

Marco Aurélio Cattacini Kneipp

**ASPECTOS QUÂNTICOS DE MODELOS DE GAUGE HETERÓTICOS
COM SUPERSIMETRIA (1,0)**

Tese de
MESTRADO

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO**

1989

A minha mãe

AGRADECIMENTOS

Durante a realização dessa tese, várias pessoas muito me apoiaram. Gostaria de agradecer principalmente:

— A J. A. Helayël-Neto que, através de conversas e de suas fantásticas aulas (obras de arte), além de ter-me ensinado grande parte do que sei sobre Física Teórica, ensinou-me a pensar Física.

— Aos colegas de estudo e convívio do DCP: Carlos Alberto, pelas muitas contas que fizemos e idéias que trocamos; a "Tião" e Jorge Stephany pelas muitas dúvidas que me esclareceram; a José Luiz pelos muitos papos e todo resto da turma.

— A todos outros colegas do CBPF. Em particular a minha grande amiga Rosana, por sua amizade e seu sorriso, que muito me fortaleceram para a realização dessa tese.

— A R. Dória, J. A. Helayël-Neto e a Universidade Católica de Petrópolis, que proporcionaram a realização de diversos cursos, que tanto enriqueceram minha formação.

— A Myriam, Fátima, William, Vera, Denise e todo pessoal do CBPF.

3 - Geração Dinâmica de Massa para os supercampos de Gauge na SUSY (1,0)	52
3.1 - Cálculo de Loops no Superespaço (1,0)	53
3.2 - Comentários sobre a Questão da Geração Dinâmica de Massa na SQED ₂ - (1,0)	58
4 - Conclusão	63
Apêndice A - O Grupo de Lorentz	65
A.1 - O Grupo de Lorentz em (1, D - 1) Dimensões	65
A.1.1 - Espinores Quirais ou de Weyl	69
A.1.2 - Espinores de Majorana	71
A.2 - O Grupo de Lorentz em (1+1) Dimensões	72
A.2.1 - A Representação Vetorial	72
A.2.2 - A Representação Espinorial	73
Apêndice B - Resultados Úteis ao Cálculo dos Superpropagadores	76
B.1 - Cálculo de M para o Caso de Matéria	77
Referências	78

SUMÁRIO

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Sumário	iv
Introdução	1
1 - A Supersimetria $N = 1/2 - D = 2$	5
1.1 - Introdução a Supersimetria	5
1.2 - A Supersimetria $N = 1/2 - D = 2$	9
1.3 - Teorias de Gauge Supersimétricas $N = 1/2 - D = 2$	21
1.4 - Simetrias e Correntes de Noether	30
1.4.1 - Simetria de Gauge	31
1.4.2 - Simetria Quiral	33
2 - Quantização no Superespaço de Teorias Supersimétricas	
(1,0)	36
2.1 - Super-Regras de Feynman para o Lagrangeano de	
Matéria	36
2.2 - Super-Regras de Feynman para o Setor de Gauge ...	41
2.2.1 - O Procedimento de Faddeev-Popov e a	
simetria BRS no superespaço (1,0)	41
2.2.2 - Cálculo dos Superpropagadores de Gauge ..	45
2.2.3 - Divergências na SQED ₂ - (1,0)	47

"Superspace is the greatest invention since the wheel"

V. Gates et al. [43]

RESUMO

Nesta tese realizamos um estudo do comportamento quântico de modelos bidimensionais de gauge acoplados ao setor de matéria, com supersimetria $(1,0)$. Consideramos as correções quânticas à ordem de um loop, o que foi feito diretamente no superespaço em termos de técnicas de supergráficos, e encontramos como principal resultado a geração dinâmica de massa para as superconexões de gauge.

INTRODUÇÃO

Supersimetria, a invariância que estabelece a presença de estados bosônicos e fermiônicos em um multiplete comum, tem sido amplamente estudada e explorada em Física Teórica de Altas Energias desde a sua incorporação ao formalismo Lagrangeano para campos relativísticos no clássico trabalho de Wess e Zumino [1]. Imediatamente após a sua formulação para teorias de campo em 4 dimensões espaço-temporais, as suas notáveis propriedades de convergência no ultra-violeta, e os consequentes teoremas de não-renormalização, foram estabelecidos [2] e reconheceu-se a sua importância para o programa de grande unificação.

A sistematização do conceito de supersimetria, bem como a sua realização em termos de campos relativísticos e a construção de modelos Lagrangeanos supersimétricos, foi afirmada mediante a introdução dos conceitos de superespaço e supercampos em uma série de trabalhos iniciados por Salam e Strathdee [3].

Com o advento e a corrente aplicação da supersimetria às teorias de campo em 4 dimensões, esta foi introduzida em espaços-tempo de dimensões arbitrárias e particular importância assumiram os modelos de Yang-Mills e de supergravidade [4] (supersimetria em sua versão local) em 10 e 11 dimensões [5,6].

Mais recentemente, com a consolidação das teorias de supercordas [7] em Física Teórica de Altas Energias, modelos supersimétricos bidimensionais tiveram o seu interesse revitalizado e a sua relação com as supercordas tem sido amplamente investigada [7,8].

De acordo com Hull e Witten [9], podem-se introduzir em duas dimensões as supersimetrias do tipo (p,q) , em virtude da covariância do conceito de *left mover* e *right mover* em $(1 + 1)$ dimensões. Teorias de supercordas são naturalmente associadas à supersimetria (p,q) , seja em sua forma global [9], que em sua versão local [9,10]. Por exemplo, a supercorda heterótica apresenta supersimetria $(1,0)$ local associada aos vínculos de Virasoro [11]. Além disto, esta teoria pode exibir supersimetria $(2,0)$ global em conexão com a supersimetria apresentada em 4 dimensões pela teoria compactificada a partir da supercorda [8].

A formulação de superespaço para as supersimetrias globais e supergravidades do tipo (p,q) já foi encontrada [10] e tem sido aplicada ao estudo de vários aspectos das supercordas. Mais recentemente, a averiguação do setor de gauge dos modelos (p,q) tem-se tornado objeto de atenção [12] desde que se estabeleceu a equivalência, a nível de teoria quântica, entre férmions quirais acoplados a campos de gauge não-dinâmicos (este é um requisito imposto pela invariância conforme) definidos na superfície de universo da supercorda e modelos- σ bosônicos definidos sobre variedades de grupo [13]. Tal procedimento permite a obtenção de dimensões críticas para as supercordas em termos de amplitudes calculadas a nível clássico [14].

Por outro lado, na ref [15], propõe-se a introdução de campos de gauge dinâmicos na superfície de universo e conclui-se que surge, assim, um mecanismo para a obtenção de modelos de cordas

com simetrias de gauge espontaneamente quebradas. Mais ainda, pode-se constatar do estudo de diferentes modelos de cordas que a invariância de gauge vetorial na superfície de universo constitui-se em um modo conciso de se propôr formulações Lagrangeanas de uma gama de tais modelos, como por exemplo as cordas de Thirring [16] e modelos com compactificação em orbifolds [17].

Tendo focalizado e se fixado na questão dos campos de gauge acoplados a férmions quirais e escalares complexos definidos na superfície de universo, será o nosso propósito nesta tese estudar o comportamento quântico de modelos de gauge com supersimetria (1,0) global acoplados a um setor de matéria (férmions quirais e escalares) arbitrário, com a finalidade de se averiguar a possibilidade de geração dinâmica de massa para os supercampos de gauge Abelianos. Além de se procurar estabelecer se a versão supersimétrica-(1,0) do modelo de Schwinger [17] é compatível com o mecanismo de geração dinâmica de massa, a resposta à pergunta acima pode ajudar a elucidar o problema de como se chegar a um único fator $U(1)$, com correspondente campo não-massivo a partir dos grandes grupos de gauge associados aos modelos heteróticos [17 - 19]. Para proceder à nossa investigação, organizamos esta tese iniciando por um capítulo de apresentação das supersimetrias (p,q), onde estudam-se detalhadamente a formulação no superespaço para modelos de matéria em auto-interação e teorias de gauge com supersimetria (1,0) global. A seguir, no Capítulo II, passa-se à quantização, via integral de caminho, de um modelo (1,0) com supercampos de gauge acoplados de modo genérico a supercampos de matéria. Estende-se ainda o método de BRS ao superespaço (1,0) e discute-se a renormalizabilidade do modelo a nível de contagem de

potências para as divergências superficiais. Finalmente, no Capítulo III, métodos de supergráficos são utilizados para o cálculo explícito de correções quânticas divergentes e finitas à ação efetiva do setor de gauge. Discute-se, então, o problema da geração dinâmica de massa para os supercampos de gauge através de correções quânticas a 1-loop. Seguem-se as Conclusões Finais de nosso estudo e dois Apêndices. No Apêndice A, revê-se brevemente o Grupo de Lorentz em duas dimensões e estabelecem-se as conveções para o cálculo espinorial. No Apêndice B, são fornecidos resultados necessários à derivação dos superpropagadores para os supercampos de matéria e de gauge efetuada no Capítulo II.

CAPÍTULO I

A SUPERSIMETRIA $N = 1/2 - D = 2$

Neste capítulo, vamos discutir propriedades clássicas e teorias de campo bidimensionais caracterizadas pela presença de uma supersimetria (SUSY) $N = 1/2$, que é de fundamental interesse nas teorias de supercordas heteróticas [11].

Começaremos apresentando uma breve discussão dos conceitos centrais de teorias supersimétricas em geral. A seguir, analisaremos a ação dos campos de matéria (spin-0 e spin-1/2) com uma SUSY $N = 1/2$, e desenvolveremos sua formulação no superespaço a ela correspondente. Na seção posterior, estabeleceremos a covariantização de gauge da ação $N = 1/2$ de matéria, a partir da qual obteremos diretamente as superconexões de gauge espinorial e vetoriais. Completaremos, analisando as simetrias da ação $N = 1/2$ de gauge e suas correspondentes supercorrentes.

1.1- INTRODUÇÃO À SUPERSIMETRIA

A supersimetria [23] aparece como a única simetria entre bósons e férmions compatível com teorias quânticas não-triviais

para campos relativísticos. Ela é também a mínima extensão possível do grupo de Poincaré capaz de incorporar simetrias internas de um modo não trivial.

Uma das grandes expectativas da Física Teórica é encontrar uma maneira de unificar todas as partículas e interações dentro de uma única teoria consistente. Atualmente, temos o fóton, os W^\pm , o Z^0 e os gluons que são bósons de spin-1; os quarks e léptons que são férmions de spin-1/2; os bósons de Higgs de spin-0; e o solitário gráviton de spin-2. Teorias de unificação, como a de Weinberg-Salam e as GUT's, conseguem relacionar partículas de mesmo spin. Contudo, da maneira como vemos a Física atualmente, podemos concluir que uma teoria final de unificação deve necessariamente conter uma simetria que relacione partículas de spins diferentes.

A procura por uma tal simetria começou no início dos anos 60, com a tentativa de relacionar multipletes de hádrons com spins diferentes. Por exemplo, apareceu o modelo $SU(6)$ de Gürsey-Radicati-Sakita que combina bárions de spins-1/2 e 3/2. Ele é, contudo, um modelo não-relativístico, e todas as tentativas de covariantizá-lo falharam.

Várias outras tentativas foram feitas, até que em 1967 Coleman e Mandula [20] mostraram um *no-go theorem* que, baseado em suposições físicas, sobre a matriz-S e o espectro de partículas, conclui que as únicas quantidades conservadas que se transformam tensorialmente segundo o grupo de Lorentz (impomos esta condição a fim de que a teoria seja relativisticamente covariante) são os geradores do grupo de Poincaré, P_μ e $M_{\mu\nu}$, e escalares G^I , que são as cargas das simetrias internas. Qualquer outra quantidade tensorial conservada iria implicar, por exemplo, em ângulos de

espalhamento discretos numa colição de duas partículas [21].

Mas pelo fato de Θ^i comutar com P_μ e $M_{\mu\nu}$ (que é a condição a nível de álgebra de um produto direto), nos leva a concluir que uma tal teoria deve ser uma combinação trivial (produto direto) do grupo de Poincaré com algum grupo de simetria interna. Isto significa que estados de uma partícula preenchendo um multiplete irredutível do grupo interno devem ter todas mesma massa e spin, uma vez que W^2 (onde $W_\mu \equiv 1/2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}$ é o vetor de Pauli-Lubanski) e P^2 comutam com Θ^i , o que significa que eles são operadores de Casimir.

Contudo, em 1973, Wess e Zumino [1] construíram um modelo de campos no qual conseguem misturar bósons com férmions. Vejamos como isto foi possível.

Na dedução do teorema de Coleman-Mandula, foi feita a hipótese de que todos os geradores satisfizessem a relações de comutação da álgebra de Lie (geradores bosônicos). Pode-se, contudo, relaxar esta condição, introduzindo geradores que satisfaçam a relações de anticomutação (geradores fermiônicos). Uma álgebra que contenha estes dois tipos de geradores é chamada uma álgebra de Lie graduada, que é dada pelas relações:

$$\begin{aligned} [B_i, B_j] &= f_{ij}^k B_k \\ [Q_i, B_j] &= r_{ij}^k Q_k \\ \{Q_i, Q_j\} &= r_{ij}^k B_k \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde B são operadores bosônicos e Q são fermiônicos. Devido ao fato do operador Q satisfazer a relações de anticomutação, teremos

pelo teorema de spin-estatística que ele deve se transformar segundo uma representação de spin fracionário do grupo de Lorentz e, portanto, deve relacionar estados que difiram por um número fracionário de spin, ou seja bósons e férmions:

$$Q | \text{bóson} \rangle = | \text{férmion} \rangle, \quad Q | \text{férmion} \rangle = | \text{bóson} \rangle. \quad (1.2)$$

Foi mostrado por Haag-Łopuszanski-Sohnius [22] que este gerador deve ser necessariamente um espinor de spin-1/2. Além disso, este espinor deve satisfazer a condição de Majorana a fim de garantir a unitariedade da transformação. Portanto o gerador Q deverá ser um espinor de Majorana (nas dimensões onde o espinor de Majorana não é definido podemos utilizar os espinores de pseudo-Majorana [5]).

Contudo, conforme mencionado no Apêndice A, nas dimensões $8n + 2$, além dos espinores de Majorana, existem os espinores de Majorana-Weyl (MW) que também satisfazem a condição de Majorana. Portanto, nestas dimensões podemos construir supersimetrias com quiralidade desbalanceada, com p geradores *left* e q geradores *right*. Tais supersimetrias são denominadas de (p,q) .

Neste e nos próximos capítulos, analisaremos a supersimetria do tipo $(1,0)$ em duas dimensões, que também é chamada de supersimetria $N = 1/2$, uma vez que só utiliza uma quiralidade. Ela foi primeiramente proposta por Sakamoto [9], e sua relação com os modelos- σ e as cordas heteróticas logo depois estabelecida por G. M. Hull e E. Witten [9].

