EDISOM DE SOUZA MOREIRA JUNIOR

TEORIAS DE TÉTRADA DA GRAVITAÇÃO E O ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO ENTRE OS CAMPOS GRAVITACIONAL E ELETROMAGNÉTICO

TESE DE

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1989 -

Aos meus Velhos.

AGRADECIMENTOS

Muita gente nos ajudou a fazer este trabalho. Na pessoa de José Martins Salim, nosso orientador:

MINHA GENTE, VALEU A FORÇA !

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o acoplamento não mínimo entre os campos gravitacional e eletromagnético, nas teorias de tétrada da gravitação covariantes frente às transformações de Lorentz globais da tétrada. Efetuamos o acoplamento, adicionando à densidade de lagrangeana da teoria da relatividade geral, densidades de lagrangeana de interação não mínimas, que são invariantes apenas frente às transformações de Lorentz globais da tétrada. Fazemos um estudo detalhado de um dos acoplamentos propostos, o qual aparece de uma forma bem natural e não envolve constantes de acoplamento. Apresentamos a solução estática e esfericamente simétrica das equações de movimento resultantes deste particular acoplamento, encontrando que estas diferem de forma significativa da de Reissner-Nordström apenas para raios comparáveis aos de Schwarzschild ou de Reissner-Nordström.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

página

INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade geral, embora seja a teoria clássica da gravitação mais aceitável, apresenta segundo muitos autores "arestas não polidas" [1,2]. Devido a este fato, diversas teorias alternativas têm sido propostas, dentre as quais encontram-se as teorias de tétrada da gravitação covariantes frente às transformações de Lorentz globais da tétrada [2,3,4,5].

Nestas teorias, os potenciais gravitacionais são quatro campos vetoriais ortonormais: a tétrada. O campo gravitacional se manifesta através da não integrabilidade da tétrada, sendo este aspecto análogo àquele que ocorre na eletrodinâmica de Maxwell, onde o campo eletromagnético se manifesta mediante a não integrabilidade do potencial eletromagnético. Estas teorias de certa forma generalizam o conceito de referencial inercial: quando o campo gravitacional é desativado, a tétrada torna-se integrável, transformando-se no referencial inercial da teoria da relatividade especial. Esta generalização nos leva a supor que os observáveis devam se referir à tétrada que descreve o campo gravitacional [6]. Esta é basicamente a motivação para o nosso trabalho.

Nossa contribuição[1] ao estudo das teorias de tétrada da gravitação encontra-se principalmente na seguinte forma de acoplamento não mínimo entre os campos gravitacional e eletromagnético: na presença do campo gravitacional, a tétrada define em cada ponto do espaço-tempo um sistema de "coordenadas" não holônomo de Minkowski [6]. Tomaremos as expressões do "potencial eletromagnético" e de suas "derivadas", quando referidos a este sistema de "coordenadas", utilizando o método descrito por SCHOUTEN [7] para sistemas de coordenadas não holônomos. Por este procedimento, somos levados a uma densidade de lagrangeana não mínima, onde as dezesseis componentes da tétrada são variáveis dinâmicas. Quando o rotacional da tétrada é nulo (o que ocorre aproximadamente quando o campo gravitacional é **muito fraco**), ou o que é equivalente, quando a tétrada é integrável, a densidade de lagrangeana não mínima torna-se aquela da teoria da relatividade especial.

O trabalho tem a seguinte orientação:

No capítulo I, definimos, a partir da tétrada, os objetos geométricos necessários para tratarmos as teorias de tétrada da gravitação. Apresentamos suas leis de transformação e suas propriedades frente às transformações de Lorentz da tétrada.

No capítulo II, apresentamos a forma geral da densidade de lagrangeana gravitacional. Dividimos as interações do campo gravitacional com outros sistemas físicos em dois

(1) A ser submetida a publicação.

tipos, segundo a densidade de lagrangeana de interação dependa ou não da tétrada através do tensor métrico. Obtemos as equações de movimento e mostramos que a relatividade geral é uma teoria de tétrada da gravitação covariante frente às transformações de Lorentz locais da tétrada.

No capítulo III, tratamos o acoplamento entre os campos gravitacional e eletromagnético. Apresentamos algumas possíveis densidades de lagrangeana não mínimas e, para duas destas, as equações de movimento. O acoplamento não mínimo descrito àcima é estudado em detalhes.

No capítulo IV, obtemos os coeficientes dos termos da densidade de lagrangeana gravitacional, para os quais as equações de movimento do campo gravitacional livre apresentem a solução de Schwarzschild. Resolvemos as equações do acoplamento não mínimo descrito àcima para o caso estático e esfericamente simétrico, apresentando a análise da solução e, finalmente, nossas conclusões.

No apêndice A, deduzimos as identidades (2.3-17). No apêndice B, mostramos como chegar às expressões dos tensores $K^{\mu\nu}_{(i)}$ (2.3-10). No apêndice C, mostramos que o sistema (4.2-10) não é sobredeterminado. No apêndice D, apresentamos como chegamos às soluções do sistema de equações (4.2-16).

CAPÍTULO I

FORMALISMO DE TÉTRADA

Neste capítulo apresentaremos o instrumental matemático necessário para formularmos teorias de tétrada da gravitação.

Comecemos considerando um espaço, cujas únicas propriedades geométricas supostas a princípio são aquelas que caracterizam uma variedade 4-dimensional diferencial: A_4. **Não há métrica ou conexão afim predefinidas.**

1.1- A TÉTRADA

Tomemos na variedade A_4 um sistema de coordenadas arbitrário (x^μ) e quatro campos de covetores linearmente independentes (tétrada): $e^A{}_\mu(x)$. O índice latino distingue os covetores e o grego refere-se às componentes em relação ao sistema de coordenadas. Ambos os índices variam de 0 a 3. Temos portanto dezesseis graus de liberdade.

Como os $e^A{}_\mu(x)$ são linearmente independentes, temos da teoria das equações lineares que o determinante

$$e := \det e^{A}{}_{\mu} \qquad (1.1\text{-}1)$$

é diferente de zero [8]. Assim podemos definir outras dezesseis variáveis $e_{A}{}^{\mu}(x)$ através das equações:

$$e^{A}{}_{\mu}\, e_{B}{}^{\mu} = \delta^{A}{}_{B} \; . \qquad (1.1\text{-}2)$$

Multiplicando (1.1-2) por $e_{A}{}^{\nu}(x)$, obtemos:

$$e^{A}{}_{\mu}\, e_{A}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} \; . \qquad (1.1\text{-}3)$$

Notemos das equações (1.1-2) que os campos $e_{A}{}^{\mu}(x)$ são contravetores.

Tomando a matriz de Minkowski:

$$\eta_{AB} = \eta^{AB} := \text{diag.}\ (1, -1, -1, -1) \; , \qquad (1.1\text{-}4)$$

definamos as seguintes variáveis:

$$e_{A\mu} := \eta_{AB}\, e^{B}{}_{\mu} \; , \qquad (1.1\text{-}5)$$

e

$$e^{A\mu} := \eta^{AB}\, e_{B}{}^{\mu} \; . \qquad (1.1\text{-}6)$$

Multiplicando (1.1-5) por η^{AC} e (1.1-6) por η_{AC}, obtemos as relações inversas:

$$e^{B}{}_{\mu} = \eta^{BA}\, e_{A\mu} \qquad (1.1\text{-}7)$$

e

$$e_B{}^{\mu} = \eta_{BA}\, e^{A\mu} \; . \qquad (1.1\text{-}8)$$

Das quatro últimas expressões, vemos que os índices latinos são erguidos e abaixados pela matriz de Minkowski[2] .

1.2- TENSOR DE NÃO HOLONOMIA

Consideremos o seguinte diferencial que pode não ser exato (o traço no d indica este fato):

$$đx^{A} := e^{A}{}_{\mu}(x)\, dx^{\mu} \; . \qquad (1.2\text{-}1)$$

A condição necessária e suficiente para que dx^A seja exato, isto é, para que as equações

$$e^{A}{}_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{A}}{\partial x^{\mu}} \qquad (1.2\text{-}2)$$

sejam integráveis, é que o rotacional da tétrada

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{A} := e^{A}{}_{\mu,\nu} - e^{A}{}_{\nu,\mu} \qquad (1.2\text{-}3)$$

seja nulo. Neste caso, integrando as equações (1.2-2), obtemos:

$$x^{A} = x^{A}(x^{\mu}) \; . \qquad (1.2\text{-}4)$$

---

(2) Em todo o texto, η^{AB} (η_{AB}) ergue (abaixa) índices latinos.

$\{x^A\}$ é denominado sistema de coordenadas holônomo [7] associado à tétrada $e^A{}_\mu(x)$.

Se o rotacional é diferente de zero, não podemos integrar as equações (1.2-2) para obter x^A (1.2-4) e, portanto, a rigor, estas coordenadas não existem na variedade A_4 em que a tétrada é definida. Contudo, podemos considerar que a expressão (1.2-1) seja válida localmente, e imaginar que $\{x^A\}$ seja um "sistema de coordenadas", denominado não holônomo, definido em um espaço tangente local [6,7].

Quando o rotacional da tétrada é nulo, ou de forma equivalente, quando o tensor de não holonomia [7]

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} := \Lambda_{\mu\nu}{}^{A}\, e_A{}^{\alpha} \qquad (1.2\text{-}5)$$

é nulo, o espaço tangente sobrepõe-se à variedade A_4, fazendo com que os índices latinos adquiram a natureza dos índices gregos, isto é de verdadeiras coordenadas, como podemos ver da expressão (1.2-4).

O tensor de não holonomia (1.2-5) desempenha papel fundamental nas teorias de tétrada da gravitação, como veremos no próximo capítulo.

No sistema de coordenadas holônomo associado à tétrada, quando este existe, temos das equações (1.2-2):

$$e^A{}_\mu = \delta^A{}_\mu \, . \qquad (1.2\text{-}6)$$

1.3- OUTROS OBJETOS GEOMÉTRICOS

A partir da tétrada, podemos definir objetos geométricos característicos de duas geometrias afins distintas, as quais coexistem relacionadas na variedade A_4.

Com efeito, podemos obter os objetos geométricos da geometria métrica-afim Riemanniana, definindo o tensor métrico por:

$$g_{\mu\nu} := e^{A}{}_{\mu}\, e_{A\nu} \tag{1.3-1}$$

cujo inverso é:

$$g^{\mu\nu} = e_{A}{}^{\mu}\, e^{A\nu} \,. \tag{1.3-2}$$

Das duas últimas expressões e daquelas consideradas na seção 1.1, vemos que os índices gregos são erguidos (abaixados) pelo tensor métrico $g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu})$[3] .

Da definição do tensor métrico covariante (1.3-1), utilizando as expressões (1.1-1), (1.1-4) e (1.1-5), obtemos:

$$g := \det g_{\mu\nu} = - e^{2} \,, \tag{1.3-3}$$

ou:

$$|e| = \sqrt{-g} \,, \tag{1.3-4}$$

---

(3) Em todo o texto, $g^{\mu\nu}$ $(g_{\mu\nu})$ ergue (abaixa) índices gregos.

que é uma densidade escalar de peso um, frente às transformações gerais de coordenadas [9].

Quando o tensor de não holonomia é nulo, vemos da igualdade (1.2-6) e da definição do tensor métrico (1.3-1) que no sistema de coordenadas holônomo associado à tétrada

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} , \qquad (1.3\text{-}5)$$

em todo o espaço, o que o caracteriza como sendo um sistema de coordenadas holônomo de Minkowski. Portanto, o fato:

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} = 0 \qquad (1.3\text{-}6)$$

é condição suficiente para que a variedade A_4 seja chata, mas não necessária, como veremos na próxima seção.

Podemos interpretar os resultados do último parágrafo do seguinte modo: consideremos que o espaço tangente local tenha a métrica de Minkowski η_{AB}, sendo por isso denominado espaço tangente de Minkowski [6]. Quando o tensor de não holonomia é nulo, este espaço coincide com aquele em que a tétrada é definida, resultando a igualdade (1.3-5).

Uma vez que temos o tensor métrico, podemos considerar os demais objetos geométricos da geometria Riemanniana.

A afinidade simétrica de Levi-Civita, definida por

$$\left\{ {\rho \atop \mu\ \nu} \right\} := \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} \left[g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right] , \qquad (1.3\text{-}7)$$

pode ser expressa, usando a definição (1.3-1), como:

$$\left\{ {\rho \atop \mu\ \nu} \right\} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \,, \tag{1.3-8}$$

onde

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} := e_{A}{}^{\rho} e^{A}{}_{\mu,\nu} \tag{1.3.9}$$

é uma afinidade não simétrica e

$$\gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left[\Lambda_{\mu\nu}{}^{\rho} - \Lambda^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Lambda^{\rho}{}_{\nu\mu} \right] \tag{1.3-10}$$

um tensor anti-simétrico nos dois primeiros índices, da mesma forma que o tensor de não holonomia $\Lambda_{\mu\nu}{}^{\rho}$.

A afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ caracteriza a outra geometria afim, a qual consideraremos adiante.

Da igualdade (1.3-8), e usando a definição (1.3-9), obtemos:

$$\gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = e_{A}{}^{\rho} e^{A}{}_{\mu;\nu} \,, \tag{1.3-11}$$

onde $e^{A}{}_{\mu;\nu}$ é a derivada covariante da tétrada formada com a afinidade de Levi-Civita[4] :

$$e^{A}{}_{\mu;\nu} := e^{A}{}_{\mu,\nu} - \left\{ {\alpha \atop \mu\ \nu} \right\} e^{A}{}_{\alpha} \,. \tag{1.3-12}$$

---

(4) Em todo o texto, utilizamos ponto e vírgula (;) para indicar derivadas covariantes formadas com afinidade $\left\{ {\rho \atop \mu\ \nu} \right\}$.

Usando a definição do tensor de não holonomia (1.2-5) e a definição da afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ (1.3-9), encontramos:

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} , \qquad (1.3\text{-}13)$$

isto é, o tensor de não holonomia é proporcional à parte anti-simétrica da afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$.

Levando em conta que a afinidade de Levi-Civita é simétrica, obtemos das igualdades (1.3-8) e (1.3-13):

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} . \qquad (1.3\text{-}14)$$

Desta última e da definição (1.3-10), vemos que:

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0 . \qquad (1.3\text{-}15)$$

Da definição do tensor métrico (1.3-1), usando a igualdade (1.3-11) e o fato do tensor $\gamma_{\alpha\mu\nu}$ ser anti-simétrico nos dois primeiros índices, obtemos a identidade:

$$g_{\mu\nu;\alpha} \equiv 0 , \qquad (1.3\text{-}16)$$

que caracteriza a afinidade de Levi-Civita como sendo métrica.

Vamos tratar agora a geometria afim, cuja afinidade é definida em (1.3-9). Consideremos a derivada covariante da tétrada formada com esta afinidade[5] :

$$e^{A}{}_{\mu|\alpha} := e^{A}{}_{\mu,\alpha} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\, e^{A}{}_{\sigma} \,. \qquad (1.3\text{-}17)$$

Da definição de $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}$ (1.3-9). obtemos a identidade:

$$e^{A}{}_{\mu|\alpha} \equiv 0 \,, \qquad (1.3\text{-}18)$$

mostrando que a tétrada é paralela em todo o espaço. Portanto, o transporte paralelo independe do trajeto tomado para efetuá-lo ($\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ é integrável), tendo sentido falarmos em paralelismo à distância (teleparalelismo). Dois vetores distantes são ditos paralelos, quando os dois coincidem após o transporte paralelo de um deles até o ponto de definição do outro, ou de forma equivalente, quando suas componentes relativas à tétrada são iguais. Um espaço com a afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ (1.3-9) é conhecido na literatura como espaço de Weitzenböck [10].

Da definição do tensor métrico (1.3-1) e da identidade (1.3-18) vemos que a afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ também é métrica:

$$g_{\mu\nu|\alpha} \equiv 0 \,. \qquad (1.3\text{-}19)$$

Como a afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ é integrável, o tensor de curvatura formado com a mesma é identicamente nulo:

---

(5) Em todo o texto, utilizamos uma barra ($|$) para indicar derivadas covariantes formadas com a afinidade $\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}$.

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) \equiv 0 . \qquad (1.3\text{-}20)$$

Já o tensor de curvatura formado com a afinidade de Levi-Civita (tensor de Riemann-Christoffel):

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}(\{\ \}) := \left\{ {\rho \atop \sigma\ \mu} \right\}_{,\nu} - \left\{ {\rho \atop \sigma\ \nu} \right\}_{,\mu} - \left\{ {\rho \atop \lambda\ \mu} \right\} \left\{ {\lambda \atop \sigma\ \nu} \right\} + \left\{ {\rho \atop \lambda\ \nu} \right\} \left\{ {\lambda \atop \sigma\ \mu} \right\}$$

$$= \gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu;\mu} - \gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu;\nu} + \gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu} , \qquad (1.3\text{-}21)$$

onde usamos (1.3-8) e (1.3-20) para obtermos a igualdade, não é identicamente nulo ($\left\{ {\alpha \atop \mu\ \nu} \right\}$ não é integrável).

