

Gerson Pech

SIMULAÇÃO CLÁSSICA DE N-CORPOS PARA
GRUPOS DE GALÁXIAS

Tese de
MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO

- 1989 -

A Meus Pais.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Chung Kai Cheong por sua competente e sempre objetiva orientação e por ter me iniciado na pesquisa científica;

- A Simone, minha mulher, com quem aprendi as idéias básicas da computação. Seu incentivo constante foi imensamente importante no decorrer deste trabalho;

- Aos colegas e amigos do CBPF, cujas amizades tornaram o ambiente sempre agradável e interessante;

- Ao Departamento de Física Nuclear e Altas Energias do CBPF, onde realizei meu trabalho e em especial aos companheiros deste departamento pelas estimulantes críticas e discussões.

RESUMO

A fim de investigar a discrepância observada entre a massa virial e a massa luminosa em grupos de galáxias, foi realizado uma simulação clássica de N-corpos, onde admitimos uma lei da potência para a distribuição de massa das galáxias. Levando em conta tal discrepância, propusemos uma relação linear entre a massa e a luminosidade de galáxia. Esta relação permite obter uma distribuição de luminosidade que é compatível com a observacional.

Os resultados da simulação para as dispersões das velocidades são bastante razoáveis quando comparados com os dados observacionais e fornecem uma estimativa para a faixa em que as massas podem estar distribuídas. Mostra-se que, neste caso, a discrepância na massa pode chegar até a duas ordens de grandeza, tal como já apontado em vários trabalhos anteriores.

S U M Á R I O

| | Pág. |
|---|------|
| AGRADECIMENTOS..... | iv |
| RESUMO..... | v |
| SUMARIO..... | vi |
| LISTA DE FIGURAS..... | viii |
| LISTA DE TABELAS..... | ix |
| INTRODUÇÃO..... | 1 |
| CAPITULO I: SISTEMAS DE GALAXIAS | 9 |
| 1.1: Formação de Galáxias, Grupos e Aglomerados... | 9 |
| 1.2: Função Distribuição de Luminosidade..... | 12 |
| 1.3: Densidade de Matéria no Universo..... | 17 |
| CAPITULO II: EQUILIBRIO VIRIAL..... | 21 |
| 2.1: Teorema Virial para um Sistema Discreto..... | 21 |
| 2.2: Aplicação do Teorema Virial..... | 24 |
| 2.3: Discrepância na Massa..... | 29 |
| 2.4: Tempo de Travessia..... | 34 |
| CAPITULO III: MODELOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA PARA GRUPOS | 37 |
| 3.1: Catálogo de Grupos Simulados..... | 37 |
| 3.2: Massa Projetada..... | 40 |
| 3.3: Modelo de Giuricin e Colaboradores..... | 46 |
| CAPITULO IV: MODELO LINEAR..... | 50 |
| 4.1: Distribuição de Massa..... | 50 |
| 4.1.1: Lei da potência..... | 50 |
| 4.1.2: Relação massa-luminosidade..... | 53 |
| 4.1.3: Ajuste de α , β e τ | 54 |

| | |
|---|----|
| 4.2: Simulação Dinâmica para N-Corpos..... | 56 |
| 4.2.1: Condições iniciais..... | 56 |
| 4.2.2: Integração das equações de movimento... | 58 |
| 4.3: Equilíbrio Virial..... | 63 |
| CAPÍTULO V: ANÁLISE DOS RESULTADOS..... | 68 |
| 5.1: Tempo de Travessia..... | 68 |
| 5.2: Dispersão das Velocidades e Determinação do Intervalo de Massa..... | 69 |
| 5.3: Valor Médio da Razão Massa-Luminosidade e Análise dos Parâmetros α e β | 73 |
| 5.4: Espectros de Energia..... | 79 |
| CONCLUSÕES..... | 80 |
| APENDICE A: O MÉTODO DE MONTE CARLO..... | 82 |
| APENDICE B: DIAGRAMA DO CÁLCULO COMPUTACIONAL..... | 86 |
| REFERÊNCIAS:..... | 88 |

LISTA DE FIGURAS

| Fig. | Pág. |
|---|------|
| 1.1 - Distribuição de luminosidade observacional | 15 |
| 3.1 - Distribuição de multiplicidade | 39 |
| 3.2 - Comparação entre a razão M/L para os grupos simulados e os observados | 40 |
| 3.3 - Estimativas de massa pelo teorema virial e pela massa projetada | 45 |
| 3.4 - Estimativa de massa e razão M/L para os grupos observados | 46 |
| 3.5 - Espectros de massa | 47 |
| 4.1 - Espectros de massa em diferentes fenômenos físicos..... | 51 |
| 4.2 - Ajuste da distribuição de luminosidade | 56 |
| 4.3 - Distribuição de multiplicidade do catálogo de Geller e Huchra | 59 |
| 4.4 - Evolução temporal de γ | 65 |
| 5.1 - Histograma do tempo de travessia | 68 |
| 5.2 - Histograma das dispersões das velocidades . | 72 |
| 5.3 - Razão massa-luminosidade para galáxias | 74 |
| 5.4 - Razão massa-luminosidade para grupos | 76 |
| 5.5 - Espectros de energia cinética | 78 |

LISTA DE TABELAS

| Tab. | | Pág. |
|------|--|------|
| 1 | - Valor médio da razão entre a massa virial e a massa real no estágio NE | 48 |
| 2 | - Valor médio da razão entre a massa virial e a massa real no estágio PE | 48 |
| 3 | - Grupos do catálogo de Geller e Huchra | 60 |
| 4 | - Dispersão relativa de γ | 67 |

INTRODUÇÃO

A Astrofísica é o ramo da Física que estuda os fenômenos observados no universo do ponto de vista das leis que os regem. O assunto desta tese é basicamente a dinâmica de sistemas de galáxias, onde galáxia é um aglomerado de estrelas. Neste nosso contexto, as estrelas são as unidades básicas e a investigação de suas propriedades e de sua evolução ao longo do tempo são de suma importância na Astrofísica. A grande maioria das estrelas são encontradas em associações que vão desde sistemas binários até associações contendo bilhões de estrelas. Estas últimas são denominadas de galáxias. Elas são encontradas em maior número e constituem, primordialmente, o universo observado.

O grande número de estrelas ($\approx 10^{12}$), que faz parte de cada galáxia, justifica o fato de encararmos a galáxia como um objeto que possui identidade própria, com quantidades físicas tais como, velocidade, momento angular, etc... .

Assim como no caso das estrelas, as galáxias também estão distribuídas em sistemas que vão desde sistemas binários de galáxias até grandes aglomerados contendo de 10^3 a 10^4 galáxias. Contudo, os mais comuns são os grupos de galáxias, que contêm cerca de 3 a 30 galáxias.

Em 1962, Van den Bergh estimou que aproximadamente 60% de todas as galáxias existem na forma de grupos.

Posteriormente, de Vaucouleurs em 1975, propôs que, em essência, todas as galáxias seriam membros de grupos.

Ele também mostrou que em um volume esférico de raio igual a 15 Mpc ($1 \text{ Mpc} \approx 3 \times 10^{22} \text{ m}$), centrado na Via Láctea, cerca de 30 galáxias estão dentro de um raio de 1.3 Mpc e milhares entre um raio de 2.4 à 15 Mpc, mas nenhuma galáxia entre 1.3 e 2.4 Mpc. As 30 galáxias formam um grupo isolado que é chamado de Grupo Local.

Nas últimas duas ou três décadas muito esforço tem sido feito no intuito de estudar tanto teórica quanto observacionalmente os grupos de galáxias. Primeiro, por serem estes os sistemas mais comuns no universo e segundo, por terem, no passado, originado resultados bem controversos. É sentimento geral de que o estudo dos grupos possa contribuir para o entendimento do processo de aglomeração das galáxias, bem como permitir uma determinação de massa das galáxias.

Do ponto de vista observacional, alguns catálogos foram compilados, principalmente em 1975 por de Vaucouleurs e também por Sandage e em 1976 por Turner e Gott, embora em vários casos com dados de posições e/ou velocidades incompletos. Por exemplo, no catálogo de Turner e Gott, em vários grupos de galáxias, faltam dados sobre as velocidades.

O objetivo destes catálogos é basicamente o levantamento de dados que permitam, entre outras coisas, estimar tanto a massa de galáxias quanto a massa de grupos de galáxias.

Entretanto, os sistemas astrofísicos diferem dos sistemas estudados em outras áreas da física em relação ao fato de que eles não estão submetidos ao controle do observador. Em

observador. Em laboratório, pode-se montar um experimento a fim de tentar medir as quantidades físicas que se deseja, ou então, outras que tenham relações bem estabelecidas com elas. No caso dos sistemas astronômicos, isto é obviamente inviável, o que nos obriga a recorrer apenas a dados observacionais.

A massa, em sistemas astrofísicos, é uma grandeza importante na compreensão da dinâmica, e é um exemplo de uma quantidade impossível de ser medida diretamente. Daí a enorme dificuldade dos astrônomos em determinar a massa dos diversos objetos celestes. Quanto mais afastado o objeto, maior a dificuldade, pois mais difícil fica a observação. Assim, a pequena quantidade de dados observacionais disponíveis representa uma limitação bastante séria na estimativa da massa de galáxias e de grupos de galáxias (Rood et al., 1970; Dickel e Rood, 1978a)

Mais recentemente, em 1982, Huchra e Geller foram bem sucedidos na tentativa de superar as dificuldades observacionais, tais como as mencionadas acima. Baseados em um mapeamento tri-dimensional do espaço e com a utilização de um método numérico capaz de determinar os membros de um grupo específico, eles apresentaram um catálogo de grupos de galáxias mais completo e confiável. Em 1983, Geller e Huchra publicaram um novo catálogo completando o anterior. Após a conclusão deste nosso trabalho, saiu publicado um catálogo de grupos de galáxias do Hemisfério Sul (Maia, da Costa e Latham, 1989).

Porém, como vimos acima, existe uma dificuldade bastante séria na estimativa da massa, que é a falta de um método

direto para a sua determinação, implicando na necessidade de recorrer a métodos indiretos. Um exemplo desse procedimento é a aplicação do teorema virial para sistemas de partículas gravitacionalmente ligadas, que pela primeira vez foi usada para sistemas de galáxias por Zwicky em 1933. Entretanto, este método também introduziu novas fontes de incertezas na massa estimada (Gott e Turner, 1977; Dickel e Rood, 1978b; Geller, 1984)

A estimativa da massa está relacionada com a determinação da razão massa-luminosidade. Vários trabalhos mostram que existe uma diferença entre a razão massa-luminosidade determinada para galáxias a partir de quantidades intrínsecas, como por exemplo sua curva de rotação, e a razão massa-luminosidade determinada para grupos de galáxias, com a ajuda do teorema virial (Field e Saslaw, 1971; Hartwick, 1978).

Uma das formas de estimar a massa de um grupo de galáxias seria tomar a razão M/L obtida a partir das quantidades intrínsecas, multiplicá-la pela luminosidade de cada galáxia e somar sobre todos os membros. Tal massa é denominada de massa luminosa.

O fato importante é que se obtém uma discrepância de até duas ordens de grandeza entre a massa luminosa e a massa calculada pelo teorema virial, denominada de massa virial.

Essencialmente, para explicar esta discrepância, duas hipóteses foram sugeridas:

(i) Os grupos são sistemas ligados gravitacionalmente, com suas massas dadas pelo teorema virial. Neste caso, a

existência da discrepância implica que uma parcela da massa é dada sob a forma de matéria não-luminosa, isto é, *matéria escura*.

(ii) Os grupos são sistemas não-ligados e toda sua massa aparece sob a forma de luminosidade. Neste caso, a estimativa pelo teorema virial não é correta.

Uma estimativa realista da razão massa-luminosidade e da massa das galáxias é, portanto, essencial na análise das duas hipóteses referidas acima.

Também, a razão massa-luminosidade é relevante na discussão sobre a densidade média de matéria no universo, ρ_0 . É usual definir a densidade cosmológica Ω como

$$\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c} \quad ,$$

onde ρ_c é a densidade crítica do universo. Quando $\Omega > 1$, o universo é fechado, ou seja, o atual movimento de expansão não poderá ocorrer indefinidamente, mas somente até um determinado ponto onde irá começar a contração. Quando $\Omega \leq 1$, o universo é aberto, ou seja, a expansão é indefinida.

Huchra e Geller encontraram, para os grupos de seu catálogo, o valor médio de $M/L = 170 M_\odot/L_\odot$ (o símbolo \odot subscrito, indica quantidades solares), correspondendo a uma densidade cosmológica $\Omega = 0.1$.

A fim de investigar as duas hipóteses acima, várias simulações numéricas de N-corpos, aplicadas a grupos de galáxias, foram realizadas a partir da década de 60 (Aarseth, 1963) e continuam a ser realizadas até os dias de hoje (Giuricin et al., 1984; Heisler et al., 1985).

Um problema inicial para a simulação numérica de N-corpos é determinar qual distribuição de massa que devemos usar para as galáxias do grupo. Observacionalmente, somente é possível se obter, para galáxias, a função distribuição de luminosidade. Os trabalhos acima mencionados, ou usam uma distribuição de massa uniforme, ou uma distribuição que é pobremente relacionada com a distribuição de luminosidade observada.

Em 1972, Aarseth e Saslaw usaram, para a simulação de N-corpos, uma distribuição de massa que segue uma lei do inverso do quadrado, isto é: $n(m) \propto 1/m^2$. Eles investigaram incertezas inerentes às determinações observacionais no cálculo da massa virial, que são as seguintes: (1) Grupos que possuem algumas galáxias cujas velocidades não são observadas; (2) desvios na configuração de equilíbrio e (3) o efeito do fator de projeção sobre as interdistâncias. Mostraram que tais incertezas sub-estimam a massa real por, no máximo um fator 2, chegando, portanto, à conclusão de que a discrepância observada entre a massa virial e a massa luminosa não é causada, simplesmente, por tais efeitos. No entanto, uma observação que deve ser feita é que a distribuição de massa utilizada por Aarseth e Saslaw não possui nenhuma ligação com os dados observacionais de luminosidade.

Também, a partir de simulações numéricas, em 1984, Giuricin et al. investigaram a dispersão, tanto no valor da massa virial quanto na razão M/L , chegando à conclusão de que massa e luminosidade são pobremente correlacionadas. Entretanto, os autores utilizam uma distribuição de massa que

contém implicitamente uma razão M/L constante, o que traduz uma relação bem particular para tais quantidades.

O objetivo deste trabalho é procurar entender o significado da discrepância na massa, dando ênfase a uma relação entre a massa e a luminosidade mais compatível com a hipótese de *matéria escura*. Para isso, propomos um modelo em que as massas das galáxias sejam compostas por duas parcelas: uma dependente da luminosidade, isto é, a própria massa luminosa; e outra independente da luminosidade, correspondendo a *matéria escura*. A fim de investigar o quanto este modelo (que denominamos de modelo linear) é compatível com os dados observacionais, realizamos simulações dinâmicas de N-corpos em que a distribuição de massa das galáxias segue uma lei da potência.

Esta distribuição de massa é observada em vários fenômenos físicos, como no caso da fragmentação nuclear, em que um próton altamente energético colide com um núcleo alvo, com a formação de vários fragmentos cujas massas seguem uma lei da potência.

Em 1986, Hüfner e Mukhopadhyay mostraram que a mesma distribuição também pode ser observada em colisões entre estilhaços de pedras (basalto) e na distribuição de asteróides do sistema planetário. Num trabalho recente, Rana (1987) mostra que a distribuição das massas das estrelas vizinhas ao Sol também obedece a uma lei da potência. É interessante notar a enorme diferença em escala destes diferentes processos. Da fragmentação nuclear para a fragmentação de estilhaços de pedras, a escala de massa cresce por um fator 10^{20} , cresce

por outro fator 10^{20} para a escala de massa de asteróides e por um terceiro, até chegar às massas de estrelas.

Uma outra motivação para utilizarmos a lei da potência é que em vários modelos de formação das galáxias, as flutuações na densidade de matéria, em um universo homogêneo e isotrópico, que seguem uma distribuição, $\delta\rho/\rho \propto M^{-\lambda}$, produzem resultados compatíveis com as observações.

Antes de prosseguir, uma palavra sobre a constante de Hubble deve ser dita. Todas as quantidades são calculadas para a constante de Hubble, $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Este valor, que adotamos é igual ao limite inferior da faixa obtida por Sandage em seu trabalho sobre a constante de Hubble, realizado em 1970.

Começamos o primeiro capítulo desta tese, estudando alguns aspectos das teorias de formação das galáxias e dos sistemas de galáxias, para depois apresentar a distribuição de luminosidade observada e o seu papel no cálculo da densidade média de matéria. No segundo capítulo, em que discutimos a discrepância na massa, introduzimos o teorema virial e sua aplicação no cálculo da massa de grupos de galáxias. O capítulo III mostra alguns exemplos de trabalhos realizado por outros autores, em que se utiliza simulação numérica de N-corpos. No capítulo IV, apresentamos o modelo linear e, no capítulo V, comparamos os resultados tanto com os de outros autores como também com os dados observacionais disponíveis.

CAPÍTULO I

SISTEMAS DE GALÁXIAS

1.1) FORMAÇÃO DE GALAXIAS, GRUPOS E AGLOMERADOS

Um problema central da Cosmologia é a questão da estrutura do universo. O modelo cosmológico proposto por Friedmann, em que o espaço é estritamente homogêneo, isto é, de propriedades geométricas independentes de ponto e isotrópico, isto é, onde em um dado ponto nenhuma direção é privilegiada, reflete a realidade de observações a largas escalas. Contudo, como explica Zel'dovich e Novikov (1975), tal modelo não permite, de forma alguma, uma explicação quanto à origem das galáxias e dos sistemas de galáxias observados no universo.

O alto grau de isotropia, observado na radiação de fundo ($\approx 2.7^{\circ}\text{K}$), leva a crer que, em épocas anteriores à formação das galáxias (antes ainda da recombinação do hidrogênio), o universo era quase homogêneo e isotrópico. Em outras palavras, este estágio pode ser descrito pelo modelo de Friedmann, com pequenas perturbações. Por outro lado, o que se observa atualmente são fortes não-homogeneidades numa escala de aproximadamente 10 Mpc, chamadas de não-homogeneidades locais. Logo, a estrutura observada atualmente não existia na era da

recombinação do hidrogênio e certamente originou-se depois. Isto sugere que as pequenas perturbações na homogeneidade foram crescendo com o passar do tempo, tempo este obviamente em escala astronômica. A razão deste crescimento é a instabilidade térmica e gravitacional da matéria homogênea.

Atualmente várias teorias vêm tentando descrever este crescimento da não-homogeneidade e conseqüente formação das galáxias. A descrição de tal crescimento consiste basicamente em calcular a evolução das perturbações de densidade, dentro do modelo de Friedmann, para dadas perturbações iniciais. A escolha destas perturbações iniciais é arbitrária, e está relacionada com a característica física da teoria que é empregada.

Até hoje, nenhuma teoria de formação de galáxias é completamente satisfatória. Entretanto, uma idéia pode ser considerada dominante. A idéia de que as galáxias se formaram a partir da condensação de um gás diluído.

Uma destas teorias, a teoria das perturbações adiabáticas, tem, como ponto de partida, considerar que as perturbações de densidade sejam dadas por uma lei da potência:

$$|A|^2 \propto \lambda^{-n}, \quad (1.1)$$

onde, $|A|^2$ e λ são respectivamente o quadrado do módulo da amplitude e o comprimento de onda da perturbação (Doroshkevich, 1970). Usando os resultados clássicos da teoria das grandes perturbações da relatividade geral, a evolução temporal das perturbações de densidade pode ser calculada.

Em 1973, Doroshkevich, Sunyaev e Zel'dovich calcularam a evolução do espectro de perturbações, cuja amplitude inicial era $A=10^{-3}$ (adimensional) e cujo espectro inicial era dado por: $\delta\rho/\rho = M^{-2/3}$, onde ρ é a densidade de matéria no universo e M , a escala de massa.

Os resultados que obtiveram, indicam a formação de nuvens de um gás denso, isolado e gravitacionalmente ligado com massas da ordem de 10^{13} a $10^{15}M_{\odot}$. Tais nuvens são presumivelmente proto-aglomerados, ou seja, nuvens que darão origem aos aglomerados de galáxias, já que suas massas coincidem com os valores estimados observacionalmente. Em um outro trabalho, Zel'dovich e Sunyaev (1972) mostram que estas nuvens podem fragmentar-se em massas da ordem de 10^{11} a $10^{12}M_{\odot}$, dependendo da temperatura envolvida. Naturalmente, estas massas representam as galáxias.