1.2 - A SUPERSIMETRIA $N = 1/2 - D = 2$

1.2.1 - O FORMALISMO EM CAMPOS COMPONENTES

A fim de introduzir a SUSY $N = 1/2$, vamos nos utilizar de um campo escalar real, ϕ , e um campo espinorial de MW *left-handed*, ψ_L . A partir deles, podemos construir a seguinte ação livre em (1+1) dimensões (as convenções adotadas estão no Apêndice A):

$$s = - \int dx^2 \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L \right\}. \quad (1.3)$$

Usando a representação das matrizes γ dada em (A.28), e passando para o sistema de coordenadas do cone-de-luz, podemos reescrever a ação acima da seguinte maneira:

$$S = \int dx^2 \left\{ \partial_{++} \phi \partial_{--} \phi + i \lambda_- \partial_{++} \lambda_- \right\}, \quad (1.4)$$

onde λ_- é a única componente não-nula de ψ_L . Como os espinores de MW em duas dimensões só possuem uma componente não-nula, podemos representá-lo por essa componente Grassmanniana. A partir dessa ação, podemos verificar que as dimensões de canônicas dos campos ϕ e λ_- são:

$$[\phi] = 0 \quad e \quad [\lambda_-] = 1/2. \quad (1.5)$$

Vamos, agora, procurar um conjunto de transformações lineares que misture bósons e férmions, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta\phi &\propto \lambda_- \\ \delta\lambda_- &\propto \phi \end{aligned} \tag{1.6}$$

Usando-se um parâmetro constante, ε , podemos então propôr uma transformação para ϕ do seguinte tipo:

$$\delta\phi = -i\varepsilon_+ \lambda_- \tag{1.7}$$

Como ϕ é um escalar, devemos ter que $\varepsilon\lambda$ também seja um escalar, o que implica que ε deve ter necessariamente quiralidade oposta a λ_- , ou seja, deve ser um espinor de MW *right*. Além disso, de (1.6), podemos também obter que sua dimensão canônica é $[\varepsilon] = -1/2$. O fator "i" é devido ao fato de ϕ ser real, enquanto que o produto $\varepsilon_+ \lambda_-$ é um imaginário puro ($(\varepsilon\lambda)^* = \lambda^* \varepsilon^* = \lambda\varepsilon = -\varepsilon\lambda$).

A partir das propriedades de ε_+ , λ_- e ϕ podemos concluir que a transformação de λ_- deverá necessariamente ser:

$$\delta\lambda_- = \varepsilon_+ \partial_{--} \phi \tag{1.8}$$

Podemos verificar que, segundo as transformações (1.7) e (1.8), o Lagrangeano e a ação se comportam da seguinte forma:

$$\delta\mathcal{L} = -i\varepsilon_+ \partial_{--} (\lambda_- \partial_{++} \phi) \tag{1.9}$$

$$\delta S = -i\varepsilon_+ \int dx^2 \partial_{--} \left[\lambda_- \partial_{++} \phi \right] = 0$$

onde, para a invariância da ação usou-se a condição dos campos tenderem a zero no infinito. Este resultado mostra que encontramos transformações que misturam bósons e férmions e que correspondem a

uma simetria da ação. Portanto, (1.7) e (1.8) são transformações de SUSY. Mostraremos mais adiante que os geradores dessa supersimetria são espinores de *MW left*.

1.2.2 - O FORMALISMO DE SUPERCAMPOS

Salam e Strathdee [3] criaram uma técnica para formular teorias supersimétricas que mantêm a SUSY manifesta em todos os passos dos cálculos: o conceito de supercampo no superespaço.

Superespaço nada mais é que um espaço-tempo estendido, no qual a cada ponto x^μ associamos coordenadas espinoriais Grassmannianas, θ_α . Supercampos são funções diferenciáveis das coordenadas $(x^\mu; \theta_\alpha)$ com propriedades de transformação bem-definida da mesma forma que mudanças de coordenadas no espaço-tempo induzem transformações de Lorentz nos campos, as transformações que misturam as coordenadas x^μ e θ_α do superespaço irão induzir uma transformação de SUSY nos campos, como veremos a seguir. Vamos, então, contruir o superespaço que possa acomodar nosso modelo.

Vimos que a SUSY foi gerada usando-se como parâmetro um espinor de *MW right*, que havíamos denotado por ϵ_+ . Portanto, além das coordenadas x^{++} e x^{--} , vamos adicionar uma coordenada espinorial, θ_+ , com as mesmas propriedades de ϵ_+ . A partir dos pesos de Lorentz e das dimensões canônicas de x^{++} , x^{--} , θ_+ e ϵ_+ , podemos concluir que o parâmetro ϵ_+ poderá gerar, no caso mais geral possível, a seguinte transformação:

$$\begin{aligned}
 x^{++'} &= x^{++} \\
 x^{--'} &= x^{--} + i\epsilon_+ \theta_+ \\
 \theta_+' &= \theta_+ + \epsilon_+
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Seja, agora, um supercampo genérico $\Sigma(z)$, onde a variável $z \equiv (x^{++}, x^{--}, \theta_-)$ utilizaremos para denotar de forma compacta todas as coordenadas do superespaço. Da mesma forma que os campos permanecem inalterados segundo uma translação no espaço-tempo, vamos considerar que os supercampos perante esta "supertranslação" se comportem da seguinte maneira:

$$\Sigma(z) = \Sigma'(z') .
 \tag{1.11}$$

Escrevendo-se z' em termos de z , fazendo-se uma expansão de Taylor em θ_+ e lembrando-se que $\theta_+^2 = 0$ devido à sua natureza Grassmanniana, obteremos que

$$\Sigma(z) = \Sigma'(z) + i\epsilon_+ \theta_+ \partial_{--} \Sigma(z) + \epsilon_+ \partial_{\ominus} \Sigma(z)
 \tag{1.12a}$$

onde a derivada ∂_{\ominus} é definida de tal forma que $\partial_{\ominus} \theta_+ = 1$, a partir da qual podemos concluir que ∂_{\ominus} é um espinor de MW left com dimensão canônica 1/2. Podemos reescrever (1.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \delta\Sigma &\equiv \Sigma'(z) - \Sigma(z) = -\epsilon_+ Q_- \Sigma(z) \\
 \text{onde } Q_- &\equiv \partial_{\ominus} + i\theta_+ \partial_{--}
 \end{aligned}
 \tag{1.12b}$$

é a realização diferencial do gerador da SUSY $N = 1/2$. Podemos verificar que ele se transforma como um espinor de MW left e

satisfaz à seguinte álgebra:

$$\{Q_+, Q_-\} = 2i\theta_{--} = 2P_{--}, \quad (1.13a)$$

$$[Q_+, P_{--}] = 0. \quad (1.13b)$$

Da equação (1.13a), obtemos que $Q_-^2 = P_{--}$, o que significa que duas operações de SUSY é equivalente a um deslocamento no espaço-tempo. Tal fato é característico da supersimetria.

Vamos, agora, analisar os possíveis supercampos que podemos ter na SUSY $N=1/2$. O primeiro exemplo é o supercampo escalar real, $\Phi(x, \theta)$. Esta denominação é dada a ele pois, segundo transformações de Lorentz, Φ se comporta como um escalar. Através de uma expansão de Taylor na variável θ_+ deste supercampo (lembrando que $\theta_+^2 = 0$), obtemos que

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + i\theta_+ \lambda_-(x). \quad (1.14)$$

Onde $\phi(x)$ e $\lambda(x)$ são denominados de campos componentes de $\Phi(z)$. Se impusermos que este supercampo seja adimensional, poderemos verificar que ϕ e λ_- terão exatamente as mesmas dimensões canônicas e pesos de Lorentz dos campos descritos na seção anterior. Além disso, de (1.12), podemos verificar que, segundo uma transformação de SUSY, eles se comportam da seguinte maneira:

$$\delta\left[\phi + i\theta_+ \lambda_-\right] = -\epsilon_+ \left[i\lambda_- + i\theta_+ \partial_{--}\phi\right] \rightarrow \begin{cases} \delta\phi = -i\epsilon_+ \lambda_- \\ \delta\lambda = \epsilon_+ \partial_{--}\phi \end{cases} \quad (1.15)$$

Portanto, podemos concluir que o supercampo $\Phi(z)$ acomoda os dois

campos relacionados pelas transformações de SUSY (1.7) e (1.8), e que estas foram induzidas por "rotações" entre as coordenadas x^μ e θ_+ do superspaço (eq. (1.10)), como já havíamos mencionado anteriormente.

Outro possível supercampo é o supercampo espinorial de MW *right-handed*:

$$\Psi_+(x, \theta) = \psi_+(x) + \theta_+ F(x) . \quad (1.16)$$

Vemos que este supercampo tem como componentes um campo espinorial de MW *right-hand*, ψ_+ , e um campo escalar real, F. Para que ψ_+ seja um campo físico (ou seja, satisfaça a uma equação de Dirac), ele deve ter dimensão canônica 1/2. Para tanto, devemos impôr que o supercampo $\Psi_+(z)$ também tenha dimensão 1/2. Como resultado, F terá dimensão 1 e, conseqüentemente, ele irá aparecer sem derivadas no termo cinético do Lagrangeano (veja eq. (1.37)), correspondendo, portanto, a graus de liberdade que não possuem dinâmica. Este tipo de campo é denominado campo auxiliar. Ele é necessário em teorias supersimétricas, a fim de permitir o fechamento da álgebra *off-shell*. Eles também facilitam muito na construção das ações clássicas: de fato, sem eles, os termos cinéticos e de interação não seriam independentemente invariantes de SUSY. Sem eles não poderíamos também estabelecer um tratamento manifestamente covariante tanto a nível clássico, quanto a nível quântico. Os campos auxiliares permitem ainda que tenhamos representações lineares da álgebra de SUSY levando, conseqüentemente, a identidades de Ward mais simples.

Usando o mesmo procedimento dos campos componentes de \mathbb{F} , podemos obter que ψ_+ e F têm a seguinte lei de transformação

perante SUSY:

$$\begin{aligned}\delta\psi_+ &= -\epsilon_+ F, \\ \delta F &= i\epsilon_+ \partial_{--}\psi_+.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Outros possíveis supercampos seriam o espinorial de MW *left-handed* e os vetorias. Contudo, tais supercampos contêm campos vetoriais entre suas componentes, os quais carregam campos não físicos que tornam a teoria não-unitária. Este problema pode ser solucionado através de um processo de covariantização de gauge. Portanto, para tais supercampos devemos fazer um procedimento análogo. Vamos adiar esta discussão para a próxima seção e restringir a presente ao estudo do setor de matéria (campos de spin-0 e spin-1/2).

Uma pergunta que surge agora é se a derivada de um supercampo genérico, $\Sigma(z)$, transforma-se covariantemente segundo a SUSY, ou seja, se ela também é um supercampo.

Aplicando $\partial_{\pm\pm}$ à equação (1.12), obtemos que

$$\partial_{\pm\pm}\Sigma'(z) - \partial_{\pm\pm}\Sigma(z) = -\epsilon_+\partial_{\pm\pm}\left[Q_-\Sigma(z)\right]\tag{1.18}$$

Contudo, como $[\partial_{\pm\pm}, Q_-] = 0$ e lembrando que $\delta(\partial_{\pm\pm}\Sigma) \equiv \partial_{\pm\pm}\Sigma' - \partial_{\pm\pm}\Sigma$, esta última expressão ficará:

$$\delta(\partial_{\pm\pm}\Sigma) = -\epsilon_+Q_-(\partial_{\pm\pm}\Sigma)\tag{1.19}$$

o que significa que $\partial_{\pm\pm}\Sigma$ também são supercampos. Por outro lado, como $(\partial_\bullet, Q_-) = i\partial_{--}$, para $\partial_\bullet\Sigma$ teremos que

$$\delta(\theta_+ \Sigma) = -\epsilon_+ Q_- (\theta_+ \Sigma) + i\epsilon_+ \theta_{--} \Sigma \quad (1.20)$$

ou seja, $\theta_+ \Sigma$ não é um supercampo, devido à presença do termo não-homogêneo no segundo membro. O que devemos fazer é a partir de θ_+ , construir uma derivada covariante de SUSY. Para tanto, devemos encontrar um operador que anticomute com Q_- , que satisfaça a regra de Leibnitz e que se transforme como um espinor de MW right. Pode-se verificar que o operador

$$D_- \equiv \partial_- - i\theta_+ \partial_{--} \quad (1.21)$$

cumpra a todas estas condições. Portanto,

$$\delta(D_- \Sigma) = -\epsilon_+ Q_- (D_- \Sigma) \quad (1.22)$$

Deve-se notar que, devido ao fato de D_- ser um operador fermiônico, a regra de Leibnitz assume a forma:

$$D_- (\Sigma_1 \Sigma_2) = (D_- \Sigma_1) \Sigma_2 \pm \Sigma_1 (D_- \Sigma_2) \quad (1.23)$$

onde o sinal (+) ocorrerá caso Σ_1 seja um bóson e o sinal (-) caso seja um férmion.

A partir da derivada D_- , podemos criar um dispositivo técnico extremamente útil: em geral, a obtenção de expressões em termos de campos componentes através da expansão direta em θ_+ é um procedimento trabalhoso. Um modo mais eficaz é observar que as componentes de (1.14) e (1.16) podem ser definidas pela projeções:

$$\begin{aligned} A(x) &= \bar{\Phi}(x, \theta) \Big|_{\theta=0} , & \psi_+(x) &= \Psi_+(x, \theta) \Big|_{\theta=0} , \\ i\lambda_-(x) &= D_- \bar{\Phi}(x, \theta) \Big|_{\theta=0} , & F(x) &= D_- \Psi_+(x, \theta) \Big|_{\theta=0} . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Por simplicidade de notação, sempre que colocarmos a barra já estará implícito que estamos considerando o ponto $\theta_+ = 0$.

Outro resultado importante, que será muito utilizado adiante, é que

$$D_-^2 = -i\partial_{--} . \quad (1.25)$$

Tendo estabelecido um formalismo manifestamente covariante, vamos agora tentar construir as ações que sejam invariantes de SUSY (1,0). Como estamos trabalhando num superespaço com coordenadas $x^{\pm\pm}$ e θ_+ , e com supercampos $\Sigma(x, \theta)$ que dependem dessas coordenadas, podemos propor uma ação da seguinte forma :

$$S = \int d^2x d\theta \mathcal{L}(\Sigma, \theta_{\pm\pm} \Sigma, D_- \Sigma) \quad (1.26)$$

onde \mathcal{L} é uma função local dos supercampos. Devemos, portanto, definir o significado da integração com respeito às variáveis Grassmannianas θ_+ . Para tanto, consideraremos que tal integral tenha as propriedades de linearidade e invariância translacional. Pode-se verificar que todas estas propriedades podem ser obtidas tomando-se que a operação integração em θ_+ é idêntica à diferenciação:

$$\int d\theta f(\theta) = \partial_\theta f(\theta) . \quad (1.27)$$

O que implica que $d\theta$ deverá ter mesma quiralidade e dimensão

canônica de ∂_θ .

Podemos, então, reescrever a ação (1.26) da seguinte forma:

$$S = \int d^2x \partial_\theta \mathcal{L} = \int d^2x D_- \mathcal{L} | . \quad (1.28)$$

Desta última expressão, podemos concluir que \mathcal{L} deve ter dimensão canônica 3/2 e peso de Lorentz (-1/2), afim de que a ação seja adimensional e invariante de Lorentz.