Da igualdade em (1.3-21), obtemos a seguinte expressão para o tensor de Ricci:

$$R_{\sigma\nu}(\{\ \}) = \gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu;\rho} - \phi_{\sigma;\nu} + \phi_{\lambda}\gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} - \gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho} , \qquad (1.3\text{-}22)$$

onde o covetor ϕ_{σ} é definido por:

$$\phi_{\sigma} := \Lambda_{\sigma\alpha}{}^{\alpha} \equiv \gamma^{\alpha}{}_{\sigma\alpha} . \qquad (1.3\text{-}23)$$

A identidade acima segue da igualdade (1.3-14) e do fato de $\gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}$ ser anti-simétrico nos dois primeiros índices.

De (1.3-22) obtemos para o escalar de curvatura:

$$R(\{\ \}) = -2\phi^{\sigma}{}_{;\sigma} - \phi^{\mu}\phi_{\mu} + \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu\alpha}\Lambda^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}\Lambda_{\mu\nu\alpha}\Lambda^{\alpha\nu\mu}, \qquad (1.3\text{-}24)$$

onde usamos a definição (1.3-10). Notemos que o primeiro termo desta igualdade multiplicado pelo módulo do determinante da tétrada (1.3-4) resulta uma divergência:

$$\phi^{\sigma}{}_{;\sigma}|e| = (\phi^{\sigma}|e|)_{,\sigma} . \qquad (1.3\text{-}25)$$

Este fato é importante para identificarmos a relatividade geral como uma teoria de tétrada da gravitação, conforme veremos no capítulo II.

1.4- TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Até o momento, consideramos apenas transformações de coordenadas na variedade A_4. Nesta seção consideraremos transformações da tétrada, ou seja, transformações de "coordenadas" no espaço tangente de Minkowski.

Efetuemos uma transformação da tétrada do tipo:

$$e^{A}{}_{\mu} \longrightarrow \bar{e}^{A}{}_{\mu} = \mathbb{L}^{A}{}_{B}\, e^{B}{}_{\mu} , \qquad (1.4\text{-}1)$$

onde a matriz $\mathbb{L}^{A}{}_{B}$ satisfaz a identidade:

$$\mathbb{L}^{A}{}_{C}\, \mathbb{L}^{B}{}_{D}\, \eta_{AB} \equiv \eta_{CD} , \qquad (1.4\text{-}2)$$

podendo ser função do ponto (local), ou não (global). Tal transformação é denominada transformação de Lorentz.

De (1.4-2), resulta que:

$$(\mathbb{L}^{-1})^{A}{}_{B} = \eta_{BC}\, \eta^{AD}\, \mathbb{L}^{C}{}_{D} , \qquad (1.4\text{-}3)$$

onde $(\mathbb{L}^{-1})^{A}{}_{B}$ é a matriz de Lorentz inversa:

$$(\mathbb{L}^{-1})^{A}{}_{B}\,\mathbb{L}^{B}{}_{C} = \delta^{A}{}_{C}\;. \tag{1.4-4}$$

Das expressões acima, temos que o tensor métrico, definido em (1.3-1), é invariante frente as transformações de Lorentz:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tag{1.4-5}$$

Conseqüentemente, todos os objetos geométricos da geometria Riemanniana, considerados na última seção, são também invariantes frente a estas transformações, uma vez que os mesmos são definidos a partir do tensor métrico.

A afinidade $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, por sua vez, transforma-se do seguinte modo:

$$\bar{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + e_{C}{}^{\rho}e^{D}{}_{\mu}(\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A}\,\mathbb{L}^{A}{}_{D,\nu}\;, \tag{1.4-6}$$

sendo, portanto, invariante somente frente às transformações de Lorentz globais:

$$\mathbb{L}^{A}{}_{D,\nu} = 0\;. \tag{1.4-7}$$

Da igualdade (1.3-13) e de (1.4-6), obtemos que o tensor de não holonomia transforma-se como:

$$\bar{\Lambda}_{\mu\nu}{}^{\rho} = \Lambda_{\mu\nu}{}^{\rho} + e_{C}{}^{\rho}(\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A}(e^{D}{}_{\mu}\mathbb{L}^{A}{}_{D,\nu} - e^{D}{}_{\nu}\mathbb{L}^{A}{}_{D,\mu})\;. \tag{1.4-8}$$

Assim, o tensor de não holonomia é invariante somente frente ao subgrupo que satisfaz a identidade:

$$e^{B}{}_{\mu}\, \mathbb{L}^{A}{}_{B,\nu} - e^{B}{}_{\nu}\, \mathbb{L}^{A}{}_{B,\mu} \equiv 0 \,, \tag{1.4-9}$$

ao qual as transformações globais (1.4-7) pertencem.

Na seção 1.3, mostramos que o fato do tensor de não holomonia ser nulo, é condição suficiente para que a variedade A_4 seja chata:

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} = 0 \rightarrow R^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma}(\{\ \}) = 0 \,. \tag{1.4-10}$$

Mostraremos, agora, que este fato não é condição necessária:

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma}(\{\ \}) = 0 \not\rightarrow \Lambda^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{1.4-11}$$

Suponhamos que, para uma dada tétrada, o tensor de não holomonia seja nulo. Portanto, de (1.4-10), o tensor de Riemann-Christoffel também é nulo. Efetuando uma transformação de Lorentz local $\mathbb{L}^{A}{}_{B}(x)$, o tensor de Riemann-Christoffel permanece nulo, já que é invariante frente a esta transformação. Mas o objeto de não holonomia pode tornar-se diferente de zero, como podemos ver de (1.4-8). Para isto, basta que a transformação em questão não satisfaça a identidade (1.4-9).

O exposto acima demonstra a validade de (1.4-11). Entretanto, sempre que o tensor de Riemann-Christoffel é nulo, podemos encontrar uma transformação de Lorentz local que anule o tensor de não holonomia, conforme mostraremos a seguir:

Quando o tensor de Riemann-Christoffel é nulo, podemos encontrar um sistema de coordenadas $\{x^{\mu}\}$ (sistema de coordenadas de Minkowski) no qual

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} , \tag{1.4-12}$$

em toda a variedade A_4. Portanto, de (1.3-1) temos:

$$\eta_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} e'^{A}{}_{\alpha} \right) \left(\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} e'^{B}{}_{\beta} \right) \eta_{AB} , \tag{1.4-13}$$

onde $e'^{A}{}_{\mu}$ são as componentes da tétrada em um sistema de coordenadas arbitrário $\{x'^{\mu}\}$. Desta igualdade, vemos que podemos efetuar uma transformação de Lorentz:

$$\bar{e}'^{A}{}_{\mu} = \mathbb{L}^{A}{}_{B} e'^{B}{}_{\mu} , \tag{1.4-14}$$

cuja matriz de Lorentz inversa seja dada por:

$$(\mathbb{L}^{-1})^{A}{}_{\mu} = e'^{A}{}_{\alpha} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \tag{1.4-15}$$

Usando (1.4-3) nesta última, resulta:

$$\mathbb{L}^{\mu}{}_{A} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} e'_{A}{}^{\beta} , \tag{1.4-16}$$

onde $e_{A}{}^{\beta}$ é definida em (1.1-2).

Substituindo as duas últimas igualdades em (1.4-6), obtemos:

$$\bar{\Gamma}'^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} . \qquad (1.4\text{-}17)$$

Usando esta igualdade em (1.3-13), vemos que esta particular transformação de Lorentz local anula o tensor de não holonomia:

$$\bar{\Lambda}'_{\mu\nu}{}^{\rho} = 0 . \qquad (1.4\text{-}18)$$

CAPÍTULO II

TEORIAS DE TÉTRADA DA GRAVITAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos teorias de tétrada da gravitação. O espaço-tempo é considerado uma variedade 4-dimensional diferenciável, onde o campo gravitacional é descrito por uma tétrada $e^A{}_\mu(x)$, em um sistema de coordenadas arbitrário $\{x^\mu\}$.

As teorias de tétrada da gravitação são covariantes frente às transformações gerais de coordenadas e diferem basicamente quanto ao grupo de covariância interno, isto é, o grupo de transformações da tétrada frente ao qual as equações de movimento são covariantes.

Nas três primeiras seções, trataremos teorias cujo grupo de covariância interno é o grupo das transformações de Lorentz globais da tétrada (em forma abreviada L.g.t.) [2,3,4,5]. Nestas teorias, o tensor de força do campo gravitacional é o tensor de não holonomia (1.2-5) que é invariante frente a estas transformações. Na presença do campo gravitacional, o tensor de não holonomia é diferente de zero e, conseqüentemente, a tétrada que descreve o campo gravitacional não tem um sistema de coordenadas holônomo de Minkowski associado (o diferencial (1.2-1) não é exato). Na ausência do campo gravitacional, o tensor de não holonomia é nulo e, portanto, temos associado à tétrada um sistema de coordenadas holônomo de Minkowski (o diferencial (1.2-1) é exato).

Na seção 2.4, faremos uma "extensão" das teorias, tratadas nas seções anteriores, impondo que o grupo de covariância interno seja o grupo das transformações de Lorentz locais da tétrada (em forma abreviada: L.ℓ.t.). Deste modo obteremos a teoria da relatividade geral de Einstein [11]. Como sabemos, nesta teoria, o tensor de força do campo gravitacional é o tensor de Riemann-Christoffel (1.3-21) que é invariante frente às transformações de L.ℓ.t.. Quando o campo gravitacional está presente, este tensor é diferente de zero e, assim, não temos qualquer sistema de coordenadas holônomo de Minkowski associado ou não à tétrada que descreve o campo gravitacional (trataremos este aspecto em maiores detalhes na seção 2.5). Na ausência do campo gravitacional, o tensor de Riemann-Christoffel é nulo e, portanto, temos sistemas de coordenadas holônomos de Minkowski.

2.1- DENSIDADE DE LAGRANGEANA GRAVITACIONAL

Seguindo o procedimento usual em teorias de campos, vamos obter as equações dinâmicas da tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$, mediante o seguinte princípio variacional:

$$\delta I_{G} := \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_{G} \left[e^{A}{}_{\mu}(x) \; ; \; e^{A}{}_{\mu,\nu}(x) \right] d^4x = 0, \qquad (2.1\text{-}1)$$

onde Ω é alguma região do espaço-tempo e $e^{A}{}_{\mu,\nu}(x)$ a derivada parcial da tétrada em relação à coordenada x^{ν}. As variações da tétrada são consideradas nulas na fronteira de Ω.

Como na presença do campo gravitacional, em geral, não existe um sistema de coordenadas privilegiado, as equações dinâmicas devem ser covariantes frente às transformações gerais de coordenadas, o que é assegurado se a ação I_G é um escalar. Neste caso, a densidade de Lagrangeana gravitacional $\mathcal{L}_G$ deve ser uma densidade escalar de peso 1, já que o elemento de volume d^4x é uma densidade escalar de peso -1. Isto sugere que $\mathcal{L}_G$ seja da forma:

$$\mathcal{L}_G = L_G \, |e| \, , \tag{2.1-2}$$

onde L_G é um escalar e $|e|$ o módulo do determinante da tétrada (1.3-4).

Para formarmos o escalar L_G, o tensor mais elementar que dispomos, envolvendo a derivada primeira da tétrada, é o seu rotacional definido em (1.2-3). Assim como estamos considerando transformações de coordenadas no espaço-tempo, também devemos considerar transformações de "coordenadas" nos espaços-tangentes de Minkowski, isto é, transformações da tétrada. Como neste trabalho estamos interessados em teorias que sejam no mínimo covariantes frente às transformações de L.g.t., ao invés de tomarmos o seu rotacional para formar L_G, tomaremos o tensor de não holonomia (1.2-5):

$$\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} := (e^{A}{}_{\mu,\nu} - e^{A}{}_{\nu,\mu}) \, e_{A}{}^{\alpha} \, , \tag{2.1-3}$$

que, como vimos na seção 1.4, é invariante frente a estas transformações.

Vimos, na seção 1.4, que o tensor métrico definido em (1.3-1) é invariante frente às transformações de L.ℓ.t.. No sentido de obtermos o escalar L_G a partir do tensor de não holonomia (1.2-5), vamos usar o tensor métrico e seu inverso (1.3-2), para "descer" e "subir" índices gregos, respectivamente.

Com efeito, encontramos três escalares quadráticos no tensor de não holonomia e invariantes frente às transformações de L.g.t.:

$$L_{(1)} := \phi^{\mu}\ \phi_{\mu}$$

$$L_{(2)} := \Lambda_{\mu\nu\alpha}\ \Lambda^{\mu\nu\alpha} \tag{2.1-4}$$

$$L_{(3)} := \Lambda_{\ \mu\nu\alpha}\ \Lambda^{\alpha\nu\mu}\ .$$

O tensor ϕ_{μ} é definido em (1.3-23).

Da igualdade (1.3-4), vemos que $|e|$ é invariante frente às transformações de L.ℓ.t. Portanto, as equações dinâmicas obtidas do princípio variacional (2.1-1), onde L_G em (2.1-2) é uma combinação linear dos escalares definidos em (2.1-4):

$$L_G = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{(i)}\ L_{(i)}, \tag{2.1-5}$$

são covariantes frente às transformações de L.g.t. e frente às transformações gerais de coordenadas.

2.2- INTERAÇÃO DO CAMPO GRAVITACIONAL COM OUTROS SISTEMAS FÍSICOS

Vamos impor que, na presença do campo gravitacional, as equações de movimento de todos os sistemas físicos sejam covariantes frente às transformações gerais de coordenadas (princípio da covariância geral). Mas para que isto ocorra, a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ que descreve cada sistema físico deve ser uma densidade escalar de peso 1 (a menos de uma divergência), o que por sua vez só é possível se $\mathcal{L}$ contem outros objetos geométricos (afinidades, por exemplo), além daqueles característicos do sistema físico em questão [8]. Vamos supor que estes outros objetos geométricos sejam formados com a variável básica do campo gravitacional: a tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$. Portanto, para obtermos as equações de movimento da tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$, devemos adicionar à densidade de lagrangeana gravitacional $\mathcal{L}_{G}$ em (2.1-1), a densidade $\mathcal{L}$.

Consideraremos que $\mathcal{L}$ seja da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{F} + \mathcal{L}_{I} , \qquad (2.2\text{-}1)$$

onde: $\mathcal{L}_{F}$ depende da tétrada apenas através do tensor métrico (1.3-1), sendo por isto invariante frente às transformações de L.ℓ.t., $\mathcal{L}_{I}$ não depende da tétrada através do tensor métrico, mas é invariante frente às transformações de L.g.t..

Assim, na presença de outros sistemas físicos, o princípio variacional (2.1-1) torna-se:

$$\delta I := \delta \int_{\Omega} (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I)\, d^4x = 0 . \qquad (2.2\text{-}2)$$

2.3- EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Nesta seção, obteremos as equações dinâmicas da tétrada $e^A{}_\mu(x)$ que resultam do princípio da mínima ação (2.2-2). Como a ação I é invariante frente às transformações de L.g.t. e frente às transformações gerais de coordenadas (I é um escalar), as equações são covariantes frente a estas transformações.

