

NELSON PINTO NETO

TEORIA DA GRAVITAÇÃO EM TERMOS DAS
VARIÁVEIS DE FIERZ-LANCZOS

TESE de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF/CNPq

Rio de Janeiro, 1989

- À Donana e ao meu irmão.

AGRADECIMENTOS

A Mário Novello pela sua orientação, amizade e, principalmente, pelo seu entusiasmo e amor pela Física que sempre me contagiaram, estimularam e me ensinaram a manter sempre o pensamento crítico com relações aparentes verdades que permeiam a Cosmologia e que tanto asfixiam a criatividade e superficializam grandes questões cosmológicas.

Aos amigos do DRP, pelas críticas e sugestões a este trabalho e pelo companheirismo e solidariedade.

Aos colegas da UFRJ, principalmente a Eliane Vasconcelos e Roberto Nicolsky, pelo apoio que sempre deram à realização deste trabalho.

Aos colegas e funcionários do CBPF.

A Myriam S. Coutinho, pela dedicação e simpatia com que trata todos os alunos do CBPF.

À Helena S. Ferreira pelo excelente trabalho de datilografia.

A "Rocky" Kolb, pela hospitalidade e amizade com que me recebeu durante os nove meses de minha estada no Fermilab.

A Marcelo Gleiser e Richard Holman, meus companheiros de trabalho no Fermilab.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro durante o período inicial da realização deste trabalho.

R E S U M O

Apresentamos uma teoria completa de campos de spin dois massivo e não massivo usando as variáveis de Fierz $A_{\alpha\beta\mu}$, sua relação com a teoria usual envolvendo a variável padrão $\psi_{\mu\nu}$ e as fórmulas que permitem a passagem de uma representação para a outra. Desenvolvemos o formalismo Hamiltoniano, tanto para o caso com massa como para o caso sem massa, discutindo a estrutura de vínculos de ambas as teorias.

A seguir, a teoria é generalizada para espaços-tempos curvos onde a variável de Fierz $A_{\alpha\beta\mu}$ é identificada com o potencial de Lanczos $L_{\alpha\beta\mu}$. As propriedades essenciais deste potencial, sua ligação com a energia do campo gravitacional e com os coeficientes de rotação de Ricci são apresentadas. Mostra-se que tal teoria constitui-se na Teoria da Relatividade Geral de Einstein apresentada na formulação de Jordan-Lichnerowicz, acrescida de um termo dependente do tensor momento-energia do campo gravitacional.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE TABELAS	vi
CONVENÇÕES	vii
<u>CAPÍTULO 1</u> - INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO 2</u> - O POTENCIAL DE LANCZOS	10
<u>CAPÍTULO 3</u> - CAMPO DE SPIN DOIS NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI	20
3.1 - CASO COM MASSA	20
3.2 - CASO SEM MASSA	37
<u>CAPÍTULO 4</u> - FORMALISMO HAMILTONIANO PARA AS VARIÁVEIS DE FIERZ NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI	43
<u>CAPÍTULO 5</u> - TEORIA DA GRAVITAÇÃO EM TERMOS DO POTENCIAL DE FIERZ- -LANCZOS: EXTENSÃO AO ESPAÇO-TEMPO CURVO	91
<u>CAPÍTULO 6</u> - CONCLUSÃO	103
<u>APÊNDICE A</u> - FORMALISMO HAMILTONIANO COM VÍNCULOS	110
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	121

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
3.1.1 - Comparação entre os esquemas dinâmicos de campos de spin um e spin dois	28
4.1 - Variáveis canônicas na representação de Fierz	69
4.2 - Vínculos da Teoria Hamiltoniana para o Caso com Massa	70
4.3 - Vínculos da teoria Hamiltoniana para o Caso sem Massa	77
4.4 - Vínculos de 1ª e 2ª classe do formalismo Hamiltoniano para o caso não massivo	84
4.5 - Relação dos vínculos referentes à densidade Hamiltoniana (4.49)	88
4.6 - Relação dos vínculos referentes à densidade Hamiltoniana (4.49) com $m = 0$	89

CONVENÇÕES

- Índices gregos variam de 0 a 3
- Índices latinos maiúsculos variam de 0 a 3
- Índices latinos minúsculos variam de 1 a 3
- derivada covariante: $V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\epsilon\beta} V^\epsilon$
 onde $V^\alpha_{,\beta} = \frac{\partial V^\alpha(x^\mu)}{\partial x^\beta}$ e $\Gamma^\alpha_{\epsilon\beta} = g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\epsilon,\beta} + g_{\lambda\beta,\epsilon} - g_{\epsilon\beta,\alpha}^\lambda)$
- Tensor de curvatura: $V^\alpha_{;\mu;\nu} - V^\alpha_{;\nu;\mu} = R^\alpha_{\epsilon\mu\nu} V^\epsilon$
- Tensor de Ricci: $R_{\epsilon\nu} = R^\alpha_{\epsilon\alpha\nu}$
- Escalar de curvatura: $R = R_{\epsilon\nu} g^{\epsilon\nu}$
- Assinatura da métrica: (+, -, -, -)
- Derivada temporal: $\dot{\phi} = \phi_{,0}$
- $g = \det g_{\alpha\beta}$
- $\epsilon_{0123} = 1$ e $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{0ijk}$
- Tensor de Levi-Civita: $\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$
- Dual de um tensor: $F^{\alpha\beta*} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
- $A_{(\alpha\beta)} = A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$
- $A_{[\alpha\beta]} = A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}$
- Constante de Einstein: $k = \frac{8\pi G}{c^4}$

onde G é a constante de Newton e c é a velocidade da luz no vácuo.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Qualquer teoria de campo que se proponha a descrever a interação gravitacional deve satisfazer certas propriedades básicas relativas a esta interação.

Primeiramente, a interação gravitacional é de longo alcance, o que implica que as equações de campo que a descrevem não devem conter termo de massa.

Sabe-se também que toda matéria/energia da natureza interage gravitacionalmente com tudo que existe. Como o campo gravitacional deveria possuir também energia, então ele deve interagir consigo próprio. Assim, as equações de campo gravitacional, além de conterem termos de interação com todos os outros campos da natureza, devem também possuir termos de auto-interação, ou seja, devem ser não lineares.

Qual deve ser o spin do campo gravitacional? R.P. Feynman mostra em (1) que o spin deste campo não pode ser ímpar já que teorias de campo com spin ímpar geram interações que são atrativas e repulsivas e sabemos que a interação gravitacional é apenas atrativa; não pode ser semi-inteiro pois tais interações jamais poderiam gerar forças estáticas, como é o caso de forças gravitacionais Newtonianas; finalmente, o spin do campo não pode ser zero pois isto implicaria em que a atração

gravitacional entre gases quentes seria menor que para gases frios. Assim, o campo gravitacional deve ter spin par maior ou igual a dois. Escolhendo a hipótese mais simples, afirmamos que o spin do campo gravitacional é dois.

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein (T.R.G.)⁽²⁾ associa ao campo gravitacional o tensor métrico simétrico $g_{\mu\nu}(x)$ de uma variedade Riemanniana quadri-dimensional. Podemos pensar o tensor métrico como sendo uma extensão natural, fundada numa interpretação geométrica (que explicaria a observação de que todas as partículas descrevem uma mesma trajetória num do do campo gravitacional quando submetidas às mesmas condições iniciais⁽³⁾), do tensor simétrico $\psi_{\mu\nu}(x)$, usado largamente na descrição da dinâmica de um campo de spin dois no espaço-tempo de Minkowski^(4,5,6).

As equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

são equações diferenciais de 2ª ordem não lineares para um campo de spin dois não massivo. Têm como limite para o caso estático, baixas velocidades (com relação à velocidade da luz) e baixas energias, as equações de Newton da Gravitação. Além disso, prevêem, em situações mais complexas, fenômenos que não podem ser explicados pelas leis de Newton da gravitação e que foram confirmados pela observação⁽⁷⁾.

A T.R.G. satisfaz, portanto, todas as peculiaridades inerentes ao campo gravitacional enumeradas no início desta introdução, estando em total acordo com todas as experiên-

cias realizadas até hoje. Além disso é simples e extremamente elegante devido à sua interpretação geométrica da interação gravitacional (gravitação é curvatura do espaço-tempo). Por estas razões considera-se a T.R.G. como sendo a melhor teoria para descrever o comportamento do campo gravitacional clássico, isto é, fora do regime quântico.

Todavia, a T.R.G. apresenta alguns problemas teóricos graves. Qualquer tentativa de quantizar a T.R.G. ou unificá-la às outras teorias de campo esbarra em algumas dificuldades sérias que, apesar do grande esforço dispendido nas últimas décadas, jamais foram completamente resolvidas.

Enquanto as demais interações da natureza são descritas por teorias de calibre (teorias de Yang-Mills) cujas variáveis fundamentais são potenciais da curvatura do espaço de simetrias "internas" da Lagrangeana da teoria, o mesmo não acontece com a T.R.G.. A curvatura do espaço-tempo não é obtida por derivadas primeiras do tensor métrico. Este fato não só dificulta a unificação da T.R.G. com outras teorias, bem como praticamente inviabiliza a sua quantização pelos métodos e técnicas convencionais aplicadas com sucesso às outras interações. Por exemplo, a quantização covariante esbarra na não renormalizabilidade da T.R.G. (8).

Outra diferença fundamental entre a T.R.G. e as teorias de Yang-Mills reside no significado físico dos vínculos existentes nestas teorias. Os vínculos nas teorias de Yang-Mills geram transformações canônicas que correspondem a rotações no espaço interno da teoria segundo as quais os observáveis físicos permanecem inalterados (9,10). Na T.R.G., o espa-

ço "interno" corresponde ao próprio espaço-tempo. Sendo assim, as transformações canônicas geradas pelos vínculos correspondem a movimentos no espaço-tempo físico, estando, portanto, interligados com a dinâmica da teoria. Esta diferença é crucial no desenvolvimento da quantização canônica. Para as teorias de Yang-Mills, a imposição dos vínculos sobre as funções de onda fisicamente admissíveis é quase que imediata, estando a dinâmica da teoria sujeita à ação da Hamiltoniana. Para a T.R.G. a situação é inversa: a ação da Hamiltoniana é trivial, enquanto que a dinâmica da teoria está regida pela imposição dos vínculos às funções de onda (9,10).

Portanto, a quantização canônica da T.R.G. depende crucialmente da estrutura dos vínculos desta teoria. Entretanto, os vínculos da T.R.G. são funções complicadas da métrica e de seu momento canonicamente conjugado (11,12). Isto impõe algumas dificuldades para a quantização da teoria, dentre as quais a impossibilidade de definir um espaço de Hilbert para as funções de onda da teoria quântica (11). Este problema levou A. Ashtekar a propor a modificação do espaço de fase da T.R.G. (13,14) (constituído pela métrica de hiper-superfícies tipo-espaço imersas na variedade quadri-dimensional e seu momento canonicamente conjugado, a curvatura extrínseca destas hiper-superfícies). O novo espaço de fase proposto por Ashtekar seria constituído por uma nova variável, que é uma combinação da curvatura extrínseca com a conexão de spin, e seu momento canonicamente conjugado. Tal modificação no espaço de fase tem como consequência uma enorme simplificação dos vínculos da T.R.G. tornando-os semelhantes aos vínculos das teorias de Yang-Mills. Este resultata

do é extremamente importante e abre novas perspectivas para a quantização canônica da T.R.G. (15). Uma das lacunas deste trabalho consiste na ausência de um formalismo Lagrangeano para a T.R.G. em termos destas novas variáveis. É importante frisar que as novas variáveis de Ashtekar são potenciais do tensor de curvatura conforme (o tensor de Weyl).

Assim, as razões expostas aqui para o fracasso de todas as tentativas de se quantizar a T.R.G. ou unificá-la aos outros campos da natureza por um lado e o importante resultado obtido por A. Ashtekar por outro, indicam que a métrica do espaço-tempo não parece ser a melhor variável para se descrever a gravitação. De fato, o tensor métrico não é essencial para a descrição do campo gravitacional mas sim a curvatura do espaço-tempo.

Para verificarmos a existência do campo gravitacional não basta apenas observarmos a trajetória de uma partícula teste livre no espaço-tempo, pois é impossível distinguir se a curvatura desta trajetória é devida efetivamente à atração gravitacional sobre a partícula ou é meramente um efeito do sistema de coordenadas utilizado para a descrição de sua trajetória. Para medirmos o campo gravitacional precisamos, outrossim, calcular a aceleração com que a trajetória de duas partículas teste livres se separam (desvio geodético). Seja $\eta^\alpha(s)$ o quadri-vetor que representa esta separação de geodésicas para um mesmo valor do parâmetro afim s . Então, a aceleração do desvio geodético é dada por (16)

$$\frac{d^2 \eta^\alpha}{ds^2} = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta V^\mu V^\nu, \quad (1.2)$$

onde V^β é a quadri-velocidade das partículas.

Se esta aceleração é diferente de zero, então podemos afirmar com certeza que as partículas teste estão imersas num campo gravitacional. Não existe sistema de coordenada que possa anular esta aceleração devido à covariância da equação (1.2) com relação a mudanças do sistema de coordenadas.

Assim, o que é essencial para verificarmos a existência ou não da interação gravitacional é saber se o tensor de curvatura do espaço-tempo é ou não nulo. Portanto, seria mais apropriado descrever a interação gravitacional através da curvatura e seus potenciais do que através do tensor métrico.

Neste momento surge a seguinte questão: que variável devemos usar, alternativa ao tensor métrico, para descrever o campo gravitacional ?

Em primeiro lugar, se desejamos manter a interpretação geométrica da gravitação (cujo spin deve ser, como vimos, igual a dois), então esta nova variável deve ser a extensão a espaços-tempos curvos de alguma variável que descreva campos de spin dois no espaço-tempo plano, assim como o é $g_{\mu\nu}(x)$ com relação a $\psi_{\mu\nu}(x)$.

Ora, a descrição de um dado campo com determinado spin não é única. No caso específico de um campo de spin dois, Fierz mostrou ^(17,18) que podemos utilizar tanto o tensor simétrico $\psi_{\mu\nu}(x)$ (variável padrão), como o tensor $A_{\mu\nu\lambda}(x)$ (variável de Fierz), anti-simétrico nos dois primeiros índices e cíclico nos seus três índices.

Existe, dentro da estrutura de uma variedade Riemanniana, algum objeto geométrico que possa ser identificado com

a variável de Fierz ?

A resposta é afirmativa. Este objeto é um potencial de três índices para o tensor de Weyl cujas simetrias são idênticas às da variável de Fierz e cuja existência foi primeiramente sugerida por Lanczos ⁽¹⁹⁾ (por isso chamado de potencial de Lanczos) e definitivamente demonstrada por F. Bampi e G. Caviglia ⁽²⁰⁾.

No entanto, as equações de movimento que o potencial de Lanczos deve satisfazer não podem ser muito diferentes das equações da T.R.G. devido ao acordo que estas últimas têm com a observação. Ora, as equações de Jordan e Lichnerowicz ^(21,22) constituem uma formulação para a gravitação baseada na divergência do tensor de Weyl que se reduz à T.R.G. mediante uma escolha apropriada de condições de contorno. Do ponto de vista do potencial de Lanczos, as equações de Jordan-Lichnerowicz são equações diferenciais de 2ª ordem não lineares para este potencial.

Assim, o conhecimento destes três fatos (a saber: a existência da variável de Fierz, do potencial de Lanczos e da teoria de Jordan-Lichnerowicz) nos proporcionou o arsenal necessário para a construção de uma teoria geométrica da gravitação baseada na variável de Fierz-Lanczos. Seria, portanto, uma teoria de campo de spin dois não linear (como requer a gravitação), cuja variável fundamental é um potencial da curvatura (como nas teorias de Yang-Mills) que está relacionada com as novas variáveis de Ashtekar, já que, como estas, são potenciais do tensor de Weyl, e que, para condições de contorno apropriadas, reduzem-se às equações da T.R.G.

Este trabalho se ocupará da construção desta nova formulação e será dividido da seguinte maneira:

No segundo capítulo introduziremos o potencial de Lanczos discutindo suas simetrias, aproximação fraca, relação com a energia gravitacional, com os parâmetros cinemáticos e com os coeficientes de Ricci.

No terceiro capítulo faremos uma revisão das equações de movimento para o campo massivo e sem massa de spin dois no espaço-tempo de Minkowski, tanto para a variável padrão quanto para a variável de Fierz. Construiremos um esquema de equivalência e compararemos as duas representações. Apresentaremos então o formalismo Lagrangeano, com suas simetrias de calibre e o esquema de interação com outros campos. Mostraremos que as equações de campo para a variável de Fierz podem ser interpretadas como sendo a aproximação linear das equações de Jordan-Lichnerowicz.

No quarto capítulo apresentaremos o formalismo Hamiltoniano para a teoria em termos das variáveis de Fierz no espaço-tempo de Minkowski. Examinaremos os vínculos da teoria, tanto para o caso com massa (todos de 2ª classe) quanto para o caso sem massa (alguns de 1ª classe) indicando a existência de invariâncias de calibre. É feita a contagem dos graus de liberdade nos dois casos e mostra-se que a teoria (que, no caso sem massa, é a aproximação fraca da teoria de Jordan-Lichnerowicz) corresponde efetivamente a uma teoria de campo de spin dois massivo ou não-massivo.

No quinto capítulo apresentaremos a representação de Jordan-Lichnerowicz da T.R.G.. Faremos a generalização da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores para o espaço-tempo

curvo exibindo a passagem das variáveis de Fierz ($A_{\mu\nu\lambda}$) para o potencial de Lanczos ($L_{\mu\nu\lambda}$). Obteremos o tensor momento energia associado a este campo. Através de um princípio variacional chegaremos às equações de Jordan-Lichnerowicz acrescidas de um termo envolvendo o tensor momento-energia deste campo.

Concluimos no sexto capítulo com um resumo dos nossos resultados, dificuldades a serem resolvidas e perspectivas para futuros trabalhos.

O Apêndice A apresenta um resumo da teoria Hamiltoniana com vínculos.

CAPÍTULO 2

O POTENCIAL DE LANCZOS

Em 1982, E. Bampi e G. Caviglia⁽²⁰⁾ provaram o seguinte teorema:

Seja a equação

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta\mu\nu} = & L_{\alpha\beta\mu;\nu} - L_{\alpha\beta\nu;\mu} + L_{\mu\nu\alpha;\beta} - L_{\mu\nu\beta;\alpha} + \\
 & + \frac{1}{2} L_{(\alpha\nu)} g_{\beta\mu} + \frac{1}{2} L_{(\beta\mu)} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} L_{(\beta\nu)} g_{\alpha\mu} + \\
 & - \frac{1}{2} L_{(\alpha\mu)} g_{\beta\nu} + \frac{2}{3} L^{\sigma\lambda}_{\sigma;\lambda} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

onde $L_{\alpha\mu} = L_{\alpha\mu;\lambda}^{\lambda} - L_{\alpha\lambda;\mu}^{\lambda}$,

$$L_{(\alpha\beta)\mu} = 0 \quad , \quad L_{\alpha\beta\mu} + L_{\mu\alpha\beta} + L_{\beta\mu\alpha} = 0 \iff L^{\alpha\beta}_{\alpha}^* = 0 \quad ,$$

$$M_{(\alpha\beta)\mu\nu} = 0 \quad , \quad M_{\alpha\beta(\mu\nu)} = 0 \quad , \quad M_{\alpha\beta\mu\nu} = M_{\mu\nu\alpha\beta} \quad ,$$

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} + M_{\alpha\nu\beta\mu} + M_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \iff M_{\alpha\beta}^{\beta\nu*} = 0 \quad ,$$

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\alpha\mu} = 0$$

$M_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem 10 componentes independentes

$L_{\alpha\beta\mu}$ tem 20 componentes independentes

A partir desta equação obtêm-se os seguintes resultados:

a) Para qualquer tensor $M_{\alpha\beta\mu\nu}$ a equação (2.1) sem -

pre admite uma solução.

b) Toda solução de (2.1) está determinada a menos de um tensor $P_\alpha g_{\beta\mu} - P_\beta g_{\alpha\mu}$ sendo P_α um campo vetorial arbitrário. Isto constitui um calibre algébrico.

c) Para toda solução de (2.1), o tensor anti-simétrico $L_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_{;\lambda}$ pode ser fixado arbitrariamente. Isto constitui um calibre diferencial que não pode, em geral, ser escrito em uma forma local. No caso de uma variedade de curvatura constante, podemos construir com o tensor anti-simétrico $\chi_{\alpha\beta}$ uma quantidade $\chi_{\alpha\beta;\mu}$ que leva o lado direito de (2.1) a se anular identicamente. Isto pode ser visto como a expressão local, neste caso específico, do calibre diferencial citado acima.

Este resultado vale para qualquer variedade Riemanniana com número de dimensões menor ou igual a seis.

Em particular, o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ dado por (2.2a) satisfaz às condições impostas sobre $M_{\alpha\beta\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu} = & R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} + \frac{1}{2} R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} + \\ & - \frac{1}{2} R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \\ & + \frac{1}{6} R(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \end{aligned} \quad (2.2a)$$

Portanto ele pode ser escrito como derivadas primeiras de um tensor de três índices, ou seja:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu} = & L_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + L_{\mu\nu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{2} L_{(\alpha\nu)} g_{\beta\mu} + \\ & + \frac{1}{2} L_{(\beta\mu)} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} L_{(\alpha\mu)} g_{\beta\nu} - \frac{1}{2} L_{(\beta\nu)} g_{\alpha\mu} + \\ & + \frac{2}{3} L^{\sigma\lambda}{}_{\sigma;\lambda} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \end{aligned} \quad (2.2b)$$

Como o primeiro a sugerir a existência deste potencial para o tensor de Weyl foi Lanczos ⁽¹⁹⁾, ele é chamado de potencial de Lanczos. Surge, portanto, mais uma quantidade inerente à estrutura interna de uma variedade Riemanniana que preenche um vazio entre o tensor métrico e a curvatura.

O tensor de Weyl pode também ser escrito em termos de derivadas segundas da métrica. Existe, portanto, uma relação entre o potencial de Lanczos e o tensor métrico que, no entanto, não é local. Aquele só pode ser escrito em termos deste através de uma operação integral, isto é, o valor de $L_{\alpha\beta\mu}(x)$ depende globalmente da geometria da variedade.

Seja a equação (2.2) com $W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ dentro de uma aproximação fraca, isto é:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e ϵ é uma quantidade infinitesimal. Um fato surpreendente mostrado por Lanczos ⁽¹⁹⁾ é que algumas das equações (2.2) quando escritas em forma de quaternions são exatamente as equações de Dirac sem termo de massa. O significado física deste fato ainda é um mistério.

As simetrias de $L_{\alpha\beta\mu}$ são:

$$L_{\alpha\beta\mu\nu} = -L_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (2.4a)$$

$$L_{\alpha\beta\mu} + L_{\mu\alpha\beta} + L_{\beta\mu\alpha} = 0 \quad (2.4b)$$

Devido às invariâncias de calibre apontadas no teorema podemos ainda ter:

$$L_{\alpha\beta\mu} g^{\beta\mu} = 0 \quad (2.5)$$

$$L_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{;\mu} = 0 \quad (2.6)$$

(2.5) e (2.6) constituem o calibre de Lanczos.

- Aproximação Linear

Quando é válida a expressão (2.3), é possível escrever o potencial de Lanczos em função de derivadas do termo perturbativo ($\epsilon h_{\mu\nu}$). Com efeito, se calcularmos o tensor de Weyl dado por (2.2a) em termos da métrica (dada por (2.3)) e desprezarmos termos em ϵ^2 temos:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu} = & \frac{\epsilon}{2} \left[h_{\alpha\mu,\beta,\nu} + h_{\beta\nu,\alpha,\mu} - h_{\beta\mu,\alpha,\nu} - h_{\alpha\nu,\beta,\mu} + \right. \\ & - \frac{1}{2} (h_{,\alpha,\mu} + \square h_{\alpha\mu} - h^{\epsilon}_{(\alpha,\mu),\epsilon}) \eta_{\beta\nu} + \\ & - \frac{1}{2} (h_{,\beta,\nu} + \square h_{\beta\nu} - h^{\epsilon}_{(\beta,\nu),\epsilon}) \eta_{\alpha\mu} + \\ & + \frac{1}{2} (h_{,\alpha,\nu} + \square h_{\alpha\nu} - h^{\epsilon}_{(\alpha,\nu),\epsilon}) \eta_{\beta\mu} + \\ & + \frac{1}{2} (h_{,\beta,\mu} + \square h_{\beta\mu} - h^{\epsilon}_{(\beta,\mu),\epsilon}) \eta_{\alpha\nu} + \\ & \left. + \frac{1}{3} (\square h - h^{\lambda\epsilon}_{,\lambda,\epsilon}) (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu}) \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

onde $h = h_{\alpha\mu} \eta^{\alpha\mu}$.

Igualando (2.7) a (2.2) e usando que, em primeira ordem em ϵ , $L_{\alpha\beta\mu;\nu} \cong L_{\alpha\beta\mu,\nu}$, tem-se que:

$$L_{\alpha\beta\mu} = \frac{\epsilon}{4} (h_{\mu\alpha,\beta} - h_{\mu\beta,\alpha}) \quad (2.8)$$

Só nesta situação é possível encontrar uma expressão

local entre o potencial de Lanczos e a métrica. A equação (2.8) é essencial para a passagem das variáveis de Fierz para o potencial de Lanczos, como veremos no Capítulo 5.

A expressão (2.8) para o potencial de Lanczos não é única devido às invariâncias de calibre da equação (2.2). A escolha do calibre:

$$h_{\nu, \mu}^{\mu} = 0 \quad (2.9)$$

$$h_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (2.10)$$

para $h_{\mu\nu}$ ((2.7) é invariante segundo a transformação $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{(\mu, \nu)}$) implica, por (2.8), na escolha do calibre de Lanczos (2.5) e (2.6) para $L_{\alpha\beta\mu}$.

Na tentativa de melhor entender o significado físico de $L_{\alpha\beta\mu}$, encontramos algumas relações entre este potencial e quantidades ligadas ao campo gravitacional e à estrutura de determinadas variedades Riemannianas. A primeira delas é com a energia do campo gravitacional. Mostra-se ^(23,24) que a energia do campo gravitacional num espaço-tempo assintoticamente plano é dada por:

$$E = \int_{\partial\Sigma} \varepsilon (h_{i\ell, k} - h_{ik, \ell}) \eta^{i\ell} d^2S^k \quad (2.11)$$

onde $ch_{i\ell}$ é a parte tridimensional da perturbação à métrica de Minkowskii $\eta_{\mu\nu}$ (veja (2.3)) e a integral (2.11) é realizada sobre uma superfície $\partial\Sigma$ no infinito. Usando (2.8), podemos escrever (2.11) em função de $L_{\alpha\beta\mu}$ da seguinte forma:

$$E = 4 \int_{\partial\Sigma} L_{\ell ki} \eta^{\ell i} d^2S^k \quad (2.12)$$

A forma extremamente simples com que a energia gravitacional se escreve em termos do potencial de Lanczos sugere uma profunda ligação entre estas duas quantidades. Este facto será investigado com maior profundidade em futuros trabalhos.