Uma outra teoria, a teoria das perturbações de entropia, admite a existência de flutuações na razão do número de bárions (protons e neutrons) pelo número de fótons, isto é, n_b/n_f , na era da recombinação do hidrogênio. Estas flutuações são chamadas de flutuações de entropia, visto que a entropia por bárion é aproximadamente igual ao número de fótons por bárion. Em 1968, Dicke e Peebles mostraram que este tipo de perturbação pode ser o responsável pela criação dos aglomerados globulares, que são sistemas gravitacionalmente ligados contendo centenas de milhares de estrelas.

Também a teoria das turbulências, proposta por von Weizsäcker em 1951, tem sido aplicada ao universo a fim de estudar a origem das galáxias. Nesta teoria, admite-se que

durante a era em que a radiação era predominante, além do movimento de expansão, o universo encontrava-se em estado de movimento turbulento. Esta teoria considera que inicialmente o movimento é incompressível, porém esta propriedade não é conservada. Com o passar do tempo, colisões entre nuvens de gás afetam o movimento turbulento, criando lugares de altas densidades que darão origem a objetos gravitacionalmente ligados. A contribuição mais importante desta teoria, obtida por vários autores, como por exemplo, Sato (1971), é a explicação da origem do movimento de rotação das galáxias

Desta forma, como já mencionado, vemos que toda teoria sobre a origem das galáxias, grupos e aglomerados é determinada pela característica física admitida nas perturbações iniciais de densidade.

1.2) FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE LUMINOSIDADE

Na seção anterior, discutimos a origem das galáxias e de sistemas de galáxias. Uma grande quantidade de informação acerca destes sistemas provem dos dados observacionais de luminosidade.

Define-se luminosidade de um objeto como sendo a quantidade de fótons (de comprimento de onda visível) emitida deste objeto, por unidade de tempo. Basicamente a função luminosidade, $\phi(L)dL$ é que determina o número de galáxias com uma dada luminosidade L . Mais precisamente, esta função fornece a probabilidade relativa de encontrar uma galáxia com uma

luminosidade entre L e $L + dL$, em um volume dV .

Esta função é essencial no estudo de numerosos fenômenos que ocorrem no universo. Ela nos permite estimar a densidade média de luminosidade no universo, assim como seu número de galáxias (Felten, 1985). Ela também pode ser usada na determinação da luminosidade total a partir das luminosidades observadas em aglomerados de galáxias (Oemler, 1974) e pode determinar as distâncias do sistema solar a vários aglomerados. Na seção seguinte, veremos que esta função, em conjunto com uma relação massa-luminosidade, fornece uma estimativa da densidade média de matéria no universo, ρ_0 .

Vale lembrar que a densidade de matéria no universo, ρ , varia com o tempo, ou seja, decresce com a expansão do universo. Porém tal variação é praticamente inexistente no intervalo de tempo de nossas observações, e podemos admitir ρ constante, tomando ρ_0 como a densidade atual.

Geralmente obtém-se $\phi(L)$ para uma classe de galáxias, identificada segundo algum critério, como, por exemplo, a função luminosidade para galáxias elíticas, obtida por Shapiro em 1971, para grupos de galáxias, por Turner e Gott (1976b) e para aglomerados de galáxias (Schechter, 1976). A função luminosidade para todas as galáxias é chamada de função luminosidade geral.

Para $\phi(L)dL$, que é o número de galáxias por unidade de volume no intervalo de luminosidade entre L e $L+dL$, Schechter, em 1976, propôs a seguinte expressão,

$$\phi(L) dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\lambda e^{-L/L^*} d(L/L^*), \quad (1.2)$$

onde ϕ^* , L^* e λ são parâmetros a serem determinados através de dados observacionais. Em seu trabalho, Schechter mostrou que a expressão acima fornece uma boa aproximação tanto para a função luminosidade geral como também para a função luminosidade em aglomerados.

A fim de obter uma distribuição que dependa das magnitudes, basta fazermos uma transformação de variáveis na eq.(1.2). Para isso, sabemos que a luminosidade de uma galáxia está relacionada com a sua magnitude absoluta, \mathcal{M} , através de,

$$\frac{L}{L^*} = 10^{-\frac{2}{5}(\mathcal{M} - \mathcal{M}^*)}, \quad (1.3)$$

onde \mathcal{M} e \mathcal{M}^* são as magnitudes absolutas de uma galáxia de luminosidade L e L^* , respectivamente.

Ao contrário da magnitude aparente, m , a magnitude absoluta é independente da distância entre o objeto e o observador. Como a magnitude absoluta é a magnitude que um objeto teria se estivesse a 10 parsecs do observador, a relação entre as duas magnitudes é:

$$\mathcal{M} = m - 25 - 5 \log r, \quad (1.4)$$

onde r é a distância em Mpc.

Substituindo a eq.(1.3) na eq.(1.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{M}) d\mathcal{M} &= \frac{2}{5} \phi^* (\ln 10) \left[\text{dex} \frac{2}{5} (\mathcal{M}^* - \mathcal{M}) \right]^{\lambda+1} \\ &\times \exp \left[- \text{dex} \frac{2}{5} (\mathcal{M}^* - \mathcal{M}) \right] d\mathcal{M}, \quad (1.5) \end{aligned}$$

onde, $\text{dex}(M) = 10^M$.

Visto que aproximadamente todas as galáxias fazem parte de pequenos grupos, como mencionado na introdução, Turner e Gott (1976b) acharam de maior interesse estudar a distribuição de luminosidade das galáxias em tais sistemas. Para tanto, eles utilizaram o catálogo (Turner e Gott 1976a) previamente por eles mesmo compilado que continha 63 grupos de galáxias.

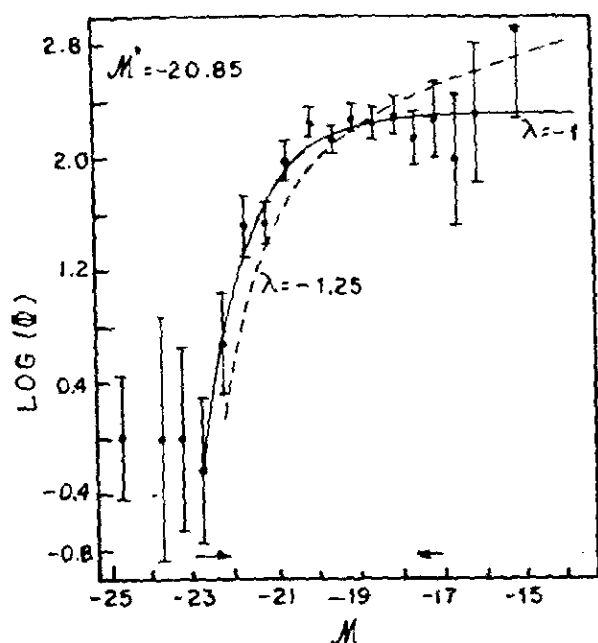


FIG. 1.1 - Distribuição de luminosidade de galáxias no catálogo de Turner e Gott.

Os resultados são apresentados na figura 1.1. As barras de erro são determinadas a partir das dispersões observadas na distribuição de luminosidade de cada grupo. Como mostra a figura, o resultado é pouco confiável para valores de M fora do intervalo, $-22.5 \leq M \leq -17.5$, onde as barras de erro são significativas. Tal intervalo,

indicado por setas na figura, é considerado o intervalo de ajuste.

O ajuste dos pontos da fig.1.1, por mínimos quadrados, através da função Schechter, eq.(1.5), fornece:

$$\lambda = -0.83 \pm 0.17 \quad \text{e} \quad M^* = -20.59 \pm 0.26$$

Mas, por simplicidade, os autores tomaram $\lambda = -1$, resultando

em $M^* = -20.85 \pm 0.13$, que corresponde a $L^* = 3.4 \cdot 10^{10} L_{\odot}$

Ambos os ajustes são bons, entretanto a forma analítica da eq.(1.5) é obviamente mais conveniente para $\lambda = -1$ e consequentemente é a usada pelos autores. Na fig.(1.1), este ajuste (curva sólida) é comparado com a função Schechter de grandes aglomerados (curva tracejada).

A consequência física mais importante que podemos obter é a densidade média de luminosidade, originada de galáxias mais luminosas que um determinado valor, digamos, L_1 . Com a eq.(1.2) devidamente normalizada, esta densidade $\mathcal{L}(L_1)$, obtida em 1985 por Felten, é calculada pela seguinte integral:

$$\mathcal{L}(L_1) = \int_{L_1}^{\infty} L \phi(L) dL . \quad (1.6)$$

Tomando, $X=L/L^*$ e $X_1=L_1/L^*$, teremos,

$$\mathcal{L}(L_1) = \phi^* L^* \int_{X_1}^{\infty} X^{\lambda+1} e^{-X} dx \quad (1.7)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(L_1) = \phi^* L^* \Gamma(\lambda+2, L_1/L^*)$$

Para $L_1 \rightarrow 0$ a função Gama incompleta converge para $\lambda > -2$, dando $\Gamma(\lambda+2)$. Neste caso, escolhendo para λ o valor -1.25 , que é o valor encontrado por Schechter em seu ajuste, tanto para galáxias em aglomerados, como para a função luminosidade geral, teremos:

$$\mathcal{L} = 1.2 \cdot 10^8 L_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}$$

Este resultado está de acordo com o valor encontrado por

Peebles, em 1971, que usando a função luminosidade para o aglomerado Coma, obtida por Abell (1962) e diferente da de Schechter, obteve,

$$\mathcal{L} = 1.5 \cdot 10^8 L_{\odot} \text{Mpc}^{-3}.$$

Isto mostra, mais uma vez, o quanto a função Schechter reproduz, confiavelmente, os dados observacionais de luminosidade.

1.3) DENSIDADE DE MATERIA NO UNIVERSO

Como discutido na seção 1.1, numa escala de 10 Mpc ou menos, o universo apresenta altas não-homogeneidades. Estas não-homogeneidades podem ser compreendidas a partir das diferentes densidades de matéria existentes no universo. A densidade média de matéria em aglomerados é algumas vezes (2 ou 3) maior que a densidade média total ρ_0 , enquanto que a densidade média em galáxias ou grupos de galáxias é algumas ordens de grandeza (10^2 a 10^6) maior que ρ_0 .

A densidade média de matéria no universo é essencial para determinar a dinâmica a que está submetido o universo, e conseqüentemente a sua evolução futura.

Em 1927, Hubble mostrou que as velocidades de recessão, V_{ri} para galáxias a distâncias maiores que 1 Mpc, baseadas no *redshift* das linhas espectrais, são linearmente correlacionadas com as respectivas distâncias ao observador, R_i , isto é,

$$V_{ri} = H_0 R_i, \quad (1.8)$$

onde H_0 é a constante de Hubble.

A eq.(1.8) é a lei de Hubble. Esta lei indica que o universo está em expansão e é a forma esperada para um universo homogêneo e isotrópico.

A determinação do valor de H_0 vem se modificando desde o trabalho de Hubble, em 1927, pois a escala das distâncias observadas, que desempenham um papel importante na obtenção de H_0 , têm mudado dramaticamente. Um levantamento feito por Sandage, em 1970, fornece:

$$50 \text{ Mpc}^{-1} \text{ km/s} \leq H_0 \leq 130 \text{ Mpc}^{-1} \text{ km/s}$$

Para examinar com mais detalhe a evolução dinâmica do universo, vamos considerar, de acordo com Zel'dovith e Novikov (1975), uma esfera de massa M e raio R e calcular a aceleração de uma partícula localizada em sua superfície,

$$\ddot{R} = - \frac{GM}{R^2}. \quad (1.9)$$

O segundo membro da expressão acima é a força Newtoniana que atua sobre a partícula, dividida por sua massa. Multiplicando por \dot{R} a eq.(1.9) e integrando em t , obtemos:

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = K, \quad (1.10)$$

em que K é uma constante que representa a energia total por unidade de massa da superfície da esfera. Supondo que a esfera

seja homogênea e que a velocidade da partícula obedeça a lei de Hubble, eq.(1.8), e ainda admitindo que o tempo presente seja t_0 , tal que $H_0 = H(t_0)$, $\rho_0 = \rho(t_0)$ e R_0 o raio da esfera neste instante, teremos:

$$K = \frac{1}{2} (H_0 R_0)^2 - G \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^2$$

Logo, a eq.(1.10) fica:

$$\left(\dot{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{R_0^3}{R} - \frac{8\pi G}{3} R_0^2 \left[\rho_0 - \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right] \quad (1.11)$$

A evolução futura do universo depende do sinal do colchete na eq. acima. Definimos a densidade crítica ρ_c como,

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \approx 0.48 \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

Se $\rho_0 > \rho_c$, a expressão entre colchetes é positiva. Então, quando o raio aumenta, o lado direito da expressão diminui até o valor zero. Nesse instante, cessa a expansão, começando a contração (modelo cosmológico fechado).

Se $\rho_0 < \rho_c$, a expansão continua indefinidamente. No limite em que $t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ e teremos:

$$\dot{R} = \left[\frac{8\pi G}{3} R_0^2 (\rho_c - \rho_0) \right]^{1/2} = c^{16} \quad (1.12)$$

Tal modelo é dito, modelo cosmológico aberto.

A densidade média de matéria no universo, ρ_0 , depende da densidade devido às galáxias, ρ_g , que é estimada a partir da

densidade de luminosidade \mathcal{L} , discutida na seção anterior, como

$$\rho_o = \mathcal{L} \cdot \frac{M}{L} , \quad (1.13)$$

onde M/L é um valor adequado para a razão massa-luminosidade. Se tomarmos o valor médio desta razão, estimado segundo quantidades intrínsecas, por Dickel e Rood (1978a), $\langle M/L \rangle = 11 \pm 1$, para galáxias espirais ou irregulares, teremos:

$$\rho_o \approx 0.90 \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3$$

Então,

$$\frac{\rho_o}{\rho_c} \approx 0.02 .$$

Entretanto, a determinação direta de M/L a partir da observação de diferentes objetos é um sério problema, pois, como veremos no capítulo seguinte, existem diversas formas de matéria de difícil observação, levando a valores bem diferentes do que este calculado por Dickel e Rood.

CAPÍTULO II

EQUILÍBRIO VIRIAL

2.1) TEOREMA VIRIAL PARA UM SISTEMA DISCRETO

Começaremos este capítulo estudando uma propriedade extremamente importante para um sistema discreto de muitos corpos. Tal propriedade é derivada como um caso particular de um teorema geral, válido para uma larga variedade de sistemas, o teorema virial. Para isso, consideremos um sistema discreto de muitos corpos, e a quantidade $\mathcal{G} = \sum_i M_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$, onde M_i é a massa e \vec{r}_i o vetor posição da partícula i em relação ao centro de massa.

Como mostraram, Heisler et al. (1985), o teorema virial pode ser deduzido tomando-se a derivada segunda temporal de \mathcal{G} ,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{G}} &= 2 \sum_i M_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + 2 \sum_i M_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \\ \Rightarrow \frac{\ddot{\mathcal{G}}}{2} &= \sum_i M_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_i M_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

O primeiro termo do lado direito da eq.(2.1) é o dobro da energia cinética total, T . Para calcularmos o segundo termo desta expressão, sabemos que a força que age na i ésima partícula, é dada por:

$$\vec{F}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (2.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{M_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad , \quad (2.3)$$

onde, $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$.

Logo, o segundo termo da eq.(2.1), fica:

$$\sum_i M_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = -G \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i \quad (2.4)$$

mas, pode-se facilmente mostrar que,

$$\sum_i \sum_{i \neq j} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i = \sum_i \sum_{j < i} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3}$$

$$\rightarrow \sum_i M_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = -G \sum_i \sum_{j < i} \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} = W \quad , \quad (2.5)$$

onde W é a energia potencial gravitacional total. Então, a eq.(2.1) pode ser reescrita como,

$$\frac{\ddot{\mathcal{G}}}{2} = 2T + W \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é o teorema virial para um sistema discreto de partículas que interagem gravitacionalmente. Estamos supondo que a massa destes objetos não varie no tempo. Se permitíssemos tal variação, a única modificação a ser feita, seria somarmos no lado direito da eq.(2.6) um termo dependente da derivada segunda da massa. Este termo

representaria a massa perdida de estrelas ou galáxias , ou mesmo o crescimento de galáxias.

Se examinarmos o sistema durante um intervalo de tempo suficientemente longo, podemos obter uma média no tempo de uma quantidade arbitrária A, dada por:

$$\langle A \rangle_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(t') dt' \quad (2.7)$$

No caso de $\ddot{\mathcal{G}}$, teremos,

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\mathcal{G}} \rangle_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{\mathcal{G}}(t') dt' \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\dot{\mathcal{G}}(t) - \dot{\mathcal{G}}(0) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Logo,

$$\langle \ddot{\mathcal{G}} \rangle_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{t} \sum_i M_i \left[\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t) - \vec{r}_i(0), \dot{\vec{r}}_i(0) \right] \quad (2.9)$$

Este resultado mostra que $\langle \ddot{\mathcal{G}} \rangle_t = 0$ se as partículas do sistema permanecerem com velocidades finitas e situadas numa região limitada no espaço. Pois, assim, teremos $\vec{r}_i(t)$ e $\dot{\vec{r}}_i(t)$ finitos quando $t \rightarrow \infty$ para todas as partículas, o que é equivalente a termos um sistema gravitacionalmente ligado.

Aplicando a média no tempo, o teorema virial, eq.(2.6), toma a forma:

$$\frac{1}{2} \langle \ddot{\mathcal{G}} \rangle_t = 2 \langle T \rangle_t + \langle W \rangle_t \quad (2.10)$$

e se as condições acima forem satisfeitas, reduz a:

$$2 \langle T \rangle_t + \langle W \rangle_t = 0 \quad (2.11)$$

Ou seja, para um sistema ligado, o dobro da média no tempo da energia cinética é igual à média, no tempo, da energia gravitacional, em valor absoluto. Esta é a propriedade que mencionamos no início deste capítulo, cuja aplicação a grupos de galáxias mostraremos na seção seguinte.

Vale lembrar que as médias no tempo de T e de W não são, exceto casualmente, iguais aos seus valores instantâneos, já que T e W dependem explicitamente do tempo. Para um sistema dinâmico, que evolui no tempo, chamamos de equilíbrio virial ou virialização o estágio em que a eq.(2.11) é satisfeita.

2.2) APLICAÇÃO DO TEOREMA VIRIAL

A equação (2.11), uma consequência do teorema virial para sistemas ligados, é largamente aplicada a sistemas astrofísicos, desde um satélite girando em torno de um planeta a um aglomerado de galáxias. Para um caso extremamente simples, por exemplo, o problema de dois corpos no caso particular de um descrever uma órbita circular de raio R em torno do outro, vemos que a força gravitacional deve ser contrabalançada pela força centrífuga: $M_i V_i^2 / R = G M_i M_j / R^2$. Multiplicando ambos os membros por R , obtemos o teorema virial.

O teorema virial foi inicialmente aplicado a aglomerados

de galáxias por Zwicky em 1933, a fim de obter uma estimativa da massa destes sistemas. Também Chandrasekhar, em 1942, aplicou o teorema virial em aglomerados de estrelas com o objetivo de estudar sua dinâmica, encontrando resultados que estão de acordo com dados observacionais.

Vários problemas intervêm na aplicação do teorema virial, para grupos e aglomerados de galáxias. Em primeiro lugar, é obviamente impossível observar as médias temporais das energias cinética e potencial em nossa curta vida média. Só o que se pode é estimar seus valores instantâneos. Para sabermos o quanto tais valores são significativos, devemos calcular as flutuações estatísticas em torno do equilíbrio virial, no caso de um sistema clássico de N -corpos.

Em segundo lugar, para o cálculo das energias, necessitamos tanto das distâncias entre as galáxias, r_{ij} , quanto das velocidades, quantidades determinadas observacionalmente. Todavia, é possível observar, apenas, as interdistâncias projetadas num plano perpendicular à direção radial e a componente radial das velocidades de cada galáxia em relação a Terra. Com isso, perdemos informação de uma dimensão espacial e de duas dimensões de velocidade.

Como os dois problemas levantados acima influenciam a estimativa da massa de grupos e aglomerados?

