

HELIO MANOEL PORTELLA

ESTUDO MORFOLÓGICO DA COMPONENTE HADRÔNICA
DA RADIAÇÃO CÔSMICA

TESE DE

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, OUTUBRO 1989

À memória de meu pai

Francisco Portella

a quem devo meu interesse pela Ciência.

Ao terminar este trabalho lembro-me saudoso de trechos de um de seus poemas,

*"... insetos imprudentes fugi do lampião
voltai para as trevas a luz é ilusão..."*

*... mas eles coitados, buscavam, buscavam
a luz fermentada do velho lampião..."*

*Assim, muitas vezes nos queimamos no bojo
desse lampião na ânsia de adquirir mais
conhecimento, mais luz. Quanto mais insis-
timos na procura do absoluto, maior é
nossa angústia, decepção e insatisfação,
pois novos horizontes são abertos e a
verdade aceita ontem deixa de valer hoje.
Entretanto, como os insetos buscamos
cada vez mais a luz do lampião procurando
com isso obter a verdade e atingir a
perfeição.*

AGRADECIMENTOS

É com imensa satisfação que desejo externar minha gratidão a todos que participaram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho.

- Ao Dr. Francisco Mendes de Oliveira Castro, orientador deste trabalho, grande amigo, pelo acompanhamento constante, pelas sugestões, discussões e sábios ensinamentos, transmitidos durante a sua realização. Quero expressar além deste agradecimento, minha profunda admiração à sua postura de cientista, no que se refere às cuidadosas conclusões obtidas de seus estudos e à busca contínua de novos conhecimentos. O convívio durante estes anos moldou minha personalidade e permitiu ampliar meus conhecimentos científicos de forma sólida e duradoura.

- Ao Dr. Naoyuki Arata pelo prestimoso auxílio nas várias etapas deste trabalho e pela transmissão de conhecimentos através de proveitosas discussões e críticas que me auxiliaram na elaboração desta e de outras pesquisas. Minha grande estima pelo seu apoio e encorajamento para que eu pudesse finalizar este trabalho.

- À professora Neusa Amato pela leitura minuciosa do manuscrito, corrigindo-o quando necessário. Meu "muito obrigado", pelo constante estímulo e pela grande amizade demonstrada durante todos estes anos.

- Ao professor Cesare Mansueto Giulio Lattes, pelo aprendizado adquirido através de longas e salutares conversas sobre os mais variados assuntos. Quero, também, externar minha admiração por seu profundo conhecimento sobre ciência e também pelo seu caráter inovador e pioneiro, que muito contribuiu para a minha formação.

- Aos Drs. Y. Fujimoto e S. Hasegawa pelas sugestões.

- Ao Dr. A. Ohsawa pelas discussões que me auxiliaram na elaboração deste trabalho.

- Aos demais membros da Colaboração Brasil-Japão de Raios Cômicos.

- Aos Drs. José Leite Lopes (Diretor do CBPF), Take - shi Kodama (Coordenador de Ensino do CBPF) e Chung Kai Cheong (Chefe do DNE/CBPF).

- Aos pesquisadores do DNE pela grande amizade demonstrada durante a realização deste trabalho.

Quero também agradecer

- à amiga Helena de Souza Ferreira (Secretária do DNE) pelos serviços de datilografia executados com muita dedicação e presteza. Desejo externar ainda minha gratidão pelo seu carinho e atenção;

- às amigas Iolanda A. Lopez, Lelé R. Gil, Nair Miranda e Terezinha T. Villar, o meu "muito obrigado" pelo apoio, consideração e preocupação constantes nos momentos difíceis por que passei. A amizade que vocês me dedicaram serviu de estímulo na elaboração deste trabalho;

- a Myriam S. Coutinho (Secretária da PG-CBPF), Maria de Fátima d'Oliveira, ao Sr. Aroldo F. Vieira, pela colaboração oportuna e eficiente quando solicitados;

- à Maria Neuma G. Rodrigues pela ajuda constante;

- a F. Valéria F. Vasconcelos, M. do Socorro C. do Vale, Maria da Conceição da Silveira e Elza L. e S. Maia, pelo auxílio inestimável na confecção dos preprints que serviram de base do presente trabalho;

- ao Luiz Reis agradeço a colaboração durante a etapa que envolveu cálculos numéricos.

- aos funcionários da Biblioteca e do setor da xerox do CBPF, que me facilitaram a coleta de dados, e a consulta dos livros e revistas.

Desejo expressar meu agradecimento aos membros do Grupo de Altas Energias do Instituto de Física da UFF.

- Dr. Carlos E. Navia pelas valiosas discussões sobre

vários temas da Física dos Raios Cósmicos.

- Dra. Regina H.C. Maldonado pelo incessante apoio, pelas discussões estimulantes, pela grande amizade demonstrada ao longo dos anos de convivência. Seu encorajamento contínuo muito contribuiu para a conclusão deste trabalho.

- Drs. Francisco A. Pinto, Hersy V. Pinto pelo incentivo e amizade.

Desejo expressar ainda minha gratidão aos professores e amigos do Instituto de Física da UFF pelo constante estímulo.

- À Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos por permitir a utilização de dados que serviram para a elaboração deste trabalho.

- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, instituição que possibilitou, com sua infraestrutura, a sua realização.

- Ao Instituto de Física da UFF pela concessão do tempo que se fez necessário para a conclusão deste trabalho.

Finalizando desejo externar meus sentimentos de profunda gratidão "in memorium" à minha mãe que com seu despreendimento e muito amor me conduziu firmemente aos estágios em que hoje me encontro. A ela, cujas horas de estudo me afastaram algumas vezes de sua convivência, minhas saudosas lembranças.

Às minhas irmãs, Elda e Menga, meu apreço e gratidão pelo estímulo e pelas palavras encorajadoras que muito contribuíram na elaboração deste trabalho. A elas meu abraço carinhoso e afetivo do mano que muito as estima e quer.

RESUMO

A equação de difusão dos nucleons na atmosfera é resolvida com o emprego do método das aproximações sucessivas, obtendo-se uma solução exata e compacta quando se considera o aumento, com a energia, da seção de choque na forma $\sigma^0 (1 + a \ln(E/E_0))$. Nossa solução é comparada com a solução aproximada de N.L. Grigorov. O resultado encontrado por Grigorov fornece um fluxo de nucleons 10-20% maior para $a = 0,06$ e energias compreendidas entre 1 e 1000 TeV.

A equação de difusão dos píons é resolvida aproximadamente considerando uma seção de choque crescente com a energia da mesma forma que a dos nucleons. Nosso resultado é, em tão, comparado com os fluxos integrais de hadrons obtidos através de experiências com câmaras de emulsões nucleares expostas em altitudes de montanhas, mostrando uma concordância entre eles para valores de a no intervalo 0,06-0,10.

As distribuições de energia dos píons na forma fracionária usadas nos cálculos dos fluxos foram obtidas através de dados de experiências realizadas em aceleradores, e através de um modelo teórico que postula a produção de um estado intermediário que desintegra isotropicamente em píons logo após a sua formação. Para valores de a entre 0,06 e 0,10 e na região de energia de 1 a 1000 TeV, o fluxo hadrônico obtido com o auxílio do modelo teórico é maior em 10 a 25%.

Os fluxos integrais de hadrons calculados com nossa solução e com a obtida por N.L. Grigorov são comparados. Para valores de a variando no intervalo [0,03-0,10] e energias entre 1 a 1000 TeV a solução de Grigorov fornece um fluxo 15-20% maior.

SUMMARY

The diffusion equation of cosmic-ray nucleons is exactly solved based on the successive approximations method, taking into account the rising cross section of the form $\sigma_0(1+a \ln E/E_0)$. Grigorov's well known approximate solution is compared with our exact solution; it is found that the former overestimates the nucleon flux by, for example, 10-20% in the energy region 1-1000 TeV at mountain altitudes in case of $a = 0.06$.

The diffusion equation of cosmic-ray pions is solved approximately with the rising cross section. The energy distribution of pions in the interactions nucleon-air nuclei and pion-air nuclei is assumed to be of a scaling-type pion production. The integral hadron flux is compared with the experimental emulsion chamber data at mountain altitudes. We find a good consistency with "a" between 0.06 and 0.10. The fraction of pions with $E \geq 1$ TeV in the cosmic-ray flux is estimated.

SUMMARY

The diffusion equation of cosmic-ray nucleons is exactly solved based on the successive approximations method, taking into account the rising cross section of the form $\sigma_0(1+a \ln E/E_0)$. Grigorov's well known approximate solution is compared with our exact solution; it is found that the former overestimates the nucleon flux by, for example, 10-20% in the energy region 1-1000 TeV at mountain altitudes in case of $a = 0.06$.

The diffusion equation of cosmic-ray pions is solved approximately with the rising cross section. The energy distribution of pions in the interactions nucleon-air nuclei and pion-air nuclei is assumed to be of a scaling-type pion production. The integral hadron flux is compared with the experimental emulsion chamber data at mountain altitudes. We find a good consistency with "a" between 0.06 and 0.10. The fraction of pions with $E \geq 1$ TeV in the cosmic-ray flux is estimated.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	vi
SUMMARY	vii
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiii
- A FÍSICA DE RAIOS CÓSMICOS: PASSADO, PRESENTE E PERSPECTI VAS FUTURAS	1
- INTRODUÇÃO	13
<u>CAPÍTULO I</u> - DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA (COM SE- ÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE).....	21
1.1 - Resolução Analítica da Equação de Difusão dos Nucleons na Atmosfera	23
1.2 - Casos Particulares	27
1.2.1 - Espectro Primário da Forma Aproxí- mada, $G(E) = N_0 e^{-(\gamma+1)}$	27
1.2.2 - Coeficiente de Inelasticidade do Nucleon ($K_N=1-\eta$) Constante	28
1.2.3 - Distribuição Uniforme de Elastici- dade dos Nucleons ($\int_{NN}(\eta)d\eta=1d\eta$)....	29
1.3 - Obtenção do Fluxo Diferencial de Nucleons Sem Usar Uma Equação de Difusão	30
1.4 - Conclusões	31
<u>CAPÍTULO II</u> - DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA (COM SE- ÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA).....	34
2.1 - Equação de Difusão dos Nucleons com λ Vari- ando com a Energia	36
2.2 - Resolução Analítica da Equação de Difusão dos Nucleons na Atmosfera	37

2.3 - Caso Particular de K_N Constante	40
2.4 - Comparação com a Solução Aproximada de Grigorov	45
2.5 - Discussão	46
2.6 - Conclusões	50
<u>CAPÍTULO III</u> - DIFUSÃO DOS PÍONS NA ATMOSFERA, NO CASO DE SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE	52
3.1 - Equação de Difusão dos Píons na Atmosfera..	53
3.2 - Resolução Analítica da Equação de Difu- são dos Píons	58
3.3 - Caso Particular, Espectro Primário da For- ma $F_N(0,E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$	62
3.4 - Comparação com Dados Experimentais	64
3.5 - Discussão	74
3.6 - Conclusões	76
<u>CAPÍTULO IV</u> - DIFUSÃO DOS PÍONS NA ATMOSFERA NO CASO DA SEÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA....	78
4.1 - Equação de Difusão dos Píons Carregados na Atmosfera	79
4.2 - Resolução da Equação de Difusão dos Píons Carregados	80
4.3 - Comparação com Resultados Experimentais ...	86
4.4 - Discussão	92
4.4.1 - Contribuição dos Píons	92
4.4.2 - Comparação com a Solução de Gri - gorov	95
4.4.3 - Variação da Razão $\frac{F_H(x, \geq E) \text{ (modelo teórico)}}{F_H(x, \geq E) \text{ (dados de acelerador)}}$ com a Energia	96
4.4.4 - Desvio do Valor de $a = 0.06$	97
- CONCLUSÕES	102
<u>APÊNDICE A</u> - FLUXO DIFERENCIAL DE NUCLEONS PARA O CASO DA SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE	108

<u>APÊNDICE B</u>	- FLUXO DIFERENCIAL DE NUCLEONS PARA O CASO DA SEÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA	112
<u>APÊNDICE C</u>	- FLUXO DIFERENCIAL DE PÍONS PARA O CASO DA SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE	115
<u>APÊNDICE D</u>	- MONTAGEM DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DA DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA	123
	D.1 - Seção de Choque Crescente com a Energia....	123
	D.2 - Seção de Choque Constante	124
<u>APÊNDICE E</u>	- MODELO DA BOLA DE FOGO	126
<u>APÊNDICE F</u>	- CONTRIBUIÇÃO PARA O FLUXO DE PÍONS OUTRAS PARTÍCULAS ELEMENTARES	133
	F.1 - Decaimento $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$	133
	F.2 - Decaimentos dos Mésons K	134
BIBLIOGRAFIA	136

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>Pág.</u>
2.1 - Seções de choque total e elástica das interações hadrônicas versus o momento do feixe no sistema de laboratório (GeV/c) e versus a energia total no sistema centro de massa (GeV).....	34
2.2 - Seção de choque inelástica das interações (p-ar) versus a energia	35
2.3 - Comparação entre os fluxos diferenciais de nucleons calculados com a seção de choque constante e com a seção de choque crescente com a energia	44
2.4 - Comparação entre os fluxos diferenciais de nucleons obtidos com a solução aproximada de Grigorov e com a nossa solução exata	46
2.5 - Distribuição de probabilidades de interações do nucleon na atmosfera	48
2.6 - Variação do índice de potência (γ') do espectro de nucleons para $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80\text{g/cm}^2$, $\eta = 0,5$	50
3.1 - Representação esquemática da difusão dos raios cósmicos na atmosfera	52
3.2 - Distribuição de x_F para píons resultantes de várias reações pp	66
3.3 - Distribuição de energia fracionária dos píons secundários $f_{\pi N}(\eta)$	67
3.4 - Distribuição de x_F para os píons resultantes de reações πp e πNe	68
3.5 - Distribuição de energia fracionária dos píons secundários $f_{\pi\pi}(\eta)$	69
3.6 - Espectro integral de hadrons em Kanbala	73
3.7 - Espectro integral de hadrons em Fuji	73
3.8 - Espectro integral de hadrons em Chacaltaya	74
3.9 - Razão entre o fluxo integral de píons e o fluxo integral de hadrons	75
4.1 - Razão entre os fluxos integrais de nucleons calculados com a distribuição uniforme de elasticidade e com a elasticidade constante e igual a 0,5	87

4.2 - Espectro integral de hadrons em Kanbala	89
4.3 - Espectro integral de hadrons em Fuji	89
4.4 - Espectro integral de hadrons em Chacaltaya	90
4.5 - Espectro integral de hadrons em Fuji	91
4.6 - Espectro integral de hadrons em Chacaltaya	91
4.7 - Razão entre o fluxo integral de píons e o fluxo integral de hadrons em várias profundidades atmosféricas	93
4.8 - Razão entre o fluxo integral de píons e o fluxo integral de hadrons em Chacaltaya ($x = 540\text{g/cm}^2$).....	94
4.9 - Razão entre o fluxo integral de píons e o fluxo integral de hadrons em Fuji ($x = 650\text{g/cm}^2$).....	94
4.10 - Comparação entre os fluxos integrais de hadrons obtidos por Grigorov e o obtido de nossos cálculos	95
4.11 - Razão entre o fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de dados de acelerador e o fluxo semelhante calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico (bola de fogo)	97

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>	<u>Pág.</u>
3.1 - Coeficientes C_N e C_π (π da produção)	71
4.1 - Razão entre o fluxo integral de nucleons calculado com $f_{NN}(\eta) = 1$ e o fluxo integral de nucleons calculado com $\eta = 0,5$. $R = F_N(x, \geq E) (f(\eta) = 1) / F_N(x, \geq E) (\eta = 0,5) = A \log E + B$	88
4.2 - Livre percurso médio dos nucleons e píons na atmosfera	99
4.3 - Variação do livre percurso médio do hadron α (N ou π^+) na atmosfera com a energia. Os dados mostrados são para os nucleons; para os píons carregados multiplicamos os $\lambda_N(E)$ pela razão que consta da tabela.....	100
4.4 - Amplitude e índice do espectro diferencial primário para vários intervalos de energia e vários autores	101
E.1 - Parâmetros do modelo da bola de fogo	132
E.2 - Variação dos coeficientes C_N e C_π com o índice espectral γ ...	132
F.1 - Número médio (%) de partículas resultantes da interação ($p\bar{p}$) ($\sqrt{s} = 540$ GeV, CERN)	135
F.2 - Decaimentos preferenciais dos mésons	135

O HOMEM É UM ANIMAL QUE VIVE INTERROGANDO.

P. Mantegazza

A FÍSICA DE RAIOS CÔSMICOS: PASSADO, PRESENTE
E PERSPECTIVAS FUTURAS

Por volta de 1900 foi descoberta por C.T.R. Wilson ⁽¹⁾, Elster e Geitel ⁽²⁾ uma radiação extremamente penetrante cuja origem foi localizada fora da superfície terrestre, por Victor Hess ⁽³⁾, entre os anos de 1912-1913. Os resultados obtidos por Hess foram confirmados por Kolhörster ⁽⁴⁾ e mais tarde por Pfozter ⁽⁵⁾ que conseguiu estudar a variação da intensidade de partículas incidentes na vertical, mostrando que havia um máximo nesse fluxo ao redor de 15000 mts, decrescendo rapidamente após essa altura. Esse efeito de transição foi explicado nas décadas seguintes em função do aumento do número de partículas devido à formação e desenvolvimento de cascatas atmosféricas. Essa radiação, denominada radiação cósmica (R.C.) deu origem a um novo ramo da Física que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Física das Partículas Elementares e da Física de Altas Energias.

A partir dos anos 20 houve várias descobertas importantes nessa área que impulsionaram o desenvolvimento rápido da Física dos Raios Cósmicos. Entre os anos 22-27, Millikan ⁽⁶⁾ descobre a existência de uma radiação penetrante (a componente dura da R.C.). Clay ⁽⁷⁾, entre 27 e 29, descobre o Efeito Latitude mostrando que a intensidade de raios cósmicos diminuía com o aumento da latitude geográfica, concluindo acertadamente que a R.C. primária era constituída por partículas carregadas. Em 1933 Compton ⁽⁸⁾ confirmou de maneira definitiva tal efeito.

Em 1933 Johnson e Street ⁽⁹⁾ e Rossi ⁽¹⁰⁾ independente

mente verificaram que havia um fluxo maior de R.C. na direção oeste do que na direção leste. Johnson estudando essa assimetria a várias altitudes concluiu, baseado em estudos de Vallarta, Lemaître ⁽¹¹⁾ e Stormer ⁽¹²⁾ sobre o movimento de partículas carregadas no campo magnético terrestre, que havia um excesso de cargas positivas na radiação cósmica primária.

Como em vários outros ramos da Física, também o estudo dos raios cósmicos mostrou ser um grande impulsionador do desenvolvimento de novas técnicas experimentais e de novos métodos de medida. Desde os eletroscópios usados por C.T.R. Wilson, Hess, etc, no início do estudo dos R.C., vários instrumentos foram sendo descobertos e que foram extremamente eficazes no desenvolvimento da Física da R.C.. Em 1911 surgiu a câmara de nuvem, em 1928 surgiram os contadores Geiger-Müller e Skobeltzyn ⁽¹³⁾, em 1927, associou as câmaras de Wilson com campos magnéticos para estudar o movimento de partículas carregadas da R.C.. O emprego de vários contadores Geiger-Müller, dispostos geometricamente deu origem aos telescópios de raios cósmicos. Em 1930, Rossi ⁽¹⁴⁾ desenvolveu o método de coincidências e em 1932, Blackett e Occhialini ⁽¹⁵⁾ associaram a câmara de Wilson com técnicas de contagem. Colocando um contador GM acima e outro abaixo de uma câmara de Wilson eles conseguiram controlar as expansões ocorridas na câmara.

Ao se iniciar a década de 30, o estudo dos raios cósmicos mostrou ser de grande utilidade para o desenvolvimento da Física de Partículas Elementares que, então, se iniciava. Em 1932, Anderson ⁽¹⁶⁾ descobriu o positron (e^+), e em 1933, Thibaud ⁽¹⁷⁾ mostrou que a massa da partícula descoberta por An

derson coincidia com a massa do elétron. Nessa mesma época Blackett e Occhialini ⁽¹⁸⁾ identificaram o elétron positivo com os "buracos" da teoria quântica dos elétrons desenvolvida por Dirac e mostraram, também, a formação do par (e^+e^-) a partir de um fóton com energia $E_{\text{fóton}} \geq 2 m_{\text{elétron}} \cdot c^2$. Nessa época, Bethe-Heitler ⁽¹⁹⁾ calcularam as seções de choque de formação de pares e de emissão de fótons com base na Teoria de Dirac. Ainda em 1932, mediante fotografias feitas em câmaras de Wilson, observou-se grupo de partículas que pareciam penetrar simultaneamente na câmara originadas de um ponto comum fora delas. Esse fenômeno ficou conhecido como "chuveiros". O estudo desses fenômenos multiplicativos baseado na teoria de Bethe-Heitler foi objeto de dois trabalhos teóricos bastante importantes que explicaram essas cascatas de partículas obtidas nas câmaras, a saber, os trabalhos de Bhabha e Heitler ⁽²⁰⁾ e de Carlson e Oppenheimer ⁽²¹⁾. Esses estudos postulavam que os elétrons e fótons eram os constituintes dos chuveiros, e que ao atravessar a atmosfera produziam novos elétrons e fótons através dos processos de formação de pares e de bremsstrahlung. O número de elétrons e de fótons numa cascata foi determinado resolvendo-se a assim chamada equação de difusão. Em 1938, Landau e Rumer ⁽²²⁾ obtiveram uma solução exata da equação integro diferencial que descrevia a difusão dos elétrons e fótons na atmosfera. Foram eles que usaram pela primeira vez a técnica da Transformada de Mellin que até hoje tem sido um método usual na resolução das equações integrais que descrevem a difusão das diferentes componentes da radiação cósmica. Eles mostraram, também, que era possível obter uma solução exata para as fun-

ções da cascata se fosse ignorado o termo devido à perda de energia dos elétrons por ionização. Snyder⁽²³⁾ e Scott⁽²⁴⁾, independentemente, obtiveram soluções exatas incluindo também o termo de ionização.

Por volta de 1938 e nos anos seguintes, a componente eletromagnética (leve) da R.C. foi muito bem estudada com base na Eletrodinâmica Quântica. A componente dura, entretanto, ainda necessitava de uma explicação satisfatória. O pequeno coeficiente de absorção desta componente e sua facilidade de produzir fótons sugeria a quebra da Eletrodinâmica Quântica para tais fenômenos.

Em 1935, Yukawa⁽²⁵⁾ desenvolveu sua teoria mesônica, considerando o méson como o quantum pesado responsável pela força nuclear. Em analogia com o fóton que resulta da quantização do campo eletromagnético, o quantum introduzido por Yukawa resultava da quantização de um campo que era intermediário das forças nucleares.

Vários autores tentaram mostrar que os elementos constituintes da R.C. "dura" não eram elétrons. Em 1937, Heitler⁽²⁶⁾ sugeriu que fossem partículas mais pesadas que o elétron, enquanto que Oppenheimer⁽²⁷⁾ postulou a existência de "elétrons pesados". Williams⁽²⁸⁾ pensou inicialmente que fossem prótons, hipótese que mostrou ser inadequada por causa da existência, na componente dura da R.C., de igual número de partículas negativas e positivas. Finalmente em 38, Anderson e Neddermeyer⁽²⁹⁾ e independentemente Street e Stevenson⁽³⁰⁾ descobriram o méson μ responsável pela componente dura da R.C. Inicialmente associaram-no ao méson de Yukawa; entretanto, como

o méson de Yukawa interage fortemente com a matéria ele não poderia ser o mesmo méson descoberto como constituinte da componente dura da R.C. Essa aparente contradição conduziu ao posterior desenvolvimento da teoria mesônica.

Outra dificuldade mostrada por Euler e Heisenberg ⁽³¹⁾ foi o aparecimento dos "bursts" que eles associaram à produção múltipla de mésons. Em 34, Wataghin ⁽³²⁾ publica um trabalho semelhante sobre produção múltipla de partículas, que se tornaria um trabalho pioneiro nessa área da Física de Raios Cósmicos. Esse fenômeno foi observado pela primeira vez por Hoffmann ⁽³³⁾, em câmaras de ionização, o qual foi inicialmente associado ao desenvolvimento das cascatas eletromagnéticas na atmosfera, hipótese que foi abandonada posteriormente, pois tais fenômenos ocorriam também em materiais com grandes camadas de absorvente. Em 1940, G. Wataghin, M. Souza Santos e P. Pompeia ⁽³⁴⁾ descobriram os chuveiros penetrantes que associaram à produção múltipla de mésons. Nesse mesmo ano Janossy e Ingleby ⁽³⁵⁾ confirmaram a descoberta de Wataghin, atribuindo a existência desses chuveiros à produção plural de mésons. No início da década de 40 as emulsões nucleares são introduzidas no estudo dos raios cósmicos em virtude principalmente do seu alto poder de resolução e grande visualização dos traços, pois elas são sensíveis a pequenas taxas de ionização.

Entre os anos 40 e 50 o grande número de descobertas e de teorias impede-me de, dentro da escassez de espaço, dar uma visão abrangente sobre os vários cientistas que deram contribuição importante nessa década para o desenvolvimento da Física de Altas Energias. Entretanto, vários físicos japoneses

trabalhando em completo isolamento durante a 2ª Guerra Mundial chegaram a várias conclusões que mais tarde provaram ser corretas.

Bem antes da famosa experiência de Conversi, Pancini e Piccioni⁽³⁶⁾, físicos japoneses já estavam convencidos de que os mésons da componente dura da R.C. não interagiam fortemente com a matéria. Tomonaga e colaboradores⁽³⁷⁾, em 1943, chegaram a essa conclusão, criando a teoria dos dois mésons. Em 1942 Sakata, Inoue e Tanikawa⁽³⁸⁾ estabeleceram a teoria do par de mésons, que foi posteriormente desenvolvida por R. Marshack e H.A. Bethe⁽³⁹⁾ sem prévio conhecimento do trabalho de Sakata et al.

Em 1947, Lattes, Occhialini e Powell⁽⁴⁰⁾, expondo placas de emulsões nucleares durante um mês nos Pirineus descobriram o méson π . Nas chapas fotográficas se via claramente a trajetória de uma partícula que, chegando ao repouso, dava origem a uma outra com alcance de 600 microns⁽⁴¹⁾. Nesse mesmo ano Lattes repetiu a experiência em Chacaltaya, obtendo cerca de 30 eventos semelhantes ao dos Pirineus, em que uma partícula pesada decaía em outra mais leve, fato que permitiu associar o méson pesado ao méson de Yukawa e o mais leve ao méson descoberto por Anderson, confirmando a teoria do par de mésons. Em 48, juntamente com Gardner produz artificialmente o méson π , no ciclotron de Berkeley⁽⁴²⁾. Após a descoberta dos mésons carregados, se especulava sobre a existência de um méson π neutro (π^0). Oppenheimer⁽⁴³⁾ em 1947 sugeriu que os mésons π^0 decaíam em dois fótons produzindo a cascata eletromagnética na atmosfera. Essa mesma hipótese já havia sido feita de maneira análo-

ga, em 1942 por Tamaki ⁽⁴⁴⁾. Em 1950 o grupo de Raios C3smicos de M.I.T., trabalhando com c3maras de Wilson, verificou que numa reaça3o nuclear surgiam al3m dos m3sons π^+ e π^- os m3sons neutros (π^0), que iniciavam a cascata eletromagn3tica. Essa experi3ncia confirmou a sugest3o feita por Oppenheimer em 1947.

Em 49, Zatsepin ⁽⁴⁵⁾ pioneiramente demonstra a exist3ncia de um processo de cascata nuclear atmosf3rico an3loga 3 cascata eletromagn3tica.

Em 1950 foi poss3vel mostrar conclusivamente o fen3meno da produa3o m3ltipla de m3sons. V3rios modelos foram sendo criados para explicar tal fen3meno. Em 44, Wataghin ⁽⁴⁶⁾ desenvolve o modelo estat3stico; em 50 Fermi ⁽⁴⁷⁾ cria o modelo termodin3mico que 3 uma extens3o do modelo de Wataghin. Em 53 surge o modelo Hidrodin3mico de Landau ⁽⁴⁸⁾. Em 58 Miesowicz e colaboradores ⁽⁴⁹⁾, Niu ⁽⁵⁰⁾, e ainda Cocconi ⁽⁵¹⁾ independentemente desenvolvem o modelo das 2 bolas de fogo. Em 62 Hasegawa ⁽⁵²⁾, estudando resultados experimentais obtidos no Monte Norikura, estabelece o modelo de H-quantum considerando a bola de fogo um estado intermedi3rio com massa e temperatura constantes e bem definidas.

Paralelamente, o estudo da R.C. prim3ria tem um avanço consider3vel com o in3cio das experi3ncias com emuls3es nucleares. Em 1948 Freier e colaboradores ⁽⁵³⁾ constataram a presença de n3cleos pesados na radiaa3o c3smica prim3ria. Em 50 Bradt e Peter ⁽⁵⁴⁾ mostraram na R.C. prim3ria a presença de pequenas percentagens de l3tio, ber3lio e boro.

Rochester e Butler ⁽⁵⁵⁾ descobriram o m3son K em finais dos anos 40. Em 1957 Van Allen e Vernov ⁽⁵⁶⁾ descobriram

anéis de partículas associadas ao campo magnético terrestre . Em 1961 foram detetados elétrons primários, e em 1962 Giacconi et al. ⁽⁵⁷⁾ descobriram fontes emissoras de raios-X. Em 1965 se detetou pela primeira vez a interação de um neutrino com a matéria [Reines e Cowan ⁽⁵⁸⁾].

A partir da década de 70, com experiências de balões, aeroplanos e satélites ^(59,60) se estabeleceu, de maneira mais ou menos definitiva, a composição e a forma funcional do espectro energético primário. Para um melhor histórico e descrição das experiências, ver, por exemplo, a revisão de Hillas ⁽⁶¹⁾.

A partir da década de 50, voltando alguns anos atrás, surgiram várias colaborações internacionais que tinham por objetivo o estudo das interações nucleares e a subsequente produção múltipla de mésons. Nessa época, pesquisadores japoneses desenvolveram um novo detetor que facilitou o estudo da produção múltipla de partículas, a câmara de emulsões nucleares e chumbo. Paralelamente na Universidade de Rochester se desenvolve um detetor similar.

Em 1956 foi feita a 1ª grande exposição dessas câmaras de emulsões nucleares em vôo de balão. Como resultado desse vôo descobre-se uma característica importante da produção múltipla de partículas, a constância de momento transversal que havia sido proposto em 55 por J. Nishimura ⁽⁶²⁾. Em 1958 expõem-se em Norikura (Japão), grandes câmaras de emulsões nucleares por vários meses. Através dessas experiências várias características fundamentais dos fenômenos de Altas Energias foram observados. Entre os anos 60 e 62 surge o ICEF [International Cooperative Emulsion Flight ⁽⁶³⁾]. Em 1962, por sugestão do

Professor H. Yukawa ao Professor C. Lattes, tem início a Colaboração Brasil-Japão de Raios Cósmicos com o objetivo de estudar as interações nucleares produzidas pela R.C. primária e detetadas em câmaras de emulsões nucleares e chumbo expostas em Chacaltaya, Bolívia. Outras Colorações foram sendo criadas, e em 1971 surgiram a colaboração Mte. Pamir, USSR, e a Colaboração Monte Fuji, Japão. Na década de 80 surgiu a Colaboração Mte. Kanbala, China.

As experiências de Chuveiros Atmosféricos extensos (E.A.S.) têm também, contribuído de maneira eficaz para o estudo das interações nucleares de altas energias e para a busca das fontes dos R.C.. A característica mais fundamental de um E.A.S. é sua estrutura lateral, devido principalmente ao baixo limiar de detecção, que nos permite detetar um grande número de partículas numa área bastante extensa. Numa área de grande raio colocam-se cintiladores plásticos geometricamente em coincidência, de modo a se poder detetar várias partículas que chegam simultaneamente. O estudo dos E.A.S. teve início em 38 com Auger⁽⁶⁴⁾ e Kolhoster⁽⁶⁵⁾ e no decorrer dos anos subsequentes várias publicações nos permitem ter uma visão completa dos resultados mais importantes^(66,67).

Com a produção artificial dos píons carregados, em 1948 teve início o estudo das partículas elementares usando aceleradores. No limiar da década de 60 começaram a funcionar os grandes aceleradores de partículas no CERN e em Brookhaven (1962) que utilizaram feixes de prótons de energia 3×10^{10} eV. Em 1969 entrou em operação o Acelerador de Serpukov (USSR) com energia de 7×10^{10} eV que tornou possível estudar os processos

da produção múltipla de mésons. Em 1971 surgiram os anéis de armazenamento e de colisão do CERN (ISR) com energia, $\sqrt{s} = 30\text{GeV}$. A partir de meados da década de 70 vários outros aceleradores entraram em operação, como por exemplo: S \bar{p} pS (CERN) com $\sqrt{s} = 900\text{ GeV}$ (atual) e o TEVATRON (FNAL) com $\sqrt{s} = 1800\text{ GeV}$, e para o futuro espera-se atingir energias da ordem de $\sqrt{s} = 40\text{TeV}$ como no Supercolisor (USA).

Vários resultados sobre a produção múltipla de hadrons, obtidos de experiências de raios cósmicos, foram confirmados, posteriormente com aceleradores de partículas, como por exemplo: variação da multiplicidade e da seção de choque inelástica com a energia, constância do momento transversal, sobrevivência da partícula incidente após a interação ("leading particle"); $K(\text{inelasticidade}) \neq 1$, lei de "scaling" (conhecida dos pesquisadores de raios cósmicos como lei de similaridade).

Foi também na radiação cósmica que vários processos foram descobertos, como por exemplo, o processo da produção múltipla de hadrons, e a cascata eletromagnética.

Com o crescente aumento da escala de energia nas experiências com aceleradores, tomam eles, pouco a pouco, o lugar ocupado pelos raios cósmicos no estudo das interações hadrônicas, na descoberta de novas partículas elementares e na obtenção de uma visão mais clara sobre a matéria e o Universo. A descoberta, no CERN, dos bósons de W^{\pm}, Z^0 mediadores das interações fraca e eletromagnética da teoria de Weinberg-Salam, mostra de maneira sintomática a posição cada vez mais de liderança dos aceleradores nos estudos e descobertas de uma teoria

mais abrangente que unificaria todas as interações existentes.