Para determinadas variedades métricas Riemannianas onde está definido um campo vetorial tipo tempo V_μ , pode-se escrever o potencial de Lanczos em termos de quantidades cinemáticas associadas a este campo ⁽²⁵⁾, a saber: o tensor de cisalhamento $\sigma_{\mu\nu}$ (ligado à curvatura extrínseca), o tensor de rotação $W_{\mu\nu}$, a aceleração a_μ e o fator de expansão θ . Para certas variedades Riemannianas podemos escrever o potencial de Lanczos da seguinte maneira:

$$L_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3} \left[\gamma_{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\beta\mu} - \gamma_{\beta\mu\alpha}) \right] \quad (2.13)$$

sendo

$$\gamma_{\alpha\beta\mu} = e_{A\alpha} e^B{}_\beta e^M{}_\mu \gamma^A{}_{BM} = - e^A{}_{\beta;\mu} e_{A\alpha} \quad (2.14)$$

onde $\gamma^A{}_{BM}$ são os coeficientes de estrutura de Ricci dados por

$$\gamma^A{}_{BM} = - e^A{}_{\rho;\sigma} e^\rho{}_B e^\sigma{}_M \quad (2.15)$$

e $e^\alpha{}_A$ corresponde a um conjunto de tetradas locais tais que:

$$e^\alpha{}_A e^\beta{}_B g_{\alpha\beta} = \eta_{AB} \quad (2.16)$$

(veja (26) para maiores detalhes). Note que $\gamma_{\alpha\beta\mu} = - \gamma_{\beta\alpha\mu}$.

Calculemos a aproximação fraca de (2.13). Neste caso temos:

$$e^A_{\beta} e_{A\alpha} = g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta} \quad (2.17)$$

e portanto,

$$e^A_{\beta} \cong \delta^A_{\beta} + \frac{\varepsilon}{2} h^A_{\beta} \quad (2.18)$$

$$\{\lambda_{\beta\mu}\} \cong \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\lambda\varepsilon} (h_{\varepsilon\beta,\mu} + h_{\varepsilon\mu,\beta} - h_{\mu\beta,\varepsilon}) \quad (2.19)$$

onde $\varepsilon h^A_{\beta} \cong \varepsilon e^A_{\alpha} h^{\alpha}_{\beta} \cong \varepsilon \delta^A_{\alpha} h^{\alpha}_{\beta}$.

Usando (2.14) e desprezando termos de 2ª ordem temos:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta\mu} = -\frac{\varepsilon}{2} h^A_{\beta,\mu} (\eta_{A\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} h_{A\alpha}) + \frac{\varepsilon}{2} (h_{\alpha\beta,\mu} + \\ + h_{\alpha\mu,\beta} - h_{\mu\beta,\alpha}) = \frac{\varepsilon}{2} h_{\mu}[\alpha,\beta] \end{aligned} \quad (2.20)$$

η_{AB} e η^{AB} desce e sobe índices latinos respectivamente.

Substituindo este resultado em (2.13) obtemos:

$$L_{\alpha\beta\mu} = -\frac{\varepsilon}{4} h_{\mu}[\alpha,\beta] \quad (2.21)$$

o que está de acordo com (2.8).

De forma geral o tensor de curvatura é dado por:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} = e^A_{\alpha} [;\mu;\nu] e_{A\beta} = \gamma_{\alpha\beta}[\mu;\nu] - \gamma_{\alpha\varepsilon\mu} \gamma^{\varepsilon}_{\beta\nu} + \\ + \gamma_{\alpha\varepsilon\nu} \gamma^{\varepsilon}_{\beta\mu} \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde usamos (2.14).

A partir das identidades $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ e $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$ obtemos de (2.22) as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}[\mu; \nu] &= \gamma_{\mu\nu}[\alpha; \beta] + \gamma_{\alpha\epsilon\mu} \gamma_{\beta}^{\epsilon}{}_{\nu} - \gamma_{\alpha\epsilon\nu} \gamma_{\beta}^{\epsilon}{}_{\mu} \\ &\quad - \gamma_{\mu\epsilon\alpha} \gamma_{\nu}^{\epsilon}{}_{\beta} + \gamma_{\mu\epsilon\beta} \gamma_{\nu}^{\epsilon}{}_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}[\mu; \nu] &= -\gamma_{\alpha\nu}[\beta; \mu] - \gamma_{\alpha\mu}[\nu; \beta] + \gamma_{\alpha\epsilon\mu} \gamma_{\beta}^{\epsilon}{}_{\nu} + \\ &\quad - \gamma_{\alpha\epsilon\nu} \gamma_{\beta}^{\epsilon}{}_{\mu} + \gamma_{\alpha\epsilon\beta} \gamma_{\nu}^{\epsilon}{}_{\mu} - \gamma_{\alpha\epsilon\mu} \gamma_{\nu}^{\epsilon}{}_{\beta} + \\ &\quad + \gamma_{\alpha\epsilon\nu} \gamma_{\mu}^{\epsilon}{}_{\beta} - \gamma_{\alpha\epsilon\beta} \gamma_{\mu}^{\epsilon}{}_{\nu} \end{aligned} \quad (2.24)$$

De (2.13) temos:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}[\mu; \nu] + L_{\mu\nu}[\alpha; \beta] &= \frac{1}{3} \left[\gamma_{\alpha\beta}[\mu; \nu] + \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\mu\beta; \nu} + \right. \\ &\quad \left. - \gamma_{\alpha\nu\beta; \mu} - \gamma_{\beta\mu\alpha; \nu} + \gamma_{\beta\nu\alpha; \mu}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[\gamma_{\mu\nu}[\alpha; \beta] + \frac{1}{2} (\gamma_{\mu\alpha\nu; \beta} - \gamma_{\mu\beta\nu; \alpha} - \gamma_{\nu\alpha\mu; \beta} + \gamma_{\nu\beta\mu; \alpha}) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\gamma_{\alpha\beta}[\mu; \nu] + \gamma_{\mu\nu}[\alpha; \beta] + \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\mu}[\beta; \nu] + \gamma_{\alpha\nu}[\mu; \beta] + \right. \\ &\quad \left. - \gamma_{\beta\mu}[\alpha; \nu] - \gamma_{\beta\nu}[\mu; \alpha]) \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando (2.23), (2.24) e (2.22) em (2.25), obtemos,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = L_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + L_{\mu\nu[\alpha;\beta]} - \chi_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.26)$$

onde

$$\chi_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv (2A_{\alpha\beta\mu\nu} + A_{\alpha\nu\mu\beta} + A_{\alpha\mu\beta\nu}) \frac{1}{3} \quad (2.27)$$

e

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \gamma_{\alpha\epsilon\mu} \gamma_{\beta}^{\epsilon}{}_{\nu} - \gamma_{\alpha\epsilon\nu} \gamma_{\beta}^{\epsilon}{}_{\mu} + \gamma_{\mu\epsilon\alpha} \gamma_{\nu}^{\epsilon}{}_{\beta} - \gamma_{\mu\epsilon\beta} \gamma_{\nu}^{\epsilon}{}_{\alpha} \quad (2.28)$$

Note que $A_{(\alpha\beta)\mu\nu} = A_{\alpha\beta(\mu\nu)} = 0$ e $A_{\alpha\beta\mu\nu} = A_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Também $\chi_{\alpha\beta\mu\nu} + \chi_{\alpha\nu\beta\mu} + \chi_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta\mu\nu}(L) = W_{\alpha\beta\mu\nu}(R) + \chi_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} (\chi_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \\ + \chi_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - \chi_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - \chi_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6} \chi g_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $W_{\alpha\beta\mu\nu}(L)$ é o tensor de Weyl em função do potencial de Lanczos (veja (2.2b)), $W_{\alpha\beta\mu\nu}(R)$ é o mesmo tensor em termos do tensor de curvatura (veja (2.2a)), $\chi_{\alpha\mu} = \chi_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\beta\nu}$ e $\chi = \chi^{\alpha}{}_{\alpha}$.

A métrica de Kasner, dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2 \quad (2.30)$$

é um exemplo da variedade Riemanniana onde o potencial de

Lanczos pode ser escrito através da fórmula (2.13).

De fato, os únicos $\gamma_{\alpha\beta\mu}$ diferentes de zero são γ_{011} , γ_{022} , γ_{033} . Assim, o tensor $\chi_{\alpha\beta\mu\nu}$ é identicamente nulo e portanto (usando (2.29)):

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}(L) = W_{\alpha\beta\mu\nu}(R) \quad . \quad (2.31)$$

CAPÍTULO 3

CAMPO DE SPIN DOIS NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Neste capítulo estudaremos as equações de movimento e o formalismo Lagrangeano que descrevem a propagação de um campo de spin dois, massivo e não massivo, no espaço-tempo de Minkowski, tanto para a variável padrão ($\psi_{\mu\nu}$) como para a variável de Fierz ($A_{\mu\nu\lambda}$).

3.1 - CASO COM MASSA

i) - Variável Padrão

Dentro da teoria padrão, o campo de spin dois é descrito pelo tensor simétrico $\psi_{\mu\nu}$ que obedeça à seguinte equação de movimento (4, 5):

$$\square \psi_{\mu\nu} - \psi_{(\mu, \nu), \epsilon}^{\epsilon} + \psi_{, \mu, \nu} + \eta_{\mu\nu} (\psi^{\alpha\beta}_{, \alpha, \beta} - \square \psi) + m^2 (\psi_{\mu\nu} - \psi \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.1.1)$$

onde $\psi \equiv \psi^{\mu}_{\mu}$.

Tirando o traço e a divergência de (3.1.1), obtemos duas condições de compatibilidade:

$$\psi = 0 \quad (3.1.2a)$$

$$\psi^{\mu\nu}_{, \nu} = 0 \quad (3.1.2b)$$

Definindo os tensores:

$$\hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv 2(\psi_{\alpha\mu,\beta,\nu} + \psi_{\beta\nu,\alpha,\mu} - \psi_{\beta\mu,\alpha,\nu} - \psi_{\alpha\nu,\beta,\mu}) \quad (3.1.3)$$

$$\hat{R}_{\alpha\mu} \equiv \hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{\beta\nu} = 2(\square \psi_{\alpha\mu} + \psi_{,\alpha,\mu} - \psi^{(\alpha}_{,\mu),\epsilon}) \quad (3.1.4)$$

$$\hat{R} \equiv \hat{R}_{\alpha\mu} \eta^{\alpha\mu} = 4(\square \psi - \psi^{\epsilon\lambda}_{,\epsilon,\lambda}) \quad (3.1.5)$$

podemos escrever (3.1.1) da seguinte maneira:

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{R} \eta_{\mu\nu} + 2m^2 (\psi_{\mu\nu} - \psi \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.1.6)$$

Se usarmos as condições (3.1.2) em (3.1.1) obtemos:

$$\square \psi_{\mu\nu} + m^2 \psi_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.7)$$

onde

$$\square \psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu,\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}$$

A equação (3.1.1) pode ser obtida da seguinte densidade Lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{2} \psi^{\mu\nu} \left[\square \psi_{\mu\nu} - \psi^{(\mu}_{,\nu),\beta} + \psi_{,\mu,\nu} + \eta_{\mu\nu} (\psi^{\alpha\beta}_{,\alpha,\beta} - \square \psi) + m^2 (\psi_{\mu\nu} - \psi \eta_{\mu\nu}) \right] \quad (3.1.8)$$

Desde as primeiras investigações em teoria de campos, os físicos empregaram este esquema para descrever a propagação

de um campo de spin dois massivo no espaço-tempo de Minkowski que acabou adquirindo um status de unicidade. Esta unicidade não é, entretanto, necessariamente verdadeira. A teoria que apresentaremos a seguir é baseada, em parte, no trabalho de Fierz ^(17,18) que mostrou ser possível descrever um campo de spin dois (bem como outros campos de maior spin) por representações equivalentes. Vamos, a seguir, apresentar um exemplo específico deste esquema alternativo.

ii) - A Variável de Fierz

Definimos um tensor de terceira ordem $A_{\mu\nu\lambda}$ com vinte componentes independentes que obedece às seguintes propriedades:

$$A_{\mu\nu\lambda} = -A_{\nu\mu\lambda} \quad (3.1.9a)$$

$$A^{\alpha\beta}_{\quad\beta} = 0 \iff A_{\alpha\beta\mu} + A_{\mu\alpha\beta} + A_{\beta\mu\alpha} = 0 \quad (3.1.9b)$$

Com o potencial $A_{\alpha\beta\mu}$ construímos o campo $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ pela fórmula:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &\equiv A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} + \\ &+ \frac{1}{2} A_{(\alpha\nu)} \eta_{\beta\mu} + \frac{1}{2} A_{(\beta\mu)} \eta_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} A_{(\beta\nu)} \eta_{\alpha\mu} + \\ &- \frac{1}{2} A_{(\alpha\mu)} \eta_{\beta\nu} + \frac{2}{3} A^{\sigma\lambda}_{\quad\sigma,\lambda} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu}) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

onde $A_{\alpha\nu} = A_{\alpha\nu,\varepsilon}^{\varepsilon} - A_{\alpha\varepsilon,\nu}^{\varepsilon}$.

Da definição (3.1.10) tem-se que:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (3.1.11a)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (3.1.11b)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (3.1.11c)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} \eta^{\alpha\mu} = 0 \quad (3.1.11d)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}^* = C_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \overset{*}{C}_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (3.1.11e)$$

Portanto o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem apenas dez componentes independentes.

Seja o campo vetorial tipo-tempo $V^\mu(x^\alpha)$ que represente um campo de observadores no espaço-tempo de Minkowski. Podemos definir a parte elétrica ($E_{\alpha\mu}$) e a parte magnética ($B_{\alpha\mu}$) do tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$E_{\alpha\mu} \equiv -C_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta V^\nu \quad (3.1.12a)$$

$$B_{\alpha\mu} \equiv -\overset{*}{C}_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta V^\nu \quad (3.1.12b)$$

Equivalentemente teremos:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} = & \left[\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\lambda} + \right. \\ & \left. - (\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} - \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta\rho}) (\eta_{\mu\gamma} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\gamma}) \right] V^\rho V^\gamma E^{\sigma\lambda} + \\ & + \left[\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} (\eta_{\mu\gamma} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\gamma}) + \right. \\ & \left. + (\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} - \eta_{\alpha\sigma} \eta_{\beta\rho}) \varepsilon_{\mu\nu\gamma\lambda} \right] V^\rho V^\gamma B^{\sigma\lambda} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

A analogia entre os tensores $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, $E_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ e os tensores

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

$$E_{\mu} \equiv F_{\mu\nu} V^{\nu}$$

$$B_{\mu} \equiv F_{\alpha\nu}^* V^{\nu}$$

usados para descrever um campo de spin um é evidente. Este facto nos leva à escolha da seguinte densidade Lagrangeana para o potencial $A_{\mu\nu\lambda}$:

$$L = - \frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu} \quad (3.1.14)$$

em analogia com

$$L = - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^{\mu} A_{\mu}$$

(Daqui para a frente vamos assumir que $\dim A_{\alpha\beta\mu} = (\text{comprimento})^{-1}$ e que estamos usando unidades naturais nas quais $\hbar = c = 1$.)

Ao variarmos a ação

$$S_0 = \int d^4x \left(- \frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu} \right) \quad (3.1.15)$$

com relação a $A_{\mu\nu\lambda}$, encontramos as seguintes equações de movimento:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{,\nu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (3.1.16)$$

análogas às equações

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + m^2 A^{\mu} = 0$$

usadas para descrever a dinâmica de um campo de spin um massivo.

De (3.1.16) obtém-se duas condições de compatibilida

de:

$$A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\beta\mu} = 0 \quad (3.1.17a)$$

$$A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\mu} = 0 \quad (3.1.17b)$$

Portanto, das 20 componentes independentes de $A_{\mu\nu\lambda}$ sobram apenas 10.

Usando (3.1.17) em (3.1.16) obtemos a equação de onda equivalente:

$$(\square + m^2) A_{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (3.1.18)$$

Segundo Fierz, para que o tensor $A_{\mu\nu\lambda}$ possa descrever um campo de spin dois, é preciso que esta variável satisfaça um vínculo adicional, a saber:

$$A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\beta}^* = 0 \iff A_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{,\lambda} + A_{\lambda\alpha}{}^{\mu}{}_{,\beta} + A_{\beta\lambda}{}^{\mu}{}_{,\alpha} = 0 \quad (3.1.19)$$

Podemos separar $M^{\alpha\mu} \equiv A^{\alpha\beta\mu}{}_{,\beta}^*$ em suas partes irreduzíveis:

$$M^{\alpha\mu} = \frac{1}{2} M^{(\alpha\mu)} + \frac{1}{2} M^{[\alpha\mu]}$$

Devido às condições (3.1.17), $M^{[\alpha\mu]}$ é identicamente nulo, já que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\epsilon\tau\lambda} M^{[\alpha\mu]} &= \epsilon_{\alpha\epsilon\tau\lambda} (\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} A_{\rho\sigma}{}^{\mu}{}_{,\beta} - \epsilon^{\mu\beta\rho\sigma} A_{\rho\sigma}{}^{\alpha}{}_{,\beta}) = \\ &= -2\delta_{\epsilon}^{\mu} (A^{\gamma}{}_{\tau\gamma,\lambda} - A^{\gamma}{}_{\lambda\gamma,\tau} + A_{\tau\lambda}{}^{\gamma}{}_{,\gamma}) + \\ &+ 2\delta_{\tau}^{\mu} (A^{\gamma}{}_{\epsilon\gamma,\lambda} - A^{\gamma}{}_{\lambda\gamma,\epsilon} + A_{\epsilon\lambda}{}^{\gamma}{}_{,\gamma}) - 2\delta_{\lambda}^{\mu} (A^{\gamma}{}_{\epsilon\gamma,\tau} - A^{\gamma}{}_{\tau\gamma,\epsilon} + A_{\epsilon\tau}{}^{\gamma}{}_{,\gamma}) \end{aligned}$$

e portanto,

$$A^{\gamma}_{\epsilon\gamma,\lambda} - A^{\gamma}_{\lambda\gamma,\epsilon} + A_{\epsilon\lambda}^{\gamma},_{\gamma} = 0 \iff M^{[\alpha\mu]} = 0$$

Assim, (3.1.19) reduz-se a

$$M^{(\alpha\mu)} = 0 \tag{3.1.20}$$

Isto corresponde a dez condições devido à simetria em α e μ em (3.1.20). Mas $M^{(\alpha\mu)}$ tem traço nulo, devido a (3.1.9b). Assim, (3.1.20) reduz-se a $10-1=9$ condições independentes. Portanto, são necessárias 9 relações adicionais envolvendo $A_{\mu\nu\lambda}$ dadas por (3.1.20) para que esta variável possa descrever um campo de spin dois.

Para obter-se (3.1.20) de um formalismo Lagrangeano, é necessário adicionar-se multiplicadores de Lagrange à densidade Lagrangeana (3.1.14). Isto será feito com detalhe no capítulo seguinte bem como a demonstração de que as condições (3.1.20) reduzem efetivamente o número de graus de liberdade a cinco, como deve acontecer para um campo de spin dois massivo.

iii) - A Equivalência

No seu trabalho de 1939, Fierz afirma que as duas representações $\psi_{\mu\nu}$ e $A_{\mu\nu\lambda}$ são igualmente válidas para descrever um campo de spin dois. Elas implicam na mesma teoria e pode-se mostrar que são completamente equivalentes. Portanto, devem existir fórmulas que permitam a passagem de uma representação para a outra e vice-versa. De fato, afirmamos que tais fórmulas são dadas por:

$$A_{\mu\varepsilon\nu} = \psi_{\nu[\mu,\varepsilon]} + B\psi_{, [\mu\eta\varepsilon]\nu} - B\eta_{\nu[\varepsilon\psi_{\mu]}^{\alpha}, \alpha \quad (3.1.21a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2m^2} A_{(\mu\nu),\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{Q}{2m^2} (A_{\mu\varepsilon,\nu}^{\varepsilon} + A_{\nu\varepsilon,\mu}^{\varepsilon}) + \\ & -\frac{1}{3m^2} A^{\alpha\beta}_{\beta,\alpha\eta_{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (3.1.21b)$$

onde $Q \equiv \frac{1-B}{1-3B}$ e B é uma constante arbitrária.

Substituindo (3.1.21a) em (3.1.21b) obtemos (3.1.1). Uma vez obtida (3.1.1) e, como consequência, (3.1.2), inserimos esta última em (3.1.21a) encontrando as condições de compatibilidade (3.1.17). Substituindo agora (3.1.21b) em (3.1.21a) e usando (3.1.19) obtemos (3.1.18). Assim mostra-se a coerência do sistema de equações (3.1.21) com (3.1.1) e (3.1.18).

Podemos ir um passo adiante e considerar (3.1.21) como as expressões básicas da teoria que contém, como vimos acima, as equações de evolução para $\psi_{\mu\nu}$ (equação (3.1.1)) e para $A_{\mu\nu\lambda}$ (equação (3.1.18)). Note que os vínculos (3.1.2) e (3.1.19) de cada representação não são independentes mas apenas consequência uns dos outros através das relações (3.1.21).

Uma última observação se faz necessária. Ao substituímos (3.1.21a) em (3.1.16), obtemos uma equação diferencial de terceira ordem para $\psi_{\mu\nu}$. Isto, no entanto, não afetará as propriedades causais da teoria. O problema de Cauchy continuará bem posto, como veremos adiante. Este sistema de equações diferenciais de terceira ordem para $\psi_{\mu\nu}$ quando generalizado ao espaço curvo, nos levará às equações de Jordan-Lichnerowicz para a Relatividade Geral.

Se, no entanto, nos mantivermos em uma representação, lidaremos tão somente com equações diferenciais de segunda or -

TABELA 3.1.1 - Comparação entre os esquemas dinâmicos de campos de spin um e spin dois.

Elemento	Spin um	Representação de Fierz	Spin dois	Representação Padrão
Campo	$F_{\mu\nu}$	$C_{\mu\nu\rho\sigma}$	$\psi_{\mu\nu}$	$\psi_{\mu\nu}$
Potencial	A_μ	$A_{\mu\nu\rho}$	—	—
Lagrangeana	$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu$	$L = -\frac{1}{8} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{m^2}{2} A_{\mu\nu\rho} A^{\mu\nu\rho}$	$L = -\frac{1}{2} \psi_{\mu\nu} \left\{ \square \psi_{\mu\nu} - \psi^\rho_{(\mu, \nu), \beta} + \psi_{, \mu, \nu} + \eta_{\mu\nu} \left[\psi^{\alpha\beta}_{, \alpha, \beta} - \square \psi + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{m^2}{2} (\psi_{\alpha\beta} \psi^{\alpha\beta} - \psi^2) \right] \right\}$	$L = -\frac{1}{2} \psi_{\mu\nu} \left\{ \square \psi_{\mu\nu} - \psi^\beta_{(\mu, \nu), \beta} + \psi_{, \mu, \nu} + \eta_{\mu\nu} (\psi^{\alpha\beta}_{, \alpha, \beta} - \square \psi) + m^2 (\psi_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu} - \psi \eta_{\mu\nu}) \right\} = 0$
Dinâmica	$F^{\mu\nu}_{, \nu} + m^2 A^\mu = 0$	$C^{\alpha\beta\mu\nu}_{, \nu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu} = 0$	nenhum	$\psi^\alpha_{, \alpha} = 0$
Condição de compatibilidade algébrica	nenhum	$A^{\alpha\beta}_{, \beta} = 0$	nenhum	$\psi^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$
Condição de compatibilidade diferencial	$A^\mu_{, \mu} = 0$	$A^{\alpha\beta\mu}_{, \mu} = 0$	nenhum	nenhum
Vínculo adicional	nenhum	$A^{\alpha\beta\mu}_{, \beta} = 0$	nenhum	nenhum
Número de graus de liberdade	3	5	5	5

dem, tanto numa representação quanto na outra. Portanto, se não queremos nos envolver com equações diferenciais de terceira ordem, não devemos usar as relações (3.1.21) e trabalhar apenas numa representação. Qual delas, não importa. Ambas são completamente equivalentes quando descritas em termos de si próprias.

iv) Interação com Outros Campos

Na representação padrão, o campo $\psi_{\mu\nu}$ se acopla com o tensor momento-energia de outros campos e da matéria (representado por $T^{\mu\nu}$) através do termo universal:

$$L_{int} = f \psi_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (3.1.22)$$

onde f é a constante de acoplamento da interação. Consequentemente, as equações (3.1.6) serão modificadas para:

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{R} \eta^{\mu\nu} + 2m^2 (\psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \psi) = -f T_{\mu\nu} \quad (3.1.23)$$

De que maneira poderemos descrever o acoplamento de uma partícula de spin dois com outros campos através das variáveis de Fierz? Tentaremos responder a esta pergunta através de dois exemplos particulares e depois passaremos ao caso geral.

Considere, primeiramente, o caso de um campo escalar complexo cuja dinâmica seja descrita pela seguinte Lagrangeana:

$$L_{\phi} = \bar{\phi}_{,\mu} \phi_{,\nu} \eta^{\mu\nu} - V(\phi) \quad (3.1.24)$$

onde $\bar{\phi}$ é o complexo conjugado de ϕ e $V(\phi)$ é um potencial qualquer. Seja o operador $s_{\mu\nu\lambda}$ definido por

$$s_{\mu\nu\lambda} = \eta_{\lambda\nu} \partial_{\mu} - \eta_{\lambda\mu} \partial_{\nu} \quad (3.1.25)$$

Este operador satisfaz duas propriedades interessantes (compare com (3.1.9)):

$$s_{\mu\nu\lambda} = -s_{\nu\mu\lambda} \quad (3.1.26a)$$

$$s_{\mu\nu\lambda} + s_{\lambda\mu\nu} + s_{\nu\lambda\mu} = 0 \quad (3.1.26b)$$

Prova-se imediatamente que:

$$\frac{1}{6} s_{\mu\nu\lambda} \phi s^{\mu\nu\lambda} \bar{\phi} = \bar{\phi}_{, \mu} \phi_{, \nu} \eta^{\mu\nu}$$

Isto nos permite reescrever (3.1.24) da seguinte maneira:

$$L_{\phi} = \frac{1}{6} s_{\mu\nu\lambda} \phi s^{\mu\nu\lambda} \bar{\phi} - V(\phi) \quad (3.1.27)$$

O fato de o operador $s_{\mu\nu\lambda}$ apresentar as mesmas simetrias do tensor $A_{\mu\nu\lambda}$ leva-nos a propor um esquema de interação entre $A_{\mu\nu\lambda}$ e ϕ em termos de um princípio de acoplamento mínimo, analogamente ao que se faz em teorias de calibre. Para isso, definiremos o operador $S_{\mu\nu\lambda}$ da seguinte forma:

$$S_{\mu\nu\lambda} = s_{\mu\nu\lambda} - igA_{\mu\nu\lambda} \quad (3.1.28a)$$

$$\bar{S}_{\mu\nu\lambda} = s_{\mu\nu\lambda} + igA_{\mu\nu\lambda} \quad (3.1.28b)$$

onde g é a constante de acoplamento da interação.

Portanto a Lagrangeana (3.1.27) é, na presença de interação, generalizada para:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} &= \frac{1}{6} \bar{S}_{\mu\nu\lambda} \bar{\phi} S^{\mu\nu\lambda} \phi - V(\phi) = \\
 &= \partial_{\mu} \bar{\phi} \partial_{\nu} \phi \eta^{\mu\nu} - V(\phi) - \frac{ig}{3} A_{\mu} \bar{\phi}_{,\nu} \eta^{\mu\nu} \phi + \\
 &\quad + \frac{ig}{3} A_{\mu} \phi_{,\nu} \eta^{\mu\nu} \bar{\phi} + \frac{g^2}{6} \bar{\phi} \phi A^{\mu\nu\lambda} A_{\mu\nu\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

onde $A_{\mu} \equiv A_{\mu}^{\epsilon}$.