Para entendermos, de uma forma clara, tal influência, vamos reescrever a eq.(2.11), usando os valores instantâneos de T e W , como,

$$2T = |W| \quad , \quad (2.12)$$

onde tomamos o módulo da energia gravitacional, por ela ser negativa.

A fim de simplificar, vamos considerar as seguintes quantidades,

$$R_h = \frac{\left(\sum_i M_i \right)^2}{\sum_i \sum_{i < j} \frac{M_i M_j}{r_{ij}}} \quad (2.13)$$

e,

$$V^2 = \frac{\sum_i M_i V_i^2}{\sum_i M_i} \quad , \quad (2.14)$$

onde R_h é o raio harmônico, que é igual ao raio virial R_{vt} e V_i a velocidade da i -ésima galáxia. Substituindo as eqs.(2.13) e (2.14) na eq.(2.12), obtemos para a massa total,

$$M_{vt} = \frac{R_h V^2}{G} \quad . \quad (2.15)$$

Chamamos M_{vt} de massa virial. Esta é a massa que satisfaz instantaneamente a eq.(2.11). Ou seja, $M_{vt} = \sum_i M_i$ quando a eq.(2.12) é satisfeita.

Supondo que o observador seja solidário ao eixo Z, as velocidades radiais observadas serão V_z e as interdistâncias, transversais ao eixo Z, R_{xy} . A massa virial, determinada para estas coordenadas de projeção, é escrita de maneira análoga a expressão (2.15), como

$$M_z = \xi \frac{R_{xy} V_z^2}{G} \quad . \quad (2.16)$$

Na expressão acima, ξ é o fator de compensação que leva em conta o erro introduzido ao substituírmos R_h e V^2 por R_{xy} e V_z^2 . Este fator depende da configuração de cada grupo. A configuração mais simples que podemos imaginar, a fim de obtermos as médias para posições e velocidades, é uma configuração esfericamente simétrica e de velocidades isotrópicas. Assim sendo, as massas não ficam correlacionadas com posições e velocidades e conseqüentemente podemos projetar o sistema segundo qualquer ângulo. Sendo θ_i o ângulo entre o eixo Z, que é a linha de visada, e a velocidade \vec{V}_i , temos

$$\left(\sum_i M_i \right) V_z^2 = \sum_i M_i V_{iz}^2 = \sum_i M_i V_i^2 \cos^2 \theta_i \quad (2.17)$$

Tomando a média da eq.(2.17) sobre todas as direções,

$$\langle V_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{\sum_i M_i V_i^2}{\sum_i M_i} = \frac{1}{3} V^2, \quad (2.18)$$

que nada mais é do que a equipartição da energia cinética nas três componentes de um sistema isotrópico.

Na eq.(2.13), escrevemos a separação espacial como r_{ij} . A separação espacial projetada é $r'_{ij} = r_{ij} \sin \theta_{ij}$, onde θ_{ij} é o ângulo entre r_{ij} e o vetor posição da i -ésima galáxia. Logo,

$$R_{xy} = \frac{\left(\sum_i M_i \right)^2}{\sum_i \sum_{i < j} \frac{M_i M_j}{r'_{ij}}} \quad (2.19)$$

Fazendo a média espacial sobre uma distribuição esférica, em

(2.19), ficamos com:

$$\langle R_{xy} \rangle = \frac{2}{\pi} R_h. \quad (2.20)$$

E inserindo as expressões (2.18) e (2.20) na (2.16), obtemos:

$$\langle M_z \rangle = \frac{2\xi}{3\pi G} R_h V^2. \quad (2.21)$$

Comparando este resultado com a eq.(2.15), vemos que o fator de compensação necessário para que $\langle M_z \rangle \approx M_{vt}$ é igual a

$$\xi = 3\pi/2, \quad ,$$

no caso de um sistema esfericamente simétrico, com velocidades isotrópicas.

Desta forma, podemos estimar a massa total de um grupo de galáxias, utilizando a eq.(2.16), com $\xi = 3\pi/2$.

Baseado neste cálculo da estimativa da massa, em 1972, Aarseth e Saslaw tentaram responder à questão levantada no início desta seção. Para isso, eles efetuaram uma simulação de N-Corpos para grupos com diferentes números de galáxias: N=8, 16 e 32, em que tais galáxias têm suas massas sorteadas dentro de um espectro do tipo $n(m) \propto m^{-2}$, com a galáxia mais pesada sendo uma ordem de grandeza maior que a mais leve. Eles calcularam o desvio do valor real da massa, quando se utiliza a eq.(2.16), num estágio em que os sistemas já atingiram a virialização. Seus resultados mostram que o erro cometido neste procedimento deixa uma diferença na massa de um fator ≈ 2 .

Outro resultado importante neste trabalho de Aarseth e

Saslaw foi mostrar que as flutuações estatísticas em torno da média temporal do valor da massa, $\sigma(M) = \sqrt{(M_z - \langle M_z \rangle)^2}$ calculada para seus três diferentes conjuntos de grupos são:

| | N=8 | N=16 | N=32 |
|-----------------------|--------|------|------|
| $\frac{\sigma(M)}{M}$ | = 0.24 | 0.17 | 0.12 |

Ou seja, $\sigma(M)/M \propto 1/\sqrt{N}$.

Estas flutuações, combinadas com o desvio mencionado acima, deixam uma incerteza na massa estimada, segundo os autores, de um fator ≈ 2 .

Esta incerteza é totalmente aceitável do ponto de vista astrofísico, haja visto que a ordem de grandeza da massa de um grupo é bastante alta (10^{42} kg), não sendo então o intuito de qualquer trabalho, determinar com exatidão tais quantidades.

Além disso, como veremos na seção seguinte, este fator é extremamente pequeno em comparação com a discrepância observada entre a massa virial e a massa calculada a partir da luminosidade de cada galáxia pertencente ao grupo.

Conseqüentemente, apenas com os valores instantâneos de T e W, e sem informação de uma dimensão espacial e de duas dimensões de velocidade, podemos aplicar o teorema virial para estimar a massa de grupos de galáxias.

2.3) DISCREPÂNCIA NA MASSA

Como acabamos de ver, o teorema virial pode ser utilizado para estimar a massa de um grupo de galáxias a

partir de dados observacionais de posição e velocidade. Entretanto, para chegarmos à eq. (2.16) partindo do teorema virial, uma hipótese bastante restritiva foi feita: A hipótese de que os grupos de galáxias sejam sistemas ligados. Sem esta hipótese, $\langle \ddot{g} \rangle_i \neq 0$ e conseqüentemente não podemos aplicar a eq.(2.16) na estimativa da massa.

Uma outra alternativa para estimar a massa total de um grupo é através da luminosidade absoluta de cada galáxia, como mencionamos na introdução. Estas luminosidades nos fornecem uma estimativa da massa do grupo, se conhecida a razão massa-luminosidade, que pode ser determinada a partir da análise de quantidades dinâmicas intrínsecas a cada galáxia, a saber, distâncias, dispersão interna das velocidades e velocidades de rotação. Um exemplo de trabalho que estima a razão massa-luminosidade, como mencionado no capítulo anterior, é o de Dickel e Rood (1978a). Nesse trabalho, são apresentados dados observacionais referentes a 112 galáxias espirais e irregulares, a maioria em grupos. O valor médio da razão massa-luminosidade por eles estimado é $\langle M/L \rangle = 11 \pm 1$ em unidades solares, independente do tipo morfológico. Logo, a massa total, M_L de um grupo pode ser dada por:

$$M_L = \sum_i M_i = \sum_i \langle M/L \rangle_i L_i$$

Este método baseia-se no princípio de que toda luminosidade emitida por uma galáxia provém de sua massa, e que toda massa pertencente à galáxia é fonte de luminosidade. Por isso, a massa estimada através deste método é chamada de

massa luminosa.

Um problema extremamente importante surge ao compararmos a massa estimada pelo método descrito acima com a massa virial. Trata-se da chamada discrepância de massa. Isto é, a massa estimada pelo teorema virial, M_{vt} , é maior do que a massa luminosa, M_L , no mínimo por um fator 10, chegando às vezes a um fator 500. Vários trabalhos realizados nas últimas duas décadas indicam claramente esta discrepância (Field e Saslaw, 1971; Hartwick, 1978). Em 1970, Rood et al. mostraram que, para um conjunto de 54 grupos do catálogo de Vaucouleurs (1975), a discrepância média $\langle M_{vt}/M_L \rangle \approx 165$. A amostra por eles utilizada varre um volume esférico local de raio igual a 17 Mpc. Tais grupos contêm de 5 a 30 galáxias.

Para explicar esta discrepância na massa, tal como foi antecipada na introdução, duas hipóteses são sugeridas:

(i) Os grupos são realmente sistemas ligados gravitacionalmente, com suas respectivas massas dadas pelo teorema virial. Neste caso, uma fração considerável de sua massa $(1 - M_L/M_{vt})$ existe sob a forma de *massa escura*.

(ii) Os grupos não são sistemas ligados e toda sua massa é dada pela massa luminosa.

Começando pela primeira hipótese, podemos admitir que a razão massa-luminosidade para galáxias isoladas não foi sub-estimada e que M/L assume o mesmo valor tanto para galáxias isoladas quanto para galáxias pertencentes a grupos. Com isso, a discrepância na massa não estaria associada a cada galáxia individualmente e sim ao espaço intergaláctico no interior do grupo:

Possíveis formas para tal *massa escura* poderia incluir estrelas de massa normal ou estrelas de luminosidade baixa ou nula. Entretanto, o número elevado destes objetos, necessário para resolver a discrepância, torna tal hipótese improvável, mesmo no caso de anãs brancas ou pretas ou ainda estrelas de neutron. Também é improvável que estes objetos fossem ejetados de suas galáxias e permanecessem no espaço intergaláctico do interior dos grupos. Para que isto se verifique, é necessário, pelo menos em grande parte dos grupos, que praticamente toda a massa estelar de uma galáxia fosse ejetada. De um fenômeno deste tipo não se tem nenhuma evidência. Além disso, tal ejeção deve ocorrer numa faixa muito restrita de velocidades ou seja, entre a velocidade de escape da galáxia e a do grupo: de 100 a 500 km/s, o que torna tal hipótese simplesmente nula.

Objetos extremamente massivos e de luminosidade nula situados no espaço intergaláctico, como por exemplo buracos negros formados a partir da explosão de uma estrela, também poderiam ser os responsáveis pela *massa escura*. Entretanto, a fração de massa que pode ser transformada em objetos colapsados é relativamente limitada quando comparada com a fração necessária para resolver a discrepância na massa (Field e Saslaw, 1971). Portanto, dificilmente a *massa escura* poderá estar associada a buracos negros deste tipo.

Ainda quanto a idéia da *massa escura* estar associada ao espaço intergaláctico no interior do grupo, Field e Saslaw acharam provável que tal espaço fosse formado por gás ionizado contendo essencialmente núcleos de hidrogênio. É razoável que galáxias espirais, por já conterem uma parcela considerável de



gás ionizado, possam ser acompanhadas por mais gás ionizado ao seu redor, formando então o espaço intergaláctico. Isto reforça a suposição acima, explicando a discrepância na massa, já que os grupos são formados em sua maioria por galáxias espirais. Esforços prosseguem no sentido de descobrir gás ionizado em grupos e aglomerados.

Um candidato bastante atraente à massa escura é o neutrino com massa de repouso diferente de zero. Em 1972, Cowsik et al. propuseram a existência de neutrinos no universo, num estágio anterior à formação das galáxias. Usando a estatística de Fermi-Dirac, eles estimaram a densidade média de número de neutrinos no universo, chegando a um valor 10^{10} vezes maior do que a densidade de número dos átomos de hidrogênio. Tal valor em conjunto com uma massa de repouso para o neutrino, $m_\nu \approx 10\text{eV}/c^2$ explicaria a discrepância na massa (Cowsik e Ghosh, 1987). Recentes investigações mostram que o limite superior para a massa de repouso do neutrino é próximo de $30\text{eV}/c^2$, o que torna a hipótese acima compatível.

Ainda dentro da primeira hipótese, podemos considerar que a massa virial é realmente a massa do grupo e que a massa luminosa teve seu valor sub-estimado, por causa da envoltória massiva e escura existente em torno de cada galáxia. Há evidência observacional baseada nas curvas de rotação das galáxias de que tal envoltória existe. Em 1983, Bahcall mostrou que a razão entre a massa da envoltória e a massa do disco luminoso da galáxia espiral Sb NGC 891, para diversos modelos fenomenológicos descritos em seu trabalho, está dentro da faixa,

$$0.6 \leq \frac{M_{env}}{M_L} \leq 11 .$$

Considerando agora a segunda hipótese, de que os grupos não são sistemas ligados, a massa real do grupo é simplesmente dada pela massa luminosa, não existindo então *massa escura* no interior do grupo. Em outras palavras, não havendo tal massa, os grupos não possuem massa suficiente para permanecerem ligados e então se expandem.

Mas, como determinar se os grupos são ou não sistemas ligados? É o que pretendemos mostrar na seção a seguir.

2.4) TEMPO DE TRAVESSIA

Uma quantidade bastante útil no estudo da dinâmica dos grupos de galáxias é o tempo de travessia. Para defini-lo, consideremos as galáxias de um grupo, compreendidas numa esfera de densidade uniforme de raio R . Tal esfera tem o raio harmônico, $R_h = 5/3 R$. Além disso, consideremos o grupo expandindo-se homologamente, isto é, $\vec{v} = V\vec{r}/R$, onde V é a velocidade de expansão da superfície da esfera e \vec{v} a velocidade radial de uma galáxia em relação ao centro de massa da esfera.

Integrando sobre a esfera, obtemos:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{5} V^2$$

De acordo com Gott et al.(1973), definimos o tempo de travessia, T_{tr} , da forma:

$$T_{tr} = \frac{R}{V}$$

Então,

$$T_{tr} = \left(\frac{3}{5} \right)^{3/2} \frac{R_h}{\langle v^2 \rangle^{1/2}} \quad (2.22)$$

O tempo de travessia é usado para investigar se os grupos de galáxias observados possuem uma dinâmica própria ou não. Neste último caso, eles se expandem livremente, seguindo a lei de Hubble, isto é, $\vec{v} = H_0 \vec{r}$, e a média das velocidades radiais em relação ao centro de massa, pode ser escrita, aproximadamente, como,

$$\langle v^2 \rangle_M \approx H_0^2 \langle r^2 \rangle_M$$

$$\Rightarrow H_0^{-2} \approx \frac{\langle r^2 \rangle_M}{\langle v^2 \rangle_M}, \quad (2.23)$$

aquí, $\langle r^2 \rangle_M$ é a média do quadrado das distâncias das galáxias, também relativa ao centro de massa, onde denotamos por $\langle \rangle_M$ a média sobre ensemble. Então, comparando as equações (2.22) e (2.23), e levando em conta que $\langle v^2 \rangle_M \approx \langle v^2 \rangle$ e que $\langle r^2 \rangle_M^{1/2} \approx R_h$, podemos concluir que o grupo se expande livremente se

$$T_{tr} \approx H_0^{-1},$$

e que o grupo possui uma dinâmica própria, se

$$T_{tr} \ll H_0^{-1}.$$

Para exprimir T_{tr} em função da energia total do grupo, E , notamos que, com M_{vt} dada pela eq.(2.15), E é igual a,

$$E = \frac{1}{2} M_{vt} V^2 - G \frac{M_{vt}^2}{R_h}. \quad (2.24)$$

E o tempo de travessia, fica,

$$T_{tr} = \left[\frac{3}{10} \right]^{3/2} G \frac{M_{vt}^{5/2}}{|E|^{3/2}}, \quad (2.25)$$

onde usamos o valor absoluto da energia, já que no caso de um sistema ligado, $E < 0$.

MODELOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA PARA GRUPOS

3.1) CATALOGO DE GRUPOS SIMULADOS

Em 1979, Turner et al. apresentaram uma série de trabalhos, envolvendo simulação numérica de sistemas de galáxias. No primeiro destes trabalhos (Turner et al., 1979a), os autores usaram simulações de N-corpos aplicadas a um universo em expansão, a partir da época de formação das protogaláxias. Seus resultados mostraram que, para determinadas perturbações iniciais, tais como o espectro de flutuações dado por uma lei da potência, $\delta\rho/\rho \propto M^{-1/3}$, a simulação produz sistemas de galáxias similares aos observados. No segundo trabalho (Turner et al., 1979b), que discutiremos aqui, eles simularam a formação de grupos e compararam os resultados de várias quantidades relevantes, principalmente a razão massa-luminosidade e o tempo de travessia, com os resultados obtidos a partir de dados observacionais. A comparação é restrita ao estágio imediatamente posterior à formação dos grupos.

Dois modelos foram utilizados (1 e 2), ambos contendo $N=1000$ galáxias. No primeiro modelo, $\Omega = 1.0$ e $\delta\rho/\rho = M^{-1/2}$ enquanto que no segundo, $\Omega = 0.1$ e $\delta\rho/\rho = M^{-1/3}$. Nesta

simulação, cada ponto representa uma galáxia de luminosidade $L^* = 3.4 \times 10^{10} L_{\odot}$ e massa $M = 5 \times 10^{13} \Omega M_{\odot}$. Esta luminosidade foi obtida por Turner e Gott (1976a), para os grupos de seu catálogo observacional, como sendo a luminosidade típica de galáxias que pertencem a grupos. As demais condições iniciais também são retiradas deste catálogo observacional.

Eles consideraram as galáxias distribuídas no interior de uma região esférica do espaço, cujas perturbações externas podem ser desprezadas, tal como um sistema isolado. O potencial de interação é puramente gravitacional e dado por:

$$\Phi_{ij} = G \frac{M_i M_j}{r_{ij}} \quad (3.1)$$

Uma das dificuldades observacionais, como vimos na introdução, é saber se uma galáxia pertence ou não a um determinado grupo. No catálogo de Turner e Gott (1976a) um método detalhado é usado na identificação dos grupos e de seus respectivos membros, inteiramente com base na distribuição de galáxias no espaço. Analogamente, no catálogo de grupos simulados, o mesmo método foi utilizado. Como resultado da simulação, foi obtida a função de multiplicidade, isto é, o número total de galáxias nos grupos cuja multiplicidade seja igual ou menor a um dado valor N . Esta função é dada por:

$$\mathcal{F}(N) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^N i N_G(i) ,$$

com $\mathcal{F}(N_t) = 1$, onde N_t é o número total de galáxias que

participaram da simulação e $N_g(i)$, o número de grupos com multiplicidade i . Esta função é apresentada na fig.(3.1), para cada um dos dois modelos e para os grupos do catálogo observado. Da fig.(3.1), podemos notar que, para pequenos grupos, o modelo 1 é que melhor reproduz os dados observacionais. Porém, para grupos de maiores multiplicidades, o modelo 2 é o mais

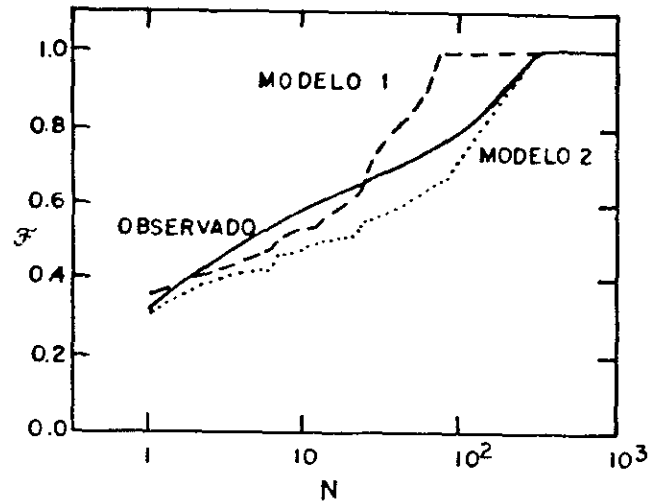


FIG 3.1 - Função F de multiplicidade. Determina a fração de galáxias em grupos de multiplicidade $\leq N$.

apropriado. De acordo com o método empregado no catálogo observacional, os autores usaram os valores de posição e velocidade para calcular a razão massa-luminosidade e o tempo de travessia para cada grupo simulado. A fig.(3.2) mostra a distribuição de M/L para os grupos simulados e a comparação com os grupos reais. É fácil notar que o modelo 2 ($\Omega = 0.1$) reproduz aproximadamente a distribuição dos grupos reais, enquanto que o modelo 1 ($\Omega = 1.0$) não. Isto tanto pode ser concluído para a forma da função quanto para o valor médio de M/L . Segundo a estimativa feita com o modelo 2, o valor médio de M/L é $100 M_{\odot}/L_{\odot}$, implicando em $\Omega \cong 0.1$, o que mostra a consistência. De forma geral, pode-se concluir, a partir deste trabalho, que o modelo 2 ($\Omega = 0.1$ e $\delta\rho/\rho = M^{-1/3}$) reproduz aproximadamente os dados observacionais da razão M/L .