Podemos, agora, verificar que, segundo uma transformação de SUSY, a nossa ação se comportará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\epsilon_+ Q_- S = \epsilon_+ \int d^2x d\theta Q_- \mathcal{L}_+ = \epsilon_+ \int d^2x D_- Q_- \mathcal{L}_+ | = \\ &= -\epsilon_+ \int d^2x \partial_{--} \mathcal{L}_+ | = 0 . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Este último resultado comprova que a ação proposta é invariante de SUSY, considerando-se que os campos tendam a zero no infinito. Deve-se notar que, nesta última dedução, consideramos o elemento de volume invariante de SUSY. Tal fato pode ser obtido diretamente através da lei de transformação das coordenadas (1.10).

Vejamos, agora, qual é a ação mais geral que podemos construir com os supercampos Φ e Ψ_+ . Propomos, para isso, o seguinte termo:

$$S = g \int dx^2 d\theta \phi^m D_-^n \theta_{++}^p \theta_{--}^q \Psi_+^r \quad (1.30)$$

onde g é uma constante de acoplamento arbitrária. O requisito de invariância de Lorentz da ação impõe que

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{2} - p + q - \frac{r}{2} = 0 . \quad (1.31)$$

Além disso, a fim de evitarmos uma teoria não-renormalizável, devemos impôr que o parâmetro g tenha uma dimensão não-negativa, ou seja,

$$-\frac{3}{2} + \frac{n}{2} + p + q + \frac{r}{2} \leq 0 . \quad (1.32)$$

Somando-se (1.31) e (1.32), obtemos que

$$n + 2q \leq 1 . \quad (1.33)$$

Como m , n , p , q e r são números inteiros não-negativos, as possíveis soluções de (1.31) e (1.33) são :

$$\forall m \quad e \quad q = 0 \quad e \quad \begin{cases} r = 0 , p = 1 \text{ e } n = 0 \text{ ou} \\ r = 1 , p = 0 \text{ e } n = 0 \text{ ou} \\ r = 2 , p = 0 \text{ e } n = 1 . \end{cases} \quad (1.34)$$

É interessante notar em (1.34) que não temos nenhuma restrição sobre o número de $\bar{\phi}$'s nos termos da ação. Este fato já era esperado, uma vez que $\bar{\phi}$ é adimensional e possui carga de Lorentz nula.

A partir dessas soluções, podemos obter que os únicos termos livres (bilineares nos supercampos) serão os seguintes:

$$S = \int dz_- \left\{ \bar{\phi}_{++} \bar{\phi} D_- \phi + \bar{\psi}_+ D_- \psi_+ + m \bar{\phi} \psi_+ \right\} \quad (1.35)$$

onde dz_- representa o elemento de integração no superspaço da SUSY $N = 1/2$. Todos os termos de interação serão produzidos pela

multiplicação de supercampos $\tilde{\Phi}$ nos termos livres em (1.35). Portanto, a ação total ficará da seguinte forma abaixo:

$$S_{\text{mat}} = \int dz_- \left\{ \sum_n \frac{f_n}{n!} \tilde{\Phi}^n \partial_{++} \phi D_- \tilde{\Phi} + \sum_n \frac{g_n}{n!} \tilde{\Phi}^n \Psi_+ D_- \Psi_+ + \sum_n \frac{h_n}{n!} \tilde{\Phi}^n \tilde{\Phi} \Psi_+ \right\}, \quad (1.36)$$

onde f_n e g_n são constantes adimensionais e h_n possui dimensão de massa, correspondendo portanto a termos de interação super-renormalizáveis. Através de uma redifinição dos campos $\tilde{\Phi}$ e Ψ_+ , sempre poderemos considerar $f_0 = 1 = g_0$ sem perda de generalidade. Podemos encarar esses somatórios como uma expansão de Taylor de funções dos supercampos $\tilde{\Phi}$. Neste caso, poderemos reescrever nossa ação de maneira mais compacta:

$$S_{\text{mat}} = \int dz_- \left\{ f[\tilde{\Phi}] \partial_{++} \tilde{\Phi} D_- \tilde{\Phi} - g[\tilde{\Phi}] \Psi_+ D_- \Psi_+ + h[\tilde{\Phi}] \tilde{\Phi} \Psi_+ \right\}, \quad (1.37)$$

onde $f[\tilde{\Phi}]$ e $g[\tilde{\Phi}]$ são funções adimensionais e $h[\tilde{\Phi}]$ tem dimensão de massa.

A fim obter esta ação em termos dos campos componentes, devemos escrever o elemento de volume de nossa ação em termos de D_- , conforme (1.28), desenvolver este resultado através da regra de Leibnitz (1.23) e obter os campos componentes por projeção usando (1.24). Portanto nossa ação poderá ser escrita como:

$$S_{\text{mat}} = \int dx^2 \left\{ f(\phi) \left[\partial_{++} \phi \partial_{--} \phi + i \lambda_- \partial_{++} \lambda_- \right] + g(\phi) \left[F^2 + i \psi_+ \partial_{--} \psi_+ \right] + g'(\phi) \lambda_- \psi_+ F + h(\phi) \left[\phi F + i \lambda_- \psi_+ \right] + i h'(\phi) \phi \lambda_- \psi_+ \right\}, \quad (1.38)$$

onde $g'(\phi) \equiv \frac{\partial g}{\partial \phi}$ e $h'(\phi) \equiv \frac{\partial h}{\partial \phi}$.

1.3 - TEORIAS DE GAUGE SUPERSIMETRICAS $N = 1/2 - D = 2$

Nesta seção, vamos analisar os supercampos espinorial de MW *right* e vetoriais, os quais possuem bósons vetoriais entre suas componentes. Como já foi mencionado anteriormente, a fim de não termos possíveis problemas de não-unitariedade na teoria, devemos introduzir tais supercampos através de um processo de covariantização de gauge da ação de matéria, de maneira análoga ao caso das teorias de gauge ordinárias.

Primeiramente, devemos impôr que nossa ação de matéria satisfaça a uma simetria global (por simplicidade vamos nos restringir ao caso Abelião). Contudo, surge um problema: na seção anterior, definimos os supercampos $\bar{\Phi}$ e Ψ_+ , os quais só possuem campos escalares reais e espinores de MW entre suas componentes. A partir deles, não podemos definir uma transformação de fase, pois isto acarretaria na perda da condição de realidade tanto dos campos escalares reais quanto dos espinoriais de MW (convém lembrar que estamos trabalhando na representação de Majorana). A fim de contornar esta dificuldade, devemos usar dois supercampos escalares reais, $\bar{\Phi}_1$ e $\bar{\Phi}_2$, e dois supercampos de MW *left*, Ψ_{1+} e Ψ_{2+} , a partir dos quais podemos definir os supercampos escalar complexo e espinorial de Weyl *left*:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &\equiv \bar{\Phi}_1 + i\bar{\Phi}_2, & \bar{\Phi}^* &\equiv \bar{\Phi}_1 - i\bar{\Phi}_2, \\ \Psi_+ &\equiv \Psi_{1+} + i\Psi_{2+}, & \Psi_+^* &\equiv \Psi_{1+} - i\Psi_{2+}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Estes supercampos possuem campos escalares complexos e espinores de Weyl como componentes:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \phi + i\theta_+ \lambda_- , & \bar{\Phi}^* &= \phi^* + i\theta_+ \lambda_-^* , \\ \Psi_+ &= \psi_+ + \theta_+ F , & \Psi_+^* &= \psi_+^* + \theta_+ F^* . \end{aligned} \quad (1.39)$$

Com estes novos supercampos, podemos escrever a seguinte ação:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \int dz \left[f(\bar{\Phi}^* \Phi) \left(\partial_{++} \bar{\Phi}^* D_- \Phi + D_- \bar{\Phi}^* \partial_{++} \Phi \right) + g(\bar{\Phi}^* \Phi) \left(\Psi_+^* D_- \Psi_+ + D_- \Psi_+^* \Psi_+ \right) + \right. \\ \left. + h(\bar{\Phi}^* \Phi) \left(\bar{\Phi}^* \Psi_+ + \Psi_+^* \Phi \right) \right] , \end{aligned} \quad (1.40)$$

onde os termos foram construídos de tal maneira a manter a realidade da ação. Podemos ver que tal ação é invariante perante as transformações de fase globais

$$\delta \bar{\Phi} = e^{iq\Lambda} \bar{\Phi} , \quad \delta \Psi_+ = e^{iq\Lambda} \Psi_+ , \quad (1.41)$$

onde q é a carga dos supercampos e Λ é um supercampo escalar real constante, que satisfaz aos vínculos:

$$\begin{aligned} \text{i. } D_- \Lambda = 0 \quad \rightarrow \quad D_- D_- \Lambda = -i\partial_{--} \Lambda = 0 , \\ \text{ii. } \partial_{++} \Lambda = 0 , \end{aligned} \quad (1.42)$$

que fazem com que o supercampo Λ possua a seguinte estrutura de campos componentes:

$$\begin{aligned} \Lambda| &= \alpha \quad \text{onde } \alpha @ \text{ uma constante real ,} \\ D\Lambda| &= 0 . \end{aligned} \quad (1.43)$$

Para tornarmos estas transformações locais, basta relaxarmos estes vínculos, ou seja, termos que

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= e^{iq\Lambda(z)}\Phi, & \delta\Psi_+ &= e^{iq\Lambda(z)}\Psi_+, \\ & & & \text{com } \Lambda(z) = \alpha(x) + i\theta_+ \delta_-(x). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Contudo, estas transformações não são uma simetria da ação (1.40), uma vez que as derivadas dos supercampos não se transformam covariantemente segundo (1.44). Para de contornar este problema, devemos substituí-las pelas derivadas covariantes de gauge:

$$\begin{aligned} \nabla_{++} &\equiv \partial_{++} - igq\Gamma_{++}(z), \\ \nabla_- &\equiv D_- - igq\Gamma_-(z), \\ \nabla_{--} &\equiv \partial_{--} - igq\Gamma_{--}(z). \end{aligned} \quad (1.45)$$

onde g é uma constante de acoplamento com dimensão de massa e Γ_- , Γ_{++} e Γ_{--} são as superconexões de gauge espinorial de MW *right* e vetoriais, como havíamos antecipado. Perante as transformações de gauge, elas se comportam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{++}(z)' &= \Gamma_{++}(z) + \frac{1}{g} \partial_{++} \Lambda(z), \\ \Gamma_{--}(z)' &= \Gamma_{--}(z) + \frac{1}{g} \partial_{--} \Lambda(z), \\ \Gamma_-(z)' &= \Gamma_-(z) + \frac{1}{g} D_- \Lambda(z). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Estas superconexões podem ser escritas em termos de campos componentes de acordo com as expansões em θ_+ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{++} &= \Lambda_{++} + i\theta_+ \pi_+, \\ \Gamma_{--} &= \Lambda_{--} + i\theta_+ \zeta_{--}, \\ \Gamma_- &= -i(\gamma_- + \theta_+ V_-). \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde π_+ e γ_- são espinores de MW; A_{++} , A_{--} e V_{--} são bósons vetoriais reais e ξ_{---} é um supercampo de spin 3/2. Colocamos o fator (-i) na superconexão Γ_- , pois tal supercampo é imaginário puro, uma vez que D_- é anti-Hermitiano. A partir de (1.46), podemos verificar que tais campos se comportam segundo transformações de gauge da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta A_{++} &= \frac{1}{\xi} \partial_{++} \alpha, & \delta \pi_+ &= \frac{1}{\xi} \partial_{++} \delta_-, \\ \delta A_{--} &= \frac{1}{\xi} \partial_{--} \alpha, & \delta \xi_{---} &= \frac{1}{\xi} \partial_{--} \delta_-, \\ \delta V_{--} &= \frac{1}{\xi} \partial_{--} \alpha, & \delta \gamma_- &= -\frac{1}{\xi} \delta_-. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Notemos que γ_- pode ser eliminado algebricamente por uma escolha adequada do parâmetro de gauge (gauge de Wess-Zumino). Tal tipo de campo é denominado de campo compensador.

Com as derivadas covariantes, teremos agora seguinte ação de interação matéria-gauge:

$$\begin{aligned} S_{gm} &= \frac{1}{2} \int dz_- \left[f(\bar{\Phi}^* \Phi) \left(\nabla_{++} \bar{\Phi}^* \nabla_- \Phi + \nabla_- \bar{\Phi}^* \nabla_{++} \Phi \right) + g(\bar{\Phi}^* \Phi) \left(\Psi_+^* \Psi_- + \nabla_- \Psi_+^* \Psi_+ \right) + \right. \\ &\quad \left. + h(\bar{\Phi}^* \Phi) \left(\bar{\Phi}^* \Psi_+ + \Psi_+^* \Phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Observemos que para termos estabelecido a simetria de gauge em S , não precisaríamos ter definido a derivada covariante ∇_{--} . Contudo, a fim de podermos fechar uma álgebra para ∇_- e ∇_{++} , sua presença se faz necessária, uma vez que ela aparece no termo de torção do anticomutador de ∇_- :

$$(\nabla_{-}, \nabla_{-}) = -2i\nabla_{--} - igqW_{--}, \quad (1.50a)$$

$$[\nabla_{-}, \nabla_{++}] = -igqW_{+}, \quad (1.50b)$$

$$[\nabla_{-}, \nabla_{--}] = -igqW_{---}, \quad (1.50c)$$

$$[\nabla_{--}, \nabla_{++}] = -igqW, \quad (1.50d)$$

onde os W_{α} são os supercampos intensidade-de-campo. Como as derivadas covariantes definem uma álgebra, elas satisfazem às identidades de Bianchi:

$$[\nabla_{(a}, [\nabla_{b}, \nabla_{c})}] = 0, \quad (1.51)$$

onde $\{\}$ significa o comutador ou anticomutador, dependendo da natureza das derivadas que estamos tratando e $[\]$ é o símbolo de antisimetrização graduado, idêntico ao símbolo de antisimetrização, mas com um fator extra de (-1) para cada par de índices fermiônicos trocados.

Através da análise dos campos componentes das superconexões, vemos que existem mais de um potencial de gauge associados a uma única simetria de gauge. Além disso, aparece o campo ξ_{--} de spin-3/2. Tal campo deve ser convenientemente eliminado, uma vez que a interação de campos de spin-3/2 com campos vetoriais de gauge não permite a propagação dos campos elétrico e magnético de Maxwell [24]. Há duas maneiras de se atacar estes problemas: a primeira é a de se fazer uma quebra explícita de SUSY, de tal maneira a se eliminar o spin-3/2, mas continuar a se trabalhar com mais de um potencial de gauge conforme a ref. [25]. O outro procedimento, o qual iremos adotar aqui, consiste em impôr o chamado vínculo convencional, onde tomamos $W_{--} \equiv 0$, ou seja, as derivadas ∇_{-} irão satisfazer à relação de anticomutação

$$\langle \nabla_-, \nabla_- \rangle = -2i \nabla_{--}. \quad (1.52)$$

A partir dessa relação, podemos expressar Γ_{--} em termos de Γ_- :

$$\Gamma_{--} = iD_- \Gamma_-, \quad (1.53)$$

ou seja, só teremos duas superconexões independentes, Γ_- e Γ_{++} , com a seguinte estrutura de componentes:

$$\begin{aligned} \Gamma_- &= -i(\gamma_- + \theta_+ V_{--}), \\ \Gamma_{++} &= V_{++} + i\theta_+ \pi_+. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Portanto, vemos que o vínculo convencional eliminou simultaneamente o campo de gauge extra e o spin-3/2 de matéria.