Depois de alguma manipulação algébrica, obtemos a seguinte expressão para L_{tot} :

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} &= (\partial_{\mu} + \frac{i}{3} g A_{\mu}) \bar{\phi} (\partial_{\nu} - \frac{i}{3} g A_{\nu}) + \\
 &\quad + \frac{1}{6} g^2 \bar{\phi} \phi a_{\mu\nu\lambda} a^{\mu\nu\lambda} - V(\phi)
 \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

onde $a_{\mu\nu\lambda}$ é a parte sem traço de $A_{\mu\nu\lambda}$, isto é,

$$a_{\mu\nu\lambda} \equiv A_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{3} A_{\mu} \eta_{\nu\lambda} + \frac{1}{3} A_{\nu} \eta_{\mu\lambda} .$$

Assim, podemos afirmar que os efeitos do acoplamento mínimo entre $A_{\mu\nu\lambda}$ e ϕ são dois: (i) a presença do traço de $A_{\mu\nu\lambda}$, A_{μ}^{λ} , e apenas o traço, como um campo vetorial minimalmente acoplado a ϕ e (ii) um termo de massa proporcional a $g^2 |\phi|^2$ para o campo $a_{\mu\nu\lambda}$.

Vejamos agora o caso da interação de um campo de spin 1/2 ψ com $A_{\mu\nu\lambda}$. A parte cinemática da Lagrangeana de um campo spinorial ψ é dada por:

$$L = i\psi^{\dagger} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi \tag{3.1.31}$$

onde $\psi^\dagger = \gamma_0 \bar{\psi}$ e γ^μ são as matrizes de Dirac (veja (27)).

Seja $\bar{z}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$. Por cálculo direto, mostra-se a seguinte identidade:

$$\Sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda = 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma_\rho \gamma_5 - \gamma^{[\nu} \eta^{\mu]\lambda} \quad (3.1.32)$$

Usando (3.1.32), podemos escrever (3.1.31) da seguinte forma:

$$L = \frac{i}{6} \psi^\dagger \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda (\eta_{\nu\lambda} \partial_\mu - \eta_{\mu\lambda} \partial_\nu) \psi \quad (3.1.33)$$

Novamente fizemos aparecer em L o operador $s_{\mu\nu\lambda}$ que através de um princípio de acoplamento mínimo, será substituído por $S_{\mu\nu\lambda}$ em (3.1.33). Assim, teremos

$$\begin{aligned} L &= \frac{i}{6} \psi^\dagger \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda (\eta_{\nu\lambda} \partial_\mu - \eta_{\mu\lambda} \partial_\nu - ig A_{\mu\nu\lambda}) \psi = \\ &= i \psi^\dagger \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{ig}{3} A_\mu) \psi \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Portanto, segundo este procedimento, o campo ψ interage apenas com o traço de $A_{\mu\nu\lambda}$. Repare que, como $\dim A_{\mu\nu\lambda} = (\text{comprimento})^{-1}$, a constante de acoplamento g é adimensional. Este método pode ser generalizado para campos com spin maior que 1/2 e para o espaço-tempo curvo.

Neste ponto duas importantes observações se fazem necessárias: i) em uma de suas tentativas de unificar o Eletromagnetismo à Gravitação, Einstein incorporou o campo eletromagnético à métrica do espaço-tempo (28). A tentativa fracassou. A utilização do tensor $A_{\mu\nu\lambda}$ na descrição da dinâmica do campo

gravitacional abre novas perspectivas nesta área já que associado a ele existe um campo vetorial $A_\mu = A_\mu^\lambda$ que é o que efetivamente participa do acoplamento de $A_{\mu\nu\lambda}$ com os campos escalar complexo e spinorial dentro do esquema proposto acima. Em outras palavras, ao se escrever $A_{\mu\nu\lambda}$ em termos de suas partes irreduzíveis (o que faremos no capítulo seguinte) obteremos como uma de suas partes um campo vetorial A_μ que pode ser associado ao potencial vetor do campo eletromagnético cuja interação com outros campos pode ser descrita pelo acoplamento proposto em (3.1.28). ii) O acoplamento proposto através de (3.1.30) e (3.1.33) pode ser útil na formulação de teorias de curto alcance do campo gravitacional como desenvolvido em (29) e (30).

Nos capítulos seguintes voltaremos a estes pontos com mais detalhe.

Passemos agora à descrição geral da interação do campo $A_{\mu\nu\lambda}$ com a matéria. Uma maneira simples e direta de generalizar o que fizemos até agora seria através de um acoplamento campo-corrente do tipo $J^{\mu\nu\lambda} A_{\mu\nu\lambda}$, em analogia com o termo $J^\mu A_\mu$ da eletrodinâmica. Entretanto, para que este esquema de interação seja coerente com (3.1.22), $J^{\mu\nu\lambda}$ deve ser construído em termos do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$.

Embora a presença de matéria quebre a simetria das relações (3.1.21), tomaremos (3.1.21b) em sua forma original. Esta é uma escolha arbitrária já que, devido à interação, uma das duas fórmulas (3.1.21) deve ser modificada.

Substituindo (3.1.21b) em (3.1.22) obtemos:

$$L_{int} = f \left(- \frac{1}{m^2} A_{\mu}^{\epsilon}{}_{\nu, \epsilon} T^{\mu\nu} + \frac{Q}{m^2} A_{\mu}^{\epsilon}{}_{\epsilon, \nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{3m^2} A^{\alpha\beta}{}_{\beta, \alpha} T \right) \quad (3.1.35)$$

onde $T \equiv T^{\mu}{}_{\mu}$. A ação, a menos de termos de superfícies, toma a forma

$$S_{int} = \int L_{int} d^4x = \frac{f}{m^2} \int A^{\mu\epsilon\lambda} \left(\frac{1}{2} T_{\lambda[\mu, \epsilon]} - \frac{1}{6} \eta_{\lambda[\mu} T_{, \epsilon]} - Q \eta_{\epsilon\lambda} T_{\mu}^{\alpha}{}_{, \alpha} \right) d^4x \quad (3.1.36)$$

Podemos usar a conservação de $T^{\mu\nu}$ para eliminar o último termo de (3.1.36) (alternativamente, poderíamos escolher $B = 1$ em (3.1.21) e conseqüentemente $Q = 0$, sem perda de generalidade, e adiar a discussão da conservação de $T_{\mu\nu}$). De (3.1.36) obtemos a corrente:

$$J_{\mu\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} T_{\lambda[\mu, \epsilon]} - \frac{1}{6} \eta_{\lambda[\mu} T_{, \epsilon]} \quad (3.1.37)$$

A constante de acoplamento f de (3.1.22) é adimensional. Faremos $f = km^2$ (em unidades naturais) para conformá-la mais tarde à teoria de Einstein. k é a constante de Einstein.

Examinaremos com mais cuidado as conseqüências da presença desta corrente para as equações de campo. Se usarmos as definições (3.1.4), (3.1.5) e a relação (3.1.21a) com $B = 0$ em (3.1.10) obtemos a seguinte relação:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{, \nu} = \frac{1}{2} \hat{R}^{\mu[\alpha, \beta]} - \frac{1}{12} \eta^{\mu[\alpha} R_{, \beta]} \quad (3.1.38)$$

da variável padrão $\psi_{\mu\nu}$ só pode ser feita se impusermos como condição inicial uma expressão contendo derivadas de segunda ordem para $\psi_{\mu\nu}$. Esta é uma condição necessária para que o problema de Cauchy seja bem posto.

Gostaríamos de enfatizar que a presença de derivadas de segunda ordem nos dados de Cauchy é tão somente uma consequência da passagem da representação $A_{\alpha\beta\mu}$ (eq. (3.1.40)) para a variável padrão via (3.1.21a). Se nos mantivermos com as variáveis de Fierz, as condições iniciais se limitarão a especificações sobre $A_{\alpha\beta\mu}$ e suas primeiras derivadas na superfície de Cauchy.

Para a eq. (3.1.42) é natural impor como condição inicial a equação (3.1.23) escrita de outra forma (calcula-se \hat{R} em função de ψ e T e substitui-se novamente em (3.1.23)):

$$\hat{S}_{\mu\nu} \equiv \hat{R}_{\mu\nu} + k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T\eta_{\mu\nu}) + 2m^2(\psi_{\mu\nu} + \frac{\psi}{2} \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.1.43)$$

como válida em uma hipersuperfície inicial Σ . De fato, de $\hat{S}_{\mu\nu}(\Sigma) = 0$, obtemos, em Σ :

$$\hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \hat{R}\eta_{\alpha\beta} + kT_{\alpha\beta} - \frac{k}{3} T\eta_{\alpha\beta} + 2m^2\psi_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.1.44)$$

(Se tirarmos o traço de (3.1.44), expressarmos \hat{R} em função de ψ e T e substituirmos este resultado de volta em (3.1.44), obteremos (3.1.43).) A equação (3.1.42) garante a validade da condição $\hat{S}_{\mu\nu} = 0$ por todo espaço-tempo ao futuro de Σ . Assim, a condição inicial (3.1.43) junto com (3.1.42) são equivalentes às equações de movimento (3.1.23) para a variável padrão.

Ao fazermos a extensão destas equações para o espaço-tempo curvo e identificarmos $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ com o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$, e $\hat{R}_{\mu\nu}$ com o tensor de curvatura contraído $R_{\mu\nu}$, chegaremos às bem conhecidas identidades de Bianchi. No Capítulo 5 examinaremos com mais detalhe esta extensão. Concentremo-nos por enquanto no espaço-tempo plano.

A ação total será dada por (veja (3.1.15)):

$$S_T = S_0 + S_{int} = \int d^4x \left(-\frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu} + \frac{k}{2} A^{\mu\varepsilon\lambda} (T_{\lambda[\mu,\varepsilon]} - \frac{1}{3} \eta_{\lambda[\mu} T_{,\varepsilon]}) \right) \quad (3.1.39)$$

o que nos leva à equação de movimento

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}_{,\nu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu} = -\frac{k}{2} T^{\mu[\alpha,\beta]} + \frac{k}{6} \eta^{\mu[\alpha} T_{,\beta]} \quad (3.1.40)$$

Subtraindo (3.1.38) de (3.1.40) obtemos:

$$\begin{aligned} & (\hat{R}_{\mu\alpha} - \frac{1}{6} \hat{R}\eta_{\mu\alpha} + kT_{\mu\alpha} - \frac{k}{3} T\eta_{\mu\alpha})_{,\beta} + \\ & - (\hat{R}_{\mu\beta} - \frac{1}{6} \hat{R}\eta_{\mu\beta} + kT_{\mu\beta} - \frac{k}{3} T\eta_{\mu\beta})_{,\alpha} = -2m^2 A_{\alpha\beta\mu} \quad (3.1.41) \end{aligned}$$

Usando (3.1.21a) com $B = 0$ temos:

$$\begin{aligned} & (\hat{R}_{\mu\alpha} - \frac{1}{6} \hat{R}\eta_{\mu\alpha} + kT_{\mu\alpha} - \frac{k}{3} T\eta_{\mu\alpha} + 2m^2\psi_{\mu\alpha})_{,\beta} + \\ & - (\hat{R}_{\mu\beta} - \frac{1}{6} \hat{R}\eta_{\mu\beta} + kT_{\mu\beta} - \frac{k}{3} T\eta_{\mu\beta} + 2m^2\psi_{\mu\beta})_{,\alpha} = 0 \quad (3.1.42) \end{aligned}$$

A equação (3.1.42) mostra que a descrição da teoria em termos

Portanto, no contexto da variável $A_{\mu\nu\lambda}$, a equação (3.1.43) para $\psi_{\mu\nu}$ (considerada como uma variável dependente relacionada a $A_{\mu\nu\lambda}$ através de (3.1.21)) é tão somente uma condição inicial a ser satisfeita numa determinada hipersuperfície Σ . Esta condição é mantida para além de Σ devido às equações dinâmicas satisfeitas por $A_{\mu\nu\lambda}$.

Com isto, concluímos a apresentação de uma teoria coerente para um campo de spin dois massivo em ambas representações e as relações entre elas. Este esquema alternativo, usando as variáveis de Fierz, é a versão massiva para o espaço-tempo plano da representação de Jordan-Lichnerowicz para a T.R.G., como veremos mais adiante.

3.2 - CASO SEM MASSA

Neste momento surgem duas questões fundamentais: tem a teoria precedente um limite bem definido quando a massa do campo de spin dois tende a zero? Assumindo que tenha, será ela equivalente à aproximação fraca da T.R.G.?

Ao examinarmos as equações (3.1.23) e (3.1.40) constatamos que o limite para a massa tendendo a zero é trivial resultando nas seguintes equações:

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{R} \eta_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu} \quad (3.2.1)$$

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}_{,\nu} = -\frac{k}{2} T^{\mu[\alpha,\beta]} + \frac{k}{6} \eta^{\mu[\alpha} T^{\beta]} \quad (3.2.2)$$

Já a relação (3.1.21b) não pode ser aplicada no limite m tendendo a zero. No entanto, como veremos mais adiante, as equações de evolução para pequenas flutuações do tensor métrico, $\Delta g_{\mu\nu}$, sobre um espaço-tempo curvo de fundo adquirem um termo de massa induzido pelo campo gravitacional de fundo, seja diretamente através da geometria (isto é, $\Delta m \sim R^{-1/2}$) ou pela existência de um campo de forças caracterizado pela constante de Newton ($\Delta m \sim (\Delta m)_{\text{Planck}} \sim k^{-1/2}$). Neste caso poderemos usar uma generalização de (3.1.21b) para espaços-tempos curvos. Este fato será fundamental para a construção da teoria geral no Capítulo 5.

Vamos agora responder à segunda parte da questão levantada no início desta seção. Dentro da aproximação linear da T.R.G. dada por (2.3), o tensor de curvatura e seus traços se escrevem da seguinte maneira (desprezando-se termos de ordem ε^2):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \approx \frac{\varepsilon}{2} (h_{\alpha\mu, \beta, \nu} + h_{\beta\nu, \alpha, \mu} - h_{\alpha\nu, \beta, \mu} - h_{\beta\mu, \alpha, \nu}) \quad (3.2.3)$$

$$R_{\alpha\mu} \approx \frac{\varepsilon}{2} \left[\square h_{\alpha\mu} + h_{, \alpha, \mu} - h_{(\alpha, \mu), \varepsilon} \right] \quad (3.2.4)$$

$$R \approx \varepsilon \left(\square h - h^{\varepsilon\lambda}_{, \varepsilon, \lambda} \right) \quad (3.2.5)$$

onde $h \equiv h_{\alpha\varepsilon} \eta^{\alpha\varepsilon}$.

Identificando

$$\psi_{\alpha\mu} \equiv \varepsilon \frac{h_{\alpha\mu}}{4} \quad (3.2.6)$$

verifica-se de (3.1.3), (3.1.4) e (3.1.5) que (3.2.1) é a equação de Einstein na sua aproximação fraca. Por outro lado, usando (3.2.6) em (3.1.21a) (com $B = 0$), verifica-se que $A_{\alpha\beta\mu}$ é precisamente o potencial de Lanczos dado por (2.8). Portanto, o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ definido em (3.1.10) é o próprio tensor de Weyl dado por (2.7). Assim, a equação (3.2.2) é a aproximação linear da equação de Jordan-Lichnerowicz. Do ponto de vista da variável padrão, esta equação é equivalente às equações de Einstein (3.2.1) desde que imponhamos condições iniciais apropriadas numa dada hipersuperfície inicial, exatamente como discutido na seção anterior.

Discutiremos agora algumas das propriedades da ação livre para o campo $A_{\mu\nu\lambda}$ no limite $m = 0$ dado por

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} \right) \quad (3.2.7)$$

i) Invariância de Calibre

Considere a seguinte transformação

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} + \tilde{A}_{\alpha\beta\mu} = A_{\alpha\beta\mu} + M_{\alpha}{}^{\eta}{}_{\beta\mu} - M_{\beta}{}^{\eta}{}_{\alpha\mu} \quad (3.2.8)$$

onde M_{α} é um campo vetorial arbitrário.

Por cálculo direto mostra-se, usando (3.1.10), que

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} [\tilde{A}_{\rho\sigma\lambda}] = C_{\alpha\beta\mu\nu} [A_{\rho\sigma\lambda}] \quad .$$

Isto significa que o traço $A_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\mu}$ é completamente arbitrário.

Outra invariância é obtida pela transformação:

$$A_{\alpha\beta\mu} \rightarrow \tilde{A}_{\alpha\beta\mu} = A_{\alpha\beta\mu} + \chi_{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{2} \chi_{\mu}[\alpha,\beta] \quad (3.2.9)$$

onde $\chi_{\alpha\beta}$ é um campo tensorial anti-simétrico arbitrário. A transformação (3.2.9) deixa invariante o tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. Consequentemente, as transformações (3.2.8) e (3.2.9) são invariâncias de calibre da ação (3.2.7).

Repare que mesmo a ação com termo de interação dado por (3.1.39) com $m^2 = 0$ apresenta a invariância de calibre (3.2.8) devido à conservação do tensor momento-energia. Este fato é análogo ao que acontece em eletrodinâmica onde a transformação de calibre $\tilde{A}_{\mu} = A_{\mu} + \lambda_{,\mu}$ está ligada à conservação de corrente ($J^{\mu}_{,\mu} = 0$).

Ao desenvolvermos o formalismo Hamiltoniano no próximo capítulo discutiremos com mais detalhes as invariâncias de calibre de (3.2.7).

ii) A energia

De acordo com o teorema de Noether, o tensor momento-energia do campo $A_{\mu\nu\lambda}$ é dado por

$$t^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial L}{\partial A^{\mu\nu\lambda}_{,\alpha}} A^{\mu\nu\lambda}_{,\beta} - L \delta^{\alpha}_{\beta} \quad (3.2.10)$$

Mas

$$\frac{\partial (-\frac{1}{8} C^{\rho\sigma\epsilon\lambda} C_{\rho\sigma\epsilon\lambda})}{\partial A^{\mu\nu\lambda}_{,\alpha}} = -\frac{1}{4} C_{\rho\sigma\epsilon\gamma} \frac{\partial C^{\rho\sigma\epsilon\gamma}}{\partial A^{\mu\nu\lambda}_{,\alpha}} = -C_{\mu\nu\lambda\gamma} \eta^{\gamma\alpha} .$$

Portanto obtemos

$$t^{\alpha}_{\beta} = -C^{\mu\nu\lambda\alpha} A_{\mu\nu\lambda,\beta} + \frac{1}{8} C^{\mu\nu\lambda\epsilon} C_{\mu\nu\lambda\epsilon} \delta^{\alpha}_{\beta} . \quad (3.2.11)$$

Uma consequência direta da definição (3.1.13) de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ é a identidade:

$$C^{\alpha\mu\nu\lambda} C_{\beta\mu\nu\lambda} = \frac{1}{4} C^{\rho\mu\nu\lambda} C_{\rho\mu\nu\lambda} \delta^{\alpha}_{\beta} \quad . \quad (3.2.12)$$

Usando (3.1.10) obtemos uma relação equivalente a (3.2.12) dada por:

$$\begin{aligned} 2C^{\alpha\mu\nu\lambda} A_{\beta\mu\nu,\lambda} + C^{\alpha\mu\nu\lambda} (A_{\nu\lambda\beta,\mu} - A_{\nu\lambda\mu,\beta}) \\ + A_{(\mu\nu)} C^{\alpha\mu\nu}_{\beta} = \frac{1}{4} C^{\rho\mu\nu\lambda} C_{\rho\mu\nu\lambda} \delta^{\alpha}_{\beta} \quad . \quad (3.2.13) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{4} C^{\mu\nu\lambda\varepsilon} C_{\mu\nu\lambda\varepsilon} \delta^{\alpha}_{\beta}$ a (3.2.11), usando (3.2.13) e as equações de movimento para o vazio $C^{\alpha\beta\mu\nu}_{,\nu} = 0$ obtemos a seguinte expressão para (3.2.11):

$$\begin{aligned} t^{\alpha}_{\beta} = -\frac{1}{8} C^{\rho\mu\nu\lambda} C_{\rho\mu\nu\lambda} \delta^{\alpha}_{\beta} - C^{\alpha}_{\rho\beta\sigma} A^{(\rho\sigma)} + \\ + (2C^{\alpha\mu\nu\lambda} A_{\beta\mu\nu} + C^{\alpha\lambda\nu\mu} A_{\nu\mu\beta})_{,\lambda} \quad (3.2.14) \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos usar o formalismo de Einstein da T.R.G. para definir o tensor momento-energia através da variação da Lagrangeana (3.2.7) com relação à geometria. Obtemos assim uma expressão para o tensor momento-energia idêntica à (3.2.14) a menos de uma divergência total.

Com isso completamos o estudo da dinâmica de um campo de spin dois no espaço-tempo de Minkowski nas representações padrão e de Fierz. Mostramos a equivalência entre ambas

e que a teoria construída na representação de Fierz corresponde, em última análise, à aproximação linear da teoria de Jordan-Lichnerowicz para a T.R.G.. Passaremos agora ao estudo do formalismo Hamiltoniano para a representação de Fierz, sua estrutura de vínculos e contagem dos graus de liberdade.

CAPÍTULO 4

FORMALISMO HAMILTONIANO PARA AS VARIÁVEIS DE FIERZ NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Para o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano é necessário realizar a decomposição do espaço-tempo em espaço e tempo para que possamos definir os momentos canonicamente conjugados às variáveis de Fierz. Assim, estas variáveis serão decompostas em suas partes irredutíveis da seguinte maneira (ver quadro abaixo):

Nome da variável	Número de componentes independentes (η_i)	
$\phi \equiv A^{\ell}_{0\ell}$	1	(4.1a)
$\xi_i \equiv A^0_{i0}$	3	(4.1b)
$\gamma_i \equiv A^{\ell}_{i\ell}$	3	(4.1c)
$\beta_{ij} \equiv A_{ij}^0$	3	(4.1d)
$\alpha_{ij} \equiv A_{(ij)}^0 - \frac{2}{3} A^{\ell}_{0\ell} \eta_{ij}$	5	(4.1e)
$\Delta_{ijk} \equiv A_{ijk} - \frac{1}{2} \eta_{k[i} A^{\ell}_{j]\ell}$	5	(4.1f)

De (4.1) vemos que $\alpha_{ij} \eta^{ij} = 0$ e $\Delta_{ijk} \eta^{ik} = 0$. Examinemos primeiramente o caso em que a massa m do campo não é nula.

i) Caso com Massa

A densidade Lagrangeana L , definida por

$$L = -\frac{1}{8} C^{\alpha\beta\mu\nu} C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^{\alpha\beta\mu} A_{\alpha\beta\mu}$$

pode ser escrita (usando as simetrias (3.1.11) de $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ e (3.1.9) de $A_{\alpha\beta\mu}$) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} C^{ioj\circ} C_{ioj\circ} - \frac{1}{2} C^{ijk\circ} C_{ijk\circ} + \\ & -\frac{1}{8} C^{ijkl} C_{ijkl} + m^2 (\xi^i \xi_i + \frac{1}{4} \alpha_{ij} \alpha^{ij} + \\ & + \frac{3}{4} \beta_{ij} \beta^{ij} + \frac{1}{2} \Delta^{ijk} \Delta_{ijk} + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma_i + \frac{1}{3} \phi^2) . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note que:

$$C^{ioj\circ} n_{ij} = C^{ioj\circ} n_{ij} + C^{oooo} n_{oo} = C^{\alpha\circ\mu\circ} n_{\alpha\mu} = 0 \quad (4.3)$$

$$C^{ijk\circ} n_{ik} = C^{ijk\circ} n_{ik} + C^{oj\circ\circ} n_{oo} = C^{\alpha j\mu\circ} n_{\alpha\mu} = 0 \quad (4.4)$$

$$C^{ijkl} n_{ik} = C^{\alpha j\mu\lambda} n_{\alpha\mu} - C^{oj\circ\lambda} n_{oo} = -C^{oj\circ\lambda} \quad (4.5)$$

A parte sem traço de C_{ijkl} é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijkl} = & C_{ijkl} + C_{ioko} n_{j\lambda} + C_{jolo} n_{ik} + \\ & - C_{io\circ\lambda} n_{jk} - C_{joko} n_{i\lambda} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{8} C_{ijkl} C^{ijkl} &= -\frac{1}{8} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{C}^{ijkl} + \\
 &\quad -\frac{1}{2} C^{iojo} C_{iojo}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

A generalização da expressão (3.1.10) para um número de dimensões d , arbitrário, é:

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\mu\nu} &= A_{\alpha\beta[\mu,\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha,\beta]} + \\
 &\quad + \frac{1}{d-2} (A_{(\alpha\nu)} \eta_{\beta\mu} + A_{(\beta\mu)} \eta_{\alpha\nu} - A_{(\alpha\mu)} \eta_{\beta\nu} - \\
 &\quad A_{(\beta\nu)} \eta_{\alpha\mu}) + \\
 &\quad + \frac{4}{(d-2)(d-1)} A^{\sigma\lambda}_{\sigma,\lambda} (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Os índices gregos, nessa fórmula, variam de 0 a $(d-1)$.

Assim, como estamos trabalhando em quatro dimensões espaço-temporais, \tilde{C}_{ijkl} será dado por (4.8) para $d=3$ (lembrando que os índices latinos são índices espaciais que variam de 1 a 3). Devido às simetrias (3.1.11) teremos então que \tilde{C}_{ijkl} se anula identicamente, isto é,

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{ijkl} &= A_{ij[k,\ell]} + A_{k\ell[i,j]} + A_{(i\ell)} \eta_{jk} + \\
 &\quad + A_{(jk)} \eta_{i\ell} - A_{(ik)} \eta_{j\ell} - A_{(j\ell)} \eta_{ik} + \\
 &\quad + 2A^{mn}_{m,n} (\eta_{ik} \eta_{j\ell} - \eta_{i\ell} \eta_{jk}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Usando (3.1.10) e as definições (4.1), obtemos:

$$C_{ioj\circ} = \frac{1}{2} (\dot{\alpha}_{ij} + \xi_{(i,j)} - \frac{1}{2} \gamma_{(i,j)} + \Delta_{(i^p j),p}) + \frac{1}{3} (\frac{1}{2} \gamma^p_{,p} - \xi^p_{,p}) \eta_{ij} \quad (4.10)$$

$$C_{ijk\circ} = \dot{\Delta}_{ijk} + \frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} - \beta_{ij,k} + \frac{1}{2} \beta_{k[i,j]} + \frac{1}{2} \eta_{kj} (\frac{3}{2} \beta_i^{\ell},_{\ell} - \frac{1}{2} \alpha_i^{\ell},_{\ell}) + \frac{1}{2} \eta_{ki} (\frac{3}{2} \beta_j^{\ell},_{\ell} - \frac{1}{2} \alpha_j^{\ell},_{\ell}) \quad (4.11)$$

Note que se substituirmos (4.10) e (4.9) em (3.1.10), para obtermos C_{ijkl} , chegaremos à expressão (4.6).