Todavia, duas grandes objeções podem ser formuladas contra esta simulação de Turner e Gott. Primeira: Os autores empregaram uma distribuição uniforme para a massa das galáxias, o que é obviamente não-razoável. Uma outra distribuição não implicaria em melhores resultados? Segunda: Quanto às luminosidades, os autores usaram também uma distribuição uniforme, quando se sabe que a função Schechter, como vimos no capítulo I, reproduz muito bem as luminosidades observadas. Além disso, tais funções amarram o valor da razão M/L em 1500 para o modelo 1 e 150 para o modelo 2, ficando a relação M/L para grupos, dependente apenas da multiplicidade.

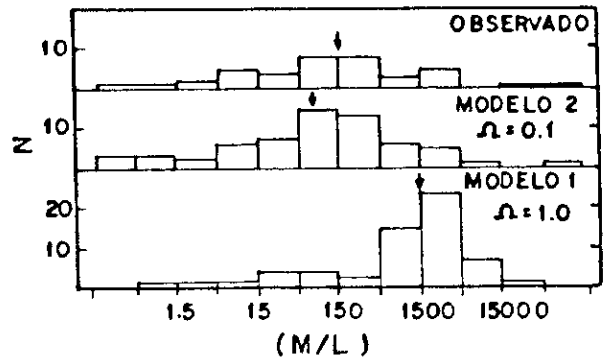


FIG. 9.2 - Razão M/L para os grupos simulados e para os observados (GT). As setas indicam o valor médio de M/L .

Como conclusão, os autores entendem que os resultados obtidos demonstram a utilidade da simulação de N-corpos a fim de testar teorias ou interpretações sobre a dinâmica de sistemas de galáxias que de outra maneira seria difícil de avaliar.

3.2) MASSA PROJETADA

Um dos problemas clássicos da Astronomia é a estimativa da massa, M , de um corpo, através das velocidades radiais e interdistâncias projetadas de uma coleção de partículas-teste

que orbitam em torno deste corpo. Em 1981, Bahcall e Tremaine estudaram a aplicação do teorema virial na estimativa da massa em um sistema deste tipo.

Como discutimos na seção 2.2, a estimativa da massa pelo teorema virial, eq.(2.16), envolve o raio R_{xy} , que é calculado a partir do inverso das interdistâncias projetadas, eq.(2.19). Tais interdistâncias, como mostram os autores, produzem grandes incertezas na massa estimada, já que seu desvio médio quadrático, $\left[\Delta(1/r') \right]^2$ diverge, isto é,

$$\left[\Delta(1/r') \right]^2 = \langle\langle 1/r'^2 \rangle\rangle - \langle\langle 1/r' \rangle\rangle^2 \rightarrow \infty$$

pois,

$$\langle\langle 1/r'^2 \rangle\rangle = \langle 1/r^2 \rangle \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\text{sen}\theta} \rightarrow \infty$$

A partir deste resultado, Bahcall e Tremaine concluíram que, neste caso, a aplicação do teorema virial na estimativa da massa é ineficiente. Sendo assim, eles propuseram uma estimativa baseada na massa projetada, que foi estudada em 1952 por Page.

A massa projetada q é definida como, $q = (\text{distância projetada}) \times (\text{velocidade radial})^2 / G$. Obviamente, q tem dimensão de massa e uma forma funcional semelhante à massa virial. Então, com um fator multiplicativo adequado, q pode ser usado para estimar a massa.

Posteriormente, em 1985, Heisler et al. investigaram a relação entre a estimativa da massa pelo teorema virial e pela massa projetada em sistemas de N-partículas interagindo

gravitacionalmente. Para isso, escreveram a massa virial, de forma equivalente à apresentada no capítulo anterior, eq.(2.16), no caso de um sistema com partículas iguais, como,

$$M_{vt} = \frac{3\pi N}{2G} \frac{\sum_i V_{zi}^2}{\sum_{i < j} r_{ij}^{-1}}, \quad (3.4)$$

e introduziram a massa projetada M_{PM} como:

$$M_{PM} = \frac{f_{PM}}{G \cdot N} \sum_i V_{zi}^2 r_i', \quad (3.5)$$

onde f_{PM} é uma constante de proporcionalidade, $V_{zi} = \vec{V}_i \cdot \hat{z}$ é a componente z da velocidade da galáxia i relativa ao centro de massa e $r_i' = |\vec{r}_i - (\vec{r}_i \cdot \hat{z}) \cdot \hat{z}|$ é a distância projetada também em relação ao centro de massa.

Para estimar o valor de f_{PM} , Heisler et al. usaram um modelo de densidade contínua para sistemas esféricos. Neste modelo, eles descreveram o sistema no espaço de fase, tal que $f(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v$ é a massa contida num elemento de volume $d^3r d^3v$. A equação hidrodinâmica, neste caso, é obtida da sua análoga estelar (Ogorodnikov, 1965),

$$\frac{d}{dr} \rho(r) \sigma_r^2 + \frac{2\rho}{r} (\sigma_r^2 - \sigma_t^2) = -\rho \frac{dU}{dr}, \quad (3.6)$$

onde, consideramos que a distribuição do espaço de fase, f, independa da posição r, $\rho = \int f d^3v$ é a densidade de massa, U(r) o potencial gravitacional e σ_r e σ_t as dispersões de velocidade radial e tangencial, respectivamente.

Admitindo que as dispersões de velocidade tangenciais sejam nulas, $\sigma_t = 0$, podemos multiplicar a eq.(3.6) por r^4 e integrar sobre r , para obter,

$$-2 \int_0^{\infty} r^3 \rho \sigma_r^2 dr = - \int_0^{\infty} \rho \frac{dU}{dr} r^4 dr \quad (3.7)$$

Como a dispersão das velocidades ao longo da linha de visada (eixo z) é $V_z^2 = \sigma_r^2 \cos^2 \theta$, onde $\cos \theta = \hat{r} \cdot \hat{z}$ e a distância projetada, $r' = r \sin \theta$, podemos escrever,

$$\langle V_z^2 r' \rangle = \frac{1}{M} \int \int V_z^2 r' d^3r d^3v = \frac{\pi^2}{4M} \int r^3 \rho \sigma_r^2 dr \quad (3.8)$$

Com o valor médio, $\langle V_z^2 r' \rangle$, desta forma, podemos usar a eq.(3.7) e o fato de que $dU/dr = GM(r)/r^2$ e obter,

$$\langle V_z^2 r' \rangle = \frac{\pi}{64} GM \quad (3.9)$$

No caso de $\sigma_r = 0$, usando o mesmo procedimento, temos

$$\langle V_z^2 r' \rangle = \frac{\pi}{32} GM \quad (3.10)$$

Voltando, então, ao sistema discreto de galáxias que havíamos considerado, notamos que a massa projetada, introduzida na eq.(3.5), contém uma média sobre as galáxias, que é equivalente à média das eqs.(3.9) e (3.10), e que é:

$$\frac{1}{N} \sum_i V_{zi}^2 r'_i$$

Logo, para que M_{PM} seja igual a M , uma estimativa razoável para a constante f_{PM} , é $64/\pi$, no caso em que $\sigma_l = 0$ e $32/\pi$, no caso em que $\sigma_r = 0$.

A fim de comparar a massa projetada com a massa virial, eles efetuaram uma simulação com uma distribuição discreta de galáxias. As galáxias foram uniformemente distribuídas no interior de uma esfera de raio R . A massa das galáxias foi admitida seguir uma progressão geométrica de razão 2, isto é, $M_i = 2 M_{i-1}$ com $\sum_i M_i = 1$, ao passo que velocidades iniciais, ao longo de cada eixo, seguem distribuições Gaussianas.

Nesta simulação, os autores tomaram o potencial entre as galáxias, como sendo,

$$U(r) = \frac{G M_i M_j}{(r_{ij}^2 + b^2)^{1/2}},$$

onde b é um parâmetro utilizado a fim de reduzir o tempo computacional e que leva em conta o tamanho finito das galáxias (Aarseth, 1963). Explicaremos com mais detalhe este parâmetro no capítulo V.

No instante em que o grupo atinge o equilíbrio virial, as posições projetadas e as velocidades radiais são usadas para calcular as estimativas de massa, pelas equações (3.4) e (3.5).

Baseado em cinco conjuntos de 1000 grupos cada, Heisler et al., apresentaram alguns resultados numéricos. Estes conjuntos são definidos segundo os parâmetros N , Q e R , que são o número de galáxias, dispersão da Gaussiana e o raio da esfera, respectivamente e que são os seguintes:

i) $N = 5, Q = 0.25, R = 10$

iv) $N = 10, Q = 0.25, R = 20$

ii) $N = 5, Q = 0.25, R = 5$

v) $N = 5, Q = 0.25, R = 20$

iii) $N = 5, Q = 0.5, R = 10$

A figura (3.3) representa os valores médios e os respectivos erros para a estimativa pelo teorema virial, eq.(3.4) (primeiro conjunto de 5 pontos) e pela massa projetada, eq.(3.5) (segundo conjunto de 5 pontos). Na figura, vemos que em cada um dos 5 casos, a diferença entre o valor médio calculado pela massa virial e pela massa projetada é bem menor do que o erro de um determinado caso. Este resultado indica que as duas estimativas de massa são equivalentes.

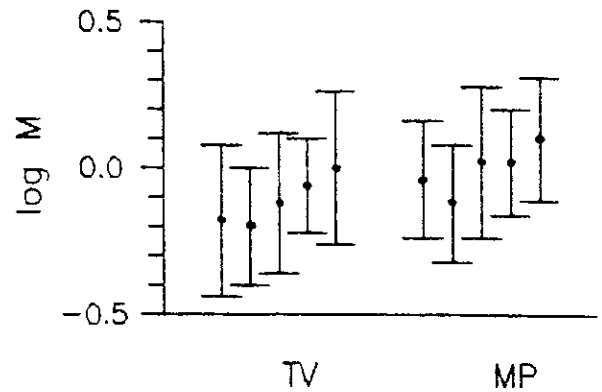


FIG. 9.3 - As médias e suas respectivas dispersões, segundo a estimativa de massa pelo teorema virial (TV) e pela massa projetada (MP).

Usando tais estimativas, os autores analisaram 90 grupos do catálogo de Huchra e Geller (1982), obtendo o valor das massas, M_{vt} e M_{PM} para cada grupo catalogado e com isso as respectivas razões massa-luminosidade, $(M/L)_{vt}$ e $(M/L)_{PM}$. A fig.(3.4) nos fornece os resultados de M e de M/L , que estão de acordo com as estimativas feitas por Huchra e Geller. Ambos os métodos dão resultados de M , e consequentemente de M/L , bem próximos, tal como foi encontrado na simulação numérica.

O valor de M/L encontrado por Huchra e Geller e confirmado em seu trabalho é maior que o M/L observacional, e isto é um outro aspecto do mesmo problema da discrepância na massa. Os resultados deste trabalho são baseados na hipótese de que toda massa dos grupos é distribuída nas galáxias.

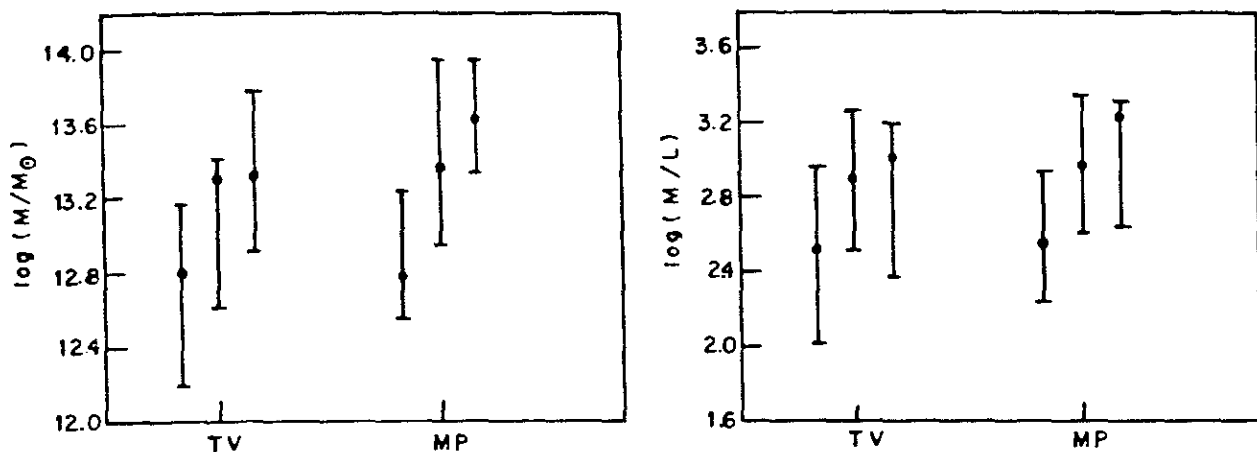


FIG. 9. 4 - (a) Estimativas de massa para os grupos do catálogo de Huchra e Geller. Os dados são divididos em 3 grupos: Da esquerda para a direita, temos: $N=9$; $N=4$; $N \geq 5$. (b) Razão M/L para o catálogo de Huchra e Geller.

3.3) MODELO DE GIURICIN E COLABORADORES

Giuricin et al., em 1984, estudaram pequenos grupos de galáxias através de simulação dinâmica de N-Corpos. Eles admitiram que o espectro de massa das galáxias assumia uma forma semelhante à distribuição de luminosidade observacional (fig.1.1) dada por Turner e Gott (1976b), com um corte em $L = 0.34 \times 10^8 L_{\odot}$. Esta escolha implica que, na escala logarítmica, o espectro de massa deve ter a mesma forma da distribuição de magnitude (eq.(1.6)), pois $L \propto 10^{-0.4M}$. Esta escolha também

permite que as massas sejam distribuídas numa faixa de aproximadamente quatro ordens de grandeza. Na fig.(3.5), mostramos tal distribuição e a comparamos com a distribuição usada por Aarseth e Saslaw (1972), cujo trabalho discutimos no capítulo anterior.

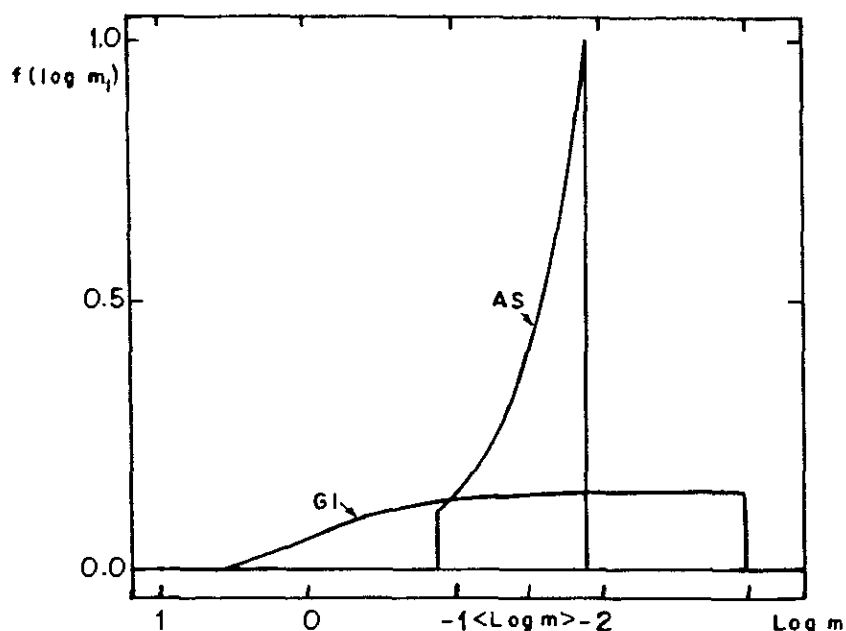


FIG 3.5 - Comparação entre o espectro de massa usado por Aarseth e Saslaw (AS) e o usado por Giuricin et al. (GI). Os espectros são normalizados a mesma área e mesmo valor médio.

Giuricin et al. simularam grupos com $N = 3, 5, 8, 10$ e 15 galáxias. As posições iniciais são escolhidas aleatoriamente dentro de uma esfera de raio R e as velocidades iniciais são admitidas nulas.

Inspecionando a evolução temporal do raio virial R_{vt} , eq.(2.13), eles concluíram que os sistemas atingem a virialização num tempo $T_v \cong 3.2 T_{tr}$.

Para cada simulação, eles calcularam a média da massa virial e da razão massa-luminosidade sobre dois intervalos temporais, $1 \leq t \leq T_v$ e $T_v \leq t \leq 2 T_v$. O primeiro intervalo

descreve o estágio de não equilíbrio (NE) e o segundo, de pós-equilíbrio (PE). As tabelas 1 e 2 listam os valores médios da razão entre a massa obtida pelo teorema virial, M_{vt} e a massa real, M , para ambos os intervalos mencionados acima. O número de galáxias em um grupo é dado por N , sendo que n é o número de galáxias cujos dados de posição e velocidade participam do cálculo de M_{vt} .

TABELA 1 - VALOR MÉDIO DA RAZÃO M_{vt}/M - ESTÁGIO NE

| n | N=3 | N=5 | N=8 | N=10 | N=15 |
|----|------|------|------|------|------|
| 3 | 0.93 | 1.00 | 1.10 | 1.20 | 1.00 |
| 5 | — | 0.98 | 1.00 | 0.96 | 0.96 |
| 8 | — | — | 0.93 | 0.96 | 1.00 |
| 10 | — | — | — | 0.96 | 1.02 |
| 15 | — | — | — | — | 1.03 |

TABELA 2 - VALOR MÉDIO DA RAZÃO M_{vt}/M - ESTÁGIO PE

| n | N=3 | N=5 | N=8 | N=10 | N=15 |
|----|------|------|------|------|------|
| 3 | 0.95 | 0.94 | 1.17 | 0.94 | 1.00 |
| 5 | — | 0.90 | 1.01 | 0.92 | 0.98 |
| 8 | — | — | 0.96 | 0.95 | 1.07 |
| 10 | — | — | — | 0.95 | 1.08 |
| 15 | — | — | — | — | 1.09 |

A primeira conclusão a que chegam os autores é que os valores dos parâmetros estudados não dependem muito do estágio dinâmico do sistema, ou seja, do intervalo de tempo

considerado. Outra conclusão diz respeito aos desvios devido às distâncias projetadas, às oscilações em torno do equilíbrio e às incertezas quanto ao número de galáxias de um grupo. Tais desvios, calculados com este modelo para o valor médio de M_{vt} , são geralmente pouco maiores do que os calculados por Aarseth e Saslaw, como descrito no capítulo 2. Isto deve-se ao fato de não serem iguais as distribuições de massa usadas nos dois trabalhos.

Por outro lado, esta simulação reproduz satisfatoriamente os desvios da massa virial, obtidos para os dados observacionais do catálogo de Huchra e Geller. Entretanto, considerando que massa e luminosidade são relacionadas pela expressão, $M/L = Cte$, pode-se estimar, pela simulação, a dispersão média da razão massa-luminosidade, para os dois intervalos temporais. Este valor é menor do que o observado. Isto, segundo os autores, mostra que massa e luminosidade estão pobremente correlacionadas em grupos de galáxias.

Porém, tal conclusão é fortemente dependente da hipótese de $M/L = Cte$. É, portanto, de grande interesse, investigar outras possibilidades para a razão M/L , o que faremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO IV

MODELO LINEAR

4.1) DISTRIBUIÇÃO DE MASSA

4.1.1) *Lei da Potência*

O primeiro passo a ser dado, com o objetivo de realizar a simulação dinâmica de grupos de galáxias, é saber qual o espectro de massa das galáxias.

Como vimos na seção 1.1, o espectro de massa das pequenas perturbações iniciais de densidade que segue uma lei da potência, $\delta\rho/\rho = M^{-2/3}$, fornece resultados satisfatórios em relação à formação das galáxias.

Esta mesma distribuição, como mencionado na introdução, é observada em vários fenômenos físicos que envolvem fragmentação, como no caso da fragmentação nuclear, em que, por exemplo, um próton altamente energético colide com um núcleo alvo, formando vários fragmentos (pedaços do núcleo). As massas desses fragmentos seguem uma lei da potência, $y(M) \propto M^{-T}$, onde $y(M)$ é o rendimento do fragmento de massa M .