Por outro lado, o estudo dos chuviros atmosféricos extensos não foi feito convenientemente até agora, principalmente por ter se concentrado na parte final da cascata que é extremamente complexa e de difícil interpretação. Os E.A.S. que são resultantes de processos sucessivos (produção múltipla de hadrons, cascata eletromagnética, fragmentação e desintegração nucleares) podem fornecer grandes perspectivas para o esclarecimento desses processos.

Assim, com o surgimento de novos aceleradores, há prenúncios de que na próxima década serão intensificadas as experiências com os chuviros atmosféricos extensos (E.A.S.), que permitem estudar as reações nucleares de energias maiores que as encontradas nos aceleradores. Além disso, as experiências com os E.A.S. têm também o objetivo de determinar a natureza, energia e direção de chegada das partículas primárias que fornecerão uma "idéia" da direção e composição do corpo celeste emissor dessas partículas. Dessa maneira parece claro que o estudo dos raios cósmicos estará, no futuro, ligado aos campos de interesse da Astronomia, Astrofísica e Cosmologia. Além disso, a utilização dos raios cósmicos como ferramenta para a obtenção de uma visão mais clara das interações hadrônicas se limitará futuramente, aos aspectos qualitativos dessas interações, servindo de orientação para estudos posteriores com os aceleradores. Um exemplo bastante esclarecedor são os fenômenos exóticos obtidos em raios cósmicos (Centaurus, Minicentaurus, Geminion, etc) e que ainda não foram detectados nos aceleradores.

Para finalizar este breve histórico, convém salientar a presença marcante de cientistas brasileiros, desde finais da década de 30, no desenvolvimento teórico e experimental da Física dos Raios Cósmicos. Com a vinda ao Brasil dos professores Gleb Wataghin e G.P.S. Occhialini entre outros, que fundaram o Departamento de Física da USP, teve início a formação de um grupo de pesquisas no Brasil, o qual nas décadas posteriores contribuiu significativamente para o desenvolvimento e para as descobertas da Física de Altas Energias e das Partículas Elementares.

Em 1940 M. Schoenberg publica um trabalho teórico sobre a componente eletromagnética e em 1949 sobre a componente dura da R.C. (68). No mesmo ano Marcelo Souza Santos, P. Pompeia e G. Wataghin descobrem os chuveiros penetrantes que associaram à produção múltipla de partículas. Em 47, C. Lattes, com G.P.S. Occhialini e Powell descobrem o méson π (o méson de Yukawa). Em 1949, por inspiração de C.M.G. Lattes, Leite Lopes e outros, surgiu o Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF, que nos anos seguintes foi um centro de estudos e de divulgação de trabalhos de físicos brasileiros.

Em 1951, por iniciativa do Prof. Lattes, se instala em Chacaltaya, Bolívia, o Laboratório de Raios Cósmicos, no qual trabalharam e ainda trabalham vários físicos brasileiros e latinoamericanos, entre outros.

Devemos lembrar, também, a figura do Prof. C.M. G. Lattes, que no auge de seu prestígio internacional, regressou ao Brasil para formar novos grupos de pesquisas que tanto tem contribuído à Ciência no País.

INTRODUÇÃO

O principal problema matemático que envolve o estudo das cascatas nuclearmente ativa e eletromagnética da radiação cósmica é o seguinte: — dada uma partícula primária com energia E' , quantas serão as secundárias produzidas por essa partícula incidente em diferentes profundidades atmosféricas $x(\text{g/cm}^2)$, e quais serão suas distribuições de energia ?

É impossível saber com precisão o que acontecerá com uma partícula individual específica em sua trajetória ao longo da atmosfera; entretanto, podemos predizer o que sucederá, em média, com um universo de várias partículas. Um raio cósmico ao entrar na atmosfera pode sofrer uma, duas, ...n, interações até atingir a profundidade x , inclusive pode chegar até x sem sofrer nenhuma interação; entretanto não podemos afirmar, com certeza absoluta, quando, como e quantas colisões ele efetuará. Esse é um fato bastante comum das predições estatísticas e assim a formação e desenvolvimento de uma cascata pode ter um tratamento estatístico.

É possível obter o número médio de partículas secundárias que surgem numa cascata em diferentes profundidades e dentro de uma faixa de energia, como solução de uma equação aproximada de difusão. Ela é obtida com o seguinte raciocínio: — suponhamos que o número médio de partículas e suas distribuições de energia sejam conhecidos na profundidade x . Consideremos um elemento " dx ", suficientemente pequeno de modo que a partícula ao atravessá-lo não sofra interação ou colida uma só

vez. Com isso, estamos capacitados a obter o número médio e as distribuições de energia das partículas secundárias na profundidade $(x+dx)$. A relação entre o número de partículas em x e em $(x+dx)$ é expressa matematicamente pela equação de difusão. O intuito deste trabalho é resolver analiticamente as equações de difusão da componente nuclearmente ativa da radiação cósmica.

Um nucleon da radiação cósmica primária ao interagir produz um chuva de hadrons, entre os quais os píons constituem a maior parte ($\sim 72\%$ do total) ⁽⁶⁹⁾. Os píons carregados e o nucleon sobrevivente da colisão originam a cascata nuclearmente ativa, enquanto que os píons neutros desintegrando-se em dois fótons produzem a cascata eletromagnética.

O grande desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica permitiu que a componente eletromagnética fosse exaustivamente estudada e praticamente explicada em vários trabalhos. Em 1937 Bhabha e Heitler ⁽²⁰⁾ e Carlson e Oppenheimer ⁽²¹⁾, independentemente, obtiveram soluções aproximadas para as funções da cascata usando as expressões desenvolvidas por Bethe-Heitler ⁽¹⁹⁾ para as seções de choque de formação de pares e de bremsstrahlung. Landau e Rumer ⁽²²⁾ mostraram que as soluções exatas das equações de difusão da cascata eletromagnética podiam ser encontradas quando se desprezava o termo referente à perda por ionização dos elétrons do chuva. Landau e Rumer aperfeiçoaram o trabalho de Carlson e Oppenheimer introduzindo a transformada de Mellin para resolver as equações integrodiferenciais que descrevem as difusões dos elétrons e fótons na atmosfera. Esse desenvolvimento teve vários seguidores ^(70, 71), e assim a trans

formada de Mellin tornou-se a ferramenta matemática usual no cálculo e na obtenção dos fluxos das diferentes componentes da radiação cósmica. Independentemente, Bhabha e Heitler, em artigo já citado, e Bhabha e Chakrabarty⁽⁷²⁾ desenvolveram um método alternativo, o das colisões sucessivas. Nesse enfoque o número total de elétrons ou de fótons com a energia maior que E , na profundidade atmosférica x , é expresso como uma soma do número de elétrons ou fótons provenientes de várias gerações sucessivas:

$$F_{e,\gamma}(E_0, E, x) = f_0(E_0, E, x) + f_1(E_0, E, x) + \dots \\ + f_n(E_0, E, x) + \dots$$

onde $f_0(E_0, E, x)$ é a probabilidade do elétron ou do fóton incidente com energia E_0 ter energia maior que E na profundidade x . O termo $f_1(E_0, E, x)$ é a probabilidade dos elétrons ou fótons da primeira geração chegarem com energia maior que E na profundidade x e assim sucessivamente. A série converge razoavelmente bem para valores de E não muito inferiores a E_0 e valores de x não muito maiores que vários comprimentos de radiação. Snyder⁽²³⁾ e Scott⁽²⁴⁾ em finais da década de 40 obtiveram uma solução exata incluindo também o termo referente à perda por ionização. Eles empregaram o método da transformada de Mellin, obtendo uma equação de diferença que resolveram com o auxílio de um método iterativo extremamente eficaz desenvolvido por Snyder.

Em finais da década de 40, começaram a surgir os primeiros trabalhos teóricos que tentaram estudar analiticamente

as equações diferenciais da cascata nuclearmente ativa. Heitler e Janossy ⁽⁷³⁾, J. Nishimura e S. Hayakawa ⁽⁷⁴⁾, e Rožental ⁽⁷⁵⁾ independentemente resolveram as equações da difusão dos nucleons e píons na atmosfera considerando as distribuições de energia das partículas secundárias como independentes da energia (funções homogêneas das variáveis E, E_0). Eles usaram, como era comum, a transformada de Mellin e obtiveram soluções exatas considerando as seções de choque das interações hadron-núcleo constantes. Em 1952, Molière e Von Budini ⁽⁷⁶⁾ resolvem também, as equações unidimensionais da cascata nuclearmente ativa para um espectro primário na forma de potência da energia. Nesse trabalho as distribuições de energia dos píons secundários foram consideradas como funções homogêneas das variáveis E e E_0 , do mesmo modo que nos trabalhos anteriores já citados. Nos anos seguintes surgiram vários estudos tentando explicar os dados experimentais acumulados sobre os fluxos de prótons, neutrons e hadrons obtidos em várias profundidades atmosféricas. Entretanto, ao contrário da Eletrodinâmica Quântica que nos deu uma visão extremamente satisfatória das interações eletromagnéticas, as teorias sobre as interações fortes ainda deixam muito a desejar. Além disso, os diferentes parâmetros que figuram nas equações são muito imprecisos para se conseguir uma visão mais abrangente do fenômeno da difusão dos hadrons na atmosfera.

No início da década de 60 surgiram os trabalhos de Pal e Peters ⁽⁷⁷⁾ e de G. Brooke et al. ⁽⁷⁸⁾, que obtiveram os fluxos diferenciais de nucleons na profundidade $x(\text{g/cm}^2)$ através de um raciocínio físico diferente dos empregados até aque-

la época. Pal e Peters consideraram como espectro primário de nucleons no topo da atmosfera a forma aproximada $F_N(0,E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$, enquanto que G. Brooke et al. usaram uma forma mais geral que as até então utilizadas, $F_N(0,E) = G(E)$. Supondo, a priori, que a probabilidade de um nucleon efetuar n -interações na atmosfera é regida por uma distribuição de Poisson, eles conseguiram obter o fluxo de nucleons na profundidade x , sem resolver qualquer equação de difusão. Em 1976, F.M. de O. Castro ⁽⁷⁹⁾ mostrou que a solução de G. Brooke et al. pode ser encontrada resolvendo-se a equação de difusão unidimensional, sem considerar como hipótese inicial que a lei de Poisson governa a distribuição de probabilidades do nucleon efetuar n -interações em sua trajetória na atmosfera.

Até inícios da década de 70 consideravam-se a seção de choque inelástica das interações hadrônicas constante e independente da energia. Em 1972, Yodh ⁽⁸⁰⁾ observou que ela aumentava com a energia, fato confirmado mais tarde em aceleradores ⁽⁸¹⁾. Com isso as equações de difusão da componente hadrônica, que tinham sido resolvidas exatamente, se tornaram mais complicadas, pois agora o livre percurso médio dessas interações diminuía com a energia.

A partir de finais da década de 70 surgiram os primeiros trabalhos que tentaram resolver a equação de difusão considerando a variação da seção de choque inelástica com a energia. Até a presente data, entretanto, não se encontrou uma solução exata para o problema.

N.L. Grigorov ⁽⁸²⁾, num trabalho clássico, obteve uma solução aproximada de muito uso. A. Osawa, K. Kasahara et

al. (83) usam a transformada de Laplace e a de Mellin nas variáveis x e E respectivamente, obtendo uma equação de diferença que resolvem usando o método desenvolvido por Snyder em referência já citada nesta Introdução. A solução encontrada é, no entanto, formal e só aplicável para o caso assintótico quando $\delta \rightarrow 0$, ($\sigma^{\text{in}}(E) = \sigma_0 E^\delta$). Sidhanta (84) faz aproximações nos livres percursos médios das interações hadron-núcleo para resolver as equações íntegro-diferenciais simplificadas através do método da transformada de Mellin.

Nosso objetivo é estimar a influência do aumento da seção de choque sobre os fluxos de nucleons e de píons. Neste trabalho destacamos, também, o método das aproximações sucessivas para obter soluções exatas das equações de difusão unidimensionais constituintes da cascata hadrônica. Este método foi introduzido por F.M. de Oliveira Castro (85) na resolução das equações acima mencionadas para o caso das seções de choque (N-A) e (π -A) constantes e para distribuições de energia dos píons independentes da energia do hadron (nucleon ou pión) incidente.

No Capítulo I resolvemos uma equação de difusão unidimensional dos nucleons na atmosfera com o uso do método das aproximações sucessivas, considerando constante a seção de choque das interações nucleon-núcleo. No Capítulo II utilizamos o mesmo método matemático na resolução de uma equação de difusão análoga à empregada no capítulo anterior levando em conta, porém, o aumento da seção de choque com a energia. Ainda neste capítulo examinamos a precisão da solução aproximada de Grigorov, que tem sido frequentemente usada, e verificamos a influ-

ência do aumento da seção de choque com a energia sobre o índice de potência do espectro primário e sobre a distribuição de probabilidades do nucleon interagir sucessivamente na atmosfera.

No Capítulo III solucionamos uma equação unidimensional de difusão dos píons na atmosfera, utilizando novamente o método das aproximações sucessivas, levando-se em conta a constância das seções de choque das interações (nucleon-núcleo) e (píon-núcleo). As distribuições de energia dos píons utilizadas no cálculo dos fluxos hadrônicos foram obtidas de duas maneiras: - através de dados de experiências realizadas em aceleradores admitindo uma produção de píons do tipo "scaling", e através de um modelo teórico no qual as interações hadrônicas produzem, por hipótese, um estado intermediário que evapora isotropicamente em píons logo após a sua formação.

Nossos resultados foram comparados com os fluxos integrais de hadrons medidos experimentalmente com o auxílio de câmaras de emulsões nucleares expostas em altitudes de montanhas, supondo uma distribuição uniforme de elasticidade do nucleon, considerando a forma usual para a composição química dos raios cósmicos primários e para a distribuição de inelasticidade dos raios γ ($k_\gamma = 0,25$).

No Capítulo IV continuamos a estudar a difusão dos píons na atmosfera, obtendo uma solução aproximada, considerando agora o aumento, com a energia, das seções de choque das interações hadrônicas (nucleon-núcleo, e píon-núcleo). Realizamos uma comparação de nossos resultados com os fluxos integrais de hadrons obtidos de dados experimentais, levando-se em

conta os elementos já mencionados no Capítulo III.

Comparamos nossos fluxos integrais de hádrons com os obtidos por N.L. Grigorov. Além disso, usando as duas distribuições de energia dos píons obtidas no Capítulo III, calculamos os fluxos integrais de hádrons e a razão entre eles.

Os diferentes fluxos da componente nuclearmente ativa da R.C., calculados para o caso da seção de choque constante, foram comparados com os obtidos quando se considera o aumento da seção de choque com a energia.

CAPÍTULO I

DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA

(COM SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE)

É nosso intuito estudar, neste capítulo, a difusão dos nucleons na atmosfera descrevendo-a por uma equação diferencial unidimensional, que em uma primeira aproximação representa razoavelmente bem o fenômeno das interações entre os nucleons da radiação cósmica primária e os núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera. Consideramos, aqui, a seção de choque inelástica dessas interações constante. Posteriormente vamos analisar o caso em que a seção de choque cresce com a energia do nucleon incidente, fato já bem conhecido desde o início da década passada ^(80,81). Uma comparação entre os dois resultados será, então, realizada.

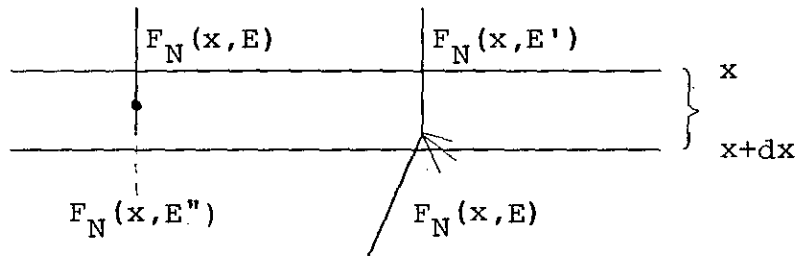
Ignorando a produção de nucleons por outras partículas, podemos descrever a difusão dos nucleons na atmosfera pela equação

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N^0} + \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^1 F_N(x, E') f_{NN}(E, E') \frac{dE'}{E'} \quad , \quad (1.1)$$

onde $F_N(x, E)$ é o fluxo diferencial de nucleons com energia entre E e $E+dE$ na profundidade atmosférica x (g/cm^2) (número de partículas/ $cm^2 \times s \times ster$). λ_N^0 é o livre percurso médio de in

teração, suposto constante (g/cm^2); E' e E são as energias do nucleon incidente e emergente respectivamente (TeV) ; $f_{NN}(E,E')$ é a distribuição de energia dos nucleons, onde o 1º índice refere-se à partícula secundária e o 2º índice à partícula primária.

A solução da equação (1.1) deve satisfazer à condição inicial $F_N(0,E) = G(E)$, onde $G(E)dE$ representa o espectro diferencial de nucleons no topo da atmosfera ($x = 0$). A função $G(E)$ deve ser contínua, positiva e limitada ($G(E) \leq M$) no intervalo $0 < E_{min} \leq E < \infty$. A integral $\int_E^\infty G(E)dE$ deve existir como condição básica e necessária para a existência do espectro integral de nucleons no topo da atmosfera. A equação (1.1) pode ser representada esquematicamente pelo diagrama



O ponto $x = 0$ representa o topo da atmosfera e o valor da profundidade x (g/cm^2) cresce do topo ao nível do mar.

O primeiro termo do segundo membro da equação (1.1) representa o fluxo dos nucleons que desaparecem no intervalo dx . O segundo termo é o fluxo de nucleons que interagem uma única vez em dx , chegando à profundidade $(x+dx)$ com energia E .

No estabelecimento da equação diferencial (1.1) considerou-se o elemento dx suficientemente pequeno, de modo que o nucleon ao atravessá-lo não sofra nenhuma ou uma só interação. Além disso, consideramos que a probabilidade do nucleon

sofrer uma interação em dx seja proporcional a (dx/λ_N^0) .

1.1 - RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA

Para resolvermos a equação diferencial (1.1) é necessário conhecer as funções $f_{NN}(E, E')$, que descrevem o espectro de nucleons secundários, e que estão intimamente ligadas ao ato elementar (interação entre nucleons da radiação cósmica primária e núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera).

Vamos considerar tais funções, homogêneas das variáveis E e E'

$$f_{NN}(E, E') dE' = f_{NN}(E/E') \frac{dE'}{E'} \quad (1.2)$$

Observando que $\eta_N = E/E'$ (elasticidade de nucleon), a expressão (1.2) torna-se

$$f_{NN}(E, E') dE' = - f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (1.3)$$

e a equação integro-diferencial (1.1) se reduz a

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N^0} + \int_0^1 \frac{F_N(x, E/\eta)}{\lambda_N^0} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (1.4)$$

Vários autores já resolveram analiticamente a equação acima obtendo uma solução que representa o fluxo de nucle

ons na atmosfera. Um estudo pioneiro foi feito por Von P. Budini e G. Molière ⁽⁷⁶⁾, que usaram o método de transformada de Mellin, obtendo uma solução exata da equação (1.4). Nessa mesma época Rosenthal ⁽⁷⁵⁾, independentemente, obteve a mesma solução. Ambos resultados são estabelecidos considerando-se como condição de contorno um espectro primário de nucleons da forma aproximada $F_N(0,E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$.

A partir desses trabalhos, quase todos os autores ⁽⁷¹⁾ passaram a usar o método da transformada de Mellin. O problema da integrabilidade da equação (1.4) através desse método é que se obtem uma solução formal no campo complexo de difícil redução a termos reais, salvo em casos muito particulares. Por outro lado, a computação das integrais, obtidas no campo complexo, só pode ser geralmente resolvida com o emprego de métodos aproximados de integração como, por exemplo, o método do ponto de sela ⁽⁸⁶⁾.

Em 1976, F.M. de Oliveira Castro obteve a mesma solução encontrada pelos autores acima mencionados, utilizando-se de dois métodos alternativos, um simbólico e o das aproximações sucessivas. O primeiro foi uma ferramenta útil para se prever uma solução formal cuja validade deverá depois ser comprovada por um método matemático mais rigoroso. O segundo fornece-nos o meio de verificar se a solução converge, se é única e se satisfaz à equação estudada. Os dois métodos permitem-nos obter a solução exata para um fluxo primário $G(E)$ e uma distribuição de elasticidade conveniente $f_{NN}(n)$.

Nosso objetivo neste e nos dois capítulos subsequentes é resolver as equações de difusão da componente nuclear -

mente ativa da R.C., com o uso do método das aproximações sucessivas.

A equação (1.4) que descreve a difusão dos nucleons na atmosfera é:

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N^0} + \int_0^1 \frac{F_N(x, E/\eta)}{\lambda_N^0} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad , \quad (1.5)$$

com a condição limite

$$F_N(0, E) = G(E) \quad , \quad (1.6)$$

onde $G(E)$ é uma função com as características já mencionadas em parágrafo anterior.

Para efeito de simplificação, façamos:

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} Y_N(x, E) \quad . \quad (1.7)$$

Substituindo (1.7) em (1.5), obtemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y_N(x, E)}{\partial x} &= \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^1 Y_N(x, E/\eta) f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \\ Y_N(0, E) &= G(E) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

com

A equação diferencial e a respectiva condição de contorno são equivalentes à seguinte equação integral

$$Y_N(x, E) = G(E) + \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^x dx \int_0^1 Y_N(x, E/\eta) f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (1.9)$$

A solução da equação integral (1.9) é obtida considerando como aproximação inicial (de ordem zero) a função $G(E)$ e efetuando as seguintes aproximações sucessivas

$$Y_{N_0}(x, E) = G(E) \tag{1.10}$$

$$Y_{N_n}(x, E) = G(E) + \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^x dt \int_0^1 Y_{N_{n-1}}(t, E/n) f_{NN}(n) \frac{dn}{n}$$

Assim, nós estabelecemos as seguintes aproximações da equação (1.10)

$$Y_{N_0}(x, E) = G(E)$$

$$\begin{aligned} Y_{N_1}(x, E) &= G(E) + \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^x dt \int_0^1 Y_{N_0}(t, E/n) f_{NN}(n) \frac{dn}{n} = \\ &= G(E) + \frac{x}{\lambda_N^0} \int_0^1 G(E/n_1) f_{NN}(n_1) \frac{dn_1}{n_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{N_2}(x, E) &= G(E) + \frac{x}{\lambda_N^0} \int_0^1 G(E/n_1) f_{NN}(n_1) \frac{dn_1}{n_1} + \\ &+ \frac{x^2}{2\lambda_N^0{}^2} \int_0^1 \int_0^1 G\left(\frac{E}{n_1 n_2}\right) f_{NN}(n_1) f_{NN}(n_2) \frac{dn_1 dn_2}{n_1 n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{N_n}(x, E) &= G(E) + \sum_{i=1}^n \frac{(x/\lambda_N^0)^i}{i!} \int_0^1 \dots \int_0^1 G\left(\frac{E}{n_1 \dots n_i}\right) \cdot \\ &\cdot f_{NN}(n_1) \dots f_{NN}(n_i) \frac{dn_1 \dots dn_i}{n_1 \dots n_i} \end{aligned} \tag{1.11}$$

A convergência, a unicidade e a síntese da solução acima constam do Apêndice A. Assim, a soma parcial $Y_N(x, E)$ converge absoluta e uniformemente, conduzindo à solução da equação integrodiferencial (1.8),

$$Y_N(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{N_n}(x, E) \quad . \quad (1.12)$$

O fluxo diferencial energético de nucleons com energia entre E e E+dE a uma profundidade x será

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} \left\{ G(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{NN}(\eta_1) \dots \dots f_{NN}(\eta_n) G\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n}\right) \frac{d\eta_1 \dots d\eta_n}{\eta_1 \dots \eta_n} \right\} \quad (1.13)$$

que é a solução exata da equação diferencial (1.5). Na solução (1.13) pode-se notar que as variáveis x e E estão separadas.

1.2 - CASOS PARTICULARES

1.2.1 - Espectro Primário da Forma Aproximada, $G(E) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$

A expressão (1.13) neste caso pode ser expressa como:

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} \left\{ N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} C_{NN}^n(\gamma) \right] \right\} \quad (1.14)$$

ou, mais compactamente,

$$F_N(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/L_N^0} \quad , \quad (1.15)$$

onde

$$L_N^0 = \frac{\lambda_N^0}{1 - C_{NN}(\gamma)} \quad (1.16)$$

é o livre percurso médio de absorção dos nucleons na atmosfera e

$$C_{NN}(\gamma) = \int_0^1 n^\gamma f_{NN}(n) dn \quad . \quad (1.17)$$

É importante notar que a expressão (1.15) mostra um decréscimo exponencial do fluxo com a profundidade. Os coeficientes $C_{NN}(\gamma)$ dependem do índice da potência do fluxo primário e das distribuições de elasticidade dos nucleons nas interações nucleon-núcleo.

1.2.2 - Coeficiente de Inelasticidade do Nucleon ($K_N=1-n$) Constante

A solução (1.13) para este caso particular é

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} \left\{ G(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} G\left(\frac{E}{(1-K_N)^n}\right) \times \frac{1}{(1-K_N)^n} \right\} \quad , \quad (1.18)$$

ou

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} \frac{G\left(\frac{E}{(1-K_N)^n}\right)}{(1-K_N)^n} \quad . \quad (1.19)$$

O fluxo energético de nucleons pode também ser expresso como uma soma dos produtos $P_n(x) \cdot F_N(E, E')$, onde $P_n(x)$

é a probabilidade de um nucleon interagir n-vezes em sua passagem na atmosfera até a profundidade x, e $F_N(E, E')$ é a probabilidade do nucleon, com energia primária E' , reduzir sua energia a E após n sucessivas interações:

$$F_N(E, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) F_N(E, E') \quad . \quad (1.20)$$

Comparando-se (1.19) e (1.20), vê-se que $P_n(x)$ é, neste caso, uma distribuição de Poisson

$$P_n(x) = e^{-x/\lambda_N^0} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} \quad . \quad (1.21)$$

1.2.3 - Distribuição Uniforme de Elasticidade dos Nucleons

$$(f_{NN}(n)dn = 1dn)$$

A expressão (1.13) pode ser colocada na forma

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} \left\{ G(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 G\left(\frac{E}{\eta_1 \cdots \eta_n}\right) \cdot \frac{d\eta_1 \cdots d\eta_n}{\eta_1 \cdots \eta_n} \right\} \quad (1.22)$$

Considerando o espectro primário na forma aproximada $N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$, o fluxo (1.22) poderá ser expresso compactamente como:

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} \left\{ N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^n \right\} =$$

$$= N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-\frac{x}{\lambda_N^0} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)} \quad (1.23)$$

A expressão (1.23) pode ser também colocada em termos da função de Kummer ${}_1F_1$ (87)

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N^0} N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{(\gamma+1)\lambda_N^0} {}_1F_1\left(1; 2; \frac{x}{(\gamma+1)\lambda_N^0}\right) \right\} \quad (1.24)$$

1.3 - OBTENÇÃO DO FLUXO DIFERENCIAL DE NUCLEONS SEM USAR UMA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

É possível calcular o fluxo de nucleons à profundidade x através de um processo denominado "step by step", sem haver necessidade de se estabelecer uma equação diferencial para representar a difusão dos nucleons na atmosfera. G. Brooke et al. (78) e vários outros autores (79) utilizaram-se desse procedimento, o qual mencionaremos a seguir.

Se o livre percurso médio de interação e a inelasticidade dos nucleons na atmosfera forem constantes, então um nucleon que colide n vezes ao percorrer uma distância x (g/cm^2) terá sua energia reduzida de um valor $E' = E/(1-K_N)^n$ para um valor E . O espectro diferencial energético à profundidade x é,

$$G(E') dE' = G\left(\frac{E}{(1-K_N)^n}\right) \frac{dE}{(1-K_N)} \quad (1.25)$$

Se a probabilidade do nucleon interagir n -vezes ao

percorrer a distância x for $P_n(x)$, então, a contribuição para o espectro diferencial de nucleons será

$$N_N(x, E) = P_n(x) G\left(\frac{E}{(1-K_N)^n}\right) \frac{1}{(1-K_N)^n}, \quad (1.26)$$

e o fluxo diferencial total de nucleons na profundidade atmosférica x será

$$F_N(x, E) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) G\left(\frac{E}{(1-K_N)^n}\right) \cdot \frac{1}{(1-K_N)^n}. \quad (1.27)$$

É importante notar que a expressão (1.27) pode também ser obtida para uma distribuição de elasticidade qualquer.

G. Brooke et al. admitiram, "a priori", que a distribuição de probabilidades $P_n(x)$ fosse de Poisson. Neste caso vê-se que o fluxo diferencial de nucleons (1.27) coincide com (1.19). O interessante da solução encontrada por G. Brooke et al. é que, sem utilizar qualquer equação diferencial eles obtiveram o fluxo dos nucleons na profundidade x , considerando apenas a lei de Poisson para descrever a distribuição de probabilidades nucleônicas.

1.4 - CONCLUSÕES

Se as distribuições $f_{NN}(E, E')$ forem homogêneas das variáveis E e E' e a seção de choque inelástica das interações nucleon-núcleo for constante, podemos concluir:

a) - as variáveis x e E se separam e o fluxo diferencial de

nucleons, solução da equação (1.4) pode ser colocado na forma: $F_N(x, E) = F_N(0, E) \cdot H(x)$;

- b) - a parte dependente da energia do espectro de nucleons permanece constante em qualquer profundidade, e o índice de potência sendo o mesmo que o do espectro primário ($F_N(0, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$);
- c) - a distribuição que descreve a probabilidade do nucleon interagir n vezes ao percorrer a distância x é a de Poisson.

O resultado (1.15) mostra que o fluxo diferencial à profundidade x depende de quatro parâmetros fundamentais:

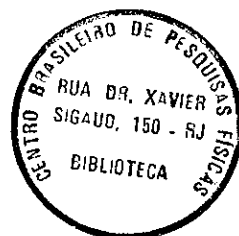
- a) - o expoente γ do espectro primário;
- b) - o livre percurso médio de interação dos nucleons na atmosfera;
- c) - os coeficientes C_{NN} ;
- d) - o fator N_0 que aparece no fluxo primário.

Um fato interessante que desejamos destacar se refere a uma observação que foi assunto de um trabalho ⁽⁸⁸⁾. Se a probabilidade de acontecer um choque num elemento dx depender unicamente de dx, e não da profundidade x (como é o caso em que $\lambda_N = \text{constante}$, tratado neste capítulo), então a distribuição que descreve as colisões sucessivas dos nucleons na atmosfera é a de Poisson. Como foi mencionado no início do capítulo onde usamos a hipótese de que a probabilidade de acontecer um choque em dx é (dx/λ_N^0) , então, implicitamente estamos obtendo a solução (1.14) sem necessidade de resolver a equação diferencial (1.5).

Para finalizarmos o presente capítulo, calculamos o espectro integral de nucleons do correspondente espectro diferencial, como se segue.

$$F_N(x, \geq E) = \int_E^{\infty} N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/L_N^0} dE = \frac{N_0 \bar{E}^{(\gamma)}}{\gamma} e^{-x/L_N^0} \quad (1.28)$$

O espectro integral de hadrons (soma de (1.28) com o espectro integral dos pions calculado no Capítulo III) será comparado com os fluxos experimentais obtidos em altitudes de montanhas.



CAPÍTULO II

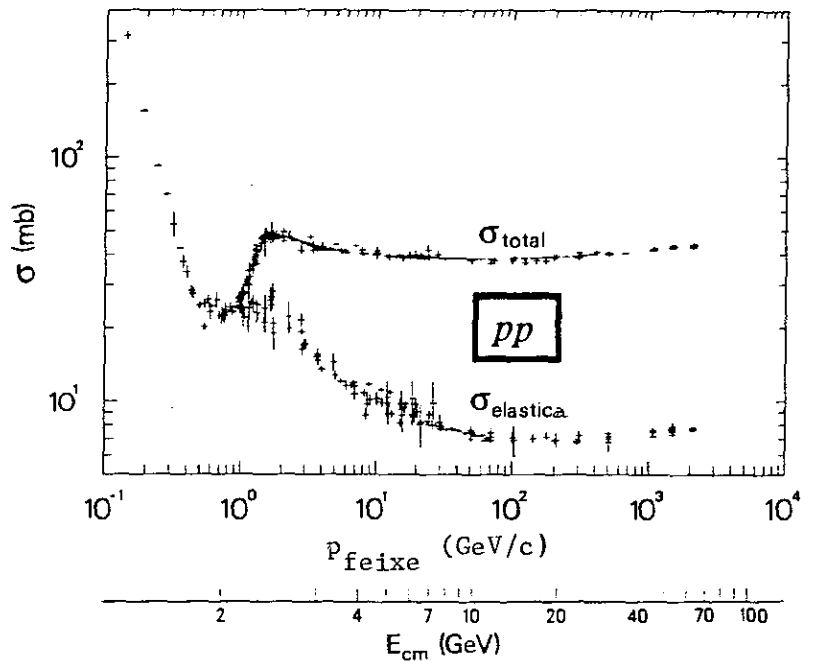
DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA

(COM SEÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA)

Vamos estudar, agora, a difusão dos nucleons na atmosfera, usando uma equação diferencial unidimensional semelhante àquela analisada no Capítulo I, levando-se em conta o aumento da seção de choque inelástica das interações hadron-núcleo com a energia do hadron incidente.

Até inícios da década de 70, pensava-se que a seção de choque das interações hadrônicas fosse constante. Na Figura 2.1 constam as seções de choque a várias energias compiladas até 1970.

FIGURA 2.1 - Seções de choque total e elástica das interações hadrônicas versus o momento do feixe no sistema de laboratório (GeV/c) e versus a energia total no sistema centro de massa (GeV).



Assim a maioria dos cálculos feitos antes dos anos 70 sobre a difusão dos hadrons na atmosfera, considerava o livre percor-

so médio dessas interações constante.

Experiências feitas com aceleradores ⁽⁸¹⁾ e observações de raios cósmicos ⁽⁸⁰⁾ mostraram o crescimento da seção de choque dessas interações com a energia. Na Figura 2.2, mostra-se a variação da seção de choque inelástica das interações próton-núcleo com a energia do próton incidente (medida no Sistema de Laboratório).