Usando as relações (4.7) e (4.9) na expressão da Lagrangeana (4.2), obtemos:

$$L = -C^{ioj\circ} C_{ioj\circ} - \frac{1}{2} C^{ijk\circ} C_{ijk\circ} + m^2 (\xi_i \xi^i + \frac{1}{4} \alpha_{ij} \alpha^{ij} + \frac{3}{4} \beta_{ij} \beta^{ij} + \frac{1}{2} \Delta^{ijk} \Delta_{ijk} + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma_i + \frac{1}{3} \phi^2) \quad (4.12)$$

As equações de movimento (3.1.16) e as condições de compatibilidade (3.1.17) escritas usando a decomposição (3+1) do espaço-tempo são obtidas da ação $S = \int L d^4x$, sendo L dado por (4.12), (4.10) e (4.11), da seguinte maneira.

Variação de ϕ implica em:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \implies \phi = 0 \quad (4.13a)$$

relação idêntica a $A_{\alpha\beta}^{\alpha} = 0$ para $\beta = 0$.

Variando ξ_i tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \xi_i} = 0 &\implies \int (-2C^{ioj0} \delta C_{ioj0} + 2m^2 \xi^i \delta \xi_i) d^4x = 0 \\ &\implies \int (2C^{ioj0}_{,j} + 2m^2 \xi^i) \delta \xi_i d^4x = 0 \implies \\ &\implies C^{oioj}_{,j} + m^2 \xi^i = 0 \end{aligned} \quad (4.13b)$$

idêntica a (3.1.16) para $\alpha = 0$, $\beta = i$ e $\mu = 0$.

Variando γ_i temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \gamma_i} = 0 &\implies \int (-2C^{ioj0} \delta C_{ioj0} + m^2 \gamma^i \delta \gamma_i) d^4x = 0 \\ &\implies \int (-C^{ioj0}_{,j} + m^2 \gamma^i) \delta \gamma_i d^4x = 0 \implies \\ &\implies C^{oioj}_{,j} - m^2 \gamma^i = 0 \end{aligned} \quad (4.13c)$$

relação esta obtida de (3.1.16) para $\alpha = k$, $\beta = i$, $\mu = j$ com -
traindo-a nos índices k e j e usando (4.6) e (4.9).

Somando (4.13b) com (4.13c) obtemos a condição de
compatibilidade (3.1.17a) para $\beta = i$, isto é, $\xi_i + \gamma_i = 0$.

Variação de β_{ij} implica em:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \beta_{ij}} = 0 &\implies \\ &\implies \int (-C^{ijk0} \delta C_{ijk0} + \frac{3}{2} m^2 \beta^{ij} \delta \beta_{ij}) d^4x = 0 \implies \\ &\implies \int (-\frac{3}{2} C^{ijk0}_{,k} + \frac{3}{2} m^2 \beta^{ij}) \delta \beta_{ij} d^4x = 0 \implies \\ &\implies C^{ijok}_{,k} + m^2 \beta^{ij} = 0 \end{aligned} \quad (4.13d)$$

que é idêntica a (3.1.16) para $\alpha = i$, $\beta = j$ e $\mu = 0$.

Variação de α_{ij} dará

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \alpha_{ij}} = 0 &\implies \\ \implies \int & (-2C^{iojo} \delta C_{iojo} - C^{ijk0} \delta C_{ijk0} + \\ & + \frac{1}{2} m^2 \alpha^{ij} \delta \alpha_{ij}) d^4x = 0 \implies \\ \implies \int & \left[C^{iojo}_{,0} + \frac{1}{2} (C^{ikjo} + C^{ijio})_{,k} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m^2 \alpha^{ij} \delta \alpha_{ij} \right] d^4x = 0 \\ \implies & 2C^{iojo}_{,0} + (C^{j0ik} + C^{iojk})_{,k} + m^2 \alpha^{ij} = 0 \quad (4.13e) \end{aligned}$$

obtida da parte sem traço de (3.1.16) para $\alpha = i$, $\beta = 0$ e $\mu = j$ simetrizada em i e j .

Variando-se Δ_{ijk} tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Delta_{ijk}} = 0 &\implies \int (-2C^{iojo} \delta C_{iojo} + \\ & - C^{ijk0} \delta C_{ijk0} + m^2 \Delta^{ijk} \delta \Delta_{ijk}) d^4x = 0 \implies \\ \implies \int & \left[(-C_{ioko,j} + C_{joko,i}) + C_{ijk}^0_{,0} + \right. \\ & \left. + m^2 \Delta_{ijk} \right] \delta \Delta^{ijk} d^4x = 0 \implies \\ \implies & C_{ijk}^0_{,0} - C_{ioko,j} + C_{joko,i} + m^2 \Delta_{ijk} = 0 \quad (4.13f) \end{aligned}$$

que é precisamente a equação obtida da parte sem traço de (3.1.16) para $\alpha = i$, $\beta = j$ e $\mu = k$ e utilizando-se as relações (4.6) e (4.9).

Temos também as condições de compatibilidade $A_{\alpha\beta\mu, \mu} = 0$ que em termos de suas partes irredutíveis se escrevem como:

$$\dot{\beta}_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} - \Delta_{ij, k}^k \quad (4.13g)$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{1}{2} (\alpha_i^\ell + \beta_i^\ell)_{, \ell} \quad (4.13h)$$

(já que $\phi = 0$).

Nestes cálculos usamos as propriedades $C_{iojo} \eta^{ij} = 0$, $C_{ijko} \eta^{ik} = 0$, $C_{ijko} + C_{kijo} + C_{jkio} = 0$ e (3.1.9).

Portanto, a Lagrangeana (4.12) fornece as equações (3.1.16) e (3.1.17) em termos de suas partes irredutíveis. No entanto, seguindo os comentários feitos com relação à equação (3.1.19), devemos adicionar as 9 equações de vínculo (3.1.20) ao sistema de equações (4.13) para que a variável $A_{\mu\nu\lambda}$ possa representar um campo de spin dois.

Definamos:

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta\mu\nu} &= \varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} M^\lambda_\nu + \varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} M^\lambda_\nu = A_{\alpha\beta\nu, \mu} + A_{\mu\alpha\nu, \beta} + A_{\beta\mu\nu, \alpha} + \\ &- \frac{1}{2} \eta_{\nu\alpha} (A_{[\beta, \mu]} + A_{\beta\mu}^\lambda{}_{, \lambda}) + \\ &+ \frac{1}{2} \eta_{\nu\beta} (A_{[\alpha, \mu]} + A_{\alpha\mu}^\lambda{}_{, \lambda}) - \frac{1}{2} \eta_{\nu\mu} (A_{[\alpha, \beta]} + A_{\alpha\beta}^\lambda{}_{, \lambda}) \quad (4.14) \end{aligned}$$

onde $A_\beta \equiv A^\varepsilon_{\beta\varepsilon}$.

Note que $\theta_{\alpha\beta\mu\nu}$ é totalmente antissimétrico em α, β

e μ ; tem traço nulo ($\theta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = 0$) e $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\theta_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ (já que $A_{\alpha\beta\mu}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$). Assim, o número de componentes independentes de $\theta_{\alpha\beta\mu\nu}$ é $16-6-1 = 9$, o mesmo número de componentes de $M^{(\alpha\mu)}$. Fazendo a separação (3+1) do espaço-tempo, podemos escrever as partes irredutíveis de $\theta_{\alpha\beta\mu\nu}$ de modo simples, a saber:

$$M_{ijk} \equiv \theta_{ijko} = \beta_{ij,k} + \beta_{ki,j} + \beta_{jk,i} \quad (4.15a)$$

(1 componente independente)

$$\begin{aligned} N_{ij} \equiv \theta_{ijoo} &= \frac{1}{2} \dot{\beta}_{ij} + \frac{1}{2} \xi_{[i,j]} + \\ &- \frac{1}{2} \Delta_{ij}{}^m{}_{,m} - \frac{1}{4} \gamma_{[i,j]} \end{aligned} \quad (4.15b)$$

(3 componentes independentes)

$$\begin{aligned} O_{ijk} \equiv \theta_{ijok} &= \dot{\Delta}_{ijk} - \frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} + \\ &- \frac{1}{2} \beta_{ij,k} - \frac{1}{4} \eta_{ki} (\alpha^{\ell}_{j,\ell} - \beta^{\ell}_{j,\ell}) + \\ &+ \frac{1}{4} \eta_{kj} (\alpha^{\ell}_{i,\ell} - \beta^{\ell}_{i,\ell}) \end{aligned} \quad (4.15c)$$

(5 componentes independentes)

A parte θ_{ijkl} de $\theta_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem 3 componentes independentes e portanto pode ser escrito apenas em termos do seu traço $\theta_{ij}{}^{\ell}{}_{\ell}$ que possui também 3 componentes independentes. Mas $\theta_{ij\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = 0 \implies \theta_{ij}{}^{\ell}{}_{\ell} = -\theta_{ijoo} = -N_{ij}$. Assim,

$$\theta_{ijkl} = -(N_{ij}\eta_{kl} + N_{jl}\eta_{ki} + N_{li}\eta_{kj}) \quad (4.15d)$$

e portanto $N_{ij} = 0 \implies \theta_{ijkl} = 0$.

Igualando as quantidades definidas em (4.15a, b, c) a zero obteremos as nove equações de vínculo necessárias para que a presente teoria nos dê a dinâmica de um único campo de spin dois. Portanto, adicionaremos à Lagrangeana (3.1.14) o termo $\Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \theta_{\alpha\beta\mu\nu}$ onde $\Omega^{\alpha\beta\mu\nu}$ é um multiplicador de Lagrange. Entretanto, a pura e simples adição deste vínculo à (3.1.14) (ou (4.12)) levaria a uma modificação das equações de movimento (4.13). Para que isto não ocorra, adicionaremos também a (4.12) o termo $\frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\rho\sigma\theta\phi}$ onde $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ é outro multiplicador de Lagrange. Este termo adicional implicará na nulidade de $\Omega_{\alpha\beta\mu\nu}$.

A Lagrangeana total será então dada por:

$$L_T = L + \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \theta_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\rho\sigma\theta\phi} \quad (4.16a)$$

Como $\Omega^{ijl}{}_{\ell} = -\Omega^{ij00}$ temos:

$$L_T = L + \Omega^{ijk} O_{ijk} + \tau^{ij} N_{ij} + \rho^{ijk} M_{ijk} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\rho\sigma\theta\phi} \quad (4.16b)$$

onde $\Omega^{ijk} \equiv 3\Omega^{ijok}$, $\tau^{ij} \equiv 6\Omega^{ij00}$, $\rho^{ijk} \equiv \Omega^{ijk0}$ e L é dada por (4.12).

Portanto, variando a ação em relação a todas as variáveis independentes encontramos, respectivamente,

$$\frac{\delta \left(\int L_T d^4x \right)}{\delta Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}} = 0 \implies \frac{1}{2} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\rho\sigma\theta\phi} = 0 \implies \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (4.17a)$$

$$\frac{\delta \left(\int L_T d^4 x \right)}{\delta \Omega_{ijk}} = 0 \implies O_{ijk} + Q_{ijk\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \Omega^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = 0$$

$$\implies O_{ijk} = 0 \quad (4.17b)$$

$$\frac{\delta \left(\int L_T d^4 x \right)}{\delta \tau_{ij}} = 0 \implies N_{ij} + Q_{ij\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \Omega^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = 0$$

$$\implies N_{ij} = 0 \quad (4.17c)$$

$$\frac{\delta \left(\int L_T d^4 x \right)}{\delta \rho_{ijk}} = 0 \implies M_{ijk} + Q_{ijk\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \Omega^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = 0$$

$$\implies M_{ijk} = 0 \quad (4.17d)$$

Assim obtemos de um princípio variacional os vínculos $O_{ijk} = 0$, $N_{ij} = 0$ e $M_{ijk} = 0$ que correspondem precisamente ao resultado da separação 3+1 do vínculo $\theta_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$.

A variação de L_T com relação às partes irreduzíveis de $A_{\alpha\beta\mu}$ continuarão fornecendo as equações (4.13) devido à (4.17a). No final deste capítulo comentaremos sobre a possibilidade da não inclusão destes multiplicadores de Lagrange à (4.12).

Calculemos agora os momentos canonicamente conjugados às variáveis (4.1) e a Hamiltoniana associada à (4.16). Para isto usaremos (4.16), (4.12), (4.10) e (4.11) obtendo

$$\Pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = 0 \quad (4.18a)$$

$$\Pi^i \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\xi}_i} = 0 \quad (4.18b)$$

$$P^i \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}_i} = 0 \quad (4.18c)$$

$$P^{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\beta}_{ij}} = \tau^{ij} \quad (4.18d)$$

$$P^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \equiv \frac{\delta L}{\delta Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}} = 0 \quad (4.18e)$$

$$P_{ijk} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\Omega}^{ijk}} = 0 \quad (4.18f)$$

$$\Sigma_{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\tau}^{ij}} = 0 \quad (4.18g)$$

$$\Sigma_{ijk} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\rho}^{ijk}} = 0 \quad (4.18h)$$

$$\Pi^{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}_{ij}} = -C^{iojo} \quad (4.19a)$$

$$\Pi^{ijk} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\Delta}^{ijk}} = -C^{ijk0} + \Omega^{ijk} \quad (4.19b)$$

onde $L \equiv \int L_T d^3x$.

As relações (4.18) constituem os chamados vínculos primários (para uma revisão de sistemas Hamiltonianos com vínculos veja o Apêndice A e as referências ali contidas).

Usando as definições (3.1.12) ou (3.1.13), obtemos de (4.19) as seguintes expressões:

$$\Pi_{ij} = E_{ij} \quad (4.20a)$$

$$\Pi_{ijk} = \varepsilon_{ij\ell} B^{\ell k} + \Omega_{ijk} \quad (4.20b)$$

Note que o fato de estarmos lidando com um duplo par de índices anti-simétricos no tensor $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ faz com que os momentos canonicamente conjugados estejam não só associados à parte "elétrica" do campo (E_{ij}) (que é o que ocorre no caso de campos de spin 1) como também com a sua parte "magnética" (B_{ij}).

O espaço de configurações da teoria será constituído das vinte quantidades em $A_{\alpha\beta\mu}$, dadas por (4.1), mais os nove $\Omega_{\alpha\beta\mu\nu}$ e os quarenta e cinco $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$, ou seja, ao todo setenta e quatro (vezes ∞^3 devido ao fato de serem campos em três dimensões) variáveis canônicas independentes (que denotaremos simplesmente por $q(x)$). O espaço de fase será constituído das 74 variáveis canônicas mais os seus 74 respectivos momentos canonicamente conjugados dados por (4.18) e (4.19) (denotados por $p(x)$). A Lagrangeana (4.15) é função de q e \dot{q} enquanto a densidade Hamiltoniana é função apenas de q e p . Esta é obtida daquela mediante a transformação de Legendre $H(q,p) = p\dot{q} - L(q,\dot{q})$. Devido aos vínculos (4.18), a densidade Hamiltoniano total será dada por:

$$\begin{aligned}
 H_T = & \Pi^{ij}\dot{\alpha}_{ij} + \Pi^{ijk}\dot{\Delta}_{ijk} + P^{ij}\dot{\beta}_{ij} - L_T + \\
 & + M\Pi + Y_i\Pi^i + X_i P^i + Z_{ij} (P^{ij} - \tau^{ij}) + \\
 & + D^{ijk}P_{ijk} + R^{ij}\Sigma_{ij} + \lambda^{ijk}\Sigma_{ijk} + \\
 & + S^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} P_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} = -\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^{ijk}\Pi_{ijk} + \\
 & + \Pi^{ij}(\gamma_{i,j} - \frac{1}{3} \gamma^k_{,k} \eta_{ij}) + 2\Pi^{ij}\Delta_{i,j,m}^m + \\
 & + 2\Pi^{ij}(-\xi_{i,j} + \frac{1}{3} \xi^k_{,k} \eta_{ij}) + \Pi^{ijk}(\beta_{ij,k} + \\
 & - \frac{1}{2} \beta_{k[i,j]} - \frac{3}{4} \eta_{k[i}\beta^{\ell}_{j],\ell}) + \Pi^{ijk} (\frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} + \\
 & + \frac{1}{4} \eta_{k[i}\alpha_{j]^\ell, \ell}) - m^2(\xi^k \xi_k + \frac{1}{4} \alpha^{ik} \alpha_{ik} + \\
 & + \frac{3}{4} \beta^{ik} \beta_{ik} + \frac{1}{2} \Delta^{ijk} \Delta_{ijk} + \frac{1}{2} \gamma^\ell \gamma_\ell + \frac{1}{3} \phi^2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \Omega^{ijk} \left[-\Pi_{ijk} - \alpha_{k[i,j]} + \beta_{ij,k} - \frac{1}{2} (\alpha_j^{\ell} + \beta^{\ell}_j)_{,\ell} \eta_{ik} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (\alpha_i^{\ell} + \beta^{\ell}_i)_{,\ell} \eta_{jk} \right] - \frac{\tau^{ij}}{2} (\xi_{[i,j]} - \Delta_{ij}^m{}_{,m} + \\
 & - \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]}) - \rho^{ijk} (\beta_{ij,k} + \beta_{ki,j} + \beta_{jk,i}) + \\
 & + \frac{1}{2} \Omega^{ijk} \Omega_{ijk} - \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\rho\sigma\theta\phi} + \\
 & + M\Pi + Y_i \Pi^i + X_i P^i + Z_{ij} (P^{ij} - \tau^{ij}) + \\
 & + D^{ijk} P_{ijk} + R^{ij} \Sigma_{ij} + \lambda^{ijk} \Sigma_{ijk} + \\
 & + S^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} P_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

onde usamos (4.19), (4.18d), (4.10) e (4.11) para eliminarmos $\dot{\alpha}_{ij}, \dot{\beta}_{ij}$ e $\dot{\Delta}_{ijk}$ e $M, Y_i, X_i, Z_{ij}, D_{ijk}, R_{ij}, \lambda_{ijk}$ e $S_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ são multiplicadores de Lagrange.

Os parênteses de Poisson diferentes de zero entre as variáveis canônicas são dados por:

$$\{\phi(x), \Pi(y)\} = \delta^3(x-y) \tag{4.22a}$$

$$\{\xi_i(x), \Pi^j(y)\} = \delta^j_i \delta^3(x-y) \tag{4.22b}$$

$$\{\gamma_i(x), P^j(y)\} = \delta^j_i \delta^3(x-y) \tag{4.22c}$$

$$\{\beta_{ij}(x), P^{k\ell}(y)\} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^\ell - \delta_i^\ell \delta_j^k) \delta^3(x-y) \tag{4.22d}$$

$$\{Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}(x), P^{\varepsilon\tau\lambda\gamma\delta\pi\chi\eta}(y)\} = \delta_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}^{\varepsilon\tau\lambda\gamma\delta\pi\chi\eta} \delta^3(x-y) \tag{4.22e}$$

onde $\delta_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}^{\varepsilon\tau\lambda\gamma\delta\pi\chi\eta}$ é um tensor construido com produtos de $\delta_\alpha^\varepsilon$ e com

as mesmas simetrias de $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}(x)$ e $P^{\varepsilon\tau\lambda\gamma\delta\pi\chi\eta}(y)$. Sua forma explícita não será necessária.

$$\{\tau^{ij}(x), \Sigma_{k\ell}(y)\} = \frac{1}{2} (\delta_k^i \delta_\ell^j - \delta_k^j \delta_\ell^i) \delta^3(x-y) \quad (4.22f)$$

$$\{\rho^{ijk}(x), \Sigma_{\ell mn}(y)\} = \frac{1}{6} (\delta_k^i \delta_m^j \delta_n^k + \delta_m^i \delta_n^j \delta_\ell^k + \delta_n^i \delta_\ell^j \delta_m^k - \delta_m^i \delta_\ell^j \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^j \delta_\ell^k - \delta_\ell^i \delta_n^j \delta_m^k) \delta^3(x-y) \quad (4.22g)$$

$$\{\Omega^{ijk}(x), P_{\ell mn}(y)\} = \frac{1}{2} (\delta_\ell^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_\ell^j) \delta_n^k \delta^3(x-y) \quad (4.22h)$$

$$\{\Delta_{ijk}(x), \Pi^{\ell mn}(y)\} = \frac{1}{2} (\delta_i^\ell \delta_j^m - \delta_j^\ell \delta_i^m) \delta_k^n \delta^3(x-y) \quad (4.22i)$$

Repare que apesar de Ω^{ijk} , P_{ijk} , Δ_{ijk} e Π^{ijk} não terem traço nem parte cíclica (isto é, $\Omega_{ijk} \varepsilon^{ijk} = \Delta_{ijk} \varepsilon^{ijk} = P_{ijk} \varepsilon^{ijk} = \Pi_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 0$) não retiramos estas partes de (4.22h) e (4.22i) já que neste momento só calcularemos os parênteses de Poisson com H_T e todos os termos que multiplicam Ω_{ijk} , P_{ijk} , Δ_{ijk} e Π_{ijk} em H_T já têm seus traços e partes cíclicas retiradas (veja (4.2.1)). Quando necessário, escreveremos a forma completa destes parênteses de Poisson

$$\{\alpha^{ij}(x), \Pi_{k\ell}(y)\} = \frac{1}{2} (\delta_k^i \delta_\ell^j + \delta_\ell^i \delta_k^j) \delta^3(x-y) \quad (4.22j)$$

Note que, como acima, apesar de α_{ij} e Π^{ij} terem traço nulo, não retiramos o traço de (4.22j) já que os termos que multiplicam α_{ij} e Π^{ij} em (4.21) já estão sem os seus respectivos traços. Na próxima seção escreveremos a forma completa destes parênteses de Poisson.

Verificaremos agora a conservação no tempo dos vínculos primários (4.18). Usaremos para isto as relações (4.22), as propriedades dos parênteses de Poisson listadas no Apêndice A e a Hamiltoniana total que é dada por:

$$H_T = \int H_T(y) d^3y \quad (4.23)$$

onde H_T é dado por (4.21). Assim temos:

a) para o vínculo (4.18e):

$$\dot{P}_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} = \{P_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}, H_T\} = \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta\mu\nu} \Omega_{\rho\sigma\theta\phi}$$

obtendo os vínculos secundários

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega_{\rho\sigma\theta\phi} \approx 0 &\implies \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \approx 0 \\ &\implies \begin{cases} \Omega^{ijk} \approx 0 \\ \tau^{ij} \approx 0 \\ \rho^{ijk} \approx 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.24a)$$

que correspondem às equações de movimento (4.17a).

b) Para o vínculo (4.18a):

$$\dot{\Pi} = \{\Pi, H_T\} = \frac{2}{3} m^2 \phi$$

Obtemos o vínculo secundário

$$\phi \approx 0 \quad (4.24b)$$

correspondente à equação de movimento (4.13a).

c) Para o vínculo (4.18b):

$$\begin{aligned}
 \dot{\Pi}^i(x) &= \{\Pi^i(x), H_T\} = - \iint \frac{\delta \Pi^i(x)}{\delta \Pi^{\lambda}(z)} \frac{H_T(y)}{\delta \xi_{\lambda}(z)} d^3z d^3y \\
 &= - \iint \delta_{\lambda}^i \delta(x-z) \left[-2\Pi^{ab}(y) \frac{\delta(\xi_{a,b}(y))}{\delta \xi_{\lambda}(z)} + \right. \\
 &\quad \left. - m^2 \frac{\delta(\xi_k(y)\xi^k(y))}{\delta \xi_{\lambda}(z)} \right] d^3z d^3y = \\
 &= \int \left[2\Pi^{ab}(y) \frac{\delta(\xi_{a,b}(y))}{\delta \xi_i(x)} + 2m^2 \xi^k(y) \frac{\delta \xi_k(y)}{\delta \xi_i(x)} \right] d^3y = \\
 &= 2 \int \left[\Pi^{ab}(y) \delta_a^i \frac{\partial(\delta^3(x-y))}{\partial y^b} + \right. \\
 &\quad \left. m^2 \xi^k(y) \delta_k^i \delta^3(x-y) \right] d^3y = \\
 &= 2 \int \left[-\Pi^{ib}(y) \frac{\partial(\delta^3(x-y))}{\partial x^b} + m^2 \xi^i(y) \delta^3(x-y) \right] d^3y = \\
 &= -2 \frac{\partial}{\partial x^b} \int \Pi^{ib}(y) \delta^3(x-y) d^3y + \\
 &\quad 2m^2 \int \xi^i(y) \delta^3(x-y) d^3y = \\
 &= -2 \frac{\partial}{\partial x^b} \Pi^{ib}(x) + 2m^2 \xi^i(x) = \\
 &= -2(\Pi^{ib})_{,b}(x) - m^2 \xi^i(x)
 \end{aligned}$$

onde usamos que $\frac{\partial \delta^3(x-y)}{\partial y^b} = -\frac{\partial \delta^3(x-y)}{\partial x^b}$.

Outro modo de obter-se o resultado acima é:

$$\begin{aligned}
 \{\Pi^i(x), H_T\} &= \int d^3y \left[2\Pi^{ab}_{,b}(y) \{\Pi^i(x), \xi_a(y)\} + \right. \\
 &\quad \left. - 2m^2 \xi^k(y) \{\Pi^i(x), \xi_k(y)\} \right] = \\
 &= \int d^3y \left[2\Pi^{ab}_{,b}(y) (-)\delta_a^i \delta^3(x-y) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2m^2 \xi^k (y) (-) \delta_k^i \delta^3(x-y) \Big] = \\
 & = -2(\Pi^{ib}_{,b}(x) - m^2 \xi^i(x)) \quad ,
 \end{aligned}$$

onde desprezou-se termos de superfície e usou-se (4.22b).

Assim, obtemos o vínculo secundário:

$$\Pi^{ib}_{,b} - m^2 \xi^i \approx 0 \quad (4.24c)$$

ou, de (4.20a)

$$E^{ib}_{,b} - m^2 \xi^i \approx 0$$

Usando (4.19a) vê-se que (4.24c) corresponde à equação de movimento (4.13b).

Os cálculos que se seguem são análogos aos que fizemos acima. Daqui para a frente exibiremos apenas os resultados:

d) Para o vínculo (4.18c)

$$\dot{P}^i = \{P^i, H_T\} = \Pi^{ib}_{,b} + m^2 \gamma^i$$

Obtemos o vínculo secundário dado por:

$$\Pi^{ib}_{,b} + m^2 \gamma^i \approx 0 \quad (4.24d)$$

ou, de (4.20a)

$$E^{ib}_{,b} + m^2 \gamma^i \approx 0$$

Usando (4.19a) vê-se que (4.24d) corresponde à equação de movimento (4.13c). Somando (4.24c) com (4.24d) chegamos

à condição de compatibilidade $\xi^i + \gamma^i = 0$ (ou seja, de (4.1b) e (4.1c), $A^\mu_i = 0$).

e) Para o vínculo (4.18d)

Devido ao vínculo secundário (4.24a) temos que $P^{ij} - \tau^{ij} \approx P^{ij} \approx 0$. Assim verificaremos primeiro a conservação no tempo de $P_{ij} \approx 0$ e deixaremos para mais tarde o mesmo cálculo para $\tau_{ij} \approx 0$.

$$\dot{P}^{ij} = \{P^{ij}, H_T\} = \frac{3}{2} \Pi^{ijk}_{,k} + \frac{3}{2} m^2 \beta^{ij}$$

Obtemos o vínculo secundário

$$\Pi^{ijk}_{,k} + m^2 \beta^{ij} \approx 0 \quad (4.24e)$$

que graças a (4.20b) e (4.24a) pode ser escrita como:

$$\epsilon^{ijl} B_{\lambda}^k_{,k} + m^2 \beta^{ij} \approx 0$$

De (4.19b) e (4.24a) vemos que (4.24e) corresponde à equação de movimento (4.13d).

f) Para o vínculo (4.18f)

$$\begin{aligned} \dot{P}_{ijk} = \{P_{ijk}, H_T\} = & -\Pi_{ijk} - \alpha_k[i, j] + \\ & + \beta_{ij, k} - \frac{1}{2} (\alpha_j^{\ell} + \beta_j^{\ell})_{, \ell} \eta_{ik} + \\ & + \frac{1}{2} (\alpha_i^{\ell} + \beta_i^{\ell})_{, \ell} \eta_{jk} \end{aligned}$$

onde usamos (4.33a) ($\Omega_{ijk} \approx 0$) para eliminarmos os termos que

dependem de Ω_{ijk} .