Consideremos o termo $\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_F\, d^4x$ de (2.2-2). Uma vez que $\mathcal{L}_F$ só depende da tétrada mediante o tensor métrico, e as variações $\delta g^{\mu\nu}$ são nulas na fronteira de Ω, temos a seguinte igualdade:

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_F\, d^4x = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{L}_F}{\delta g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu}\, d^4x , \qquad (2.3\text{-}1)$$

onde

$$\frac{\delta \mathcal{L}_F}{\delta g^{\mu\nu}} := \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} \qquad (2.3\text{-}2)$$

é a derivada variacional de $\mathcal{L}_F$ com relação a $g^{\mu\nu}$. Definindo o tensor simétrico

$$T_{\mu\nu} := \frac{2}{|e|}\ \frac{\delta \mathscr{L}_F}{\delta g^{\mu\nu}}\ , \tag{2.3-3}$$

a igualdade (2.3-1) torna-se:

$$\delta \int_\Omega \mathscr{L}_F\ d^4x = \int_\Omega \frac{1}{2}\ T_{\mu\nu}\ |e|\ \delta g^{\mu\nu}\ d^4x\ . \tag{2.3-4}$$

Utilizando a seguinte igualdade:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}\ \delta g_{\alpha\beta}, \tag{2.3-5}$$

e expressando $\delta g_{\alpha\beta}$ em termos das variações da tétrada:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \delta\ (e_{A\alpha}\ e^A{}_\beta) = e_{A\alpha}\ \delta e^A{}_\beta + e^A{}_\beta\ \delta e_{A\alpha}, \tag{2.3-6}$$

de (2.3-4), obtemos:

$$\delta \int_\Omega \mathscr{L}_F\ d^4x = \int_\Omega -\ T^{\mu\nu}\ e^A{}_\nu\ \delta e_{A\mu}\ |e|\ d^4x \tag{2.3-7}$$

Vejamos agora o termo $\int_\Omega (\mathscr{L}_G + \mathscr{L}_I)\ d^4x$ de (2.2-2). Notemos que, por definição, $\mathscr{L}_I$ não depende da tétrada mediante o tensor métrico. Levando em conta que as variações da tétrada são nulas na fronteira de Ω, obtemos a igualdade:

$$\delta \int (\mathscr{L}_G + \mathscr{L}_I)\ d^4x = \int \left(\frac{\delta \mathscr{L}_G}{\delta e_{A\mu}} + \frac{\delta \mathscr{L}_I}{\delta e_{A\mu}} \right) \delta e_{A\mu}\ d^4x\ , \tag{2.3-8}$$

onde

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta e_{A\mu}} := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{A\mu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial e_{A\mu,\lambda}}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta e_{A\mu}} := \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial e_{A\mu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial e_{A\mu,\lambda}} \qquad (2.3\text{-}9)$$

são as derivadas variacionais de $\mathcal{L}_G$ e $\mathcal{L}_I$ em relação a $e_{A\mu}$. Definindo os seguintes tensores sem simetria definida:

$$K^{\mu\nu} := \frac{1}{|e|} \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta e_{A\mu}} e_A{}^\nu$$

$$I^{\mu\nu} := \frac{1}{|e|} \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta e_{A\mu}} e_A{}^\nu \ , \qquad (2.3\text{-}10)$$

a igualdade (2.3-8) torna-se:

$$\delta \int_\Omega (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_I)\, d^4x = \int_\Omega (K^{\mu\nu} + I^{\mu\nu})\, e^A{}_\nu\, \delta e_{A\mu}\, |e|\, d^4x \ . \qquad (2.3\text{-}11)$$

Considerando as igualdades (2.3-7) e (2.3-11) no princípio da mínima ação (2.2-2), encontramos:

$$\int_\Omega (K^{\mu\nu} + I^{\mu\nu} - T^{\mu\nu})\, e^A{}_\nu\, \delta e_{A\mu}\, |e|\, d^4x = 0 \ . \qquad (2.3\text{-}12)$$

Como as variações $\delta e_{A\mu}$ são arbitrárias, resulta desta igualdade:

$$(K^{\mu\nu} + I^{\mu\nu} - T^{\mu\nu})\, e^{A}{}_{\nu} = 0 \,. \qquad (2.3\text{-}13)$$

Multiplicando (2.3-13) por $e_{A}{}^{\alpha}$ e usando (1.1-3), obtemos dezesseis equações diferenciais parciais não lineares que determinam a tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$ a menos de uma transformação de L.g.t. e de uma transformação de coordenadas:

$$K^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - I^{\mu\nu} \,. \qquad (2.3\text{-}14)$$

Estas equações também podem ser expressas da seguinte forma:

$$K^{(\mu\nu)} = T^{\mu\nu} - I^{(\mu\nu)} \qquad (2.3\text{-}15)$$

$$K^{[\mu\nu]} = -I^{[\mu\nu]} \,, \qquad (2.3\text{-}16)$$

onde $(\mu\nu)$ e $[\mu\nu]$ indicam as partes simétrica e anti-simétrica dos tensores, respectivamente. Portanto, em (2.3-15) temos dez equações e em (2.3-16), seis. Notemos que, por definição, o tensor $T^{\mu\nu}$ (2.3-3) é simétrico.

Devido à invariabilidade da ação gravitacional $\int \mathcal{L}_{G}\, d^{4}x$ frente às transformações gerais de coordenadas, podemos deduzir (Apêndice A) que o tensor $K^{\mu\nu}$ (2.3-10) satisfaz as seguintes identidades diferenciais do tipo Bianchi:

$$K^{\nu\mu}{}_{;\nu} + \gamma^{\lambda\nu\mu} K_{\lambda\nu} \equiv 0 \,, \qquad (2.3\text{-}17)$$

onde obtemos o tensor $\gamma^{\lambda\nu\mu}$ do tensor $\gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$ (1.3-10) "erguendo" os dois últimos índices.

Notando que o tensor $\gamma^{\lambda\nu\mu}$ é anti-simétrico nos dois primeiros índices e usando as identidades acima, obtemos das equações de movimento (2.3-14) as seguintes igualdades:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = I^{\nu\mu}{}_{;\nu} + \gamma^{\lambda\nu\mu}\, I_{\lambda\nu} \qquad (2.3\text{-}18)$$

No Apêndice B, mostramos como calcular os tensores $K_{(i)}{}^{\mu\nu}$ (2.3-10) referentes às densidades de lagrangeanas gravitacionais

$$\mathcal{L}_{(i)} := L_{(i)}\, |e| \;, \qquad (2.3\text{-}19)$$

onde $L_{(i)}$ são os escalares definidos em (2.1-4). As expressões dos $K_{(i)}{}^{\mu\nu}$ são as seguintes:

$$K_{(1)}{}^{\mu\nu} = 2\left[\, \phi_\alpha \gamma^{\alpha\mu\nu} - \phi^{\mu;\nu} + g^{\mu\nu}\left(\phi^{\lambda}{}_{;\lambda} + \frac{1}{2}\,\phi^{\alpha}\phi_{\alpha}\right)\right]$$

$$K_{(2)}{}^{\mu\nu} = -4\left[\, \gamma_{\alpha}{}^{\theta\nu}\Lambda^{\mu\alpha}{}_{\theta} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu}\, \Lambda_{\lambda\sigma\theta}\, \Lambda^{\lambda\sigma\theta} + \Lambda^{\mu\alpha\nu}{}_{;\alpha}\right] \qquad (2.3\text{-}20)$$

$$K_{(3)}{}^{\mu\nu} = 2\left[\gamma_{\alpha}{}^{\theta\nu}(\Lambda_{\theta}{}^{\mu\alpha} - \Lambda_{\theta}{}^{\alpha\mu}) + \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\Lambda_{\lambda\sigma\theta}\Lambda^{\theta\sigma\lambda} + (\Lambda^{\nu\mu\alpha} - \Lambda^{\nu\alpha\mu})_{;\alpha}\right].$$

2.4- TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Nesta seção obteremos uma teoria de tétrada da gravitação covariante frente às transformações de L.ℓ.t. que, como veremos, é equivalente à teoria da relatividade geral de

Einstein.

Uma condição suficiente, para que as equações dinâmicas de uma teoria de tétrada da gravitação sejam covariantes frente às transformações de L.ℓ.t., é que o escalar L_G em (2.1-2) seja invariante frente a estas transformações [8]. Este fato sugere que procuremos pelos coeficientes $\alpha_{(i)}$ em (2.1-5) (que já é invariante frente às transformações de L.g.t.), para os quais L_G é invariante [11].

Da lei de transformação do tensor de não holonomia (1.4-8), obtemos que os escalares em (2.1-4) se transformam da seguinte forma:

$$L'_{(1)} = L_{(1)} + A + 2B$$

$$L'_{(2)} = L_{(2)} + 2C - 2D \qquad (2.4\text{-}1)$$

$$L'_{(3)} = L_{(3)} - 2E - C + 3D \;,$$

onde

$$A := \mathbb{L}^{A}{}_{B,\alpha}\,(\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A,\beta}\;e^{B\alpha}\;e_{C}{}^{\beta}$$

$$B := (\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A}\;\mathbb{L}^{A}{}_{B,\alpha}\;e_{C}{}^{\alpha}\;e^{B}{}_{\mu}\;\phi^{\mu}$$

$$C := 2(\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A}\;\mathbb{L}^{A}{}_{B,\nu}\;e^{B\mu}\;\Lambda_{\mu}{}^{\nu}{}_{C} + (\mathbb{L}^{-1})^{B}{}_{A,\alpha}\;\mathbb{L}^{A}{}_{B,\nu}\;g^{\alpha\nu} \qquad (2.4\text{-}2)$$

$$D := \mathbb{L}^{A}{}_{B,\nu}\,(\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A,\alpha}\;e^{B}{}_{\mu}\;e_{C}{}^{\nu}\;g^{\alpha\mu}$$

$$E := (\mathbb{L}^{-1})^{C}{}_{A}\;\mathbb{L}^{A}{}_{B,\mu}\;e_{C\alpha}\;e^{B}{}_{\nu}\;\Lambda^{\alpha\nu\mu}$$

Portanto o escalar L_a em (2.1-5) se transforma como:

$$L'_a = L_a + \alpha_{(1)}A + 2\alpha_{(1)}B + (2\alpha_{(2)} - \alpha_{(3)}) C +$$

$$+ (3\alpha_{(3)} - 2\alpha_{(2)}) D - 2\alpha_{(3)} E. \qquad (2.4-3)$$

Para que L_a seja invariante, os coeficientes dos termos A, B, C, D e E devem ser nulos. Neste caso, a única solução é a trivial:

$$\alpha_{(i)} = 0 . \qquad (2.4-4)$$

Concluimos assim, que não podemos formar um escalar L_a invariante frente às transformações de L.ℓ.t., apenas considerando uma combinação linear dos escalares em (2.1-4).

O fato da densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_a$ ser função apenas da tétrada e de sua derivada primeira garante que as equações de movimento sejam no máximo de segunda ordem (um aspecto comum em teorias de campos). Mas esta situação não muda, se adicionamos a $\mathcal{L}_a$ uma divergência (de fato, as próprias equações dinâmicas não se alteram [8]). Então, vamos acrescentar à combinação linear (2.1-5) um escalar $\alpha_{(4)}L_{(4)}$, obtido do tensor de não holonomia (1.2-5), tal que $L_{(4)}\ |e|$ seja uma divergência. Como mencionamos no capítulo I, o escalar $\phi^{\sigma}{}_{;\sigma}$ satisfaz esta condição:

$$L_{(4)} := \phi^{\sigma}{}_{;\sigma} = \frac{(\phi^{\sigma}\ |e|)_{,\sigma}}{|e|} \qquad (2.4-5)$$

Vamos agora reconsiderar o problema da determinação dos coeficientes $\alpha_{(i)}$, em:

$$L_a = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{(i)} L_{(i)} , \qquad (2.4\text{-}6)$$

para os quais L_a é invariante frente às transformações de L.ℓ.t.. Da lei de transformação do tensor de não holonomia (1.4-8), temos que o escalar $L_{(4)}$ (2.4-5) se transforma do seguinte modo:

$$L'_{(4)} = L_{(4)} + \frac{1}{2} (D - A - E) - B. \qquad (2.4\text{-}7)$$

Usando esta igualdade e aquelas em (2.4-1), obtemos a seguinte lei de transformação para o escalar L_a em (2.4-6):

$$L'_a = L_a + \left[\alpha_{(1)} - \frac{\alpha_{(4)}}{2}\right] A + (2\alpha_{(1)} - \alpha_{(4)}) B + (2\alpha_{(2)} - \alpha_{(3)}) C$$

$$+ \left[3\alpha_{(3)} - 2\alpha_{(2)} + \frac{\alpha_{(4)}}{2}\right] D - \left[2\alpha_{(3)} + \frac{\alpha_{(4)}}{2}\right] E \qquad (2.4\text{-}8)$$

Igualando, nesta expressão, os coeficientes de A, B, C, D e E a zero, obtemos um sistema de equações, cuja solução, a menos de um fator comum, é:

$$\alpha_{(1)} = -1, \quad \alpha_{(2)} = \frac{1}{4}, \quad \alpha_{(3)} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{(4)} = -2. \qquad (2.4\text{-}9)$$

Portanto o escalar

$$L_a = -2\phi^{\sigma}{}_{;\sigma} - \phi^{\mu}\phi_{\mu} + \frac{1}{4} \Lambda_{\mu\nu\alpha} \Lambda^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu\alpha} \Lambda^{\alpha\nu\mu} \qquad (2.4\text{-}10)$$

gera equações de 2ª ordem covariantes frente às transformações de L.ℓ.t. e frente às transformações gerais de coordenadas.

Comparando (2.4-10) com (1.3-24), vemos que L_G é o escalar de curvatura de Einstein-Hilbert: $R(\{\ \})$.

A combinação linear (2.1-5), onde os coeficientes $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$ e $\alpha_{(3)}$ são aqueles em (2.4-9), é conhecida na literatura como escalar de Møller [3], e o indicaremos por L_M:

$$L_M := -L_{(1)} + \frac{1}{4} L_{(2)} + \frac{1}{2} L_{(3)} . \tag{2.4-11}$$

Como vemos de (2.4-10), a densidade de lagrangeana de Møller, definida por:

$$\mathcal{L}_M := L_M \,|e| , \tag{2.4-12}$$

difere da de Einstein-Hilbert por uma divergência (Einstein tinha conhecimento deste fato [11]):

$$R(\{\ \}) \sqrt{-g} = (-2\phi^{\mu} \,|e|)_{,\mu} + \mathcal{L}_M . \tag{2.4-13}$$

Portanto, estas densidades de lagrangeana geram as mesmas equações de movimento mediante o princípio da mínima ação [8].

Em uma teoria covariante frente às transformações de L.ℓ.t., as densidades de lagrangeana $\mathcal{L}$ (2.2-1) dos sistemas físicos que interagem com o campo gravitacional também devem ser invariantes (a menos de uma divergência) frente a estas transformações. Este fato é garantido se

$$\mathscr{L}_I \equiv 0 \ , \tag{2.4-14}$$

isto é, se $\mathscr{L}$ só depende da tétrada mediante o tensor métrico:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_F \ . \tag{2.4-15}$$

Supondo que as densidades de lagrangeana $\mathscr{L}_F$ sejam obtidas daquelas da relatividade especial através do princípio de acoplamento mínimo ($\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ e derivada parcial $\to$ derivada covariante formada com a afinidade de Levi-Civita), o tensor $T_{\mu\nu}$ definido em (2.3-3) é o tensor momento-energia dos sistemas físicos na teoria da relatividade geral.

Se, no princípio da mínima ação (2.2-2), tomamos:

$$\mathscr{L}_G = \frac{1}{2\varkappa} \mathscr{L}_M \tag{2.4-16}$$

e

$$\mathscr{L}_I \equiv 0 \ , \tag{2.4-17}$$

onde $\varkappa$ é a constante de Einstein e $\mathscr{L}_M$ a densidade de lagrangeana de Møller (2.4-12), obtemos para as equações de movimento (2.3-14) a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \left[K^{\mu\nu}_{(1)} - \frac{1}{4} K^{\mu\nu}_{(2)} - \frac{1}{2} K^{\mu\nu}_{(3)} \right] = -\varkappa T^{\mu\nu} \ , \tag{2.4-18}$$

já que, devido à identidade (2.4-17):

$$I^{\mu\nu} \equiv 0 \ . \tag{2.4-19}$$

Considerando as igualdades (2.3-20) e as expressões (1.3-10, 14, 22 e 24), encontramos as seguintes identidades:

$$\frac{1}{2}\left[K^{\mu\nu}_{(1)} - \frac{1}{4} K^{\mu\nu}_{(2)} - \frac{1}{2} K^{\mu\nu}_{(3)} \right] \equiv G^{\mu\nu} , \qquad (2.4\text{-}20)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein:

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} (\{ \}) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R (\{ \}) . \qquad (2.4\text{-}21)$$

Portanto, as equações (2.4-18) são as equações de Einstein da relatividade geral:

$$G^{\mu\nu} = - \varkappa T^{\mu\nu} . \qquad (2.4\text{-}22)$$

Como os tensores $G^{[\mu\nu]}$ e $I^{\mu\nu}$ são identicamente nulos, as equações (2.3-16) se reduzem a uma identidade. Assim temos apenas dez equações, e não podemos determinar todos os dezesseis graus de liberdade da tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$. Este fato deve-se à covariância imposta à teoria frente às transformações de L.ℓ.t: as equações (2.4-18) determinam a tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$, a menos de uma transformação de L.ℓ.t. e de uma transformação de coordenadas (devido à covariância frente às transformações gerais de coordenadas). Ou de forma equivalente: as equações (2.4-18) determinam o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ (e todos os objetos geométricos da geometria Riemanniana), a menos de uma transformação de coordenadas. Portanto, a teoria da relatividade geral pode ser interpretada como uma teoria de tétrada da gravitação covariante frente às transformações de qual o tensor de Riemann-Christoffel seja nulo, embora o tensor de não holonomia seja diferente de zero (notemos (1.4-11)), caracterizando a presença do campo gravitacional. Apesar de existir um sistema de coordenadas holônomo de Minkowski, este não está associado à tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$ que descreve o campo gravitacional, pois o diferencial (1.2-1) não é exato (notemos que, naturalmente, não nos é permitido anular o tensor de não holonomia por uma transformação de L.ℓ.t. adequada, pois a nova tétrada provavelmente não satisfaria as equações (2.3-14), cujo o grupo de covariância é o das transformações de L.g.t.).