Os gráficos da figura (4.1), os três primeiros extraídos de Hüfner e Mukhopadhyay (1986) e o último de Rana (1987), mostram diversos espectros de massa obtidos através de dados

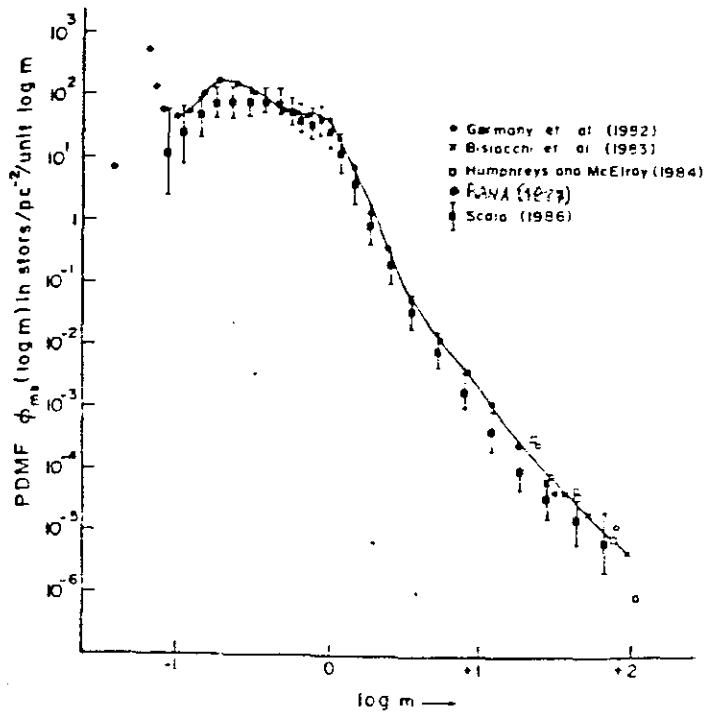
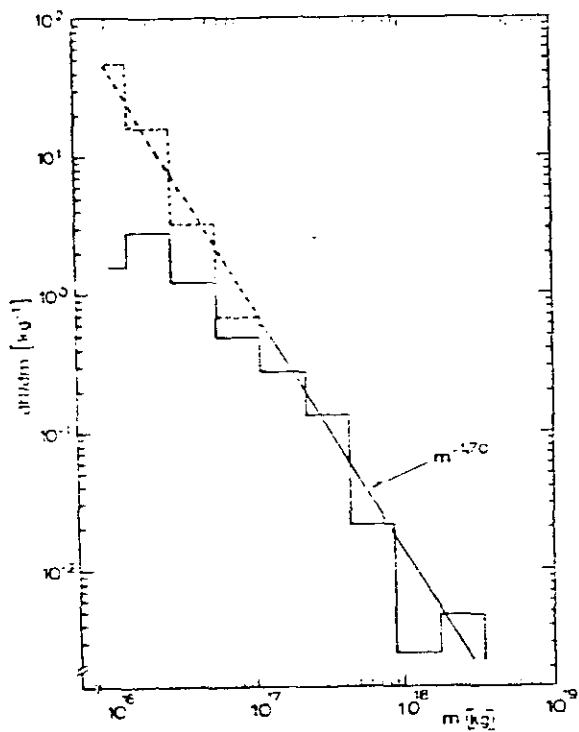
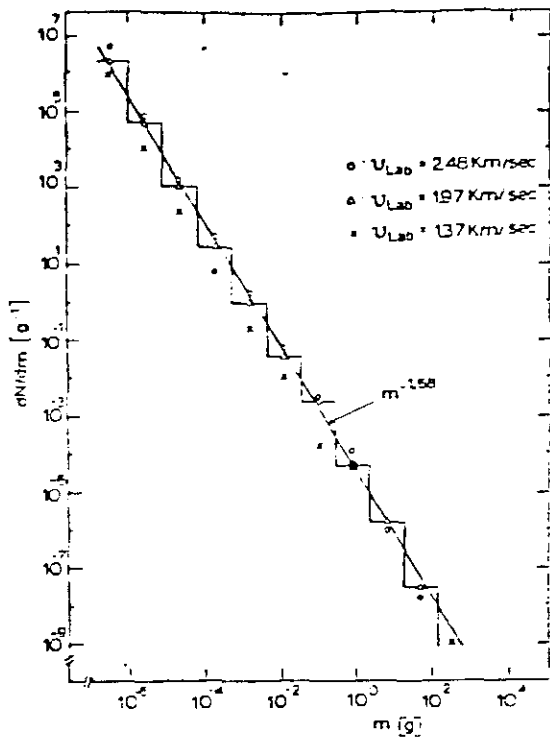
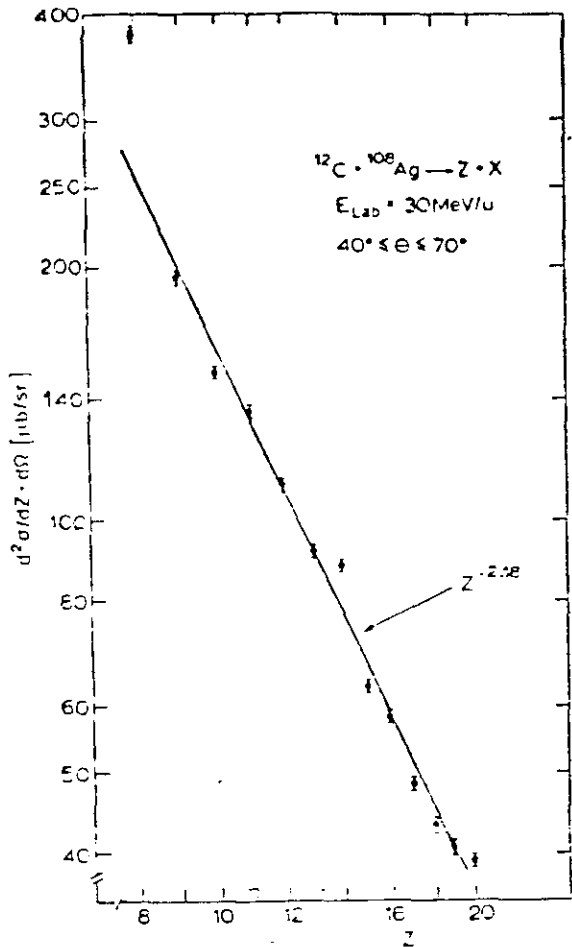


FIG. 4.1 - Espectros de massa em diferentes fenômenos físicos.

experimentais, são eles: (a) distribuição do número atômico Z dos núcleos produzidos na fragmentação nuclear, (b) rendimento dos fragmentos dN/dm , numa colisão basalto-basalto a diversas velocidades, (c) asteróides no sistema planetário e (d) função atual de massa (PMDF), para estrelas vizinhas ao Sol. Todos estes espectros seguem uma lei da potência, em que o expoente τ assume os valores 1.68, 2.18, 1.7 e 0.5 respectivamente.

Levando em conta tais pistas, nós propomos que as massas das galáxias obedecem também a uma lei da potência,

$$\phi(M) \propto M^{-\tau} \quad , \quad (4.1)$$

onde τ é o expoente da lei da potência e M a massa da galáxia. Mais adiante, determinaremos τ a partir de dados observacionais.

Nossa escolha poderia simplesmente recair em cima de uma forma uniforme para o espectro, ou seja, todas as galáxias tendo a mesma massa. Porém, achamos muito improvável que uma distribuição deste tipo ocorra e optamos por levar em conta as pistas mencionadas acima. Fora isso, o fato de usarmos uma distribuição uniforme acarretaria uma considerável perda de informação a respeito de quantidades dinâmicas relevantes, como por exemplo, a dispersão das velocidades e a massa virial.

4.1.2) Razão Massa-Luminosidade

A fim de obtermos uma relação entre massa e luminosidade, lembramos que a luminosidade de uma galáxia é basicamente sua taxa de produção de energia. Logo, como neste caso a massa é proporcional à fonte de energia da galáxia, a luminosidade deve, de alguma forma, relacionar-se com ela.

A forma mais simples possível para esta relação, e que é comumente empregada, como vimos no capítulo anterior, é $M/L = \text{Cte.}$ Porém, segundo Turner e Gott (1977), o valor para esta constante varia numa faixa de 1 a $500 M_{\odot}/L_{\odot}$. Nesta faixa, os valores mais baixos, $< 10 M_{\odot}/L_{\odot}$, são os valores comumente encontrados a partir das curvas de rotação das galáxias, ao passo que os valores próximos de $50-150 M_{\odot}/L_{\odot}$ são obtidos para grupos, utilizando-se o teorema virial ou mesmo para galáxias binárias a partir das curvas de rotação, e os valores maiores ($> 300 M_{\odot}/L_{\odot}$) para grandes aglomerados.

A enorme extensão desta faixa indica que a utilização de um determinado valor para a razão M/L , fatalmente acarretaria grandes incertezas. Além disso, como mencionado na seção 3.3, se admitirmos que massa e luminosidade se relacionam segundo uma constante, chegaremos à conclusão de que a massa é pobremente relacionada com a luminosidade em grupos de galáxias.

Diante disto, uma razão M/L constante nos parece uma aproximação não razoável. Em consequência, propomos uma alternativa simples, que é a seguinte:

$$M_i = \alpha L_i + \beta \quad (4.2)$$

onde α e β são parâmetros a serem fitados com os dados observacionais, o que pretendemos fazer na sub-seção seguinte. Isto é, admitimos M variar linearmente com L . A tal modelo, chamaremos de modelo linear. Note-se que o modelo linear com $\beta = 0$ recai no modelo de $M/L = C^{1\sigma}$.

Na eq.(4.2), aparecem dois termos: o primeiro (αL), dependente da luminosidade e o segundo (β), independente da luminosidade. Isto torna a eq.(4.2) bastante razoável, pois é compatível com a hipótese estudada na seção 2.3 de que a massa dos grupos de galáxia é composta não só de matéria luminosa (dependente de L) como também de matéria escura (independente de L).

4.1.3) Ajuste de α , β e τ

Na seção 1.2, mostramos a distribuição de luminosidade, fig.(1.1), obtida por Turner e Gott (1976b) para os grupos de seu catálogo. São estes os dados observacionais que irão nos permitir o ajuste dos parâmetros α , β e τ do modelo linear.

Para isto, substituindo a relação entre massa e luminosidade, eq.(4.2), na distribuição de massa, eq.(4.1), obtemos:

$$\phi(L) \propto (\alpha L + \beta)^{-\tau} \quad (4.3)$$

Ou seja, usando uma distribuição de massa dada por uma

lei da potência e uma função linear entre massa e luminosidade, obtemos a distribuição de luminosidade, $\phi(L)$.

Na eq.(4.3), os parâmetros α , β e τ e ainda o coeficiente de proporcionalidade são obtidos pelo ajuste com os dados observacionais mencionados acima. Estes dados observacionais fornecem uma faixa de luminosidade em que se encontram as galáxias: $L_0 = 0.05$ e $L_1 = 51.00$ nas unidades de $10^{10}L_{\odot}$. Esta será a faixa que usaremos na nossa simulação.

Da faixa de luminosidade, podemos trivialmente calcular os limites correspondentes da faixa de massa, isto é,

$$M_0 = \alpha L_0 + \beta \quad \text{e} \quad M_1 = \alpha L_1 + \beta \quad (4.4)$$

O ajuste é realizado pelo método de mínimos quadrados, sendo que os pesos dados a cada ponto observacional são inversamente proporcionais às suas correspondentes barras de erro. O ajuste fornece $\tau = 2.8$ e a razão α/β igual a 5.8. Os valores de α e β não podem ser determinados por este ajuste, pois dependem da constante de normalização.

A fig.(4.2) mostra a curva obtida por este ajuste, assim como os pontos da distribuição relativa de luminosidade observacional. Desta forma, as duas hipóteses apresentadas no início deste capítulo, eq.(4.1) e (4.2), produzem uma distribuição de luminosidade compatível com as observações para uma lei da potência com expoente igual a 2.8. Este valor é próximo do valor obtido para a fragmentação nuclear, como acima mencionamos.

Mais adiante, determinaremos os valores de α e β e discutiremos seus respectivos significados físicos.

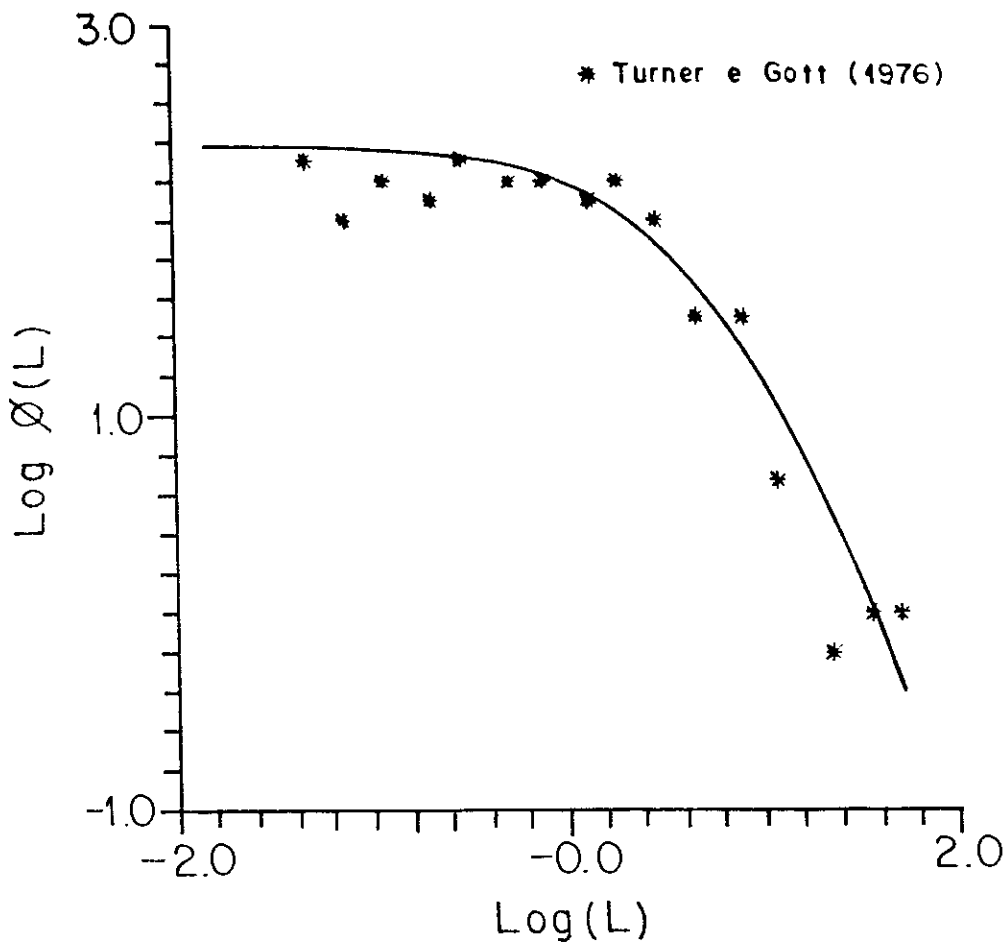


FIG. 4.2 - A curva representa o ajuste da distribuição de luminosidade, eq. (4.9), onde L é dado em $10^{10} L_{\odot}$. O parâmetro T é igual a 2.8 e α e β assumem uma infinidade de valores. Os asteriscos são os dados observacionais de Turner e Gott.

4.2) SIMULAÇÃO DINÂMICA DE N-CORPOS

4.2.1) Condições Iniciais

Admitindo a lei da potência, obtida na seção anterior, para a distribuição de massa das galáxias, usamos o método convencional de Monte Carlo¹ para simular a dinâmica dos grupos segundo o modelo linear. Supor uma determinada

¹ O método de Monte Carlo é apresentado no apêndice A

distribuição para as massas significa sortear um valor para M dentro do intervalo considerado, de tal forma que a probabilidade de se obter cada valor de M , seja dada pelo valor desta função no ponto sorteado. Ou em outras palavras, após um grande número de sorteios análogos, a distribuição dos valores sorteados coincide com a distribuição inicial dada.

As posições iniciais das galáxias são escolhidas aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme no interior de uma esfera de raio R .

Tomamos como raio R da esfera o valor mais provável dos raios dos grupos de galáxias, tal como estimado por Huchra e Geller (1982). Este valor é 0.5 Mpc. Usando $R = 0.5$ Mpc, os valores do raio harmônico de cada grupo, R_h (eq.(2.13)), obtidos na simulação, são compatíveis com os valores do catálogo de Huchra e Geller.

Além das posições iniciais, também necessitamos atribuir às galáxias suas velocidades iniciais. É difícil sabermos as reais velocidades na etapa de formação dos grupos, mas é muito improvável que tais velocidades sejam elevadas ou mesmo da ordem das velocidades observadas atualmente (≈ 100 a 1000 km/s).

Um modelo para as velocidades, bastante utilizado na descrição de sistemas esfericamente simétricos, é o modelo de contração ou expansão inicial homóloga. Neste caso, a velocidade inicial, $\vec{V}_i(0)$ de cada galáxia, é radial e diretamente proporcional à distância ao centro da esfera. Ou seja, $\vec{V}_i(0) = K \vec{r}$, onde K é uma constante arbitrária, que é positiva no caso de expansão e negativa no caso de contração.

Vale lembrar que esta é apenas uma condição inicial e que, certamente, no decorrer da evolução temporal, as velocidades terão componente tangencial. Contudo, tal modelo não é conveniente, pois além de induzir uma dinâmica para o grupo, introduz o parâmetro K , de difícil determinação.

Optamos por velocidades iniciais, seguindo, em cada um dos três eixos cartesianos, distribuições Gaussianas centradas na origem. Isto está de acordo com a indicação de vários autores, como por exemplo Bahcall, cujo trabalho discutimos no capítulo anterior.

A largura da Gaussiana é tal que o módulo das velocidades iniciais chega a aproximadamente de 10 a 50 km/s, isto é, 5% das velocidades finais. Esta largura, levemente modificada, tanto para mais quanto para menos, não altera essencialmente os resultados obtidos neste modelo.

4.2.2) *Integração das Equações de Movimento*

Antes de entrarmos na integração das equações de movimento, algumas considerações acerca da multiplicidade são necessárias.

A multiplicidade, isto é, o número de galáxias em cada grupo, é escolhida aleatoriamente de tal forma que o nosso conjunto de grupos simulados reproduza a mesma distribuição de multiplicidade observada no catálogo de Geller e Huchra (1983).

Neste trabalho, consideramos apenas os grupos de

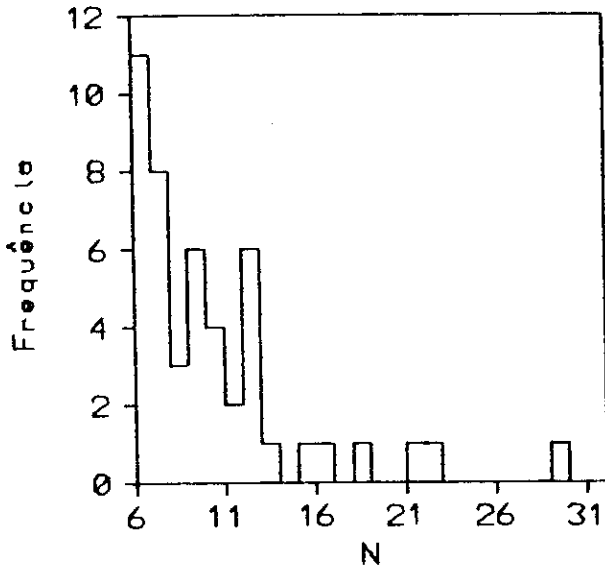


FIG 4.3 - O histograma fornece o número de grupos com multiplicidade N , do catálogo de Geller e Huchra, com $N \geq 7$.

multiplicidade $N \geq 7$, pois para $N < 7$ a estatística se torna insatisfatória. A figura (4.3) apresenta o histograma das multiplicidades do catálogo para grupos com $N \geq 7$. Para $N = 7$, a distribuição é máxima e corresponde a $11/46$ da probabilidade total. Os

grupos que consideramos estão listados na tabela 3. A primeira coluna

indica o número do grupo, segundo a numeração atribuída por Geller e Huchra (NUM); a segunda coluna, a multiplicidade; a terceira, o tempo de travessia em unidades de H_0^{-1} ; a quarta, o raio virial (eq.(2.13)) em Mpc; e a última coluna, a dispersão das velocidades, que será definida na seção seguinte, em km/s.