Obtemos o vínculo secundário:

$$\begin{aligned} \theta_{ijk} \equiv & -\Pi_{ijk} - \alpha_{k[i,j]} + \beta_{ij,k} + \\ & - \frac{1}{2} (\alpha_j^{\ell} + \beta^{\ell}_j) \eta_{ik} + \frac{1}{2} (\alpha_i^{\ell} + \beta^{\ell}_i)_{,\ell} \eta_{jk} \approx 0 \end{aligned} \quad (4.24f)$$

que corresponde à equação de movimento (4.17b) combinada com (4.19b), (4.17a) e (4.11).

g) Para o vínculo (4.18h)

$$\dot{\Sigma}_{ijk} = \{\Sigma_{ijk}, H_T\} = \beta_{ij,k} + \beta_{ki,j} + \beta_{jk,i} \approx 0 \quad .$$

Obtemos o vínculo secundário:

$$\beta_{ij,k} \varepsilon^{ijk} \approx 0 \quad (4.24g)$$

que corresponde à equação de movimento (4.17d).

h) Para o vínculo (4.18g)

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{ij} = \{\Sigma_{ij}, H_T\} = & Z_{ij} + \xi_{[i,j]} - \Delta_{ij}^m{}_{,m} - \\ & - \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} \end{aligned}$$

Neste caso determina-se o multiplicador de Lagrange

Z_{ij} :

$$Z_{ij} = \Delta_{ij}^m{}_{,m} + \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} - \xi_{[i,j]} \quad (4.25a)$$

Seguindo o procedimento canônico, vamos agora verificar a conservação no tempo dos vínculos secundários (4.24):

i) Para o vínculo (4.24a):

$$\dot{\Omega}^{ijk} = \{\Omega^{ijk}, H_T\} = D^{ijk} = 0 \quad (4.25b)$$

$$\dot{\tau}^{ij} = \{\tau^{ij}, H_T\} = R^{ij} = 0 \quad (4.25c)$$

$$\dot{\rho}^{ijk} = \{\rho^{ijk}, H_T\} = \lambda^{ijk} = 0 \quad (4.25d)$$

Determina-se portanto os multiplicadores de Lagrange D^{ijk} , R^{ij} e λ^{ijk} .

j) Para o vínculo (4.24b)

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_T\} = M = 0 \quad (4.25e)$$

ou seja, determina-se M .

k) Para (4.24c)

$$\begin{aligned} \left[\Pi^{ib},{}_b - m^2 \xi^i \right] \cdot &= \{\Pi^{ib},{}_b - m^2 \xi^i, H_T\} = \\ &= -\frac{1}{2} \Pi^{imk},{}_{m,k} - m^2 Y^i + \frac{m^2}{2} \alpha^{i\ell},{}_{\ell} = 0 \end{aligned}$$

que, usando (4.24e), determina Y^i como sendo:

$$Y^i = \frac{1}{2} (\alpha^{i\ell} + \beta^{i\ell}),{}_{\ell} = A^{i0\ell},{}_{\ell} \quad (4.25f)$$

(veja (4.1d), (4.1e) e (4.24b)).

l) Para o vínculo (4.24d):

$$\begin{aligned} \left[\Pi^{ib}{}_{,b} + m^2 \gamma^i \right] \cdot &= \{ \Pi^{ib}{}_{,b} + m^2 \gamma^i, H_T \} = \\ &= -\frac{1}{2} \Pi^{imk}{}_{,m,k} + m^2 \chi^i + \frac{m^2}{2} \alpha^{i\ell}{}_{,\ell} = 0 \end{aligned}$$

que, usando (4.24e), determina χ^i como sendo:

$$\chi^i = -\frac{1}{2} (\alpha^{i\ell} + \beta^{i\ell}){}_{,\ell} = -A^{i0\ell}{}_{,\ell} \quad (4.25g)$$

m) Para o vínculo (4.24e)

$$\begin{aligned} \left[\Pi^{ijk}{}_{,k} + m^2 \beta^{ij} \right] \cdot &= \{ \Pi^{ijk}{}_{,k} + m^2 \beta^{ij}, H_T \} = \\ &= \frac{1}{2} \Pi^{k[i,j]}{}_{,k} + m^2 \Delta^{ijk}{}_{,k} + m^2 Z^{ij} = 0 \end{aligned}$$

que, usando (4.24d), determina Z^{ij} como sendo

$$Z_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} - \Delta_{ij}{}^k{}_{,k} = -A_{ij}{}^k{}_{,k} \quad (4.25h)$$

(veja (4.1c) e (4.1f)).

Note que existem duas equações para Z_{ij} : (4.25a) e (4.25h). A combinação das duas gera um novo vínculo:

$$\Delta_{ij}{}^k{}_{,k} - \frac{1}{2} \xi_{i,j} \approx 0 \quad (4.26a)$$

que é uma combinação das equações de movimento (4.13g) e (4.15b).

n) Para o vínculo (4.24g)

$$\left[\beta_{ij,k} \varepsilon^{ijk} \right] \cdot = \{ \beta_{ij,k} \varepsilon^{ijk}, H_T \} = \varepsilon^{ijk} z_{ij,k} = 0$$

devido a (4.25h) e (4.26a). Não surge nenhum novo vínculo.

o) Para o vínculo (4.24f)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{ijk} &= \{ \theta_{ijk}, H_T \} = \Pi_{k[i,j]} - \gamma_{[i,j],k} + \\ &+ \Delta_k^m [j,i],m + \Delta_j^m k,i,m - \Delta_i^m k,j,m + \\ &- \frac{2}{3} \Delta_{ij}^{\ell},\ell,k + \frac{1}{3} \Delta_{k[i,j],\ell} + \\ &+ \frac{1}{2} \eta_{ki} (-\gamma_{j,\ell,m} \eta^{\ell m} + \gamma^{\ell},\ell,j + \Pi_{j}^{\ell},\ell + 2\Delta_{j}^{\ell m},\ell,m) + \\ &- \frac{1}{2} \eta_{kj} (-\gamma_{i,\ell,m} \eta^{\ell m} + \gamma^{\ell},\ell,i + \Pi_{i}^{\ell},\ell + 2\Delta_{i}^{\ell m},\ell,m) + \\ &- m^2 \Delta_{ijk} \equiv \phi_{ijk} \end{aligned}$$

Para chegarmos a este resultado usamos que $\xi_i + \gamma_i = 0$ e (4.25h).

Obtemos um novo vínculo:

$$\phi_{ijk} \approx 0 \quad . \quad (4.26b)$$

Este vínculo vem da equação (4.13f) após efetuarmos as seguintes operações:

1º) Expresse C_{ijk0} e C_{ioj0} em termos Π_{ijk} e Π_{ij} através de (4.19a), (4.19b) e (4.24a).

2º) Expresse $\dot{\Pi}_{ijk}$ em termos de $\dot{\beta}_{ij}$, $\dot{\alpha}_{ij}$ e suas derivadas espaciais através de (4.24f).

3º) Escreva $\dot{\alpha}_{ij}$ em termos de ξ_i , γ_i , Δ_{ijk} e suas deri

vadas espaciais através de (4.10) e (4.19a).

4o) Use (4.13g) e $\gamma^i + \xi^i = 0$ para finalmente obter $\phi_{ijk} = 0$.

Da conservação no tempo dos vínculos (4.24) surgiram dois novos vínculos: (4.26a) e (4.26b). Devemos verificar se estes novos vínculos se conservam no tempo.

p) Para o vínculo (4.26a)

$$\left[\Delta_{ij}^k{}_{,k} - \frac{1}{2} \xi_{[i,j]} \right] \cdot = \{ \Delta_{ij}^k{}_{,k} - \frac{1}{2} \xi_{[i,j]}, H_T \} \approx 0$$

ou seja, não surge nenhum novo vínculo. Para mostrarmos que estes parênteses de Poisson são fracamente iguais a zero utilizamos o vínculo (4.24f).

q) Para o vínculo (4.26b)

$$\dot{\phi}_{ijk} = \{ \phi_{ijk}, H_T \} \approx 0$$

ou seja, $\dot{\phi}_{ijk}$ é uma combinação linear de vínculos já existentes e de suas derivadas espaciais, a saber:

1o) o vínculo (4.24f)

2o) a divergência do vínculo (4.24f):

$$\Pi_{ij}^k{}_{,k} = -\frac{1}{2} \alpha^\ell [i,j]_{, \ell} + \frac{1}{2} \beta_{ij}{}_{, \ell}{}^{\ell} \quad (4.27)$$

3o) o vínculo (4.24e) que aplicado a (4.27) nos dá:

$$-m^2 \beta_{ij} = -\frac{1}{2} \alpha^\ell [i,j]_{, \ell} + \frac{1}{2} \beta_{ij}{}_{, \ell}{}^{\ell} \quad .$$

Aqui termina o processo iniciado em (4.24a). Verifi-

camos assim que todos os vínculos primários (dados por (4.18)), secundários (dados por (4.24)) e terciários (dados por (4.26)) que surgem na teoria se conservam no tempo comprovando que a Hamiltoniana (4.23) é consistente. Todos os multiplicadores de Lagrange são determinados através das relações (4.25) (menos $S_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ que discutiremos mais adiante), o que comprova a inexistência de invariância de calibre na teoria com massa. Todos os vínculos são de 2ª classe.

Calculemos agora as equações de Hamilton para (4.20):

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{ij} = \{\Pi_{ij}, H_T\} = & -\frac{1}{2} \bar{\Pi}^{ikj}_{,k} - \frac{1}{2} \Pi^{jki}_{,k} + \\ & + \frac{m^2}{2} \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (4.28a)$$

que corresponde à equação (4.13e).

Usando (4.20) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^{kl} (j^{\beta i})_{l,k} - m^2 \alpha_{ij} &= 0 \\ \dot{\Pi}_{ijk} = \{\Pi_{ijk}, H_T\} = \bar{\Pi}_{k[i,j]} + \\ - \frac{1}{2} \Pi^{\ell}_{i,\ell} \eta_{jk} + \frac{1}{2} \bar{\Pi}^{\ell}_{j,\ell} \eta_{ik} + m^2 \Delta_{ijk} & \quad (4.28b) \end{aligned}$$

que corresponde à equação (4.13f).

Usando (4.20) temos:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ija} \dot{B}_a^k + E^{k[i,j]} - \frac{1}{2} E^{\ell[i,\ell} \eta^{j]k} - m^2 \Delta^{ijk} &= 0 \\ \dot{\alpha}_{ij} = \{\alpha_{ij}, H_T\} = -2\Pi_{ij}^{-\xi(i,j)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} \xi^k_{,k} n_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{(i,j)} + \Delta_{(i^m j),m} + \\
 & - \frac{1}{3} \gamma^m_{,m} n_{ij} \quad (4.28c)
 \end{aligned}$$

que corresponde a (4.10) através de (4.19a)

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta}_{ijk} & = \{\Delta_{ijk}, H_T\} = -\Pi_{ijk} + \beta_{ij,k} + \\
 & - \frac{1}{2} \beta_{k[i,j]} - \frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} - \frac{1}{4} n_{kj} (3\beta_i^\ell - \alpha_i^\ell)_{,\ell} + \\
 & + \frac{1}{4} n_{ki} (3\beta_j^\ell - \alpha_j^\ell)_{,\ell} \quad (4.28d)
 \end{aligned}$$

que corresponde a (4.11) através de (4.19b) e (4.24a)

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H_T\} = Y_i = \frac{1}{2} (\alpha_i^\ell + \beta_i^\ell)_{,\ell} \quad (4.28e)$$

onde usamos (4.25f). Isto corresponde a (4.13h)

$$\dot{Y}_i = \{Y_i, H_T\} = X_i = -\frac{1}{2} (\alpha_i^\ell + \beta_i^\ell)_{,\ell} = -\dot{\xi}_i \quad (4.28f)$$

que vem de $\gamma_i + \xi_i = 0$ (isto é, $A^\mu_{i\mu} = 0$)

$$\dot{\beta}_{ij} = \{\beta_{ij}, H_T\} = Z_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} - \Delta_{ij}^k{}_{,k} \quad (4.28g)$$

que corresponde a (4.13g).

A variação de (4.23) com relação aos multiplicadores de Lagrange Z_{ij} , Y_i , X_i , X_{ijk} , λ_{ijk} , R_{ij} e $S^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ nos dão os vínculos (4.18).

Assim, a Hamiltoniana (4.23) fornece todas as eqs. (4.13) e (4.17), sejam elas equações dinâmicas como (4.28a), equa-

ções de vínculo como (4.24) e (4.26), equações de compatibilidade como (4.28e), (4.28f) e (4.28g), e equações de definição para Π_{ij} e Π_{ijk} como (4.28c) e (4.28d).

Passemos agora à contagem dos verdadeiros graus de liberdade da teoria. Este número é dado por (veja Apêndice A):

$$\eta = \frac{\eta_c - \eta_2 - 2\eta_1}{2} \quad (4.29)$$

onde η_c é o número de variáveis canônicas da teoria, η_2 o número de vínculos de 2ª classe e η_1 o número de vínculos de 1ª classe.

Na presente teoria, a dinâmica de $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ é dada por:

$$\dot{Q}_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} = \{Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}, H_T\} = S_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$$

onde $S_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ está indeterminado. Assim, eliminaremos a variável $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ e seu momento canonicamente conjugado do espaço de fase já que a dinâmica de $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ é completamente arbitrária e portanto o seu papel é de apenas ser um multiplicador de Lagrange para o vínculo $\Omega_{\alpha\beta\mu\nu}\Omega_{\rho\sigma\theta\phi} \approx 0$.

Então temos:

TABELA 4.1 - Variáveis canônicas na representação de Fierz.

Variável	Redefinição	Nº de componentes independentes	Momentos C.C.	Nº de componentes independentes
$A_{\ell o}^{\ell}$	ϕ	1	Π	1
A_{oi}^o	ξ_i	3	$\bar{\pi}^i$	3
$A_{\ell i}^{\ell}$	γ_i	3	p^i	3
$A_{ij o}$	β_{ij}	3	p^{ij}	3
$A_{(i j)}^o - \frac{2}{3} A_{o\ell}^{\ell} \eta_{ij}$	α_{ij}	5	Π^{ij}	5
$A_{ijk} - \frac{1}{2} \eta_{k[i} A_{j]\ell}^{\ell}$	Δ_{ijk}	5	Π^{ijk}	5
Ω_{ijok}	Ω_{ijk}	5	P_{ijk}	5
Ω_{ijko}	ρ_{ijk}	1	Σ_{ijk}	1
Ω_{ijoo}	τ_{ij}	3	Σ_{ij}	3

Assim $\eta_c = 29+29 = 58$.

Os vínculos, todos de 2ª classe, são dados por (4.18), (4.24) e (4.26).

Note que $\vartheta_{ij, \ell, k}^{\ell} \epsilon^{ijk} = 0$ identicamente devido a (4.24g) e (4.24e). Portanto $\vartheta_{ijk} \approx 0$ corresponde a 5-1=4 vínculos independentes. Também, $\phi_{ij, \ell}^{\ell} = 0$ identicamente devido a (4.24c) e (4.26a). Assim $\phi_{ijk} \approx 0$ corresponde a 5-3 = 2 vínculos independentes.

Portanto, o conjunto de vínculos da teoria será:

TABELA 4.2 - Vínculos da teoria Hamiltoniana para o caso com massa.

Vínculos de 2ª Classe	Número de Componentes independentes	
$\Pi \approx 0$	1	(4.18a)
$\Pi^i \approx 0$	3	(4.18b)
$P^i \approx 0$	3	(4.18c)
$P^{ij} - \tau^{ij} \approx 0$	3	(4.18d)
$P_{ijk} \approx 0$	5	(4.18f)
$\Sigma_{ij} \approx 0$	3	(4.18g)
$\Sigma_{ijk} \approx 0$	1	(4.18h)
$\tau_{ij} \approx 0$	3	
$\Omega_{ijk} \approx 0$		
$\rho_{ijk} \approx 0$		
$\phi \approx 0$	1	(4.24b)
$\Pi^{ib}_{,b} - m^2 \xi^i \approx 0$	3	(4.24c)
$\Pi^{ib}_{,b} + m^2 \gamma^i \approx 0$	3	(4.24d)
$\Pi^{ijk}_{,k} + m^2 \beta^{ij} \approx 0$	3	(4.24e)
$\theta_{ijk} \approx 0$	4	(4.24f)
$\beta_{ij,k} \epsilon^{ijk}$	1	(4.24g)
$\Delta_{ij,k} - \frac{1}{2} \xi_{[i,j]} \approx 0$	3	(4.26a)
$\phi_{ijk} \approx 0$	2	(4.26b)

Assim $\eta_2 = 48$ e $\eta_1 = 0$.

Usando (4.29) obtemos

$$\eta = \frac{58 - 48 - 2 \times 0}{2} = 5 \quad ,$$

ou seja, o número de verdadeiros graus de liberdade da teoria é 5, como deve acontecer para um campo de spin dois massivo

($\eta = 2s+1 = 2 \times 2+1 = 5$ onde s é o spin do campo).

ii) Caso sem massa

Desenvolveremos agora o formalismo Hamiltoniano para o campo de spin dois sem massa nas variáveis de Fierz.

Da densidade Lagrangeana (4.15) fazendo $m = 0$, obtemos a densidade Hamiltoniana (4.21) com $m = 0$:

$$\begin{aligned}
 H_{\mathbf{T}} = & -\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^{ijk}\Pi_{ijk} + \\
 & + \Pi^{ij} \left(\gamma_{i,j} - \frac{1}{3} \gamma^k{}_{,k} \eta_{ij} \right) + 2\Pi^{ij} \Delta_{(i}{}^m{}_{j),m} + \\
 & + 2\Pi^{ij} \left(-\xi_{i,j} + \frac{1}{3} \xi^k{}_{,k} \eta_{ij} \right) + \\
 & + \Pi^{ijk} \left(\beta_{ij,k} - \frac{1}{2} \beta_{k[i,j]} - \frac{3}{4} \eta_{k[i} \beta^{\ell}{}_{j],\ell} \right) + \\
 & - \Pi^{ijk} \left(\frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} + \frac{1}{4} \eta_{k[i} \alpha^{\ell}{}_{j],\ell} \right) + \\
 & - \Omega^{ijk} \left[-\Pi_{ijk} - \alpha_{k[i,j]} + \beta_{ij,k} + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (\alpha_j^{\ell} + \beta^{\ell}{}_j)_{,\ell} \eta_{ik} + \frac{1}{2} (\alpha_i^{\ell} + \beta^{\ell}{}_i)_{,\ell} \eta_{jk} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \Omega^{ijk} \Omega_{ijk} - \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} \Omega^{\alpha\beta\mu\nu} \Omega^{\rho\sigma\theta\phi} + \\
 & - \frac{\tau^{ij}}{2} \left(\xi_{[i,j]} - \Delta_{ij}{}^m{}_{,m} - \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} \right) + \\
 & - \rho^{ijk} \left(\beta_{ij,k} + \beta_{ki,j} + \beta_{jk,i} \right) + \\
 & + M\Pi + Y_i \Pi^i + \chi_i P^i + Z_{ij} (P^{ij} - \tau^{ij}) + \\
 & + P_{ijk} P^{ijk} + R^{ij}{}_{\Sigma}{}_{ij} + \lambda^{ijk}{}_{\Sigma}{}_{ijk} + \\
 & + S^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} P_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

A Hamiltoniana será dada por:

$$H_T = \int H_T d^3x \quad (4.31)$$

A conservação no tempo dos vínculos primários (4.18) nos leva aos seguintes resultados:

a) Para o vínculo (4.18e)

$$\dot{P}_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi} = \{P_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}, H_T\} = \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta\mu\nu} \Omega_{\rho\sigma\theta\phi}$$

Assim obtemos os seguintes vínculos secundários:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta\mu\nu} \Omega_{\rho\sigma\theta\phi} &\implies \\ \implies \Omega_{\alpha\beta\mu\nu} &\approx 0 \implies \begin{cases} \Omega_{ijk} \approx 0 \\ \tau_{ij} \approx 0 \\ \rho_{ijk} \approx 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32a)$$

b) Para o vínculo (4.18a)

$$\dot{\Pi} = \{\Pi, H_T\} = 0$$

ou seja, $\dot{\Pi} = 0$ é satisfeita identicamente.

c) Para o vínculo (4.18b)

$$\dot{\Pi}^i = \{\Pi^i, H_T\} = -\Pi^{i\lambda}_{,\lambda}$$

Obtemos o vínculo secundário:

$$\Pi^{i\lambda}_{,\lambda} \approx 0 \quad (4.32b)$$

ou , de (4.20a)

$$E^{i\ell}_{,\ell} \approx 0$$

Isto corresponde à equação de movimento (4.13b) com $m = 0$. A semelhança formal entre este vínculo e o vínculo da teoria do Eletromagnetismo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \approx 0$ é evidente.

d) Para o vínculo (4.18c)

$$\dot{P}^i = \{P^i, H_T\} = \Pi^{i\ell}_{,\ell} \approx 0$$

idêntico a (4.32b).

e) Para o vínculo (4.18d)

Como no caso com massa, verificaremos apenas a conservação de $P^{ij} \approx 0$ já que $\tau_{ij} \approx 0$ devido ao vínculo (4.32a).

$$\dot{P}^{ij} = \{P^{ij}, H_T\} = \frac{3}{2} \Pi^{ijk}_{,k}$$

Obtemos o vínculo secundário:

$$\Pi^{ijk}_{,k} \approx 0 \tag{4.32c}$$

ou, de (4.20b) e (4.32a)

$$\epsilon^{ij\ell} B_{\ell}{}^k{}_{,k} \approx 0$$

Isto corresponde à equação de movimento (4.13d) com $m = 0$.

f) Para o vínculo (4.18f)

$$\dot{P}_{ijk} = \{P_{ijk}, H_T\} = \theta_{ijk}$$

onde θ_{ijk} está definido em (4.24f).

Obtemos o vínculo secundário

$$\theta_{ijk} \approx 0 \quad (4.32d)$$

g) Para o vínculo (4.18h)

$$\dot{\Sigma}_{ijk} = \{\Sigma_{ijk}, H_T\} = \beta_{ij,k} + \beta_{ki,j} + \beta_{jk,i}$$

Obtemos o vínculo secundário

$$\beta_{ij,k} \varepsilon^{ijk} \approx 0 \quad (4.32e)$$

h) Para o vínculo (4.18g)

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \{\Sigma_{ij}, H_T\} = \xi_{[i,j]} - \Delta_{ij}^m{}_{,m} + \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} + Z_{ij}$$

Assim determina-se Z_{ij} como sendo:

$$Z_{ij} = \Delta_{ij}^m{}_{,m} + \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} - \xi_{[i,j]} \quad (4.33a)$$

Devemos agora verificar se os vínculos secundários (4.32) se conservam no tempo.

g) Para o vínculo (4.32a)

$$\dot{\Omega}^{ijk} = \{\Omega^{ijk}, H_T\} = D^{ijk} = 0 \quad (4.33b)$$

$$\dot{\tau}^{ij} = \{\tau^{ij}, H_T\} = R^{ij} = 0 \quad (4.33c)$$

$$\dot{\rho}^{ijk} = \{\rho^{ijk}, H_T\} = \lambda^{ijk} = 0 \quad (4.33d)$$

ou seja, D^{ijk} , R^{ij} e λ^{ijk} ficam determinados.

h) Para o vínculo (4.32b)

$$\dot{\Pi}^{i\ell}_{, \ell} = \{\Pi^{i\ell}_{, \ell}, H_T\} = -\frac{1}{2} \Pi^{imk}_{, m, k} \approx 0$$

ou seja, a conservação no tempo do vínculo (4.32b) é automaticamente satisfeita devido à existência do vínculo (4.32c).

i) Para o vínculo (4.32c)

$$\dot{\Pi}^{ijk}_{, k} = \{\Pi^{ijk}_{, k}, H_T\} = \frac{1}{2} \Pi^{k[i, j]}_{, k} \approx 0$$

ou seja, a conservação no tempo do vínculo (4.32c) é automaticamente satisfeita devido à existência do vínculo (4.32b).

j) Para o vínculo (4.32e)

$$(\beta_{ij, k} \epsilon^{ijk}) = \{\beta_{ij, k} \epsilon^{ijk}, H_T\} = Z_{ij, k} \epsilon^{ijk} = 0$$

Obtemos uma nova relação para Z_{ij} que, combinada com (4.33a) nos leva a um novo vínculo:

$$\Delta_{ij, m, k}^m \epsilon^{ijk} \approx 0 \quad (4.34a)$$

k) Para o vínculo (4.32d)

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{ijk} = \{\theta_{ijk}, H_T\} &= \Pi_{k[i, j]} + 2\Delta_{ij, m, k}^m \\ &- 2\Delta_{i k, m, j}^m + 2\Delta_{j k, m, i}^m \equiv \phi_{ijk} \end{aligned}$$

Para chegarmos a este resultado usamos as equações (4.33a) e (4.34a).

Obtemos portanto um novo vínculo:

$$\phi_{ijk} \approx 0 \quad (4.34b)$$

Verifiquemos a conservação no tempo dos novos vínculos (4.34).

l) Para o vínculo (4.34a)

$$(\Delta_{ij}^m, m, k \epsilon^{ijk}) = \{\Delta_{ij}^m, m, k, H_T\} \approx 0$$

Assim, o vínculo (4.34a) é identicamente conservado no tempo devido à existência dos vínculos (4.32d), (4.32e) e (4.32c).

m) Para o vínculo (4.34b)

$$\dot{\phi}_{ijk} = \{\phi_{ijk}, H_T\} \approx 0$$

ou seja, o vínculo (4.34b) é identicamente conservado no tempo devido à existência dos vínculos (4.32c), (4.32d) e (4.32e).

Portanto, verificamos a conservação no tempo de todos os vínculos presentes na teoria, a saber, (4.18), (4.32) e (4.34).

O vínculo $\theta_{ijk} \approx 0$ só tem quatro componentes independentes devido à identidade

$$\theta_{ij}^m, m, k \epsilon^{ijk} = 0 \tag{4.35}$$

Prova-se a equação (4.35) usando-se os vínculos (4.32c) e (4.32e).

O vínculo $\phi_{ijk} \approx 0$ só tem duas componentes independentes devido à identidade

$$\phi_{ij}^k, k = 0 \tag{4.36}$$

que é consequência de (4.32b) e (4.34a).

TABELA 4.3 - Vínculos da teoria Hamiltoniana para o caso sem massa.