A podemos realizar a seguinte redefinição nos campos componentes da superconexão Γ_{++} :

$$\Gamma_{++} = V_{++} + i\theta_+ (\eta_+ - \partial_{++} \gamma_-), \quad (1.55)$$

onde

$$\eta_+ \equiv \pi_+ + \partial_{++} \gamma_- \quad (1.56)$$

Esta combinação *left-handed* e invariante de gauge, é interpretada como o campo do fotino em duas dimensões. Em dimensões arbitrárias, o fotino é o férmion parceiro do bóson de gauge com a característica de se transformar homogeneamente sob transformações locais. No caso Abelliano, isto significa ser

invariante de gauge. Desta feita, η_+ sendo a componente fermiônica invariante que acompanha o fóton é interpretada como fotino.

Com a nova relação de anticomutação (1.52), obteremos das identidades de Bianchi as seguintes relações para as intensidades de campo restantes:

$$W_{--} \equiv 0 \quad \text{e} \quad W \equiv i D_- W_+ . \quad (1.57)$$

Logo teremos uma única intensidade de campo independente, W_+ , que ser dada por

$$W_+ = D_- \Gamma_{++} - \partial_{++} \Gamma_- , \quad (1.58)$$

e que, em termos de campos componentes, pode ser escrita como:

$$W_+ = i (\eta_+ + \theta_+ F_{++--}) , \quad (1.59)$$

onde $F_{++--} \equiv \partial_{++} V_{--} - \partial_{--} V_{++} ,$

ou seja, W_+ carrega o tensor intensidade campo da QED juntamente com o fotino η_+ .

Como W_+ é invariante de gauge, o termo invariante de gauge mais geral possível que podemos construir a partir deste supercampo é da forma:

$$S_{\text{gauge}} = \int dz \nabla_-^n \nabla_{--}^m \nabla_{++}^p W_+^q \quad (1.60)$$

usando um procedimento analogo ao do capítulo anterior, obteremos que $q = 2, n = 1$ e $p = q = 0$ é o único resultado compatível com as

condições de dimensão canônica, renormalizabilidade e peso de Lorentz, ou seja

$$S_{\text{gauge}} = \int dz \left[-\frac{1}{2} W_+ \nabla_- W_+ \right]. \quad (1.61)$$

Assim, a nossa ação total será:

$$S_t = S_{\text{gauge}} + S_{\text{gm}} = \frac{1}{2} \int dz \left[-W_+ \nabla_- W_+ + i \left(\nabla_{++} \bar{\Phi}^* \nabla_- \Phi + \nabla_- \bar{\Phi}^* \nabla_{++} \Phi \right) + \left(\Psi_+^* \nabla_- \Psi_+ + \nabla_- \Psi_+^* \Psi_+ \right) + m \left(\bar{\Phi}^* \Psi_+ + \Psi_+^* \bar{\Phi} \right) \right]. \quad (1.62)$$

Nesta ação, não introduzimos termos de interação entre $\bar{\Phi}$ e Ψ_+ uma vez estamos mais interessados nos acoplamentos matéria-gauge, e a ausência de tais termos irá alterar os resultados em que estamos interessados, além de não causar problemas na renormalização do modelo, como comprovaremos no capítulo 3.

Em se tratando de super-teorias de gauge, um procedimento mais eficiente para obtermos os campos componentes dos supercampos, consiste em se definir as componentes através da projeção com derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} | &= \phi, & \Psi_+ | &= \psi_+, \\ \nabla_- \bar{\Phi} | &= \lambda_-, & \nabla_- \Psi_+ | &= F. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Para tanto, basta fazermos uma redefinição dos campos do caso anterior, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \phi + i\theta_+ (\lambda_- - iq\epsilon\gamma_- \phi), \\ \Psi_+ &= \psi_+ + \theta_+ (F + q\epsilon\gamma_- \psi_+). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Podemos também usar que

$$\int dx^2 d\theta_- \mathcal{L}_+(\Sigma) = \int dx^2 D_- \mathcal{L}_+(\Sigma) = \int dx^2 \nabla_- \mathcal{L}_+(\Sigma) \quad , \quad (1.65)$$

onde a última igualdade pode ser obtida lembrando-se que a carga de P_+ é nula, isto é, que P é construído de modo a ser gauge-invariante. Com isto, obteremos que nossa ação, escrita em termos dos campos componentes, lê-se:

$$\begin{aligned} S_t = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_+ \mathcal{D}_{--} \eta_+ + \frac{1}{2} \left[(\mathcal{D}_{++} \phi^* \mathcal{D}_{--} \phi + \mathcal{D}_{--} \phi^* \mathcal{D}_{++} \phi) + \right. \right. \\ \left. + i \left[\lambda_-^* \mathcal{D}_{++} \lambda_- - (\mathcal{D}_{++} \lambda_-^*) \lambda_- + \psi_+^* \mathcal{D}_{--} \psi_+ - (\mathcal{D}_{--} \psi_+^*) \psi_+ \right] + 2FF + \right. \\ \left. + m \left[\phi^* F + F^* \phi + i(\lambda_-^* \psi_+ - \psi_+^* \lambda_-) \right] + \varepsilon q \left[\lambda_-^* \phi \eta_+ - \phi^* \lambda_- \eta_+ \right] \right\} \quad (1.66a) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - i g q V_\mu$.

Eliminando-se os campos auxiliares F e F^* através de suas equações de movimento e definindo o espinor de Dirac

$$\chi = \begin{bmatrix} \psi_+ \\ \lambda_- \end{bmatrix} ,$$

poderemos reescrever esta ação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_t = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_+ \mathcal{D}_{--} \eta_+ - \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - i \bar{\chi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \chi \right. \\ \left. - i m \bar{\chi} \chi + \varepsilon q \left[\lambda_-^* \phi \eta_+ - \phi^* \lambda_- \eta_+ \right] \right\} \quad (1.66b) \end{aligned}$$

de onde vemos mais nitidamente que a ação da SQED₂ - (1,0) corresponde a QED₂ escalar-espinorial (com mesma massa para os

campos escalar e espinorial), acrescida de um termo cinético para um espinor de MW invariante de gauge (fotino) e um termo de interação deste último com o campo escalar e a componente *right* do espinor χ .

1.4 - SIMETRIAS E CORRENTES DE NOETHER

Passemos agora, a analisar as simetrias e correspondentes correntes conservadas que a ação (1.62) possui. Para tanto, seguimos o mesmo procedimento utilizado quando trabalhamos no espaço-tempo ordinário: definimos uma transformação de simetria da ação como sendo aquela na qual $\delta S = 0$. No caso particular de transformações que deixam o elemento de volume invariante (que será o caso de todas simetrias que iremos estudar), podemos escrever que

$$\delta S = \int dz \delta \mathcal{L}_+ . \quad (1.67)$$

Isto significa que, para que esta transformação seja uma simetria, deve-se ter que

$$\delta \mathcal{L}_+ = \partial_{++} \Lambda + \partial_{--} \Lambda_{+++} + D_- \Lambda_{++} . \quad (1.68)$$

Por outro lado, supondo-se que $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+(\Sigma, \partial_\mu \Sigma, D_- \Sigma, \partial_\mu D_- \Sigma)$, poderemos escrever que

$$\delta \mathcal{L}_+ = \sum_{\Sigma} \left\{ \delta \Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Sigma} + \delta \partial_\mu \Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Sigma} + \delta D_- \Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_- \Sigma} + \delta \partial_\mu D_- \Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu D_- \Sigma} \right\}$$

$$= \sum_{\Sigma} \left\{ \delta\Sigma L_{\Sigma} + \partial_{\mu} \left[\delta\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\mu} \Sigma} + D_{-}(\delta\Sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\mu} D_{-} \Sigma} \right] + D_{-} \left[\delta\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_{-} \Sigma} - \delta\Sigma \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\mu} D_{-} \Sigma} \right] \right\}, \quad (1.69)$$

$$\text{onde } L_{\Sigma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Sigma} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\mu} \Sigma} \mp D_{-} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_{-} \Sigma} \pm D_{-} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\mu} D_{-} \Sigma}$$

correspondem às equações de movimento para o supercampo Σ (o sinal superior se Σ for um bóson e o inferior se férmion). Logo, no caso de uma transformação de simetria, obteremos a identidade

$$\sum_{\Sigma} \left(\delta\Sigma L_{\Sigma} \right) + \partial_{++} J_{-} + \partial_{--} J_{+++} + D_{-} J_{++} \equiv 0, \quad (1.70)$$

$$\text{onde } J_{-} = \sum_{\Sigma} \left(\delta\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{++} \Sigma} + D_{-}(\delta\Sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{++} D_{-} \Sigma} \right) - \Lambda_{-},$$

$$J_{+++} = \sum_{\Sigma} \left(\delta\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{--} \Sigma} + D_{-}(\delta\Sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{--} D_{-} \Sigma} \right) - \Lambda_{+++},$$

$$J_{++} = \sum_{\Sigma} \left(\delta\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_{-} \Sigma} - \delta\Sigma \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\mu} D_{-} \Sigma} \right) - \Lambda_{++}$$

são as chamadas supercorrentes, uma vez que sobre as trajetórias clássicas, ($L_{\Sigma} = 0$), a identidade acima corresponde a uma equação de continuidade no superespaço.

Vamos fazer agora a análise das simetrias e correspondentes supercorrentes que a nossa ação possui.

1.4.1 - SIMETRIAS DE GAUGE

Na seção anterior, nosso Lagrangeano foi construído de tal forma a ser invariante ($\delta\mathcal{L}_{+} = 0$) segundo as transformações de gauge. No caso infinitesimal, estas transformações podem ser escritas

como

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Phi} &= e^{i\Lambda(z)}\bar{\Phi} \cong i\Lambda(z)\bar{\Phi}, & \delta\bar{\Phi}^* &= e^{-i\Lambda(z)}\bar{\Phi}^* \cong -i\Lambda(z)\bar{\Phi}^*, \\ \delta\Psi_+ &= e^{i\Lambda(z)}\Psi_+ \cong i\Lambda(z)\Psi_+, & \delta\Psi_+^* &= e^{-i\Lambda(z)}\Psi_+^* \cong -i\Lambda(z)\Psi_+^*, \\ \delta\Gamma_- &= D_- \Lambda(z)/g, & \delta\Gamma_{++} &= \partial_{++} \Lambda(z)/g. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Portanto, de (1.70), podemos obter a equação de continuidade

$$\partial_{++} J_-^g + D_- J_{++}^g = 0, \quad (1.72)$$

onde $J_-^g \equiv (\bar{\Phi}^* \nabla_- \bar{\Phi} - \bar{\Phi} \nabla_- \bar{\Phi}^*)$

e $J_{++}^g \equiv (\bar{\Phi}^* \nabla_{++} \bar{\Phi} - \bar{\Phi} \nabla_{++} \bar{\Phi}^*) - 2i\Psi_+^* \Psi_+$.

Projetando esta equação, obteremos as seguintes equações para os campos componentes:

$$i(\phi^* \mathcal{D}_{++} \lambda_- - \phi \mathcal{D}_{++} \lambda_-^*) + qg\eta_+ \phi^* \phi + i(\psi_+^* F - F^* \psi_+) = 0, \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} \partial_{++} [i(\phi \mathcal{D}_{--} \phi^* - \phi^* \mathcal{D}_{--} \phi) - 2\lambda_-^* \lambda_-] + \partial_{--} [i(\phi \mathcal{D}_{++} \phi^* - \phi^* \mathcal{D}_{++} \phi) + \\ - 2\psi_+^* \psi_+] = 0. \end{aligned}$$

A primeira equação estabelece uma relação de consistência para as equações de movimento do fotino. Por outro lado, a segunda equação corresponde à conhecida lei de conservação que obtemos para uma teoria de campos de gauge interagindo com campos escalares e espinoriais, como deveria ser obtido da Lagrangeana em componentes.

1.4.2 - SIMETRIA QUIRAL

Como os supercampos Φ e Ψ_+ possuem entre suas componentes os espinores quirais λ_- e ψ_+ respectivamente, podemos então definir a seguinte transformação quiral global no superespaço

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= e^{-i\gamma}\Phi \cong -i\gamma\Phi & \delta\Phi^* &= e^{i\gamma}\Phi^* \cong i\gamma\Phi^* \\ \delta\Psi_+ &= e^{i\gamma}\Psi_+ \cong i\gamma\Psi_+ & \delta\Psi_+^* &= e^{-i\gamma}\Psi_+^* \cong -i\gamma\Psi_+^* \end{aligned} \quad (1.74)$$

onde γ é um supercampo escalar real constante. Como todos os outros campos são reais, vamos considerar invariantes segundo esta transformação. Pode-se verificar que esta transformação quando expressa em termos dos campos componentes fica:

$$\begin{aligned} \delta\lambda_- &= -i\gamma\lambda_- & \delta\psi_+ &= i\gamma\psi_+ \\ \delta\phi &= -i\gamma\phi & \delta F &= i\gamma F \end{aligned} \quad (1.75)$$

De onde podemos constatar que os campos espinoriais quirais, λ_- e ψ_+ , se transformam de acordo com a transformação quiral usual. Contudo, observamos que, ao contrario do habitual, os campos escalares também se transformam perante esta transformação quiral. Isto já deveria ser esperado, uma vez que de inicio estamos impondo uma simetria entre bósons e férmions. Normalmente, defini-se as transformações quirais em teorias supersimetricas a partir da chamada simetria-R, que consiste em fazer uma transformação de fase nas coordenadas espinoriais do superespaço. Contudo, tal transformação só pode ser implementada, quando o superespaço é construido a partir de espinores quirais. Como nosso superespaço é composto de espinores de MW, não podemos definir este tipo de transformação, como já foi explicado no inicio dessa

seção.

Pode-se verificar que, segundo esta transformação, nosso Lagrangeano se comporta da seguinte maneira:

$$\delta \mathcal{L}_+ = im(\bar{\Phi}^* \Psi_+ - \Psi_+^* \Phi) \quad (1.76)$$

ou seja, ele só é invariante caso $m = 0$, como é normal de uma transformação quirial. Portanto, no caso $m \neq 0$, não teremos supercorrentes conservadas. Contudo, usando as duas expressões para $\delta \mathcal{L}_+$ (eq.(1.69) e (1.76)), poderemos obter a seguinte identidade:

$$\partial_{++} J_-^q + D_- J_{++}^q = 2im(\bar{\Phi}^* \Psi_+ - \Psi_+^* \Phi) \quad (1.77)$$

onde $J_-^q \equiv (\bar{\Phi} \nabla_- \Phi^* - \bar{\Phi}^* \nabla_- \Phi)$

$$J_{++}^q \equiv (\bar{\Phi} \nabla_{++} \Phi^* - \bar{\Phi}^* \nabla_{++} \Phi) + 2i\Psi_+^* \Psi_+$$

que se traduz em termos de campos componentes da seguinte forma:

$$i(\phi \mathcal{D}_{++} \lambda_-^* - \phi^* \mathcal{D}_{++} \lambda_-) - qg\eta_+ \phi^* \phi + i(\psi_+^* F - F^* \psi_+) = 2im(\phi^* \psi_+ - \psi_+^* \phi) \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \partial_{++} [i(\phi^* \mathcal{D}_{--} \phi - \phi \mathcal{D}_{--} \phi^*) + 2\lambda_-^* \lambda_-] + \partial_{--} [i(\phi^* \mathcal{D}_{++} \phi - \phi \mathcal{D}_{++} \phi^*) + \\ - 2\psi_+^* \psi_+] = - 2m(\lambda_-^* \psi_+ + \psi_+^* \lambda_- + iF^* \phi - i\phi^* F) \end{aligned}$$

Podemos usar o mesmo procedimento para encontrar as correntes de correspondentes a SUSY.