KAEMPFER [11], referindo-se a teoria da relatividade geral, denomina o tensor de não holonomia "tensor de força do campo gravitacional". Esta denominação aplica-se nas teorias cujo grupo de covariância é o das transformações de L.g.t., mas não na teoria da relatividade geral (covariante frente às transformações de L.ℓ.t.) , onde o tensor de não holonomia tem um papel análogo àquele da afinidade de Levi-Civita (MARSH [12] também faz uma crítica desta natureza): quando o tensor de Riemann-Christoffel é nulo, podemos encontrar uma transformação de L.ℓ.t. (efetuada nos espaços tangentes locais de Minkowski) que anule o primeiro e uma transformação de coordenadas (efetuada no espaço-tempo) que anule o segundo; quando o tensor de Riemann-Christoffel é diferente de zero, não podemos anular globalmente estes objetos geométricos. Na teoria da relatividade geral, o tensor de força gravitacional é o tensor de Riemann-Christoffel.

No contexto da teoria da relatividade geral, diversos pseudotensores têm sido apresentados como candidatos para representar o momento e energia do campo gravitacional. Entretanto, nenhum destes quando adicionados ao tensor momento energia dos outros sistemas físicos resulta um pseudotensor momento-energia total com todas as propriedades que, segundo MØLLER [3], devem estar presentes em uma grandeza desta natureza. MØLLER [3] mostrou que podemos encontrar um pseudotensor momento-energia total com todas as referidas propriedades, quando consideramos que os dezesseis graus de liberdade da tétrada têm sentido físico, isto é, quando assumimos que a gravitação é descrita por uma teoria cujo grupo de covariância é apenas o das transformações de L.g.t.. Nesta teoria, se o tensor de não holonomia é nulo (ausência do campo gravitacional) o pseudotensor momento-energia do campo gravitacional também o é. A lei de conservação do momento e energia total pode ser obtida mediante o teorema de Nöther.

O exposto àcima serve como motivação para considerarmos, em qualquer situação, que os dezesseis graus de liberdade da tétrada tenham sentido físico. Contudo, neste trabalho assumiremos que o campo gravitacional livre comporta-se segundo as equações de Einstein para o vazio. Somente na presença de outros sistemas físicos é que todos os dezesseis graus de liberdade podem adquirir sentido físico.

Nos próximos capítulos, investigaremos as implicações desta hipótese, quando o campo gravitacional interage com o campo eletromagnético. Estaremos tratando de uma teoria covariante frente às transformações de L.g.t., onde o tensor de força gravitacional é o tensor de não holonomia.

CAPÍTULO III

ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO ENTRE OS CAMPOS GRAVITACIONAL E ELETROMAGNÉTICO

Como salienta ANDERSON [8], se consideramos apenas o princípio da covariância geral$^{\sigma}$ como fundamental, não há por que não levarmos em conta termos de acoplamento não mínimo na densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ (2.2-1) de interação do campo gravitacional (descrito pela tétrada $e^{A}{}_{\mu}(x)$) com o campo eletromagnético (descrito pelo potencial $A_{\mu}(x)$). Estes termos (por ex.: $R^{\mu\nu\alpha\beta}(\{\ \}) F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad |e|$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell) violam o princípio de equivalência forte, segundo o qual em qualquer ponto do espaço-tempo, sempre podemos encontrar um sistema de coordenadas, onde as densidades de lagrangeana dos sistemas físicos sejam aquelas da relatividade especial. Entretanto, ao contrário do que ocorre com o princípio de equivalência fraco (igualdade entre as massas gravitacional e inercial), o princípio da equivalência forte parece não ser sustentado diretamente pela experiência [9,13] e sua validade pode não ser universal [8].

(σ) Segundo ANDERSON [8] : Princípio da invariabilidade geral.

No nível quântico (onde o princípio de equivalência forte perde sua aplicabilidade em fenômenos essencialmente não pontuais), a consideração de termos de acoplamento não mínimo entre os campos gravitacional e eletromagnético é mesmo necessária, por exemplo, quando tratamos a polarização do vácuo: o fóton adquire "tamanho" e portanto está sujeito a forças de maré [14].

No nível clássico, a consideração do acoplamento não mínimo entre a gravitação e o eletromagnetismo tem se mostrado particularmente eficaz na solução de problemas cosmológicos: o problema da singularidade [15] e o problema do horizonte [16].

3.1- ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO EM UMA TEORIA DE TÉTRADA DA GRAVITAÇÃO COVARIANTE FRENTE ÀS TRANFORMAÇÕES DE L.g.t.

Vamos supor que na ausência do campo eletromagnético, o campo gravitacional comporte-se segundo as equações de Einstein. Assim, tomaremos como densidade de lagrangeana gravitacional a expressão (2.4-16):

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\varkappa}\, \mathcal{L}_M \;. \qquad (3.1\text{-}1)$$

Consideremos a expressão (2.2-1). Na presença do campo eletromagnético, vamos assumir que a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_I$ seja diferente de zero (neste ponto rompemos com a teoria da relatividade geral) sendo $\mathcal{L}_F$ obtida da correspondente densidade de lagrangeana do campo eletromagnético na relatividade especial, mediante o acoplamento mínimo:

$$\mathcal{L}_F = - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} |e| , \tag{3.1-2}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell:

$$F_{\mu\nu} := A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} . \tag{3.1-3}$$

Portanto nossa densidade de lagrangeana total é:

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2\varkappa} \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I . \tag{3.1-4}$$

Vamos agora propor algumas possíveis expressões para a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_I$ de acoplamento não mínimo.

3.2- ALGUMAS EXPRESSÕES PARA A DENSIDADE DE LAGRANGEANA NÃO MÍNIMA $\mathcal{L}_I$

Consideremos em cada ponto do espaço-tempo um sistema de "coordenadas" não holônomo de Minkowski definido no espaço tangente local pelo diferencial (1.2-1).

$$\text{đ}x^A := e^A{}_\mu (x) dx^\mu . \tag{3.2-1}$$

Podemos interpretar a definição (1.3-1) como sendo a expressão do tensor métrico neste sistema de "coordenadas"[7] :

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{A}{}_{\mu}(x)\, e^{B}{}_{\nu}(x)\, \eta_{AB} \,. \tag{3.2-2}$$

Referido a este sistema de "coordenadas", o "potencial eletromagnético" é um escalar [6] definido por:

$$A_{A} := e_{A}{}^{\mu}(x)\, A_{\mu} \,, \tag{3.2-3}$$

onde A_μ é o potencial eletromagnético em um sistema de coordenadas arbitrário $\{x^\mu\}$ do espaço-tempo. Definamos o escalar:

$$F_{AB} := A_{A,B} - A_{B,A} \tag{3.2-4}$$

onde $A_{A,B}$ é definido por [7]:

$$A_{A,B} := e_{B}{}^{\mu}\, (A_{A})_{,\mu} \,. \tag{3.2-5}$$

Considerando as definições (3.2-3) e (1.3-9) nesta última, obtemos a igualdade:

$$A_{A,B} = e_{A}{}^{\mu}\, e_{B}{}^{\nu}\, A_{\mu|\nu} \tag{3.2-6}$$

(7) Esta linguagem nao é rigorosa e serve apenas como motivação para uma forma de acoplamento nao mínimo entre os campos gravitacional e eletromagnético. O sistema de "coordenadas" não holônomo não existe no espaço-tempo e não pode ser associado a um referencial inercial, no qual efetuamos medidas [17].

onde $A_{\mu|\nu}$ é a derivada covariante de A_{μ} formada com a afinidade integrável $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ (1.3-9)[8]. Substituindo esta igualdade na definição (3.2-4), temos:

$$F_{AB} = e_{A}{}^{\mu} e_{B}{}^{\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \tag{3.2-7}$$

onde:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} := A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} \tag{3.2-8}$$

De (1.3-13), obtemos a igualdade:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu}{}^{\sigma} A_{\sigma}\,, \tag{3.2-9}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell (3.1-3) e $\Lambda_{\mu\nu}{}^{\sigma}$ o tensor de não holonomia (1.2-5). Notemos que A_{A} e F_{AB} transformam-se como tensores frente às transformações de L.g.t.

Quando o tensor de não holonomia é nulo (o que ocorre aproximadamente para campos gravitacionais muito fracos), as expressões (3.2-1), (3.2-2), (3.2-3) e (3.2-7) tornam-se respectivamente (notemos (1.1-3) e (1.2-2)):

$$dx^{A} = \frac{\partial x^{A}}{\partial x^{\mu}}\, dx^{\mu} \tag{3.2-10}$$

---

(8) Notemos que esta afinidade só pode ser usada de tal forma que, na ausência do campo eletromagnético, ela desapareça das equações de movimento, quando então as expressões da relatividade geral são restabelecidas.

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^B}{\partial x^\nu} \eta_{AB} \qquad (3.2\text{-}11)$$

$$A_A = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^A} A_\mu \qquad (3.2\text{-}12)$$

$$F_{AB} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^B} F_{\mu\nu}, \qquad (3.2\text{-}13)$$

onde $\{x^A\}$ é agora um verdadeiro sistema de coordenadas de Minkowski (holônomo) no espaço-tempo. Este resultado nos motiva a tomar a seguinte densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ (2.2-1) de interação entre os campos gravitacional e eletromagnético:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= -\frac{1}{16\pi} F^{AB} F_{AB} \, |e| \\ &= -\frac{1}{16\pi} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \, |e| \qquad (3.2\text{-}14) \\ &= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}^a_I , \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}_F$ é dada em (3.1-2) e $\mathcal{L}^a_I$ definida por:

$$\mathcal{L}^a_I := \frac{1}{8\pi} [\, F_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu\lambda} A_\lambda - \frac{1}{2} \Lambda_{\mu\nu}{}^{\sigma} \Lambda^{\mu\nu\lambda} A_\sigma A_\lambda \,] \, |e| \, . \qquad (3.2\text{-}15)$$

Para obter as igualdades em (3.2-14), usamos (3.2-7) e (3.2-9).

Quando o tensor de não holonomia é nulo (campo gravitacional muito fraco), vemos de (3.2-14) e (1.3-5) que, em um sistema de coordenadas holônomo de Minkowski, a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}$ é aquela da relatividade especial.

Embora a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_I^a$ tenha surgido por uma espécie de "princípio" de acoplamento não mínimo, podemos ainda considerar outras expressões para a densidade de lagrangeana não mínima $\mathcal{L}_I$ que gerem equações de movimento de segunda ordem para $e^A{}_\mu(x)$ e $A_\mu(x)$. Por exemplo:

$$\mathcal{L}_I^b := \alpha\, F_{\mu\nu}\, \Lambda^{\mu\nu\alpha}\, \phi_\alpha\, |e|$$

$$\mathcal{L}_I^c := \beta\, F_{\mu\nu}\, \Lambda^{\alpha\mu\nu}\, \phi_\alpha\, |e| \tag{3.2-16}$$

$$\mathcal{L}_I^d := \gamma\, \Lambda_{\alpha\beta\mu}\, F^\mu{}_\nu\, \Lambda^{\nu\alpha\beta}\, |e|$$

onde α, β e γ são constantes de acoplamento, cuja dimensão é: $M^{1/2}.L^{-1/2}.T^{-1}$. Notemos que estas densidades de lagrangeana são invariantes de calibre (e portanto nestas teorias a carga eletromagnética se conserva), o que não ocorre com $\mathcal{L}_I^a$. Notemos ainda que $\mathcal{L}_I^a$ não envolve constantes de acoplamento.

3.3- EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE $e^A{}_\mu(x)$ e $A_\mu(x)$

Determinaremos agora as equações de movimento decorrentes do princípio variacional (2.2-2), quando $\mathcal{L}_I$ é uma das densidades de lagrangeana $\mathcal{L}_I^a$ ou $\mathcal{L}_I^b$ apresentadas na última seção. Considerando (3.1-4), analisaremos estes casos separadamente.

Caso a: $\mathscr{L}_{I} = \mathscr{L}^{a}_{I}$

Para o tensor $I^{\mu\nu}_{a}$ (2.3-10), temos a seguinte expressão[9] :

$$I^{\mu\nu}_{a} = + \frac{1}{4\pi} [-\tilde{F}^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda^{\nu\sigma\bullet} A_{\bullet} - F^{\nu}{}_{\sigma} \Lambda^{\mu\sigma\bullet} A_{\bullet} -$$

$$- \frac{1}{2} \tilde{F}_{\lambda\sigma} \Lambda^{\lambda\sigma\mu} A^{\nu} + \frac{4\pi}{|e|} \mathscr{L}^{a}_{I} g^{\mu\nu} -$$

$$- (\tilde{F}^{\mu\alpha} A^{\nu})_{;\alpha} - \tilde{F}^{\mu\alpha} \gamma^{\nu\bullet}{}_{\alpha} A_{\bullet}] \qquad (3.3\text{-}1)$$

e para o tensor $T_{\mu\nu}$ definido em (2.3-3) (tensor momento-energia do acoplamento mínimo) [9]:

$$T_{\mu\nu} =: E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [F_{\mu\beta} F^{\beta}{}_{\nu} + \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}] \qquad (3.3\text{-}2)$$

Levando em conta as igualdades (3.2-9), (3.2-14) e

$$A^{\nu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\nu}{}_{\bullet\alpha} A^{\bullet} = A^{\nu}{}_{|\alpha} , \qquad (3.3\text{-}3)$$

obtemos de (3.3-1) e (3.3-2):

$$E^{\mu\nu} - I^{\mu\nu}_{a} = \tilde{E}^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} A^{\nu}{}_{|\alpha} \tilde{F}^{\mu\alpha} + \frac{1}{4\pi} (\tilde{F}^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2} \tilde{F}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta\mu}) A^{\nu} \qquad (3.3\text{-}4)$$

---

(9) Para obtermos $I^{\mu\nu}_{a}$, procedemos da mesma forma que para obtermos $K^{\mu\nu}_{(i)}$ (Apêndice (B)).

onde o tensor simétrico $\tilde{E}_{\mu\nu}$ é definido por:

$$\tilde{E}_{\mu\nu} := \frac{1}{4\pi} [\tilde{F}_{\mu\beta} \tilde{F}^{\beta}{}_{\nu} + \frac{1}{4} \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}] . \tag{3.3-5}$$

Para calcularmos o termo entre parênteses em (3.3-4), consideremos o princípio da mínima ação (2.2-2), para variações do potencial eletromagnético A_{μ}. Procedendo da mesma forma que aquela para obtermos as equações de Einstein-Maxwell do acoplamento mínimo [9], encontramos as seguintes equações:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2} \tilde{F}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta\mu} = 0 . \tag{3.3-6}$$

Portanto, a igualdade (3.3-4) torna-se:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} := E^{\mu\nu} - I_{a}^{\mu\nu} = \tilde{E}^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} \tilde{F}^{\mu\alpha} A^{\nu}{}_{|\alpha} . \tag{3.3-7}$$

Desta última e de (2.3-18) obtemos:

$$\tilde{T}^{\nu\mu}{}_{;\nu} = - \gamma^{\lambda\nu\mu} \tilde{T}_{\lambda\nu} . \tag{3.3-8}$$

Quando o tensor de não holonomia é nulo (o que ocorre aproximadamente quando o campo gravitacional é muito fraco), esta igualdade torna-se (em um sistema de coordenadas holônomo de Minkowski):

$$\tilde{T}^{\nu\mu}{}_{,\nu} = 0 , \tag{3.3-9}$$

e o tensor $\tilde{T}^{\mu\nu}$ (3.3-7) assume a seguinte forma[10] :

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = E^{\mu\nu} + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} A^{\nu}{}_{,\alpha} =$$

$$= - \frac{1}{4\pi} F^{\beta\mu} A_{\beta}{}^{,\nu} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{3.3-10}$$

que é a expressão do tensor momento-energia canônico da eletrodinâmica de Maxwell, sendo (3.3-9) sua lei de conservação [18].

Considerando (3.3-7) e a identidade (2.4-20) em (2.3-14), temos as seguintes equações gravitacionais:

$$G^{\mu\nu} = -\varkappa \tilde{T}^{\mu\nu} , \tag{3.3-11}$$

que podem ser expressas também, como:

$$G^{\mu\nu} = -\varkappa \tilde{T}^{(\mu\nu)}$$

$$\tilde{T}^{[\mu\nu]} = 0 . \tag{3.3-12}$$

Devido às identidades de Bianchi (2.4-23), temos de (3.3-12) a seguinte lei de conservação covariante:

$$\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 . \tag{3.3-13}$$

(10) Notemos de (1.3-8) que quando o tensor de não holonomia é nulo, a afinidade de Levi-Civita $\left\{ {\rho \atop \mu\ \nu} \right\}$ é igual à afinidade integrável $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$.

Também, destas equações, obtemos:

$$R\ ((\ ))\ =\ \varkappa\tilde{T}\ , \qquad (3.3\text{-}14)$$

onde usamos a definição do tensor de Einstein (2.4-21), sendo $\tilde{T}$ o traço de tensor $\tilde{T}^{\mu\nu}$ definido em (3.3-7). Notando que o traço do tensor $\tilde{E}^{\mu\nu}$ (3.3-5) é identicamente nulo, temos

$$\tilde{T} := \tilde{T}^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{8\pi}\,\tilde{F}^{\mu\nu}\,\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\,F^{AB}\,F_{AB}\ , \qquad (3.3\text{-}15)$$

já que o tensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é anti-simétrico. Portanto, na presença do campo eletromagnético o escalar de Riemann-Christoffel é diferente de zero, ao contrário do que ocorre no acoplamento mínimo.