Vínculos	Número de componentes independentes	
$\Pi \approx 0$	1	(4.18a)
$\Pi^i \approx 0$	3	(4.18b)
$P^i \approx 0$	3	(4.18c)
$P^{ij} - \tau^{ij} \approx 0$	3	(4.18d)
$P^{ijk} \approx 0$	5	(4.18f)
$\Sigma^{ij} \approx 0$	3	(4.18g)
$\Sigma^{ijk} \approx 0$	1	(4.18h)
$\Omega^{ijk} \approx 0$	5	(4.32a)
$\tau^{ij} \approx 0$	3	
$\rho^{ijk} \approx 0$	1	
$\Pi^{i\ell}{}_{,\ell} \approx 0$	3	(4.32b)
$\Pi^{ijk}{}_{,k} \approx 0$	3	(4.32c)
$\theta_{ijk} \approx 0$	4	(4.32d)
$\beta_{ij,k} \epsilon^{ijk} \approx 0$	1	(4.32e)
$\Delta_{ij}{}^m{}_{,m,k} \epsilon^{ijk} \approx 0$	1	(4.34a)
$\phi_{ijk} \approx 0$	2	(4.34b)

Eliminaremos a variável $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ e seu momento canonicamente conjugado $P^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ do espaço de fase da teoria. Como no caso com massa, a variável $Q_{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma\theta\phi}$ cumpre apenas o papel de ser um m multiplicador de Lagrange para os vínculos (4.32a).

Do conjunto de vínculos apresentados na Tabela 4.2, apenas (4.18a,b e c) são de 1ª classe, sendo os demais de 2ª classe. Resta saber se não existe nenhuma combinação linear

destes últimos ou de suas derivadas espaciais que não seja de 1ª classe. O número de vínculos de 1ª classe n_1 é 7, enquanto o número de vínculos de 2ª classe n_2 é 35. Se calcularmos o número de graus de liberdade efetivos da teoria n através de (4.29), onde $n_c = 58$, encontramos $n = 9/2$. Isto contradiz o fato de que um campo sem massa tem $n = 2$. Todavia, se encontrarmos 5 combinações dos vínculos de 2ª classe que sejam de 1ª classe teremos para n_2 o valor 30 e para n_1 o valor 12. Substituindo estes valores em (4.29) obteremos $n = 2$, como queremos.

Os vínculos (4.32a) e (4.18f,g e h) são completamente independentes dos demais além de serem linearmente independentes entre si. Portanto não há combinação possível envolvendo estes vínculos que seja de 1ª classe.

O vínculo (4.18d) tem parênteses de Poisson diferentes de zero com (4.32d) e (4.32e).

Os parênteses de Poisson de (4.18d) com (4.32d) nos dá:

$$\begin{aligned}
 \{P^{ij}(x), \theta_{k\ell m}(y)\} &= \{P^{ij}(x), \beta_{k\ell, m}(y)\} \\
 &- \frac{1}{2} \{P^{ij}(x), \beta_{a\ell, b}(y)\} n^{ab} n_{km} + \\
 &- \frac{1}{2} \{P^{ij}(x), \beta_{ak, b}(y)\} n^{ab} n_{\ell m} = \\
 &= -\frac{1}{2} \delta_{[k\ell]}^{ij} \delta(x-y)_{,m} + \frac{1}{4} \delta_{\ell}^{[j} \delta(x-y)^{,i]} n_{km} + \\
 &- \frac{1}{4} \delta_k^{[j} \delta(x-y)^{,i]} n_{\ell m} \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

onde $\delta_{k\ell}^{ij} = \delta_k^i \delta_\ell^j$.

Os parênteses de Poisson de (4.18d) com (4.32e) tem

como resultado

$$\begin{aligned} \{P^{ij}(x), \beta_{ab}(y), \epsilon^{abc}\} &= \\ &= \frac{1}{2} \delta_{[ab]}^{ij} \delta(x-y), \epsilon^{abc} = \delta(x-y), \epsilon^{ijc} \end{aligned} \quad (4.38)$$

O vínculo (4.32b) tem parênteses de Poisson diferente de zero apenas com (4.32d). Para o cálculo deste parênteses de Poisson precisaremos da forma completa de (4.22j), ou seja, da sua parte sem traço:

$$\{\alpha_{ij}(x), \Pi^{kl}(y)\} = \frac{1}{2} \delta_{(ij)}^{kl} - \frac{1}{3} \eta^{kl} \eta_{ij} \quad (4.39)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \{\Pi^{ij}, j(x), \theta_{klm}(y)\} &= \\ &- \frac{1}{2} \delta_k^i \delta(x-y), l, m + \frac{1}{2} \delta_l^i \delta(x-y), k, m + \\ &- \frac{1}{4} \eta_m [k \delta^i_l] \delta(x-y), a, a + \\ &+ \frac{1}{4} \eta_m [k \delta(x-y), l], i \end{aligned} \quad (4.40)$$

O parênteses de Poisson da divergência do vínculo (4.18d), $P^{ij}, j(x) \approx 0$, com (4.32d) tem como resultado a divergência do lado direito de (4.37) que é exatamente igual ao lado direito de (4.40). Assim,

$$\{\Pi^{ij}, j(x) - P^{ij}, j(x), \theta_{klm}(y)\} = 0 \quad (4.41)$$

Por outro lado, o parênteses de Poisson deste vínculo $\Pi^{ij}, j(x) - P^{ij}, j(x) \approx 0$ com o vínculo (4.32e) nos dá, usando (4.38):

$$\begin{aligned}
 & \{ \Pi^{ij}{}_{,j}(x) - P^{ij}{}_{,j}(x), \beta_{ab}(y), c \varepsilon^{abc} \} = \\
 & = - \{ P^{ij}{}_{,j}(x), \beta_{ab}, c \varepsilon^{abc} \} = \\
 & = - \delta(x-y)_{,c,j} \varepsilon^{ijc} = 0
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Portanto, o vínculo $\Pi^{ij}{}_{,j}(x) - P^{ij}{}_{,j}(x) \approx 0$ tem parênteses de Poisson zero com (4.32e), (4.32d) e todos os demais vínculos da teoria.

Assim, o vínculo construído com (4.32b) menos a divergência do vínculo (4.18d) é de 1ª classe. Com os seis vínculos de 2ª classe (4.32b) e (4.18d) construímos três de 1ª classe

$$\Pi^{ij}{}_{,j} - P^{ij}{}_{,j} = E^{ij}{}_{,j} - P^{ij}{}_{,j} \approx 0 \tag{4.43}$$

No entanto, como discutido anteriormente, devem ainda existir dois vínculos de 1ª classe escondidos entre os demais vínculos de 2ª classe para que a teoria apresente o número correto de graus de liberdade. Examinemos então o vínculo (4.32d).

Com θ_{ijk} podemos construir dois tensores, a saber, um tensor F_{ijk} com as mesmas simetrias de θ_{ijk} cuja divergência no último índice seja nula (portanto, com apenas duas componentes independentes) e sua própria divergência $\theta_{ij}{}^k{}_{,k}$, também com duas componentes independentes. Se este tensor F_{ijk} construído com θ_{ijk} for de 1ª classe então o problema estará resolvido.

Para construirmos o vínculo F_{ijk} usaremos o operador

$$\hat{O}^i{}_j = \delta^i{}_j - \Delta^{-1} \partial^i \partial_j \tag{4.44}$$

onde Δ^{-1} é o inverso do operador Laplaceano.

Este operador ao atuar em um campo vetorial $A^i(x)$ transforma-o num campo vetorial de divergência nula:

$$B^i \equiv \tilde{O}^i_j A^j = A^i - \Delta^{-1} A^j_{,j},{}^i \implies$$

$$\implies B^i_{,i} = A^i_{,i} - \Delta^{-1} A^j_{,j},{}^i_{,i} = A^i_{,i} - A^j_{,j} = 0 .$$

Note que não baste definir F_{ijk} como sendo igual a $\tilde{O}^k_{\lambda} \theta_{ijk}$ pois embora tal tensor tenha divergência nula, ele não apresenta as mesmas simetrias que θ_{ijk} .

Seja portanto o tensor M_{ijk} definido da seguinte forma:

$$M_{ijk} \equiv a \theta_{ijk} + \frac{2}{3} \tilde{O}^{\ell}_k \theta_{ij\ell} +$$

$$- \frac{1}{3} \tilde{O}^{\ell}_j \theta_{ki\ell} - \frac{1}{3} \tilde{O}^{\ell}_i \theta_{jk\ell} +$$

$$+ b (\tilde{O}^{\ell}_j \theta_{i\ell k} + \tilde{O}^{\ell}_j \theta_{k\ell i} - \tilde{O}^{\ell}_i \theta_{j\ell k} +$$

$$- \tilde{O}^{\ell}_i \theta_{k\ell j}) - \left(\frac{b+1}{2}\right) \tilde{O}_{m\ell} \eta_{k[i} \theta^m_{j]}{}^{\ell} ,$$

onde a e b são coeficientes arbitrários.

O tensor M_{ijk} tem traço nulo, é cíclico nos índices (i, j, k) e anti-simétrico em (i, j) . Impondo que $M_{ij}{}^k{}_{,k} = 0$, determinamos a e b como sendo respectivamente iguais a $-4/3$ e $1/3$. Assim, definimos F_{ijk} como sendo:

$$F_{ijk} \equiv \frac{3}{2} M_{ijk} = -2\theta_{ijk} + \tilde{O}^{\ell}_k \theta_{ij\ell} + \tilde{O}^{\ell}_j \theta_{i\ell k} - \tilde{O}^{\ell}_i \theta_{j\ell k} +$$

$$- \tilde{O}_{m\ell} \eta_{k[i} \theta^m_{j]}{}^{\ell} = \theta_{ijk} + \Delta^{-1} (-\theta_{ij\ell},{}^{\ell}{}_{,k} - \theta_{i\ell k},{}^{\ell}{}_{,j} +$$

$$+ \theta_{j\ell k},{}^{\ell}{}_{,i} + \eta_{k[i} \theta^m_{j]}{}^{\ell}{}_{,m,\ell}) \quad (4.45)$$

É fácil verificar que $F_{(ij)k} = F_{ijk} \epsilon^{ijk} = F_{ijk} \eta^{ik} = F_{ij}^k, k = 0$ e portanto F_{ijk} tem duas componentes independentes.

O tensor F_{ijk} é um vínculo pois é função apenas de θ_{ijk} e de derivadas de θ_{ijk} . É óbvio portanto que F_{ijk} tem parênteses de Poisson nulos com (4.43) e todos os outros de 1ª classe já que estes os têm com θ_{ijk} . Também, como $\{\theta_{ijk}(x), \theta_{lmn}(y)\} = 0$, F_{ijk} tem parênteses de Poisson zero com θ_{jjk} e com as derivadas espaciais de θ_{ijk} . Assim F_{ijk} tem parênteses de Poisson nulos consigo próprio.

Usando a definição (4.24f) de θ_{ijk} , é longo mas direto mostrar que

$$F_{ijk} = -\Pi_{ijk} + \Delta^{-1} (\Pi_{ij}^{\ell}, \ell, k + \Pi_{i k, \ell, j}^{\ell} + \Pi_{j k, \ell, i}^{\ell} + \eta_k [i \Pi_j]^{m\ell}, m, \ell) \quad (4.46)$$

A expressão (4.46) assegura-nos que F_{ijk} , por depender apenas de Π_{ijk} , tem parênteses de Poisson nulos com quase todos os outros vínculos listados na Tabela 3.3, à exceção de (4.34a) e (4.34b) pois estes vínculos dependem de Δ_{ijk} . Devemos portanto calcular explicitamente quanto valem os parênteses de Poisson de F_{ijk} com (4.34a) e (4.34b). Para isso utilizaremos a parte sem traço e sem parte cíclica da relação (4.22i):

$$\{\Delta_{abc}(x), \Pi^{ijk}(y)\} = \left(\frac{1}{3} \delta_{abc}^{ijk} - \frac{1}{6} \delta_{abc}^{kij} + \frac{1}{6} \delta_{abc}^{jki} - \frac{1}{8} \delta_{[b \eta_a] c}^{[j \eta] k} \right) \delta(x-y) \quad (4.47)$$

onde $\delta_{abc}^{ijk} = \frac{1}{2} (\delta_a^i \delta_b^j - \delta_b^i \delta_a^j) \delta_c^k$.

Das equações (4.46) e (4.47) mostra-se por cálculo direto que:

$$\{F^{ijk}(x), \phi_{abc}(y)\} = 0$$

e que

$$\{F^{ijk}(x), \Delta_{ab, m, c}^m(y) \varepsilon^{abc}\} = 0 \quad .$$

Resumindo o que fizemos até aqui, temos que:

- a) Os seis vínculos de 2ª classe $\Pi^{ij},_j \approx 0$ e $p^{ij} \approx 0$ se dividem em três de 2ª classe ($p^{ij} \approx 0$) e três de 1ª classe ($\Pi^{ij},_j - p^{ij},_j \approx 0$);
- b) Os quatro vínculos de 2ª classe $\theta_{ijk} \approx 0$ se dividem em dois de 2ª classe ($\theta_{ij},^k \approx 0$, sua divergência, que tem parênteses de Poisson não nulos com $p^{ij} \approx 0$) e dois de 1ª classe ($F_{ijk} \approx 0$, sua parte sem divergência).

Não há outras combinações dos vínculos de 2ª classe restantes que sejam de 1ª classe.

Construamos uma tabela dos vínculos de 1ª e 2ª classe da teoria sem massa (ver Tabela 4.4)

Portanto $n_2 = 30$ e $n_1 = 12$. O número de verdadeiros graus de liberdade dado por (4.29) é:

$$n = \frac{58 - 2 \times 12 - 30}{2} = 2 \quad .$$

Este é o resultado que esperaríamos encontrar para um campo sem massa.

TABELA 4.4 - Vínculos de 1ª e 2ª classe do formalismo Hamiltoniano para o caso não massivo.

Vínculos de 2ª Classe	Nº de com - ponentes in- dependentes	Vínculos de 1ª Classe	Nº de com - ponentes in- dependentes
(4.18d) $p^{ij} \approx 0$	3	(4.18a) $\Pi \approx 0$	1
(4.18f) $p^{ijk} \approx 0$	5	(4.18b) $\Pi^i \approx 0$	3
(4.18g) $\Sigma^{ij} \approx 0$	3	(4.18c) $p^i \approx 0$	3
(4.18h) $\Sigma^{ijk} \approx 0$	1	(4.43) $\Pi^{ij}, -p^{ij}, j \approx 0$	3
(4.32a) $\Omega^{ijk} \approx 0$	5	(4.45) $F_{ijk} \approx 0$	2
$\tau^{ij} \approx 0$	3		
$\rho^{ijk} \approx 0$	1		
(4.32c) $\Pi^{ijk}, k \approx 0$	3		
$\theta^k_{ij}, k \approx 0$	2		
(4.32e) $\beta_{ij,k} \epsilon^{ijk} \approx 0$	1		
(4.34a) $\Delta_{ij}^m \epsilon^{ijk} \approx 0$	1		
(4.34b) $\phi_{ijk} \approx 0$	2		

As equações de movimento da teoria são dadas por:

$$\dot{\Pi}^{ij} = \{\Pi^{ij}, H_T\} = -\frac{1}{2} \Pi^{ikj}_{,k} - \frac{1}{2} \Pi^{jki}_{,k} \quad (4.48a)$$

que corresponde à equação (4.13e) para $m = 0$.

De (4.20) obtemos para (4.48a)

$$\dot{E}_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon^{k\ell} (i B_j)_{\ell,k} = 0$$

A semelhança formal destas equações com as equações de Maxwell $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ é evidente.

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^{ijk} = \{\Pi^{ijk}, H_T\} &= \Pi^{k[i,j]} - \frac{1}{2} \Pi^{\ell i}_{,\ell} \eta^{jk} + \\ &+ \frac{1}{2} \Pi^{\ell j}_{,\ell} \eta^{ik} \approx \Pi^{k[i,j]} \end{aligned} \quad (4.48b)$$

que corresponde à equação (4.13f) para $m = 0$.

Usando (4.20), obtemos para a equação (4.48b):

$$\epsilon^{ija} \dot{B}_a^k + E^{k[i,j]} = 0$$

ou ainda, após multiplicarmos a equação acima por ϵ_{ijb} :

$$\dot{B}_{ab} + \frac{1}{2} \epsilon^{k\ell} (a B_b)_{\ell,k} = 0$$

A semelhança formal entre estas equações e as equações de Maxwell $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ é evidente.

$$\dot{\alpha}_{ij} = \{\alpha_{ij}, H_T\} = -2\Pi_{ij} - \xi(i,j) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} \xi^k_{,k} n_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{(i,j)} + \Delta_{(i^m j),m} + \\
 & - \frac{1}{3} \gamma^m_{,m} n_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.48c}$$

Esta equação corresponde à equação (4.10) desde que usemos a definição (4.19 a)

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta}_{ijk} = \{ \Delta_{ijk}, H_T \} = & -\Pi_{ijk} + \\
 & + \beta_{ij,k} - \frac{1}{2} \beta_{k[i,j]} - \frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} + \\
 & - \frac{1}{4} \eta_{kj} (3\beta_i^{\ell} - \alpha_i^{\ell})_{,\ell} + \frac{1}{4} \eta_{ki} (3\beta_j^{\ell} - \alpha_j^{\ell})_{,\ell}
 \end{aligned} \tag{4.48d}$$

Esta equação corresponde à equação (4.11) desde que usemos a definição (4.19b) e o vínculo (4.32a).

$$\dot{\phi} = \{ \phi, H_T \} = M \tag{4.48e}$$

$$\dot{\xi}_i = \{ \xi_i, H_T \} = Y_i \tag{4.48f}$$

$$\dot{\gamma}_i = \{ \gamma_i, H_T \} = \chi_i \tag{4.48g}$$

Como os multiplicadores de Lagrange M , Y_i , χ_i são indeterminados então a evolução de ϕ , ξ_i e γ_i é completamente indeterminada

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_{ij} = \{ \beta_{ij}, H_T \} = & Z_{ij} = \Delta_{ij}^m_{,m} + \\
 & + \frac{1}{2} \gamma_{[i,j]} - \xi_{[i,j]}
 \end{aligned} \tag{4.48h}$$

A equação (4.48h) corresponde ao vínculo Lagrangeano (4.15b)

Note que a compatibilidade entre os vínculos (4.15a) e (4.15b) implica no vínculo (4.34a) da Tabela 4.4.

O que aconteceria a este formalismo caso não eliminássemos a variável Δ_{ijk} da dinâmica da teoria através da introdução do vínculo (3.1.20)? Neste caso a densidade Lagrangeana para o caso com massa seria dada por (4.12) e para o caso sem massa por (4.12) com $m = 0$. As densidades Hamiltonianas seriam:

a) - Caso com massa

$$\begin{aligned}
 H_T = & -\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2} \Pi^{ijk}\Pi_{ijk} + \\
 & + \Pi^{ij}(\gamma_{i,j} - \frac{1}{3} \gamma^k{}_{,k} \eta_{ij}) + 2\Pi^{ij}\Delta_{i,j,m}^m \\
 & + 2\Pi^{ij}(-\xi_{i,j} + \frac{1}{3} \xi^k{}_{,k} \eta_{ij}) + \Pi^{ijk}(\beta_{ij,k} + \\
 & - \frac{1}{2} \beta_{k[i,j]} - \frac{3}{4} \eta_{k[i} \beta^{\ell}{}_{j],\ell}) - \Pi^{ijk}(\frac{1}{2} \alpha_{k[i,j]} + \\
 & + \frac{1}{4} \eta_{k[i} \alpha^{\ell}{}_{j],\ell}) + m^2 (\xi_k \xi^k + \frac{1}{4} \alpha_{ik} \alpha^{ik} + \\
 & + \frac{3}{4} \beta_{ik} \beta^{ik} + \frac{1}{2} \Delta_{ijk} \Delta^{ijk} + \frac{1}{2} \gamma^\ell \gamma_\ell + \frac{1}{3} \phi^2) \\
 & + M\Pi + \chi_i \Pi^i + Y_i P^i + Z_{ij} P^{ij}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

A relação dos vínculos da teoria é apresentada na Tabela 4.5

TABELA 4.5 - Relação dos vínculos referentes à densidade Hamiltoniana (4.49).

Vínculos de 2ª Classe	Número de componentes independentes
$\Pi \approx 0$	1
$\Pi^i \approx 0$	3
$P^i \approx 0$	3
$P^{ij} \approx 0$	3
$\phi \approx 0$	1
$\Pi^{ik}_{,k} - m^2 \xi^i \approx 0$	3
$\Pi^{ik}_{,k} + m^2 \gamma^i \approx 0$	3
$\Pi^{ijk}_{,k} + m^2 \beta^{ij} \approx 0$	3

O número de vínculos de 2ª classe é portanto igual a 20. Não há vínculos de 1ª classe. O número de variáveis canônicas é 40 (20 para $A_{\alpha\beta\mu}$ e 20 para os seus respectivos momentos canonicamente conjugados). Usando (4.29) encontramos que o número de verdadeiros graus de liberdade n é 10.

b) - Caso sem massa

Neste caso a densidade Hamiltoniana será dada por (4.49) com $m = 0$. A relação de vínculos da teoria está dada na Tabela 4.6.

O número de vínculos de 1ª classe é portanto igual a 16. Não há vínculos de 2ª classe. Usando (4.29) encontramos para o número de verdadeiros graus de liberdade n da teoria o valor 4. A estrutura dos vínculos é extremamente simples e formalmente semelhante às teorias de Yang-Mills.

As equações de movimento neste caso são iguais às

TABELA 4.6 - Relação dos vínculos referentes à densidade Hamiltoniana (4.49) com $m = 0$.

Vínculos de 1ª Classe	Número de componentes independentes
$\Pi \approx 0$ $\Pi^i \approx 0$ $P^i \approx 0$ $P^{ij} \approx 0$	
} Vínculos Primários	1 3 3 3
$\Pi^{ik}_{,k} \approx 0$ $\Pi^{ijk}_{,k} \approx 0$	
} Vínculos Secundários	3 3

equações (4.48) com exceção de (4.48h) onde, no caso presente, Z_{ij} é também indeterminado. Examinando as equações (4.48a) e (4.48b) (para o caso massivo deveríamos acrescentar $m^2/2 \alpha_{ij}$ e $m^2 \Delta_{ijk}$ do lado direito de (4.48c) e (4.48b) respectivamente) verificamos que a densidade Hamiltoniana dada em (4.49) com m diferente de zero e m igual a zero corresponde a uma densidade Hamiltoniana para dois campos de spin dois acoplados massivos e não massivos, respectivamente. O desacoplamento destas equações nos levaria a equações diferenciais de 2ª ordem para Π^{ij} e Π^{ijk} , o que corresponderia a equações de 3ª ordem para α_{ij} e Δ_{ijk} através das equações (4.48c) e (4.48d). Para $m = 0$ obteríamos:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\Pi}^{ij} &= -\frac{1}{2} \dot{\Pi}^{ikj}_{,k} - \frac{1}{2} \dot{\Pi}^{jki}_{,k} = \\
 &= -\frac{1}{2} \Pi^{j[i,k]}_{,k} - \frac{1}{2} \Pi^{i[j,k]}_{,k} = -\Pi^{ij,k}_{,k} \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\pi}^{ijk} &= \dot{\pi}^k[i,j] = -\frac{1}{2} \pi^{k\ell i}{}_{,\ell}{}^{,j} + \\ &- \frac{1}{2} \pi^{i\ell k}{}_{,\ell}{}^{,j} + \frac{1}{2} \pi^{k\ell j}{}_{,\ell}{}^{,i} + \frac{1}{2} \pi^{j\ell k}{}_{,\ell}{}^{,i} \\ &= \frac{1}{2} (\pi^{\ell(ik)}{}_{,\ell}{}^{,j} - \pi^{\ell(jk)}{}_{,\ell}{}^{,i})\end{aligned}\quad (4.51)$$

Para mostrarmos (4.50) e (4.51) usamos os vínculos $\pi^{ik}{}_{,k} \approx 0$ e $\ddot{\pi}^{ijk}{}_{,k} \approx 0$.

Na conclusão comentaremos sobre estes resultados.

CAPÍTULO 5

TEORIA DA GRAVITAÇÃO EM TERMOS DO POTENCIAL DE FIERZ-LANCZOS: EXTENSÃO AO ESPAÇO-TEMPO CURVO

Passemos à generalização da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores para um espaço-tempo Riemanniano arbitrário.

Na representação padrão, a generalização da equação (3.1.1) para geometrias curvas introduz algumas ambiguidades, mesmo que se utilize do princípio do acoplamento mínimo (4,5,6). Isto se deve ao fato daquela equação conter derivadas segundas de $\psi_{\mu\nu}$. A não comutatividade da derivada acarreta uma ambiguidade no ordenamento das derivadas do campo $\psi_{\mu\nu}$. O mesmo não acontece na representação de Fierz. Aplicando o princípio do acoplamento mínimo na definição (3.1.10), teremos

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} = & A_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + A_{\mu\nu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{2} A_{(\alpha\nu)} g_{\beta\mu} \\ & + \frac{1}{2} A_{(\beta\mu)} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} A_{(\beta\nu)} g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} A_{(\alpha\mu)} g_{\beta\nu} + \\ & + \frac{2}{3} A^{\sigma\lambda}_{\sigma;\lambda} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $A_{\alpha\nu} \equiv A_{\alpha}^{\lambda}{}_{\nu;\lambda} - A_{\alpha}^{\lambda}{}_{\lambda;\nu}$.

A Lagrangeana L se escreve:

$$L = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{8} C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_{\alpha\beta\mu} A^{\alpha\beta\mu} \right) d^3x \quad (5.2)$$

com $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ dado por (5.1).

Variando-se (5.2) com relação a $A_{\alpha\beta\mu}$ obtemos:

$$C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu} = 0 \quad (5.3)$$

O traço de (5.3) implica em

$$(C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu}) g_{\alpha\mu} = 0 \implies A^{\alpha\beta\mu} g_{\alpha\mu} = 0 \quad (5.4a)$$

A divergência de (5.3) dará

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} &= \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;[\nu;\mu]} + m^2 A^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} = \\ &= \frac{1}{2} (R^\alpha{}_{\epsilon\nu\mu} C^{\epsilon\beta\mu\nu} + R^\beta{}_{\epsilon\nu\mu} C^{\alpha\epsilon\mu\nu}) + m^2 A^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} = \\ &= \frac{1}{2} W^{[\alpha}{}_{\epsilon\mu\nu} C^{\beta]\epsilon\mu\nu} + m^2 A^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} \implies \\ \implies A^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} &= -\frac{1}{2m^2} W^{[\alpha}{}_{\epsilon\mu\nu} C^{\beta]\epsilon\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.4b)$$

onde usamos (2.2a).

Por analogia com o que fizemos com a equação (3.1.20), imporemos as seguintes condições sobre $A_{\mu\nu\lambda}$:

$$A^{*\alpha\beta\mu}{}_{;\beta} + A^{*\mu\beta\alpha}{}_{;\beta} = 0 \quad (5.5)$$

Estas condições devem ser acrescentadas a (5.2) mediante multiplicadores de Lagrange, exatamente como foi feito em (4.16).