CAPÍTULO II

QUANTIZAÇÃO NO SUPERESPAÇO DE TEORIAS SUPERSIMÉTRICAS - (I,0)

A formulação de teorias supersimétricas em termos de supercampos, além de óbvias vantagens de simplificação, encontra a sua verdadeira eficácia na análise do programa de quantização [3,26]. Em termos de supercampos, podem-se efetuar todos os cálculos de propriedades quânticas mantendo a SUSY manifesta em todos os passos, o que simplifica enormemente as manipulações técnicas. Por exemplo, o número de supergráficos requeridos no estudo da renormalização é muito menor do que o número de gráficos necessários na formulação correspondente em campos componentes. Além disso, em um único supergráfico, obtém-se automaticamente o cancelamento das divergências dos loops bosônicos e fermiônicos de vários gráficos de campos componentes. Também, podem-se obter diretamente das super-regras de Feynman os teoremas de não-renormalização, que são dos resultados mais notáveis no que concerne as propriedades no ultra-violeta das teorias supersimétricas.

2.1 - SUPER-REGRAS DE FEYNMAN PARA O LAGRANGEANO DE MATÉRIA

Vamos, primeiramente, obter as super-regras de Feynman para o Lagrangeano dos supercampos de matéria discutido na seção III do capítulo precedente. Para tanto, devemos primeiramente definir o funcional gerador das funções de Green:

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* \exp [i(S_{\text{mat}} + S_f)] \quad (2.1)$$

$$\text{onde } S_{\text{mat}} = \int dz_- \frac{1}{2} \left\{ i f [\Phi^* \Phi] (\partial_{++} \Phi^* D_- \Phi + \partial_{++} \Phi D_- \Phi^*) + g [\Phi^* \Phi] (\Psi_+^* D_- \Psi_+ + \Psi_+ D_- \Psi_+^*) + h [\Phi^* \Phi] (\Phi^* \Psi_+ + \Phi \Psi_+^*) \right\}$$

$$\text{e } S_f = \int dz_- \left\{ \Phi^* J_+ + J_+^* \Phi - \Psi_+^* J - \Psi_+ J \right\},$$

sendo J_+ , J_+^* , J e J^* supercorrentes externas. O fato de termos uma supercorrente espinorial acoplada a um supercampo escalar e vice-versa, é consequência do elemento de volume do superespaço (1,0) não ser um escalar de Lorentz. Contudo, podemos verificar que, em termos dos campos componentes, obteremos o acoplamento habitual. Foi colocado um sinal negativo nos termos de acoplamento de fontes externas com supercampos espinoriais afim de termos a definição usual das funções de Green em termos das derivadas funcionais.

Antes de prosseguirmos na obtenção das super-regras, devemos estabelecer algumas propriedades necessárias ao cálculo funcional no superespaço. Primeiramente, podemos definir a função delta de Dirac para as variáveis Grassmannianas como sendo

$$\int d\theta_- \delta(\theta_+ - \theta'_+) f(\theta_+) = f(\theta'_+) , \quad (2.2)$$

onde f é uma função arbitrária. Em particular, teremos que

$$\int d\theta_- \delta(\theta_+ - \theta'_+) = 1 = \frac{\partial}{\partial \theta_+} \delta(\theta_+ - \theta'_+) , \quad (2.3)$$

de onde podemos fazer a seguinte identificação:

$$\delta(\theta_+ - \theta'_+) \equiv \theta_+ - \theta'_+ . \quad (2.4)$$

Outras propriedades da função δ que serão de grande utilidade nos nossos cálculos quânticos são as seguintes:

$$\begin{aligned} \delta(\theta_+ - \theta'_+) \delta(\theta_+ - \theta'_+) &= 0 , \\ \delta(\theta_+ - \theta'_+) D_- \delta(\theta_+ - \theta'_+) &= \delta(\theta_+ - \theta'_+) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tais resultados podem ser obtidos diretamente através do uso da eq.(2.4) e da expressão para derivada D_- .

Podemos definir a diferenciação com respeito aos supercampos da seguinte forma:

$$\frac{\delta \Sigma(x', \theta')}{\delta \Sigma(x, \theta)} = \delta^2(x - x') \delta(\theta_+ - \theta'_+) \equiv \delta(z_+ - z'_+) . \quad (2.6)$$

A partir da identidade (2.4), podemos constatar que esta definição de diferenciação possui a propriedade peculiar de que o lado direito é um número Grassmanniano e que não é invariante de Lorentz. Como consequência, $\delta/\delta\bar{\Psi}$ se comportará como um espinor e $\delta/\delta\Psi_+$ como um escalar. Para evitar tal tipo de dificuldade,

poder-se-ia modificar esta definição de diferenciação funcional e alterar a forma de acoplamento das correntes externas em (2.1) conforme [27]. Contudo, tais redefinições, além de serem pouco naturais, resultam em super-regras de Feynman muito mais complicadas, que levam todavia exatamente aos mesmos resultados (pelo menos no caso da SUSY global) [27,28]. Portanto, adotaremos as definições acima.

Analogamente as teorias de campo ordinárias podemos, a partir de $Z[J]$, definir o funcional gerador das funções de Green conexas, $W[J]$, como $W[J] \equiv \ln Z[J]$. E fazendo-se uma transformada de Legendre em $W[J]$, obtemos o funcional gerador das funções 1-PI ou ação efetiva, $\Gamma[\Sigma]$, que a nível de árvore corresponde a ação clássica.

Vamos agora, a partir do funcional $Z[J]$, obter os superpropagadores. Para tanto, adotaremos o mesmo procedimento utilizado nas teorias de campo usuais:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* \exp i \left\{ \int dz_- \left[S_c + S_{int} + S_f \right] \right\} = \\ &= \exp \left[S_{int}(\delta/\delta J_+, \delta/\delta J) \right] Z_0[J] \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde S_0 é a ação livre, S_{int} é a ação de interação e

$$\begin{aligned} Z_0[J] &\equiv N \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* \exp \left\{ i \int dz_- \left[\frac{1}{2} \left[(\partial_{++} \Phi^* D_- \Phi + \partial_{++} \Phi D_- \Phi^*) + \Psi_+^* D_- \Psi_+ \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \Psi_+ D_- \Psi_+^* + m(\Phi^* \Psi_+ + \Phi \Psi_+^*) \right] + \Phi^* J_+ - \Psi_+^* J + J_+^* \Phi - \Psi_+^* J \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

é o funcional gerador das funções de Green para a teoria livre. A partir deste, podemos obter os propagadores da teoria.

Fazendo integrações por partes no termo cinético de $\bar{\psi}$, e definindo:

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi_+ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{J}_+ \\ -\mathcal{J} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M \equiv \begin{pmatrix} 2i\partial_{++} D_- & -m \\ -m & -2D_- \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

poderemos escrever que

$$\begin{aligned} S_o + S_f &= \int dz_- \left[-\frac{1}{2} \chi^\dagger M \chi + \frac{1}{2} \mathcal{J}^\dagger \chi + \frac{1}{2} \chi^\dagger \mathcal{J} \right] = \\ &= \int dz_- \left[-\frac{1}{2} \chi^\dagger M (\chi - M^{-1} \mathcal{J}) + \frac{1}{2} \mathcal{J}^\dagger \chi \right]. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Definindo, agora, $\Lambda \equiv \chi - M^{-1} \mathcal{J}$, obtemos que

$$S_o + S_f = \int dz_- \left[-\frac{1}{2} \Lambda^\dagger M \Lambda + \frac{1}{2} \mathcal{J}^\dagger M^{-1} \mathcal{J} \right]. \quad (2.11)$$

Portanto, poderemos escrever o funcional Z_o como (observando que $\mathcal{D}\chi = \mathcal{D}\Lambda$):

$$\begin{aligned} Z_o[\mathcal{J}] &= N \int \mathcal{D}\Lambda \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz_- \left[-\Lambda^\dagger M \Lambda + \mathcal{J}^\dagger M^{-1} \mathcal{J} \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dz_- \left[\mathcal{J}^\dagger M^{-1} \mathcal{J} \right] \right\}, \quad (2.12) \end{aligned}$$

onde na última passagem fizemos uma integração Gaussiana em Λ . Podemos reescrever $Z_o[\mathcal{J}]$ em termos do funcional gerador das funções de Green conexas para uma teoria livre, $W_o[\mathcal{J}]$, que será, então,

$$W_o[\mathcal{J}] = \frac{1}{2} \int dz_- \left[\mathcal{J}^\dagger M^{-1} \mathcal{J} \right]. \quad (2.13)$$

Calculando explicitamente M^{-1} (veja apêndice B), obteremos que

$$W_0[J] = \int dz_- \left[- J_+^* \frac{2D_-}{\square - m^2/2} J_+ - J_+^* \frac{m}{\square - m^2/2} J_- - J_-^* \frac{m}{\square - m^2/2} J_+ + J_-^* \frac{2i\partial_{++} D_-}{\square - m^2/2} J_- \right], \quad (2.14)$$

de onde podemos diretamente calcular os superpropagadores:

$$\langle \Phi(z_1) \Phi^*(z_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta J_+^*(z_1) \delta J_+(z_2)} = -2i \frac{D_{1-}}{\square - m^2/2} \delta(z_1 - z_2), \quad (2.15a)$$

$$\langle \Psi_+(z_1) \Phi^*(z_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta \eta^*(z_1) \delta J_+(z_2)} = i \frac{m}{\square - m^2/2} \delta(z_1 - z_2), \quad (2.15b)$$

$$\langle \Phi(z_1) \Psi_+^*(z_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta J_+^*(z_1) \delta \eta(z_2)} = -i \frac{m}{\square - m^2/2} \delta(z_1 - z_2), \quad (2.15c)$$

$$\langle \Psi_+(z_1) \Psi_+^*(z_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta \eta^*(z_1) \delta \eta(z_2)} = -2 \frac{\partial_{1++} D_{1-}}{\square - m^2/2} \delta(z_1 - z_2). \quad (2.15d)$$

Pode-se verificar que escrevendo os supercampos em termos dos campos componentes e usando-se as definições de D_- e $\delta(z)$, obteremos os propagadores para os campos componentes do Lagrangeano da matéria.

Se, agora, utilizarmos estes superpropagadores na expressão (2.7), poderemos construir os supergráficos da teoria, a partir dos quais poderemos calcular as correções quânticas que o Lagrangeano clássico (1.40) deve receber.

2.2 - SUPER-REGRAS DE FEYNMAN PARA O SETOR DE GAUGE

2.2.1 - O PROCEDIMENTO DE FADDEEV-POPOV E A SIMETRIA BRS NO SUPERESPAÇO (1,0)

Vamos, agora, definir o funcional gerador das funções de Green para a teoria de gauge pura (1.61):

$$Z = \int \mathcal{D}\Gamma_- \mathcal{D}\Gamma_{++} \exp i \left\{ - \frac{1}{2} \int dz_- W_+ D_- W_+ \right\} \quad (2.16)$$

A princípio, para obtermos os propagadores da SQED-(1,0), poderíamos seguir o procedimento utilizado na seção anterior. Contudo, podemos verificar que neste caso o operador M pertencente ao termo cinético de gauge, possui autovalores nulos, não sendo portanto inversível. Tal fato sempre ocorre nas teorias de gauge, e para solucionar este problema, utilizamos o procedimento de Faddeev-Popov. Para tanto, primeiramente, definimos a seguinte integral sobre a variedade do grupo de gauge:

$$\Delta_F^{-1}(\Gamma) = \int \mathcal{D}\Lambda \delta[F_+(\Gamma^\Lambda) - f_+(z)] \quad (2.17)$$

onde $\delta[F_+(\Gamma^\Lambda) - f_+(z)]$ é um produto de funções delta de Dirac, uma em cada ponto do superespaço, $\Gamma \equiv (\Gamma_-, \Gamma_{++})$, $\Gamma^\Lambda = \Gamma + \partial\Lambda/g$, $f_+(z)$ é uma função arbitrária e $F_+(\Gamma^\Lambda)$ é uma função dependente de gauge, tal que $F_+(\Gamma^\Lambda) = f_+(z)$ para algum valor de Λ . Pode-se verificar que Δ_F^{-1} é invariante de gauge. Introduzindo Δ_F^{-1} em Z, obteremos:

$$Z = N \int \mathcal{D}\Gamma e^{iS(\Gamma)} \Delta_F^{-1}(\Gamma) \int \mathcal{D}\Lambda \delta[F_+(\Gamma^\Lambda) - f_+(z)] \quad (2.18)$$

Fazendo a mudança nas variáveis de de integração $\Gamma \rightarrow \Gamma^{\Lambda^{-1}}$, ficaremos com

$$Z = N \int \mathcal{D}\Gamma^{\Lambda^{-1}} \exp(iS(\Gamma^{\Lambda^{-1}})) \Delta_F^{-1}(\Gamma^{\Lambda^{-1}}) \int \mathcal{D}\Lambda \delta[F_+(\Gamma) - f_+(z)] \quad (2.19)$$

Contudo, como $\mathcal{D}\Gamma^{\Lambda^{-1}} = \mathcal{D}\Gamma$, $\Delta_F^{-1}(\Gamma^{\Lambda^{-1}}) = \Delta_F^{-1}(\Gamma)$ e $S(\Gamma^{\Lambda^{-1}}) = S(\Gamma)$, teremos que todo o integrando será independente de Λ . Logo, a integral em Λ resulta numa constante infinita que pode ser absorvida na normalização. Portanto ficaremos com

$$Z = N' \int \mathcal{D}\Gamma \exp(iS(\Gamma)) \Delta_F^{-1}(\Gamma) \delta[F_+(\Gamma) - f_+(z)] . \quad (2.20)$$

Podemos, então, incluir um fator de peso para $f_+(z)$, que só irá alterar a normalização de Z :

$$\begin{aligned} Z &= N'' \int \mathcal{D}\Gamma \mathcal{D}f \Delta_F^{-1}(\Gamma) \delta[F_+(\Gamma) - f_+(z)] \exp i \left[S(\Gamma) + \int dz \frac{1}{-2\alpha} f_+ D_- f_+ \right] \\ &= N'' \int \mathcal{D}\Gamma \Delta_F^{-1}(\Gamma) \exp i \left[S(\Gamma) + \frac{1}{2\alpha} \int dz \text{-} F_+ D_- F_+ \right] . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Além disso, podemos escrever que []:

$$\Delta_F^{-1}(\Gamma) = \int \mathcal{D}C' \mathcal{D}C \exp \left\{ i \int dz \text{-} C' \frac{\delta F}{\delta \Lambda} \Big|_{F=f} C \right\} , \quad (2.22)$$

onde C e C' são supercampos escalares reais que anticomutam (superfantasmas de Faddeev-Popov) e que trazem os seguintes campos componentes:

$$C = c + \theta_+ \mu_- \quad e \quad C' = c' + \theta_+ \nu_- , \quad (2.23)$$

com c e c' sendo os fantasmas de Faddeev-Popov e μ_- e ν_- espinores de MW que comutam.