Quando na densidade de lagrangeana total $\mathscr{L}_T$ (3.1-4), temos o termo $-\ \frac{1}{c}\ j^{\alpha}\ A_{\alpha}\ |e|$ devido às fontes do campo eletromagnético, as equações (3.3-6) tornam-se:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{1}{2}\,\tilde{F}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{\alpha\beta\mu} = \frac{4\pi}{c}\,j^{\mu}\ , \qquad (3.3\text{-}16)$$

as quais se reduzem às de Maxwell (covariantes frente às transformações de calibre), quando o tensor de não holonomia é nulo. Como $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico, podemos expressar as equações (3.3-16) da seguinte forma:

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}\,|e|)_{,\nu} + \frac{1}{2}\,\tilde{F}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{\alpha\beta\mu}\,|e| = \frac{4\pi}{c}\,j^{\mu}\,|e|\ . \qquad (3.3\text{-}17)$$

Diferenciando (3.3-17) em relação à coordenada x^{μ}, obtemos a seguinte lei de conservação:

$$[\,(\tilde{j}^{\mu} + j^{\mu})\,|e|\,]_{,\mu} = 0\,, \tag{3.3-18}$$

onde o vetor $\tilde{j}^{\mu}$ é definido por:

$$\tilde{j}^{\mu} := -\frac{c}{8\pi}\,\tilde{F}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{\alpha\beta\mu} \tag{3.3-19}$$

Portanto, a carga eletromagnética não se conserva. Este resultado já era esperado, uma vez que a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_I^{\,a}$ (3.2-15) não é invariante frente às transformações de calibre.

Dos resultados encontrados para o acoplamento não mínimo efetuado mediante $\mathcal{L}_I^{\,a}$ (3.2-15), podemos concluir que o campo gravitacional afeta a eletrodinâmica, fixando o potencial eletromagnético $A_{\mu}(x)$ de modo que o tensor $\tilde{T}^{\mu\nu}$ (3.3-7) seja simétrico e satisfaça a lei de "conservação" covariante (3.3-13).

Vejamos agora o acoplamento não mínimo efetuado com a densidade de lagrangeana $\mathcal{L}_I^{\,b}$ (3.2-16):

Caso b: $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{\,b}$.

Considerando a definição:

$$\Omega^{\mu} := F_{\lambda\sigma}\,\Lambda^{\lambda\sigma\mu} \tag{3.3-20}$$

podemos expressar $\mathcal{L}_I^{\,b}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_I{}^b = \alpha\, \Omega^\alpha \phi_\alpha\, |e| \,. \tag{3.3-21}$$

As equações de movimento gravitacionais (2.3-14) têm a seguinte forma:

$$G^{\mu\nu} + \varkappa E^{\mu\nu} - \varkappa\alpha \{ (\Lambda_\alpha{}^{\nu\mu} + \gamma^{\nu\mu}{}_\alpha)\, \Omega^\alpha - \Omega^{\mu;\nu} + g^{\mu\nu}\, (\Omega^\alpha{}_{;\alpha} + \Omega^\bullet \phi_\bullet) +$$

$$+ 4\phi^\bullet\, F^{\lambda(\mu}\Lambda^{\nu)}{}_{\lambda\bullet} - 2\, [(\phi^\nu\, F^{\mu\alpha})_{;\alpha} + \phi_\bullet\, F^{\mu\alpha}\, \gamma^{\nu\bullet}{}_\alpha] \} = 0 \,. \tag{3.3-22}$$

As equações referentes ao potencial eletromagnético são:

$$(F^{\mu\nu} - 8\pi\alpha\, \phi_\sigma\, \Lambda^{\mu\nu\sigma})_{;\nu} = \frac{4\pi}{c}\, j^\mu \,. \tag{3.3-23}$$

Desta última, obtemos a lei de conservação da carga eletromagnética:

$$(j^\mu\, |e|)_{,\mu} = 0 \,. \tag{3.3-24}$$

Notemos que quando a constante α é nula, obtemos as equações do acoplamento mínimo.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES ESTÁTICAS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS

A importância da existência de soluções esfericamente simétricas em uma teoria reside no fato de a Natureza apresentar sistemas físicos, em boa aproximação, esfericamente simétricos (corpos estelares, partículas clássicas, etc.) com aspectos observáveis suscetíveis de ser confrontados com estas soluções. Como exemplo, citamos a solução de Schwarzschild, corroborada por testes experimentais da teoria da relatividade geral [19].

Neste capítulo, determinaremos os escalares L_a (2.1-5), cujas equações, conseqüentes do princípio variacional (2.1-1), apresentem a solução de Schwarzschild para o campo gravitacional livre. Em seguida, obteremos a solução estática e esfericamente simétrica das equações (3.3-6) e (3.3-11) provenientes do acoplamento não mínimo dos campos gravitacional e eletromagnético, finalizando com a análise da mesma.

4.1- SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Usando um sistema de coordenadas polares esféricas:

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = r, \qquad x^2 = \theta, \qquad x^3 = \phi, \tag{4.1-1}$$

podemos tomar a seguinte forma para a tétrada estática e esfericamente simétrica [20]:

$$\begin{aligned}
e^0{}_\mu &= (\; e^{a(r)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \;) \\
e^1{}_\mu &= (\; 0 \;, \; e^{b(r)}\mathrm{sen}\theta\cos\phi, \quad r\cos\theta\cos\phi, \; -r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi) \\
e^2{}_\mu &= (\; 0 \;, \; e^{b(r)}\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi, \quad r\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi, \quad r\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi) \\
e^3{}_\mu &= (\; 0 \;, \; e^{b(r)}\cos\theta \;, \quad -r\,\mathrm{sen}\theta \;, \quad 0 \;)
\end{aligned} \tag{4.1-2}$$

Da definição do tensor métrico (1.3-1) e das expressões (4.1-2), obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag.}\; (e^{2a(r)}, -e^{2b(r)}, -r^2, -r^2\mathrm{sen}^2\theta), \tag{4.1-3}$$

cujo inverso é:

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag.}\; (e^{-2a(r)}, -e^{-2b(r)}, -r^{-2}, -r^{-2}\mathrm{sen}^{-2}\theta), \tag{4.1-4}$$

Da definição (1.1-5) e das expressões (4.1-2) e (4.1-4), resulta:

$$\begin{aligned}
e_0{}^\mu &= (\; e^{-a(r)}, \quad 0 \;, \quad 0 \;, \quad 0 \;) \\
e_1{}^\mu &= (\; 0 \;, \; e^{-b(r)}\mathrm{sen}\theta\cos\phi, \quad r^{-1}\cos\theta\cos\phi, \; -r^{-1}\mathrm{sen}^{-1}\theta\,\mathrm{sen}\phi)
\end{aligned}$$

$$e_2{}^{\mu} = (\; 0 \; , \; e^{-b(r)}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \; r^{-1}\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \; r^{-1}\operatorname{sen}^{-1}\theta\cos\phi)$$

$$e_3{}^{\mu} = (\; 0 \; , \; e^{-b(r)}\cos\theta \; , \; -r^{-1}\operatorname{sen}\theta \; , \; 0 \;) \tag{4.1-5}$$

Usando as expressões (4.1-2) e (4.1-5) na definição (1.3-9) da afinidade integrável $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$, temos (as plicas indicam diferenciação em relação a r):

$$\begin{array}{ll} \Gamma^0_{01} = a' & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = r^{-1}e^{b} \\ \Gamma^1_{11} = b' & \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = r^{-1} \\ \Gamma^1_{22} = -re^{-b} & \Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \Gamma^1_{33} = -re^{-b}\operatorname{sen}^2\theta & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta \end{array} \tag{4.1-6}$$

As demais componentes são nulas.

Das igualdades (4.1-6) e da igualdade (1.3-13), obtemos as seguintes componentes não nulas do tensor de não holonomia $\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha}$:

$$\begin{gathered} \Lambda_{01}{}^{0} = -\Lambda_{10}{}^{0} = a' \\ \Lambda_{12}{}^{2} = -\Lambda_{21}{}^{2} = \Lambda_{13}{}^{3} = -\Lambda_{31}{}^{3} = r^{-1}\,(e^{b} - 1) \end{gathered} \tag{4.1-7}$$

Consideremos o tensor:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2}\,(\Lambda^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Lambda^{\alpha}{}_{\nu\mu}) \,. \tag{4.1-8}$$

Das igualdades (4.1-3), (4.1-4) e (4.1-7), vemos que:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} = -\,\frac{1}{2}\,\Lambda_{\mu\nu}{}^{\alpha} \,. \tag{4.1-9}$$

Desta última igualdade e da definição (1.3-10), obtemos:

$$\gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = -\Lambda^{\alpha}{}_{\mu\nu} \,. \tag{4.1-10}$$

Devemos chamar a atenção para o fato de as igualdades (4.1-9) e (4.1-10) serem uma particularidade do caso estático e esfericamente simétrico.

Usando as igualdades (4.1-7) na definição (1.3-23), encontramos para o covetor ϕ_{σ} a seguinte expressão:

$$\phi_{\sigma} = [\ 0\ ,\ 2r^{-1}(e^{b} - 1) - a',\ 0\ ,\ 0\ ] \tag{4.1-11}$$

Usando as igualdades (4.1-3), (4.1-4), (4.1-6) e (4.1-10) na (1.3-8), obtemos as seguintes componentes da afinidade de Levi-Civita:

$$\left\{ {0 \atop 0\ 1} \right\} = \left\{ {0 \atop 1\ 0} \right\} = a' \qquad\qquad \left\{ {2 \atop 3\ 3} \right\} = -\ \mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

$$\left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\} = b' \qquad\qquad \left\{ {3 \atop 2\ 3} \right\} = \left\{ {3 \atop 3\ 2} \right\} = \cot\theta$$

$$\left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\} = -re^{-2b} \qquad\qquad \left\{ {1 \atop 0\ 0} \right\} = a'e^{2(a-b)}$$

$$\left\{ {1 \atop 3\ 3} \right\} = -re^{-2b}\ \mathrm{sen}^2\theta \tag{4.1-12}$$

$$\left\{ {2 \atop 2\ 1} \right\} = \left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\} = \left\{ {3 \atop 1\ 3} \right\} = \left\{ {3 \atop 3\ 1} \right\} = r^{-1}$$

As demais componentes são nulas.

Podemos agora calcular os tensores $K^{\mu\nu}_{(1)}$, $K^{\mu\nu}_{(2)}$ e $K^{\mu\nu}_{(3)}$ em (2.3-20), mediante as expressões estabelecidas acima. Com efeito, temos as seguintes componentes não nulas do tensor.

$K^{\mu\nu}_{(1)}$:

$$K^{00}_{(1)} = 2e^{-2(a+b)} \left[a'' + (a'-b')\ (a' + 2r^{-1}) - 2r^{-2}e^{b}(e^{b}-1) - \frac{a'^2}{2} \right]$$

$$K^{11}_{(1)} = 2e^{-4b} \left[2r^{-2}(e^{2b}-1) - a' \left(\frac{a'}{2} + 2r^{-1} \right) \right]$$

$$K^{22}_{(1)} = -2r^{-2}e^{-2b} \left[a'' + (a'-b')\ (a' + 2r^{-1}) - a' \left(\frac{a'}{2} + r^{-1}e^{b} \right) \right]$$

$$K^{33}_{(1)} = K^{22}_{(1)}\ \csc^2\theta\ , \tag{4.1-13}$$

$K^{\mu\nu}_{(2)}$:

$$K^{00}_{(2)} = 4e^{-2(a+b)} \left[a'' + \left(\frac{a'}{2} - b' + 2r^{-1} \right) a' - r^{-2}(e^{b} - 1)^2 \right]$$

$$K^{11}_{(2)} = 4e^{-4b} \left[- \frac{a'^2}{2} + r^{-2} (e^{2b} - 1) \right]$$

$$K^{22}_{(2)} = 4r^{-2} e^{-2b} \left\{ \frac{a'^2}{2} + r^{-1} [a' (e^{b} - 1) + b'] \right\}$$

$$K^{33}_{(2)} = K^{22}_{(2)} \csc^2\theta \ , \qquad (4.1\text{-}14)$$

$K^{\mu\nu}_{(3)}$:

$$K^{\mu\nu}_{(3)} = \frac{1}{2} K^{\mu\nu}_{(2)} \ . \qquad (4.1\text{-}15)$$

A igualdade (4.1-15) é uma particularidade do caso estático e esfericamente simétrico.

Consideremos o escalar L_G (2.1-5). Das igualdades acima e da definição

$$\alpha := \alpha_{(1)} + 2\alpha_{(2)} + \alpha_{(3)} \ , \qquad (4.1\text{-}16)$$

temos as seguintes componentes não nulas do tensor:

$$K^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{(i)} K^{\mu\nu}_{(i)} \ , \qquad (4.1\text{-}17)$$

(observemos (2.3-10)):

$$K^{oo} = 2e^{-2(a+b)} \left\{ \alpha \left[a'' + \left(\frac{a'}{2} - b' + 2r^{-1} \right) a' + 2r^{-2}e^{b} \right] + \right.$$

$$\left. + r^{-2} [\alpha_{(1)} - \alpha - (\alpha_{(1)} + \alpha)\, e^{2b}] - 2\alpha_{(1)} r^{-1} b' \right\},$$

$$K^{11} = 2e^{-4b} \left[- \alpha \frac{a'^2}{2} + (\alpha_{(1)} + \alpha)\,(e^{2b} - 1) r^{-2} - 2\alpha_{(1)} r^{-1} a' \right],$$

$$K^{22} = 2r^{-2}e^{-2b} \left[- \alpha_{(1)} a'' + (\alpha - 2\alpha_{(1)}) \frac{a'^2}{2} + \alpha_{(1)} a'b' - \right.$$

$$\left. - (\alpha_{(1)} + \alpha)\,(a' - b')\, r^{-1} + \alpha r^{-1} a' e^{b} \right],$$

$$K^{33} = K^{22} \csc^2\theta \,. \tag{4.1-18}$$

Seja L_G um escalar em que α é nulo e $\alpha_{(1)}$ diferente de zero. Das igualdades (4.1-18), as equações do campo gravitacional livre (2.3-14):

$$K^{\mu\nu} = 0 \tag{4.1-19}$$

tomam a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^{-1}\,(1 - e^{2b}) - 2b' = 0 \\ \\ r^{-1}\,(1 - e^{2b}) + 2a' = 0 \\ \\ a'' + a'^{\,2} - a'b' + r^{-1}(a' - b') = 0 \,. \end{array} \right. \tag{4.1-20}$$

Este sistema não é sobredeterminado, já que a terceira das equações segue das duas primeiras, resultando duas equações e duas incógnitas (a e b) [9]. De sua solução e da igualdade (4.1-3), obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.} \left[1 - \frac{r_s}{r}, -\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1}, -r^2, -r^2 \text{sen}^2\theta \right] . \tag{4.1-21}$$

Podemos determinar o valor da constante r_s impondo que a equação de movimento de Newton, de uma partícula no campo gravitacional, seja "restabelecida" para campos gravitacionais "fracos" [9].

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2} , \tag{4.1-22}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, m é a massa do sistema físico que gera o campo gravitacional e c a velocidade da luz.

r_s tem dimensão de comprimento, sendo conhecido na literatura como raio de Schwarzschild. A solução (4.1-21) é conhecida como solução de Schwarzschild [9].

Com $\alpha_{(1)}$ diferente de zero, podemos tomar:

$$\alpha_{(2)} = \sigma_2 \alpha_{(1)} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{(3)} = \sigma_3 \alpha_{(1)} , \tag{4.1-23}$$

onde σ_2 e σ_3 são duas constantes. (4.1-23) em (4.1-16) para α nulo, nos dá:

$$1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \ . \tag{4.1-24}$$

Considerando esta igualdade, (2.1-5) e (4.1-23), temos:

$$L_G = \alpha_{(1)} [L_{(1)} + \sigma_2 L_{(2)} - (1 + 2\sigma_2) L_{(3)}] \ . \tag{4.1-25}$$

Portanto, toda teoria, cujo escalar L_G (2.1-5) é da forma (4.1-25) apresenta a solução de Schwarzchild [21]. As constantes $\alpha_{(1)}$ e σ_2 são arbitrárias, sendo σ_2 adimensional.

MØLLER [2] efetua a aproximação linear para campos "fracos" das equações (2.3-14) no caso em que o tensor $I^{\mu\nu}$ (2.3-10) é identicamente nulo, obtendo as equações de Einstein linearizadas quando a constante $\alpha_{(1)}$ em (4.1-25) é dada por:

$$\alpha_{(1)} = - \frac{1}{2\varkappa} \ , \tag{4.1-26}$$

onde $\varkappa$ é a constante de Einstein.