Temos assim uma teoria para o campo de spin dois mas-

sivo representado pela variável de Fierz que se propaga num espaço-tempo curvo Riemanniano arbitrário mas fixado. Note que a métrica deste espaço-tempo está congelada já que não variamos (5.2) com respeito a $g_{\mu\nu}(x)$. Assim, a própria curvatura do espaço-tempo de fundo está determinada e as equações (5.3) descrevem apenas a propagação de um campo de spin dois massivo ao longo de uma variedade Riemanniana dada "a priori". No entanto, nosso principal objetivo consiste em descrever o campo gravitacional (de spin dois e não massivo) através de novas variáveis limitando-nos a estar o mais próximo possível da T.R.G., pelo menos nas regiões onde esta teoria já tenha sido testada. Segundo a visão geométrica de Einstein da gravitação, a presença de matéria curva o espaço-tempo, ou seja, diferentes distribuições de matéria-energia geram diferentes curvaturas. Do ponto de vista do princípio variacional, a curvatura do espaço-tempo seria aquela que minimizaria a ação composta de um termo puramente geométrico e outro relativo aos campos de matéria (e, eventualmente, termos de interação entre estes com a gravitação). Desse modo, segue-se então que a curvatura não deveria ser fixada arbitrariamente mas, outrossim, emergir das equações de campo. Portanto, as variáveis que descrevem a gravitação devem ser quantidades geométricas ligadas à curvatura do espaço-tempo. Escolhe-se a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ da variedade como sendo a extensão natural, fundada numa interpretação geométrica, da variável padrão $\psi_{\mu\nu}(x)$. Qual seria então a quantidade geométrica que estaria associada à variável de Fierz? Ora, comparando as equações (5.1) e (3.1.9) com (2.2b) e (2.4), é também natural escolher-se o potencial de Lanczos e

o tensor de Weyl como sendo aquelas quantidades geométricas que generalizariam respectivamente a variável de Fierz $A_{\mu\nu\lambda}$ e o campo $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ para espaços-tempos curvos. Portanto temos à mão uma nova quantidade geométrica, o potencial de Lanczos, segundo a qual poderemos descrever a dinâmica do campo gravitacional. Repare que sem a prova de sua existência, jamais poderíamos dar uma interpretação geométrica à variável de Fierz.

Que tipo de equações uma teoria baseada no potencial de Lanczos deve satisfazer de maneira a não nos afastarmos do T.R.G. ? A resposta a esta pergunta já foi dada há algum tempo atrás através das equações de Jordan-Lichnerowicz (21,22), embora ainda não se conhecesse o potencial de Lanczos.

O ponto de partida para a formulação destas equações baseia-se na existência das identidades de Bianchi para uma geometria Riemanniana. Estas identidades podem ser escritas de duas maneiras equivalentes:

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}{}_{; \nu} = R_{\mu[\alpha; \beta]} \quad (5.6a)$$

ou, usando (2.2a),

$$W_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}{}_{; \nu} = \frac{1}{2} R_{\mu[\alpha; \beta]} - \frac{1}{12} g_{\mu[\alpha} R_{, \beta]} \quad (5.6b)$$

A idéia de Jordan e seus colaboradores foi procurar um novo sistema de equações (formalmente similar a (5.6b)) tal que o lado direito fosse identificado com uma corrente

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{; \nu} = J^{\alpha\beta\mu} \quad (5.7)$$

Se nossa intenção é estabelecer um contato entre (5.7)

e as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}$$

então tal corrente deve ser construída apenas em termos do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ da seguinte maneira:

$$J_{\alpha\beta\mu} = -\frac{k}{2} T_{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{k}{6} g_{\mu[\alpha} T_{,\beta]} \quad (5.8)$$

obtendo-se então

$$W_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{k}{2} T_{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{k}{6} g_{\mu[\alpha} T_{,\beta]} \quad (5.9)$$

Considere a validade simultânea de (5.9) e (5.6). Se tomarmos a equação de Einstein como válida numa determinada hipersuperfície inicial Σ , então as equações (5.6) e (5.9) propagam esta condição para além de Σ tornando, portanto, as equações de Einstein válidas por todo espaço-tempo (o leitor deve comparar esta discussão com aquela feita após (3.1.42)). Assim, (5.9) é equivalente às equações de Einstein desde que se escolha condições de contorno apropriadas.

Tais equações já foram bastante usadas na literatura como alternativa às equações de Einstein para resolver problemas de teoria de perturbação na métrica de Friedman (31,32,33). Como o tensor de Weyl desta métrica é nulo então qualquer perturbação de quantidades associadas a este tensor, isto é, $\delta W_{\alpha\beta\mu\nu}$, é certamente uma verdadeira perturbação e não apenas uma consequência de alguma transformação de coordenadas.

Tais equações nunca foram consideradas como fundamen

tais já que não podemos obtê-las de uma ação onde a variável fundamental seja a métrica (a não ser para o espaço vazio ^(3.4)) além de serem equações diferenciais de 3ª ordem para a métrica o que nos levaria provavelmente a teorias quânticas não unitárias.

Entretanto, a existência do potencial de Lanczos muda radicalmente este quadro. De fato, se considerarmos tal potencial como a variável fundamental da gravitação, as equações (5.9) passam a ser equações diferenciais de 2ª ordem para $L_{\alpha\beta\mu}$, o que pode eliminar o problema da unitariedade. A aproximação fraca de (5.9) nos levaria diretamente a (3.2.2). A identificação neste caso entre o potencial de Lanczos e a variável de Fierz é evidente. Com efeito, basta examinarmos as equações (2.8), (3.1.21a) no caso em que escolhemos $B = 0$ e (3.2.6). As observações após (3.2.6) reiteram a equivalência entre as equações para $(\psi_{\mu\nu}(x), g_{\mu\nu}(x))$ e $(A_{\alpha\beta\mu}(x), L_{\alpha\beta\mu}(x))$.

Resta-nos agora obter (5.9) de um princípio variacional. Como identificamos $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ com $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $A_{\alpha\beta\mu}$ com $L_{\alpha\beta\mu}$, a ação que fornece a dinâmica do campo gravitacional será, por analogia com (5.2) para $m = 0$, dada por:

$$S = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{8} W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu} + L_M \right) d^4x \quad (5.10)$$

onde L_M é a densidade Lagrangeana dos campos de matéria.

Neste momento nos deparamos com um novo problema. Como consequência da descrição do campo gravitacional em termos de quantidades geométricas, não só $L_{\alpha\beta\mu}(x)$ mas também $g_{\mu\nu}(x)$ devem ser variados na ação (5.10). Não podemos apenas permiti -

tir flutuações arbitrárias de $L_{\alpha\beta\mu}(x)$ mantendo $g_{\mu\nu}(x)$ fixo, a menos que nos restrinjamos a um particular modelo. Assim:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[M^{\alpha\beta\mu} \delta L_{\alpha\beta\mu} + (N^{\mu\nu} + \frac{T_M^{\mu\nu}}{2}) \delta g_{\mu\nu} \right] \quad (5.11)$$

onde $T_M^{\mu\nu} \equiv 2 \frac{\partial L_M}{\partial g_{\mu\nu}}$ é o tensor momento-energia da matéria.

Existe no entanto uma relação integral entre $g_{\mu\nu}(x)$ e $L_{\alpha\beta\mu}(x)$ (veja discussão após (2.2b)). Portanto, as variações $\delta L_{\alpha\beta\mu}$ e $\delta g_{\mu\nu}$ não são independentes. Para que o princípio variacional forneça uma teoria geral coerente precisamos de uma relação entre $\delta g_{\mu\nu}$ e $\delta L_{\alpha\beta\mu}$.

Há alguns anos atrás, Ginzburg e outros ⁽³⁵⁾ mostraram que as equações que descrevem a dinâmica de flutuações arbitrárias da métrica $\delta g_{\mu\nu}$ (não necessariamente pequenas) em torno de um campo médio $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ correspondem a equações de movimento de um campo de spin dois massivo sobre um espaço-tempo Riemanniano arbitrário cuja curvatura é função de $\langle g_{\mu\nu} \rangle$. Se a métrica $g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}$ satisfaz às equações de Einstein então, devido à não linearidade destas equações, as equações para $\delta g_{\mu\nu}$ não são as mesmas. Termos de massa que podem depender tanto da curvatura do espaço-tempo de fundo ($m \sim \sqrt{R}$) ou de alguma constante universal da teoria da gravitação ($m^2 \sim \frac{1}{k}$) surgem nas equações de evolução para $\delta g_{\mu\nu}$. Sendo assim, podemos usar a relação de equivalência (3.1.21b) generalizada a espaços-tempos curvos através do princípio de acoplamento mínimo identificando m^2 com $\frac{1}{2k}$ e fazendo $Q = 0$, obtendo:

$$\delta g_{\mu\nu} = -k \left[\delta L_{\mu\alpha\nu} + \delta L_{\nu\alpha\mu} \right] ;_{\lambda} g^{\alpha\lambda} +$$

$$- \frac{2}{3} k \left[\delta L_{\alpha\beta\lambda} \right] ; \rho g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} g_{\mu\nu}$$

Resta-nos calcular $M^{\alpha\beta\mu}$ e $N^{\mu\nu}$ em (5.11). Variando (5.11) com relação a $L_{\alpha\beta\mu}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \frac{1}{4} \int W^{\alpha\beta\mu\nu} \delta W_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \\ &= - \int W^{\alpha\beta\mu\nu} \delta L_{\alpha\beta\mu ; \nu} \sqrt{-g} d^4x = \\ &= \int W^{\alpha\beta\mu\nu} ; \nu \delta L_{\alpha\beta\mu} \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

onde desprezamos termos de superfície, ou seja,

$$M^{\alpha\beta\mu} = W^{\alpha\beta\mu\nu} ; \nu \quad (5.12)$$

Variando (5.11) com relação a $g_{\mu\nu}$, esquecendo o termo L_M , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \frac{1}{8} \delta \int W_{\alpha\beta\mu\nu} W_{\rho\sigma\theta\phi} g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g^{\mu\theta} g^{\nu\phi} \sqrt{-g} d^4x = \\ &= - \frac{1}{8} \int \left[\frac{1}{2} g^{\varepsilon\lambda} W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu} \delta g_{\varepsilon\lambda} + \right. \\ &\quad \left. - 4 W^{\varepsilon\beta\mu\nu} W^{\lambda}_{\beta\mu\nu} \delta g_{\varepsilon\lambda} + 2 W^{\alpha\beta\mu\nu} \delta W_{\alpha\beta\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (5.13)$$

A última parcela do lado esquerdo da equação acima nos dá:

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{4} \int W^{\alpha\beta\mu\nu} \delta W_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \\ &= - \frac{1}{4} \int \left[-4 W^{\alpha\beta\mu\nu} (L_{\varepsilon\beta\mu} \delta \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\nu} + L_{\alpha\varepsilon\mu} \delta \Gamma^{\varepsilon}_{\beta\nu}) \right. \\ &\quad \left. + 2 L_{(\nu\alpha)} W^{\alpha\varepsilon\lambda\nu} \delta g_{\varepsilon\lambda} \right] \sqrt{-g} d^4x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4} \int \left[(4W^{\alpha\beta\mu\nu} L^{\lambda}_{\beta\mu})_{;\nu} \delta g_{\lambda\alpha} + (4W^{\alpha\beta\mu\nu} L^{\lambda}_{\beta\mu})_{;\alpha} \delta g_{\lambda\nu} + \right. \\
 &\quad \left. - 4(W^{\alpha\beta\mu\nu} L^{\lambda}_{\beta\mu})_{;\lambda} \delta g_{\alpha\nu} + 2L_{(\nu\alpha)} W^{\alpha\epsilon\lambda\nu} \delta g_{\epsilon\lambda} \right] \sqrt{-g} d^4x = \\
 &= -\frac{1}{4} \int \left[2L_{(\nu\alpha)} W^{\alpha\epsilon\lambda\nu} + 2(L^{\lambda}_{\beta\mu} W^{\epsilon})^{\beta\mu\nu})_{;\nu} + \right. \\
 &\quad \left. + 2(W^{\alpha\beta\mu} (\epsilon_{L^{\lambda}})^{\beta\mu})_{;\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. - 2(W^{\epsilon\beta\mu\lambda} h^{\alpha}_{(\beta\mu)})_{;\alpha} \right] \delta g_{\epsilon\lambda} \quad . \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$W^{\epsilon\beta\mu\nu} W^{\lambda}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\epsilon\lambda} W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu}$$

obtemos, após substituirmos (5.14) em (5.13):

$$\begin{aligned}
 \delta S = \int \left[+ \frac{1}{16} W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\epsilon\lambda} + \right. \\
 - \frac{1}{2} L_{(\nu\alpha)} W^{\alpha\epsilon\lambda\nu} - \frac{1}{2} (W^{\nu\beta\mu} (\epsilon_{L^{\lambda}})^{\beta\mu})_{;\nu} + \\
 \left. - \frac{1}{2} (W^{\nu\beta\mu} (\epsilon_{L^{\lambda}})^{\beta\mu})_{;\nu} + \frac{1}{2} (W^{\epsilon\beta\mu\lambda} L^{\alpha}_{(\beta\mu)})_{;\alpha} \right] \\
 \delta g_{\epsilon\lambda} \sqrt{-g} d^4x
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 N^{\mu\nu} &= + \frac{1}{16} W^{\rho\sigma\theta\phi} W_{\rho\sigma\theta\phi} g^{\mu\nu} + \\
 &- \frac{1}{2} L_{(\phi\rho)} W^{\rho\mu\nu\phi} - \frac{1}{2} (W^{\phi\theta\sigma} (\mu_{L^{\nu}})_{\sigma\theta})_{;\phi} + \\
 &- \frac{1}{2} (W^{\phi\rho\sigma} (\mu_{L^{\nu}})_{\rho\sigma})_{;\phi} + \frac{1}{2} (W^{\mu\sigma\theta\nu} L^{\rho}_{(\sigma\theta)})_{;\rho} = \\
 &= \frac{1}{16} W^{\rho\sigma\theta\phi} W_{\rho\sigma\theta\phi} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} L_{(\epsilon\lambda)} W^{\epsilon\mu\nu\lambda} + V^{\mu\nu\lambda} \quad ;\lambda \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

onde

$$V^{\mu\nu\lambda} = -W^{\lambda\rho\sigma(\mu} L^{\nu)}_{\rho\sigma} - W^{\lambda\sigma\rho(\mu} L^{\nu)}_{\rho\sigma} + W^{\mu\rho\sigma\nu} L^{\lambda}_{(\rho\sigma)} \quad (5.16)$$

Substituindo (5.15) e (5.12) em (5.11), e desprezando termos de superfície, temos:

$$\delta S = \int (W^{\alpha\beta\mu\nu}_{;\nu} + \frac{k}{2} T^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{k}{6} g^{\mu[\alpha} T^{\beta]}) \delta L_{\alpha\beta\mu} \sqrt{-g} d^4x \quad (5.17)$$

onde

$$T_{\mu\nu} \equiv \chi_{\mu\nu} + T^M_{\mu\nu} \quad (5.18)$$

e

$$\begin{aligned} \chi^{\mu\nu} &\equiv 2 \frac{\delta L_G}{\delta g_{\mu\nu}} = 2 \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left[\int -\frac{1}{8} W^{\rho\sigma\theta\phi} W_{\rho\sigma\theta\phi} \sqrt{-g} d^4x \right] = \\ &= 2N_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Assim obtemos as equações:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{k}{2} T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{k}{6} g^{\mu[\alpha} T^{\beta]} \quad (5.20)$$

sendo $T_{\mu\nu}$ dado por (5.18).

Este sistema de equações corresponde ao sistema de Jordan-Lichnerowicz acrescido de um termo extra para a fonte $T_{\mu\nu}$ proveniente da geometria. Este termo corresponderia ao tensor momento-energia do campo gravitacional já que ele provém da variação da parte puramente geométrica da ação (5.10) (um escalar mediante transformações gerais do sistema de coordenadas) com relação a $g_{\mu\nu}$. Isto implica que a divergência covariante de $\chi^{\mu\nu}$ (dado por (5.19)) ($\chi^{\mu\nu}_{;\nu}$) é identicamente nula ⁽³⁶⁾, o que deve ocorrer para qualquer tensor momento-ener-

gia aceitável.

Este $\chi_{\mu\nu}$ não apresenta as invariâncias de calibre apontadas nos itens b) e c) do teorema enunciado após (2.1). Das 20 componentes independentes de $L_{\alpha\beta\mu}$, dez são determinadas por (2.1) enquanto as outras dez permanecem arbitrárias. Esta arbitrariedade de $L_{\alpha\beta\mu}$ pode ser usada para se eliminar as dez componentes independentes de $\chi_{\mu\nu}$ tornando-o identicamente nulo. Isto é uma consequência do princípio da equivalência. Assim, embora não possamos anular $\chi_{\mu\nu}$ através de uma transformação de coordenadas por ser ele um verdadeiro tensor, podemos torná-lo nulo mediante uma escolha de calibre conveniente para $L_{\alpha\beta\mu}$.

Note que a equação (5.20) propaga por todo espaço-tempo as equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu} = -k (\chi_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^M) \quad (5.21)$$

Portanto, as equações (5.20) nos levam às equações de Einstein acrescidas do termo $\chi_{\mu\nu}$. Este termo é de 2ª ordem na curvatura sendo identicamente nulo para universos tipo Friedman (onde $W^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$). As equações (5.21) são idênticas às equações de Einstein para a escolha de calibre segundo a qual $\chi_{\mu\nu} = 0$.

Concluindo, construímos neste capítulo uma teoria da gravitação onde a variável fundamental é o potencial de Lanczos $L_{\alpha\beta\mu}$ (interpretado como sendo a extensão a espaços-tempos curvos da variável de Fierz $A_{\alpha\beta\mu}$) para o tensor de curvatura conforme $W_{\alpha\beta\mu\nu}$. A ação (5.10) (cuja semelhança formal com a ação eletromagnética é evidente) fornece-nos as equações de

Jordan-Lichnerowicz modificadas (5.20) que por sua vez propagam as equações de Einstein modificadas (5.21) por um termo de 2ª ordem na curvatura. Tal teoria em nada deve modificar as previsões cosmológicas da teoria de Einstein já que todas estas são calcadas na métrica de Friedman cujo tensor de Weyl é zero, o que implica na nulidade de $\chi_{\mu\nu}$. Quanto às observações no sistema solar, as equações (5.21) devem promover modificações de 2ª ordem nas medições, o que talvez ainda seja imperceptível à aparelhagem disponível. Caso não o sejam e se tais modificações se revelem incompatíveis com as observações então, por alguma razão ainda desconhecida para nós, a Natureza deve ter calibrado $L_{\alpha\beta\mu}$ de tal maneira a anular $\chi_{\mu\nu}$.

Cumpre-nos ainda reiterar que devemos adicionar à ação (5.10) os termos $\Omega^{\alpha\mu} A^*_{(\alpha\mu); \beta} + \frac{1}{2} Q_{\alpha\mu\beta\nu} \Omega^{\alpha\mu} \Omega^{\beta\nu}$ por razões idênticas às expostas anteriormente a (4.16). Estes termos, por construção, não alteram às equações (5.20). Neste caso, no entanto, o formalismo Hamiltoniano será extremamente mais complicado devido à presença da métrica $g_{\mu\nu}(x)$ como variável dinâmica cujas variações estão ligadas a $\delta L_{\alpha\beta\mu}$ por (5.12). Isto será objeto de investigação para futuros trabalhos.

CONCLUSÃO

Motivados pelas razões expostas no Capítulo 1, construímos uma teoria alternativa à Relatividade Geral de Einstein baseada nas variáveis de Fierz-Lanczos.

Começamos por apresentar no Capítulo 2 o potencial Lanczos do tensor de Weyl obtendo como novos resultados a expressão da energia ADM em termos deste potencial (eq.(2.12)) e uma relação explícita entre o potencial de Lanczos e os coeficientes de rotação de Ricci de variedades Riemannianas que sejam grupos de Lie de constante de estrutura totalmente anti-simétrica (equação (2.13)). O fato de o potencial de Lanczos ser um potencial para o tensor de Weyl, a sua ligação com a energia ADM, com os coeficientes de rotação de Ricci e com a curvatura extrínseca, mostram que aquele potencial está relacionado com as novas variáveis de Ashtekar. A relação explícita entre estas duas quantidades, no entanto, ainda não é conhecida.

No Capítulo 3 apresentamos a variável de Fierz. Construímos uma Lagrangeana em termos destas variáveis no espaço-tempo de Minkowski cujas equações de Euler-Lagrange correspondem à aproximação fraca da teoria de Jordan-Lichnerowicz. Verificamos, através das relações (2.8), (3.1.21a) e (3.2.6) que a variável de Fierz pode ser entendida como sendo a aproximação fraca do potencial de Lanczos, da mesma maneira que a variável padrão $\psi_{\mu\nu}$ é a perturbação de primeira ordem da métrica do espaço-tempo. Mostramos detalhadamente a equivalência entre a teoria em termos da variável de Fierz e a teoria usual

em termos da variável padrão, tanto para o caso com massa como para o caso sem massa. Examinamos também as possíveis interações entre a variável de Fierz e os demais campos da natureza.

Como explicado na Introdução, a gravitação deve ser descrita por uma teoria de campo de spin dois. No Capítulo 4 mostramos que a teoria desenvolvida no Capítulo 3 em termos das variáveis de Fierz acrescida dos vínculos (3.1.20) corresponde efetivamente a uma teoria de campo de spin dois, tanto para o caso com massa como para o caso sem massa. Com este fim, desenvolvemos o formalismo Hamiltoniano da teoria, mostramos que a álgebra dos vínculos é fechada, que as equações de Hamilton e os vínculos secundários são idênticos às equações provenientes do formalismo Lagrangeano e exibimos todos os vínculos de 1ª classe da teoria sem massa, geradores das transformações de calibre da teoria.

Finalmente, no Capítulo 5, generalizamos a teoria desenvolvida nos Capítulos 3 e 4 para espaços-tempos curvos. Identificamos a variável de Fierz com o potencial de Lanczos e, conseqüentemente, o campo $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ com o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$. Impusemos a Lagrangeana (5.10) como aquela que descreve o campo gravitacional na presença de matéria. A partir desta Lagrangeana obtivemos o tensor momento-energia do campo gravitacional. Mostramos, através do princípio variacional, que as equações de Euler-Lagrange da Lagrangeana (5.10) correspondem às conhecidas equações de Jordan-Lichnerowicz acrescidas de um termo que depende das derivadas do tensor momento-energia do campo gravitacional. A aproximação linear destas equações corresponde exatamente às equações obtidas no Capítulo 3,

para o caso de massa nula e na presença de matéria.

Quais os pontos fortes desta teoria e suas vantagens frente à T.R.G. ?

- a) A nova teoria tem como campo fundamental a curvatura do espaço-tempo e seus potenciais que são, ao invés da métrica, como vimos na Introdução, as quantidades essenciais que atestam a existência ou não da interação gravitacional. Este fato aproxima a gravitação das teorias de Yang-Mills.
- b) Obtivemos, pela primeira vez, as equações de Jordan-Lichnerowicz de um princípio variacional, que do ponto de vista das novas variáveis, constituem-se em equações diferenciais de 2ª ordem não lineares para o potencial de Lanczos.
- c) Podemos usar a teoria aqui desenvolvida como ponto de partida para a construção de um formalismo Lagrangeano para as novas variáveis de Ashtekar.
- d) O novo formalismo permite obter um tensor momento-energia do campo gravitacional, o que não é possível para a TRG (lá obtém-se um pseudo-tensor que pode sempre ser anulado num ponto, o que está ligado ao princípio de equivalência). No entanto, tal tensor depende da escolha de calibre para o potencial de Lanczos, sendo possível, portanto, anulá-lo mediante uma escolha apropriada de calibre. É desta maneira que o princípio de equivalência se manifesta nesta teoria.

Mostrou-se no Capítulo 3 que a aproximação linear deste tensor momento-energia difere apenas por uma divergência total do tensor momento-energia calculado a partir do teorema de Noether.

- e) As equações de movimento da teoria são equivalentes às equações de Einstein acrescidas de um termo proporcional ao tensor momento-energia do campo gravitacional, caso imponhamos condições de contorno apropriadas. Este novo termo pode ser anulado mediante uma escolha de calibre conveniente, obtendo-se assim as equações de Einstein exatas.
- f) Pode-se obter do traço do potencial de Lanczos um campo vetorial $L_\alpha \equiv L_{\alpha\beta\mu} g^{\beta\mu}$ que pode ser associado ao potencial quadri-vetor eletromagnético. Este fato abre novas perspectivas para a tentativa de unificar o eletromagnetismo à gravitação. Todas as tentativas neste sentido que utilizaram a métrica $g_{\mu\nu}$ como variável fundamental fracassaram. Alguns dos primeiros passos para a elaboração de tal programa foram indicados no Capítulo 3 (veja as eqs. (3.1.30) e (3.1.34)).
- g) O estudo de interações gravitacionais de curto alcance^(37,38) não pode ser desenvolvido no corpo da TRG pelo fato desta teoria usar como variável fundamental a métrica $g_{\mu\nu}$. O simples acréscimo de um termo do tipo $\int m^2 g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int 4m^2 \sqrt{-g} d^4x$ à Lagrangeana da T.R.G., corresponde apenas a uma renormalização da constante cosmológica. Não surgem forças gravitacionais de curto alcance.

O novo formalismo permite descrever de maneira simples interações gravitacionais de curto alcance. Para tanto, basta acrescentar à Lagrangeana (5.10) o termo $\int m^2 L_{\alpha\beta\mu} L^{\alpha\beta\mu} \sqrt{-g} d^4x$.

Quais as dificuldades da teoria aqui desenvolvida ?

a) Apesar de eliminarmos a métrica como variável fundamental da teoria, ela se faz presente nas equações (5.20) devido à presença de derivadas covariantes e de $T_{\mu\nu}$ nestas equações. Como a equação que relaciona a métrica com o potencial de Lanczos é extremamente complicada (é uma relação integral), torna-se praticamente impossível, no caso geral, resolver as equações (5.20) sem conhecermos previamente o tensor métrico. Em outras palavras, é praticamente impossível tornar as equações (5.20) unicamente dependentes do potencial de Lanczos e das quantidades relacionadas ao conteúdo material envolvido naquelas equações. Do ponto de vista da quantização canônica, o fato da Lagrangeana (5.10) ser também função do tensor métrico torna extremamente complicada a definição dos momentos canonicamente conjugados ao potencial de Lanczos, dificultando a obtenção da Hamiltoniana da teoria. Uma possível solução para estes impasses seria o de formularmos uma teoria sobre o espaço-tempo plano que fosse equivalente à teoria aqui desenvolvida. Procedimento deste tipo já foi implementado por Grishchuck e colaboradores ^(39,40), para mostrar que a T.R.G. pode ser entendida como uma particular teoria de campo descrita pela variável padrão no espaço-tempo plano. Para tanto, eles construíram uma Lagrangeana cujas equações de movimento sobre o espaço-tempo plano são idênticas às equações de Einstein desde que se faça a identificação $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma} (\gamma^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu})$ onde $\gamma^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski em coordenadas curvilíneas e γ o seu determinante. Da mesma maneira, poderíamos construir uma Lagrangeana particular sobre o espaço-tempo plano envolvendo as variáveis

de Fierz cujas equações de movimento fossem idênticas às equações (5.20) desde que façamos identificações apropriadas envolvendo a variável de Fierz, a métrica e o potencial de Lanczos. Desta maneira, teríamos uma equação de movimento envolvendo apenas a variável de Fierz onde a métrica do espaço-tempo seria a métrica de Minkowski em coordenadas curvilíneas. Tal procedimento será objeto de investigação para futuros trabalhos.