Podemos novamente modificar a normalização de Z introduzindo o fator

$$\int \mathcal{D}\tilde{\beta}_+ \exp \frac{i}{2} [\tilde{\beta}_+ D_- \tilde{\beta}_+] , \quad (2.24)$$

onde $\tilde{\beta}_+$ é um supercampo espinorial de MW *left*. Se agora fizermos a redefinição

$$\tilde{\beta}_+ = \beta_+ - \frac{1}{\alpha} F_+ , \quad (2.25)$$

o funcional Z assumirá a forma:

$$Z = \tilde{N} \int \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}C' \mathcal{D}\Gamma \exp i \left(\int dz_- \left[-\frac{1}{2} W_+ D_- W_+ + \frac{\alpha}{2} \beta_+ D_- \beta_+ - \beta_+ D_- F_+ + C' \frac{\delta F}{\delta \Lambda} C \right] \right) \quad (2.26)$$

O supecampo β é um supercampo auxiliar que torna possível estabelecer uma simetria de BRS *off-shell*, como veremos mais adiante.

Podemos, assim, escolher como condição de fixação de gauge

$$F_+ = i (D_- \Gamma_{++} + \partial_{++} \Gamma_-) , \quad (2.27)$$

que resulta na condição de Lorentz quando expressa em termos dos campos componentes, como veremos logo abaixo. Neste caso, ficaremos com

$$\frac{\delta F}{\delta \Lambda} = 2D_- \partial_{++} \quad (2.28)$$

Considerando, por sua vez, o setor de matéria, ficaremos com a ação total⁴:

$$S_T = \int dz_- \left\{ \frac{1}{2} \left[i(\nabla_{++} \bar{\Phi} \nabla_- \Phi^* + \nabla_- \bar{\Phi} \nabla_{++} \Phi^*) + 2\Psi_+ \nabla_- \Psi_+^* + m(\bar{\Phi}^* \Psi_+ + \Psi_+^* \bar{\Phi}) + \right. \right. \\ \left. \left. - (D_- \Gamma_{++} - \partial_{++} \Gamma_-) D_- (D_- \Gamma_{++} - \partial_{++} \Gamma_-) + \alpha \beta_+ D_- \beta_+ \right] + \right. \\ \left. - i\beta_+ D_- (D_- \Gamma_{++} + \partial_{++} \Gamma_-) + 2C' D_- \partial_{++} C \right\}, \quad (2.29)$$

que em componentes fica escrita (considerando $\beta_+ = \rho_+ + \theta_+ b$)

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[D_{++} \phi^* D_{--} \phi + D_{--} \phi^* D_{++} \phi + 2i \left(\lambda_-^* D_{++} \lambda_- + \psi_+^* D_{--} \psi_+ \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + m \left(\phi^* F + F^* \phi + i(\lambda_-^* \psi_+ - \psi_+^* \lambda_-) \right) + 2F^* F + gq \left(\lambda_-^* \phi \eta_+ + \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \phi^* \lambda_- \eta_+ \right) \right] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_+ \partial_{--} \eta_+ - b \partial_\mu V^\mu - i\rho_+ \partial_{--} \eta_+ + \\ \left. - \rho_+ \square \gamma_- + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} \alpha \rho_+ \partial_{--} \rho_+ - i\partial_\mu C' \partial^\mu C + 2\nu \partial_{++} \mu_- \right\} \quad (2.30)$$

Podemos definir as transformações de BRS [31] da seguinte forma (fazendo $\Lambda(z) \rightarrow i\lambda C(z)$ nas transformações de gauge (1.44) e (1.46)):

⁴Rigorosamente, deveríamos ter realizado o proc. de Faddeev-Popov partindo da ação total, conforme ressaltado por Harada [29]. Neste caso, deveremos obter diretamente um termo de Wess-Zumino [30], que faz com que a teoria deixe de ser anômala.

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma_- &= iD_-(\lambda C)/g, & \delta\Gamma_{++} &= i\partial_{++}(\lambda C)/g, \\
 \delta\bar{\Phi} &= -\lambda C\bar{\Phi}, & \delta\bar{\Phi}^* &= -\lambda C\bar{\Phi}^*, \\
 \delta\Psi_+ &= -\lambda C\Psi_+, & \delta\Psi_+^* &= -\lambda C\Psi_+^*, \\
 \delta C' &= -\lambda D_-\beta_+/g, & \delta C &= 0, \\
 \delta\beta_+ &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde λ é um parâmetro global anticomutante. Pode-se verificar que tal conjunto de transformações é nilpotente. Além disso o Lagrangeano, segundo estas transformações se comporta da seguinte forma:

$$\delta\mathcal{L}_+ = \frac{2\lambda}{g} \left[D_-(D_-\beta_+\partial_{++}C) \right], \tag{2.32}$$

o que evidencia que S_T possui simetria de BRS. Como consequência, podemos chegar à seguinte equação de conservação:

$$\partial_{++}J_-^{\text{BRS}} + D_-J_{++}^{\text{BRS}} = 0 \tag{2.33}$$

$$\text{onde } J_-^{\text{BRS}} \equiv C(\bar{\Phi}^*\nabla_-\bar{\Phi} - \bar{\Phi}\nabla_-\bar{\Phi}^*) + \frac{2}{g} iD_-(W_+D_-C) - \frac{2}{g} D_-C D_-\beta_+,$$

$$\text{e } J_{++}^{\text{BRS}} \equiv C(\bar{\Phi}\nabla_{++}\bar{\Phi}^* - \bar{\Phi}^*\nabla_{++}\bar{\Phi} - 2\Psi_+^*\Psi_+) - \frac{2}{g} D_-C\partial_{++}\beta_+.$$

2.2.2 - CÁLCULO DOS SUPERPROPAGADORES DE GAUGE

Vamos agora calcular os superpropagadores de gauge correspondentes à ação total (2.29). Antes disso, porém, podemos observar que com a escolha de condição de fixação de gauge que fizemos, os superfantasma não interagem, podendo portanto ser eliminados por uma integração Gaussiana. Vamos também eliminar os

supercampos β . Logo, o funcional gerador poderá ser escrito como:

$$Z[\mathcal{J}] = N \int \mathcal{D}\Gamma \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Psi \exp i \left\{ S_{gm} + S_f \right\} \quad (2.34)$$

$$\text{onde } S_{gm} = \int dz_- \frac{1}{2} \left[i \left(\nabla_{++} \Phi \nabla_- \Phi^* + \nabla_- \Phi \nabla_{++} \Phi^* \right) + 2\Psi_+ \nabla_- \Psi_+^* + m \left(\Phi^* \Psi_+ + \Psi_+^* \Phi \right) - \left(D_- \Gamma_{++} - \partial_{++} \Gamma_- \right) D_- \left(D_- \Gamma_{++} - \partial_{++} \Gamma_- \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha} \left(D_- \Gamma_{++} + \partial_{++} \Gamma_- \right) D_- \left(D_- \Gamma_{++} + \partial_{++} \Gamma_- \right) \right]$$

$$\text{e } S_f = \int dz_- \left\{ \Gamma_{++} J_- - i \Gamma_- J_{++} + \Phi^* J_+ - \Psi_+^* J + J_+^* \Phi - \Psi_+^* J \right\} .$$

S_f corresponde à ação para as correntes externas. Colocamos um fator i para o termo com Γ_- , uma vez que ele é imaginário puro.

Após algumas manipulações, a ação S_{gm} ler-se-á:

$$S_{gm} = \int dz_- \frac{1}{2} \left[-i \left(\Phi \partial_{++} D_- \Phi^* + \Phi^* \partial_{++} D_- \Phi \right) + \Psi_+ D_- \Psi_+^* + \Psi_+^* D_- \Psi_+ + m \left(\Phi^* \Psi_+ + \Psi_+ \Phi^* \right) + \frac{\alpha + 1}{\alpha} \left(-i \Gamma_{++} D_- \partial_{++} \Gamma_- + \Gamma_- \partial_{++} \partial_{++} D_- \Gamma_- \right) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(i \Gamma_{++} \square \Gamma_- \right) + \epsilon q \left[\Gamma_- \left(\Phi \partial_{++} \Phi^* - \Phi^* \partial_{++} \Phi + 2i \Psi_+^* \Psi_+ \right) + \Gamma_{++} \left(\Phi D_- \Phi^* - \Phi^* D_- \Phi \right) \right] + 2i g^2 q^2 \Gamma_- \Gamma_{++} \Phi^* \Phi \right] . \quad (2.35)$$

A partir desta expressão, utilizando o mesmo procedimento da seção anterior obtemos que os superpropagadores de gauge no caso em que $\alpha = 1$ serão:

$$\langle \Gamma_- (z_1) \Gamma_- (z_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_{++} (z_1) \delta J_{++} (z_2)} = - \frac{2 \partial_{1--} D_{1-}}{\square^2} \delta(z_1 - z_2) , \quad (2.36a)$$

$$\langle \Gamma_{++}(z_1) \Gamma_{++}(z_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_-(z_1) \delta J_-(z_2)} = \frac{2i \theta_{1++} \theta_{1++} D_{1-}}{\square^2} \delta(z_1 - z_2) .$$

(2.36b)

2.2.3 - DIVERGÊNCIAS NA SQED₂ - (1,0)

Através de uma simples contagem de potências nos momenta dos propagadores e vértices que constituem um gráfico 1-PI, pode-se saber qual o mais elevado valor do grau de divergência superficial que este gráfico poderá assumir, i. é., a divergência que decorre quando todos os momenta internos do gráfico tendem a infinito. Tal tipo de divergência é de fundamental interesse no programa de renormalização de uma teoria, conforme descrito em detalhes na ref. [32].

Antes de fazermos a análise das divergências superficiais da SQED₂ - (1,0), recordaremos brevemente como tal análise é feita nas teorias fora do superespaço. Para tanto, vamos usar como exemplo a QED₂ escalar-espinorial, que é descrita pelo seguinte Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \mu \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g q A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \\ & + i g q A^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) - g^2 q^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi \end{aligned} \quad (2.37)$$

Consideremos agora um gráfico 1-PI genérico com L loops, I_{φφ} propagadores de φ, I_{ψψ} propagadores de ψ, I_{AA} propagadores de A_μ; com E_A, E_φ e E_ψ linhas externas e V_{φφA}, V_{ψψA} e V_{φφAA} vértices do tipo φφA, ψψA e φφAA, respectivamente. Tal gráfico, terá no máximo o seguinte grau de divergência superficial, δ :

$$\delta = 2L + V_{\phi\phi A} - 2I_{\phi\phi} - 2I_{AA} - I_{\psi\psi} , \quad (2.38)$$

uma vez que cada loop contribuirá com duas potências de momento k cada vértice do tipo $\phi\phi A$ com uma potência no denominador, enquanto que cada propagador bosônico contribui com k^2 e cada propagador fermiônico com k para o denominador. Tal expressão não é muito prática. Podemos melhorá-la, relacionando o número de loops com as linhas internas e com os vértices. Para tanto, basta lembrarmos que o número de loops é igual ao número de momenta independentes de um gráfico 1-PI. Por outro lado, num gráfico existem $\sum I$ momenta internos; existe uma conservação de momento em cada vértice (que são $\sum V$ vértices), mas existe uma conservação de momento total. Então teremos $(\sum V - 1)$ relações entre momenta, ou seja, teremos $(\sum I - \sum V + 1)$ momenta independentes. Portanto, teremos que

$$L = \sum I - \sum V + 1. \quad (2.39)$$

Podemos, também, através da forma do gráfico, obter as chamadas relações topológicas que relacionam os vértices com as linhas internas e externas. Por exemplo, temos $(V_{A\phi\phi} + V_{A\psi\psi} + 2V_{AA\phi\phi})$ pontos onde as linhas com A_μ podem se "encaixar". Por outro lado, cada linha externa de A_μ ocupa um "encaixe", enquanto que cada linha interna ocupará dois "encaixes", uma vez que conecta dois vértices. Portanto, poderemos estabelecer a seguinte relação:

$$2I_{AA} + E_A = V_{A\psi\psi} + V_{A\phi\phi} + 2V_{AA\phi\phi}. \quad (2.40a)$$

Analogamente, para os campos ψ e ϕ , teremos que

$$2I_{\psi\psi} + E_{\psi} = 2V_{A\psi\psi}, \quad (2.40b)$$

$$2I_{\phi\phi} + E_{\phi} = 2V_{A\phi\phi} + 2V_{AA\phi\phi}. \quad (2.40c)$$

Combinando-se linearmente os resultados (2.38), (2.39) e (2.40) com os coeficientes oportunos, obtém-se que

$$\delta = 4 - 2L - E_{\phi} - E_A - \frac{3}{2} E_{\psi}. \quad (2.41)$$

Podemos observar dessa relação que só poderão ocorrer divergências superficiais ($\delta \geq 0$) em supergráficos a 1 loop, o que mostra que esta teoria é super-renormalizável, i. é., possui um número finito de gráficos que necessitam de contra-termos para anular as divergências superficiais. Tal resultado já era esperado, uma vez que a constante de acoplamento g possui dimensão canônica de massa. Pode-se verificar que os únicos gráficos que podem apresentar divergências superficiais são as auto-energias do fóton e do campo escalar

Vamos agora averiguar quais supergráficos poderão apresentar divergência superficial na SQED₂ - (1,0). Para tanto, devemos usar o mesmo procedimento utilizado anteriormente, com duas únicas diferenças: a primeira é que nossos propagadores e vértices no espaço dos momenta podem possuir as derivadas de SUSY $D_{1-}(k) \equiv \partial_{\phi 1} + \theta_{1+} k_{--}$, que deverão contribuir com $k^{1/2}$ na contagem de potências, uma vez que $(D_{1-}(k))^2 = k_{--}$. A segunda diferença é que para cada loop deveremos diminuir uma potência $k^{1/2}$, uma vez que no cálculo dos supergráficos, em cada loop uma derivada $D_{-}(k)$ será eliminada ao usamos a relação $\delta(\theta_{+} - \theta'_{+}) D_{-} \delta(\theta_{+} - \theta'_{+}) = \delta(\theta_{+} - \theta'_{+})$, como mostraremos no capítulo seguinte. Portanto um supergráfico 1-PI genérico poderá ter no máximo o seguinte grau de divergência

superficial:

$$\delta = \frac{3}{2} L - \frac{3}{2} I_{\phi\phi} - \frac{1}{2} I_{\Psi\Psi} - 2I_{\phi\Psi} - \frac{3}{2} I_{\Gamma_{++}} - \frac{5}{2} I_{\Gamma_{-}} + \frac{1}{2} V_{\phi D} + V_{\phi d} \quad (2.42)$$

onde $V_{\phi D}$, $V_{\phi d}$, V_{Ψ} e V_4 designam o número de vértices do tipo $\Gamma_{++} \phi^* D \phi$, $\Gamma_{-} \phi^* \partial_{++} \phi$, $\Gamma_{-} \Psi^* \Psi$ e $\Gamma_{-} \Gamma_{++} \phi^* \phi$ respectivamente.