4.2- SOLUÇÃO ESTÁTICA E ESFERICAMENTE SIMÉTRICA DAS EQUAÇÕES (3.3-6) e (3.3-11)

Tomemos para o potencial eletromagnético estático e esfericamente simétrico a seguinte expressão:

$$A_\mu = (c(r), 0, 0, 0) \ . \tag{4.2-1}$$

Desta e de (4.1-4), obtemos:

$$A^{\mu} = (ce^{-2a},\ 0,\ 0,\ 0)\ . \qquad (4.2\text{-}2)$$

Da definição do tensor de Maxwell (3.1-3) e de (4.1-4), resulta:

$$- F_{10} = F_{01} = c' , \qquad F^{1}{}_{0} = - F_{0}{}^{1} = c'e^{-2b}$$

$$- F_{1}{}^{0} = F^{0}{}_{1} = c'e^{-2a} , \qquad F^{10} = - F^{01} = c'e^{-2(a+b)} \qquad (4.2\text{-}3)$$

As demais componentes destes tensores são nulas.

Da definição do tensor $\tilde{F}_{\mu\nu}$ (3.2-8), de (4.2-3), (4.1-7), (4.1-3), (4.1-4) e (4.2-2), obtemos:

$$\begin{aligned} - \tilde{F}_{10} &= \tilde{F}_{01} = c' - ca', \\ \tilde{F}^{1}{}_{0} &= - \tilde{F}_{0}{}^{1} = e^{-2b}(c' - ca') , \\ - \tilde{F}_{1}{}^{0} &= \tilde{F}^{0}{}_{1} = e^{-2a} (c' - ca') , \\ \tilde{F}^{10} &= - \tilde{F}^{01} = e^{-2(a+b)} (c' - ca') . \end{aligned} \qquad (4.2\text{-}4)$$

As outras componentes são nulas.

Estamos agora preparados para calcular cada termo das equações (3.3- 6 e 11): com efeito, usando as expressões (4.2-4) e (4.1-4) na definição do tensor $\tilde{E}^{\mu\nu}$ (3.3-5), encontramos as seguintes componentes não nulas:

$$\tilde{E}^{00} = \frac{1}{8\pi}\, e^{-2a}\, e^{-2(a+b)}\, (c' - ca')^{2}$$

$$\tilde{E}^{11} = -\frac{1}{8\pi} e^{-2b} e^{-2(a+b)} (c' - ca')^2$$

$$\tilde{E}^{22} = \frac{1}{8\pi} r^{-2} e^{-2(a+b)} (c' - ca')^2$$

$$\tilde{E}^{33} = \csc^2\theta \, \tilde{E}^{22} \qquad (4.2\text{-}5)$$

Consideremos o termo $A^{\nu}{}_{|\alpha} \tilde{F}^{\mu\alpha}$. Das expressões (4.2-2), (4.1-6) e (4.2-4), encontramos para a única componente não nula:

$$A^{0}{}_{|\alpha} \tilde{F}^{0\alpha} = -e^{-2a} e^{-2(a+b)} (c' - ca')^2 \,. \qquad (4.2\text{-}6)$$

Vejamos o termo $\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{;\alpha}$. Usando as igualdades (4.2-4) e (4.1-12), obtemos:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = \left[-e^{-2(a+b)}((c'-ca')' - (c'-ca')(a'+b'-2r^{-1})) \,,\, 0,\, 0,\, 0\right] \qquad (4.2\text{-}7)$$

Das igualdades (4.2-4), (4.1-7) e (4.1-4), encontramos:

$$\frac{1}{2} \tilde{F}_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\beta\mu} = \left[-(c' - ca') a' e^{-2(a+b)} \,,\, 0,\, 0,\, 0 \right] \qquad (4.2\text{-}8)$$

Observando as identidades (2.4-20), temos das igualdades (4.1-18) as seguintes componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$G^{00} = e^{-2(a+b)} \left[r^{-2} (1 - e^{2b}) - 2r^{-1} b' \right]$$

$$G^{11} = -e^{-4b} \left[r^{-2} (1 - e^{2b}) + 2r^{-1} a' \right]$$

$$G^{22} = -r^{-2} e^{-2b} \left[a'' + a'^2 a'b' + r^{-1} (a' - b') \right]$$

$$G^{33} = G^{22} \csc^2 \theta . \qquad (4.2\text{-}9)$$

Usando as igualdades (4.2-5) a (4.2-9) nas equações (3.3-6 e 3.3-11), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem:

$$\begin{cases} (c' - ca')' - (c' - ca')(b' - 2r^{-1}) = 0 \\ e^{2a} \left[r^{-2} (1 - e^{2b}) - 2r^{-1} b' \right] - \frac{\varkappa}{8\pi} (c' - ca')^2 = 0 \\ e^{2a} \left[r^{-2} (1 - e^{2b}) + 2r^{-1} a' \right] + \frac{\varkappa}{8\pi} (c' - ca')^2 = 0 \\ e^{2a} \left[a'' + a'^2 - a'b' + r^{-1} (a' - b') \right] - \frac{\varkappa}{8\pi} (c' - ca')^2 = 0 \end{cases} \qquad (4.2\text{-}10)$$

Este sistema não é sobredeterminado (Apêndice C): a quarta equação segue das três primeiras. Temos portanto, três equações e três funções incógnitas: $a(r)$, $b(r)$ e $c(r)$. No acoplamento não mínimo de NOVELLO & SALIM [15], o sistema de equações correspondente é sobredeterminado [22].

A primeira equação em (4.2-10) tem como primeira integral

$$c' - ca' = - qe^{b} r^{-2} , \qquad (4.2\text{-}11)$$

onde q é uma constante de integração. Quando o campo gravitacional é **muito fraco**, temos de (4.1-7) que a' e b são aproximadamente nulos. Portanto, de (4.2-11) vemos que a constante q deve ser identificada como sendo a carga do sistema físico esfericamente simétrico.

A equação (4.2-11) nos permite eliminar c(r) das segunda e terceira equações do sistema (4.2-10). Assim, o sistema que devemos resolver é:

$$\begin{cases} c' - ca' = - qe^{b}\, r^{-2} \\ e^{2a}\left[r^{-1}\,(1 - e^{2b}) - 2b' \right] - r_e^2\, e^{2b}\, r^{-3} = 0 \\ e^{2a}\left[r^{-1}\,(1 - e^{2b}) + 2a' \right] + r_e^2\, e^{2b}\, r^{-3} = 0, \end{cases} \qquad (4.2\text{-}12)$$

onde:

$$r_e^2 := \frac{\varkappa q^2}{8\pi} . \qquad (4.2\text{-}13)$$

Esta constante é conhecida na literatura como raio de Reissner-Nordström [9].

Consideremos as seguintes definições:

$$X := e^{2a} \qquad , \qquad Y := e^{-2b} . \qquad (4.2\text{-}14)$$

Utilizando estas expressões no sistema (4.2-12), resulta:

$$\begin{cases} c' - \dfrac{c}{2}\,\dfrac{X'}{X} = -q\, Y^{-1/2}\, r^{-2} \\[2ex] X\left[r^{-1} \left(1 - \dfrac{1}{Y} \right) + \dfrac{Y'}{Y} \right] - r_e^2 \dfrac{1}{Y} r^{-3} = 0 \\[2ex] X\left[r^{-1} \left(1 - \dfrac{1}{Y} \right) + \dfrac{X'}{X} \right] + r_e^2 \dfrac{1}{Y} r^{-3} = 0 \end{cases} \qquad (4.2\text{-}15)$$

Adicionando e subtraindo as duas últimas equações, obtemos o seguinte sistema equivalente a (4.2-15):

$$\begin{cases} c' - \dfrac{c}{2}\,\dfrac{X'}{X} = -qY^{-1/2}\, r^{-2} \\[2ex] (XY)' = -2r^{-1}\, X\,(Y - 1) \\[2ex] XY' - X'Y = 2r_e^2\, r^{-3} \end{cases} \qquad (4.2\text{-}16)$$

cujas soluções (Apêndice D) se dividem em dois casos: i) $A = 0$ e ii) $A \neq 0$, onde A é uma constante de integração com dimensão de comprimento, que identificaremos mais adiante. Vejamos o primeiro caso:

i) $A = 0$

$$X(r) = \beta$$

$$Y(r) = 1 - \frac{r_e^2}{\beta r^2} \qquad (4.2\text{-}17)$$

$$c(r) = \frac{q\beta^{1/2}}{r_e}\left[\gamma - \cos^{-1}\left(\beta^{-1/2}\ \frac{r_e}{r} \right) \right] , \qquad (r > r_e)$$

Onde β e γ são constantes de integração.

Observando que:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \qquad (4.2\text{-}18)$$

é imediato verificarmos que (4.2-17) é de fato solução do sistema (4.2-16).

Levando em conta as condições de contorno:

$$\lim_{r \to \infty} X = \lim_{r \to \infty} Y = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{r \to \infty} c = 0 \ , \qquad (4.2\text{-}19)$$

isto é, que os campos gravitacional e eletrostático se anulam no "infinito", vemos de (4.2-17) que os valores de β e γ devem ser 1 e $\frac{\pi}{2}$ respectivamente:

$$X(r) = 1$$

$$Y(r) = 1 - \frac{r_e^2}{r^2} \qquad (4.2\text{-}20)$$

$$c(r) = \frac{q}{r_e}\left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{r_e}{r}\right]$$

Consideremos o segundo caso:

ii) $A \neq 0$

Neste caso, devido ao fato de as funções X(r), Y(r) e c(r) não poderem, em geral, ser expressas explicitamente em termos da coordenada r, estas apresentam-se sob a forma paramétrica. Expressando a coordenada r como função de um parâmetro adimensional x, e observando que

$$\frac{d}{dr} = \left(\frac{dr}{dx} \right)^{-1} \frac{d}{dx} \ , \tag{4.2-21}$$

O sistema (4.2-16) torna-se:

$$\begin{cases} \dot{c} - \dfrac{c}{2} \dfrac{\dot{X}}{X} = -qY^{-1/2}\, r^{-2}\, \dot{r} \\ \\ \dot{X}Y + X\dot{Y} = -2X\,(Y - 1)\, r^{-1}\, \dot{r} \\ \\ X\dot{Y} - \dot{X}Y = 2r_o^2\, r^{-3}\, \dot{r} \end{cases} \tag{4.2-22}$$

onde os pontos indicam diferenciação em relação ao parâmetro x. A solução do sistema (4.2-16) para A diferente de zero, pode ser de três tipos, conforme a constante adimensional

$$\lambda := \left(\frac{2r_o}{A} \right)^2 \tag{4.2-23}$$

seja menor, igual ou maior que a unidade (notemos os gráficos ao fim do capítulo):

1.º) $\lambda < 1$:

$$\begin{aligned} r(x) &= B\sqrt{2}\ \frac{A}{x} \left\{ \left[1 - (px)^2 \right] \left[\frac{1+px}{1-px} \right]^{1/p} \right\}^{1/2} \\ X(x) &= \frac{1}{8B^2} \left[\frac{1-px}{1+px} \right]^{1/p} \\ Y(x) &= (1-x)^2 \left[1 - (px)^2 \right]^{-1} \\ c(x) &= \left[\frac{1+px}{1-px} \right]^{-1/2p} \left\{ \frac{q}{\sqrt{2}\ AB}\, \ln \left[\frac{1+px}{1-px} \right]^{1/2p} + c_o \right\} , \end{aligned} \tag{4.2-24}$$

onde B e c_o são constantes de integração, e

$$p := (1 - \lambda)^{1/2} \tag{4.2-25}$$

2.°) $\lambda = 1$:

$$r(x) = B \sqrt{2} \; \frac{A}{x} \; e^{x}$$

$$X(x) = \frac{1}{8B^2} \; e^{-2x}$$

(4.2-26)

$$Y(x) = (1 - x)^2$$

$$c(x) = \left[\frac{qx}{\sqrt{2} \; AB} + c_o \right] e^{-x}$$

3.°) $\lambda > 1$:

$$r(x) = B \sqrt{2} \; \frac{A}{x} \left[1 + (nx)^2 \right]^{1/2} e^{\frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{nx} \right]}$$

$$X(x) = \frac{1}{8B^2} \; e^{- \frac{2}{n} \left[\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{nx} \right]}$$

$$Y(x) = (1 - x)^2 \left[1 + (nx)^2 \right]^{-1} \tag{4.2-27}$$

$$c(x) = \left[\frac{q}{\sqrt{2} \; ABn} \left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{nx} \right) + c_o \right] e^{- \frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{nx} \right]}$$

onde,

$$n := (\lambda - 1)^{1/2} \qquad (4.2\text{-}28)$$

Substituindo as funções (4.2-24), (4.2-26), (4.2-27) e suas derivadas em relação a x no sistema (4.2-22), encontramos identidades, o que evidencia que, de fato, estas funções são soluções do sistema.

As expressões (4.2-24), (4.2-26) e (4.2-27) são funções contínuas do parâmetro x no segmento:

$$0 < x < 1 \, . \qquad (4.2\text{-}29)$$

A função r(x) é inversível neste segmento (r é uma função decrescente de x), embora, em geral, não possamos estabelecer a função x(r) analiticamente. Este é o único intervalo de variação do parâmetro x que define funções X(r), Y(r) e c(r) as quais satisfazem as condições de contorno (4.2-19). Como veremos na próxima seção, não podemos obter os potenciais X(r), Y(r) e c(r) para raios menores que um determinado raio mínimo r_o.

Para identificarmos as constantes A, B e c_o, consideremos o caso em que a carga do sistema físico esfericamente simétrico é nula. Segue das definições (4.2-13), (4.2-23) e (4.2-25) que:

$$q = 0 \;\Rightarrow\; r_e = 0 \; , \quad \lambda = 0 \; , \quad p = 1 \, . \qquad (4.2\text{-}30)$$

Portanto, a solução é do primeiro tipo. A primeira função em (4.2-24) fornece:

$$x = \left[\frac{1}{AB\sqrt{2}} \; r - 1 \right]^{-1} \qquad (4.2\text{-}31)$$

Levando esta função na segunda expressão em (4.2-24), obtemos:

$$X(r) = \frac{1}{8B^2} \left[1 - \frac{2AB\sqrt{2}}{r} \right] \qquad (4.2\text{-}32)$$

Da condição de contorno (4.2-19) e da função (4.2-32), encontramos:

$$B \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \; . \qquad (4.2\text{-}33)$$

Substituindo este valor em (4.2-32), temos:

$$X(r) = 1 - \frac{A}{r} \; . \qquad (4.2\text{-}34)$$

Analogamente, substituindo (4.2-31) e (4.2-33) na terceira função de (4.2-24) obtemos:

$$Y(r) = 1 - \frac{A}{r} \; . \qquad (4.2\text{-}35)$$

Levando em conta estes resultados, temos a seguinte expressão para o tensor métrico esfericamente simétrico (4.1-3):

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}\left[1 - \frac{A}{r}\ ,\ -\ \left(1 - \frac{A}{r}\right)^{-1},\ -r^2\ ,\ -r^2\ \text{sen}^2\theta\right], \qquad (4.2\text{-}36)$$

que é a solução de Schwarzschild. Este fato já era esperado, uma vez que $r_e = 0$ faz com que as duas últimas equações de (4.2-12) sejam aquelas de (4.1-20) as quais determinam a solução de Schwarzschild (4.1-21), conforme vimos na seção 4.1. Da mesma forma que naquela ocasião, agora lançamos mão do limite newtoniano da equação de movimento de uma partícula no campo gravitacional, para identificarmos A como sendo o raio de Schwarzschild (4.1-22):

$$A \equiv r_s\ . \qquad (4.2\text{-}37)$$

Substituindo (4.2-30), (4.2-31) e (4.2-33) na quarta função de (4.2-24), obtemos para o potencial eletrostático:

$$c(r) = c_o\ \left(\ 1 - \frac{A}{r}\ \right)^{1/2}\ . \qquad (4.2\text{-}38)$$

Desta função e das condições de contorno (4.2-19), resulta:

$$c_o = 0\ , \qquad (4.2\text{-}39)$$

e portanto:

$$c(r) = 0\ . \qquad (4.2\text{-}40)$$

Os valores das constantes A, B e c_o em (4.2-26) e

(4.2-27) são os mesmos que em (4.2-24) devido à continuidade das funções em relação ao parâmetro λ definido em (4.2-23).

4.3- ANÁLISE DAS SOLUÇÕES

Inicialmente vamos analisar o caso

$$i): \quad A \equiv r_s = 0 \, .$$

Vemos da igualdade (4.1-22) que, neste caso, a massa do sistema físico esfericamente simétrico é nula. Embora esta solução pareça, sob o ponto de vista físico, algo irreal, já que na Natureza, cargas apresentam-se com massa, ela é útil sob o ponto de vista comparativo desta teoria com aquela em que os campos gravitacional e eletromagnético interagem segundo o princípio do acoplamento mínimo.