Com isso, realizamos integrações numéricas do problema clássico de N-Corpos para grupos de multiplicidade entre $N=7$ e $N=30$ conforme a distribuição apresentada na figura acima.

A fim de obter as equações dinâmicas do sistema, consideramos algumas hipóteses básicas:

- (i) A interação é puramente Newtoniana.
- (ii) A massa dos grupos é toda distribuída nas galáxias.
- (iii) Durante a evolução temporal, a massa das galáxias

TABELA 3 - GRUPOS DO CATALOGO DE HUCHRA E GELLER

| NUM | N | T_{lr} | R_h | σ_{ob} |
|-----|----|----------|-------|---------------|
| 2 | 8 | 0.01 | 0.53 | 1128 |
| 6 | 10 | 0.05 | 1.00 | 562 |
| 7 | 7 | 0.07 | 1.68 | 617 |
| 8 | 12 | 0.18 | 2.00 | 294 |
| 9 | 16 | 0.03 | 0.50 | 405 |
| 13 | 8 | 0.03 | 0.26 | 206 |
| 15 | 13 | 0.05 | 0.70 | 360 |
| 19 | 8 | 0.14 | 1.46 | 284 |
| 20 | 7 | 0.04 | 0.25 | 153 |
| 30 | 12 | 0.14 | 1.51 | 290 |
| 34 | 7 | 0.01 | 0.41 | 947 |
| 50 | 8 | 0.16 | 0.48 | 81 |
| 53 | 7 | 0.07 | 1.86 | 709 |
| 58 | 10 | 0.02 | 0.20 | 220 |
| 67 | 8 | 0.03 | 0.18 | 174 |
| 68 | 23 | 0.05 | 0.47 | 234 |
| 70 | 7 | 0.04 | 2.72 | 1836 |
| 71 | 7 | 0.07 | 0.34 | 126 |
| 73 | 10 | 0.02 | 1.48 | 1624 |
| 74 | 9 | 0.07 | 2.65 | 961 |
| 76 | 7 | 0.01 | 0.23 | 417 |
| 77 | 13 | 0.03 | 0.25 | 235 |
| 78 | 9 | 0.04 | 0.54 | 327 |
| 88 | 10 | 0.05 | 0.45 | 238 |

| | | | | |
|-----|----|------|------|------|
| 89 | 7 | 0.08 | 0.64 | 220 |
| 90 | 22 | 0.06 | 1.33 | 641 |
| 91 | 9 | 0.04 | 0.48 | 315 |
| 92 | 10 | 0.04 | 0.72 | 513 |
| 93 | 7 | 0.07 | 0.21 | 86 |
| 98 | 7 | 0.02 | 0.28 | 483 |
| 99 | 14 | 0.13 | 1.11 | 231 |
| 101 | 11 | 0.04 | 0.47 | 339 |
| 107 | 13 | 0.10 | 0.70 | 181 |
| 113 | 30 | 0.01 | 0.22 | 766 |
| 115 | 8 | 0.05 | 0.45 | 239 |
| 119 | 11 | 0.05 | 2.17 | 1128 |
| 122 | 13 | 0.03 | 0.63 | 535 |
| 123 | 17 | 0.08 | 0.48 | 164 |
| 125 | 8 | 0.05 | 1.34 | 777 |
| 130 | 11 | 0.02 | 0.93 | 1073 |
| 134 | 8 | 0.04 | 1.84 | 1364 |
| 135 | 19 | 0.14 | 1.13 | 214 |
| 141 | 13 | 0.00 | 0.02 | 488 |
| 145 | 13 | 0.12 | 1.06 | 237 |
| 150 | 11 | 0.03 | 0.39 | 365 |
| 163 | 7 | 0.01 | 0.08 | 185 |
| 166 | 8 | 0.04 | 0.37 | 232 |
| 173 | 10 | 0.05 | 1.99 | 1031 |

permanece constante.

(iv) O potencial Newtoniano é levemente modificado.

A primeira hipótese é consequência de serem desprezíveis

as correções relativísticas da energia total, visto que as velocidades das partículas v_i/c , tanto em um referencial solidário ao grupo quanto no sistema solar, são muito próximas de zero. Também do ponto de vista da relatividade geral, os grupos (1 Mpc de diâmetro) não chegam a modificar a métrica do espaço-tempo, que permanece sendo a métrica de Minkowski.

As duas hipóteses seguintes apenas servem para simplificar o problema. A última sugere uma modificação no potencial, a fim de levar em conta o efeito de corpos extensos (Aarseth, 1963). As galáxias são corpos extensos, mas geralmente podem ser tratadas como massas pontuais. Entretanto, em problemas de colisão, tal aproximação pode levar o potencial entre duas galáxias a divergir.

Desta forma, tomamos o potencial entre duas galáxias como sendo,

$$\phi_{ij} = G \frac{M_i M_j}{\left[r_{ij}^2 + 2\varepsilon^2 \right]^{1/2}}, \quad (4.5)$$

onde ε é o chamado parâmetro de suavização, da ordem do raio de uma galáxia, M_i a massa da i -ésima galáxia e r_{ij} a interdistância entre a i -ésima e a j -ésima galáxia.

Portanto, para um grupo de multiplicidade N , consideramos a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N M_i V_i^2 - G \sum_{i=1}^N \sum_{i < j} \frac{M_i M_j}{\left[r_{ij}^2 + 2\varepsilon^2 \right]^{1/2}}, \quad (4.6)$$

onde \vec{V}_i é a velocidade da galáxia i em relação ao centro da esfera. Em nossos cálculos, usamos $\epsilon = 0.01$ Mpc, mas para outros valores, obtemos essencialmente os mesmos resultados.

Com a Hamiltoniana acima, obtemos as equações clássicas de movimento que são resolvidas segundo o método numérico de Runge-Kutta-Gill. As principais etapas deste cálculo são apresentadas no apêndice B. Entretanto, duas grandes dificuldades merecem ser citadas aqui.

Primeiro, a diferença entre as ordens de grandeza das quantidades físicas envolvidas é enorme, o que torna difícil a compatibilização das unidades durante a integração das equações. E segundo, a dificuldade de determinarmos o *passo* de integração, a fim de mantermos a energia conservada. Este *passo* é o curto intervalo de tempo em que a aceleração das partículas é constante. Portanto, quanto menor o passo, melhor a conservação de energia. Porém, maior será a quantidade de passos requerida, aumentando assim, indesejavelmente, o tempo computacional. Conseguimos bons resultados ao fazermos o *passo* depender do tempo de travessia.

Mas, como determinar o instante final da evolução temporal? É o que mostraremos na próxima seção.

4.3) EQUILÍBRIO VIRIAL

No capítulo II, estudamos o equilíbrio virial e mostramos que o sistema atinge tal equilíbrio, quando o dobro da média no tempo de sua energia cinética é igual à média no

tempo de sua energia potencial. Com o intuito de investigar este estágio de equilíbrio, calcularemos para cada instante t , a quantidade γ , dada por:

$$\gamma = \frac{T}{|W|} \quad (4.7)$$

Com esta definição, $\gamma = 1/2$ corresponde à virialização instantânea do sistema. Para cada grupo simulado, calculamos os valores de γ em diversos instantes da evolução dinâmica do sistema.

A figura (4.4) representa a evolução de γ para grupos de diferentes multiplicidades: $N = 10, 15, 20$ e 30 . A escala de tempo é dada convenientemente por t_0 , com

$$t_0 = \frac{\Delta t}{T_{tr} \cdot \pi} \quad , \quad (4.8)$$

onde Δt é o tempo decorrido e T_{tr} , o tempo de travessia, introduzido no capítulo II (eq.(2.22)).

Na figura podemos notar que γ parte de um valor bem pequeno $< 10^{-2}$ e cresce rapidamente até um valor ≈ 0.75 , quando $t_0 = 1$, depois decresce. Para t_0 próximo de $3/2$, o valor de γ passa a oscilar em torno de 0.5 . Esta etapa da evolução é justamente a etapa de equilíbrio virial.

Para alguns grupos, γ oscila um pouco acima de 0.5 , porque algumas galáxias adquirem velocidade de escape, deixando o grupo com uma energia cinética um pouco maior do que a necessária para torná-lo ligado. Tal interpretação é dada por Peebles que, em 1970, realizando uma simulação para o

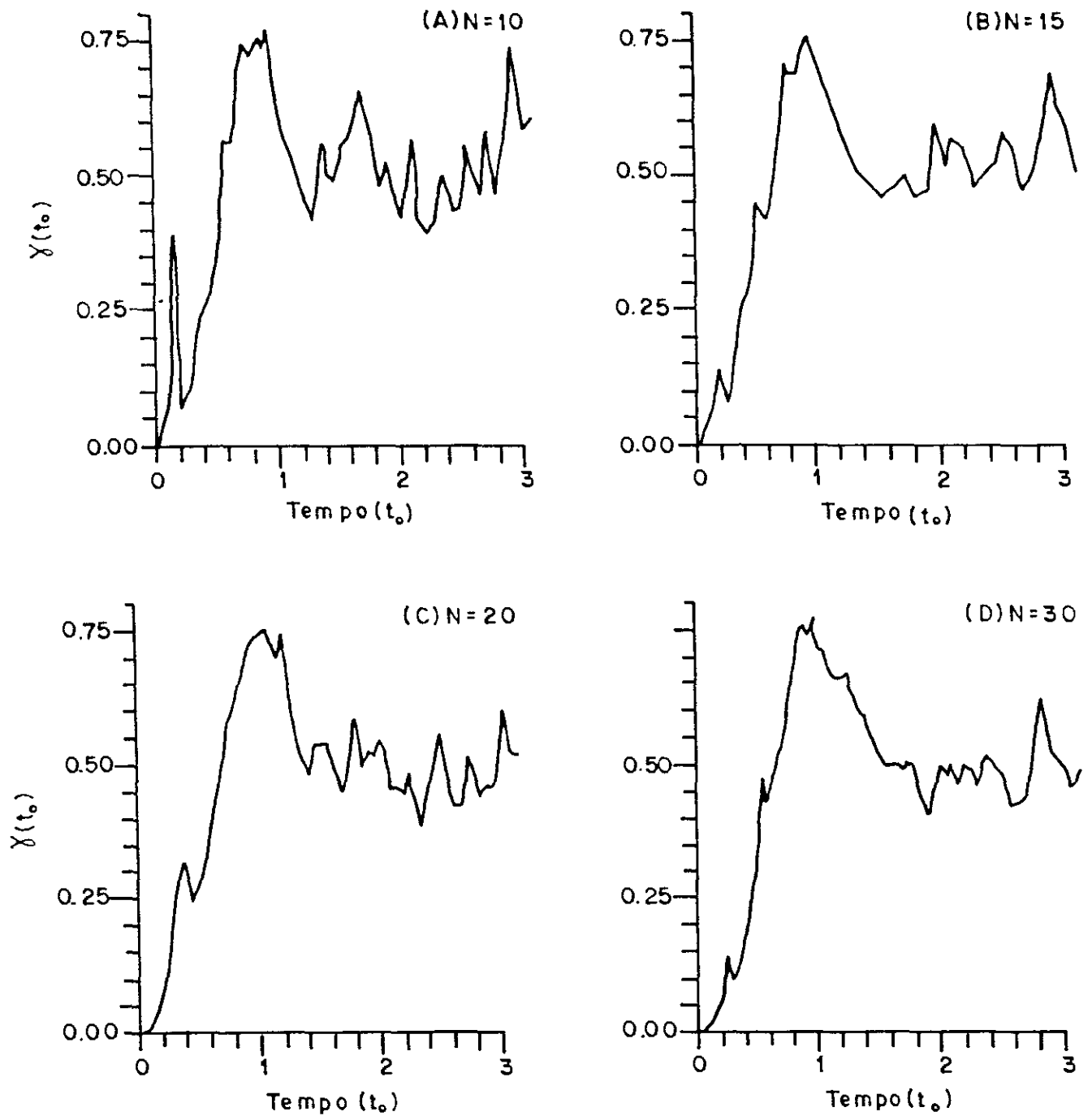


FIG. 4.4 - As curvas mostram a evolução temporal de γ ($\gamma=T/W$) para 4 grupos simulados de diferentes multiplicidades: (a) $N=10$; (b) $N=15$; (c) $N=20$; (d) $N=30$. Todas em unidades de t_0 , revelando que $t_0=1$ corresponde ao tempo de colapso e que para $t_0=2$ os grupos estão virializados.

aglomerado Coma, obteve um pequeno excesso no valor de γ na etapa de virialização.

Consideramos, neste trabalho, apenas os grupos com $\langle \gamma \rangle_t$, no equilíbrio virial, igual a 0.50 ± 0.05 .

O comportamento da curva é essencialmente o mesmo, independente das condições iniciais e da multiplicidade.

É interessante notar que o valor máximo de γ sempre acontece para $t_0 = 1$. A razão disto é que o pico da curva corresponde fisicamente ao instante em que as partículas estão o mais próximo possível uma das outras. Este tempo é denominado tempo de colapso, T_C . Assim, na eq.(4.8), para $t_0 = 1$ e $\Delta t = T_C$, encontramos:

$$T_C = \pi \cdot T_{tr} \quad ,$$

ou, fazendo uso da eq.(2.25),

$$T_C = \pi \left(\frac{3}{10} \right)^{3/2} G \frac{M^{5/2}}{|E|^{3/2}} \quad (4.9)$$

Este valor está de acordo com o valor obtido analiticamente por Cavaliere et al.(1978).

Podemos calcular, a partir da evolução temporal, as flutuações estatísticas em torno do equilíbrio ($\gamma = 1/2$). Para isso, definimos $\sigma(\gamma)$ como sendo a dispersão e listamos na tabela 4 a dispersão relativa, $\sigma(\gamma)/\gamma$, para as multiplicidades $N = 10, 15, 20$ e 30 .

Estas flutuações indicam que a massa virial, calculada como sendo a massa total do grupo, contém um erro no máximo de 24% de seu valor. Como discutido no capítulo II, este fator

TABELA 4 - DISPERSÃO RELATIVA DE γ

| Multiplicidade | N = 10 | N = 15 | N = 20 | N = 30 |
|---|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{\sigma(\gamma)}{\gamma} \approx$ | 0.24 | 0.20 | 0.16 | 0.14 |

não é relevante quando comparado com a discrepância entre a massa virial e a massa luminosa.

Podemos notar que as flutuações diminuem com o aumento da multiplicidade. Mais especificamente, tais flutuações são inversamente proporcionais à raiz quadrada de N, isto é,

$$\frac{\sigma(\gamma)}{\gamma} \propto [N]^{-1/2}.$$

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1) TEMPO DE TRAVESSIA

Usando a eq.(2.25), calculamos, para cada grupo simulado, o tempo de travessia. Utilizamos os extremos do intervalo de massa (M_0 e M_1), cuja determinação será apresentada na seção seguinte.

O histograma da fig.(5.1) mostra estes resultados em unidades de $0.05H_0^{-1}$.

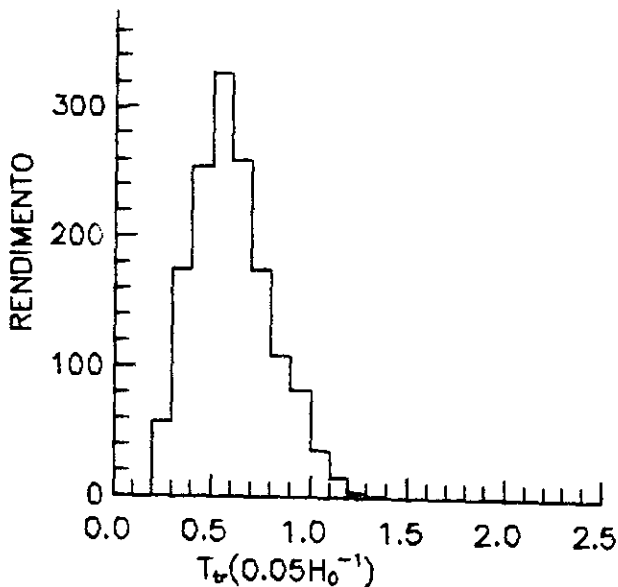


FIG. 5.1 -Histograma do tempo de travessia para os grupos simulados pelo modelo linear. Todos os grupos tem o tempo de travessia \ll que H_0^{-1}

Vemos que todos os tempos de travessia são pelo menos,

uma ordem de grandeza menor que H_0^{-1} e isto está de acordo com o tempo de travessia dos grupos observados, que é também bem menor que H_0^{-1} . Sendo assim, como vimos na seção 2.4, os grupos possuem uma dinâmica própria, isto é, não estão se expandindo segundo a lei de Hubble. Os valores de T_{tr} , para os grupos considerados neste trabalho, estão listados na terceira coluna da tabela 2.

Como o tempo de virialização é da ordem de $3/2.t_0$ e, como estamos vendo, T_{tr} é uma ordem de grandeza menor que H_0^{-1} , então, da eq.(4.8), concluimos que o tempo de virialização também será uma ordem de grandeza menor do que H_0^{-1} . Mas H_0^{-1} fornece uma estimativa da idade do universo. Então, se os grupos de galáxias não tiveram origem em tempo recente, a hipótese de grupos virializados pode nos fornecer uma maneira simples de estimar razoavelmente as quantidades dinâmicas dos grupos.

Assim, todos os resultados que seguem são obtidos no instante $t = 2t_0$, um pouco além do tempo de virialização a fim de garantir total equilíbrio virial do sistema.

5.2) DISPERSÃO DAS VELOCIDADES E DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DE MASSA

Uma quantidade global que é relevante fisicamente na dinâmica do grupo é a dispersão das velocidades. Huchra e Geller (1982) definiram a dispersão a partir de quantidades observacionais, como sendo:

$$\sigma_{ob} = \left[\frac{1}{N-1} \sum_i^N (V_{ri} - V_g)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.1)$$

onde, V_{ri} é o módulo da velocidade de recessão da galáxia i medida em um referencial na Terra e V_g a velocidade média do grupo, $V_g = \frac{1}{N-1} \sum_i V_{ri}$.

Em 1983, Geller e Huchra calcularam a dispersão das velocidades para todos os grupos de seu catálogo. Na coluna 5 da tabela 3, estão listados os valores de σ_{ob} para os grupos aqui considerados.

A fim de testar nossa simulação, desejamos que ela reproduza os valores de σ_{ob} obtidos a partir das quantidades observacionais. Para isso, necessitamos de uma definição para a dispersão que seja análoga a de σ_{ob} . Como V_g é a média das velocidades de recessão das galáxias de um grupo, então V_g é considerado a velocidade de recessão do grupo. Logo, $(V_{ri} - V_g)$ é apenas uma das componentes (a componente radial) da velocidade da galáxia i num referencial solidário ao grupo. Assim, obtemos a seguinte analogia:

$$(V_{ri} - V_g)^2 = V_{zi}^2, \quad (5.2)$$

onde, V_{zi} é a componente Z da velocidade da galáxia i em relação ao centro de massa do grupo simulado. Neste caso, é o eixo Z que corresponde à direção radial, mas qualquer um dos outros dois também poderia ser.

Substituindo a eq.(5.2) na (5.1), a dispersão das velocidades, σ_s , a partir de dados simulados, fica:

$$\sigma_s = \left[\frac{1}{N-1} \sum_i^N V_{zi}^2 \right]^{1/2}. \quad (5.3)$$

Em nossa simulação, calculamos para cada grupo, o valor de σ_s no instante $t = 2t_0$, que corresponde ao estágio de equilíbrio virial, como mencionado na seção anterior.

Na seção 4.1, onde definimos a distribuição de massa, os extremos do intervalo (M_0 e M_f) dependiam da escolha dos parâmetros α e β (eq.(4.4)). A fim de determinarmos estes parâmetros, realizamos a simulação dinâmica para um determinado conjunto de α e β , obviamente satisfazendo o ajuste da fig.(4.2), e calculamos o histograma de σ_s . Comparamos, então, este histograma com o observacional (σ_{ob}). Repetimos a simulação, variando os parâmetros até encontrarmos um conjunto de α e β que tornem o histograma de σ_s o mais próximo possível de σ_{ob} .