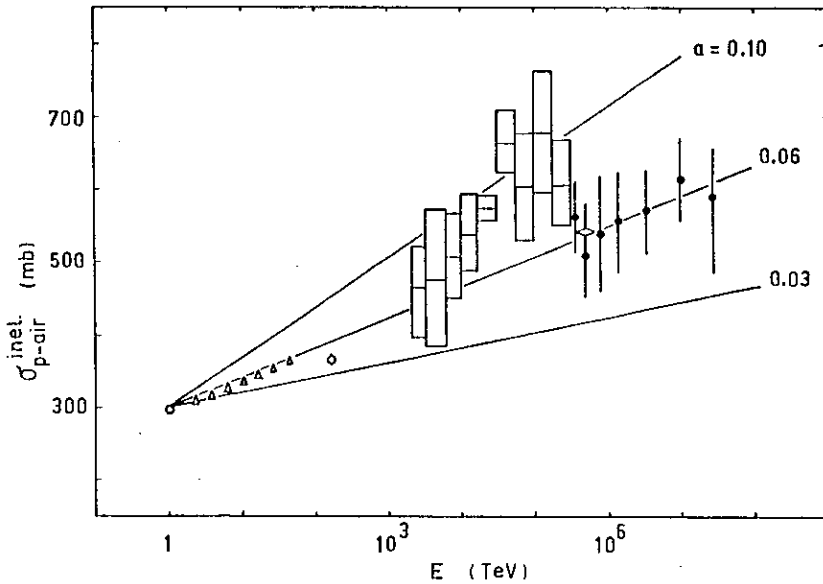


FIGURA 2.2 - Seção de choque inelástica das interações (p-ar) versus a energia. Δ ref. (90), \square ref. (91), \diamond ref. (92), \bullet ref. (93), \circ ref. (94). As três linhas cheias correspondem aos valores de $a = 0,03$; $0,06$ e $0,10$ na fórmula $\sigma(E) = 300(1 + a \ln(E/\text{TeV}))$, (mb).

Os dados que aparecem na Fig. 2.2 foram obtidos de experiências com chuveciros atmosféricos extensos e com aceleradores. As seções de choque $\sigma(pp)$ e $\sigma(\bar{p}p)$ são convertidas nas correspondentes seções de choque $\sigma(p\text{-ar})$ através da fórmula empírica estabelecida por Hillas ⁽⁹⁵⁾

$$\lambda_{p\text{-ar}} (\text{g/cm}^2) = 760 (\sigma_{pp}^{\text{in}} (\text{mb}))^{-0,63} .$$

Até a presente data, várias expressões foram propostas para representar a variação da seção de choque inelástica com a energia, entre as quais as mais conhecidas são $(E/E_0)^\alpha$, $\log(E/E_0)$ ou $\log(E/E_0) + \log^2(E/E_0)$. Na Figura 2.2 mostramos a dependência logarítmica da seção de choque com a energia

$$\sigma_{p-ar}^{in}(E) = \sigma^0 (1 + a \ln E/E_0) \quad ; \quad E_0 = 1 \text{ TeV} \quad ,$$

onde consideramos três casos: $a = 0,03$; $a = 0,06$ e $a = 0,10$.

2.1 - EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS NUCLEONS COM λ_N VARIANDO COM A ENERGIA

A equação diferencial que descreve a difusão dos nucleons na atmosfera é a seguinte

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N(E)} + \int_E^\infty \frac{F_N(x, E')}{\lambda_N(E')} f_{NN}(E, E') \frac{dE'}{E'} \quad . \quad (2.1)$$

A solução é submetida à condição de contorno

$$F_N(0, E) = G(E) \quad (2.2)$$

onde $G(E)dE$ é o espectro diferencial energético dos nucleons no topo da atmosfera ($x = 0$), o qual supomos ser uma função contínua, positiva e limitada ($G(E) \leq M$), no intervalo $I = [E_{\min}, \infty)$, $E_{\min} > 0$. A existência do espectro integral dos nucleons no topo da atmosfera pressupõe que a integral $\int_E^\infty G(E)dE$ exista.

De maneira análoga ao suposto no capítulo anterior , vamos considerar que $f_{NN}(E, E')$ sejam funções homogêneas das variáveis E e E'

$$f_{NN}(E, E') dE = f_{NN}(E/E') \frac{dE}{E'} \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) na equação diferencial (2.1), obtemos

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N(E)} + \int_0^1 \frac{F_N(x, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta)} \cdot f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (2.4)$$

O estabelecimento dessa equação consta do Apêndice D, que apresenta a equação (1.4) do Capítulo I como um caso particular.

2.2 - RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA

Vários autores chegaram a soluções aproximadas da equação diferencial (2.4). Um dos trabalhos pioneiros se deve a N.L. Grigorov ⁽⁸²⁾. Ele considerou como primeira aproximação, a solução obtida no Capítulo I, substituindo a constante (L_N^0) pela função de energia $L_N(E)$. Obteve, então, uma segunda aproximação, considerando que as variáveis x e E se separavam na solução, como no caso estudado no capítulo anterior. Mostrou, a seguir, que essa segunda aproximação afastava-se muito pouco da primeira ($\sim 4\%$ para $x \cong 700 \text{ g/cm}^2$), a qual aceitou como solução aproximada da equação diferencial (2.4). Sidhanta et al. ⁽⁸⁴⁾ considerando como espectro primário $F_N(0, E) dE = \delta(E - E') dE$

e usando um livre percurso médio de interação dos nucleons na atmosfera da forma $\frac{1}{\lambda_N(E)} = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\lambda_N^0}$, chegaram a uma solução exata usando o método da transformada de Mellin. Ao resultado obtido, entretanto, pode-se objetar:

- a) - o uso do método aproximado do ponto de sela para calcular a integral complexa resultante da inversão da transformada de Mellin;
- b) - o uso da seguinte aproximação, não justificada, para o livre percurso médio de interação dos nucleons

$$\frac{1}{\lambda_N(E/\eta)} = \frac{1 + a \ln\left(\frac{E}{\eta E_0}\right)}{\lambda_N^0} \cong \frac{1 + a \ln \frac{1}{\eta}}{\lambda_N^0} .$$

Kasahara et al. ⁽⁸³⁾ submeteram a equação (2.4) a duas transformadas simultâneas: a de Laplace na variável x e a de Mellin na variável E , obtendo uma equação de diferença, a qual resolveram empregando o método desenvolvido por Snyder ⁽²³⁾ e Scott ⁽²⁴⁾. Eles usaram um espectro primário da forma $F_N(0, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$ e um livre percurso médio de interação dos nucleons na atmosfera como $\lambda_N(E) = \lambda_N^0 E^{-\alpha}$. A solução obtida, porém, é muito complexa e só pode ser usada para o caso assintótico quando $\alpha \rightarrow 0$.

No capítulo precedente, mostramos que o método das aproximações sucessivas conduz à solução única do problema, idêntica àquela obtida por G. Brooke et al. ⁽⁷⁸⁾, quando se consideravam válidas as hipóteses acima mencionadas sobre a função $G(E)$. Vamos, novamente, utilizar o método das aproximações sucessivas para obter uma solução exata da equação diferencial (2.4) com a respectiva condição de contorno (2.2)

Fazendo a substituição

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N(E)} Y_N(x, E) \quad (2.5)$$

na equação (2.4), obtêm-se:

$$\frac{\partial Y_N(x, E)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{Y_N(x, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta)} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} e^{-\delta(\eta, E)x} \quad (2.6)$$

com

$$Y_N(0, E) = G(E) \quad (2.7)$$

onde

$$\delta(E, \eta) = \frac{1}{\lambda_N(E/\eta)} - \frac{1}{\lambda_N(E)} \quad (2.8)$$

A equação diferencial (2.6) com a condição de contorno (2.7) equivalem à equação integral

$$Y_N(x, E) = G(E) + \int_0^x dt \int_0^1 \frac{Y_N(t, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta)} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} e^{-\delta(E, \eta)t} \quad (2.9)$$

Com a finalidade de resolver a equação (2.9) usaremos as seguintes aproximações sucessivas:

$$Y_{N_0}(x, E) = G(E) \quad (2.10)$$

$$Y_{N_n}(x, E) = G(E) + \int_0^x dt \int_0^1 e^{-\delta(E, \eta)t} \cdot Y_{N_{n-1}}(t, E/\eta) \frac{f_{NN}(\eta)}{\lambda_N(E/\eta)} \frac{d\eta}{\eta}$$

A aproximação de ordem n será:

$$\begin{aligned}
 Y_{N_n}(x, E) = G(E) + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 \frac{f_{NN}(\eta_1)}{\eta_1} d\eta_1 \dots \int_0^1 \frac{f_{NN}(\eta_i)}{\eta_i} d\eta_i \cdot \right. \\
 \cdot \frac{G\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_i}\right)}{\lambda_N(E/\eta_1) \dots \lambda_N\left(\frac{E}{\eta_1, \eta_2 \dots \eta_i}\right)} \times \int_0^x e^{-\delta(E, \eta_i)t_i} dt_i \cdot \\
 \left. \cdot \int_0^{t_i} e^{-\delta(E, \eta_{i-1})t_{i-1}} dt_{i-1} \dots \int_0^{t_2} e^{-\delta(E, \eta_1)t_1} dt_1 \right\} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 Y_{N_n}(x, E) = G(E) + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 \frac{f_{NN}(\eta_1)}{\eta_1} d\eta_1 \dots \right. \\
 \left. \dots \int_0^1 \frac{f_{NN}(\eta_i)}{\eta_i} d\eta_i G\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_i}\right) a_i(E, \eta_i) \phi_i(x, \delta(E, \eta_i)) \right\} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

onde

$$a_i(E, \eta) = \frac{1}{\lambda_N(E/\eta_1) \cdot \lambda_N(E/\eta_1 \eta_2) \dots \lambda_N(E/\eta_1 \eta_2 \dots \eta_i)} \quad (2.13)$$

e $\phi_i(x, \delta(E, \eta))$ representa a integral múltipla da variável x .

2.3 - CASO PARTICULAR DE K_N CONSTANTE

Quando o coeficiente de inelasticidade dos nucleons na atmosfera (K_N) é constante, a equação de difusão (2.4) se

reduz a

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N(E)} + \frac{F_N(x, E/\eta)}{\eta \lambda_N(E/\eta)} \quad (2.14)$$

e a aproximação de ordem n (2.12) se simplifica, tomando a forma

$$Y_{N_n}(x, E) = G(E) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{G(E/\eta^i)}{\eta^i} a_i(E, \eta) \phi_i(x, \delta(\eta)) \right\} \quad , \quad (2.15)$$

onde

$$a_i(E, \eta) = \frac{1}{\lambda_N(E/\eta) \cdot \lambda_N(E/\eta^2) \dots \lambda_N(E/\eta^i)} \quad (2.16)$$

com

$$\begin{aligned} \phi_i(x, \delta(\eta)) = & \int_0^x dt_i e^{-\delta(\eta)t_i} \cdot \int_0^{t_i} dt_{i-1} e^{-\delta(\eta)t_{i-1}} \dots \\ & \dots \int_0^{t_2} dt_1 e^{-\delta(\eta)t_1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Num trabalho anterior ⁽⁹⁶⁾ mostramos que as integrais múltiplas, $\phi_i(x, \delta(\eta))$, podem ser colocadas numa forma compacta

$$\phi_i(x, \delta(\eta)) = \frac{1}{i!} \left(\frac{1 - e^{-\delta(\eta)x}}{\delta(\eta)} \right)^i \quad . \quad (2.18)$$

Nesse mesmo trabalho, considerando que o livre percurso médio de interação varia com a energia da forma:

$$\frac{1}{\lambda_N(E)} = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\lambda_N^0} \quad , \quad E_0 = 1 \text{ TeV} \quad , \quad (2.19)$$

mostramos que os coeficientes dados em (2.16) podem ser escritos:

$$a_i(E, \eta) = \delta^i(\eta) \prod_{j=1}^i (Z(E, \eta) + j) = \delta^i(\eta) \frac{\Gamma(Z+1+i)}{\Gamma(Z+1)}, \quad (2.20)$$

onde

$$Z(E, \eta) = Z = \frac{1+a \ln E/E_0}{a \ln 1/\eta} = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\lambda_N^0 \delta(\eta)}. \quad (2.21)$$

A expressão (2.15) ficará

$$Y_{N_n}(x, E) = \sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(Z+1+i)}{\Gamma(Z+1) i!} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^i \frac{G\left(\frac{E}{(1-K_N)^i}\right)}{(1-K_N)^i}, \quad (2.22)$$

com

$$K_N = 1 - \eta.$$

Como descrito no Apêndice B, a soma parcial (2.22), converge absoluta e uniformemente para a solução da equação integral

$$Y_N(x, E) = G(E) + \frac{1}{(1-K_N) \lambda_N(E/\eta)} \int_0^x e^{-\delta(\eta)t} Y_N(t, E/\eta) dt, \quad (2.23)$$

ou seja,

$$Y_N(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{N_n}(x, E). \quad (2.24)$$

O fluxo diferencial de nucleons à profundidade x , solução da equação diferencial (2.14) é

$$F_N(x, E) = e^{-x/\lambda_N(E)} Y_N(x, E) =$$

$$= e^{-x/\lambda_N(E)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(Z+1+i)}{\Gamma(Z+1) i!} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^i \frac{G\left(\frac{E}{\eta}\right)}{\eta^i} \quad (2.25)$$

Se o espectro primário é da forma aproximada

$$N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)},$$

então, a expressão (2.25) fica

$$F_N(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/\lambda_N(E)} (1 - \alpha)^{-(Z+1)}, \quad (2.26)$$

onde

$$\alpha = \eta^\gamma (1 - \eta^{ax/\lambda_N^0}) \quad (2.27)$$

No Apêndice B, mostramos que a solução (2.22) satisfaz à equação (2.14).

A expressão (2.26) pode ser reescrita como

$$F_N(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/\lambda_N(E)} e^{-(Z+1) \ln(1-\alpha)}, \quad (2.26)$$

e aplicando a regra de L'Hopital ao fluxo expresso por (2.26) quando $a \rightarrow 0$, obtemos a solução (1.15) do capítulo anterior, ou seja,

$$F_N(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/\lambda_N(E)} e^{-(Z+1) \ln(1-\alpha)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} F_N(x, E) =$$

$$= N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/L_N^0}, \quad (2.27)$$

onde L_N^0 é o livre percurso médio de absorção do nucleon na atmosfera.

A fim de ver como o fluxo de nucleons é modificado quando a seção de choque cresce com a energia, mostramos na Figura 2.3 a razão entre o fluxo diferencial de nucleons dado pela expressão (2.26) e o dado por (1.15)

$$\frac{F_N(x, E) (\sigma_{inel} = \sigma_{inel}(E))}{F_N(x, E) (\sigma_{inel} = \sigma_{inel}^0)} \quad , \quad (2.28)$$

para $x = 500$ e 1000 g/cm^2 , $\gamma = 1,7$; $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$ e $K_N = 0,5$.

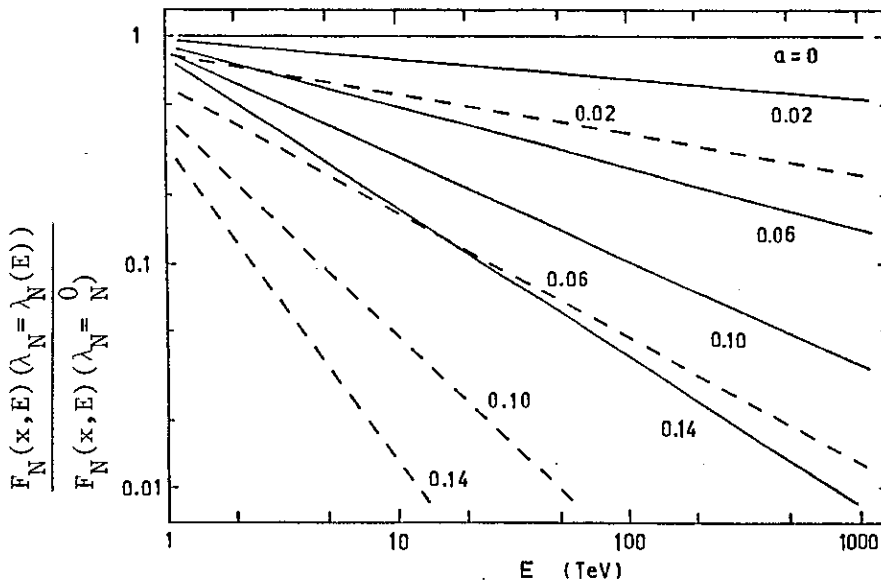


FIGURA 2.3 - comparação entre os fluxos diferenciais de nucleons calculados com a seção de choque constante e com a seção de choque crescente com a energia. A razão entre ambas é estimada com $\gamma = 1,7$; $\eta = 0,5$; $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$. — $x = 500 \text{ g/cm}^2$; ---- $x = 1000 \text{ g/cm}^2$.

Analisando a Figura 2.3, notamos que para valores crescentes de a (que aparece em (2.19)) o fluxo de nucleons de cresce e o índice de potência (γ') do fluxo de nucleons cresce. Essa tendência é mais acentuada para maiores valores de x .

2.4 - COMPARAÇÃO COM A SOLUÇÃO APROXIMADA DE GRIGOROV

Grigorov tratou, em finais da década passada, do mesmo problema, obtendo uma solução aproximada e compacta que tem sido geralmente aceita. A solução encontrada por N.L. Grigorov é

$$F_N(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/L_N(E)} \quad (2.29)$$

com

$$L_N(E) = \frac{\lambda_N(E)}{1 - C_{NN}} \quad (2.30)$$

e

$$C_{NN} = \int_0^1 \eta^\gamma f_{NN}(\eta) d\eta \quad (2.31)$$

Na expressão (2.29) consideramos o coeficiente de elasticidade do nucleon (η) constante e comparamos com nossa solução exata. A Figura 2.4 mostra a razão entre a solução de Grigorov e a nossa, isto é,

$$\frac{F_N(x, E) \text{ (solução de Grigorov)}}{F_N(x, E) \text{ (nossa solução exata)}} \quad ,$$

para valores de $x = 500$ e 1000 g/cm^2 e $\gamma = 1.7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $K_N = 0,5$.

Pode-se observar, da Figura 2.4, que a solução aproximada sempre dá um número de nucleons, $F_N(x, E)$ maior, tendência que cresce com o aumento da profundidade atmosférica. Na região de energia de 1 a 1000 TeV, para altitudes de montanhas essa razão é da ordem de 10 a 20% para um valor de a , 0,06.

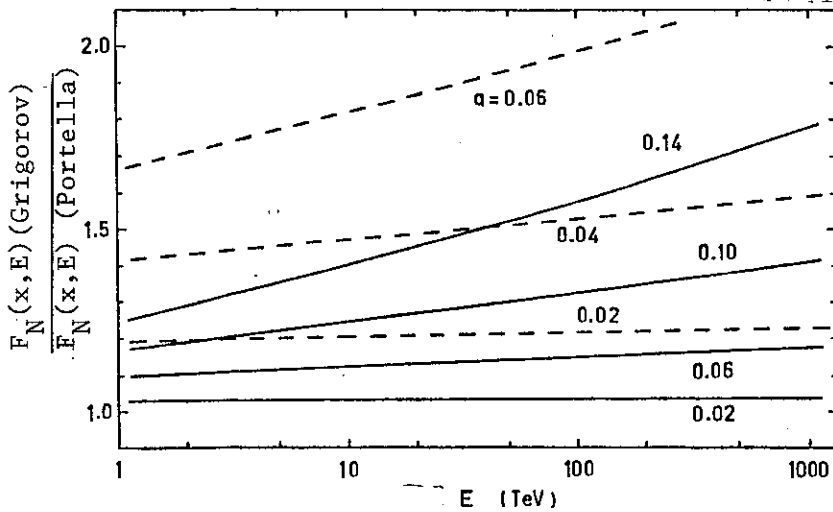


FIGURA 2.4 - Comparação entre a solução aproximada de Grigorov e nossa solução exata dos fluxos diferenciais de nucleons. A razão entre ambos é estimada com $\gamma = 1,7$; $\eta = 0,5$; $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$.
 ——— $x = 500 \text{ g/cm}^2$; - - - - $x = 1000 \text{ g/cm}^2$.

2.5 - DISCUSSÃO

Nesta seção vamos comparar alguns resultados obtidos neste e no capítulo anterior.

a) - Distribuição de Probabilidades de Interação dos Nucleons na Atmosfera

O fluxo de nucleons $F_N(x,E)$ pode ser escrito, também, da seguinte forma

$$F_N(x,E) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,E') \cdot \frac{G(E')}{(1-K_N)^n} \quad , \quad (2.32)$$

onde $P_n(x,E')$ representa a probabilidade de um nucleon, com energia $E' = E/(1-K_N)^n$ no topo da atmosfera ($x = 0$), colidir n vezes atingindo a profundidade x com energia E . Na expressão (2.32), a inelasticidade (K_N) é considerada constante.

Como se viu no Capítulo I, se a seção de choque ine-

lástica for constante, $P_n(x, E')$ é independente de E' e representada pela distribuição de Poisson

$$P_n(x) = e^{-x/\lambda_N^0} \frac{(x/\lambda_N^0)^n}{n!} .$$

Se a seção de choque crescer com a energia da forma

$$\sigma_{p\text{-ar}}^{\text{inel}}(E) = \sigma_0 (1 + a \ln E/E_0) ; E_0 = 1 \text{ TeV}$$

$P_n(x, E')$ é representada por

$$P_n(x, E') = e^{-x/\lambda_N(E' \eta^n)} \frac{\Gamma(Z+1+n)}{\Gamma(Z+1)n!} (1 - \eta^{ax/\lambda_N^0})^n \quad (2.33)$$

que dá uma distribuição distorcida quando o número de interações cresce muito ($n \rightarrow \infty$).

O resultado (2.33) é discutido em dois trabalhos ⁽⁹⁷⁾, onde mostramos que a forma da distribuição está associada à estrutura da equação diferencial que descreve a difusão dos nucleons na atmosfera e também à forma de variação da seção de choque inelástica com a energia.

No caso da solução aproximada de N.L. Grigorov ⁽⁸²⁾, a distribuição de probabilidade $P_n(x, E')$ é

$$P_n(x, E') = e^{-x/\lambda_N(E' \eta^n)} \frac{\left(\frac{x}{\lambda_N(E' \eta^n)}\right)^n}{n!} , \quad (2.34)$$

onde consideramos a elasticidade do nucleon constante. Nesse caso, $P_n(x, E')$ tem a forma de Poisson, para um livre percurso

médio de interação do nucleon na atmosfera ($\lambda_N(E)$) calculado na profundidade x . A soma dos $P_n(x, E')$ para um valor fixo de E' é menor que 1, o que resulta numa probabilidade de interação menor e num fluxo maior que os obtidos de nossa solução exata (2.25). Assim, a diferença apresentada entre a solução aproximada e a solução exata vista na Figura 2.4 é, agora, melhor entendida.

Na Figura 2.5 comparamos a distribuição de probabilidades (2.33) com a de Poisson, para valores de $\gamma = 1,7$; $K_N = 0,5$; $a = 0,06$ e $x = 540\text{g/cm}^2$.

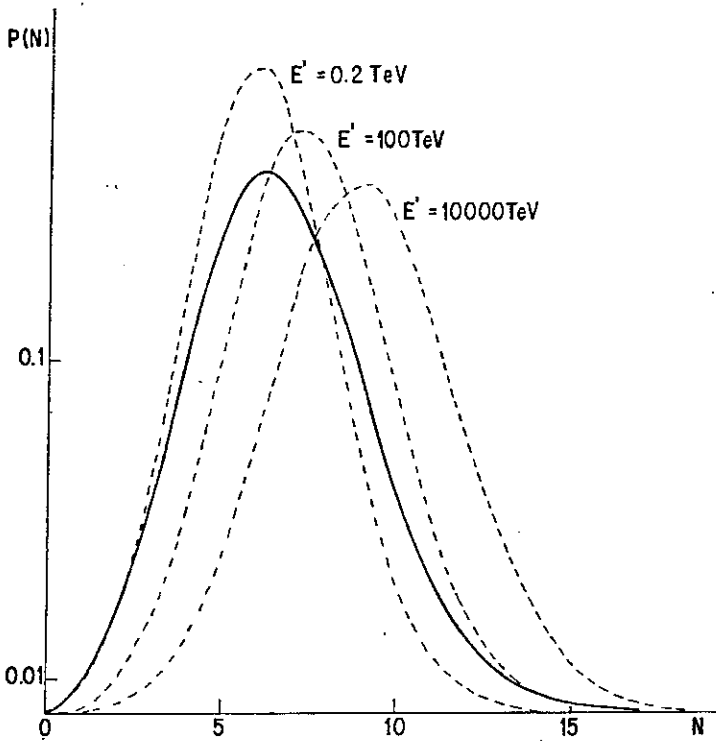


FIGURA 2.5 - Distribuição de probabilidades do nucleon na atmosfera. Os valores dos parâmetros utilizados são $\gamma = 1,7$; $E_0 = 1\text{TeV}$, $a = 0,06$ e $x = 540\text{g/cm}^2$. — distribuição de Poisson com $\lambda_N^0 = 80\text{g/cm}^2$; --- distribuição de probabilidades (expressão (2.33)) para $\lambda_N(E) = \lambda_N^0 / (1 + a \ln E/E_0)$, $\lambda_N^0 = 80\text{g/cm}^2$.

Para as duas distribuições, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, E') = 1$, e o número mais provável de interações que o nucleon sofrerá ao percorrer a distância x no caso da distribuição de Poisson, é constante ($= x/\lambda_N^0$), e para a distribuição (2.33) cresce com a energia incidente (E'). Quando E' é muito grande ($E' \rightarrow \infty$), a distribuição (2.33) fica distorcida.

b) - Índice de Potência (γ) do fluxo de Nucleons

Mostramos a seguir a variação, com a profundidade x , do índice de potência (γ') do espectro de energia dos nucleons, considerando três casos:

$$\gamma' = \gamma \tag{2.35}$$

fluxo de nucleons com λ_N constante;

$$\gamma' = \gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0} - \frac{ax}{\lambda_N^0} \cdot \eta^\gamma \tag{2.36}$$

solução aproximada de Grigorov com $\lambda_N(E)$;

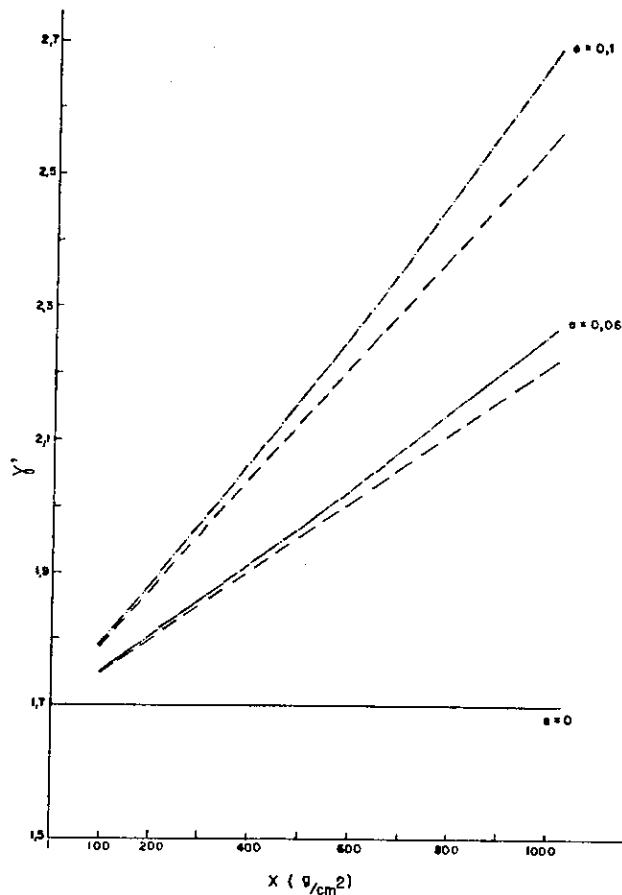
$$\gamma' = \gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0} - \frac{\alpha}{\ln 1/\eta} \tag{2.37}$$

nossa solução exata do fluxo de nucleons com $\lambda_N(E)$.

No nosso caso usamos a aproximação $\ln(1 - \alpha) = -\alpha$, $\alpha = \eta^\gamma (1 - \eta^{ax/\lambda_N^0})$ para estimar a dependência com x do expoente γ .

Na Figura 2.6 mostramos a variação, com a profundida de atmosférica, do expoente γ' para os três casos. Os valores dos parâmetros empregados foram $\gamma = 1,7$, $x = 540\text{g/cm}^2$, $\lambda_N^0 = 80\text{g/cm}^2$ e $K_N = 0,5$. Quando a seção de choque é constante, o expoente γ' é o mesmo para qualquer x e igual ao índice de potência γ do espectro primário. Para os outros dois casos ele cresce com x de acordo com as expressões (2.36) e (2.37).

FIGURA 2.6 - Variação do índice de potência (γ') do espectro de nucleons para $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\eta = 0,5$.
 — γ' para o caso da solução (1.15), com seção de choque constante; ----- γ' para o caso da solução aproximada de Grigorov, com seção de choque crescente com a energia; -.-.-. γ' para o caso de nossa solução exata, com a seção de choque crescente com a energia.



2.6 - CONCLUSÕES

Se as distribuições $f_{NN}(E, E')$ forem homogêneas das variáveis E e E' e se a seção de choque inelástica das interações nucleon-nucleon crescer logaritmicamente com a energia na forma $\sigma_{N-ar}^{in}(E) = \sigma_0^{in} (1 + a \ln E/E_0)$, $E_0 = 1 \text{ TeV}$, podemos concluir:

- o expoente γ' do espectro energético dos nucleons cresce com a profundidade x ;
- as variáveis x e E não se separam na solução (2.25);
- a distribuição de probabilidades $P_n(x, E')$ não é mais a de Poisson. Ela depende, agora, da energia incidente E' e da forma como a seção de choque varia com a energia. Neste caso a probabilidade de acontecer um choque em um elemento " dx " depende de dx e também da profundidade x .

A solução (2.26) mostra que o fluxo diferencial de -
pende, agora, de cinco parâmetros:

- a) - o expoente do espectro primário;
- b) - o livre percurso médio de interação dos nucleons na atmos-
fera;
- c) - a inelasticidade do nucleon (K_N);
- d) - o fator N_0 que aparece no espectro primário;
- e) - a constante \underline{a} que mede a dependência da seção de choque
inelástica com a energia.

O espectro integral dos nucleons torna-se

$$F_N(x, \geq E) = \frac{N_0 E^{-(\gamma + ax/\lambda_N^0)} e^{-x/\lambda_N^0} E_0^{ax/\lambda_N^0} (1-\alpha)^{-(Z+1)}}{\gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0} + \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln 1/\eta}} \quad (2.38)$$

Esse espectro integral de nucleons, somado ao espec-
tro integral de píons que consta do Capítulo IV, fornecerá o
fluxo integral de hadrons que será comparado, no Capítulo IV ,
ao correspondente fluxo de hadrons obtido experimentalmente
em várias altitudes de montanhas.

CAPÍTULO III

DIFUSÃO DOS PÍONS NA ATMOSFERA, NO CASO DE SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE

Os nucleons da radiação cósmica primária ao interagir com núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera produzem várias partículas elementares, das quais a maior parte são mésons pi (π^{\pm}, π^0). Esse fenômeno ficou conhecido desde a década de 40 como produção múltipla de partículas.

Os píons neutros decaem rapidamente em 2 fótons ($\tau=10^{-16}$ s) originando a cascata eletromagnética. Os píons carregados interagem com núcleos, antes de desintegrar em muons ($\tau = 10^{-8}$ s), produzindo novas partículas originando a cascata nuclearmente ativa. A Figura 3.1 mostra as duas cascatas sendo iniciadas, bem como seus posteriores desenvolvimentos na atmosfera. A cascata nuclearmente

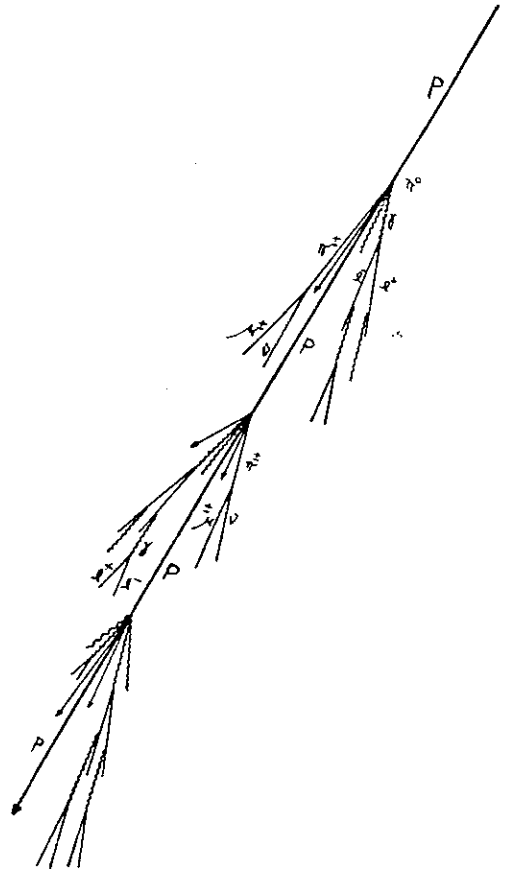


FIGURA 3.1 - Representação esquemática da difusão dos raios cósmicos na atmosfera.

ativa foi primeiramente estudada por Zatsepin⁽⁴⁵⁾ e independentemente por Heitler e Janossy⁽⁷³⁾ e J. Nishimura e S. Hayakawa⁽⁷⁴⁾. A partir da década de 50, vários autores^(98,99) estudaram analiticamente essa cascata como difusão de nucleons e píons carregados na atmosfera. É nosso objetivo estudar, neste capítulo, a difusão dos píons carregados na atmosfera por meio de uma equação diferencial unidimensional que, resolvida, nos dará o fluxo diferencial dos píons em função da profundidade atmosférica, x (g/cm^2), e da energia, E (TeV). Usaremos, aqui, a seção de choque inelástica das interações hadron-núcleo independentemente da energia do hadron incidente.