Das funções (4.2-20) e das definições (4.2-14), temos para o tensor métrico esfericamente simétrico (4.1-3) a expressão:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.} \left[1 \, , \, - \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right)^{-1} , \, -r^2 \, , \, -r^2 \text{sen}^2\theta \right], \qquad (4.3\text{-}1)$$

válida para $r > r_e$. Expandindo a terceira função em (4.2-20) em uma série de potências de $\frac{r_e}{r}$ [23], temos para o potencial eletrostático:

$$c(r) = \frac{q}{r} \left[1 + \frac{1}{2.3} \frac{r_e^2}{r^2} + \frac{1.3}{2.4.5} \left(\frac{r_e^2}{r^2} \right)^2 + \ldots \right], \qquad (4.3\text{-}2)$$

válida para $r > r_e$.

Na teoria da relatividade geral, este mesmo problema esfericamente simétrico tem a solução de Reissner-Nordström [9]:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}\left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} , - \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right)^{-1} , - r^2 , -r^2\text{sen}^2\theta \right]$$

$$c(r) = \frac{q}{r} \qquad (4.3\text{-}3)$$

Comparando (4.3-3) com (4.3-1) e (4.3-2), vemos que as duas teorias apresentam soluções distintas para o problema: a componente g_{00}, em (4.3-1), não é afetada pela presença da carga, enquanto o mesmo não ocorre na solução de Reissner-Nordström. Outra diferença é que o tensor métrico em (4.3-1) é definido apenas para $r > r_e$, enquanto que o tensor métrico de Reissner-Nordström, é definido para todo $r > 0$. Além disto, o potencial eletrostático (4.3-2) envolve a constante de Einstein $\varkappa$, mediante r_e (4.2-13), o que não ocorre na solução de Reissner-Nordström.

Contudo, as duas soluções tem aproximadamente o mesmo comportamento para $r \gg r_e$:

$$g_{\mu\nu} \simeq \text{diag.}\, [\, 1, -1, -r^2, -r^2\text{sen}^2\theta \,]$$

$$c(r) \simeq \frac{q}{r} \, , \qquad (4.3\text{-}4)$$

onde desprezamos termos de ordem maior ou igual a dois em r_e/r, quando comparadas com a unidade.

Vejamos agora o caso

$$ii)\ A \equiv r_s \neq 0 .$$

Da definição (4.2-23), vemos que λ é fúnção da razão entre o raio de Reissner-Nordström e o de Schwarzschild, ou de forma equivalente, entre a carga e a massa do sistema físico esfericamente simétrico:

$$\lambda = G^{-1} \left[\frac{q}{m} \right]^2 , \tag{4.3-5}$$

onde usamos o seguinte valor para a constante de Einstein:

$$\varkappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \tag{4.3-6}$$

e a igualdade (4.1-22). Quando tomamos o valor numérico àcima para $\varkappa$, estamos supondo que o campo gravitacional interaja segundo o princípio do acoplamento mínimo com a matéria ponderável e que, no limite de campos "fracos", obtenhamos a teoria Newtoniana [9].

Considerando que as constantes A, B e c_o são dadas em (4.2-37), (4.2-33) e (4.2-39), vamos a seguir exibir o comportamento dos potenciais X(r), Y(r) e c(r) em relação à coordenada r, no intervalo fisicamente aceitável: $0 < x < 1$ (como já mencionamos, este intervalo define os potenciais que satisfazem as condições de contorno (4.2-19)).

Os potenciais X(r), Y(r) e c(r) são definidos no seguinte intervalo de variação da coordenada r:

$$r_o < r < \infty \,, \tag{4.3-7}$$

onde:

$$\lim_{x \to 0} r(x) = \infty \tag{4.3-8}$$

e onde r_o é o raio de "máxima aproximação" do centro de simetria dado por:

$$r_o := \lim_{x \to 1} r(x) = \begin{cases} r_s & ,\lambda = 0 \\ \frac{1}{2} r_s \left\{ [\, 1 - p^2 \,] \left[\frac{1 + p}{1 - p} \right]^{1/p} \right\}^{1/2} & ,0 < \lambda < 1 \\ \frac{1}{2}\, r_s e & ,\lambda = 1 \\ r_s e^{\frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{n} \right]} & ,\lambda > 1 \end{cases} \tag{4.3-9}$$

Os parâmetros p e n são definidos em (4.2-25) e (4.2-28).

Para uma dada massa, r_o é uma função crescente de λ. Portanto, de (4.3-5), vemos que, quanto maior for a carga, menos podemos nos aproximar da origem. A menor distância de aproximação é o raio de Schwarzschild, ocorrendo quando a carga é nula ($\lambda = 0$).

O potencial gravitacional X(r) é uma função crescente de r. Seu valor mínimo ocorre na vizinhança de r_o:

$$X_o := \lim_{r \to r_o} X(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{1 - p}{1 + p} \right)^{1/p} & , 0 \leq \lambda < 1 \\ e^{-2} & , \lambda = 1 \\ e^{-\frac{2}{n}\left[\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{n} \right]} & , \lambda > 1 \end{cases}$$

(4.3-10)

tendendo à unidade, quando r tende ao infinito:

$$\lim_{r \to \infty} X(r) = 1 \qquad (4.3\text{-}11)$$

X_o, por sua vez, é uma função crescente de λ. Quando a carga é nula, isto é $\lambda = 0$, vemos de (4.2-25) e (4.3-10) que:

$$X_o\ (q = 0) = 0. \qquad (4.3\text{-}12)$$

Na figura 1, encontramos o gráfico X(r) x r para quatro valores de λ: 0, $\frac{1}{2}$, 1 e 2. Notemos que para $\lambda = 0$, X(r) é o potencial gravitacional de Schwarzschild (4.2-34).

O potencial Y(r) é uma função crescente de r, anulando-se na vizinhança de r_o:

$$\lim_{r \to r_o} Y(r) = 0 \qquad (4.3\text{-}13)$$

e tendendo à unidade, quando r tende ao infinito:

$$\lim_{r \to \infty} Y(r) = 1 \qquad (4.3\text{-}14)$$

Na figura 2 encontra-se o gráfico $Y(r) \times r$. O potencial de Schwarzschild ocorre para $\lambda = 0$, sendo igual a $X(r)$ ((4.2-34) e (4.2-35)).

O potencial eletrostático $c(r)$, para $\lambda < 1$, tem um comportamento, cujas conseqüências físicas são curiosas. $c(r)$ de uma carga positiva é uma função crescente de r no intervalo:

$$r_o < r < r_c \, , \qquad (4.3\text{-}15)$$

onde r_o é dado pela segunda igualdade correspondente em (4.3-9) e r_c por:

$$r_c = \frac{pe^{p+1}}{e^{2p} - 1} \, r_a \, . \qquad (4.3\text{-}16)$$

Em $r = r_c$, $c(r)$ atinge um valor máximo:

$$c\,(r_c) = 2e^{-1} \, \frac{q}{r_a} \, , \qquad (4.3\text{-}17)$$

tornando-se decrescente para $r > r_c$ e anulando-se no infinito.

$$\lim_{r \to \infty} c(r) = 0 \, . \qquad (4.3\text{-}18)$$

Assim, uma carga positiva, vindo do infinito, seria "repelida" (nos referimos à interação eletrostática) pela carga positiva na origem, até atingir r_c, a partir de onde ela passaria a ser "atraída".

Esta região de atração entre as cargas positivas é muito pequena, quando comparada ao raio de Schwarzschild (observemos as figuras 3 e 4), e só ocorre no domínio de definição do potencial eletrostático, para valores de λ menores do que a unidade, isto é, para:

$$\frac{q}{m} < G^{1/2}, \tag{4.3-19}$$

onde usamos (4.3-5). Por exemplo, para uma partícula com a carga do próton, a massa deve ser no mínimo da ordem de grandeza de 10^{-6}g, para que esta região ocorra. A massa do próton é da ordem de 10^{-24}g e, portanto, esta região não é prevista.

Obviamente um comportamento análogo para o elétron (cuja massa é da ordem de 10^{-27}g) também não é previsto.

Para $\lambda = 1$, podemos expressar o potencial eletrostático analiticamente em termos de r. Com efeito, de (4.2-26), temos:

$$c(r) = \frac{q}{r}, \tag{4.3-20}$$

tendo um valor máximo (q positiva) na vizinhança de r_o:

$$c_o := \lim_{r \to r_o} c(r) = 2e^{-1} \frac{q}{r_s} . \tag{4.3-21}$$

A razão de (4.3-21) e (4.3-17) terem a mesma expressão, encontra-se no fato de que

$$\lim_{\lambda \to 1} r_c = r_o \quad . \tag{4.3-22}$$

Para $\lambda > 1$, o potencial eletrostático de uma carga positiva é uma função decrescente de r, tendo seu valor máximo na vizinhança de r_o.

$$c_o := \lim_{r \to r_o} c(r) = \frac{q}{r_o} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} - tg^{-1} \frac{1}{n} \right] \tag{4.3-23}$$

e anulando-se no infinito:

$$\lim_{r \to \infty} c(r) = 0 \ . \tag{4.3-24}$$

Na figura 3, encontra-se o gráfico de $c(r) \times r$. A região $r_o < r < r_c$, para $\lambda = 1/2$, encontra-se ampliada na figura 4.

Como já comentamos, em geral não é possível expressar os potenciais em termos de um número finito de funções elementares de r. Contudo, podemos expressá-los em uma série infinita de potências de r^{-1}. O procedimento, que é aplicado às soluções (4.2-24), (4.2-26) e (4.2-27) é iterativo, e baseia-se na inversão de séries de potências [24]. Com efeito, obtemos as seguintes expressões para as componentes g_{oo} e g_{11} do tensor métrico, e para o potencial eletrostático:

$$g_{oo} = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{1}{6}\,\frac{r_s\,r_e^2}{r^3} + \mathcal{O}(4)$$

$$g_{11} = -\left[\,1 - \frac{r_s}{r} - \frac{r_e^2}{r^2} - \frac{1}{2}\,\frac{r_s\,r_e^2}{r^3} + \mathcal{O}(4)\,\right]^{-1} \qquad (4.3\text{-}25)$$

$$c(r) = \frac{q}{r}\left[\,1 - \frac{1}{24}\,\frac{r_s^2}{r^2} + \frac{1}{6}\,\frac{r_e^2}{r^2} + \mathcal{O}(3)\,\right].$$

Onde $\mathcal{O}(n)$ indica termos de ordem igual ou maior a n. Naturalmente também podemos obter estas expressões através da solução por séries de potências em r^{-1} do sistema (4.2-16).

Quando a gravitação e o eletromagnetismo interagem segundo acoplamento mínimo, obtemos para o problema esfericamente simétrico a solução de Reissner-Nordström [9]:

$$g_{oo} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_e^2}{r^2}$$

$$g_{11} = -\left[\,1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_e^2}{r^2}\,\right]^{-1} \qquad (4.3\text{-}26)$$

$$c(r) = \frac{q}{r}$$

Notemos que a expressão do potencial eletrostático em (4.3-25) envolve a massa do sistema físico, mediante r_s, ao contrário de sua expressão em (4.3-26).

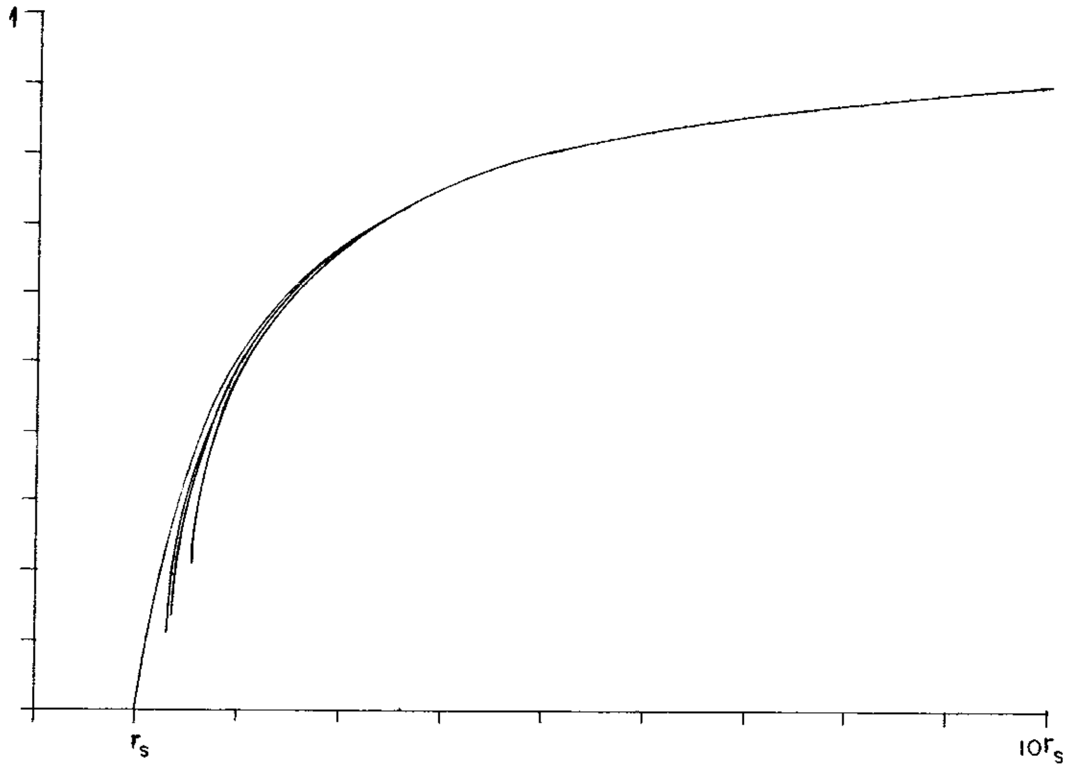

Figura 1: Gráfico X(r) versus r. Da esquerda para a direita as curvas referem-se respectivamente a λ = 0, 1/2, 1 e 2.

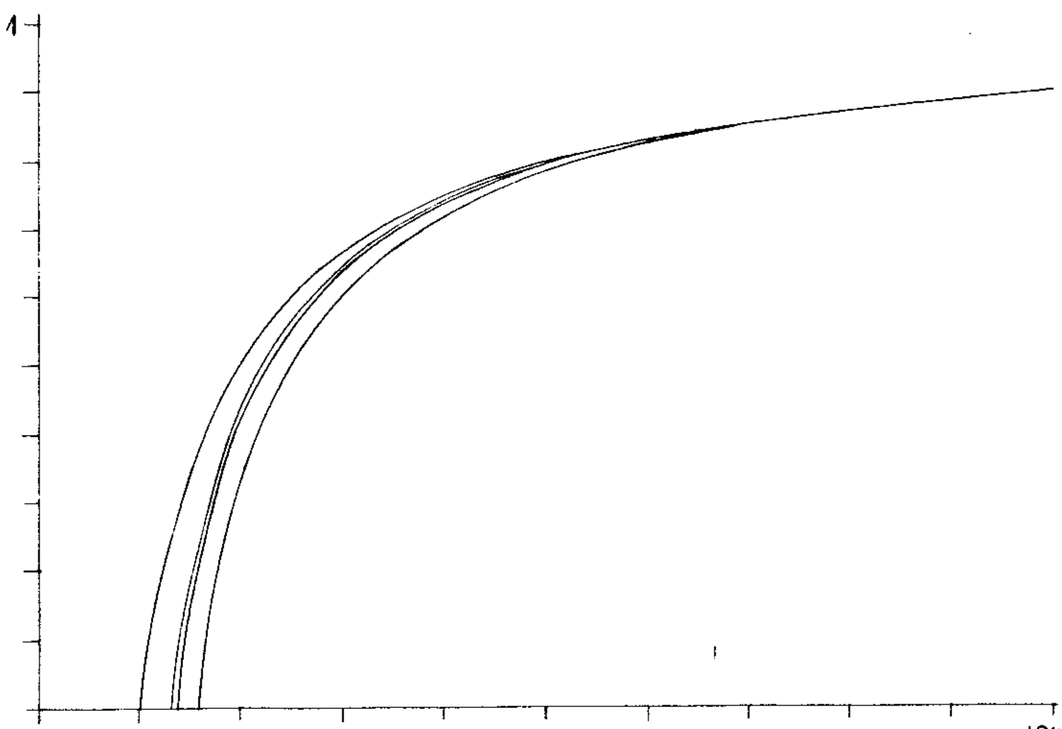

Figura 2: Gráfico Y(r) versus r. Da esquerda para a direita as curvas referem-se respectivamente a λ = 0, 1/2, 1 e 2.