Analogamente ao exemplo precedente, podemos estabelecer a relação

$$L = \sum I - \sum V + 1 \quad (2.43)$$

e as relações topológicas

$$E_{\phi} + 2I_{\phi\phi} + I_{\phi\Psi} = 2V_{\phi D} + 2V_{\phi d} + 2V_4, \quad (2.45a)$$

$$E_{\Psi} + 2I_{\Psi\Psi} + I_{\phi\Psi} = 2V_{\Psi D}, \quad (2.45b)$$

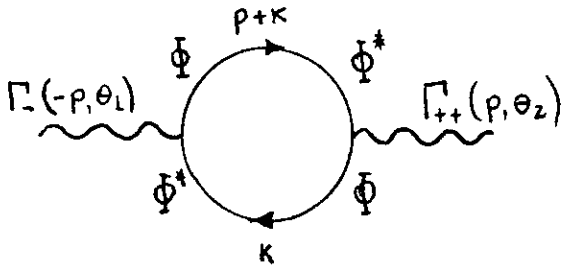
$$E_{\Gamma_{-}} + 2I_{\Gamma_{-}} = V_{\phi d} + V_{\Psi} + V_4, \quad (2.45c)$$

$$E_{\Gamma_{++}} + 2I_{\Gamma_{++}} = V_{\phi D} + V_4. \quad (2.45c)$$

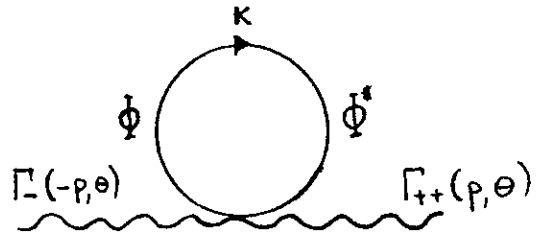
Tomando-se (2.43), (2.44) e (2.45) obtém-se que

$$\delta = \frac{7}{2} - 2L - \left(E_{\phi} + \frac{3}{2} E_{\Psi} + \frac{1}{2} E_{\Gamma_{-}} + E_{\Gamma_{++}} \right) - \frac{1}{2} I_{\phi\Psi}, \quad (2.46)$$

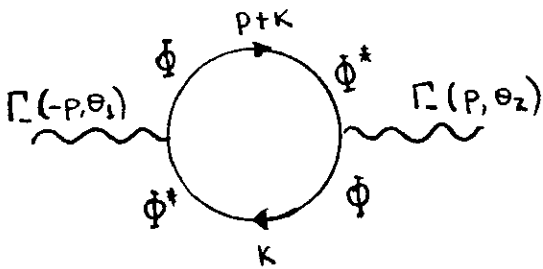
de onde podemos concluir que só poderão ocorrer divergências superficiais a 1 loop. Mais especificamente, os únicos supergráficos 1-PI que poderão apresentar divergências superficiais são os dados a seguir. O cálculo e a análise desses supergráficos será o objetivo do próximo capítulo.



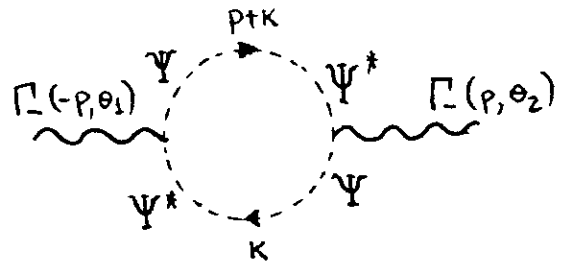
a) fig. 2.1a



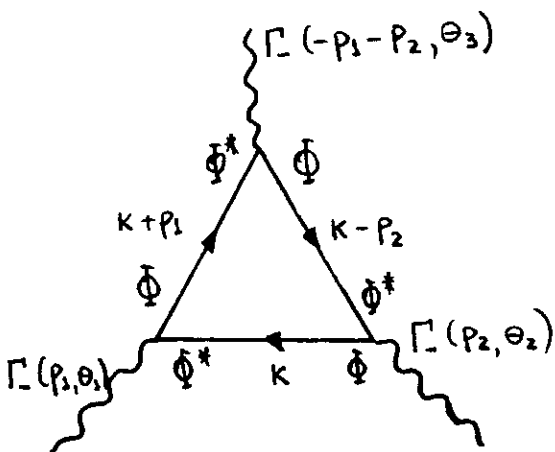
b) fig. 2.1b



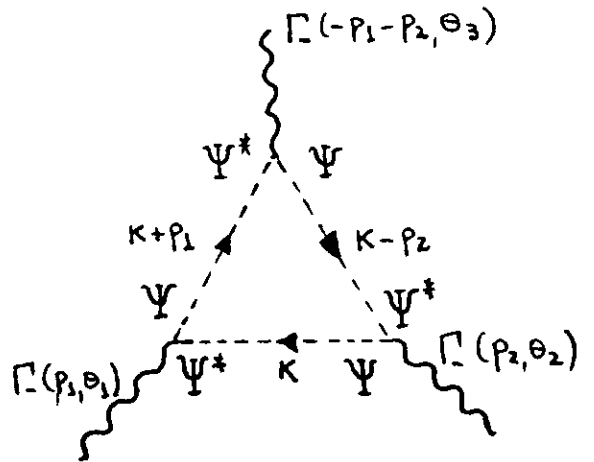
c) fig. 2.1c



d) fig. 2.1d



e) fig. 2.1e



f) fig. 2.1f

CAPÍTULO III

GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA PARA OS SUPERCAMPOS DE GAUGE NA SUSY (1,0)

No capítulo precedente, foi introduzida a quantização no superespaço para os setores de matéria e de gauge em modelos com SUSY-(1,0) global. Seguindo o procedimento proposto na ref.[33], atacou-se o problema do ponto-de-vista da integral de caminho. Adaptando-se, então, o método dos funcionais geradores das funções de Green ao superespaço (1,0), pudemos ler os propagadores dos supercampos de matéria, Φ e Ψ_+ , bem como aqueles associados ao setor de gauge, Γ_- e Γ_{++} . Quanto aos *ghosts* de Faddeev-Popov, o seu desacoplamento prossegue como no caso da QED ordinária.

De posse dos resultados precedentes, será nosso propósito neste capítulo apresentar e discutir os resultados concernentes aos supergráficos com divergência superficiais fornecidos na fig.(2.1). Desta análise, seguirá a discursão do problema da geração dinâmica de massa para os supercampos de gauge da SUSY-(1,0).

3.1 - CÁLCULO DE LOOPS NO SUPERESPAÇO (1,0)

Conforme já foi mencionado na seção 2.2.3, os supergráficos com divergência superficial na SQED₂ - (1,0), aparecem somente à ordem de 1-loop, o que é consistente com o fato de que as teorias de gauge em duas dimensões serem super-renormalizáveis. Tais diagramas divergentes serão, agora, calculados explicitamente em termos dos superpropagadores (2.15) e mediante o uso do teorema de Wick sobre os termos de interação do Lagrangeano de gauge.

Começaremos calculando o supergráfico da fig.(2.1a). Para tanto, consideremos os termos de interação dos supercampos Γ_- e Γ_{++} com os supercampos escalares, Φ e Φ^* . Fazendo-se as contrações possíveis com estes últimos e rearranjando os fatores (lembrando-se de que o elemento de volume do superespaço é fermiônico), obtemos a seguinte integral no espaço das configurações:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{g^2 q^2}{4} \int d\theta_1 d\theta_2 d^2x_1 d^2x_2 \left[(\partial_{1++} \Delta(z_2 - z_1)) (D_{2-} \Delta(z_1 - z_2)) + \right. \\
 & - (\partial_{1++} D_{2-} \Delta(z_2 - z_1)) (\Delta(z_1 - z_2)) - (\Delta(z_2 - z_1)) (\partial_{1++} D_{2-} \Delta(z_1 - z_2)) \\
 & \left. + (D_{2-} \Delta(z_2 - z_1)) (\partial_{1++} \Delta(z_1 - z_2)) \right] \Gamma_-(z_1) \Gamma_{++}(z_2), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

onde $\Delta(z_i - z_j) \equiv \langle \Phi(z_i) \Phi^*(z_j) \rangle = -2i \frac{D_{i-} \delta(z_i - z_j)}{\square_i - m^2/2}$.

Pode-se, agora, fazer as transformadas de Fourier nas coordenadas x_μ dos superpropagadores e nos supercampos associados às linhas externas. Para reduzir esta integral de loop a uma expressão local na variável θ_+ , usamos a regra de transferência

$$D_{1-}(p)\delta_{12} = -D_{2-}(-p)\delta_{12} \quad (3.2)$$

e as relações

$$\delta_{12}\delta_{12} = 0, \quad (3.3a)$$

$$\delta_{12}D_{1-}(p)\delta_{12} = \delta_{12}, \quad (3.3b)$$

$$D_{1-}(p)D_{1-}(p) = p_{--}, \quad (3.3c)$$

onde $\delta_{12} \equiv \delta(\theta_1 - \theta_2)$ e $D_{1-}(p) = \partial_{\theta_1} + \theta_1 p_{--}$.

Como resultado, a integral assumirá da seguinte forma:

$$i\xi^2 q^2 \int d\theta \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{4k_{++}p_{--} - 1/2(p_{--}^2 - m^2)^2}{(k^2 + m^2/2)[(k+p)^2 + m^2/2]} + \right. \\ \left. - \frac{2}{(k^2 + m^2/2)} \right] \Gamma_{1-}(-p)\Gamma_{1++}(p), \quad (3.4)$$

de onde podemos observar diretamente que somente o último termo poderá dar uma contribuição infinita. Usando-se regularização dimensional, podemos chegar ao seguinte resultado:

$$\int d\theta \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{\xi q}{(2\pi)} \Gamma_{1-}(-p)\Gamma_{1++}(p) + \text{termos finitos}, \quad (3.5)$$

Procedendo-se analogamente, encontramos os seguintes resultados para os gráficos restantes da fig.(2.1):

i. fig.(2.1b)

$$ig^2q^2 \int d\theta \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[-\frac{2}{(k^2 + m^2/2)} \right] \Gamma_{1^-(-p)} \Gamma_{1^{++}(p)}, \quad (3.6)$$

ii. fig.(2.1c)

$$-g^2q^2 \int d\theta \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{4k_{++}^2 + 4k_{++}p_{++} + p_{++}^2}{(k^2 + m^2/2)[(k+p)^2 + m^2/2]} \right] \Gamma_{1^-(-p)} \Gamma_{1^-(p)} \quad (3.7)$$

iii. fig.(2.1d)

$$-g^2q^2 \int d\theta \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{4k_{++}^2 + 4k_{++}p_{++}}{(k^2 + m^2/2)[(k+p)^2 + m^2/2]} \right] \Gamma_{1^-(-p)} \Gamma_{1^-(p)} \quad (3.8)$$

Para a obtenção dos resultados (ii) e (iii), afim de liberarmos as funções δ_{ij} , devemos primeiramente fazer uso das integrações por partes graduadas com a derivada covariante D_- :

$$\int d\theta \left[(D_-(p)f(p)) g(q) \right] = \mp \int d\theta \left[f(p) (D_-(q)g(q)) \right], \quad (3.9)$$

onde $(-)$ corresponde a $f(p)$ bosônico e $(+)$ a um $f(p)$ de natureza fermiônica.

O diagrama da fig.(2.1d) encontra-se calculado na ref. [34], com o objetivo de fixar o coeficiente numérico da expressão da anomalia de gauge que os autores se propõem a calcular. Estes,

porém, não consideram o gráfico da fig. (2.1a-c), por estarem incluindo apenas supercampos fermiônicos de matéria.

Utilizando-se a regularização dimensional, pode-se verificar que somente a integral em (i) resulta em termos infinitos, enquanto que as demais integrais são todas finitas.

Portanto os gráficos 1-PI das figuras (2.1a e b) irão resultar na seguinte correção quântica divergente à ação efetiva:

$$\int d\theta \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{\xi^2 q^2}{\pi} \Gamma_{1^-}(-p) \Gamma_{1^{++}}(p) \quad (3.10)$$

Com os resultados acima, já possuímos elementos suficientes para discutirmos a questão da geração dinâmica de massa mencionada no início do capítulo. Contudo, apenas por uma questão de caráter prático, apresentaremos nesta seção todos os resultados para os supergráficos da fig.(2.1), deixando para a seção seguinte os comentários e conclusões de nossos cálculos.

Prosseguimos com os diagramas superficialmente divergentes, com 3 linhas externas de Γ_- e possuindo loops bosônico e fêrmionico. Considerando-se os vértices necessários à construção destes gráficos, efetuando-se as possíveis contrações sobre os supercampos de matéria e integrações por partes com a derivada D_- , chega-se aos seguintes resultados:

iv. fig.(2.1e)

$$\int d\theta \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{g^2 q^2}{8} \left[\frac{8(k_{++})^3 + 8(k_{++})^2(p_{1++} - p_{2++}) + 2k_{++}(p_{1++}^2 + p_{2++}^2) - 6k_{++}p_{1++}p_{2++} - p_{2++}p_{1++}^2 + p_{1++}p_{2++}^2}{[k^2 + m^2/2][(k + p_1)^2 + m^2/2][(k - p_2)^2 + m^2/2]} \right] \times$$

$$\left[(k_{--} + p_{--})\Gamma_{-}(p_1)\Gamma_{-}(p_2)\Gamma_{-}(-p_1 - p_2) - p_{1--}\Gamma_{-}(p_1)\Gamma_{-}(p_2)\Gamma_{-}(-p_1 - p_2) + \right.$$

$$\left. - (D_{-}(p_1)\Gamma(p_1))(D_{-}(p_2)\Gamma_{-}(p_2)) \Gamma_{-}(-p_1 - p_2) \right] \quad (3.11)$$

v. fig.(2.1f)

$$\int d\theta \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p_2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}$$

$$- g^2 q^2 \left[\frac{(k_{++})^3 + (k_{++})^2(p_{1++} - p_{2++}) - k_{++}p_{1++}p_{2++}}{[k^2 + m^2/2][(k + p_1)^2 + m^2/2][(k - p_2)^2 + m^2/2]} \right] \times$$

$$\left[(k_{--} + p_{--})\Gamma_{-}(p_1)\Gamma_{-}(p_2)\Gamma_{-}(-p_1 - p_2) - p_{1--}\Gamma_{-}(p_1)\Gamma_{-}(p_2)\Gamma_{-}(-p_1 - p_2) + \right.$$

$$\left. - (D_{-}(p_1)\Gamma(p_1))(D_{-}(p_2)\Gamma_{-}(p_2)) \Gamma_{-}(-p_1 - p_2) \right] \quad (3.12)$$

Pode-se, porém, constatar que ambos os gráficos são finitos, mediante uso da expressão seguinte para as integrais de loop no espaço dos momenta:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_{\mu} k_{\nu} k_{\rho} k_{\sigma}}{(k^2 + 2p \cdot k + M^2)^{\alpha}} = (4\pi)^{-D/2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[p_{\mu} p_{\nu} p_{\rho} p_{\sigma} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{(M^2 - p^2)^{\alpha - D/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[\eta_{\mu\nu} p_{\rho} p_{\sigma} + \eta_{\nu\sigma} p_{\mu} p_{\rho} + \eta_{\rho\sigma} p_{\mu} p_{\nu} + \eta_{\mu\rho} p_{\nu} p_{\sigma} + \eta_{\nu\rho} p_{\mu} p_{\sigma} + \eta_{\mu\sigma} p_{\rho} p_{\nu} \right] \right] \times$$

$$\frac{\Gamma(\alpha-D/2+1)}{(M^2 - p^2)^{\alpha-D/2+1}} + \frac{1}{4} \left[\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} \right] \frac{\Gamma(\alpha-D/2+2)}{(M^2 - p^2)^{\alpha-D/2+2}} \quad (3.13)$$

Isto é compatível com o fato de que na QED₂ não há contribuição infinita aos gráficos com 3 linhas vetoriais externas, o que é revelado diretamente através da expressão para o grau de divergência superficial. No caso da SUSY N = 1/2, tal resultado decorre das identidades de Ward de gauge na versão supersimétrica, como se pôde constatar pelos cálculos explícitos desenvolvidos acima.