A simulação é realizada para uma estatística de 1000 grupos. Para 1300 grupos os histogramas de σ_s não apresentam variações, o que mostra que a estatística usada é totalmente satisfatória.

Na fig.(5.2) estão representados os histogramas de σ_s resultantes da simulação para três diferentes conjuntos de parâmetros α e β (curva sólida) comparados com o histograma observacional (curva tracejada). A medida que α e β aumentam, as dispersões das velocidades crescem deslocando o histograma para a direita. Para $\alpha = 16$ e $\beta = 90$ (Fig.5.2b) parece que o histograma de dispersão das velocidades, obtido por nosso modelo, reproduz melhor os dados observacionais. Nos três casos, o histograma simulado apresenta uma largura maior do que o observacional. Também podemos notar que a região de altas velocidades não foi possível de ser reproduzida. Porém,

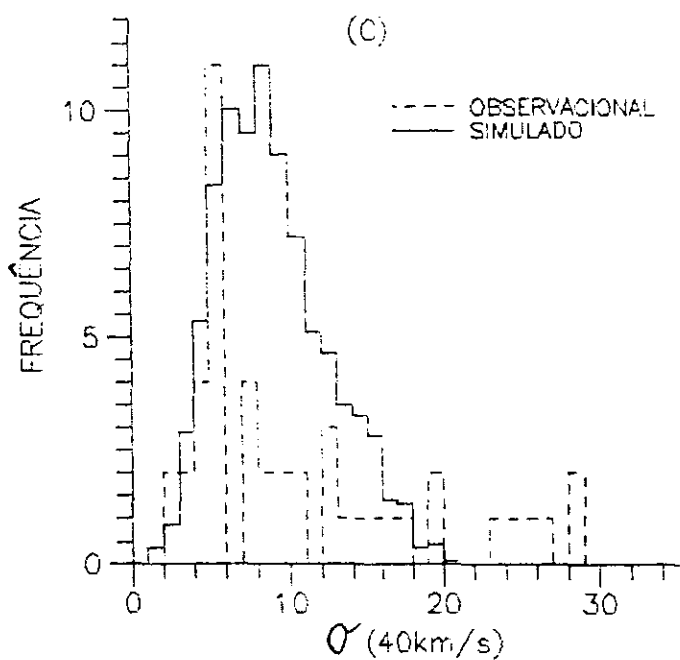
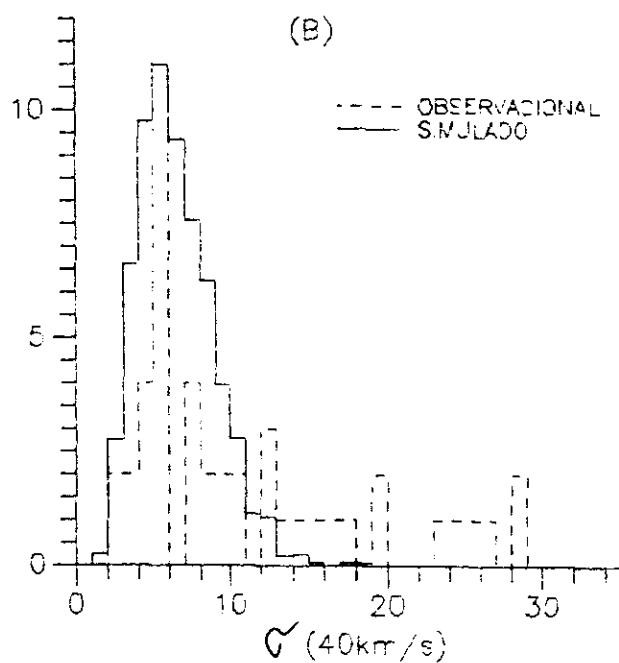
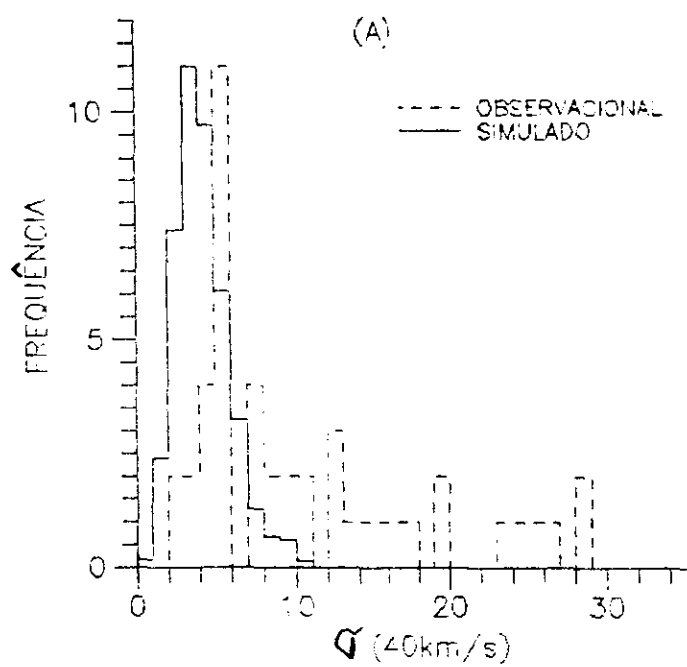


FIG. 5.2 - Histograma de σ (curva sólida), para diferentes intervalos de massa, comparados com o histograma de σ_{ob} (curva tracejada). (a) $\alpha=8$ e $\beta=40$; (b) $\alpha=16$ e $\beta=90$; (c) $\alpha=30$ e $\beta=180$.

tal região deve estar sujeita à altas flutuações estatísticas, pois contem apenas um ou dois grupos em cada intervalo. A fig.5.2b mostra que a nossa simulação fornece resultados bastante razoáveis quando comparados com os dados observacionais.

Com isso, a faixa de massa, em que as galáxias pertencentes a grupos são encontradas, é estimada como sendo,

$$\left[0.9 < M < 9.0 \right] 10^{12} M_{\odot} .$$

Foi com esta faixa de massa que obtivemos o histograma do tempo de travessia, apresentado no item anterior.

5.3) VALOR MÉDIO DA RAZÃO MASSA-LUMINOSIDADE E ANÁLISE DOS PARÂMETROS α E β

Denotando M/L por y , o valor médio da razão massa-luminosidade para galáxias é dado por:

$$\langle y \rangle = \frac{\int_0^{\infty} y \phi(y) dy}{\int_0^{\infty} \phi(y) dy} , \quad (5.4)$$

onde $\phi(y)d(y)$ é a função distribuição de y , que, devidamente normalizada, nos fornece a probabilidade de obter um determinado valor de y entre y e $y + dy$.

Para calcular $\phi(y)dy$, basta usar a distribuição de luminosidade dada pela eq.(4.3) e nela substituir o valor de L

por:

$$L = \frac{\beta}{y - \alpha}$$

Então,

$$\phi(y)dy = \phi^* \frac{y^{-\tau}}{(y-\alpha)^{2-\tau}} \beta^{1-\tau} dy \quad (5.5)$$

Substituindo a eq.(5.5) na (5.4), obtemos,

$$\langle y \rangle = \frac{\int_{y_i}^{y_f} (y - \alpha)^{\tau-2} y^{1-\tau} dy}{\int_{y_i}^{y_f} (y - \alpha)^{\tau-2} y^{-\tau} dy} \quad (5.6)$$

Substituindo α , β e τ por seus valores já estimados, encontramos:

$$\left\langle \frac{M}{L} \right\rangle = 115 M_{\odot} / L_{\odot}$$

Este resultado é próximo do valor encontrado por Huchra e Geller que é, $170 M_{\odot} / L_{\odot}$.

A fig.(5.3) mostra como a razão M/L , para galáxias, varia com a luminosidade no intervalo definido pelos dados observacionais (seção 4.1). Note que para $L < 2$, a curva é praticamente uma lei da potência do tipo, $M/L \propto L^{-1}$, significando que para tais valores a distribuição de massa é praticamente uniforme. Isto é fácil de se compreender pois se $M_i = 16 L_i + 90$, então quando $L \ll 1$, a massa assume assintoticamente o valor de 90 unidades de $10^{10} M_{\odot}$.

Também podemos calcular o valor da razão

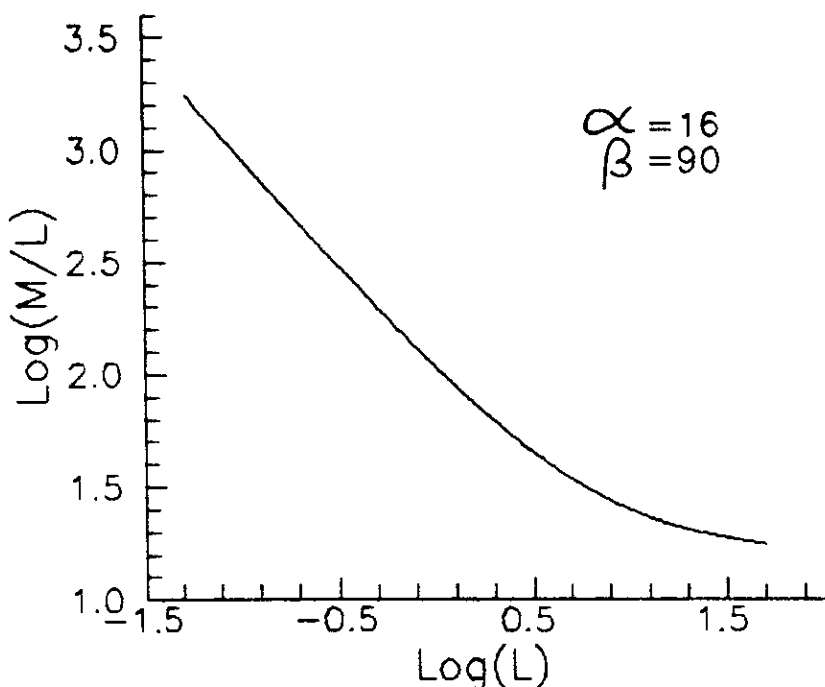


FIG. 5.3 - Razão massa-luminosidade para galáxias em função da luminosidade L . A razão M/L está em unidades solares enquanto que a luminosidade está em unidades de $10^{10} L_{\odot}$.

massa-luminosidade para o grupo. Para isso, sabemos que a massa total do grupo é simplesmente dada por $M_t = \sum_i M_i$. Para calcularmos a luminosidade total, vamos admitir que a densidade de número de galáxias nos grupos seja suficientemente pequena para que o efeito de sombreamento de uma galáxia sobre a outra possa ser desprezado. Com isso, a luminosidade total, $L_t = \sum_i L_i$ e obtemos,

$$M_t = \alpha L_t + N\beta \quad , \quad (5.7)$$

onde N é a multiplicidade do grupo (seção 4.1.2). Logo,

$$\frac{M_t}{L_t} = \alpha + N \frac{\beta}{L_t} . \quad (5.8)$$

Com o intuito de investigar a expressão acima, usamos os dados observacionais de Gott e Turner (1977) e calculamos a razão M/L, a partir desta expressão, para cada um de seus grupos.

A fig.(5.4) compara os resultados obtidos por este método com os calculados por Gott e Turner com a ajuda do teorema virial. O sentido desta comparação é simplesmente averiguar se, de uma forma geral, o comportamento dos resultados de M/L do modelo linear são compatíveis com os calculados por Gott e Turner. Do ponto de vista observacional, os valores de M/L não apresentam aparentemente nenhum comportamento especial, ficando totalmente espalhados no gráfico M/L versus L, enquanto que do ponto de vista do modelo, tais valores satisfazem à relação dada pela eq.(5.8), o que faz com que os pontos apresentem uma característica bem definida.

Todavia, podemos constatar pela fig.(5.4) que os resultados obtidos pela eq.(5.8) reproduzem a média dos resultados obtidos por Gott e Turner.

A partir destes resultados, podemos analisar o conteúdo físico dos parâmetros α e β . Tomemos novamente a relação linear entre massa e luminosidade, com os valores de $\alpha = 16$ e $\beta = 90$,

$$M_t = 16 L_t + N.90 \quad (5.9)$$

Se considerarmos somente o primeiro termo da expressão acima, teremos $M/L = 16 M_{\odot}/L_{\odot}$ que é bem próximo dos valores que se obtém levando-se em conta somente a massa luminosa, como já discutido na seção (4.1.2). Logo, o parâmetro α está

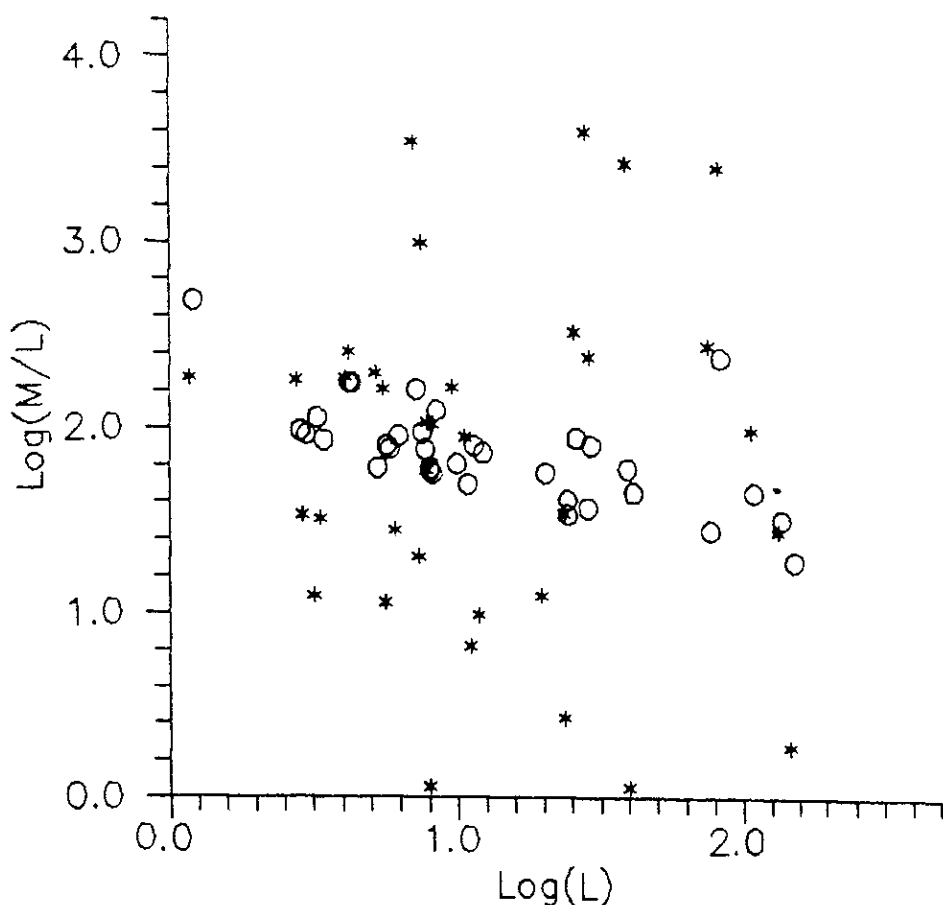


FIG. 5.4 - Comparação entre os resultados da razão massa-luminosidade para os grupos simulados, eq. (5.7), e os grupos observados por Turner e Gott. Cada marcação representa um grupo. Os círculos indicam os resultados do modelo linear e reproduzem a média dos resultados observacionais (asteriscos).

relacionado com a parcela da massa do grupo proveniente apenas da luminosidade.

O segundo termo da expressão é a parte da massa, que não

depende da luminosidade. Logo, este termo representa a massa não luminosa, ou *massa escura* do grupo. Consequentemente, o parâmetro β é o que determina tal componente de massa. Note-se que o valor de $\beta \approx 90$ possibilita que, para grupos de 3 a 30 galáxias, a massa total seja uma ou até duas ordens de grandeza maior do que a massa luminosa. Este fato está de acordo com a discrepância entre a massa virial e a massa luminosa.

5.4) ESPECTROS DE ENERGIA CINÉTICA

Calculamos também a energia cinética de galáxias com massas dentro de diferentes intervalos. Na fig.(5.5), apresentamos os espectros de energia (linha sólida) obtidos para três intervalos de massa em unidades de $10^{10} M_{\odot}$: (a) $90 < M < 91$; (b) $100 < M < 101$ e (c) $110 < M < 111$. Nestes espectros, a unidade de energia é T_{52} que é igual a 10^{52} J .

Podemos notar que todos os espectros da fig (5.5) decaem exponencialmente (linha tracejada). Tal decaimento exponencial independe das velocidades iniciais e reflete um comportamento tipo Maxwell-Boltzmann. Deste modo, pode-se determinar o parâmetro temperatura, ajustando os espectros de energia a uma distribuição de Maxwell-Boltzmann. O valor que encontramos para o parâmetro é aproximadamente 10, nas usuais unidades de energia, isto é, T_{52} .

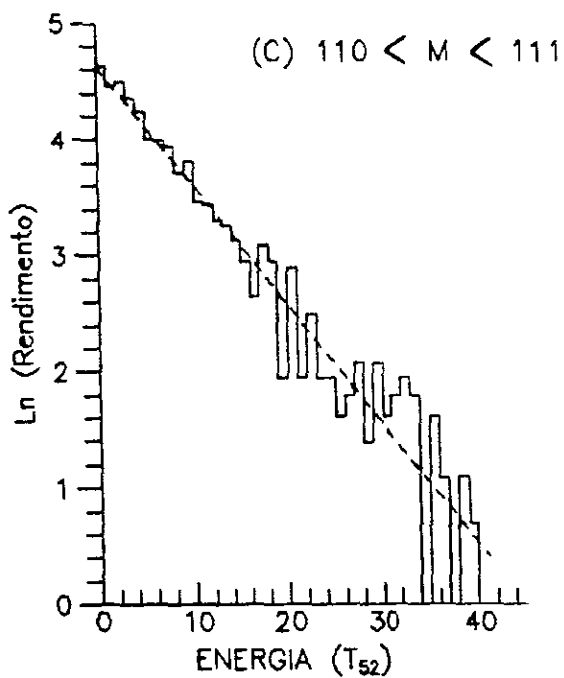
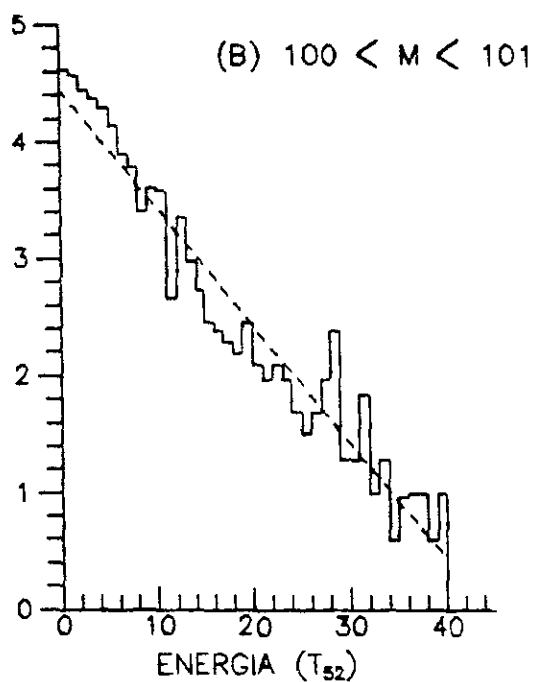
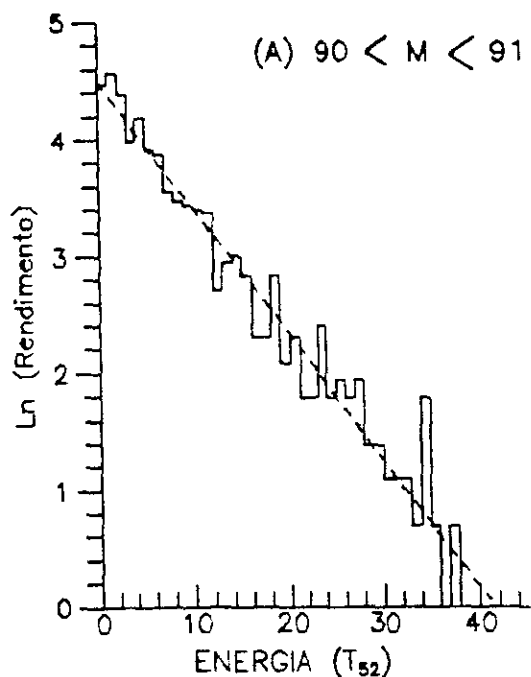


FIG 5.5 - Espectros de energia (linha s3lida) para diferentes intervalos de massa: (A) $90 < M < 91$; (B) $100 < M < 101$ e (C) $110 < M < 111$. O ajuste a uma distribui33o Maxwell-Boltzmann 33 representado pela linha tracejada.