3.1 - EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS PÍONS NA ATMOSFERA

A equação diferencial unidimensional que descreve a difusão dos píons (π^\pm) na atmosfera é

$$\frac{\partial F_\pi(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_\pi(x, E)}{\lambda_\pi^0} - \frac{F_\pi(x, E)}{\lambda_{\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu}} + P_\pi^{NN}(x, E) + P_\pi^{\pi N}(x, E) \quad (3.1)$$

com a condição de contorno

$$F_\pi(0, E) = 0 \quad , \quad (3.2)$$

onde

$\lambda_{\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu}$ livre percurso médio do decaimento (g/cm^2),

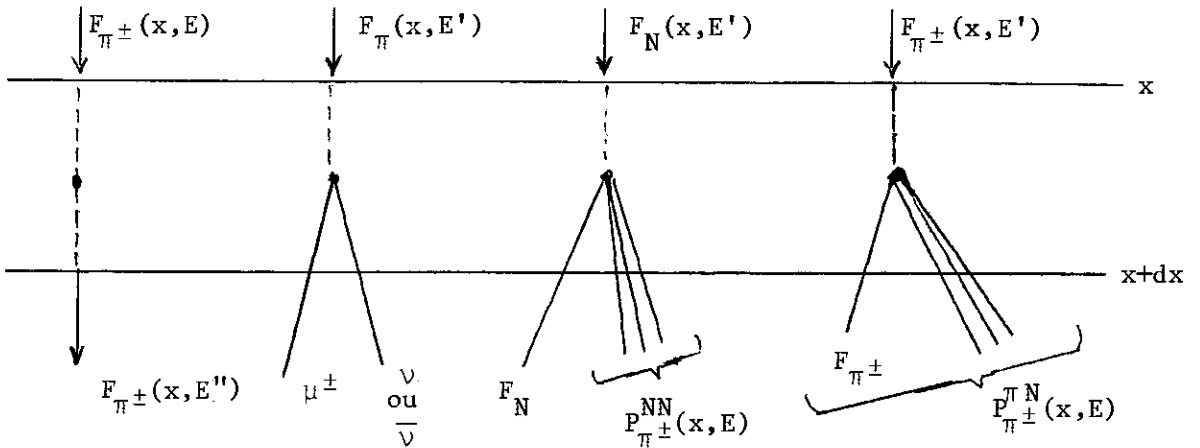
$F_\alpha(x, E)$ fluxo por $cm^2 \times s \times ster.$ de um genérico hadron α (π ou N) com energia entre E e $E+dE$ a uma profundidade x ,

λ_α^0 livre percurso médio da interação do hadron α com núcleos, suposto constante (g/cm^2).

K_α inelasticidade do hadron na atmosfera.

$P_\pi^{\alpha N}(x, E)$ razão de produção de píons carregados produzidos pelo hadron α com energia entre E e $E+dE$ à profundidade x .

O diagrama a seguir descreve esquematicamente os diferentes processos que aparecem na equação (1.1).



O primeiro termo do segundo membro da equação representa o fluxo de píons com energia E , que interagem em dx ficando com $E'' < E$. O segundo significa a desintegração dos píons carregados em muons. O terceiro e o quarto representam a produção dos píons provenientes das interações (N-A) e (π -A) respectivamente. O pión "líder" que sobrevive da interação pión-núcleo é incorporado na razão de produção $P_{\pi^\pm}^{\pi N}(x, E)$.

Na equação (3.1) desprezaremos o segundo termo, pois, para energias acima de 1 TeV e a altitudes de montanha ele pode ser desprezado em relação aos outros termos da equação. Também não consideramos píons provenientes dos decaimentos dos mésons K e nem levamos em conta que os píons possam produzir

nucleons e kaons, nessa região de energia. No Apêndice F mostramos alguns cálculos onde se evidencia a pequena contribuição dessas reações ao fluxo total de píons.

Assim a equação (3.1) fica reduzida a

$$\frac{\partial F_{\pi}(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_{\pi}(x, E)}{\lambda_{\pi}^0} + P_{\pi}^{NN}(x, E) + P_{\pi}^{\pi N}(x, E) \quad . \quad (3.3)$$

Para integrarmos a equação (3.3) precisamos conhecer explicitamente as razões de produção de píons $P_{\pi}^{\alpha N}(x, E)$ com $\alpha = N$ ou π . Designando por $\phi_{\alpha}(E, E')dE$ o número de píons carregados com energia entre E e $E+dE$ produzidos pela interação de um hadron α , de energia incidente E' , com núcleos, nós podemos escrever as razões de produção como

$$P_{\pi}^{\alpha N}(x, E) = \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \int_{E'_{\alpha} \min}^{E'_{\alpha} \max} F_{\alpha}(x, E') \cdot \phi_{\alpha}(E, E') dE' \quad . \quad (3.4)$$

As funções $\phi_{\alpha}(E, E')$ dependem do modelo fenomenológico que se adote para descrever as interações hadrônicas, ou de dados experimentais obtidos em aceleradores numa faixa de energia menor que aquela por nós estudada. Frequentemente as condições que se seguem são satisfeitas:

a) $\phi_{\alpha}(E, E')dE$ é uma função homogênea das variáveis E e E'
(100-101)

$$\phi_{\alpha}(E, E')dE = f_{\alpha}(E/E') dE/E' \quad . \quad (3.5)$$

Essa propriedade das funções $\phi_{\alpha}(E, E')$ é geralmente associada

à lei de similaridade muito familiar aos pesquisadores de raios cósmicos e mais recentemente ao "scaling" de Feynman .

b) A energia mínima é proporcional à energia do hadron secundário (E)

$$E'_{\alpha \min} = E/K_{\alpha} \quad , \quad (3.6)$$

onde K_{α} é a inelasticidade do hadron α na atmosfera.

c) Para simplificação dos cálculos consideramos a E'_{\max} como sendo aproximadamente infinita

$$E'_{\alpha \max} \cong \infty \quad . \quad (3.7)$$

Se essas três condições são satisfeitas, as razões de produção $P_{\pi}^{\alpha N}(x, E)$ definidas pela expressão (3.4) ficam

$$P_{\pi}^{\alpha N}(x, E) = \int_0^{K_{\alpha}} \frac{f_{\pi\alpha}(\eta)}{\lambda_{\alpha}^0} F_{\alpha}(x, E/\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad , \quad (3.8)$$

onde $\eta = E/E'$ é a elasticidade do hadron α .

O primeiro índice da função $f_{\pi\alpha}(\eta)$ representa as partículas secundárias (π), enquanto que o segundo índice representa a partícula incidente (primária).

As quantidades $f_{\pi\alpha}(\eta)$ se relacionam com as seções de choque inclusivas invariantes de Lorentz, através da expressão

$$f_{\pi\alpha}(x_{\text{lab}} = \eta) = \frac{1}{\sigma_{\text{in}}} \int E \frac{d^3\sigma}{dp^3} \frac{dp_{\parallel}}{dE} d^2p_{\perp} \quad (3.9)$$

$$E \frac{d^3 \sigma}{dp^3} = E^* \frac{d^3 \sigma}{dp^{*3}} = f(x, p_T, S) \quad , \quad (3.10)$$

onde o índice (*) representa as variáveis no sistema centro dos momentos; a variável de Feynman $(x^*) = 2p_{||}^*/\sqrt{S}$ para energias muito altas, tende para $x_{lab} = E/E'$, que coincide com a elasticidade do hadron α na atmosfera.

Havendo o "scaling" de Feynman no processo de produção múltipla de partículas, tem-se

$$f(x, p_T, S) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} f(x, p_T) \quad . \quad (3.11)$$

Assim, a equação diferencial (3.3), supondo válida a propriedade do "scaling" hadrônico, torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\pi}(x, E)}{\partial x} = & - \frac{F_{\pi}(x, E)}{\lambda_{\pi}^0} + \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^1 \frac{F_N(x, E/\eta)}{\eta} f_{\pi N}(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\lambda_{\pi}^0} \int_0^1 \frac{F_{\pi}(x, E/\eta)}{\eta} f_{\pi\pi}(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.12)$$

A hipótese do "scaling" de Feynman não é válida na região central (pionização) ⁽¹⁰²⁾ onde $x_{lab} \equiv \eta \leq 0,05$; entretanto, na região de fragmentação, $0,05 < x_{lab} < 1$, não há evidência de sua violação. Como nos cálculos usados para estudar as cascatas atmosféricas os valores de $\langle x_{lab} \rangle$ são maiores que 0,05, consideramos aproximadamente válida essa propriedade, apesar de trabalhos recentes ⁽¹⁰³⁻¹⁰⁴⁾ mostrarem grandes evidências de sua quebra.

3.2 - RESOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS PÍONS

Vários autores ^(77,86) resolveram analiticamente a equação diferencial (3.12) por meio da transformada de Mellin. Osawa ⁽¹⁰⁵⁾ aplicou simultaneamente duas transformações, a de Mellin na variável E, e a de Laplace na variável x, obtendo a solução exata dessa equação. A condição de contorno usada foi $F_N(0,E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$. Com essa condição a equação pode ser resolvida por meio do método de separação de variáveis, bem mais simples que o empregado por A. Osawa. Mac. Keown ⁽¹⁰⁶⁾ obtém a mesma solução empregando unicamente a transformada de Mellin na variável E com a condição de contorno idêntica à usada por Osawa. Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada nos capítulos anteriores, vamos integrar a equação (3.12) por meio dos métodos de operadores e das aproximações sucessivas.

Seja o operador \tilde{A} , definido como:

$$\tilde{A}F_{\pi}(x,E) = \int_0^1 F_{\pi}(x,E/\eta) f_{\pi\pi}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad . \quad (3.13)$$

Introduzindo (3.13) na equação (3.12) obtemos

$$\frac{\partial F_{\pi}(x,E)}{\partial x} = -(\tilde{1}-\tilde{A}) \frac{1}{\lambda_0^{\pi}} F_{\pi}(x,E) + P_{\pi}^{NN}(x,E) \quad . \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é a equação que desejamos integrar. Como o termo $\tilde{A}F_{\pi}(x,E)$ é desconhecido, nós vamos utilizar as seguintes aproximações sucessivas. Em primeiro lugar obteremos a aproximação de ordem zero, $F_{\pi 0}(x,E)$, onde não se levam em conta os píons da segunda geração. A seguir, colocamos na equação

de operadores (3.14), o termo $\hat{A}F_{\pi_0}(x,E)$ no lugar do termo exato $\hat{A}F_{\pi}(x,E)$. Desse modo temos uma primeira estimativa da contribuição dos píons da segunda geração para o fluxo total. Fazemos, a seguir, sucessivas avaliações da contribuição dos píons da 3ª, 4ª, ..., n-ésima gerações para o fluxo total dos píons. As aproximações sucessivas são representadas pelas seguintes equações de recorrência

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\pi_0}(x,E)}{\partial x} &= -\frac{F_{\pi_0}(x,E)}{\lambda_{\pi}} + P_{\pi_0}(x,E) \\ \frac{\partial F_{\pi_1}(x,E)}{\partial x} &= -\frac{F_{\pi_1}(x,E)}{\lambda_{\pi}} + P_{\pi_1}(x,E) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_{\pi_n}(x,E)}{\partial x} &= -\frac{F_{\pi_n}(x,E)}{\lambda_{\pi}^0} + P_{\pi_n}(x,E) \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $P_{\pi_0}(x,E) = P_{\pi}^{NN}(x,E)$,

$$\begin{aligned} P_{\pi_1}(x,E) &= P_{\pi}^{NN}(x,E) + \frac{\hat{A}F_{\pi_0}(x,E)}{\lambda_{\pi}^0} = \\ &= P_{\pi}^{NN} + P_{\pi_1}^{\pi N} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$P_{\pi_n}(x,E) = P_{\pi}^{NN}(x,E) + \frac{\hat{A}F_{\pi_{n-1}}(x,E)}{\lambda_{\pi}^0} .$$

As soluções do sistema de equações lineares devem sa

tisfazer às condições limites

$$F_{\pi_n}(0, E) = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Para resolver o sistema de equações (3.16) devemos em primeiro lugar verificar a continuidade das funções $P_{\pi_i}(x, E)$ e $F_{\pi_i}(x, E)$, ($i = 0, 1, \dots, n$), dentro do domínio $\xi = [0 \leq x \leq X; E_{\min} \leq E \leq E_{\max}]$ com $E_{\min} > 0$, $E_{\max} > E_{\min}$ e $X > 0$. Essas funções são contínuas dentro de ξ quando:

- a) $G(E)$ for uma função contínua, positiva e limitada no intervalo $I = [E_{\min}, \infty)$, $E_{\min} > 0$.
- b) As funções $f_{\pi\alpha}(\eta)$ forem contínuas, positivas para valores de η pertencentes ao intervalo $(0 \leq \eta \leq 1)$.
- c) As integrais $\int_0^1 f_{\pi\alpha}(\eta) d\eta/\eta$ existirem.

Assim, supondo válidas as condições acima, a solução única e compacta dos sistemas (3.15) e (3.16) será

$$F_{\pi_n}(x, E) = \hat{B}P_{\pi_n}(x, E) = \int_0^x e^{-(x-t)/\lambda_{\pi}^0} P_{\pi_n}(t, E) dt$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

onde o operador \hat{B} é definido como:

$$\hat{B}H(x, E) = \int_0^x e^{-(x-t)/\lambda_{\pi}^0} H(t, E) dt \quad (3.19)$$

Usando as equações (3.16) e (3.18), obtemos as seguintes aproximações sucessivas:

$$F_{\pi_0}(x, E) = \hat{B}P_{\pi_0}(x, E) = \hat{B}P_{\pi}^{NN}(x, E)$$

$$\begin{aligned} F_{\pi_1}(x, E) &= \hat{B}P_{\pi_1}(x, E) = \hat{B}\left\{P_{\pi_0}(x, E) + \frac{\hat{A}F_{\pi_0}}{\lambda_0^{\pi}}(x, E)\right\} = \\ &= \hat{B}(1 + \hat{A}\hat{B})P_{\pi}^{NN}(x, E) \end{aligned}$$

$$F_{\pi_2}(x, E) = \hat{B}P_{\pi_2}(x, E) = \hat{B}(1 + \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{B})P_{\pi}^{NN}(x, E)$$

e a n-ésima aproximação será

$$F_{\pi_n}(x, E) = \hat{B}(1 + \hat{A}\hat{B} + \dots + (\hat{A}\hat{B})^n)P_{\pi}^{NN}(x, E) \quad (3.20)$$

A indução do (n+1)-ésimo termo da sucessão a partir do (n-ésimo) é

$$\begin{aligned} F_{\pi_{n+1}}(x, E) &= \hat{B}P_{\pi_{n+1}}(x, E) = \hat{B}P_{\pi_0}(x, E) + \frac{\hat{B}\hat{A}F_{\pi_0}}{\lambda_0^{\pi}}(x, E) = \\ &= \hat{B}\{1 + \hat{A}\hat{B} + \dots + (\hat{A}\hat{B})^{n+1}\}P_{\pi}^{NN}(x, E) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como os operadores \hat{A} e \hat{B} atuam sobre variáveis distintas E e x das funções $F_{\pi_i}(x, E)$ e $P_{\pi_i}(x, E)$, ($i = 0 \dots n$), respectivamente, nós podemos escrever a expressão (3.20) na seguinte forma

$$F_{\pi_n}(x, E) = \hat{B}\{1 + \hat{A}\hat{B} + \dots + \hat{A}^n \hat{B}^n\}P_{\pi}^{NN}(x, E) \quad (3.22)$$

No Apêndice C estabelemos a validade da igualdade

$$F_{\pi_n}(x, E) = \sum_{i=0}^n \hat{B}\hat{A}^i \hat{B}^i P_{\pi}^{NN}(x, E) = \sum_{i=0}^n \hat{B}(\hat{A}\hat{B})^i P_{\pi}^{NN}(x, E)$$

e além disso mostramos que a solução

$$F_{\pi}(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\pi n}(x, E)$$

existe e é a única solução contínua da equação diferencial (3.14).

3.3 - CASO PARTICULAR, ESPECTRO PRIMÁRIO DA FORMA $F_N(0, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$

A solução da equação de difusão dos nucleons estabelecida no Capítulo I (expressão (1.15)) é

$$F_N(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} e^{-x/L_N^0}, \quad (1.15)$$

onde

$$L_N^0 = \frac{\lambda_N^0}{1 - C_{NN}} \quad (1.16)$$

Nesse caso, podemos integrar a equação (3.14) usando o método de separação de variáveis (107), cujo resultado pode ser usado para verificação de nossos cálculos.

A razão de produção de píons $P_{\pi}^{NN}(x, E)$ é

$$P_{\pi}^{NN}(x, E) = \frac{F_N(0, E)}{\lambda_N^0} e^{-x/L_N^0} \cdot C_N \quad (3.23)$$

onde

$$C_N = \int_0^{K_N} \eta^{\gamma} f_{\pi N}(\eta) d\eta \quad (3.24)$$

O fluxo diferencial de pions à profundidade x é

$$F_{\pi}(x, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n \hat{B}^{n+1} P_{\pi}^{NN}(x, E) \quad (3.25)$$

Assim, a atuação de \hat{B}^{n+1} sobre P_{π}^{NN} fica:

$$\begin{aligned} \hat{B}^{n+1} P_{\pi}^{NN}(x, E) &= \int_0^x dt_{n+1} \int_0^{t_{n+1}} dt_n \dots \\ &\int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} e^{-(x-t_1)/\lambda_{\pi}^0} P_{\pi}^{NN}(t_1, E) dt_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

usando a propriedade das integrais iterativas ⁽¹⁰⁸⁾, e fazendo a substituição de variáveis $t_1 = x - \tau$, obtemos

$$\hat{B}^{n+1} P_{\pi}^{NN}(x, E) = e^{-x/L_N^0} \int_0^x e^{(1/L_N^0 - 1/\lambda_{\pi}^0)\tau} \frac{\tau^n}{n!} F_N(0, E) \frac{C_N}{\lambda_N^0} d\tau \quad (3.27)$$

Aplicando o operador \hat{A}^n na expressão (3.27) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{A}^n (\hat{B}^{n+1} P_{\pi}^{NN}(x, E)) &= N_0 e^{-x/L_N^0} \frac{C_N}{\lambda_N^0} \left\{ \int_0^x e^{\tau(1/L_N^0 - 1/\lambda_{\pi}^0)} \frac{\tau^n}{n!} d\tau \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{1}{\lambda_{\pi}} \right)^n \int_0^1 \frac{d\eta_n}{\eta_n} f_{\pi\pi}(\eta_n) \dots \int_0^1 \frac{d\eta_1}{\eta_1} f_{\pi\pi}(\eta_1) \left(\frac{E^{-(\gamma+1)}}{\eta_1 \dots \eta_n} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

que fica

$$\hat{A}^n (\hat{B}^{n+1} P_{\pi}^{NN}(x, E)) = \frac{N_0}{\lambda_N} C_N e^{-x/L_N^0} \bar{E}^{(\gamma+1)} \int_0^x d\tau e^{\tau(1/L_N^0 - \frac{1}{\lambda_{\pi}})} \left(\frac{C_{\pi}}{\lambda_{\pi}^0} \right)^n \frac{\tau^n}{n!} \quad (3.29)$$

onde

$$C_{\pi} = \int_0^1 \eta^{\gamma} f_{\pi\pi}(\eta) d\eta \quad (3.30)$$

e o fluxo diferencial de píons é

$$F_{\pi}(x, E) = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{A} \bar{B}^{n+1} P_{\pi}^{NN}(x, E)) = F_N(0, E) \frac{C_N}{\lambda_N^0} \left[\frac{e^{-x/L_{\pi}^0} - e^{-x/L_N^0}}{\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_{\pi}^0}} \right] \quad (3.31)$$

que é a expressão usualmente encontrada.

3.4 - COMPARAÇÃO COM DADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção apresentaremos uma comparação entre os fluxos integrais de hadrons (nucleons+píons) por nós obtidos e os correspondentes fluxos encontrados experimentalmente em Chacaltaya, Fuji e Monte Kanbala.

Para efetuarmos essa comparação necessitamos levar em conta alguns elementos que entram no cálculo dos fluxos, como inelasticidade dos raios γ , distribuição de elasticidade dos nucleons, espectro primário de raios cósmicos, distribuição de energia dos píons secundários. A seguir vamos fazer algumas considerações sobre cada um dos elementos acima citados.

a) - Inelasticidade dos Raios γ

Nos experimentos com câmaras de emulsões, os hadrons são detetados como chuveiros. Assim, as energias medidas são

convertidas em energias dos hadrons, por:

$$E_h \times k_\gamma = E_{\text{obs}} \quad (3.32)$$

onde k_γ é a inelasticidade dos raios γ . Em nossos cálculos usaremos $k_\gamma = 0,25$.

b) - Distribuição de Elasticidade dos Nucleons

Usaremos a distribuição de elasticidade uniforme no intervalo de 0 a 1. Essa distribuição reproduz aproximadamente os resultados experimentais ⁽¹⁰⁹⁾.

c) - Espectro Primário

No topo da atmosfera os prótons constituem a maioria ($\sim 65\%$) das partículas da radiação cósmica. O número de núcleos presentes na radiação cósmica primária não pode, entretanto, ser desprezado quando se faz cálculos sobre fluxos hadrônicos.

Vamos usar o espectro primário apresentado por Battacharyya ⁽¹¹⁰⁾, que analisou dados experimentais obtidos através de exposições, em balões, de câmaras de emulsões nucleares. Nessa referência, os nucleons que constituem os núcleos presentes na R.C. primária interagem, por hipótese, igualmente com núcleos presentes na atmosfera. O espectro utilizado será:

$$F_N(0, E) = 2,237 \times E^{-2,7} \quad (\text{cm}^2 \times \text{s} \times \text{ster} \times \text{GeV/nucleon}) \quad (3.33)$$

d) - Distribuição de Energia Fracionária dos Píons Secundários

No cálculo das razões de produção dos píons (fórmula (3.8)) figuram as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta=E/E')$, $\alpha = N$ ou π , que representam as distribuições de energia fracionária dos píons secundários das interações hadron-núcleo.

Na Figura 3.2 mostramos algumas distribuições de x ($= 2P_{||}^*/\sqrt{S}$) para os píons, nas reações (p-p), numa região de momento incidente entre 102 e 360 GeV/c (111). Vamos admitir que

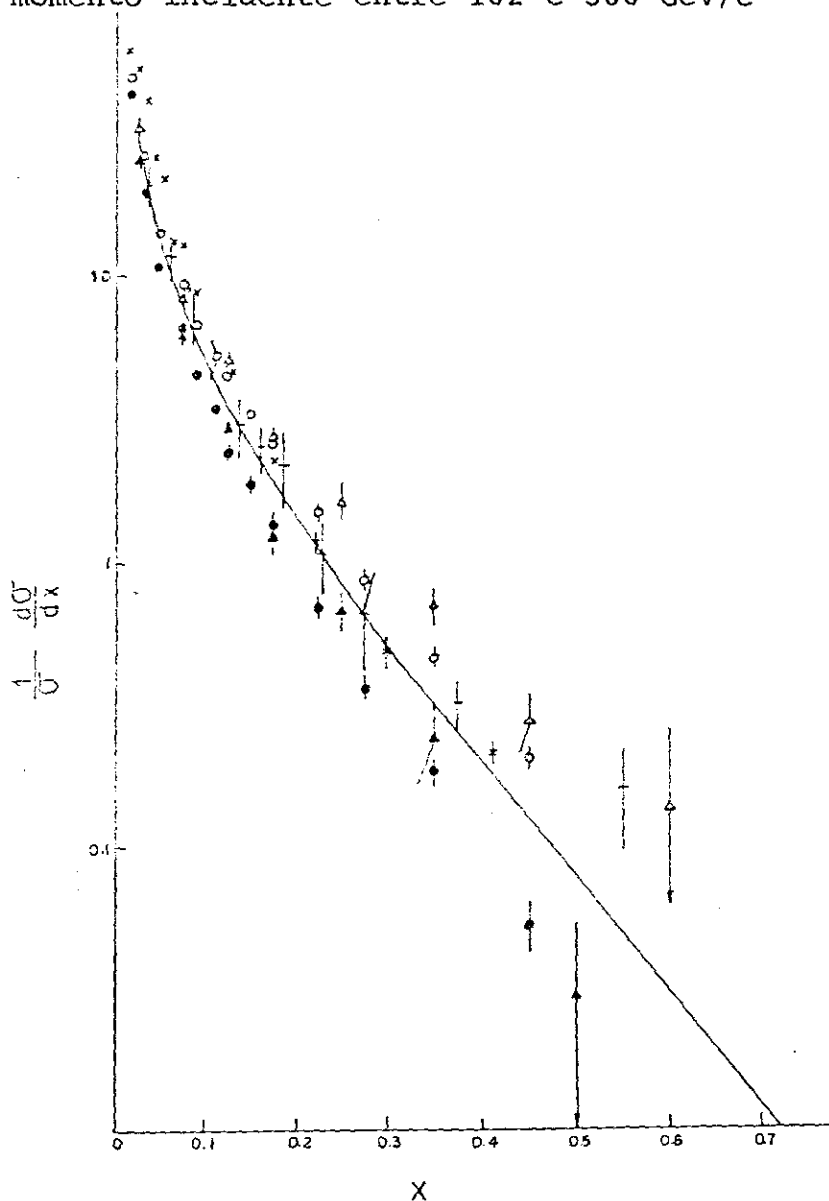


FIGURA 3.2 - Distribuição de $x_F (=2P_{||}^*/\sqrt{S})$ para os píons ($f_{\pi N}(x_F)$) nas reações: Δ $pp \rightarrow \pi^+$ 102GeV/c, \blacktriangle $pp \rightarrow \pi^-$ 102GeV/c, \circ $pp \rightarrow \pi^+$ 205GeV/c, \bullet $pp \rightarrow \pi^-$ 205GeV/c, $+$ $pp \rightarrow \pi^0$ 250GeV/c, x $pp \rightarrow \pi^0$ 360 GeV/c, Ref. (111). ——— $f_{\pi N}(\eta) = 1,04 \left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^{-5\eta}$ para um sô estado de carga do píon.

a lei de "scaling" seja aproximadamente válida na região de energia de raios cômicos; usa

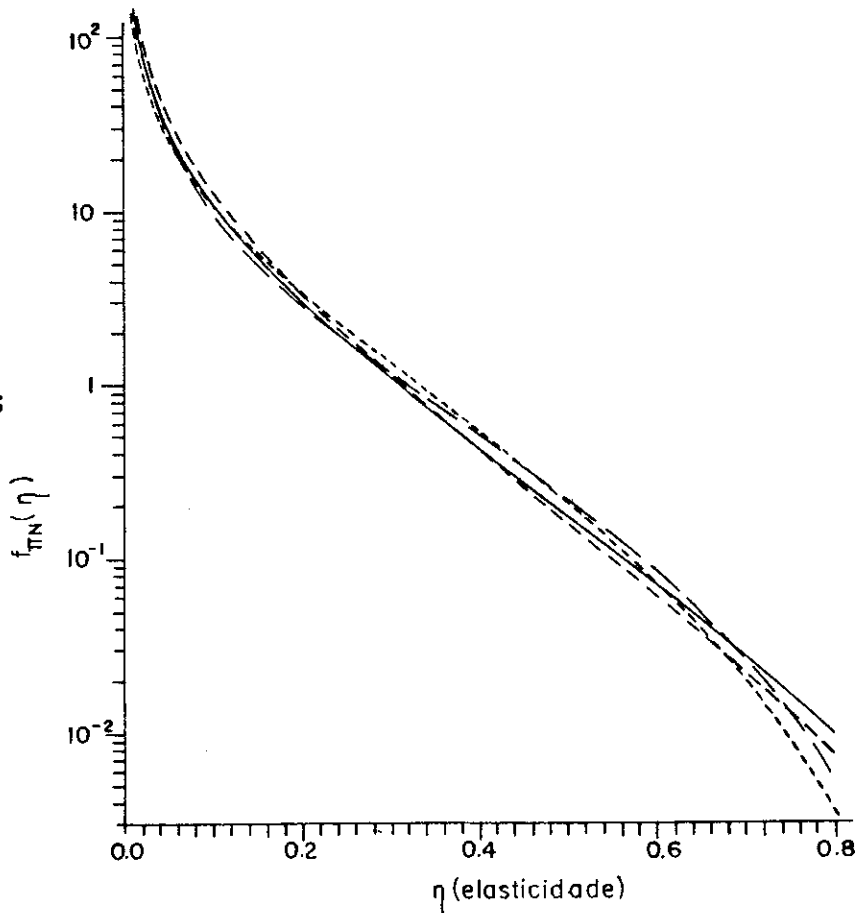
remos a seguinte distribuição de energia fracionária

$$\frac{dN}{d\eta} = 1,04 \times (1-\eta)/\eta \times e^{-5\eta} \quad (3.34)$$

para um só estado de carga de píons. Essa distribuição consta, também, da Figura 3.2.

Na Figura 3.3 comparamos a expressão (3.34), que é usada em nossos cálculos, com outras distribuições de energia fracionária empregadas por outros autores.

FIGURA 3.3 - Distribuição de energia fracionária dos píons secundários $f_{\pi N}(\eta)$: --- ref. (113); - - - ref. (82); - - - - ref. (95); — nossa parametrização.



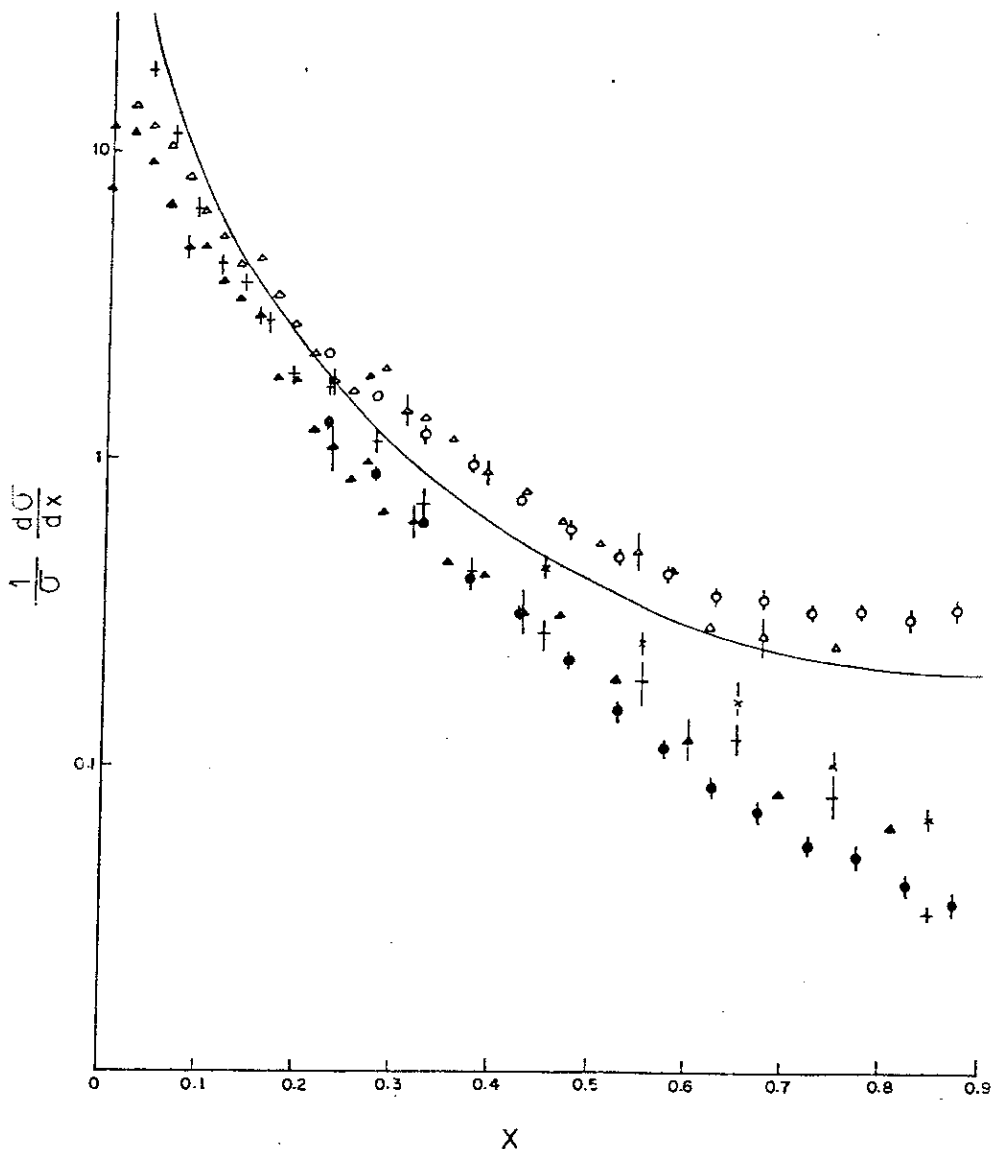


FIGURA 3.4 - Distribuição de $x_F = (2P_{\parallel}^* / \sqrt{S})$ para os píons ($f_{\pi\pi}(x_F)$) nas reações: $+\pi^+p \rightarrow \pi^0$ 250 GeV/c; $X\pi^-p \rightarrow \pi^0$ 58 GeV/c, $o\pi^-p \rightarrow \pi^-$ 58 GeV/c; $\bullet\pi^-p \rightarrow \pi^+$ 58 GeV/c, $\Delta\pi^+Ne \rightarrow \pi^+$ 10,5 GeV/c; $\blacktriangle\pi^+Ne \rightarrow \pi^-$ 10,5 GeV/c ref. (112). $f_{\pi\pi}(\eta) = \frac{1,3}{\eta} (1+\eta/0,45)^{-3} + \frac{0,76}{\eta} e^{2(\eta-1)}$ para um só estado de carga do pión.

Na Figura 3.4 constam várias distribuições de x para os píons, em reações pión-próton e pión-neônio, a 10,5 - 250,0 GeV/c (112). Como no caso anterior, supondo que a lei de "scaling" também vale para reações induzidas por píons e na região de energia de raios cósmicos, usaremos a seguinte distribuição de energia facionária

$$\frac{dN}{d\eta} = \frac{1,3}{\eta} \left(1 + \frac{\eta}{0,45}\right)^{-3} + \frac{0,57}{\eta} e^{4(\eta-1)} \quad (3.35)$$

para um único estado de carga do píon. A distribuição (3.35) se refere a todos os píons secundários (píon líder+píons produzidos), e consta também da figura 3.4.