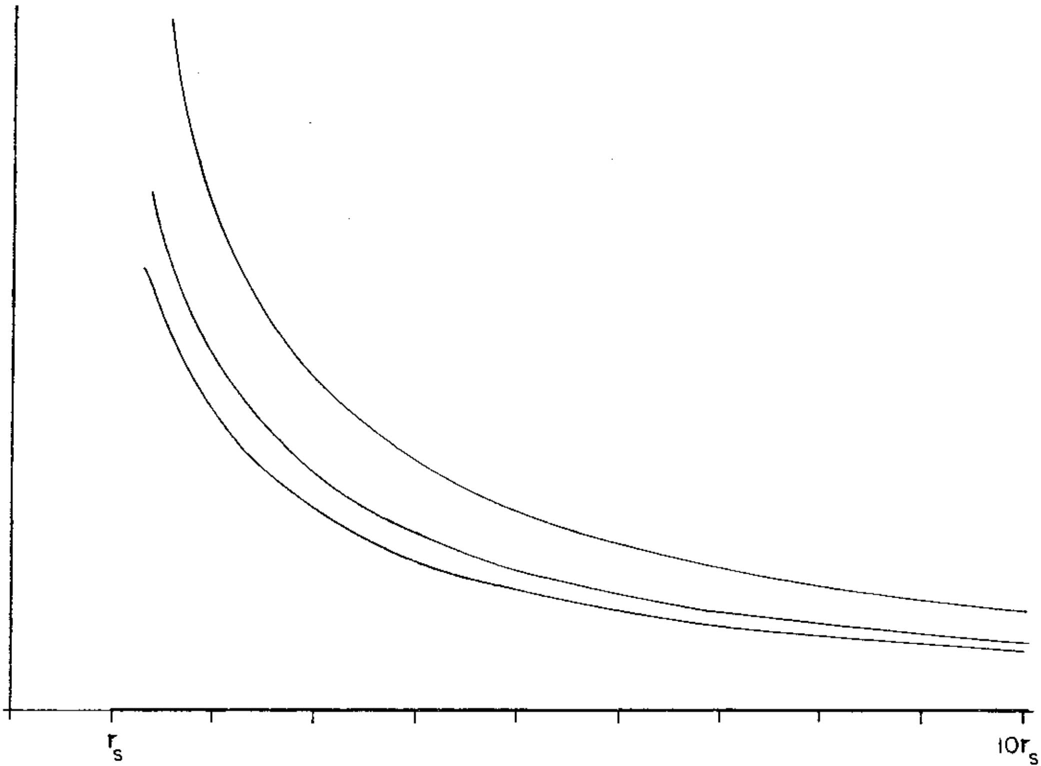

Figura 3: Gráfico c(r) versus r. De baixo para cima as curvas referem-se respectivamente a λ = 0, 1/2, 1 e 2.

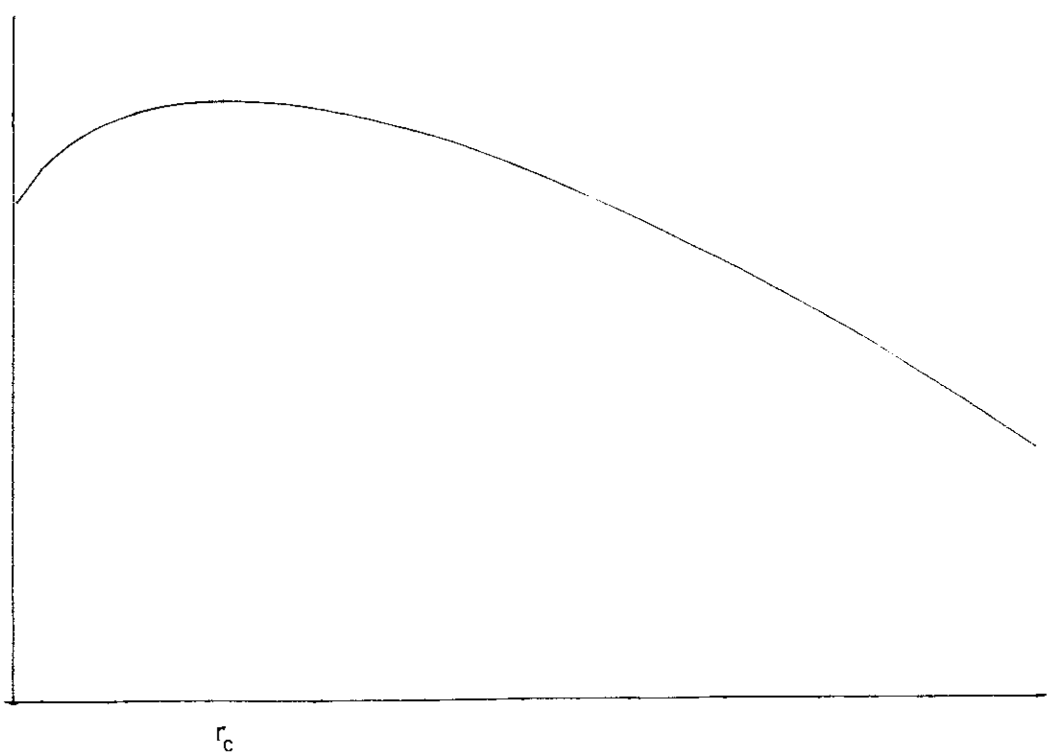

Figura 4: Ampliação da extremidade esquerda da curva c(r) versus r para λ = 1/2.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi possível formularmos uma teoria de interação entre os campos gravitacional e eletromagnético, onde os potenciais gravitacionais são os vetores que formam a tétrada. Por um "princípio" de acoplamento não mínimo, chegamos às equações de movimento (3.3-6) e (3.3-11) que não envolvem constantes de acoplamento. Estas equações, no caso estático e esfericamente simétrico formam um sistema determinado, cuja solução fornece praticamente os mesmos resultados que a de Reissner-Nordström, para valores da coordenada radial r muito maiores que os raios de Schwarzschild e Reissner-Nordström.

Um próximo passo na investigação deste particular acoplamento não mínimo é o seu confronto com dados observáveis (esta teoria viola a conservação da carga eletromagnética). Caso a teoria esteja dentro dos limites da observação, seria válido investigarmos uma possível extensão analítica para raios menores que o raio mínimo r_o, assim como suas implicações cosmológicas.

Merece investigação a possibilidade de interpretarmos $\tilde{j}^{\mu}$ em (3.3-18) como uma densidade de corrente "eletromagnética" (esta interpretação é considerada por NOVELLO & SALIM [15]) e a análise das propriedades de $\tilde{j}^{o}$ (r) para a solução estática e esfericamente simétrica apresentada no capítulo IV.

Foi possível, ainda, apresentarmos teorias de acoplamento não mínimo, onde a carga eletromagnética se conserva, embora estes acoplamentos não tenham a motivação do referido àcima. Para uma destas teorias apresentamos as equações de movimento. Um próximo passo seria a obtenção da solução estática e esfericamente simétrica, bem como a possibilidade de soluções cosmológicas.

APÊNDICE A

DEMONSTRAÇÃO DAS IDENTIDADES (2.3-17)

Consideremos uma transformação infinitesimal de coordenadas:

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x). \tag{A.1}$$

Frente a estas transformações, as variações locais do covetor $e_{A\mu}(x)$ são [8]:

$$\bar{\delta}\, e_{A\mu} = -\, e_{A\alpha}\, \xi^{\alpha}{}_{,\mu} - e_{A\mu,\alpha}\, \xi^{\alpha} . \tag{A.2}$$

A variação local da ação gravitacional é (notemos (2.3-11)):

$$\bar{\delta} \int_{\Omega} \mathcal{L}_{G}\, d^4x = \int_{\Omega} K^{\mu}{}_{\nu}\, e^{A\nu}\, \bar{\delta}\, e_{A\mu}\, |e|\, d^4x . \tag{A.3}$$

Substituindo nesta expressão a igualdade (A.2) e usando os resultados do capitulo I, temos:

$$\bar{\delta} \int_{\Omega} \mathcal{L}_{G}\, d^4x = - \int_{\Omega} \left(K^{\mu}{}_{\nu}\, \xi^{\nu}{}_{;\mu} + K^{\mu}{}_{\nu}\, \gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\, \xi^{\alpha} \right) |e|\, d^4x , \tag{A.4}$$

A primeira integração em (A.4) pode ser expressa como:

$$\int_\Omega K^\mu{}_\nu\, \xi^\nu{}_{;\mu}\, |e|\, d^4x = \int_\Omega (K^\mu{}_\nu\, \xi^\nu)_{;\mu}\, |e|\, d^4x - \int_\Omega K^\mu{}_{\nu;\mu}\, \xi^\nu\, |e|\, d^4x, \qquad (A.5)$$

mas:

$$\int_\Omega (K^\mu{}_\nu\, \xi^\nu)_{;\mu}\, |e|\, d^4x = \int_\Omega (K^\mu{}_\nu\, \xi^\nu)_{,\mu}\, d^4x\ , \qquad (A.6)$$

que pode ser transformada numa integral de superfície sobre a fronteira de Ω, onde $\xi^\alpha(x)$ é nulo . Portanto, esta integral não contribui, e a (A.4) torna-se:

$$\bar{\delta} \int_\Omega \mathcal{L}_G\, d^4x = - \int [-K^\mu{}_{\alpha;\mu}\, \xi^\alpha + K^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\, \xi^\alpha]\, |e|\, d^4x\ . \qquad (A.7)$$

Considerando esta expressão, a invariabilidade da ação gravitacional:

$$\bar{\delta} \int_\Omega \mathcal{L}_G\, d^4x = 0 \qquad (A.8)$$

e o fato de que o vetor infinitesimal $\xi^\alpha(x)$ é arbitrário, obtemos as identidades (2.3-17):

$$K^\mu{}_{\alpha;\mu} - K^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu{}_{\mu\alpha} \equiv 0\ . \qquad (A.9)$$

APÊNDICE B

CÁLCULO DOS TENSORES $K^{\mu\nu}_{(i)}$

Levando em conta as expressões do capítulo I, obtemos por cálculo direto:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial e_{\mathbf{A}\mu}} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}\, e^{\mathbf{A}}{}_{\beta} + \delta^{\mu}{}_{\beta}\, e^{\mathbf{A}}{}_{\alpha} \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial e_{\mathbf{A}\mu}} = -\left(g^{\mu\beta}\, e^{\mathbf{A}\alpha} + g^{\mu\alpha}\, e^{\mathbf{A}\beta} \right) \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial |e|}{\partial e_{\mathbf{A}\mu}} = e^{\mathbf{A}\mu}\, |e| \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \Lambda_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial e_{\mathbf{A}\mu}} = \Lambda_{\alpha\beta}{}^{\mathbf{A}}\, g^{\mu\sigma} \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial \Lambda_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial e_{\mathbf{A}\mu,\nu}} = e^{\mathbf{A}\sigma}\, \delta^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}\ , \tag{B.5}$$

onde o tensor $\delta^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta}$ é definido por:

$$\delta^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} := \delta^{\mu}{}_{\alpha}\, \delta^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\beta}\, \delta^{\nu}{}_{\alpha}\ . \tag{B.6}$$

Considerando estas expressões e o fato de que para qualquer tensor anti-simétrico $T^{\alpha\beta}$, vale a igualdade [9]:

$$\frac{1}{|e|} \left(|e| \; T^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \; , \tag{B.7}$$

podemos chegar às expressões em (2.3-20) dos tensores $K^{\mu\nu}_{(i)}$. Os cálculos também são diretos, porém tediosos.

APÊNDICE C

DEMONSTRAÇÃO DE QUE O SISTEMA (4.2-10) NÃO É SOBREDETERMINADO

Subtraindo a segunda das equações em (4.2-10) da terceira obtemos:

$$(a' + b') = - \frac{\varkappa}{8\pi} re^{-2a} (c' - ca')^2. \tag{C.1}$$

Diferenciando a terceira equação em relação à coordenada radial r, e em seguida, usando as três primeiras equações e a igualdade (C.1), obtemos:

$$e^{2a} [a'' + (a' - b') (a' + r^{-1})] - \frac{\varkappa}{8\pi} (c' - ca')^2 = 0 \tag{C.2}$$

que é a expressão da quarta equação. Portanto o sistema (4.2-10) não é sobredeterminado: temos três funções e três equações independentes.

APÊNDICE D

SOLUÇÃO DO SISTEMA (4.2-16)

Da segunda equação em (4.2-16) obtemos [23]:

$$Y(r) = 2X^{-1}\, r^{-2} \left[\int Xr\, dr + \alpha \right] , \tag{D.1}$$

onde α é uma constante de integração. Da terceira equação em (4.2-16) obtemos:

$$Y(r) = 2X \left[r_o^2 \int r^{-3}\, X^{-2}\, dr + \beta \right] , \tag{D.2}$$

onde β é uma constante. Igualando estas expressões e efetuando a seguinte mudança de variável:

$$u := Xr , \tag{D.3}$$

obtemos, após diferenciarmos em relação a r:

$$r_o^2\, r^{-1}\, u^{-1} = \left[\int u dr + \alpha \right] (- 2u^{-2})\, u' + 1 . \tag{D.4}$$

Definindo:

$$v := \int u dr + \alpha \quad \rightarrow \quad v' = u \, , \tag{D.5}$$

de (D.4) temos, após diferenciarmos em relação à coordenada r:

$$v'' + \frac{v'}{v} \frac{1}{2} \left(r_e^2 \, r^{-1} - v' \right) = 0 \tag{D.6}$$

A solução desta equação encontra-se tabelada em KAMKE [25]. De sua solução podemos determinar X(r) mediante (D.5) e (D.3). Em seguida, substituimos X(r) em (D.1), obtendo Y(r). Finalmente, substituindo as expressões encontradas para os potenciais gravitacionais X(r) e Y(r) na primeira das equações do sistema (4.2-16), obtemos o potencial eletrostático c(r). Após algumas manipulações nas expressões, encontramos aquelas apresentadas no texto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **IVANENKO, D. & SARDANASHVILY, G.** - "The Gauge Treatment of Gravity". Phys. Rep. 94, 1-45, (1983).

[2] **MØLLER, C.** - "On the Crisis in the Theory of Gravitation and a Possible Solution". Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 39, no. 13, (1978).

[3] **MØLLER, C.** - "Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity". Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 1, no. 10, (1961).

[4] **PELLEGRINI, C. & PLEBANSKI, J.** - "Tetrad Fields and Gravitational Fields". Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 2, no. 4, (1963).

[5] **HAYASHI, K. & SHIRAFUJI, T.** - "New General Relativity". Phys. Rev. D19, 3524, (1979).

[6] **PIRANI, F. A. E.** - "Tetrad Formulation of General Relativity Theory". Bull. Acad. Pol. Sci. III, 5, 143, (1957).

[7] **SCHOUTEN, J. A.** - "Ricci-Calculus". Second Edition, Berlin, Springer-Verlag, (1954).

[8] **ANDERSON, J. L.** - "Principle of Relativity Physics". New York, Academic Press Inc., (1967).

[9] **CARMELI, M.** - "Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory". U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., (1982).

[10] WEITZENBÖCK, R. - Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Physik-Math. 466, (1928).

[11] KAEMPFFER, F. A. - "Vierbein Field Theory of Gravitation". Phys. Rev. 165, 1420, (1968).

[12] MARSH, G.E. - "Tetrads and the Gravitational-Inertial Field". Aust. J. Phys. 27, 131-133, (1974).

[13] OHANIAN, H. C. - "Gravitation and the New Improved Energy-Momentum Tensor". J. Math. Phys. 14, 1892, (1973).

[14] DRUMMOND, I. T. & HATHRELL, S. J. - "QED Vacuum Polarization in a Background Gravitational Field and its Effect on the Velocity of Photons". Phys. Rev. D22, 343, (1980).

[15] NOVELLO, M. & SALIM, J. M. - "Nonlinear Photons in the Universe". Phys. Rev. D20, 377, (1979).

[16] NOVELLO, M. & JORDA, S.D. - "Does there exist a cosmological horizon problem?". CBPF-NF-014/88, (1988).

[17] MEYER, H. - "Møller's Tetrad Theory of Gravitation as a Special Case of Poincaré Gauge Theory - A Coincidence?". Gen. Rel. and Grav. 14, 531, (1982).

[18] JACKSON, J. D. - "Classical Eletrodynamics". Second Edition, U. S. A., John Wiley & Sons, Inc., (1975).

[19] FOSTER, J. & NIGHTINGALE, J. D. - "A Short Course in General Relativity". New York, Longman Inc., (1979).

[20] GATHA, K. M. & DUTT, R. C. - "Tetrads, Anholonomic Coordinates and Space-Time Geometry". Aust. J. Phys., 24, 631-652, (1971).

[21] LORD, E. A. & SINHA, K. P. - "Spin and Mass Content of Linearized Poincaré Gauge Theories". Pramãna-J. Phys. 30, 511, (1988).

[22] VON RÜCKERT, E. - "Um Estudo do Acoplamento Não-Mínimo entre a Gravitação e o Eletromagnetismo". Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, CBPF, (1982).

[23] DWIGHT, H. B. - "Tables of Integrals and Other

Mathematical Data". Revised Edition, New York, The MacMillan Company, (1947).

[24] KAPLAN, W. - "Advanced Calculus". First Edition, Michigan, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1952).

[25] KAMKE, E. - "Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen". New York, Chelsea Publishing Company, (1971).

"TEORIAS DE TÉTRADA DA GRAVITAÇÃO E O ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO ENTRE OS CAMPOS GRAVITACIONAL E ELETROMAGNÉTICO"

EDISOM DE SOUZA MOREIRA JUNIOR

Tese de Mestrado apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológio, perante banca examinadora constituída dos seguintes professores:

José Martins Salim (Presidente)

Bernhard Lesche

José Antonio Martins Simões

Mário Novello (Suplente)

Rio de Janeiro, 06 de dezembro de 1989