CONCLUSÕES

De acordo com a discrepância observada entre a massa virial e a massa luminosa, propusemos uma relação linear entre massa e luminosidade contendo duas parcelas: uma dependente da luminosidade e outra não. Com o objetivo de testar tal relação, realizamos simulações dinâmicas de grupos de galáxias pelo método de Monte Carlo. Nesta simulação, o espectro de massa das galáxias segue uma lei da potência e a distribuição de multiplicidade dos grupos é obtida do catálogo observacional de Geller e Huchra. A evolução temporal é tal que, após um tempo igual a $2t_0$, os grupos se encontram virializados. Para este instante, calculamos algumas quantidades dinâmicas do sistema e as comparamos com os dados observacionais do catálogo mencionado.

A simulação dinâmica de N-corpos fornece resultados valiosos para o entendimento tanto da relação entre massa e luminosidade nas galáxias, quanto da própria discrepância entre a massa luminosa e a massa virial.

Baseado neste trabalho, podemos concluir que:

1 - Uma lei da potência $\phi(M) \propto M^{-\tau}$, com $\tau = 2.8$ para o espectro de massa das galáxias e uma relação linear, a dois parâmetros, entre massa e luminosidade, conseguem reproduzir a distribuição de luminosidade observada.

2 - Os dados observacionais das dispersões das velocidades, são reproduzidos quando as galáxias estão distribuídas, segundo a lei da potência, numa faixa compreendida entre:

$$10.9 < M < 9.0] 10^{12} M_{\odot}$$

Esta faixa de massa é totalmente compatível com a encontrada por vários outros autores.

3 - Com os valores de α e β que encontramos, a discrepância entre a massa virial e a massa luminosa pode ser completamente entendida. Com efeito, como a luminosidade varia de 0.05 a $50 10^{10} L_{\odot}$, então a massa não luminosa, que explica a discrepância, pode ser até duas ordens de grandeza maior que a massa luminosa, tal como nos dados observacionais que mostramos.

4 - Os espectros de energia mostram um comportamento de Maxwell-Boltzmann, típico de sistemas termalizados.

Seria interessante, apesar das dificuldades de tempo de computação, estender este modelo para a simulação de aglomerados de galáxias.

APÊNDICE A

O MÉTODO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo (von Neumann e Ulam, 1948) é um método de cálculo numérico usado, particularmente, quando se deseja simular problemas estatísticos. Sua utilização vem crescendo a partir do advento dos computadores eletrônicos e, nos últimos anos, tornou-se uma importante ferramenta de cálculo, especialmente nos casos onde uma solução analítica é impossível de ser obtida.

A idéia básica deste método é fazer uma simulação do problema real por um modelo estocástico. Nesta simulação, as variáveis que seguem determinadas distribuições, são sorteadas aleatoriamente dentro de suas respectivas distribuições, com a ajuda de números aleatórios. A partir destes sorteios, a simulação é efetuada e obtem-se um resultado. O método consiste em efetuar um grande número de repetições do problema com diferentes valores para os números aleatórios. O resultado de cada repetição é guardado e, no fim de todas as repetições, uma análise estatística é tomada sobre todos os resultados.

A maior vantagem deste método é a facilidade de tratar problemas que, por outros métodos, seriam muito difíceis de serem tratados. A desvantagem é o número quase sempre elevado

de repetições implicando num tempo muito grande de cálculo computacional.

A-1) NÚMEROS ALEATÓRIOS

O conceito de números aleatórios desempenha um papel importante na aplicação do método de Monte Carlo. A fim de entendermos este conceito, vamos supor que tenhamos N números no intervalo, $(0,1)$ e que a e b sejam dois pontos quaisquer deste intervalo, de forma tal que, $0 \leq a \leq b \leq 1$. Logo, se tivermos aproximadamente $N(b-a)$ números no intervalo (a,b) , os N números estarão distribuídos uniformemente no intervalo $(0,1)$. Isto significa que a densidade linear de números neste intervalo é uniforme. Com isso, os N números são chamados de números ou variáveis aleatórias de uma distribuição uniforme.

Sobre os números aleatórios, devemos chamar a atenção para o fato de que praticamente todas as aplicações do método de Monte-Carlo necessitam de uma quantidade enorme de números aleatórios, e um pré-requisito, é que tais números possam ser obtidos rapidamente. Os métodos matemáticos para a obtenção de números aleatórios, são um pouco imprecisos, pois não podemos provar que tais números gerados sejam de fato aleatórios. O que podemos, é obter uma série finita de números que é periódica a partir de um certo intervalo. Entretanto, se este período for grande o suficiente para que a estatística requerida seja satisfeita, então podemos usar estes números como sendo aleatórios.

A-2) SORTEIO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS OBEDECENDO A UMA DISTRIBUIÇÃO QUALQUER.

A fim de sortear uma variável aleatória ν , em um intervalo (a,b) , com densidade de probabilidade $p(x)$, onde x é uma variável qualquer deste intervalo, resolvemos a seguinte equação:

$$\int_a^{\nu} p(x) dx = \zeta, \quad (A.1)$$

onde ζ é uma variável aleatória de uma distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$ e $p(x)$ é contínua e normalizada em (a,b) .

Para demonstrar que tal procedimento é correto, tomamos,

$$y(x) = \int_a^x p(x') dx'.$$

Como, $p(x') > 0$ e $\int_a^b p(x') dx' = 1$, então:

$$y(a)=0, \quad y(b)=1 \quad \text{e} \quad y'(x)=p(x) > 0$$

Assim, $y(x)$ é uma função monotonicamente crescente no intervalo (a,b) , implicando que à qualquer valor $y = \zeta$ no intervalo $(0,1)$ corresponde um único valor de $x = \nu$ que será solução única da equação (A.1). Então, se considerarmos um intervalo (a',b') contido no intervalo (a,b) , a qualquer ponto x , pertencente a (a',b') , corresponde um ponto $y = y(x)$ no intervalo, $y(a') < y < y(b')$. Com isso, ν assumirá um valor no intervalo (a',b') se, e somente se, ζ estiver entre, $y(a')$ e $y(b')$.

Logo, se P é a probabilidade de encontrar uma variável em um dado intervalo, então, $P[a' < \nu < b'] = P[y(a') < \zeta < y(b')]$. Sendo ζ uniforme, obtemos,

$$P[y(a') < \zeta < y(b')] = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x) dx .$$

Então,

$$P[a' < \nu < b'] = \int_{a'}^{b'} p(x) dx .$$

O que mostra que a função $p(x)$, que aparece na integral acima, é justamente, a densidade de probabilidade da variável aleatória ν , como na eq.(A.1). Portanto, podemos obter um valor aleatório de uma distribuição qualquer, resolvendo tal equação.

Um exemplo, onde usamos tal procedimento, foi quando sorteamos as massas das galáxias. Neste caso, sorteamos um valor aleatório no intervalo $(0,1)$ de uma distribuição uniforme $\zeta(M)$, em que $\zeta(M)$ é dada pela seguinte integral,

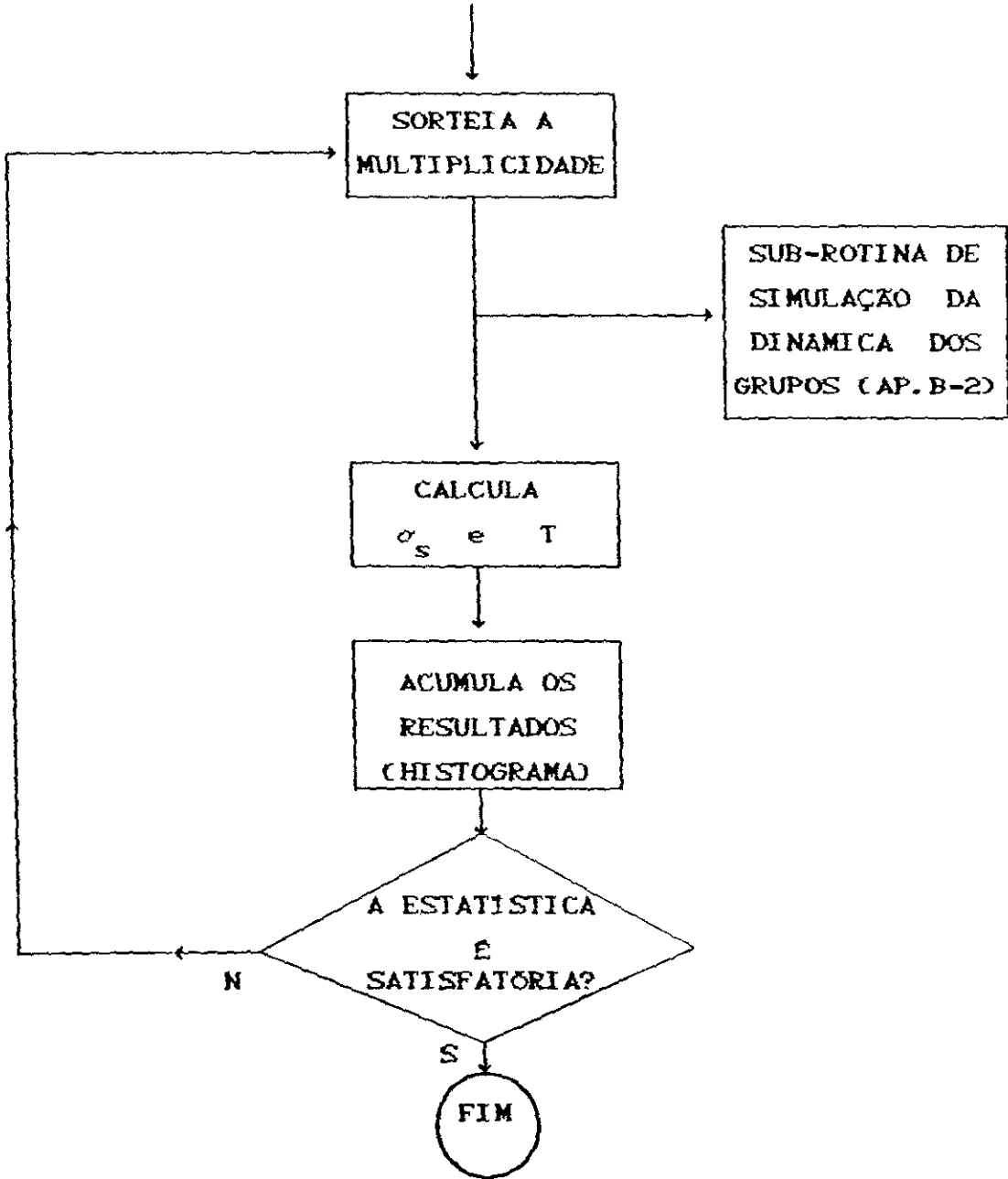
$$\zeta(M) = \int_{M_0}^M M^{-T} dM .$$

Com isso, o sorteio seguindo uma distribuição uniforme em $\zeta(m)$ corresponde a um sorteio nas massas, que segue uma distribuição do tipo, $\phi(M) \propto M^{-T}$.

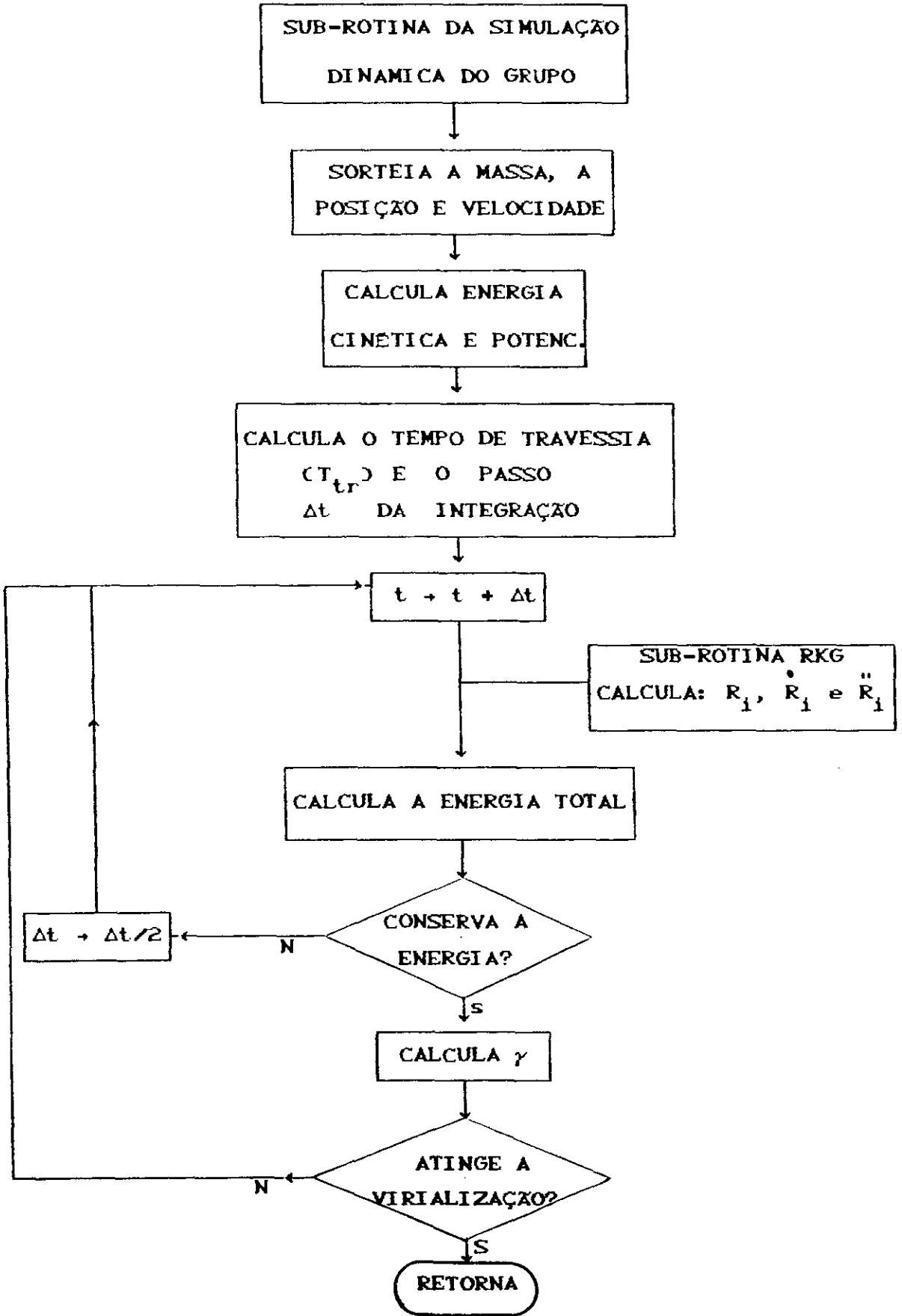
APÊNDICE B

DIAGRAMA DO CÁLCULO COMPUTACIONAL

B-1) DIAGRAMA PRINCIPAL



B-2) DIAGRAMA DA SIMULAÇÃO DINAMICA DO GRUPO



R E F E R Ê N C I A S

- Aarseth, S.J., *Astrophys. J.*, 126 , 223 (1963).
- Aarseth, S.J. e Saslaw, W.C., *Astrophys. J.*, 172 , 17 (1972).
- Abell, G., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 3 , 1 (1962).
- Bahcall, J.N. e Tremaine, S., *Astrophys. J.*, 244 , 805 (1981).
- Bahcall, J.N., *Astrophys. J.*, 267 , 52 (1983).
- Cavaliere, A., Danese, L. e De Zotti, G., *Astrophys. J.*, 221,
399 (1978).
- Chandrasekhar, S., *Principles of Stellar Dynamics*, Chicago,
cap. V (1942).
- Cowsik, R. e Ghosh, P., *Astrophys. J.*, 317 , 26 (1987).
- Cowsik, R. e McClelland, J., *Phys. Rev. Lett.*, 29, 669 (1972).
- de Vaucouleurs, G., *Galaxies and the Universe*, ed. A. Sandage;
M. Sandage e J. Khistian, p.553 (1975).
- Dicke, R.H. e Peebles, P.J.E., *Astrophys. J.*, 194, 838 (1968).
- Dickel, J.R. e Rood, H.J., *Astrophys. J.*, 223, 391 (1978a).
- Dickel, J.R. e Rood, H.J., *Astrophys. J.*, 224, 724 (1978b).
- Doroshkevith, A.G., *Astrofisika*, 6, 581 (1970).
- Doroshkevith, A. G., Sunyaev, R. A. e Zel'dovich, Ya. B.,
Proc. IAU Symposium 63, ed. M.S.Longair, pág.213 (1973).
- Felten, J.E., *Comments Astrophys.*, 11, 53 (1985).
- Field, G.B. e Saslaw, W.C., *Astrophys. J.*, 170, 199 (1971).
- Geller, M.J., *Clusters and Groups of Galaxies*, ed.
F.Mardirossian; G.Giuricin e M.Mezzetti, pág.353 (1984).
- Geller, M.J. e Huchra J.P., *Astrophys.J. Suppl.*, 52, 61 (1983).

- Geller, M.J. e Peebles, P.J.E., *Astrophys. J.*, 184, 329 (1973).
- Giuricin, G.; Mardirossian, F.; Mezzetti, M. e Santangelo, P.,
Astrophys. J., 277, 38 (1984).
- Gott, J.R. e Turner, E.L., *Astrophys. J.*, 213, 309 (1977).
- Gott, J.R.; Wrixon, G.T. e Wannier, P., *Astrophys. J.* 186,
777 (1973).
- Hartwick, F.D.A., *Astrophys. J.*, 219, 345 (1978).
- Heisler, J.; Tremaine, S. e Bahcall, J.N., *Astrophys. J.*, 298,
8 (1985).
- Hubble, E.P., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15, 168 (1927).
- Huchra, J.P. e Geller, M.J., *Astrophys. J.*, 257, 423 (1982).
- Hüfner, J. e Mukhopadhyay, D., *Phys. Lett.B*, 173, 373 (1986).
- Maia, M.A.G.; da Costa, L.N. e Latham, D.N., *Astrophys. J.*
Suppl., 69, 809 (1989).
- Oemler, A., *Astrophys. J.*, 194, 1 (1974).
- Ogorodnikov, K.F., *Dynamics of Stellar Systems*, Oxford:
Pergamon, pag.254 (1965).
- Page, T., *Astrophys. J.*, 116, 63 (1952).
- Peebles, P.J.E., *Astron. J.*, 75, 13 (1970).
- Peebles, P.J.E., *Physical Cosmology*, ed. Princeton University,
cap.IV (1971).
- Rana, N.C., *Astron. Astrophys.*, 184, 604 (1987).
- Rood, H.J.; Rothman, V.C.A. e Turnrose, B.E., *Astrophys. J.*
162, 41 (1970).
- Sandage, A., *Phys. Today*, vol. 23, n.2, pag.34 (1970).
- Sandage, A., *Astrophys. J.*, 202, 563 (1975).
- Sato, H., *Progr. Theor. Phys.*, 45, 370 (1971).

- Schechter, P., *Astrophys. J.*, 203, 297 (1976).
- Shapiro, S.L., *Astron. J.*, 76, 291 (1971).
- Turner, E.L. e Gott, J.R., *Astrophys. J. Supp. Series*, 32, 409 (1976a).
- Turner, E.L. e Gott, J.R., *Astrophys. J.*, 209, 6 (1976b).
- Turner, E.L.; Gott, J.R. e Aarseth, S.J., *Astrophys. J.*, 228, 664 (1979a).
- Turner, E.L.; Gott, J.R.; Aarseth, S.J.; Blanchard, N.T. e Mathieu R.D., *Astrophys. J.*, 228, 684 (1979b).
- van den Berg, S., *Zs. f. Astrophys.*, 55, 21 (1962).
- von Neumann e Ulam, S., *J. Amer. Statistical Association*, 44, 335 (1949).
- von Weizsäcker, C.F., *Astrophys. J.*, 114, 165 (1951).
- Zel'dovith, Ya.B. e Novikov, I.D., *Relativistic Astrophysics*, ed. G.Steigman, vol.2, caps:I e III (1975).
- Zel'dovith, Ya.B. e Sunyaev, R.A., *Astron. Astrophys.* 20, 189 (1972).
- Zwicky, F., *Helvetia Phys. Acta*, 6, 110 (1933).