Na Figura 3.5 comparamos a distribuição de energia fracionária (3.35) com a distribuição apresentada por Hillas⁽⁹⁵⁾.

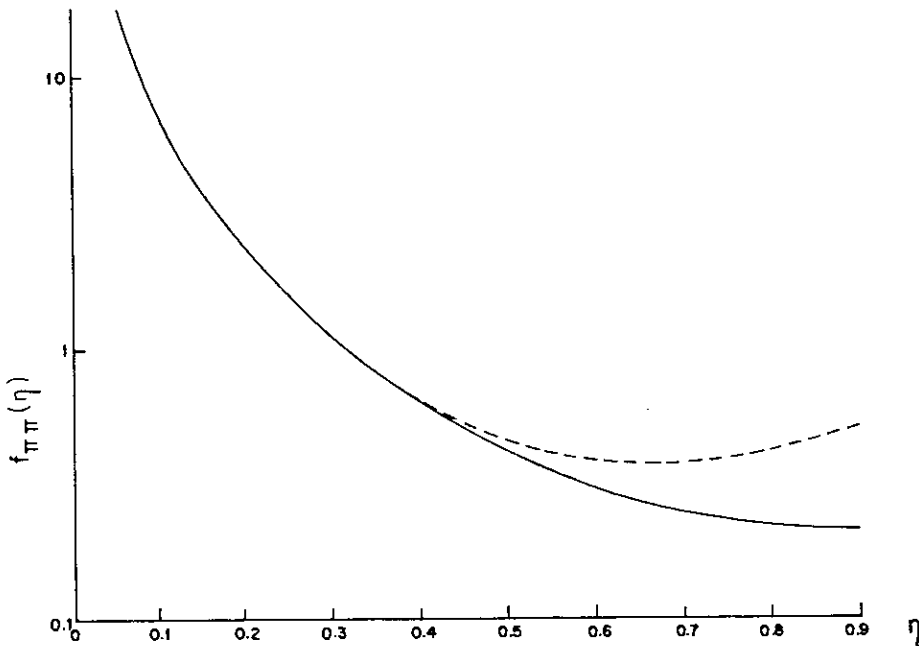


FIGURA 3.5 - Distribuição de energia fracionária dos píons secundários $f_{\pi\pi}(\eta)$. ----- ref. (95), ——— nossa parametrização.

As funções $f_{\pi\pi}(\eta)$ podem, também, ser obtidas por intermédio de um modelo teórico que descreva o fenômeno da produção múltipla de hadrons. Vamos considerar, aqui, que da interação hadron-núcleo se forme um estado intermediário, com massa e temperatura bem definidas, e que logo após a sua formação se desintegra isotropicamente. A distribuição dos momentos dos píons em relação ao centro de massa desse estado intermediário é a de Bose-Einstein. A descrição do modelo, bem como a obtenção das funções $f_{\pi\alpha}(\eta)$, é feita no Apêndice E. Esse modelo é

compatível com a hipótese de "scaling" e será também empregado nos nossos cálculos dos fluxos hadrônicos.

As distribuições obtidas com o modelo são

$$f_{\pi\alpha}(\eta) d\eta = \frac{2}{3} A_{\alpha} (kp_0^3) \Phi\left(A_{\alpha}\eta + \frac{B_{\alpha}}{\eta}\right) d\eta, \quad (3.36)$$

onde

$$A_{\alpha} = \frac{M_{bf}c^2}{(p_0c) \times 2K_{\alpha}} \quad (3.37)$$

$$B_{\alpha} = \frac{K_{\alpha} (m_{\pi}c^2)}{2(p_0c) (M_{bf}c^2)} \quad (3.38)$$

$$\Phi(A_{\alpha}\eta + B_{\alpha}/\eta) = \int_{(A_{\alpha}\eta + B_{\alpha}/\eta)}^{\infty} \frac{tdt}{e^t - 1} \quad (3.39)$$

com $t = E^*/p_0c$. A expressão (3.39) é a bem conhecida função de Debye.

A distribuição de energia fracionária dos pions (3.36) depende de alguns parâmetros, como a massa da bola de fogo ($M_{bf}c^2$), sua temperatura (p_0c), a massa do pión ($m_{\pi}c^2$), a inelasticidade do hadron incidente (K_{α}). Esses parâmetros são calculados com o modelo teórico e relacionados entre si. Nas Tabelas E.1 e E.2 constam esses parâmetros assim obtidos.

Na Tabela 3.1 relacionamos os coeficientes C_N e C_{π} (expressões (3.24) e (3.30) respectivamente) calculados com o modelo teórico e com o uso das expressões (3.34) e (3.35).

Os coeficientes C_N e C_{π} variam muito pouco ($\sim 1,5\%$) entre os valores da temperatura da bola de fogo de 120-160 MeV e massa da bola de fogo variando entre 2400 e 3000 MeV.

As distribuições $f_{\pi\pi}(\eta)$, obtidas através do modelo

TABELA 3.1 - Coeficientes C_N e C_π (π da produção).

$P_0 C$ (MeV)	$M_b f c^2$ (MeV)	$\langle p_T \rangle$ (MeV)	C_N	$C_{\pi\text{produção}}$
120	2430	293	0,078	0,078
130	2580	313	0,079	0,079
140	2730	334	0,079	0,079
150	2880	355	0,080	0,080
160	3040	375	0,080	0,080

teórico e usadas no cálculo do coeficiente C_π , são divididas em duas partes

$$f_{\pi\pi}(\eta) = f_{\pi\pi}^1(\eta) + f_{\pi\pi}^2(\eta) \quad ,$$

onde $f_{\pi\pi}^1(\eta)$ é a distribuição de energia fracionária para o π líder, e $f_{\pi\pi}^2(\eta)$ é a distribuição para os outros π ons secundários. Em nossos cálculos vamos usar as seguintes aproximações, baseados na referência (114)

$$f_{\pi\pi}^1(\eta) = (1 - C) f_{NN}(\eta) \quad (3.40)$$

com

$$f_{NN}(\eta) d\eta = 1 d\eta$$

e $C = 1/3$ que mede a probabilidade dos π ons carregados transformarem-se em π neutros, segundo a reação $\pi^\pm N \rightarrow \pi^0 X$.

e

$$f_{\pi\pi}^2(\eta) = f_{\pi N}(\eta) \quad (3.41)$$

Os coeficientes C_α que constam da Tabela 3.1 são calculados numericamente com a fórmula

$$C_N = \frac{2}{3} NA_N (kp_0^3) \int_0^{K_N} \eta^\gamma d\eta \left\{ \sum_{i=1}^{200} e^{-i(A_\alpha \eta + B_\alpha / \eta)} \times \left(\frac{1}{i^2} + \frac{(A_\alpha \eta + B_\alpha / \eta)}{i} \right) \right\} \quad (3.42)$$

e

$$C_\pi = \int_0^1 \eta^\gamma d\eta \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) f_{NN}(\eta) + \frac{2}{3} NA_\pi (kp_0^3) \left[\sum_{i=1}^{200} e^{-i(A_\alpha \eta + B_\alpha / \eta)} \times \left(\frac{1}{i^2} + \frac{(A_\alpha \eta + B_\alpha / \eta)}{i} \right) \right] \right\} \quad (3.43)$$

onde $f_{NN}(\eta) d\eta = 1 d\eta$, A_α ($\alpha = N$ ou π), e kp_0^3 constam das tabelas E.1 e E.2.

Usando os elementos (a-d), citados nesta seção, podemos calcular, agora, numericamente o fluxo integral de hadrons e compará-lo aos fluxos análogos obtidos experimentalmente com câmaras de emulsões nucleares expostas em altitudes de montanhas.

O fluxo integral de pions é obtido do fluxo diferencial (expressão (3.31)), e resulta:

$$F_\pi(x, \geq E) = \frac{N_0 \bar{E}^\gamma}{\gamma} \frac{C_N}{\lambda_N^0} \frac{e^{-x/L_\pi^0} - e^{-x/L_N^0}}{\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0}} \quad (3.44)$$

e o fluxo integral de hadrons (nucleons+pions) é

$$F_H(x, \geq E) = \frac{N_0 \bar{E}^\gamma}{\gamma} \left\{ e^{-x/L_N^0} + \frac{C_N}{\lambda_N^0} \left(\frac{e^{-x/L_\pi^0} - e^{-x/L_N^0}}{\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0}} \right) \right\} \quad (3.45)$$

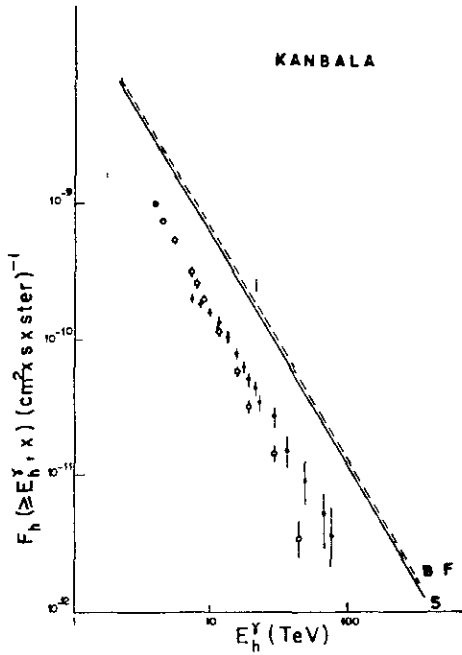
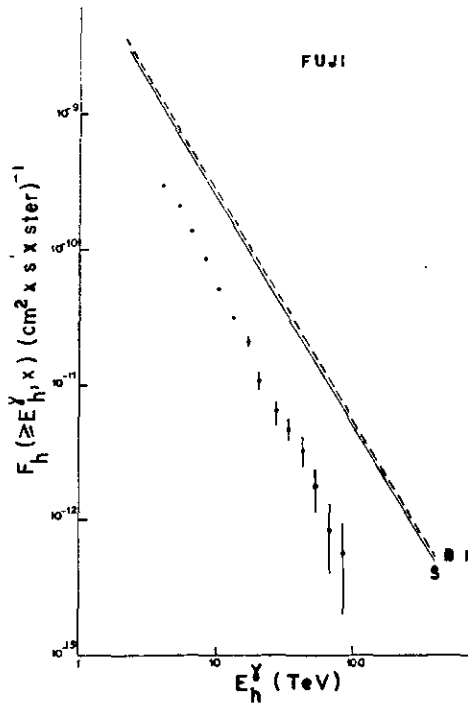


FIGURA 3.6 - Espectro integral de hadrons em Kanbala ($x = 520 \text{g/cm}^2$) (o e • ref. (115)). — fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de dados de aceleradores. ---- fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de modelo teórico.

FIGURA 3.7 - Espectro integral de hadrons em Fuji ($x = 650 \text{g/cm}^2$) (• ref. (116)). — fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de dados de aceleradores. ---- fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico.



Nas Figura 3.6, 3.7 e 3.8 comparamos nossa solução (3.45) com os fluxos integrais de hadrons obtidos em Kanbala ($x = 520 \text{g/cm}^2$) (115), Fuji ($x = 650 \text{g/cm}^2$) (116) e Monte Chacaltaya ($x = 540 \text{g/cm}^2$) (117), respectivamente. Em cada uma das três figuras aparecem, além dos pontos experimentais, duas curvas; a 1ª representa o fluxo calculado com as distribuições

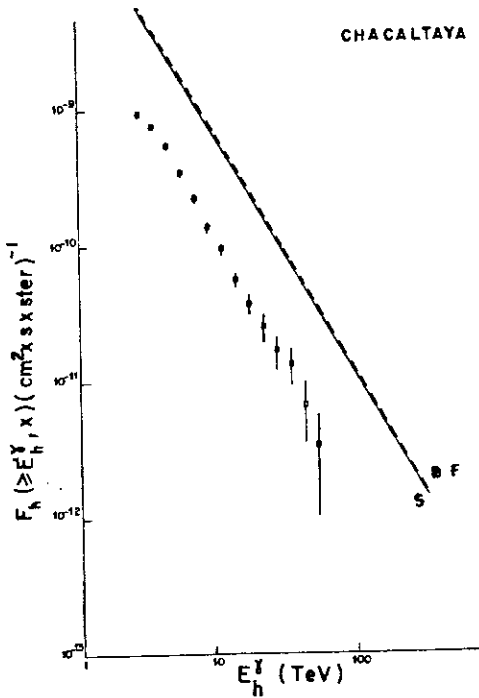


FIGURA 3.8 - Espectro integral de hadrons em Chacaltaya ($x = 540 \text{ g/cm}^2$) (\square ref. (117)). — fluxo integral de hadrons calculado com as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas de dados de aceleradores. ----- fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico.

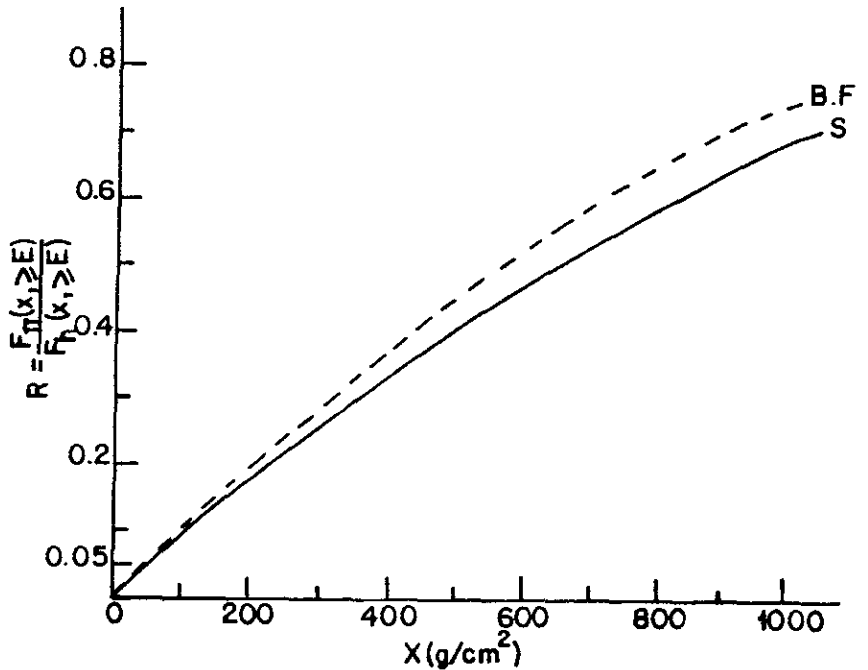
de energia fracionária dos pions, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, dadas pelas fórmulas (3.34) e (3.35), e a 2ª o mesmo fluxo calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ da da pelo modelo teórico (3.36).

3.5 - DISCUSSÃO

As Figuras 3.6, 3.7 e 3.8 mostram uma grande discrepância entre os fluxos integrais de hadrons calculados usando a expressão (3.45) e os obtidos experimentalmente. Para $E = 10 \text{ TeV}$, os fluxos calculados teoricamente são de 4 a 5 vezes maiores que os experimentais.

Na Figura 3.9 mostramos a variação, com a profundidade de atmosférica, da razão $F_{\pi}(x, \geq E)/F_H(x, \geq E)$. Em altitudes de montanha, o fluxo integral de pions ($F_{\pi}(x, \geq E)$) é 40 a 50% do fluxo integral de hadrons ($F_H(x, \geq E)$), quando se usa para as distribuições de energia dos pions as expressões (3.34) e (3.35) obtidas de aceleradores. O fluxo integral de pions é

FIGURA 3.9 - Razão entre o fluxo integral de pions e o fluxo integral de hadrons. — Razão calculada com as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas de dados de aceleradores. - - - - - razão calculada com as $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas através do modelo teórico.



45 a 55% do fluxo integral de hadrons quando se emprega para as distribuições de energia fracionária dos pions aquelas obtidas do modelo teórico. A razão independe da energia.

Os fluxos integrais de hadrons calculados com as distribuições de energia dos pions, obtidas de dados de aceleradores (considerando válida a lei de "scaling") é cerca de 10% menor que os fluxos semelhantes calculados com as distribuições obtidas através do modelo teórico. Essa percentagem é para altitudes de montanha. Ao nível do mar essa percentagem é de 20%. A razão $\frac{F_H(x, \geq E) \text{ (modelo teórico)}}{F_H(x, \geq E) \text{ (dados de acelerador)}}$ independe da energia.

Os coeficientes C_N e C_{π} , obtidos usando-se as distribuições de energia fracionária dos pions dadas pelo modelo teórico, são respectivamente, 0,079 e 0,327. Esses coeficientes valem 0,074 e 0,280 quando se usa as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas de dados de aceleradores.

3.6 - CONCLUSÕES

Se as funções $f_{\pi\alpha}(E, E')$ ($\alpha = N$ ou π) forem homogêneas das variáveis E e E' e se a seção de choque inelástica das interações hadron-núcleo for constante, podemos concluir:

- a) - o expoente γ do espectro de energia dos píons é o mesmo a qualquer profundidade x e igual ao do espectro primário;
- b) - as variáveis x e E se separam na solução (3.31) e o fluxo de píons pode ser escrito como

$$F_{\pi}(x, E) = F_N(0, E) \cdot J(x) \quad ;$$

- c) - a parte do fluxo de píons, que é dependente da energia, permanece constante em qualquer profundidade, e igual ao espectro primário ($F_N(0, E)$).

O resultado (3.11) mostra que o fluxo diferencial de píons à profundidade x depende dos parâmetros:

- a) - o expoente γ do espectro primário
- b) - os livres percursos médios de interação dos nucleons e píons na atmosfera
- c) - o fator N_0 que aparece no fluxo primário
- d) - as funções homogêneas $f_{\pi\alpha}(\eta)$ ($\alpha = N$ ou π) que descrevem os espectros de energia dos píons produzidos nas interações dos hadrons incidentes α com núcleos.

Nas Figuras 3.6, 3.7 e 3.8 observam-se grandes discrepâncias entre os valores obtidos experimentalmente e aqueles calculados por intermédio da expressão (3.45).

Devemos lembrar que para os cálculos foram considerada

das válidas as seguintes hipóteses:

a) - $\sigma_{\alpha N}^{in} = \text{constante}; \quad \alpha = N \text{ ou } \pi$

b) - $F_N(0, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$

c) - $f_{NN}(\eta) d\eta = 1 d\eta$

d) - $f_{\pi\alpha}(E, E') = f_{\pi\alpha}(\eta = E/E')$.

CAPÍTULO IV

DIFUSÃO DOS PÍONS NA ATMOSFERA NO CASO DA SEÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA

No capítulo anterior comparamos os fluxos integrais de hadrons (nucleons+píons) em várias profundidades, obtidos analiticamente, com os encontrados em experiências com câmaras de emulsões nucleares expostas em montanhas. Considerando um espectro primário da forma $F_N(0,E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)}$; uma seção de choque inelástica das interações hadron-núcleo constante; a validade da lei de similaridade ("scaling") para a produção múltipla de hadrons e uma distribuição uniforme ("flat") para a elasticidade do nucleon no intervalo (0,1), verificamos que os resultados de nossos cálculos não concordam com os experimentais.

Como mencionado no Capítulo II, a partir da década de 70 começaram a aparecer evidências do aumento da seção de choque com a energia do hadron incidente.

O intuito do presente capítulo é estudar a difusão dos píons na atmosfera utilizando uma equação diferencial unidimensional semelhante à do Capítulo III. Vamos considerar que a seção de choque inelástica das interações (N-A) e (π -A) cresça com a energia de acordo com

$$\sigma_{in}(E) = \sigma_{in}^0 (1 + a \ln E/E_0) ; E_0 = 1 \text{ TeV} \quad (4.1)$$

4.1 - EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS PÍONS CARREGADOS NA ATMOSFERA

A equação diferencial que descreve a difusão dos píons na atmosfera, para este caso, é

$$\frac{\partial F_{\pi}(x, E)}{\partial x} = \frac{F_{\pi}(x, E)}{\lambda_{\pi}(E)} + P_{\pi^{\pm}}^{NN}(x, E) + P_{\pi^{\pm}}^{\pi\pi}(x, E) \quad , \quad (4.2)$$

onde

$$P_{\pi^{\pm}}^{NN}(x, E) = \int_{E'_{\min}}^{E'_{\max}} \frac{F_N(x, E')}{\lambda_N(E')} f_{\pi N}(E, E') dE' \quad (4.3)$$

e

$$P_{\pi^{\pm}}^{\pi\pi}(x, E) = \int_{E'_{\min}}^{E'_{\min}} \frac{F_{\pi}(x, E')}{\lambda_{\pi}(E')} f_{\pi\pi}(E, E') dE' \quad . \quad (4.4)$$

Se as funções $f_{\pi\alpha}(E, E')$, $\alpha = N$ ou π , forem homogêneas das variáveis E e E' , então as expressões (4.3) e (4.4) podem ser reescritas em função de $\eta = E/E'$, como

$$P_{\pi^{\pm}}^{NN}(x, E) = \int_0^{(1-\eta_N)} \frac{F_N(x, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta)} f_{\pi N}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (4.5)$$

e

$$P_{\pi^{\pm}}^{\pi\pi}(x, E) = \int_0^1 \frac{F_{\pi}(x, E/\eta)}{\lambda_{\pi}(E/\eta)} f_{\pi\pi}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad , \quad (4.6)$$

onde η é a elasticidade média do nucleon na atmosfera e $(1-\eta) = K_N$ (inelasticidade média do nucleon na atmosfera).

Na expressão (4.5) consideramos que a energia mínima do nucleon incidente, disponível para a produção dos píons car

regados, é proporcional à energia E do nucleon após a interação (nucleon líder), $E'_{\min} = E/K_N$. Na expressão (4.6), a função $f_{\pi\pi}(\eta)$ é composta de duas partes, $f_{\pi\pi}(\eta) = f_{\pi\pi}^1(\eta) + f_{\pi\pi}^2(\eta)$, onde $f_{\pi\pi}^1(\eta)$ é a parte correspondente ao pión líder e $f_{\pi\pi}^2(\eta)$ corresponde à soma dos outros píons, resultantes da interação pión-núcleo.

A solução da equação (4.2) deve satisfazer à condição de contorno

$$F_{\pi}(0, E) = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Como já mencionado no capítulo anterior e visto em detalhes no Apêndice F, a desintegração dos píons carregados em múons e as contribuições para o fluxo de píons das reações dos mésons K (K^{\pm}) e de outras partículas elementares com núcleos, não serão consideradas.

4.2 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DOS PÍONS CARREGADOS

Até a presente data a equação (4.2) não foi resolvida exatamente, não tendo sido apresentada uma solução compacta como a que consta no Capítulo II para o caso da difusão dos nucleons na atmosfera. Várias tentativas foram feitas ⁽¹¹⁹⁻¹²⁰⁾, porém, todas as soluções encontradas são aproximadas. Desde que a solução aproximada de Grigorov para os nucleons é uma solução razoável (dentro de um erro de 10-20%), como foi visto no Capítulo II, usaremos como ponto de partida, para o fluxo dos píons, sua primeira aproximação, que é escrita assim

$$F_{\pi_1}(x, E) = N_0 \bar{E}^{(\gamma+1)} \frac{C_N}{\lambda_N^0} \frac{e^{-x/L_{\pi}(E)} - e^{-x/L_N(E)}}{1/L_N^0 - 1/L_{\pi}^0}, \quad (4.8)$$

onde

$$C_N = \int_0^{K_N} \eta^\gamma f_{\pi N}(\eta) d\eta \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{L_N(E)} = \frac{1 - C_{NN}}{\lambda_N(E)} \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{L_{\pi}(E)} = \frac{1 - C_{\pi}}{\lambda_{\pi}(E)} \quad (4.11)$$

e

$$\frac{1}{\lambda_{\alpha}(E)} = \frac{1 + a \ln E/E_0}{\lambda_{\alpha}^0}, \quad \alpha = N \text{ ou } \pi, \quad a_{\pi} = a_N = a.$$

A solução (4.8) satisfaz à condição de contorno, $F_{\pi}(0, E) = 0$, e resulta na solução exata para $a = 0$.

A partir da expressão (4.8), vamos obter uma segunda aproximação. No cálculo da razão de produção dos pions carregados a partir da reação (N-N), expressão (4.5), vamos usar nossa solução exata, $F_N(x, E)$; e na obtenção da razão de produção dos pions a partir da reação (π -N), expressão (4.6), usaremos a solução aproximada, $F_{\pi_1}(x, E)$.

Substituindo as expressões (2.26) e (4.8) na equação diferencial (4.2) nós obtemos

$$\left\{ \frac{e^{-x/L_N(E)}}{L_N(E)} - \frac{e^{-x/L_{\pi}(E)}}{L_{\pi}(E)} \right\} = - \left\{ \frac{e^{-x/L_{\pi}(E)} - e^{-x/L_N(E)}}{\lambda_{\pi}(E)} \right\} + \frac{N_0}{A} \frac{e^{-x/\lambda_N(E)} (1-\alpha_N)^{-(Z_N+1)}}{\lambda_N(E)} \int_0^{K_N} d\omega f_{\pi N}(\omega) \phi(x, E, \omega) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e^{-x/L_{\pi}(E)}}{\lambda_{\pi}(E)} \int_0^1 \eta^{\gamma + ax/L_{\pi}^0} \left(1 - \frac{a\lambda_{\pi}(E)}{\lambda_{\pi}^0} \ln \eta \right) f_{\pi\pi}(\eta) d\eta - \\
 & - \frac{e^{-x/L_N(E)}}{\lambda_{\pi}(E)} \int_0^1 \eta^{\gamma + ax/L_N^0} \left(1 - \frac{a\lambda_{\pi}(E)}{\lambda_{\pi}^0} \ln \eta \right) f_{\pi\pi}(\eta) d\eta ,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde

$$A = N_0 \frac{C_N}{\lambda_N^0} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_{\pi}^0}} \right) \tag{4.13}$$

$$\alpha_N = (1-K_N)^{\gamma} \left(1 - (1-K_N)^{ax/\lambda_N^0} \right)$$

$$Z_N = \frac{1 + a \ln E/E_0}{a \ln 1/(1-K_N)}$$

$$e^{\phi(x, E, \omega)} = \omega^{\gamma + ax/\lambda_{\omega}^0} (1 - \alpha_N)^{-\frac{\ln \omega}{\ln(1-K_N)}} \left(1 - \frac{a\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} \ln \omega \right) \tag{4.14}$$

Chamando

$$\delta_{\alpha} = \frac{ax}{L_{\alpha}^0} , \quad \alpha = N \text{ ou } \pi \tag{4.15}$$

e agrupando de um lado os termos como fator $e^{-x/L_N(E)}$ e do outro lado aqueles que tenham o fator $e^{-x/L_{\pi}(E)}$, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
 & e^{-x/L_{\pi}(E)} \left\{ -\frac{1}{L_{\pi}(E)} + \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} - \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} \phi_{\pi\pi}^{\delta_{\pi}} \right\} = e^{-x/L_N(E)} \\
 & \cdot \left\{ -\frac{1}{L_N(E)} + \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} - \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} \phi_{\pi\pi}^{\delta_N} + \frac{C}{\lambda_N(E)} e^{-\frac{x(1-K_N)^{\gamma}}{\lambda_N(E)}} \cdot (1 - \alpha_N)^{-(1+Z_N)} \right. \\
 & \left. \cdot \phi_{\pi N}^{\delta_N^*} \right\} , \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

onde

$$\phi_{\pi\pi}^{\delta\alpha} = \int_0^1 \eta^{\gamma+\delta\alpha} \left(1 - \frac{a\lambda_\alpha(E)}{\lambda_\alpha^0} \ln\eta \right) f_{\pi\pi}(\eta) d\eta, \quad \alpha = (N \text{ ou } \pi) \quad (4.17)$$

$$\phi_{\pi N}^{\delta N*} = \int_0^{K_N} f_{\pi N}(\omega) d\omega \omega^{\gamma + \frac{ax}{\lambda_N^0}} (1-\alpha_N)^{-\frac{\ln\omega}{\ln(1-K_\omega)}} \left(1 - \frac{a\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} \ln\omega \right) \quad (4.18)$$

e

$$C = \frac{\lambda_N^0 \left(\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0} \right)}{C_N} \quad (4.19)$$

Definindo, agora, as grandezas

$$\beta_1 = \{C_\pi - \phi_{\pi\pi}^{\delta\pi}\} / (1-C_\pi) \quad (4.20)$$

$$\beta_2 = \{C_\pi - \phi_{\pi\pi}^{\delta N}\} / (1-C_\pi) \quad (4.21)$$

e

$$\beta_3 = \{C_N - e^{-x(1-K_N)^{\gamma/\lambda_N(E)}} \cdot (1-\alpha_N)^{-(X_N+1)} \phi_{\pi N}^{\delta N*}\} / C_N \quad (4.22)$$

obtemos

$$\frac{e^{-x/L_\pi(E)}}{L_\pi^0} \beta_1 = e^{-x/L_N(E)} \beta_4 \left(\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0} \right) \quad (4.23)$$

onde

$$\beta_4 = -\beta_3 + \frac{\beta_2}{L_\pi^0 / L_N^0 - 1} \quad (4.24)$$

A equação (4.23) mostra-nos que a expressão (4.8) não é solução da equação diferencial (4.2). Vamos, então, obter uma 2ª aproximação, da forma

$$F_{\pi_2}(x, E) = F_{\pi_1}(x, E) + A\phi(x)\bar{E}^{(\gamma+1)} \quad (4.25)$$

Substituindo (4.25) em (4.2) e usando o resultado (4.23) obtemos

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -\frac{\phi(x)}{\lambda_{\pi}(E)} + \phi(x) \int_0^1 \frac{\eta^{\gamma} f_{\pi\pi}(\eta) d\eta}{\lambda_{\pi}(E/\eta)} + K(x, E) \quad (4.26)$$

onde

$$K(x, E) = e^{-x/L_N(E)} \beta_4 \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_{\pi}} \right) - \frac{e^{-x/L_{\pi}(E)} \beta_1}{L_{\pi}^0} \quad (4.27)$$

Como a integral $\int_0^1 \eta^{\gamma} f_{\pi\pi}(\eta) d\eta \left(1 - \frac{a\lambda_{\pi}(E)}{\lambda_0} \ln \eta \right)$ pode ser aproximada numericamente a $\int_0^1 \eta^{\gamma} f_{\pi\pi}(\eta) d\eta = C_{\pi}$, a equação (4.26) fica

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -\frac{\phi(x)}{L_{\pi}(E)} + K(x, E) \quad (4.28)$$

A equação diferencial (4.28) é facilmente solúvel com resultado ⁽¹²¹⁾

$$\phi(x) = \int_0^x e^{-(x-t)/L_{\pi}(E)} K(t, E) dt \quad (4.29)$$

que pode ser reescrita usando a expressão (4.27) como

$$\phi(x) = e^{-x/L_\pi(E)} \left(\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0} \right) \int_0^x \left\{ e^{-t \left(\frac{1}{L_N(E)} - \frac{1}{L_\pi(E)} \right)} \beta_4 - \beta_1 \frac{1}{\frac{L_\pi^0}{L_N^0} - 1} \right\} dt \quad (4.30)$$

O fluxo diferencial de pions em 2ª aproximação é

$$F_{\pi_2}(x, E) = A \bar{E}^{(\gamma+1)} \left\{ \left(e^{-x/L_\pi(E)} - e^{-x/L_N(E)} \right) + e^{-x/L_\pi(E)} \left(\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0} \right) \int_0^x \psi(t) dt \right\} \quad (4.31)$$

onde

$$\psi(t) = e^{-t \left(\frac{1}{L_N^0} - \frac{1}{L_\pi^0} \right)} \beta_4 E^{\delta_N - \delta_\pi} - \frac{\beta_1}{\frac{L_\pi^0}{L_N^0} - 1} \quad (4.32)$$

A expressão (4.31) é uma solução aproximada da equação diferencial (4.2), e resulta na solução exata para $a = 0$. Também, analisando a expressão de $F_{\pi_2}(x, E)$ verifica-se que as variáveis x e E se misturam e que o expoente γ do espectro de pions varia em função da profundidade x . A segunda aproximação difere da primeira de (10-15%), dependendo muito pouco da energia (para valores de energia entre 1 e 250 TeV); assim, julgamos que essa aproximação mais a solução exata para o fluxo dos nucleons pode ser usada na comparação com os fluxos de hadrons (nucleons + pions) obtidos experimentalmente.

4.3 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A fim de comparar nossos resultados com os obtidos de experiências com câmaras de emulsões nucleares, expostas em altitudes de montanhas, necessitamos levar em consideração alguns elementos essenciais já mencionados, em sua maioria, na Seção 3.4 do Capítulo III.

(a) - Raios Cômicos Primários

Como mencionado no Capítulo III, vamos usar como fluxo de nucleons no topo da atmosfera o obtido por Bhattacharyya ⁽¹¹⁰⁾ ,

$$F_N(0,E) = 2,237 \times \bar{E}^{(2,7)} (\text{cm}^2 \times \text{s} \times \text{st} \times \text{GeV/nucleon})^{-1}$$

expressão (3.33).

(b) - Distribuição de Elasticidade dos Nucleons

Em nossos cálculos analíticos a elasticidade do nucleon foi considerada constante ($\eta = 0,5$); entretanto, é sabido que ela flutua muito. Vamos usar uma distribuição uniforme no intervalo (0,1) para a elasticidade, o que reproduz aproximadamente os resultados experimentais.

A Figura 4.1 mostra os resultados de cálculos de simulação para se conhecer o efeito da distribuição de elasticidade, os quais são apresentados na forma de uma razão entre os fluxos integrais com elasticidade constante e com a distribuição uniforme.

