Pottinger *Phys Lett*78B (1978) 476
- [Rajamaran,1975] Some non perturbative semi-classical methods in
Quantum Field Theory. R. Rajamaran *Phys Repts* 21 (1975) 227
- [Rajamaran,1982] *Solitons and Instantons*. R. Rajamaran
North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, (1982)
- [Rebbi e Soliani,1982] *Solitons and Particles*. C. Rebbi e
G. Soliani, World Scientific, Singapoure (1984)
- [Rohrlich,1950] Quantum electrodynamics of charged particles
without spin. F. Rohrlich *Phys Rev* 80 (1950) 666
- [Rubakov,1982] Adler-Bell-Jackiw anomaly and fermion number
breaking in the presence of a magnetic monopole. V. A. Rubakov

*Nucl Phys B*203 (1982) 311

[Sathiapalan,1987] Duality in statistical mechanics and string theory. B Sathiapalan *Phys Rev Lett* 58(1987) 1597

[Savit,1980] Duality in field theory and statistical systems
R.Savit *Rev of Mod Phys* 52 (1980) 453

[Schaposnik,1978] Pseudoparticles and confinement in the two dimensional Abelian Higgs Model. F.Schaposnik
*Phys Rev D*18 (1978) 1183

[Schiff,1967] Quarks and Magnetic Poles
L.Schiff *Phys Rev* 160 (1967) 1257

[Schroer,1988] Operator Approach to Conformal Invariant Quantum Fields Theories and Related Problems.
B.Schroer *Nucl Phys B*295(FS21) (1988) 589

[Swieca,1977] Solitons and Confinement. J.A.Swieca
Forts der Phys 25 (1977) 303

[Swieca e Lowenstein,1971] Quantum electrodynamics in two dimensions. J.H.Lowenstein e J.A.Swieca
Ann of Phys (NY) 68 (1971) 172

[Tassie,1973a] Magnetic flux lines as relativistic strings.
L.J.Tassie *Phys Lett* 46B (1973) 397

[t Hooft,1974a] Magnetic Monopoles in Unified Field Theories
G.'t Hooft *Nucl Phys* B79 (1974) 276

[t Hooft,1974b] Quarks and gauge fields.
G.'t Hooft *Ref TH 1902 CERN* (não publicado)

[t Hooft,1978] On the phase transition towards permanent quark confinement. G.'t Hooft *Nucl Phys* B138 (1978) 1

[t Hooft,1979] A property of electric and magnetic flux in

- non-abelian gauge theories. G.'t Hooft *Nucl Phys B*153 (1979) 141
- ['t Hooft,1981] Topology of the gauge condition and new confinement phases in non abelian gauge theories. G.'t Hooft *Nucl Phys B*190[FS3] (1981) 455
- [Tomboulis,1975] Canonical quatization of nonlinear waves
E.Tomboulis *Phys Rev D*12 (1975) 1678
- [Tomboulis e Eoo,1976] Soliton quantization in gauge theories
E.Tomboulis e G.Woo *Nucl Phys B*107 (1976) 221
- [Townsend,1988] Supersymmetric extended Solitons
P.K.Townsend *Phys Lett B*202 (1988) 53
- [Tze,1974] Born duality and strings in hadrodynamics and electrodynamics. H.C.Tze *Il Nuov Cim* 22A (1974) 507
- [Weinberg,1973] Perturbative Calculations of Symmetry Breaking
S.Weinberg *Phys Rev D*7 (1973) 2887
- [Wiegmann,1978] One dimensional fermi systems and plane xy model
P.B.Wiegmann *J Phys C*11 (1978) 1583
- [Wilson,1974] Confinement and quarks. K.Wilson
*Phys Rev D*10 (1974) 2445
- [Witten,1983] Current algebra,baryons and quark confinement
E.Witten *Nucl Phys B*223 (1983) 433
- [Witten,1984] Non Abelian Bosonization in two dimensions
E.Witten *Commun Math Phys* 92 (1984) 455
- [Zabusky e Kruskal,1965] Interaction of "solitons" in a collisionless plasma an the recurrence of the initial states
N.J.Zabusky and M.D.Kruskal *Phys Rev Lett* 15 (1965) 240

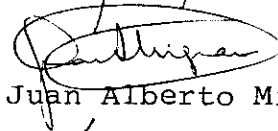
"OPERADORES DE DESORDEM E QUANTIZAÇÃO
DE SÓLITONS EM $D \geq 3$ "

JORGE EDUARDO STEPHANY RUIZ

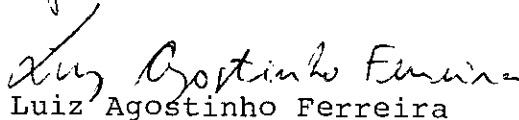
Tese de Doutorado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora, os seguintes professores:



Eduardo Cantera Marino - Presidente



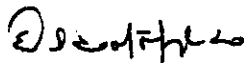
Juan Alberto Mignaco - Co-orientador



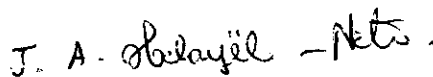
Luiz Agostinho Ferreira



Roland Köberle



Evaldo Mendonça Fleury Curado



José Abdala Helayél-Neto