- b) Um dos objetivos primeiros para a construção da teoria desenvolvida neste trabalho foi o de simplificar a estrutura dos vínculos de 1ª classe da teoria. Ao examinarmos a Tabela 4.4 verificamos que, de fato, a estrutura dos vínculos de 1ª classe é simples. Porém, o vínculo (4.45), proveniente do vínculo Lagrangeano (3.1.20) não tem análogo nas teorias de Yang-Mills. Caso não impuséssemos o vínculo Lagrangeano (3.1.20) obteríamos, para o caso sem massa, os vínculos de 1ª classe enumerados na Tabela 4.6 que são formalmente idênticos aos vínculos das teorias de Yang-Mills. No entanto, tal teoria corresponde, como verificado no Capítulo 4, a uma teoria de dois campos de spin 2 não massivos acoplados. Ora, se pudéssemos encontrar um mecanismo pelo qual um dos dois campos adquirisse massa (por exemplo, Δ_{ijk}), teríamos uma teoria de campo que envolveria um campo de spin 2 não massivo (interação gravitacional usual) e um campo de spin 2 massivo (interação gravitacional de curto alcance). Um exemplo de tal mecanismo foi apontado no Capítulo 3, equação (3.1.20), onde a interação da variável de Fierz com um campo escalar faz surgir um termo de massa proporcional a

$\phi\bar{\phi}$ para a parte sem traço de $A_{\mu\nu\lambda}$. Em futuros trabalhos, pretendemos investigar com mais profundidade uma maneira de viabilizar esta possibilidade que permitiria não só retirar o vínculo (3.1.20) da teoria, o que a tornaria mais simples e elegante, além de nos proporcionar uma dinâmica para uma possível interação gravitacional de curto alcance.

d) A teoria desenvolvida neste trabalho não é ainda equivalente às teorias de Yang-Mills por não sabermos a que grupo de simetrias está ligada a invariância de calibre da variável de Fierz. Em outras palavras, gostaríamos de saber qual o princípio de simetria deve a Lagrangeana da matéria satisfazer para que a variável de Fierz emergja como campo compensador interagindo com tudo que existe. As tentativas de descrever a T.R.G. como uma teoria de Yang-Mills ^(41,42) se revelaram incompletas e o formalismo desenvolvido neste trabalho abre novas perspectivas nesta área.

Pretendemos ainda, em futuros trabalhos, obter uma relação explícita entre o potencial de Lanczos e a nova variável de Ashtekar bem como uma generalização da equação (2.13) para variedades menos específicas.

Vimos, portanto, que a descrição da interação gravitacional através das variáveis de Fierz-Lanczos é coerente, está de acordo com todos os fatos observacionais relativos àquela interação e abre novas perspectivas em muitas áreas onde a T.R.G. se revelou insuficiente. Este trabalho constitui um ponto de partida para a implementação de todos estes programas.

APÊNDICE A

FORMALISMO HAMILTONIANO COM VÍNCULOS

Neste apêndice faremos uma breve revisão do formalismo Hamiltoniano com vínculos. Para o leitor que desejar se aprofundar no assunto recomendamos as referências (9), (10) e (43).

Sejam n_v campos $q_i(x)$, onde i varia de 1 a n_v , cuja dinâmica seja dada pela Lagrangeana

$$L = \int L(q_i(x), \dot{q}_i(x)) d^3x \quad (\text{A.1})$$

Os momentos canonicamente conjugados aos $q_i(x)$ são definidos por:

$$p^i(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i(x)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(x)} \quad (\text{A.2})$$

Se a matriz $D^{ij}(x,y) \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{q}_i(x) \delta \dot{q}_j(y)} = \frac{\delta p^i(x)}{\delta \dot{q}_j(y)}$ for inversível então é possível expressar $\dot{q}_i(x)$ em termos dos $p^i(x)$. Assim, podemos construir a Hamiltoniana canônica que é um funcional apenas de $q_i(x)$ e $p^i(x)$ através da seguinte transformação de Legendre:

$$H(q_i(x), p^i(x)) = p^i(x) \dot{q}_i(x) - L(q_i(x), \dot{q}_i(x)) \quad (\text{A.3})$$

A Hamiltoniana será dada por

$$H = \int H(q_i(x), p^i(x)) d^3x \quad (A.4)$$

O espaço de fase da teoria será constituído por $q_i(x)$ e $p^i(x)$. O número de variáveis canônicas é $\eta_c = 2\eta_v$.

Seja $A(q_i(x), p^i(x))$ e $B(q_j(y), p^j(y))$ duas funções quaisquer das variáveis canônicas $q_i(x)$ e $p^i(x)$. O parênteses de Poisson entre A e B é definido como:

$$\begin{aligned} & \{A(q_i(x), p^i(x)), B(q_j(y), p^j(y))\} = \\ & = \int \left[\frac{\delta A(q_i(x), p^i(x))}{\delta q_\ell(z)} \frac{\delta B(q_j(y), p^j(y))}{\delta p^\ell(z)} + \right. \\ & \quad \left. - \frac{\delta A(q_i(x), p^i(x))}{\delta p^\ell(z)} \frac{\delta B(q_j(y), p^j(y))}{\delta q_\ell(z)} \right] d^3z \quad (A.5) \end{aligned}$$

Os parênteses de Poisson têm as seguintes propriedades:

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (A.6a)$$

$$\{A_1 + cA_2, B\} = \{A_1, B\} + c\{A_2, B\} \quad (A.6b)$$

$$\{A_1 A_2, B\} = A_1 \{A_2, B\} + \{A_1, B\} A_2 \quad (A.6c)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 \quad (A.6d)$$

onde A, B, A_1 , A_2 e C são funcionais de $q_i(x)$ e $p^i(x)$ e c é um número real.

De (A.5) temos:

$$\begin{aligned}
 \{q_i(x), p^j(y)\} &= \int \left[\frac{\delta q_i(x)}{\delta q(z)} \frac{\delta p^j(y)}{\delta p^l(z)} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\delta q_i(x)}{\delta p^l(z)} \frac{\delta p^j(y)}{\delta q_l(z)} \right] d^3z = \\
 &= \int (\delta^l_i \delta^3(x-z) \delta^j_l \delta^3(y-z) - 0) d^3z = \\
 &= \delta^j_i \delta^3(x-y) \tag{A.7a}
 \end{aligned}$$

$$\{q_i(x), q_j(y)\} = \{p^i(x), p^j(y)\} = 0 \tag{A.7b}$$

A Hamiltoniana canônica dada por (A.4) e (A.3) gera formalmente as seguintes equações:

$$\dot{q}_i(x) = \{q_i(x), H\} = \frac{\delta H}{\delta p^i(x)} = \frac{\partial H}{\partial p^i(x)} \tag{A.8a}$$

$$\dot{p}^i(x) = \{p^i(x), H\} = - \frac{\delta H}{\delta q_i(x)} = - \frac{\partial H}{\partial q_i(x)} \tag{A.8b}$$

No caso em que a matriz $D^{ij}(x,y)$ não for inversível então surgirão certas relações entre os $q_i(x)$ e os $p^j(x)$, que denotaremos por:

$$\phi_m(q_i(x), p^i(x)) \approx 0 \tag{A.9}$$

onde m é um número inteiro que varia entre 1 e n_p onde $n_p < n_c$.

O símbolo " ≈ 0 " é lido "fracamente igual a zero" e significa que, embora os $\phi_m(q_i(x), p^i(x))$ sejam realmente iguais a zero os parênteses de Poisson entre eles e algumas das variáveis canônicas podem ser diferentes de zero.

As relações (A.9) constituem vínculos entre as vari-

áveis canônicas e por serem provenientes da definição (A.2) são chamados vínculos primários. Eles reduzem o espaço de fase da teoria ao subespaço $\phi_m = 0$. As equações (4.18) são exemplos destes vínculos.

Devido à existência dos vínculos (A.9), a Hamiltoniana (A.4) não é a mais geral possível. De fato, podemos substituí-la por

$$H_T = \int H_T d^3 \quad (A.10)$$

onde

$$H_T = H + u^m \phi_m(q_i(x), p^i(x)) \approx H \quad (A.11)$$

onde H é dada por (A.3) e os u^m são multiplicadores de Lagrange.

A Hamiltoniana (A.10) gera novas equações de movimento:

$$\dot{q}_i(x) = \{q_i(x), H_T\} \approx \frac{\partial H_T}{\partial p^i(x)} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i(x)} \quad (A.12a)$$

$$\dot{p}^i(x) = \{p^i(x), H_T\} \approx -\frac{\partial H_T}{\partial q_i(x)} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i(x)} \quad (A.12b)$$

Estas são as mais gerais equações de movimento consistentes com variações $\delta q_i(x)$ e $\delta p^i(x)$ que preservem os vínculos (A.9) (veja por exemplo (10), páginas 45 a 51).

Para que a presente teoria seja classicamente consistente é necessário que os vínculos (A.9) sejam preservados por todo o tempo, ou seja, $\dot{\phi}_m \approx 0$.

A evolução temporal de uma dada função $g = g(q_i(x), p^i(x))$ é dada por:

$$\dot{g} = \int \left(\frac{\delta g}{\delta q_i(x)} \dot{q}_i(x) + \frac{\delta g}{\delta p^i(x)} \dot{p}^i(x) \right) d^3x \quad (A.13)$$

Usando (A.12) em (A.13) temos:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \{g, H\} + u^m \{q, \phi_m\} = \\ &= \{g, H + u_m \phi_m\} - \{g, u^m\} \phi_m \approx \{g, H_T\} \end{aligned} \quad (A.14)$$

Portanto, para verificarmos a consistência da teoria, devemos calcular os parênteses de Poisson de todos os vínculos (A.9) com H_T e examinar se eles são fracamente iguais a zero ou não:

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} + u^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0 \quad (A.15)$$

Quatro resultados são possíveis:

- i) A equação (A.15) é inconsistente e, conseqüentemente, a própria teoria.
- ii) A equação (A.15) nos leva a combinações lineares dos vínculos já existentes ou de suas derivadas espaciais. Portanto $\dot{\phi}_m \approx 0$ é satisfeita identicamente. É este o caso, por exemplo, dos vínculos (4.26a) e (4.26b) da Tabela 4.2.
- iii) A equação (A.15) determina univocamente os u^m como funções das variáveis canônicas. É o que acontece, por exemplo, com os vínculos (4.24a,b,c,d,e) da Tabela 4.2.
- iv) Obtemos de (A.15) novas relações entre os $q_i(x)$ e os $p^i(x)$ que constituem assim novos vínculos $\chi_n(q_i(x), p^i(x)) \approx 0$ chama

dos de vínculos secundários. É o que ocorre, por exemplo, com os vínculos (4.18) e (4.24f) da Tabela 4.2. Deve-se a seguir verificar se estes novos vínculos são conservados no tempo graças a (A.15) e repetir sucessivamente este procedimento até que nenhum novo vínculo apareça.

Se a possibilidade apontada em i) não ocorrer, ter-se-á então provado a consistência clássica da teoria.

Por se originarem de (A.15), os vínculos secundários estão ligados àqueles que surgem das equações de movimento geradas por (A.1).

Uma vez conhecidos todos os vínculos, como saber qual o número de verdadeiros graus de liberdade da teoria? Para responder a esta pergunta, vamos rever de forma breve e genérica a distinção existente entre vínculos de 1ª e 2ª classe explicitando também o modo pelo qual tais vínculos removem os graus de liberdade excedentes.

Vínculos de 1ª classe são aqueles que têm parênteses de Poisson zero com todos os outros vínculos. Os demais vínculos serão chamados de 2ª classe. Consideremos a Hamiltoniana dada por (A.10) e (A.11) onde os ϕ_m são vínculos primários. Suponhamos também que já tenhamos verificado a consistência clássica da teoria, obtendo assim um certo número de vínculos secundários χ_m , que se conservam no tempo. Vamos supor também que dentre os vínculos primários ϕ_m alguns sejam de 1ª classe (denotados por ϕ_a) e outros sejam de 2ª classe (denotados por ϕ_α). Os vínculos secundários χ_m , também serão divididos em vínculos de 1ª classe (χ_a) e de 2ª classe (χ_α) (ou seja, para o que segue, índices latinos com linha ou sem linha deno-

tam vínculos de 1ª classe e índices gregos com linha ou sem linha denotam vínculos de 2ª classe). Assim, devido à suposta consistência da teoria temos:

$$\{\phi_a, H_T\} = \{\phi_a, H\} + u^m \{\phi_a, \phi_m\} = \{\phi_a, H\} \approx 0 \quad (\text{A.16a})$$

(Daqui para frente, índices repetidos denotam uma soma nestes índices e uma integral por todo o espaço tridimensional.)

$$\{\chi_a, H_T\} = \{\chi_a, H\} + u^m \{\chi_a, \phi_m\} = \{\chi_a, H\} \approx 0 \quad (\text{A.16b})$$

$$\begin{aligned} \{\phi_\alpha, H_T\} &= \{\phi_\alpha, H\} + u^\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} + \\ &+ u^a \{\phi_\alpha, \phi_a\} = \{\phi_\alpha, H\} + u^\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16c})$$

$$\begin{aligned} \{\chi_\alpha, H_T\} &= \{\chi_\alpha, H\} + u^\beta \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} + \\ &+ u^a \{\chi_\alpha, \phi_a\} = \{\chi_\alpha, H\} + u^\beta \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16d})$$

Suponhamos agora que os vínculos de 2ª classe ϕ_α e χ_α , sejam completamente independentes, de maneira que não haja nenhuma combinação linear destes vínculos ou de suas derivadas espaciais que seja de 1ª classe. Isto implica que a matriz Δ definida por

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} & \{\phi_\alpha, \chi_\beta\} \\ \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} & \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

tenha inversa Δ^{-1} .

Seja $\{\xi_\mu\}$ o conjunto de todos os vínculos de 2ª classe χ_α , e ϕ_α . Assim, em termos de Δ e ξ_μ , obtemos para (A.16c) e (A.16d) as seguintes expressões:

$$\{\xi_\mu, H\} + \{\xi_\mu, \phi_\beta\} u^\beta = \{\xi_\mu, H\} + \Delta_{\mu\beta} u^\beta \approx 0 \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando (A-18) pela inversa de Δ temos:

$$u^\alpha \approx - (\Delta^{-1})^{\alpha\mu} \{\xi_\mu, H\} \quad (\text{A.19a})$$

$$(\Delta^{-1})^{\alpha\mu} \{\xi_\mu, H\} \approx 0 \quad (\text{A.19b})$$

Vemos que (A.19a) determina univocamente os u^α . Assim, a equação de movimento para uma determinada função $A(q_i(x), p^i(x))$ é:

$$\begin{aligned} \dot{A} &\approx \{A, H\} + u^a \{A, \phi_a\} + u^\alpha \{A, \phi_\alpha\} \approx \\ &\approx \{A, H\} + u^a \{A, \phi_a\} - \{A, \phi_\alpha\} (\Delta^{-1})^{\alpha\mu} \{\xi_\mu, H\} \approx \\ &\approx \{A, H\} + u^a \{A, \phi_a\} - \{A, \xi_\nu\} (\Delta^{-1})^{\nu\mu} \{\xi_\mu, H\} \end{aligned}$$

onde usamos (A.19a) e (A.19b).

Isto nos leva à seguinte expressão para H_T :

$$H_T = H + u^a \phi_a - \xi_\nu (\Delta^{-1})^{\nu\mu} \{\xi_\mu, H\} \quad (\text{A.20})$$

É fácil mostrar que todos os vínculos ϕ_a , ϕ_α , χ_a , e χ_α , são conservados no tempo pela H_T dada por (A.20). Todavia, esta não é a Hamiltoniana mais geral possível que preserva no

tempo todos os vínculos. De fato, se adicionarmos a (A.20) uma combinação linear dos vínculos secundários de 1ª classe, $\chi_{a'}$, esta Hamiltoniana estendida continuará conservando os vínculos no tempo:

$$H_E \equiv H_T + v^{a'} \chi_{a'} = H + u^a \phi_a + v^{a'} \chi_{a'} + \\ - \xi_\nu (\Delta^{-1})^{\nu\mu} \{ \xi_\mu, H \} \quad (A.21)$$

onde os u^a e $v^{a'}$ são coeficientes arbitrários. Assim a evolução no tempo de uma função $A(q_i(x), p^i(x))$ será dada por:

$$\dot{A} = \{A, H_E\} \approx \{A, H\} + u^a \{A, \phi_a\} + \\ + v^{a'} \{A, \chi_{a'}\} - \{A, \xi_\nu\} (\Delta^{-1})^{\nu\mu} \{ \xi_\mu, H \} \quad (A.22)$$

De (A.22) vemos que a evolução temporal de A não é unívoca já que depende das funções arbitrárias u^a e $v^{a'}$. Existe, portanto, uma arbitrariedade de calibre na teoria, ou seja, estamos ainda usando mais variáveis canônicas do que as necessárias para descrevermos a dinâmica da teoria. Para nos livrarmos destes graus de liberdade espúrios é preciso impor novas condições de vínculo totalmente independentes das demais e que tenham parênteses de Poisson diferentes de zero com ϕ_a e $\chi_{a'}$. A conservação destes novos vínculos no tempo utilizando (A.21) implicará na determinação dos u^a e dos $v^{a'}$ através de um procedimento idêntico ao utilizado para se determinar os coeficientes u^α dos vínculos de 2ª classe ϕ_α . Assim, o conjunto formado pelos vínculos $\chi_{\alpha'}$, ϕ_α , $\chi_{a'}$, ϕ_a , g_b e $g_{b'}$, onde g_b e $g_{b'}$ denotam estes novos vínculos constitui um conjunto de

vínculos de 2ª classe completamente independentes. O número de vínculos g_b e \bar{g}_b , deve ser idêntico ao número de vínculos ϕ_a e χ_a . Desta maneira, os coeficientes u^a e $v^{a'}$ são determinados e a evolução temporal de A é única. A imposição dos vínculos g_b e \bar{g}_b , dá-se o nome de fixação de calibre. Os vínculos ϕ_a e χ_a , são portanto geradores das transformações de calibre, isto é, são geradores daquelas transformações canônicas que deixam invariante a dinâmica da teoria.

Não existe uma prova rigorosa e geral para a afirmação de que vínculos secundários de 1ª classe são geradores de transformações de calibre ou, equivalentemente, que a Hamiltoniana estendida definida em (A.21) seja efetivamente a geradora de translações temporais nas variáveis canônicas. Encontram-se na literatura alguns contra-exemplos que negam esta afirmação (44). No entanto, Di Stefano em (45) mostra que se estes contra-exemplos forem tratados corretamente, então os vínculos χ_a , que aparecem nestas teorias são efetivamente geradores de transformações de calibre. Portanto, todas as teorias Hamiltonianas estudadas até hoje confirmam a conjectura de que qualquer vínculo de 1ª classe, seja ele primário ou secundário, é gerador de transformações de calibre.

Surgem também algumas dificuldades ao se aplicar o procedimento descrito aqui às teorias de campo (que possuem infinitos graus de liberdade). Para maiores detalhes veja em (10), Sundermeyer, e referências ali contidas.

Assim, de acordo com a discussão acima, o número de verdadeiros graus de liberdade da teoria (n) será dado pelo número de variáveis canônicas (n_c) menos o número de vínculos

de 2ª classe (n_2) menos o número de vínculos de 1ª classe (n_1) menos o número de vínculos que fixam o calibre, igual a n_1 ($n_g = n_1$), dividido por dois:

$$n = \frac{n_c - n_2 - 2n_1}{2} \quad . \quad (A.23)$$

BIBLIOGRAFIA

- 1) R.P. Feynman, "Lectures on Gravitation" (California Institute of Technology, Pasadena, California 1962-63). Notas de aula não publicadas e preparadas por F.B. Morinigo e W. G. Wagner.
- 2) A. Einstein, "The Principle of Relativity" (Dover Publications, Inc. 1952).
- 3) R.V. Eötvös, "Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen", Math. Naturw. Ber. aus Ungaru 8 (1989).
- 4) H. Buchdal, "On the Compatibility of Relativistic Wave Equations in Riemann Space", Nuovo Cim. 25, 486 (1962).
- 5) C. Aragone e S. Deser, "Constraints on Gravitationally Coupled Tensor Fields", Nuovo Cim. 3A, 709 (1971).
- 6) C. Aragone e S. Deser, "Consistency Problems of Spin-2-Gravity Coupling", Nuovo Cim. 57B, 33 (1980).
- 7) C.M. Mill, "The Confrontation between Gravitation and Experiment" (An Einstein Centenary Survey, Cambridge University Press, 1979).
- 8) S. Deser e P. von Nieuwennhuizen, "One loop divergences of quantized Einstein-Maxwell Fields", Phys. Rev. D10, 401 (1974).
- 9) A.J. Hanson, T. Regge e C. Teitelboim, "Constrained Hamiltonian Systems" (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).
- 10) K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model", Lecture Notes in Physics 169 (Springer, Berlin, 1982).
- 11) K. Kuchar, "Canonical Methods of Quantization", in "Quantum Gravity II", C.J. Isham, R. Penrose e D.W. Sciama, Eds. (Clarendon Press, Oxford, 1981).

- 12) M. Gleiser, R. Holman e N.P. Neto, "First Order Formalism for Quantum Gravity", Nucl. Phys. B294, 1164 (1987).
- 13) A. Ashtekar, "Self-duality and spinorial techniques in the canonical approach to quantum gravity", in "Quantum Concepts in space and time", C.J. Isham e R. Penrose, Eds. (Clarendon Press, Oxford, 1986).
- 14) A. Ashtekar, "New Hamiltonian formulation of general relativity", Phys. Rev. D36, 1587 (1987).
- 15) L. Smolin, "Quantum gravity in the self-dual representation", Preprint, NSF-ITP-87-35 (Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, 1987).
- 16) F.A. Pirani, "On the physical significance of the Riemann tensor", Ac. Phys. Pol. 15, 389 (1956).
- 17) M. Fierz, "Über die relativistische Theorie kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin", Helv. Phys. Acta 12,3(1939).
- 18) M. Fierz e W. Pauli, "Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an eletromagnetic field", Proc. Roy. Soc. A 173, 211 (1939).
- 19) C. Lanczos, "The Splitting of the Riemann Tensor", Rev.Mod. Phys. 34, 379 (1962).
- 20) E. Bampi e G. Caviglia, "Third-Order Tensor Potentials for the Riemann and Weyl Tensors", GRG 15, 375 (1983).
- 21) P. Jordan, J. Ehlers e R. Sacks, "Exact solutions of the field equations of general relativity, II: Contributions to the theory of pure gravitational radiation", Akad.Wiss. Lit. Mainz Abh. Math. - Nat. Kl. 1,3 (1961).
- 22) A. Lichnerowicz, "Onde et radiations életromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale", Ann. Math. Pura et Appl. 50, 1 (1960).
- 23) R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner in "Gravitation: An Introduction to Current Research", L. Witten, Ed. (Wiley, NY 1962).
- 24) T. Regge e C. Teitelboim, "Role of Surface Integrals in

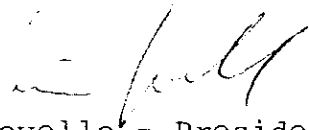
- the Hamiltonian Formulation of General Relativity", *Ann. Phys.* 88, 286 (1974).
- 25) M. Novello e A.L. Velloso, "The Connection Between General Observers and Lanczos Potential", *GRG* 19, 1251 (1987).
- 26) I.D. Soares, "O Cálculo de formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços-curvos", *in* "Proceedings of the II School of Cosmology and Gravitation", M. Novello, Ed.; CBPF, RJ (1980) vol. 1, 479-515.
- 27) S. Gasiorowicz, "Elementary Particle Physics", (John Wiley and Sons, 1967).
- 28) C.G. Oliveira, "Introdução à formulação de algumas teorias do campo unitário", *in* "Proceedings of the II School of Cosmology and Gravitation", M. Novello, Ed.; CBPF, RJ, (1980) vol. 1, 361-477.
- 29) M. Novello e L.M.C.S. Rodrigues, "A Unified Model for Gravitation and Electroweak Interactions", *Lett. al Nuovo Cim.* 43, 292 (1985).
- 30) M. Novello e H. Heintzmann, "Towards the Unification of Gravity and Electroweak Interactions", *in* "Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity", R. Ruffini, Ed., (Elsevier Sciences Publishers B.V., 1986).
- 31) S.W. Hawking, "Perturbations of an Expanding Universe" , *Astrophys. Jour.* 145, 544 (1966).
- 32) J.M. Salim: "Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação : Aplicação às Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann", Tese de Doutorado, CBPF, RJ (1982).
- 33) N.P. Neto, "Equações Alternativas da Gravitação", Tese de Mestrado, CBPF, RJ (1983).
- 34) T. Obata e J. Chiba, "Variational Principle for Gravitational Equations of the Bianchi Identity Type", *GRG* 10 , 547 (1979).
- 35) V.L. Ginzburgh, D.A. Kirzhnits e A.A. Lyubishin, "The role of quantum fluctuations of the gravitational field in ge-

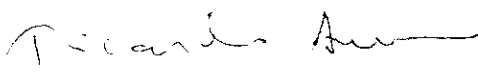
- neral relativity theory and cosmology", Sov. Phys. JETP 33, 242 (1971).
- 36) L. Landau e E. Lifshitz, "Teoria do campo" (Editora MIR , Moscow, 1980), 353-356.
- 37) D.G. Boulware e S. Deser, "Can Gravitation Have a Finite Range ?", Phys. Rev. D6, 3368 (1972).
- 38) C.J. Isham, A. Salam e J. Strathdee, "F-Dominance of Gravity", Phys. Rev. D3, 867 (1971).
- 39) L.P. Grishchuk, A.N. Petrov e A.D. Popova, "Exact Theory of the (Einstein) Gravitational Field in an Arbitrary Background Space-Time", Commun. Math. Phys. 94, 379 (1984).
- 40) Ya. B. Zel'dovich e L.P. Grishchuk, "Gravitation, the general theory of relativity, and alternative theories", Sov. Phys. USP 29, 780 (1987).
- 41) D. Iavnenko e G. Sardanashvily, "The Gauge Treatment of Gravity", Phys. Rep. 94, 1 (1983) e referências ali contidas.
- 42) J. Hayward, "Internal gauge theory of gravity", Phys. Rev. D20, 3039 (1979).
- 43) P.A.M. Dirac, "Lectures in quantum mechanics", (Yeshiva Univ. Press, New York, 1962).
- 44) R. Cawley, "Determination of the Hamiltonian in the presence of constraints", Phys. Rev. Lett. 42, 413 (1979).
- 45) R. Di Stefano, "Modification of Dirac's method of Hamiltonian analysis for constrained systems", Phys. Rev. D27 , 1752 (1983).


"TEORIA DA GRAVITACAO EM TERMOS DAS
VARIAVEIS DE FIERZ-LANCZOS"

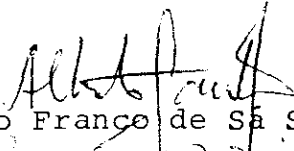
NELSON PINTO NETO

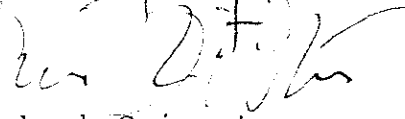
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desen-
volvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte
da Banca Examinadora os seguintes professores:

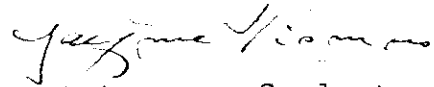

Mário Novello - Presidente


Ricardo Machado de Amorim


Waldir Alves Rodrigues Junior


Alberto Franco de Sa Santoro


Prem Prakash Srivastava


Jayme Tiomno - Suplente

Rio de Janeiro, 23 de fevereiro de 1989