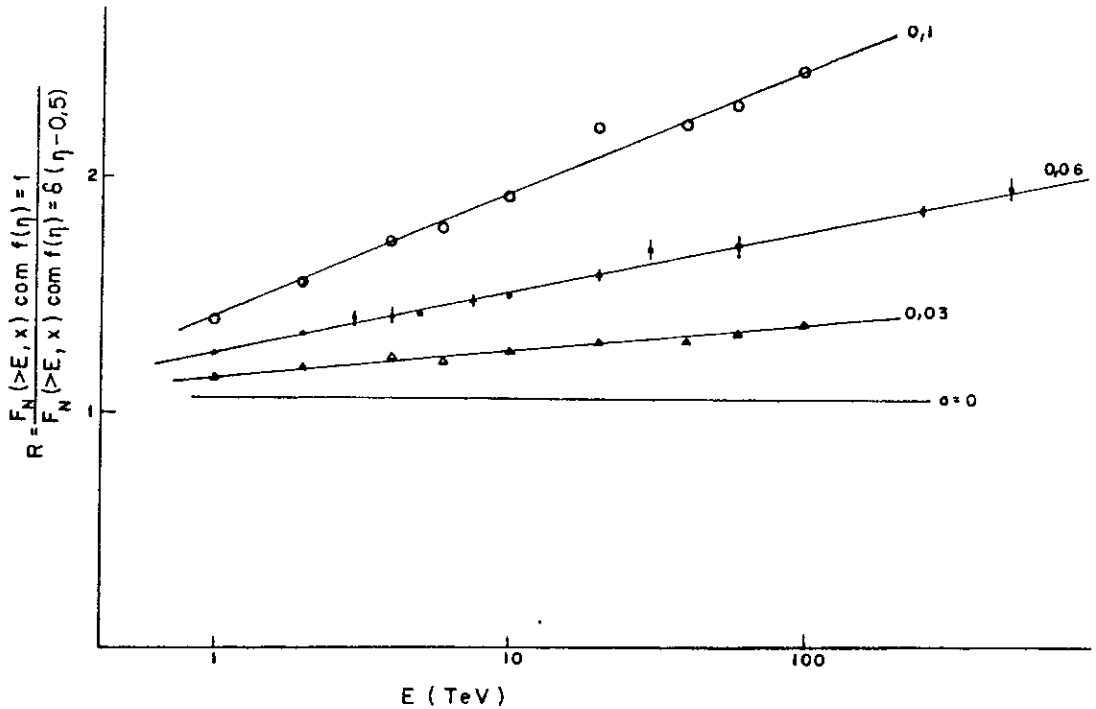


FIGURA 4.1 - Razão entre os fluxos integrais de nucleons calculados com a distribuição uniforme de elasticidade e com a elasticidade constante e igual a 0,5. A razão entre ambos é estimada para valores de $\gamma = 1,7$, $x = 540 \text{ g/cm}^2$ e $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$.

Do gráfico, notamos que a razão cresce à medida que os valores de a e da energia crescem.

Na Tabela 4.1 mostramos os valores numéricos de A e de B em

$$\text{Razão} = \frac{F_N(x, \geq E) f(\eta) = 1}{F_N(x, \geq E) (\eta = \text{constante})} = A \log E + B \quad (4.33)$$

para valores de $a = 0, 0,03, 0,06, 0,10$ e $x = 520 \text{ g/cm}^2$ (Kanba la), $x = 540 \text{ g/cm}^2$ (Chacaltaya) e $x = 650 \text{ g/cm}^2$ (Fuji), os quais são utilizados em nossos cálculos.

TABELA 4.1 - Razão entre o fluxo integral de nucleons calculado com $f_{NN}(\eta) = 1$ e o fluxo integral de nucleons calculado com $\eta = 0,5$. $R = F_N(x \geq E) (f(\eta)=1) / F_N(x, \geq E) (\eta=0,5) = A \log E + B$.

x = 540 g/cm ² ; $\gamma = 1,7$		
a	A	B
0	0	1,526
0,03	0,056	1,575
0,06	0,128	1,627
0,10	0,262	1,702
x = 650 g/cm ² ; $\gamma = 1,7$		
0	0	1,663
0,03	0,074	1,750
0,06	0,172	1,848
0,10	0,38	1,970
x = 520 g/cm ² ; $\gamma = 1,7$		
0	0	1,502
0,03	0,049	1,550
0,06	0,119	1,596
0,10	0,240	1,660

(c) - Píons Secundários

Como já explicado no Capítulo III, as distribuições de energia fracionária dos píons, que são usadas em nossos cálculos, foram obtidas de duas maneiras distintas. Em uma delas, usamos dados de distribuições de $x (= 2P_{||}^*/\sqrt{s})$ obtidos em aceleradores supondo válida a lei de "scaling" e na outra usando um modelo teórico (Apêndice E). As expressões (3.34), (3.35) e (3.36) representam as distribuições $f_{\pi N}(\eta)$ e $f_{\pi\pi}(\eta)$ dos píons secundários oriundos das reações nucleon-núcleo e píon-núcleo.

(d) - Inelasticidade dos Raios γ

Usaremos $k_\gamma = 0,25$ como já foi mencionado no Capítu
lo III.

FIGURA 4.2 - Espectro integral de hadrons em Kanbala ($x=520 \text{ g/cm}^2$) . (o e \bullet ref. (115)). — Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas de dados de aceleradores supondo válida a lei de "scaling". Os diferentes fluxos foram obtidos com $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$, $\eta = 0,5$.

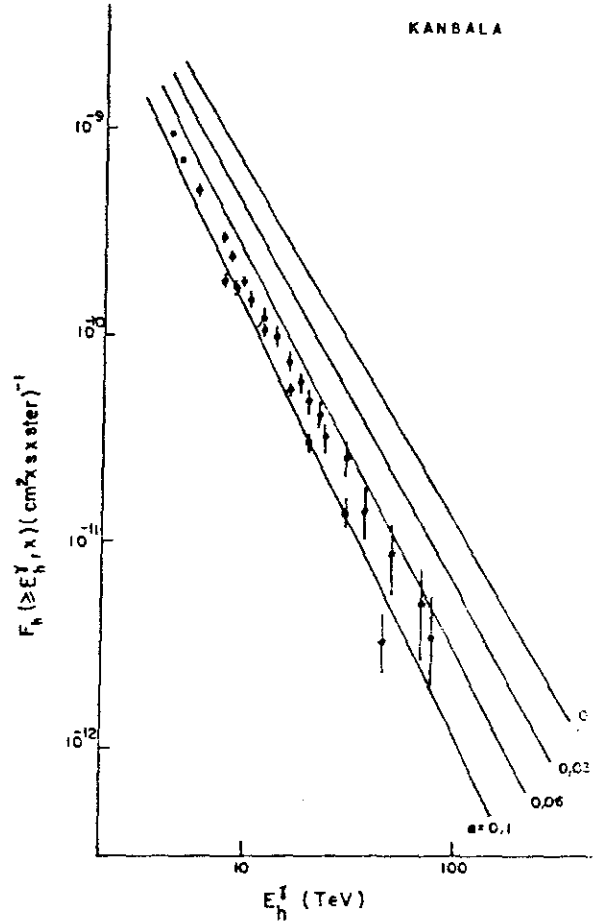
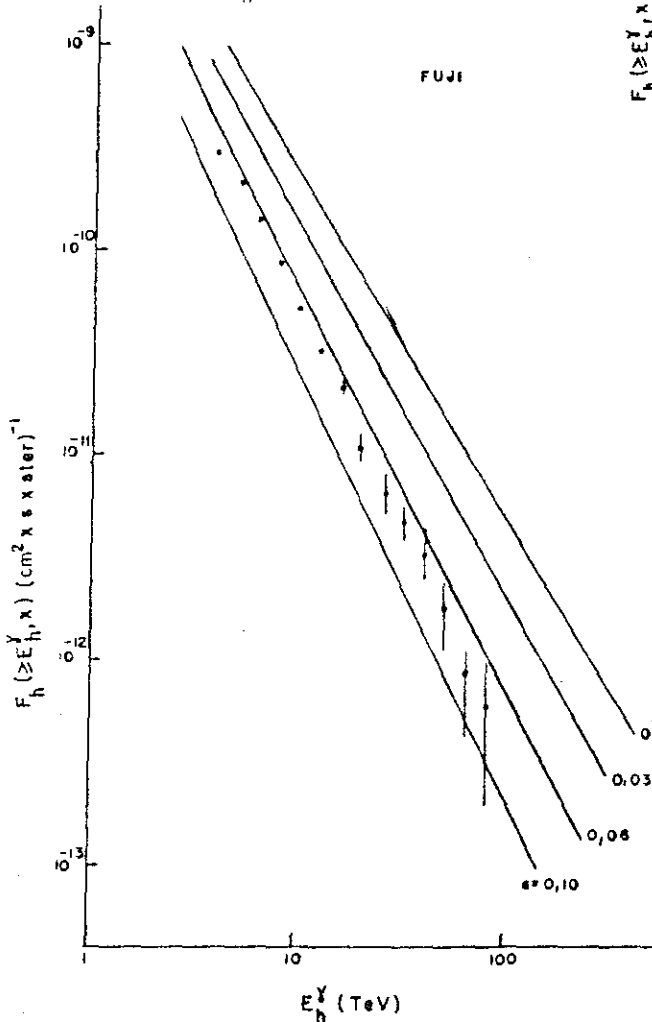


FIGURA 4.3 - Espectro integral de hadrons em Fuji ($x = 650 \text{ g/cm}^2$) . (\bullet ref. (116)). — Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas de dados de aceleradores supondo válida a lei de "scaling". Os fluxos foram obtidos com $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$, $\eta = 0,5$.

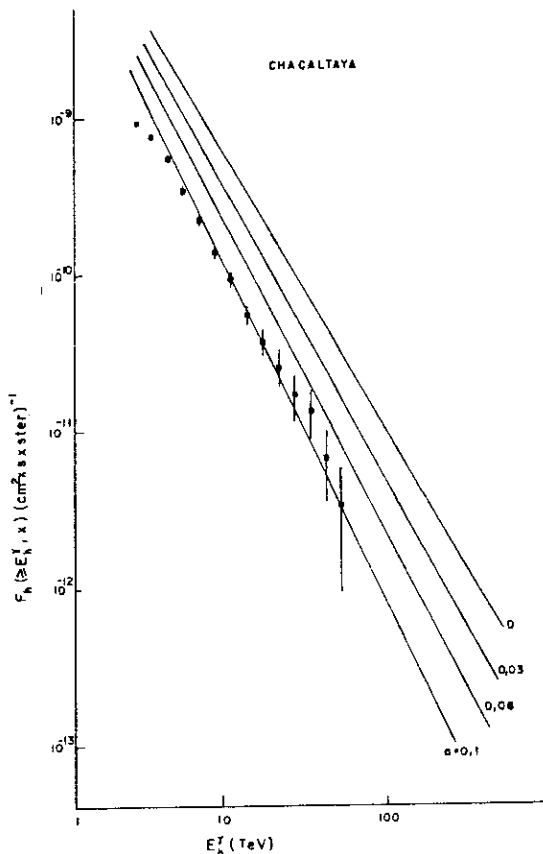


FIGURA 4.4 - Espectro integral de hadrons em Chacaltaya ($x=540\text{g/cm}^2$) (\square ref. (117)). — Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi Q}(\eta)$ de dados de acelerador supondo válida a lei de "scaling". Os fluxos foram obtidos com $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80\text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112\text{g/cm}^2$ e $\eta = 0,5$.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 representam, respectivamente, comparações de nossos resultados com os fluxos integrais de hadrons obtidos experimentalmente em Kanbala, Fuji e Monte Chacaltaya.

Os dados antigos de Chacaltaya foram corrigidos por N. Arata (117) levando-se em conta o efeito Landau-Pomeranchuk e o efeito de espaçamento e são os que constam da Fig. 4.4.

Os fluxos integrais de hadrons foram calculados usando as distribuições de energia fracionária dos píons dadas pelas fórmulas (3.34) e (3.35). Nas três figuras aparecem, além dos pontos experimentais, quatro curvas para valores de $a = 0, 0,03, 0,06$ e $0,10$ levando-se em conta os itens (a)-(d) acima mencionados.

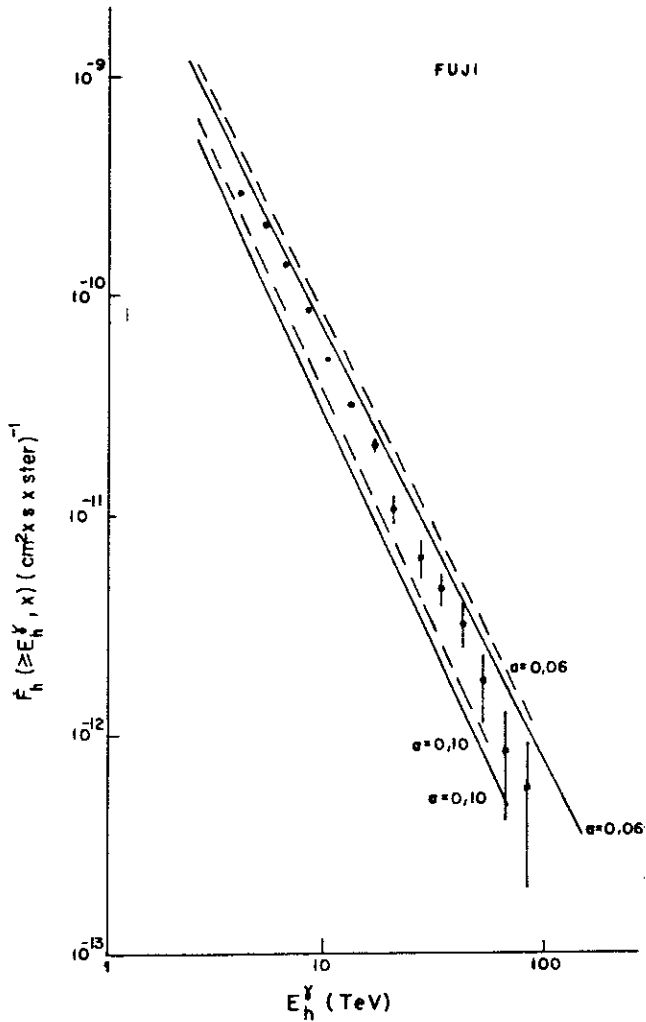


FIGURA 4.6 - Espectro integral de hadrons em Chacaltaya ($x=540\text{g/cm}^2$). (\square ref. (117)). — Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de dados de acelerador supondo válida a lei da "scaling". ---- Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico (bola de fogo). Os fluxos foram calculados com $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$ e $\eta = 0,5$.

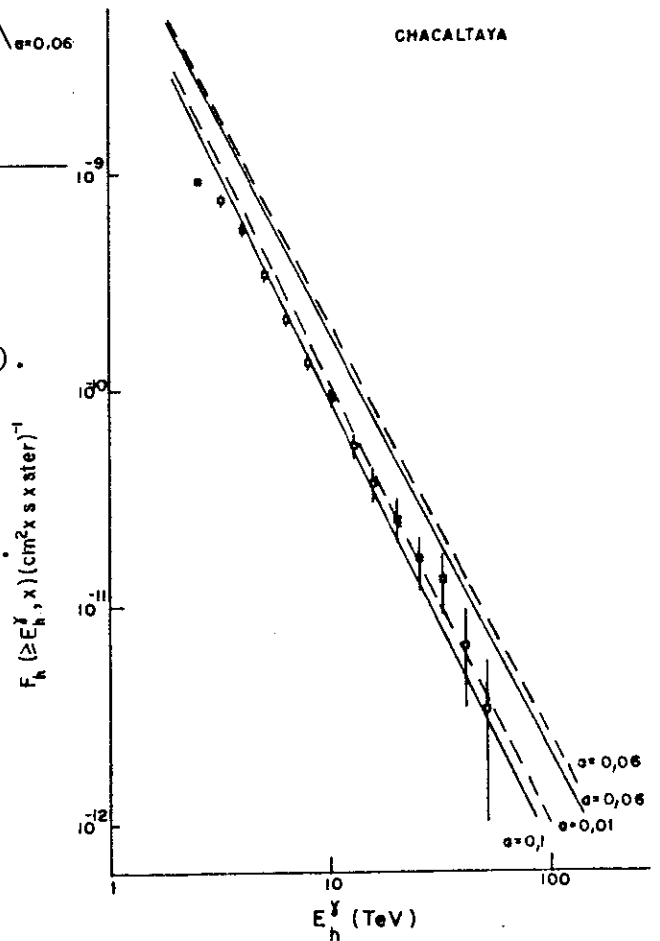


FIGURA 4.5 - Espectro integral de hadrons em Fuji ($x = 650 \text{ g/cm}^2$) (\bullet ref. (116)). — Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de dados de acelerador supondo válida a lei de "scaling". ---- Fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico (bola de fogo). Os fluxos foram estimados com $\gamma=1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112\text{g/cm}^2$, e $\eta = 0,5$.

As Figuras 4.5 e 4.6 representam, respectivamente, comparações entre os resultados experimentais obtidos no Monte Fuji e no Monte Chacaltaya, com os fluxos integrais de hadrons calculados de duas maneiras:

- i) usando as distribuições de energia fracionária dos píons, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas com dados de aceleradores supondo válida a lei de "scaling", na região de energia dos raios cósmicos [fórmulas (3.34) e (3.35)];
- ii) usando as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas do modelo teórico mostrado em detalhes no Apêndice E [fórmula (3.36)].

Nas duas figuras aparecem, além dos dados experimentais, duas curvas para valores de $a = 0,06$ e $a = 0,10$ representando o fluxo integral de hadrons calculado com as distribuições (i) e duas curvas, para os mesmos valores de a , representando o fluxo integral de hadrons calculado com as distribuições (ii).

4.4 - DISCUSSÃO

4.4.1 - Contribuição dos Píons

Vamos discutir, aqui, como se comporta o fluxo de píons em função da energia (para um valor fixo da profundidade atmosférica) e em função da profundidade (para um valor constante da energia).

Na Figura 4.7 mostramos a razão $\frac{F_{\pi}(x, \geq E)}{F_H(x, \geq E)}$ para valores de $a = 0,03, 0,06, 0,10$ e para um valor constante da ener

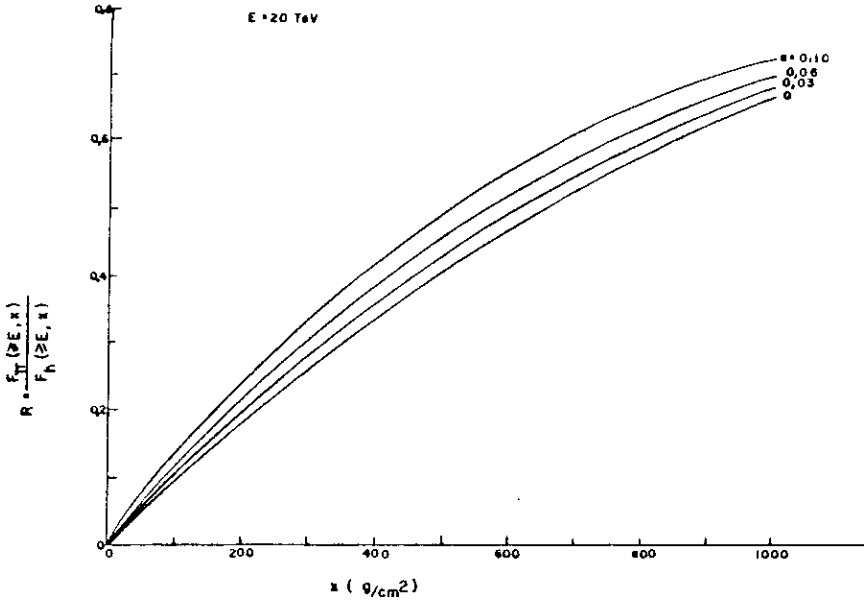


FIGURA 4.7 - Razão entre o fluxo integral de pions e o fluxo integral de hadrons. — razão estimada com as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas de dados de acelerador supondo válida a lei de "scaling". Os diferentes fluxos foram calculados para valores de $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$ e $\eta = 0,5$.

gia, $E = 20 \text{ TeV}$, em função da profundidade atmosférica, x (g/cm^2). Os fluxos integrais foram calculados usando as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, dadas pelas expressões (3.34) e (3.35). Da figura notamos que a razão aumenta para valores crescentes de x e do coeficiente a . Em altitudes de montanha, $540 \text{ g/cm}^2 \leq x \leq 700 \text{ g/cm}^2$, e para valores de a compreendidos entre 0,06 e 0,10 a razão varia entre 0,45 e 0,60.

Nas Figuras 4.8 e 4.9 aparecem curvas representando a mesma razão, $\frac{F_\pi(x, \geq E)}{F_H(x, \geq E)}$, para valores de $a = 0, 0,06$ e $0,10$ em função da energia. Na Figura 4.8 a razão é calculada na profundidade $x = 540 \text{ g/cm}^2$ e na 4.9 à profundidade $x = 650 \text{ g/cm}^2$. Os fluxos integrais foram calculados usando as distribuições de energia fracionária dos pions, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, dadas pelas expressões (3.34) e (3.35), e também usando as referi -

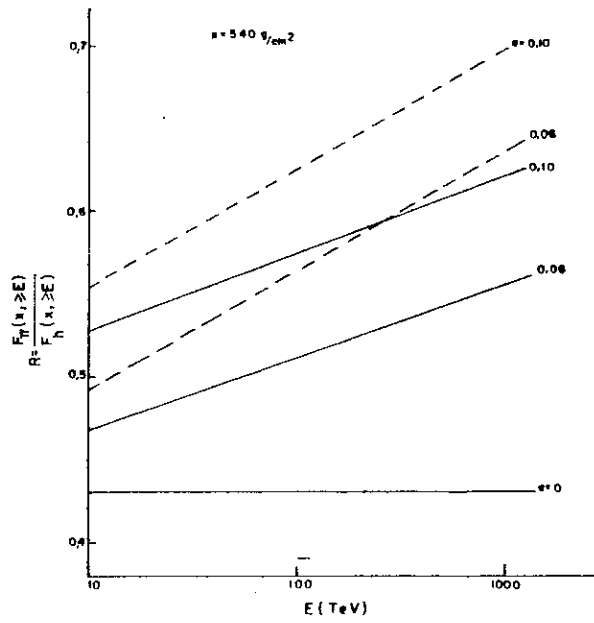


FIGURA 4.8 - Razão entre o fluxo integral de pions e o fluxo integral de hadrons em Chacaltaya ($x = 540 \text{ g/cm}^2$). — razão estimada com as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas de dados de acelerador. ---- Razão estimada com as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas através do modelo teórico (bola de fogo). Os fluxos foram calculados com $\gamma = 1,7$, $\eta = 0,5$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$ e $\lambda_{\pi}^0 = 112 \text{ g/cm}^2$.

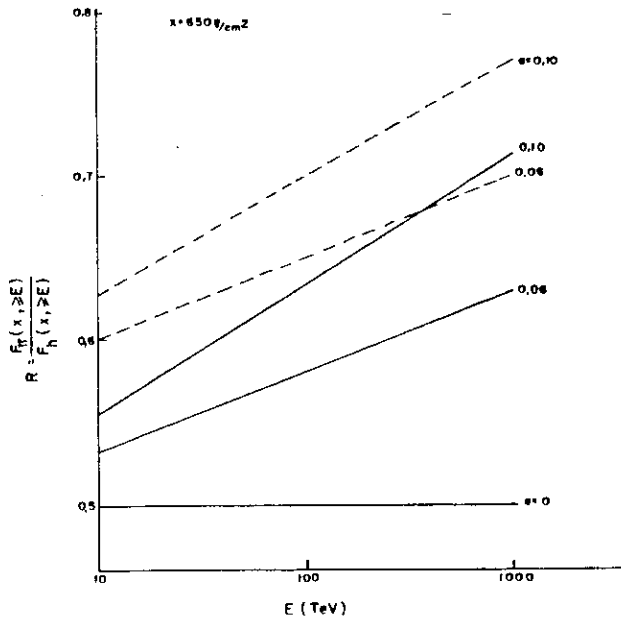


FIGURA 4.9 - Razão entre o fluxo integral da pions e o fluxo integral de hadrons em Fuji ($x = 650 \text{ g/cm}^2$). — Razão estimada com as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas de dados de acelerador. ---- Razão estimada com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico (bola de fogo). Os fluxos foram calculados com $\gamma = 1,7$, $\eta = 0,5$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$ e $\lambda_{\pi}^0 = 112 \text{ g/cm}^2$.

das distribuições dadas pela expressão (3.36).

No caso da seção de choque inelástica constante, $a = 0$, a razão permanece constante para qualquer valor da energia; ela cresce para valores crescentes da energia e do coeficiente a , quando a seção de choque aumenta com a energia.

Da figura notamos, também, que a razão calculada através do modelo teórico é sempre maior que a mesma razão calculada usando as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas de dados de aceleradores [expressão (3.34) e (3.35)].

4.4.2 - Comparação com a Solução de Grigorov

Nesta seção fazemos uma comparação entre o fluxo integral de hadrons obtido por N.L. Grigorov ⁽⁸²⁾ e o obtido em nosso cálculos.

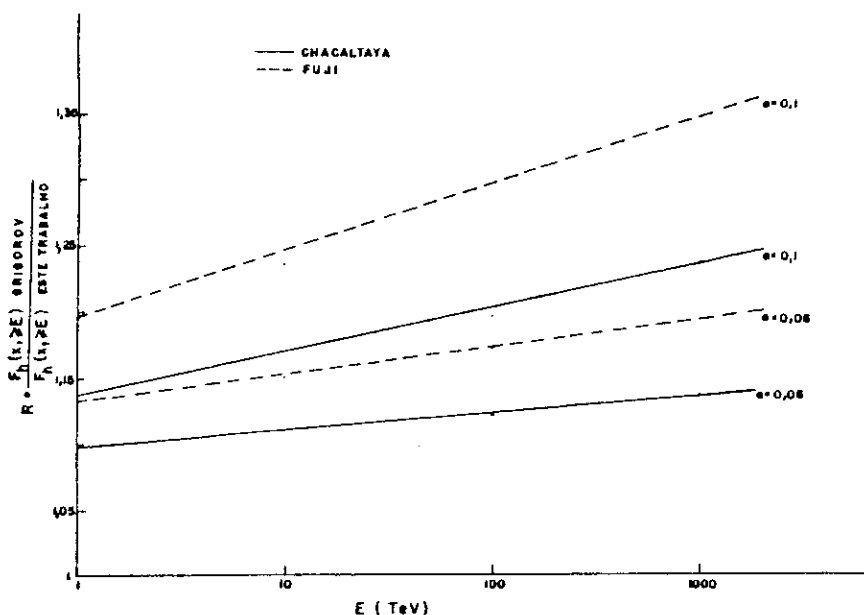


FIGURA 4.10 - Comparação entre os fluxos integrais de hadrons obtido por Grigorov e o obtido de nossos cálculos. A razão entre ambos é estimada com $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$, $\eta = 0,5$. — Chacaltaya ($x = 540 \text{ g/cm}^2$). ---- Fuji ($x = 650 \text{ g/cm}^2$).

Na Figura 4.10 mostramos a razão $\frac{F_H(x, \geq E) \text{ (Grigorov)}}{F_H(x, \geq E) \text{ (este trabalho)}}$, calculada para valores do coeficiente $a = 0,06$ e $0,10$ e $x = 540$ e 650 g/cm^2 . Os fluxos integrais foram obtidos usando as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, dadas pelas expressões (3.34) e (3.35). Da figura vemos que a razão cresce para valores crescentes da energia e de a . Assim o fluxo integral de hadrons obtido por N.L. Grigorov é maior que o nosso em 15 e 20% para valores de a entre 0,06 e 0,10 e energias variando de 1 a 100 TeV. Esse resultado já era esperado, pois, da Fig. 2.6 notamos que o expoente γ do fluxo dos nucleons é menor para a solução obtida por N.L. Grigorov.

4.4.3 - Variação da Razão $\frac{F_H(x, \geq E) \text{ (modelo teórico)}}{F_H(x, \geq E) \text{ (dados de acelerador)}}$ com a Energia

Vamos mostrar, aqui, como varia, com a energia, a razão entre o fluxo integral de hadrons calculado usando as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas através de um modelo teórico, "bolas de fogo", [fórmula (3.36)] e o fluxo integral semelhante calculado usando as distribuições de energia dos pions dadas pelas expressões (3.34) e (3.35).

As expressões (3.34) e (3.35) foram obtidas, como já exposto no Capítulo III, das distribuições de $x = 2P_{||}^*/\sqrt{s}$ supondo válida a lei de "scaling" na região de energia dos raios cósmicos.

Na Figura 4.11 aparecem seis curvas que representam a razão $\frac{F_H(x, \geq E) \text{ (Bola de fogo)}}{F_H(x, \geq E) \text{ ("scaling")}}$, para valores de $a = 0, 0,06, 0,10$ e $x = 540$ e 650 g/cm^2 , em função da energia.

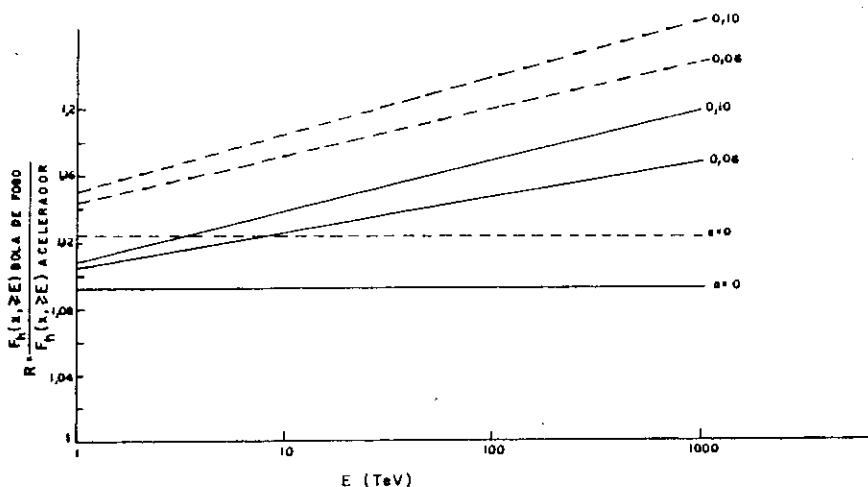


FIGURA 4.11 - Razão entre o fluxo integral de hadrons calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ de dados de acelerador e o fluxo semelhante calculado com $f_{\pi\alpha}(\eta)$ do modelo teórico (bola de fogo). — Chacaltaya ($x = 540 \text{ g/cm}^2$). --- Fuji ($x = 650 \text{ g/cm}^2$). A razão é estimada para valores de $\gamma = 1,7$, $\lambda_N^0 = 80 \text{ g/cm}^2$, $\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$ e $\eta = 0,5$.

Quando a seção de choque inelástica é constante, $a = 0$, a razão independe da energia, variando só com a profundidade x . Quando a seção de choque inelástica cresce com a energia, a razão aumenta para valores crescentes da energia e do coeficiente a .

4.4.4 - Desvio do Valor de $a = 0.06$

Da Figura 2.2, vista no Capítulo II, o valor de $a = 0,06$ é o que melhor se ajusta para descrever o comportamento crescente da seção de choque inelástica das interações hadron-núcleo com a energia. Os valores de $a = 0.03$ e $a = 0.10$ representam, respectivamente, os limites inferior e superior dentro dos quais a seção de choque pode variar com a energia.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, apresentadas no final da Seção 4.3, entretanto, mostram-nos que os dados experimentais ficam entre os valores de $a = 0.06$ e $a = 0.10$.

Embora exista alguma incerteza na escolha dos parâmetros e das distribuições, como mostraremos na próxima sub-seção, apresentamos, aqui, duas possíveis explicações para esse desvio do valor mais aceito de "a".

(a) - Violação de "Scaling"

Analisamos os dados obtidos por meio de experiências de baixas energias, em acelerador, para obter a distribuição de energia dos píons, e consideramos que a lei de "scaling" permanece válida para energias de raios cósmicos. Entretanto, já se sabe que o "scaling" não é válido na região central ⁽¹⁰²⁾ ($\eta < 0.05$) e que é possivelmente violado ($\sim 10-20\%$) na região angular bem para frente (região de fragmentação) ⁽¹⁰³⁾, ⁽¹⁰⁴⁾. Se esse efeito for incluído o fluxo de píons decrescerá.

(b) - Elasticidade Média dos Nucleons

Nós consideramos que a distribuição de elasticidade do nucleon é uniforme nas colisões (p-ar), como nas interações p-p. Ela pode, entretanto, ser alterada dando um valor médio menor que 0,5, devido principalmente ao efeito nuclear que ocorre nas interações (p-ar) ⁽¹²²⁾. Se tal efeito for incluído o fluxo de nucleons decresce ^(123,124).

Em nossos cálculos usamos alguns parâmetros e distribuições, como por exemplo λ_N^0 , λ_π^0 , γ , $f_{\pi\alpha}(\eta)$ etc.. Vamos, agora,

mostrar como esses parâmetros e distribuições variam de autor para autor.

(a) - Livre Percurso Médio de Interação do Hadron α (N ou π) na Atmosfera

Neste trabalho utilizamos o valor de 80 g/cm² para o livre caminho médio de interação do nucleon na atmosfera, correspondendo a uma seção de choque inelástica (p-ar) de aproximadamente 300 mbarn. Para o livre percurso médio de interação dos píons (π^\pm) na atmosfera, usamos o valor de 112g/cm², baseando-nos em dados obtidos em aceleradores ⁽¹²⁵⁾, que dão:

$$\frac{\sigma_{p-A}^{abs}}{\sigma_{\pi-A}^{abs}} = 1,40 \pm 0,02 .$$

Como $\sigma^{in}/\sigma^{abs} \cong 0.85$, podemos esperar que a razão $\sigma_{p-A}^{in}/\sigma_{\pi A}^{in}$ é, também, de aproximadamente 1,40. Portanto $\lambda_{\pi}^0 = 1,40 \times \lambda_N^0 = 112 \text{ g/cm}^2$.

Outros autores, entretanto, usam em seus cálculos valores de λ_N^0 e λ_{π}^0 diferentes dos nossos, como se pode verificar na Tabela 4.2.

TABELA 4.2 - Livre percurso médio dos nucleons e píons na atmosfera.

Autor	λ_N^0 (g/cm ²)	λ_{π}^0 (g/cm ²)	$R=\lambda_{\pi}^0/\lambda_N^0$
N.L. Grigorov (82)	80	112	1,40
A. Ohsawa (129)	80	120	1,50
M. Shibata (126),(118)	80	96	1,20
T.K. Gaisser (127)	86	120	1,40
J.A. Wrotniak (127)	75	110	1,47
K. Kasahara (128)	83	110	1,30
Este trabalho	80	112	1,40

(b) - Variação, com a Energia, do Livre Percurso Médio de Interação do Hadron α

Na Tabela 4.3 constam alguns exemplos da variação, com a energia, dos livres percursos médios de interação dos nucleons e dos píons na atmosfera.

TABELA 4.3 - Variação do livre percurso médio do hadron α (N ou π^\pm) na atmosfera com a energia. Os dados mostrados são para os nucleons; para os píons carregados multiplicamos os $\lambda_N(E)$ pela razão que consta da tabela.

Autor	$\lambda_N(E)$ (g/cm ²)	λ_N^0 (g/cm ²)	E_0 (GeV)	a	$R = \lambda_\pi^0 / \lambda_N^0$
M. Shibata (126)	$\lambda_N^0 / (E/E_0)^a$	80	10^3	0,06	1,20
K. Kasahara (128)	$\lambda_N^0 (E/E_0)^a$	83	10^3	0,056	1,30
T.K. Gaisser (127)	$\lambda_N^0 / (1+a(\ln E/E_0)^{1,8})$	86	100	0,009	1,40
A. Liland (130)	$\lambda_N^0 / (1+a \ln^2 E/E_0)$	96,4	10	0,005	—
J.A. Wrotniak (127)	$\lambda_N^0 / (1+a \log_{10}(E/E_0))$	75	10^4	0,20	1,47
N.L. Grigorov (82)	$\lambda_N^0 / (1+a \ln E/E_0)$	80	20	0,038	1,40
Este trabalho	$\lambda_N^0 / (1+a \ln E/E_0)$	80	10^3	0,06	1,40

(c) - Distribuição de Energia Fracionária dos Píons, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, nas Reações Hadron-Núcleo

Nas Figuras 3.3 e 3.5, apresentadas no Capítulo III, mostramos algumas distribuições de energia fracionária dos píons nas reações (N-A) e (π -A), respectivamente, que têm sido usadas por vários autores. Nessas figuras, constam, também, as distribuições, $f_{\pi\alpha}(\eta)$, usadas neste trabalho.

(d) - Fluxo de Raios C3smicos Prim3rios

Na Tabela 4.4 mostramos alguns exemplos da amplitude e do 3ndice espectral do fluxo diferencial prim3rio obtidos por diferentes autores.

TABELA 4.4 - Amplitude e 3ndice do espectro diferencial prim3rio para v3rios intervalos de energia e v3rios autores.

AUTOR	$\Delta E(\text{GeV})$ intervalo de energia	amplitude do espectro $10^4 (\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{ster} \cdot \text{GeV/N})^{-1}$	3ndice do espectro γ
Grigorov et al. (131)	$50 - 10^3$	2,64	2,65
Bhattacharyya and Pal (132)	$10^2 - 10^5$	2,40	2,70
Das and De (133)	$50 - 10^4$	2,06	2,70
Das and De (134)	$50 - 10^4$	2,48	2,70
Baruch et al. (135)	$10^3 - 10^5$	—	2,72
Volkova et al. (136)	$50 - 10^3$	1,85	2,65
Olejniczak et al. (137)	$10^2 - 10^6$	1,90	2,60
Yodh et al. (138)	$10^3 - 10^6$	1,14	2,64
Battacharyya (110)	$10^3 - 10^6$	2,24	2,70

Em nossos c3lculos usamos a amplitude e o 3ndice de pot3ncia do espectro prim3rio obtidos por Battacharyya (110).

Como j3 mencionamos, na se33o anterior, existem algumas ambigüidades em especificar os par3metros e as distribuiç3es que aparecem nos c3lculos da difus3o dos hadrons (nucleons e p3ions) na atmosfera. A grande discrep3ncia (cerca de 300-400%) entre os fluxos medidos em altitudes de montanha e os calculados considerando a se33o de choque constante pode, por3m, ser explicada, como mostra este trabalho, tomando-se em conta corretamente a depend3ncia, com a energia das se33es de choque das intera33es hadr3nicas.

CONCLUSÕES

Neste trabalho mostramos que as equações íntegro-diferenciais que descrevem a difusão dos nucleons e píons na atmosfera podem ser resolvidas analiticamente pelo método das aproximações sucessivas. Ele é um método alternativo ao usualmente empregado, o das transformadas de Mellin.

Considerando constante a seção de choque inelástica das interações hadrônicas, o método das aproximações sucessivas nos conduz às soluções únicas das equações de difusão unidimensionais dos nucleons e píons na atmosfera. Para o caso da seção de choque crescente com a energia, obtivemos uma solução formal para o fluxo dos nucleons em diferentes profundidades atmosféricas. Esse resultado torna-se muito simples e compacto no caso em que o livre percurso médio de interação dos nucleons na atmosfera, λ_N , diminua com a energia na forma,

$$\frac{1}{\lambda_N(E)} = \frac{1 + a \ln(E/E_0)}{\lambda_N^0} \quad , \quad E_0 = 1 \text{ TeV} \quad .$$

Essa solução, devido à sua simplicidade, permite que se analise a influência que o aumento da seção de choque com a energia possa ter sobre o fluxo dos nucleons a várias profundidades. Em geral verifica-se que o fluxo de nucleons decresce e o índice de potência do espectro de energia dos nucleons cresce quando se considera o livre percurso médio variando logarithmicamente com a energia. Essa tendência é mais acentuada para va

lores maiores da profundidade atmosférica x .

Da solução encontrada, considerando a seção de choque crescente com a energia, podemos concluir que:

- a) O expoente γ do espectro energético dos nucleons cresce com a profundidade atmosférica, mais rapidamente que a dependência linear encontrada por Grigorov;
- b) A distribuição de probabilidades do nucleon sofrer n interações até atingir a profundidade x (g/cm^2) não é mais a de Poisson, como no caso em que a seção de choque é constante. Ela depende, agora, da profundidade x , da energia do nucleon incidente e também da forma como a seção de choque varia com a energia;
- c) A solução não pode mais ser colocada na forma, $F_N(x,E) = F_N(0,E) \cdot G(x)$, como no caso em que $\lambda_N = \text{constante}$.

Examinamos a precisão da solução aproximada de N.L. Grigorov, comparando-a com nossa solução exata. A solução aproximada dá um fluxo 10-20% maior que o nosso, para valores de energia entre 1 e 1000 TeV, em altitudes de montanha e com o coeficiente a (que mede o aumento da seção de choque com a energia) igual a 0,06. À medida que o valor da profundidade atmosférica cresce, a diferença entre a solução de Grigorov e a nossa torna-se ainda maior.

Resolvemos, também, uma equação diferencial unidimensional que descreve a difusão dos píons na atmosfera, obtendo uma solução aproximada para o caso em que a seção de choque inelástica das interações píon-núcleo cresce de maneira análoga às das interações nucleon-núcleo. Como, para os nucleons, a

solução aproximada de Grigorov não se afasta muito da solução exata, usamos um procedimento análogo ao empregado por Grigorov para obter uma solução aproximada para os pions.

A solução encontrada nos permite efetuar uma comparação com a solução exata obtida quando se considera a seção de choque constante. Dessa comparação podemos concluir que:

- a) O fluxo de pions obtido considerando a seção de choque crescente com a energia não pode ser colocado na forma $F_{\pi}(x,E) = F_N(0,E)H(x)$;
- b) O expoente γ do espectro de energia dos pions cresce, com a profundidade atmosférica, quando usamos $\sigma_{in} = \sigma_{in}(E)$;
- c) O fluxo integral de pions calculado com a seção de choque σ^{in} crescente é sempre menor que o fluxo semelhante obtido no caso da $\sigma^{in} = \text{constante}$. Essa diferença aumenta para valores crescentes de x , da energia e do coeficiente a .

Em nossos cálculos usamos duas maneiras diferentes para descrever as distribuições de energia dos pions carregados surgidos das reações do hadron α (nucleon ou pion) com núcleos:

- a) usando dados de acelerador suponto válida a lei de "scaling" na região de energia dos raios cósmicos;
- b) usando um modelo teórico que se baseia na formação de um estado intermediário (bola de fogo) que decai isotropicamente logo após a sua formação e que é regido por uma distribuição de momentos do tipo Bose-Einstein. Esse modelo permite obter as distribuições $f_{\pi\alpha}(E,E')$ na forma $F_{\pi\alpha}(n=E/E')$, onde E' é a energia do hadron α (N ou π) incidente. Ele é,

portanto, compatível com a propriedade de "scaling" suposta válida em nossos cálculos.

A razão entre o fluxo integral de píons e o fluxo integral de hadrons (nucleons+píons) foi estimada. Em altitudes de montanha, $(500 \leq x \leq 700) \text{ g/cm}^2$, a razão varia entre 0,40 e 0,50 e independe da energia, quando se considera a seção de choque constante. Para o caso da seção de choque inelástica, $\sigma^{\text{in}} = \sigma^{\text{in}}(E)$, essa razão cresce com a energia, com a profundidade atmosférica e com o coeficiente a . Para $a = 0,06$ e $x = 540 \text{ g/cm}^2$ a razão é de 0,42 para $E = 1 \text{ TeV}$ e de 0,55 para $E = 1000 \text{ TeV}$, quando se usa as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta)$ obtidas de dados de acelerador. A razão está entre 0,48 e 0,63, para os mesmos valores de x , a e E , quando se calcula os fluxos usando as distribuições $f_{\pi\alpha}$ dadas pelo modelo teórico.

Comparamos nosso fluxo integral de hadrons com a solução de N.L. Grigorov. Para valores de energia entre 1 e 1000 TeV, $a = 0,06$ e em altitudes de montanha, o fluxo obtido por Grigorov é 10 a 20% maior que o nosso.

O fluxo integral de hadrons calculado com a distribuição $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas com o modelo teórico, é 10 a 23% maior que o mesmo fluxo calculado usando as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta)$, obtidas de dados de aceleradores. Esse resultado é estimado para valores de $a = 0,06$, $500 \leq x \leq 650 \text{ g/cm}^2$ e $1 \leq E \leq 1000 \text{ TeV}$.

Comparando-se os fluxos integrais de hadrons, obtidos experimentalmente em Kanbala, Fuji e Chacaltaya, com os calculados usando nossa solução, notamos que os últimos se ajustam aos experimentais para valores do coeficiente a entre 0,06 e 0,10. Esse resultado mostra-nos um desvio do valor

$a = 0,06$, que é o mais aceito para descrever o aumento, com a energia, da seção de choque inelástica das interações hadrônicas.

Os fluxos calculados analiticamente podem ser ajustados aos experimentais para valores do coeficiente "a" mais próximos de 0,06 se considerarmos a violação da lei do "scaling", ou se usarmos para a elasticidade média dos nucleons um valor inferior a 0,5, que foi o utilizado em nossos cálculos. O valor de $\langle \eta \rangle = 0,5$ é o geralmente empregado para a elasticidade média do próton nas reações p-p. As reações que ocorrem na atmosfera são, entretanto, entre os nucleons da radiação cósmica primária e núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera. A diminuição do valor da elasticidade se deve principalmente aos efeitos nucleares que acontecem nas reações nucleon-núcleo.

Apesar da ambiguidade na escolha dos parâmetros e das distribuições que são empregados em nossos cálculos, parece-nos que os dois fatores acima citados são os que podem ajustar os fluxos integrais de hadrons calculados analiticamente aos experimentais para valores do coeficiente a próximos de 0,06.

Atualmente, estamos calculando os fluxos integrais de hadrons (nucleons+píons) usando o modelo CKP⁽¹³⁹⁾, para o qual não vale a lei do "scaling". Alguns resultados preliminares mostram-nos que o fluxo integral de hadrons diminui, ajustando-se as curvas experimentais para valores de a entre 0,06 e 0,07.

Estamos, também, calculando os fluxos integrais de

muons e da cascata eletromagnética para os quais há melhores dados experimentais. Com isso estaremos capacitados a tirar melhores conclusões a respeito das interações hadrônicas na região de energia de 1 a 1000 TeV.

APÊNDICE A

FLUXO DIFERENCIAL DE NUCLEONS PARA O CASO
DA SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE

a) Convergência da sucessão $Y_{N_n}(x, E)$

a.1) Se $G(E)$ for uma função contínua, positiva e limitada, ($G(E) \leq M$), no intervalo $[E_{\min}, \infty)$ com $E_{\min} > 0$, $E \in [E_{\min}, \infty)$ e M uma constante positiva qualquer.

a.2) Se existir a integral $\int_0^1 f_{NN}(\eta)/\eta \, d\eta = A$, com as distribuições, $f_{NN}(\eta)$, positivas. Então, a série, $S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{N_n}(x, E)$, é composta de termos positivos, onde a n-ésima soma parcial, $Y_{N_n}(x, E)$ é dada por:

$$Y_{N_n}(x, E) = \sum_{v=1}^n \left\{ \frac{(x/\lambda_N^0)^v}{v!} \int_0^1 \frac{d\eta_1}{\eta_1} f_{NN}(\eta_1) \dots \int_0^1 \frac{d\eta_v}{\eta_v} f_{NN}(\eta_v) \cdot G\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_v}\right) \right\} + G(E) \quad , \quad (A.1)$$

e é limitada no retângulo $T: [0 \leq x \leq X \text{ e } E_{\min} \leq E_0 \leq E_{\max}]$.

Assim,

$$Y_{N_n}(x, E) \leq M \sum_{v=0}^n \frac{(x/\lambda_N^0)^v}{v!} A^v < M e^{AX/\lambda_N^0} \quad (A.2)$$

a convergência uniforme da exponencial em T, assegura a convergência uniforme da série $S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{N_n}(x, E)$ para uma função $Y_N(x, E)$ que é escrita como

$$Y_N(x, E) = G(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{d\eta_1}{\eta_1} f_{NN}(\eta_1) \dots \int_0^1 \frac{d\eta_n}{\eta_n} f_{NN}(\eta_n) \cdot G\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n}\right) \quad (A.3)$$

b) Unicidade da Solução

Considerando a existência de duas soluções $Y_N^1(x, E)$ e $Y_N^2(x, E)$ da equação (1.8), ambas contínuas em T. A diferença entre as soluções deve satisfazer a equação integral

$$u_N(x, E) = \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^x dt \int_0^1 u_N(t, E/\eta) f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (A.4)$$

Substituindo iterativamente em (A.4) a função $u_N(x, E)$ sobre o sinal da integração por seu valor próprio dado por (A.4) nós obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} u_N(x, E) &= \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^x dt_1 \int_0^1 f_{NN}(\eta_1) \frac{d\eta_1}{\eta_1} u_N(t_1, E/\eta_1) = \dots \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{\lambda_N^{0n}} \int_0^x dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \int_0^1 f_{NN} \frac{d\eta_1}{\eta_1} \dots \\ &\quad \int_0^1 f_{NN}(\eta_n) \frac{d\eta_n}{\eta_n} \cdot u_N\left(t_n, \frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n}\right) \end{aligned}$$

onde $u_N(t, E)$ é a diferença de duas funções contínuas e limitadas no intervalo $E_{\min} \leq E \leq \infty$, com $E_{\min} > 0$. Podemos escrever $|u_N(t, \frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n})| \leq M_1$, onde M_1 é alguma constante positiva, máximo de $u_N(t, E)$ em T . Para qualquer X fixo,

$$|u_N(x, E)| \leq M_1 \frac{(X/\lambda_N^0)^n}{n!} A^n$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $|u_N(x, E)| \rightarrow 0$, para qualquer $X > 0$ fixo em $0 \leq x < \infty$. Logo $F_{\pi}^1(x, E) = F_{\pi}^2(x, E)$.

c) Síntese da Solução

Vamos mostrar que a soma $Y_N(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{N_n}(x, E)$ em T é efetivamente a solução da equação (1.8)

$$\frac{\partial Y_N(x, E)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{Y_N(x, E/\eta)}{\lambda_N^0} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

o lado esquerdo pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_N(x, E)}{\partial x} &= \sum_{K=0}^{\infty} (x/\lambda_N^0)^K \cdot \frac{1}{\lambda_N^{0K} K!} \int_0^1 d\eta_0 \frac{f(\eta_0)}{\eta_0} \dots \\ &\dots \int_0^1 d\eta_K \frac{f_{NN}(\eta_K)}{\eta_K} G\left(\frac{E}{\eta_0 \dots \eta_K}\right) \end{aligned} \quad (A.5)$$

o lado direito é escrito como

APÊNDICE B

FLUXO DIFERENCIAL DE NUCLEONS PARA O CASO
DA SEÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA

a) Convergência da Sucessão $Y_{N_n}(x, E)$

Supondo $G(E)$ uma função contínua, positiva e limitada ($(G/E) \leq M$), onde M é uma constante arbitrária qualquer e $E \in [E_{\min}, \infty)$, então

$$|Y_{N_n}(x, E)| \leq M \sum_{v=0}^n \frac{\Gamma(Z+1+v)}{\Gamma(Z+1)v!} \alpha^v, \quad (B.1)$$

onde $\alpha = \frac{1}{n} (1 - e^{-\delta(\eta)x})$. O lado direito da expressão (B.1) é a soma parcial de ordem n de $M(1-\alpha)^{-(Z+1)}$, com raio de convergência $\rho = 1$. Assim a soma parcial, $Y_{N_n}(x, E)$, representada por

$$Y_{N_n}(x, E) = \sum_{v=0}^n \frac{\Gamma(Z+1+v)}{\Gamma(Z+1)v!} \frac{G(E/\eta^v)}{\eta^v} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^v$$

converge absoluta e uniformemente para a solução da equação diferencial (2.6). A função $Y_N(x, E)$, solução de (2.6), é analítica e única dentro do círculo de convergência definido pela desigualdade $x \leq \frac{\ln(1-\eta)}{\delta(\eta)}$. A condição $|\alpha| < 1$ é sempre satisfeita para $x > 0$ e $\delta(\eta) > 0$ e com a elasticidade η , definida no intervalo $0 < \eta_{\min} \leq \eta \leq 1$.

b) Síntese da Solução

Vamos mostrar agora, que $Y_N(x, E)$ dada por (2.22) é so lução da equação (2.6) para uma seção de choque inelástica cre scente com a energia na forma $\sigma_N(E) = \sigma_N^0 (1 + a \ln E/E_0)$, $E_0 = 1$ TeV.

Substituindo $Y_N(x, E)$ em (2.6), obtemos para o lado es querdo dessa equação, a expressão

$$\frac{\partial Y_N(x, E)}{\partial x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{G(E/\eta^j)}{\eta^j} \frac{\Gamma(Z+1+j)}{\Gamma(Z+1)j!} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^{j-1} \cdot (j \cdot \delta(\eta)) e^{-\delta(\eta)x} \quad , \quad (B.2)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial Y_N(x, E)}{\partial x} = \sum_{K=1}^{\infty} \delta(\eta) e^{-\delta(\eta)x} K(1 - e^{-\delta(\eta)x})^{K-1} \frac{\Gamma(Z+1+K)}{\Gamma(Z+1)K!} \frac{G(E/\eta^K)}{\eta^K} \quad (B.3)$$

e para o lado direito de (2.6) a expressão

$$\frac{Y_N(x, E/\eta)}{\eta \lambda_N(E/\eta)} e^{-\delta(\eta)x} = e^{-\delta(\eta)x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{G(E/\eta^{j+1})}{\eta^{j+1} j!} \delta(\eta) (Z+1) \cdot \frac{\Gamma(Z+1+j+1)}{\Gamma(Z+2)} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^j \quad , \quad (B.4)$$

que pode ser colocada na forma

$$\frac{Y_N(x, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta) \eta} e^{-\delta(\eta)x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta(\eta)x} \delta(\eta) (j+1)}{\eta^{j+1} (j+1)!} G(E/\eta^{j+1}) \quad .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{\Gamma(Z+1(j+1))}{\Gamma(Z+1)} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^j = \\
 = & \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Gamma(Z+1+K)}{K! \Gamma(Z+1)} \frac{G(E/\eta^K)}{\eta^K} (1 - e^{-\delta(\eta)x})^{K-1} \cdot (K \cdot \delta(\eta) e^{-\delta(\eta)x})
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

As expressões (B.3) e (B.4) são idênticas e assim $Y_N(x,E)$ é a solução da equação (2.6) como desejávamos demonstrar.

APÊNDICE C

FLUXO DIFERENCIAL DE PÍONS PARA O CASO DA
SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE

a) Convergência da Sucessão $Y_{\pi n}(x, E)$

a.1) Convergência da série $B_{\pi}^{n P_{\pi}^{NN}}(x, E)$

Considere $G(E)$ uma função contínua, positiva e limitada ($G(E) \leq M$) no intervalo $0 < E_{\min} \leq E < \infty$. Supondo, além disso, que a integral

$$C_1 = \int_0^1 f_{\pi N}(\eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

exista, com $f_{\pi N}(\eta)$ funções contínuas e positivas definidas no intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, então, $B_{\pi}^{n P_{\pi}^{NN}}(x, E)$, que é escrita como

$$B_{\pi}^{n P_{\pi}^{NN}}(x, E) = \frac{1}{\lambda_N^0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(E) a_{n, \nu}(x) \quad (C.1)$$

onde

$$b_{\nu}(E) = \int_0^1 f_{\pi N}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} G\left(\frac{E}{\eta(1-K_N)^{\nu}}\right) \quad (C.2)$$

e

$$a_{n, \nu}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/\lambda_{\pi}^0} a_{\nu}(x-t) dt \quad (C.3)$$

com

$$a_{\nu}(x-t) = \frac{e^{-(x-t)/\lambda_N^0}}{\nu!} \left(\frac{x-t}{\lambda_N^0(1-K_N)} \right)^{\nu} \quad (C.4)$$

converge absoluta a uniformemente em T: $(0 \leq x \leq X, E_{\min} \leq E \leq \infty)$, pois

$$\frac{1}{\lambda_N^0} \left| a_{n,\nu}(x) b_{\nu}(E) \right| \leq \frac{MC_1}{\lambda_N^0} \frac{X^n}{n!} R_{\nu}(X) \quad (C.5)$$

e a série $\sum_{\nu=0}^{\infty} R_{\nu}(X) \rightarrow e^{\beta_N X}$, com $\beta_N = \frac{1}{\lambda_N^0(1-K_N)}$.

a.2) Convergência da série $A^n B^n P_{\pi}^{NN}(x, E)$

Considere agora a série $A^n B^n P_{\pi}^{NN}(x, E)$, que pode ser colocada como

$$A^n B^n P_{\pi}^{NN}(x, E) = \frac{1}{\lambda_N^0 \lambda_{\pi}^{0n}} \int_{\epsilon_1}^1 \dots \int_{\epsilon_n}^1 \frac{f_{\pi\pi}(\eta_1) \dots f_{\pi\pi}(\eta_n)}{\eta_1 \dots \eta_n} d\eta_1 \dots \dots d\eta_n \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n,\nu}(x) b_{\nu} \left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n} \right) \quad (C.6)$$

onde os ϵ_i são números arbitrariamente escolhidos em $0 \leq \epsilon_i \leq 1$. Como $b_{\nu}(E)$ é positiva e contínua para $E \geq E_{\min} > 0$, então,

$$\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n} \geq \frac{E_{\min}}{\eta_1 \dots \eta_n} \geq E_{\min} > 0 \quad .$$

A função $f_{\pi\pi}(\eta)/\eta$ é positiva, contínua para $\epsilon_i \leq \eta \leq 1$ e também as funções $a_{n,\nu}(x)$ são positivas e contínuas para $0 \leq x \leq X$. A série que aparece no integrando da expressão (C.6) é, portan-

to, absoluta e uniformemente convergente em T , como se pode mostrar a seguir,

$$|a_{n,v}(x)| \leq \frac{x^n}{n!} R_v(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq X$$

$$|b_v\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n}\right)| \leq MC_1 \quad \text{para } 0 < E_{\min} \leq E < \infty$$

a expressão (C.6) pode ser reescrita na forma,

$$I_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x, E) = \frac{1}{\lambda_0 \lambda_{\pi}^n} \sum_{v=0}^{\infty} a_{n,v}(x) b_{n,v,\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(E) \quad , \quad (C.7)$$

onde

$$b_{n,v,\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(E) = \int_{\varepsilon_1}^1 \dots \int_{\varepsilon_n}^1 \prod_{i=1}^n \frac{f_{\pi\pi}(\eta_i)}{\eta_i} d\eta_i \cdot b_v\left(\frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n}\right) \quad (C.8).$$

devemos, então, provar que $b_{n,v,\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(E) \xrightarrow{\varepsilon_i \rightarrow 0} b_{n,v}(E)$.

De fato, temos $|b_v(E)| \leq MC_1$ para $E \geq E_{\min} > 0$ e o integrando positivo de (C.8) é menor ou igual à função positiva

$$\phi(\eta_1 \dots \eta_n) = MC_1 \prod_{i=1}^n \frac{f_{\pi\pi}(\eta_i)}{\eta_i}$$

Como a integral $C_2 = \int_0^1 \frac{f_{\pi\pi}(\eta)}{\eta} d\eta$ existe, então

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \phi(\eta_1 \dots \eta_n) d\eta_1 \dots d\eta_n = MC_1 C_2^n$$

também existe. Isso é suficiente para garantir a convergência

absoluta e uniforme da integral $I_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$, logo,

$$A^n B^n P_\pi^{NN}(x, E) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} I_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x, E) = \frac{1}{\lambda_N^0 \lambda_\pi^0 n} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n, \nu}(x) \cdot b_{n, \nu}(E) \quad (C.9)$$

Como

$$|a_{n, \nu}(x)| \leq \frac{X^n}{n!} R_\nu(X)$$

e

$$|b_{n, \nu}(E)| \leq MC_1 C_2^n$$

a série, $A^n B^n P_\pi^{NN}(x, E)$, de termos positivos, converge absoluta e uniformemente em T , pois

$$\frac{1}{\lambda_N^0 \lambda_\pi^0 n} \left| \sum_{\nu} a_{n, \nu}(x) b_{n, \nu}(E) \right| \leq \frac{MC_1 C_2^n}{\lambda_N^0 \lambda_\pi^0 n} \frac{X^n}{n!} e^{\beta_N X}$$

e como $a_{n, \nu}(x)$ e $b_{n, \nu}(E)$ são funções contínuas em T , então $A^n B^n P_\pi^{NN}(x, E)$ é a soma de funções contínuas que converge absoluta e uniformemente em T .

$$\begin{aligned} \text{a.3) Mostrar que } (AB)^n P_\pi^{NN}(x, E) &= A^n B^n P_\pi^{NN}(x, E) = \\ &= B^n A^n P_\pi^{NN}(x, E) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} A^n (B^n P_\pi^{NN}) &= \frac{1}{\lambda_\pi^0 n} \int_{\varepsilon_1}^1 \dots \int_{\varepsilon_n}^1 \prod_{i=1}^n \frac{f_{\pi\pi}(\eta_i)}{\eta_i} d\eta_i \left(B^n P_\pi^{NN} \left(x, \frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n} \right) \right) \\ &= \frac{B^n}{\lambda_\pi^0 n} \int_{\varepsilon_1}^1 \dots \int_{\varepsilon_n}^1 \prod_{i=1}^n \frac{f_{\pi\pi}(\eta_i)}{\eta_i} d\eta_i P \left(x, \frac{E}{\eta_1 \dots \eta_n} \right) \end{aligned} \quad (C.10)$$

A igualdade (C.10) é verificada para ϵ_i números positivos arbitrários. Assim ambos os lados de (C.10) que são positivos tendem ao mesmo limite quando os ϵ_i tendem a zero, supondo, naturalmente, a existência do limite. Como já mostrado anteriormente, o limite do lado esquerdo existe e é igual a $A^n B^n P_\pi^{NN}(x, E)$, assim também existe o limite do lado direito que é $B^n A^n P_\pi^{NN}(x, E)$.

O limite de $A^n B^n P_\pi^{NN} = (AB)^n P_\pi^{NN}$ é facilmente verificável pois a ordem da integração em (C.10) é irrelevante.

a.4) Convergência da sucessão $Y_{N_n}(x, E) = BA^n B^n P_\pi^{NN}(x, E)$

A sucessão $BA^n B^n P_\pi^{NN}$ é absoluta e uniformemente convergente, pois,

$$\begin{aligned}
 BA^n B^n P_\pi^{NN} &= BAA^{n-1} B^{n-1} B P_\pi^{NN} = AB^n A^{n-1} B P_\pi^{NN} = A^n B^{n+1} P_\pi^{NN}(x, E) = \\
 &= \frac{1}{\lambda_N^0 \lambda_\pi^0 n} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+1, \nu}(x) b_{n, \nu}(E) \quad (C.11)
 \end{aligned}$$

e

$$BA^n B^n P_\pi^{NN}(x, E) < \frac{MC_1 C_2^n}{\lambda_N^0 \lambda_\pi^0 n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\beta_N x} < \frac{MC_1}{\lambda_N^0} \left(\frac{C_2 x}{\lambda_\pi^0}\right)^n \frac{x}{n!} e^{\beta_N x}$$

A convergência uniforme da exponencial em T, assegura a convergência absoluta e uniforme da série $Y_{N_n}(x, E) = BA^n B^n P_\pi^{NN}(x, E)$.

b) Síntese da Solução

Vamos mostrar, agora, que $F_\pi(x, E)$ dado por (3.12) satisfaz à equação (3.14). Integrando ambos os lados de (3.14)

obtemos a equação funcional

$$F_{\pi}(x, E) = - \frac{1}{\lambda_0} \int_0^x (1-A) F_{\pi}(t, E) dt + \int_0^x P_{\pi}^{NN}(t, E) dt \quad (C.12)$$

Dos sistemas de equações (3.15) e (3.16) obtemos

$$\frac{\partial F_{\pi_n}(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_{\pi_n}(x, E)}{\lambda_0} + P_{\pi}^{NN}(x, E) + \frac{A}{\lambda_0} F_{\pi_{n-1}}(x, E) \quad (C.13)$$

Integrando (C.13) obtemos

$$F_{\pi_n}(x, E) = \int_0^x \left\{ - \frac{1}{\lambda_0} F_{\pi_n}(t, E) + \frac{A}{\lambda_0} F_{\pi_{n-1}}(t, E) + P_{\pi}^{NN}(t, E) \right\} dt$$

portanto

$$\begin{aligned} F_{\pi}(x, E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\pi_n}(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left(- \frac{F_{\pi_n}(t, E)}{\lambda_0} + \frac{A}{\lambda_0} F_{\pi_{n-1}}(t, E) + \right. \\ &\quad \left. + P_{\pi}^{NN}(t, E) \right) dt = \\ &= \int_0^x \left\{ - \frac{(1-A)}{\lambda_0} F_{\pi}(t, E) + P_{\pi}^{NN}(t, E) \right\} dt \end{aligned} \quad (C.14)$$

pois, $F_{\pi_n}(x, E)$ e $\tilde{A}F_{\pi_{n-1}}(x, E)$ são funções contínuas, tendendo uniformemente em T para as funções contínuas $F_{\pi}(x, E)$ e $\tilde{A}F_{\pi}(x, E)$ respectivamente.

A expressão (C.14) prova que $F_{\pi}(x, E)$ satisfaz à equação (3.14).

c) Unicidade da Solução $F_{\pi}(x, E)$

Suponha, por hipótese, que existam duas soluções, $F_{\pi}^1(x, E)$ e $F_{\pi}^2(x, E)$ da equação (3.14) contínuas em T e ambas satisfazendo à condição de contorno $F_{\pi}^i(0, E) = 0$ ($i = 1$ ou 2). Então a diferença $\phi(x, E)$ entre elas deve satisfazer à equação homogênea

$$\phi(x, E) = \int_0^x - \frac{1}{\lambda_0^{\pi}} (1-A)\phi(t, E) dt \quad . \quad (C.15)$$

Substituindo iterativamente $\phi(t, E)$ sob o signo da integração por meio da (C.15) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \phi(x, E) &= - \int_0^x \frac{dt_1}{\lambda_0^{\pi}} (1-A)\phi(t_1, E) = \dots \\ &\dots = (-1)^n \int_0^x dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 \left(\frac{1-A}{\lambda_0^{\pi}}\right)^n \phi(t_1, E) \end{aligned}$$

Como $F_{\pi}^1(x, E)$ e $F_{\pi}^2(x, E)$ são contínuas em T , a diferença entre elas também é uma função contínua. Seja M o máximo de $\phi(x, E)$ em T . Assim,

$$|(1-A)\phi(t_1, E)| \leq |\phi(t_1, E)| + |A\phi(t_1, E)| \leq M(1+C)$$

e

$$|(1-A)^n \phi(t_1, E)| \leq M^n (1+C)^n$$

com

$$C = \int_0^1 \frac{f_{\pi\pi}(\eta)}{\eta} d\eta \quad ,$$

logo,

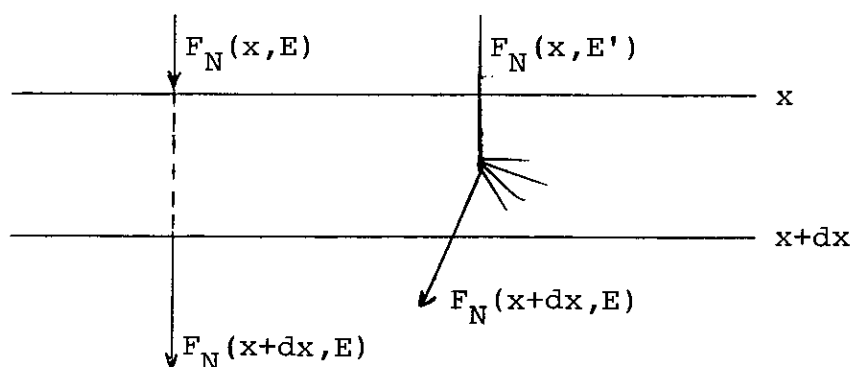
$$\begin{aligned} \phi(x, E) &= \frac{(-1)^n}{\lambda_0^n} \int_0^x dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 (1-A)^n \phi(t_1, E) = \\ &= \frac{(-1)^n}{\lambda_0^n} \int_0^x dt \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (1-A)^n \phi(t, E) \leq \left(\frac{M(1+C)}{\lambda_0} \right)^n \frac{X^n}{n!} . \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ (para X fixo), $\phi(x, E) \rightarrow 0$, e assim as duas soluções se igualam ($F_{\pi}^1(x, E) = F_{\pi}^2(x, E)$) para $(x, E) \in T$. Como T é arbitrário, a prova é completa.

APÊNDICE D

MONTAGEM DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DA
DIFUSÃO DOS NUCLEONS NA ATMOSFERA

D.1 - SEÇÃO DE CHOQUE CRESCENTE COM A ENERGIA



Vamos supor que o elemento de profundidade "dx" seja suficientemente pequeno, de modo que o nucleon ao atravessa-lo não sofra nenhuma ou uma só interação. Além disso vamos considerar que a probabilidade do nucleon sofrer uma interação em "dx" seja $dx/\lambda_N(E)$. Assim,

$$F_N(x+dx, E) dE = \left(1 - \frac{dx}{\lambda_N(E)}\right) F_N(x, E) dE + dE \int_E^{\infty} F_N(x, E') \cdot f_{NN}(E, E') \cdot \left(\frac{dx}{\lambda_N(E')}\right) dE' \quad , \quad (D.1)$$

onde $F_N(x+dx, E) dE$ é o fluxo de nucleons em $(x+dx)$ com energia entre E e $E+dE$, e $f_{NN}(E, E') dE$ é a distribuição de energia dos nucleons entre E e $E+dE$.

O primeiro termo do lado direito da equação (D.1) é o fluxo de nucleons que não sofreram interações em "dx", e o segundo termo é o fluxo de nucleons que colidiram uma só vez em "dx".

Supondo que as funções que representam as distribuições $f_{NN}(E, E')$ são homogêneas das variáveis E e E', então

$$f_{NN}(E, E') dE = f_{NN}(\eta = E/E') \frac{dE}{E} \quad . \quad (D.2)$$

Expandindo o lado esquerdo numa série de Taylor e considerando só os dois primeiros termos da mesma, obtemos

$$\begin{aligned} F_N(x+dx, E) &= F_N(x, E) + \frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} dx + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{dx}{\lambda_N(E)}\right) F_N(x, E) + \int_0^1 F_N\left(x, \frac{E}{\eta}\right) f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \frac{dx}{\lambda_N(E/\eta)} \quad , \end{aligned} \quad (D.3)$$

onde usamos a propriedade (D.2) na obtenção da expressão (D.3).

Procedendo as simplificações obtemos

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = \frac{-F_N(x, E)}{\lambda_N(E)} + \int_0^1 \frac{F_N(x, E/\eta)}{\lambda_N(E/\eta)} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad , \quad (D.4)$$

que é a equação unidimensional (2.4).

D.2 - SEÇÃO DE CHOQUE CONSTANTE

Nesse caso a expressão (D.4) se simplifica e resulta na equação (1.4),

$$\frac{\partial F_N(x, E)}{\partial x} = - \frac{F_N(x, E)}{\lambda_N^0} + \frac{1}{\lambda_N^0} \int_0^1 F_N(x, E/\eta) f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} , \quad (D.5)$$

e, nesse caso, a probabilidade de acontecer um choque em dx é igual a dx/λ_N^0 , independendo da profundidade atmosférica x .

bola de fogo é constante;

h) - no sistema em repouso da bola de fogo, os píons obedecem à distribuição de Bose-Einstein para os momentos (p^*);

$$\phi(p^*) dp^* \frac{d\Omega^*}{4\pi} = \frac{kp^{*2} dp^*}{e^{E^*/p_0 c} - 1} \frac{d\Omega^*}{4\pi} \quad , \quad (E.1)$$

onde

$p_0 c = kT$ (temperatura do estado intermediário em unidades de energia),

e

$k =$ fator de normalização.

- Distribuição de Energia dos Píons no Sistema de Laboratório

O espectro integral energético dos píons no sistema de laboratório é:

$$\begin{aligned} F_{\pi}(\geq E) &= \iint_{E \geq E_{\pi}} K(E^*) dE^* \frac{d\Omega^*}{4\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{E_{\min}^*}^{\infty} K(E^*) dE^* \left(1 - \frac{E_{\pi} - E^*}{\beta p_{\pi}^* c} \right) \quad , \quad (E.2) \end{aligned}$$

onde

$$E_{\min}^* = \Gamma(E_{\pi} - \beta p_{\pi} c)$$

com (E_{π}, p_{π}) energia e momento do píon no sistema de laboratório. Γ fator de Lorentz da bola de fogo em relação ao sistema de laboratório.

Para energias do píon muito altas ($E_{\pi} \gg m_{\pi} c^2$)

$$E_{\min}^* = E_{\pi}/2\Gamma + \frac{\Gamma m_{\pi}^2 c^4}{2E_{\pi}} \quad , \quad (E.3)$$

e usando o fato

$$K_{\alpha} E_0 = \Gamma (m_{bf} c^2)^2 \quad , \quad (E.4)$$

onde K_{α} = inelasticidade do hadron α na atmosfera; E_0 = energia incidente do hadron; $m_{bf} c^2$ = massa da bola de fogo e unidades de energia, nós obtemos para o espectro diferencial de energia dos pions no sistema de laboratório, a expressão:

$$F_{\pi}(\Gamma, E_{\pi}) dE_{\pi} = - \frac{\partial F_{\pi}(\geq E_{\pi})}{\partial E_{\pi}} = \frac{1}{2\Gamma} G(E_{\min}^*) dE_{\pi} = \frac{1}{2\Gamma} G(a_{\alpha} \eta + \frac{b_{\alpha}}{\eta}) dE_{\pi} \quad (E.5)$$

onde $a_{\alpha} = (m_{bf} c^2)/2K_{\alpha}$; $b_{\alpha} = K_{\alpha} (m_{\pi} c^2)/2(m_{bf} c^2)$; $\eta = E_{\pi}/E_0$.

Substituindo (E.4) em (E.5), obtemos a distribuição de energia dos pions, como

$$\phi(E_{\pi}, E_0) dE_{\pi} = a_{\alpha} G(a_{\alpha} \eta + \frac{b_{\alpha}}{\eta}) \frac{dE_{\pi}}{E_0} \quad .$$

Considerando válido o Princípio de Independência de Cargas, nós obtemos a distribuição de energia dos pions carregados no sistema de laboratório:

$$\phi_{\pi}(E_{\pi}, E_0) dE_{\pi} = \frac{2}{3} a_{\alpha} g_{\alpha}(\eta) d\eta \quad (E.6)$$

onde

$$g_{\alpha}(\eta) = \int_{(a_{\alpha} \eta + \frac{b_{\alpha}}{\eta})}^{\infty} \frac{K(E_{\pi}^*) dE_{\pi}^*}{(E_{\pi}^{*2} - m_{\pi}^2 c^4)^{1/2}} \quad , \quad \beta \cong 1 \quad .$$

Como se pode ver, para $E_\pi \gg m_\pi c^2$, a distribuição de energia dos pions, calculada no sistema de laboratório, é independente da energia do hadron α ($\alpha = N$ ou π) incidente e é, portanto, compatível com a propriedade de "scaling" do processo de produção múltipla de partículas.

Usando a distribuição de Bose-Einstein para a energia dos pions, nós obtemos

$$g_\alpha(\eta) = \frac{Nk}{c} P_0^2 \int_{\sigma_\alpha \eta + \frac{\delta_\alpha}{\eta}}^{\infty} \frac{tdt}{e^t - 1} \quad ; \quad t = E_\pi^*/P_0 c$$

com

$$\sigma_\alpha = \frac{a_\alpha}{P_0 c} \quad ; \quad \delta_\alpha = \frac{b_\alpha}{P_0 c}$$

e a distribuição de energia dos pions torna-se:

$$\Phi_\alpha(E_\pi, E_0) dE_\pi = \frac{2}{3} N\sigma_\alpha (kp_0^3) \Phi(\sigma_\alpha \eta + \frac{\delta_\alpha}{\eta}) d\eta = f_{\pi\alpha}(\eta) d\eta \quad (E.7)$$

onde

$$\Phi(\sigma_\alpha \eta + \frac{\delta_\alpha}{\eta}) = \int_{\sigma_\alpha \eta + \frac{\delta_\alpha}{\eta}}^{\infty} \frac{tdt}{e^t - 1} \quad (\text{função de Debye}) \quad .$$

Os coeficientes C_N e C_π são então determinados com o auxílio das distribuições (E.7)

$$C_N = \int_0^{K_N} f_{\pi N}(\eta) \eta^\gamma d\eta = \frac{2}{3} N\sigma_N (kp_0^3) K_N^\gamma \langle \Phi_N \rangle$$

e

$$C_\pi = \int_0^1 \eta^\gamma f_{\pi\pi}(\eta) d\eta = \frac{2}{3} N\sigma_\alpha (kp_0^3) \langle \Phi_\pi \rangle \quad ,$$

onde

$$\langle \phi_N \rangle = \int_0^1 \phi \left(\sigma_0 \eta + \frac{\delta_0}{\eta} \right) \eta^\gamma d\eta$$

$$\langle \phi_\pi \rangle = \int_0^1 \phi \left(\sigma_\alpha \eta + \frac{\delta_\alpha}{\eta} \right) \eta^\gamma d\eta$$

$$\sigma_0 = K_\alpha \sigma_\alpha = \frac{(m_{bf} c^2)}{2(p_0 c)}$$

$$\delta_0 = \frac{\delta_\alpha}{K_\alpha} = \frac{(m_\pi c^2)}{2(p_0 c) (m_{bf} c^2)}$$

Para obtermos as distribuições $f_{\pi\alpha}(\eta)$ necessitamos de alguns parâmetros como

$$(m_{bf} c^2) , \langle p_T \rangle , K_\alpha , m_\pi c^2 , p_0 c .$$

Os parâmetros $m_{bf} c^2$ e $\langle p_T \rangle$ são obtidos das relações

$$\langle p_T \rangle = \frac{\pi}{4} \langle p^* \rangle \quad (\text{emissão isotrópica dos píons do sistema em repouso da bola de fogo})$$

$$m_{bf} c^2 = N \langle E^* \rangle ,$$

onde N = multiplicidade média dos píons carregados emitidos pela bola de fogo.

Os valores médios do momento (p^*) e da energia (E^*), calculados no sistema próprio da bola de fogo são dados pelas expressões:

$$\langle p^* \rangle = p_0 \frac{\int_0^\infty \frac{u^3 du}{\exp(u^2 + \alpha^2)^{1/2} - 1}}{\int_0^\infty \frac{u^2 du}{\exp(u^2 + \alpha^2)^{1/2} - 1}}, \quad u = p^*/p_0,$$

$$\langle E^* \rangle = \frac{p_0 \int_0^\infty \frac{u^2 (u^2 + \alpha^2)^{1/2} du}{\exp(u^2 + \alpha^2)^{1/2} - 1}}{\int_0^\infty \frac{u^2 du}{\exp(u^2 + \alpha^2)^{1/2} - 1}}, \quad \alpha = m_\pi/p_0.$$

e kp_0^3 é dado por:

$$kp_0^3 = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{u^2 du}{\exp(u^2 + \alpha^2)^{1/2} - 1}}$$

Na Tabela E.1 mostramos alguns valores de $\langle p^* \rangle$, $\langle E^* \rangle$, $\langle p_\pi \rangle$, $(m_{bf} c^2)$, kp_0^3 para temperaturas da bola de fogo entre 120-160 MeV. Nessa tabela consta, também, os valores dos coeficientes A_N e A_π dados por

$$A_N = \frac{2}{3} N \sigma_0 (kp_0^3) K_N^\gamma$$

$$A_\pi = \frac{2}{3} N \sigma_\alpha (kp_0^3).$$

Para a multiplicidade média dos píons emitidos pela bola de fogo usamos $N = 6$. O valor da inelasticidade média dos nucleons na atmosfera usado é 0,5.

Na Tabela E.2 mostramos como os coeficientes C_N e C_π dados pelas expressões (3.42) e (3.43) variam com o índice de

potências γ e com a temperatura da bola de fogo.

TABELA E.1 - Parâmetros do modelo da bola de fogo.

$p_0 c$ (MeV)	$\langle p^* \rangle (\frac{\text{MeV}}{c})$	$\langle E^* \rangle$ (MeV)	$\langle p_T \rangle (\frac{\text{MeV}}{c})$	$m_{bf} c^2$ (MeV)	KP_0^3 (MeV)	A_N	A_π
120	373	406	293	2434	0,607	7,634	49,2471
130	400	431	314	2583	0,582	7,170	46,2550
140	426	456	335	2733	0,562	6,802	43,8832
150	452	481	356	2884	0,546	6,509	41,9918
160	477	506	375	3036	0,532	6,259	40,3788

TABELA E.2 - Variação dos coeficientes C_N e C_π com o índice espectral γ .

$p_0 c$ (MeV)	$\gamma = 1,7$	$\gamma = 1,7$	$\gamma = 1,8$	$\gamma = 1,8$
	C_N	C_π	C_N	C_π
120	0.078	0.326	0.063	0.300
130	0.079	0.327	0.064	0.301
140	0.079	0.327	0.064	0.301
150	0.080	0.328	0.065	0.302
160	0.080	0.328	0.065	0.302

APÊNDICE F

CONTRIBUIÇÃO PARA O FLUXO DE PÍONS DE
OUTRAS PARTÍCULAS ELEMENTARES

F.1 - DECAIMENTO $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$

A razão de decaimento do pión é inversamente proporcional à sua energia, pois a vida média do decaimento é proporcional ao fator de Lorentz. Vamos considerar um pión (+ ou -) de massa m_{π} e tempo de vida próprio, τ . A vida média é dada por

$$\tau(E) = \frac{E}{m_{\pi} c^2} \tau = \gamma \tau \quad . \quad (F.1)$$

A razão de decaimento por unidade de comprimento é expressa por

$$\frac{1}{c\beta\tau(E)} = \frac{1}{c\beta\gamma\tau} = \frac{m_{\pi}}{p_{\pi}\tau} \quad , \quad (F.2)$$

onde p é o momento do pión ($p_{\pi} = c\beta\gamma m_{\pi}$).

Num meio de densidade ρ , o livre percurso médio do decaimento ($\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$) é

$$\frac{1}{\lambda_{\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu}} = \frac{m_{\pi}}{\rho p_{\pi} \tau} \quad . \quad (F.3)$$

Se o livre percurso médio de decaimento é menor que o livre caminho médio de interação, a partícula tem grande probabilidade de decair, antes de interagir.

Definindo $H = \frac{x}{\rho}$, onde x (g/cm^2) é a profundidade atmosférica, a expressão (F.3) é, então, colocada em função de H (Km),

$$\frac{1}{\ell(\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu)} = \frac{H \cdot m_\pi}{x p_\pi \tau} = \frac{B_\pi}{x p_\pi} \quad (\text{F.4})$$

onde $B_\pi = \frac{H \cdot m_\pi}{\tau}$ e é igual a 130 GeV/c para $x = 540 \text{ g/cm}^2$.

Para $E_\pi = 1 \text{ TeV}$, $x = 540 \text{ g/cm}^2$, o livre percurso médio do decaimento dos mésons π^\pm em mésons μ^\pm é da ordem de $4,2 \times 10^3 \text{ g/cm}^2$, que é muito maior que o livre percurso médio de interação dos píons carregados na atmosfera ($\lambda_\pi^0 = 112 \text{ g/cm}^2$). Assim, na equação (3.1) pode-se desprezar o termo desse decaimento.

F.2 - DECAIMENTOS DOS MÉSONS K

A contribuição dos mésons K no cálculo do fluxo dos píons é pequena devido principalmente a dois fatos:

- a) - a percentagem dos kaons produzidos numa interação nuclear a altas energias ($E_{\text{lab}} \geq 1 \text{ TeV}$) é bem menor que a dos píons (ver Tabela F.1).
- b) - O livre percurso médio dos decaimentos dos kaons em píons é muito maior que o livre percurso médio de interação dos píons na atmosfera, λ_π^0 . Por exemplo, para $x = 540 \text{ g/cm}^2$, $E = 10 \text{ TeV}$ e $B_K = 850 \text{ GeV/c}$ ele vale

$$\ell(K^\pm \rightarrow \pi^\pm) = \frac{E_K x}{B_K} = 6,5 \times 10^3 \text{ g/cm}^2, \quad \text{e na equação (3.1) não consta o}$$

assim $\ell(K \rightarrow \pi^\pm) \gg \lambda_\pi^0$

o termo referente a esse decaimento.

A seguir apresentamos na Tabela F.1 o número médio de partículas produzidas na interação ($p\bar{p}$) ($\sqrt{s}=540$ GeV, CERN), e na Tabela F.2 alguns decaimentos preferenciais dos mésons K, η e π .

TABELA F.1 - Número médio (%) de partículas resultantes da interação ($p\bar{p}$) ($\sqrt{s} = 540$ GeV, CERN).

TIPO	PERCENTAGEM
π^{\pm}	48,0
π^0	24,0
η	8,0
K^{\pm}	6,0
K^0, \bar{K}^0	6,0
p, \bar{p}	3,3
n, \bar{n}	3,3
$\Lambda, \bar{\Lambda}$	1,0
$\Sigma^{\pm}, \bar{\Sigma}^{\pm}$	0,5

TABELA F.2 - Decaimentos preferenciais dos mésons.

Partícula	Modos de decaimento preferenciais	Razão de decaimento (%)	Tempo de decaimento
K^{\pm}	$\pi^{\pm} \pi^0$	$21,17 \pm 0,15$	$1,24 \times 10^{-8}$ s
	$\pi^{\pm} \pi^{\pm} \pi^{\mp}$	$5,59 \pm 0,03$	
K_S^0	$\pi^+ \pi^-$	$68,61 \pm 0,26$	$0,89 \times 10^{-10}$ s
K_L^0	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	$12,37 \pm 0,18$	$5,18 \times 10^{-8}$ s
	$\pi^{\pm} \mu^{\mp} \bar{\nu}$	$27,01 \pm 0,34$	
	$\pi^{\pm} e^{\mp} \bar{\nu}$	$38,60 \pm 0,40$	
π^{\pm}	$\mu^{\pm} \nu$	100,00	$2,60 \times 10^{-8}$ s
η	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	$23,70 \pm 0,50$	$\Gamma = (1,08 \pm 0,19) \text{ KeV}$
	$\pi^+ \pi^- \gamma$	$4,91 \pm 0,13$	

BIBLIOGRAFIA

- (1) - C.T.R. Wilson, Proc. Camb. Phil. Soc. 11(1900)52; Proc. Roy. Soc. A68 (1900) 151; A69 (1901) 277.
- (2) - J. Elster, Z. Phys. 2 (1900) 560; H. Geitel, Z. Phys. 2 (1900) 116.
- (3) - V. Hess, Z. Phys. 13 (1912) 1084; 14 (1913) 610.
- (4) - W. Kolhörster, Z. Phys. 14 (1913) 1153.
- (5) - G. Pfozter, Z. Phys. 23 (1936) 102.
- (6) - C. Millikan, Phys. Rev. 31 (1928) 921.
- (7) - J. Clay, Proc. Ned. Akad. V. Wet. 30 (1927) 1115; 31 (1928) 1091.
- (8) - A.H. Compton, Phys. Rev. 43 (1933) 387.
- (9) - T.H. Johnson e J.C. Street, Phys. Rev. 43 (1933) 381.
- (10) - B. Rossi, Phys. Rev. 36 (1930) 606; Z. Phys. 68 (1931)64; Nuovo Cim. 8 (1931) 49.
- (11) - G. Lemaitre e M.S. Vallarta, Phys. Rev. 48 (1933) 87.
- (12) - C. Störmer, Z. Astrophys. 1 (1930) 237.
- (13) - D.V. Skobelzyn, Z. Phys. 43 (1927) 354.
- (14) - B. Rossi, Nature 125 (1930) 636; Lincei Rendue 11 (1930) 831.
- (15) - P.M.S. Blackett e G.P.S. Occhialini, Nature 130(1932)363.
- (16) - C.D. Anderson, Science 76 (1932) 238; Phys. Rev.43(1933) 491.
- (17) - J. Thibaud, Compt. Rend. 197 (1933) 237; 197(1933) 915.
- (18) - P.M.S. Blackett e G.P.S. Occhialini, Proc. Roy. Soc.A139 (1933) 699.
- (19) - H.A. Bethe e W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A146(1934)83.
- (20) - H.J. Bhabha e W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A159(1937)432.
- (21) - J.F. Carlson e J.R.Oppenheimer, Phys.Rev. 51(1937)220.

- (22) - L. Landau e G. Rumer, Proc. Roy. Soc. A166(1938)213.
- (23) - H.S. Snyder, Phys. Rev. 76 (1949) 1563.
- (24) - W.T. Scott, Phys. Rev. 80 (1950) 611.
- (25) - H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc., Japan, 17(1935)48.
- (26) - W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A161 (1937) 261; S. Hayakawa, Cosmic Ray Physics, Wiley-Interscience (1969) 9.
- (27) - R.J. Oppenheimer e R. Serber, Phys. Rev. 51 (1937) 1113.
- (28) - E.J. Williams, Phys. Rev. 45 (1934) 729.
- (29) - S.H. Neddermeyer e C.D. Anderson, Phys. Rev. 51 (1937) 884; 54 (1938) 88.
- (30) - J.C. Street e E.C. Stevenson, Phys. Rev. 52(1937)1003.
- (31) - H. Euler e W. Heisenberg, Erg.Exakt Naturwiss 17 (1938)1.
- (32) - G. Wataghin, Z. Phys. 88 (1934) 92.
- (33) - G. Hoffman, Ann. der phys. 82 (1927) 413.
- (34) - G. Wataghin, M.D.S. Santos e P.A. Pompeia, Phys. Rev. 57 (1940) 339.
- (35) - L. Janossy e P. Ingleby, Nature 145 (1940) 511.
- (36) - M. Conversi, E. Pancini e O. Piccioni, Phys. Rev. 68 (1945) 232; 71 (1947) 209.
- (37) - B. Rossi, Cosmic-Rays, McGraw-Hill, (1964) 143.
- (38) - S. Sakata, Rep. of the Symposium on Meson Theory (1943); S. Sakata e T. Inoue, Prog. Theor. Phys. 1 (1946) 143; T. Tanikawa, Rep. of the Symposium on Meson Theory (1943); Prog. Theor. Phys. 2 (1947) 220.
- (39) - R.E. Marshak e H.A. Bethe, Phys.Rev. 72 (1947) 506.
- (40) - C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini e C.F. Powell, Nature 160 (1947) 453-486.
- (41) - C.M.G. Lattes, Topics on Cosmic Rays - 60º aniversário de C.M.G. Lattes, Ed. UNICAMP 1 (1984) 2.
- (42) - E. Gardner e C.M.G. Lattes, Science 109 (1948) 270.

- (43) - J.R. Oppenheimer, New York Meeting of Amer. Phys. Soc. (1947).
- (44) - H. Tamaki, *Rijen Iho* 21 (1942) 891.
- (45) - G.T. Zatsepin, *Dok. An. SSSR* 67 (1949) 993.
- (46) - G. Wataghin, *Phys. Rev.* 63 (1943) 137; 66 (1944) 149.
- (47) - E. Fermi, *Prog. Theor. Phys.* 5 (1950) 570.
- (48) - L. Landau, *Izv. Akad. Nauk. USSR* 17 (1953) 57.
- (49) - P. Ciok, T. Coghen, J. Gierula, R. Holynski, A. Jurak, M. Miesowicz, T. Saniewska e O. Staniszkis, *Nuovo Cim.* 8 (1958) 166; 10 (1958) 741.
- (50) - K. Niu, *Nuovo Cim.* 10 (1958) 894.
- (51) - G. Cocconi, *Phys. Rev.* 111 (1958) 1699.
- (52) - S. Hasegawa, *Prog. Theor. Phys.* 26 (1961) 151; 29 (1963) 128.
- (53) - P. Freier et al., *Phys. Rev.* 74 (1948) 213.
- (54) - H.L. Bradt e B. Peters, *Phys. Rev.* 77 (1950) 54.
- (55) - G.D. Rochester e C.C. Butler, *Nature* 160 (1947) 855.
- (56) - J.A. Van Allen et al., *Jet Propulsion* 28 (1958) 588; S. N. Vernov et al., *Dok. Akad. Nauk. USSR* 125 (1959) 304.
- (57) - R. Giacconi et al., *Phys. Rev. Letters* 9 (1962) 439.
- (58) - F. Reines et al., *Proc. 9th I.C.R.C.* 2 (1965) 1051.
- (59) - M. Simon et al., *Astrophys. J.* 239 (1980) 712; N.L. Gri gorov et al., *Proc. 12th I.C.R.C.* 5 (1971) 1746, 1752, 1760.
- (60) - JACEE Collaboration, *Proc. of 3th Int. Symposium on Cosmic Rays and Particle Physics* (1984) 468.
- (61) - A.M. Hillas, *Proc. Bartol Conf.* (1978) 373; *Proc. 16th I.C.R.C.* 8 (1979) 7.
- (62) - J. Nishimura, *Sor. Kenkyu* 12 (1956) 24.
- (63) - I.C.E.F. Collaboration, *Nuovo Cim. Suppl.* 1 (1963) 1039.

- (64) - P. Auger, R. Maze e T. Griyet-Meyer, Compt. Rend. 206 (1938) 1721.
- (65) - W. Kolhorster, J. Matthes e E. Weber, Naturwiss 26(1938) 576.
- (66) - T.K. Gaisser et al., Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 859; G.L. Cassiday et al., Proc. Bartol Conf. (1978) 417.
- (67) - W. Galbraith, Extensive Air Showers, Butterworths, Londres (1958); N.A. Dobrotin et al., Usp. Fiz. Nauk, USSR 49 (1953) 185.
- (68) - M. Schoenberg, An. Acad. Bras. Cienc. 12 (1940) 281; M. G.E. Cosyns, C.C. Dillworth, G.P.S. Occhialini, M. Schoenberg e N. Page, Proc. Phys. Soc. A62 (1949) 801.
- (69) - J.G. Rushbrooke, 21ª Int. Conf. on High Energy Phys., Paris, (1982); CERN-EP (1982) 157.
- (70) - B. Rossi e K.I. Greisen, Rev. Mod. Phys. 13 (1941) 240; L. Janossy, Cosmic Rays, Oxford at the Clarendon Press (2ª edição) (1950) 202.
- (71) - S. Hayakawa, J. Nishimura e Y. Yamamoto, Progr. Theor. Phys. Suppl. 32 (1964) 104; A. Osawa, Progr. Theor. Phys. Suppl. 47 (1971) 189.
- (72) - H.J. Bhabha e S.K. Chakrabarty, Proc. Roy. Soc. A181 (1943) 267.
- (73) - W. Heitler e L. Janossy, Proc. Phys. Soc. 62A(1949) 374.
- (74) - S. Hayakawa e J. Nishimura, J. Sci. Res. Inst. 44(1949) 47; Progr. Theor. Phys. 4 (1949) 232.
- (75) - I.L. Rozental, Dok. Akad. Nauk. USSR 80 (1951) 731.
- (76) - Von P. Budini e G. Molière, Kosmische Strahlung, Springer-Verlag, (1ª edição), (1952) 367.
- (77) - Y. Pal e B. Peters, Mat. Fys. Medd. Dass. Vid. Selsk. 33 (1964) 1.
- (78) - G. Brooke, P.J. Haymann, Y. Kamiya e A.W. Wolfendale, Proc. Phys. Soc. 83 (1964) 853.

- (79) - F.M.O. Castro, An. Ac. Bras. Cienc. 49(1977)113.
- (80) - G.B. Yodh, Y. Pal e J.S. Trefil, Phys. Rev. Letters 28
(1972) 1005.
- (81) - E. Leader e W. Maor, Phys. Lett. 43B (1973) 505; U. Amaldi et al., Nucl. Phys. B145 (1978) 367; J.P. Auger e R. J. Lombard, Phys. Lett. 48B (1974) 445.
- (82) - N.L. Grigorov, Sov. J. Nucl. Phys. 25 (1977) 419.
- (83) - K. Kasahara, A. Osawa e Y. Takahashi, Cosmic Ray Laboratory, C.K.J. Report 11, Tokyo (1974).
- (84) - J. Sidhanta e R. Raychaudhury, Z. Naturforsch. 39A
(1984) 1172.
- (85) - F.M.O. Castro, An. Ac. Bras. Cienc. 51 (1979) 1; CBPF-NF-064 (1985).
- (86) - J. Nishimura, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, 46
(1967) 1; J. Sidhanta, R.K. Raychaudhury e D.P. Bhatta-charyya, Phys. Rev. D28 (1983) 1413.
- (87) - N. Arata e F.M.O. Castro, Rev. Bras. Fis. 18(1988)261.
- (88) - H.M. Portella e F.M.O. Castro, 39ª Reunião Anual da SBPC
(1987) 295.
- (89) - Particle Data Group, 170B (1986) 89.
- (90) - R.A. Nam, S.I. Nikolsky, A.P. Chubenko e V.I. Yakovlev,
Proc. 18th Int. Cosmic Ray Conf. 5 (1983) 336.
- (91) - T. Hara, N. Hayashida, M. Honda, K. Kamata, S. Kawaguchi, T. Kitune, Y. Mizumoto, M. Nagano, G. Tamahashi e M. Teshima, Phys. Rev. Letters 50 (1983) 2058; Proc.Int. Workshop on Cosmic Rays and Particle Physics (1984).
- (92) - R.M. Baltrusaitis et al., Proc. 19th ICRC 6 (1985) 5.
- (93) - M.N. Dyakonov et al., Proc. 20th ICRC 6 (1987) 147.
- (94) - U. Amaldi e K.R. Schubert, Nucl. Phys. B 166 (1980) 301; M. Bozzo et al., Phys. Lett 147B (1984) 392.
- (95) - A.M. Hillas, Proc. 16th ICRC 6 (1979) 13.
- (96) - H.M. Portella, F.M.O. Castro e N. Arata, J. Phys. G 14

- (1988) 1157; CBPF-NF 071 (1985); H.M. Portella, 38ª Reunião Anual da SBPC (1986) 321, 436.
- (97) - H.M. Portella e F.M.O. Castro, Proc. 5th Int. Symposium on Very High Energy Cosmic Ray (1988) 260; CBPF-NF 04 (1988).
- (98) - G. Messel, Fiz. Kosm. Luchey 2 (1956) 69; Z. Garraffo, A. Pignotti e C. Zgrablick, Nucl. Phys. B53(1973)419.
- (99) - N.L. Grigorov, Usp. Fiz. Nauk 58 (1956) 599; C.E.Navia, H.M. Portella, R.H.C. Maldonado, F.A. Pinto e H.V. Pinto, aceito para publicação em Phys. Rev. D (1989).
- (100) - V.S. Murzin e L.I. Sarycheva, Cosmic Ray and their Interactions, NASA Technical translation (1970) 285.
- (101) - N.L. Grigorov, Sov. Phys. JETP 18 (1964) 1063; Von P. Budini e G. Molière, Kosmische Strahlung, Springer-Verlag (1ª edição) (1952) 367.
- (102) - K. Guettler et al., Phys. Lett. 64B (1976) 111; J. G. Rushbrooke, CERN-EP (1982) 157; N. Arata, Nucl. Phys. B211 (1983) 189.
- (103) - J. Wdowczyk e A.W. Wolfendale, Nature 236 (1972) 29 ; 306 (1983) 347; J. Phys. G. 13 (1987) 411.
- (104) - J.G. Rushbrooke, CERN-EP (1985) 178; N. Arata e N. Amato, 5th Int. Symposium on Very High Energy Cosmic Ray Interactions (1988) 44; J. Wdowczyk e A.W. Wolfendale, 5th Int. Symposium on Very High Energy Cosmic Ray Interactions, Invited and Rapporteur paper (1988)4.
- (105) - A. Osawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. 47 (1971) 189.
- (106) - K. Mac Keown, Interacciones de Alta Energia e el Espectro de la Radiacion Cosmica, Un. Mayor de San Andres (1973).
- (107) - F.M. de Oliveira Castro, An. Ac. Bras. Cienc. 49(1977) 65.
- (108) - M. Abramowitz e I.H. Stegun, Handbook of Math. Functions, Dover Publ. (N.York) (1965) 591.

- (124) - H.M. Portella, a ser apresentado no X Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Itatiaia (1989).
- (125) - Yu. P. Gorin et al., *Yad. Fiz.* 18 (1973) 336; *Sov. J. Nucl. Phys.* 18 (1974) 173.
- (126) - M. Shibata, *Phys. Rev.* D24 (1981) 1847.
- (127) - T.K. Gaisser, M. Shibata e J.A. Wrotniak, *Workshops on Cosmic Ray Interactions and High Energy Results* (1982) 305.
- (128) - K. Kasahara, S. Torii e T. Yuda, *Proc. 16th ICRC* 13 (1979) 70, 76; K. Kasahara, *Nuovo Cim.* 46A(1978)333.
- (129) - A. Ohsawa e S. Yamashita, *Proc. 20th ICRC* 5 (1987)355.
- (130) - A. Liland, *Proc. 20th ICRC* 5 (1987) 295.
- (131) - N.L. Grigorov et al., *Proc. 12th ICRC* 1 (1971) 1746.
- (132) - D.H. Bhattacharyya e P.Pal, *Nuovo Cim.* C5 (1982) 287.
- (133) - A.K. Das e A.K. De, *J. Phys. G* 6 (1980) 137.
- (134) - A.K. Das e A.K. De, *J. Phys. G* 5 (1979) 445.
- (135) - J.E.F. Baruch, G. Brooke, E.W. Kellerman e N.D.Walster, *J. Phys. G* 5 (1979) 595.
- (136) - L.V. Volkova e G.T. Zatsepin, *Proc. 15th ICRC* 6(1977)6.
- (137) - J. Olejniczak, J. Woowczyk e A.W. Wolfendale, *J.Phys. G* 3 (1977) 847.
- (138) - G.B. Yodh, R.W. Ellsworth, T. Stanev e T.K. Gaisser , *Nucl. Phys.* B183 (1981) 12.
- (139) - G. Cocconi, L.G. Liester and D.H. Perkins, *Lawrence Radiation Laboratory High Energy Physics Study Seminars* , Report nº 28.2 (U.C.I.D. - 1944, I, 961) unpublished.

"ESTUDO MORFOLÓGICO DA COMPONENTE HADRÔNICA DA
RADIAÇÃO CÔSMICA"

HELIO MANOEL PORTELLA

Tese de Doutorado apresentada no Centro Bra-
sileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Na-
cional de Desenvolvimento Científico e Tec-
nológico, fazendo parte da Banca Examinado-
ra os seguintes professores:

Francisco Mendes de Oliveira Castro

Francisco Mendes de Oliveira Castro
Presidente

Bruto Pimentel Escobar

Bruto Max Pimentel Escobar

José de Sá Borges Filho

José de Sá Borges Filho

João Carlos Costa dos Anjos

João Carlos Costa dos Anjos

ausente

Neusa Amato

Odilon Antonio Paula Tavares

Odilon Antonio Paula Tavares (Suplente)

Rio de Janeiro, 27 de outubro de 1989