3.2 - COMENTÁRIOS SOBRE A QUESTÃO DA GERAÇÃO DINÂMICA DE MASSA NA SQED₂ - (1.0)

Contrariamente ao que se passa em 4 dimensões, a invariância de gauge imposta sobre uma teoria com campos vetoriais não impede, em geral, que estes últimos não possam adquirir massa. Isto é precisamente o que ocorre com o modelo de Schwinger [18] e com a eletrodinâmica em 3 dimensões [35]. No primeiro, que é um modelo solúvel e que tem sido amplamente estudado na literatura, o resultado notável é que o fóton adquire massa dinamicamente, devido a correções quânticas à ordem de um loop [36]. A massa do fóton, dada por

$$M = \left[\frac{e^2}{\pi} \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

sendo "e" a constante de acoplamento de gauge, pode ser obtida

através do cálculo do gráfico dado na fig. (3.1), onde o loop é constituído de linhas fermiônicas.

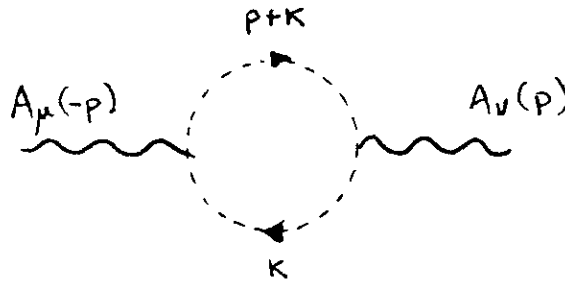


fig. 3.1: Auto-energia do fóton

A origem desta massa pode ser traduzida em termos da anomalia apresentada pela corrente de gauge do modelo [36] e seu caráter topológico é revelado pela sua identificação com a chamada classe de Pontryagin [37].

No caso de 3 dimensões, o termo de massa invariante de gauge que se pode escrever, ainda a nível de Lagrangeano clássico, é também um termo topológico e relacionado à classe característica secundária de Chern-Simons[38]. A QED₃ massiva tem a propriedade de ser uma teoria finita seja no ultra-violeta que no infra-vermelho: nenhuma renormalização deve ser efetuada no modelo [39].

Tendo em vista os cálculos explícitos efetuados na seção precedente para os gráficos da fig. (2.1), gostaríamos de situar os resultados obtidos no contexto da discussão introduzida acima para a geração dinâmica de massa em teorias de gauge.

Observamos que, com a escolha feita para o parâmetro de gauge do termo de fixação de gauge (2.27), os potenciais de gauge $\Gamma_-(z)$ e $\Gamma_{++}(z)$ aparecem em forma diagonal na ação clássica, de tal modo que não há um propagador da forma $\langle \Gamma_- \Gamma_{++} \rangle$. Os supergráficos das figs. (2.1c) e (2.1d) contribuem com correções finitas para o

termo cinético da conexão $\Gamma_-(z)$. Tais correções possuem potências positivas de momento externo, p_{++} , (isto é necessário para a invariância da Lorentz) e se anulam no limite em que $p_\mu \rightarrow 0$, não podendo, assim, contribuir para a massa.

A contribuição total dos supergráficos (2.1a) e (2.1b) à ação efetiva têm, por sua vez, uma parte divergente com estrutura típica de um termo de massa para os supercampos de gauge. De fato, levando-se em conta os pesos de Lorentz e as dimensões canônicas das superconexões Γ_- e Γ_{++} , o termo

$$\int dz_- 1 \Gamma_- \Gamma_{++} \quad (3.15)$$

requer necessariamente a introdução de um parâmetro multiplicativo com dimensão quadrática de massa. Analisando-se em componentes o termo (3.15), verifica-se que:

$$S_M = \int dz_- 1 M^2 \Gamma_- \Gamma_{++} = \int d^2x \left[M^2 \eta_+ \gamma_- + M^2 \gamma_- \partial_{++} \gamma_- - \frac{M^2}{2} V^\mu V_\mu \right] \quad (3.16)$$

onde observa-se claramente a presença do termo de massa para o potencial de gauge. Os campos componentes fermiônicos, η_+ e γ_- , encontram-se definidos em (1.54) e (1.55).

Assim, retornando ao resultado dos gráficos (2.1a) e (2.1b), torna-se clara a indução de um termo de massa na ação efetiva devido a correções quânticas à ordem de 1 loop. O coeficiente finito $\left[\frac{\xi^2 q^2}{\pi} \right]$ coincide exatamente com a massa adquirada dinamicamente pelo fóton no modelo de Schwinger, de acordo com a equação (3.14). O fato de tal termo aparecer como uma divergência em $1/\epsilon$ na ação efetiva não significa que o mesmo deva necessariamente corresponder à uma renormalização de um termo de

massa que já deveria ter sido introduzido no Lagrangeano clássico. Este é invariante de gauge por construção, e não permitiria a introdução do termo $M^2 A^\mu A_\mu$ (ou $iM^2 \Gamma_- \Gamma_{++}$, em supercampos). O que se passa aqui, então, é exatamente o que ocorre com o modelo de Schwinger bosônico. Ao invés de ter lugar uma renormalização de massa, o efeito do termo infinito (de massa) na ação efetiva pode ser deslocado para a divergência da corrente quiral:

$$\partial^\mu j_\mu^{(5)} = -\frac{e}{\pi} {}^*F, \quad (3.17)$$

onde ${}^*F \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

Tal expressão, quando combinada com a equação

$$\square {}^*F = e \partial_\mu {}^*j^\mu, \quad (3.18)$$

com ${}^*j^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu} j_\nu = j^{(5)\mu}$,

confirma que o fóton torna-se massivo:

$$\left(\square + \frac{e^2}{\pi} \right) {}^*F = 0 \quad (3.19)$$

Vê-se, portanto, que a massa gerada dinamicamente para o fóton é o coeficiente finito do termo divergente introduzido pelos supergráficos (2.1a) e (2.2b). Devemos, ainda, ressaltar o fato de que a presença do termo de massa para o fóton induz automaticamente também massa para o fotino, já que não houve quebra da SUSY no processo de quantização.

O resultado da geração dinâmica de massa não é uma

característica do simples fato de se ter supersimetrizado o modelo de Schwinger; o tipo de supersimetria imposta a este modelo influencia o fato de gerar (ou não) massa dinamicamente.

Neste capítulo, estudamos a versão supersimétrica-(1,0) do modelo de Schwinger e verificamos o aparecimento da massa ($\frac{e^2}{\pi}$) para o fóton. A introdução de uma supersimetria extra pode modificar este resultado. Por exemplo, se a nova SUSY a ser introduzida é também *left*, como a primeira, chega-se ao modelo de Schwinger (2,0), para o qual há também geração de massa [40]. Contudo, caso introduzíssemos uma segunda SUSY do tipo *right*, ter-se-ia o modelo de Schwinger (1,1), para o qual, de acordo com a ref. [41], não ocorre a geração dinâmica de massa.

Esta questão assume particular relevância na discussão do papel que campos- de-gauge definidos na superfície de universo das super-cordas heteróticas desempenham no estudo da quebra da supersimetria de gauge residual do processo de compactificação [19].

CONCLUSÃO

Desde quando foi evidenciada a conexão existente entre as teorias de supercordas e as supersimetrias do tipo (p,q) na superfície de universo das supercordas correspondentes [9], o estudo de supersimetrias globais e locais em duas dimensões foi retomado e tem sido objeto de grande interesse. Em particular, dada a relevância do problema da introdução de campos de gauge em associação aos férmions quirais e escalares complexos propagando-se sobre a superfície de universo, concentramos o propósito desta tese no estudo do comportamento quântico de modelos de gauge bidimensionais com SUSY $(1,0)$.

Mais especificamente, consideramos o acoplamento mais geral entre setores de matéria e de gauge da SUSY $(1,0)$, e estudamos o comportamento do modelo sob o ponto de vista das correções quânticas. No que diz respeito à contagem de potências, uma vez que os campos de gauge são tomados como graus-de-liberdade dinâmicos na superfície de universo, o modelo tem a característica de ser super-renormalizável e não possuir qualquer divergência a partir da ordem de 2 loops.

Estudando-se, então, as correções quânticas superficialmente divergentes à ordem de 1 loop, o que é feito diretamente no

superespaço em termos de técnicas de supergráficos, encontra-se como principal resultado que ocorre o fenômeno da geração dinâmica de massa para os campos de gauge. Este é o mesmo mecanismo que se passa com o modelo de Schwinger, e o que obtivemos em nosso estudo foi a versão $N = 1/2$ do mesmo. Resulta, também, devido à preservação da SUSY a nível quântico, que a acompanhar o fóton massivo por efeito quânticos existe um férmion de mesma massa (o fotino).

No que concerne os modelos de cordas e a sua relação com campos de gauge bidimensionais acoplados a matéria carregada [13,14,15], este resultado pode apresentar alguma relevância na questão da análise da quebra espontânea da simetria de gauge da teoria de corda associado ao modelo de gauge das duas dimensões. Em geral, os modelos "realísticos" de supercordas apresentam SUSY (2,0) na superfície de universo e um grupo de gauge com fatores simples e vários fatores $U(1)$. O resultado a que chegamos nesta tese parece indicar que há a possibilidade de se reduzir o número de fatores Abelianos, de tal modo que o grupo de gauge final das baixas energias apresente um único fator $U(1)$ com correspondente campo de gauge não-massivo, o qual deve ser associado à hipercarga fraca do modelo-padrão, $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$.

APÊNDICE A

O GRUPO DE LORENTZ

Neste apêndice, vamos primeiramente rever algumas das principais propriedades do grupo de Lorentz definido num espaço de Minkowski de dimensão D genérica. Discutiremos suas representações vetorial e espinorial e, a seguir, analisaremos mais detalhadamente o caso $D = 2$, que será necessário para o nosso estudo de teorias supersimétricas bidimensionais.

A.1 - O GRUPO DE LORENTZ EM $(1, D - 1)$ DIMENSÕES

Consideremos um espaço de Minkowski de D dimensões com tensor métrico dado por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Chamamos de transformações de Lorentz as transformações de coordenadas lineares e homogêneas,

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{A.1})$$

que deixam o elemento de linha

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.2})$$

invariante, i.é.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\beta = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \quad (\text{A.3})$$

Desta relação, resulta que Λ deve satisfazer à seguinte equação:

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \quad (\text{A.4})$$

Em princípio, a matriz Λ da transformação contém D^2 parâmetros reais. Contudo, como η é simétrico, (A.4) fornece $D(D+1)/2$ relações independentes. Portanto, o número efetivo de parâmetros independentes de Λ será $D(D-1)/2$. Pode-se mostrar, além disso, que o conjunto dessas transformações constitui um grupo.

Da equação (A.4), podemos obter que

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{e} \quad |\Lambda^0_0| \geq 1 \quad (\text{A.5})$$

Através desses vínculos, podemos dividir o grupo de Lorentz em quatro setores desconexos no espaço dos parâmetros. O setor no qual $\det \Lambda = 1$ e $\Lambda^0_0 \geq 1$ é de fundamental importância, pois ele é responsável por gerar os *boosts* e rotações decorrentes de uma mudança de referencial. Ele é o único setor que constitui por si só um grupo, que é denominado Grupo de Lorentz Restrito e designado por $SO_0(1, D-1)$. Além disso, é o setor no qual, através da adição de transformações infinitesimais à identidade podem-se construir todas as transformações finitas desse setor, constituindo portanto um grupo de Lie. Podemos, então, escrever

seus elementos como função dos $D(D-1)/2$ parâmetros da indepententes seguinte forma:

$$\Lambda(w) = \left[\exp \left(1/2 w^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma} \right) \right] \quad (A.6)$$

onde $\Sigma_{\rho\sigma}$ são os geradores do grupo e $w^{\rho\sigma}$ os parâmetros. De agora em diante, sempre que mencionarmos o grupo de Lorentz estaremos nos referindo ao setor restrito.

As transformações de Lorentz (A.1) na vizinhança da identidade podem ser escritas como

$$\Lambda^\rho_\sigma = \delta^\rho_\sigma + w^\rho_\sigma, \quad (A.7)$$

onde w^ρ_σ são parâmetros infinitesimais. Inserindo esta expressão em (A.4), obtemos que $w^\rho_\sigma = -w^\sigma_\rho$. Por outro lado, a eq. (A.6) para transformações infinitesimais fica

$$x'^\mu = \left[e^{1/2 w^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma}} \right]^\mu_\nu x^\nu = \left[1 + 1/2 w^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma} \right]^\mu_\nu x^\nu. \quad (A.8)$$

Comparando esta transformação com (A.7), podemos obter que, na representação vetorial, os elementos de matriz dos geradores são dados por:

$$(\Sigma_{\rho\sigma})^\mu_\nu = \delta^\mu_\rho \eta_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma \eta_{\rho\nu}. \quad (A.9)$$

De posse dessa particular representação, podemos calcular a relação de comutação entre os geradores:

$$\left[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma} \right] = \eta_{\mu\sigma} \Sigma_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} \Sigma_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} \Sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\nu} \Sigma_{\mu\rho}, \quad (A.10)$$

que corresponde à álgebra de Lie do grupo $SO_0(1,D-1)$. Qualquer outro conjunto de objetos que satisfaça esta álgebra, fornece uma representação ao grupo. Em particular, uma outra representação de fundamental importância é a espinorial. Para obtê-la, devemos encontrar D matrizes, γ_μ , que satisfaçam à chamada álgebra de Clifford:

$$\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2\eta_{\mu\nu} . \quad (A.11)$$

Definindo agora os geradores como

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] , \quad (A.12)$$

podemos verificar que eles satisfazem à relação de comutação (A.10). A dimensão dessa nova representação pode ser obtida através do teorema fundamental das Algebras de Clifford [42] que mostra que: "A representação fundamental da Algebra de Clifford associada a um espaço-tempo de dimensão D é dada em um espaço vetorial complexo, não-métrico, de dimensão $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ (onde $\lfloor D/2 \rfloor$ denota o parte inteira de $D/2$)". Os vetores que constituem este espaço são chamados de espinores de Dirac ou simplesmente espinores.

Afim de se poder definir bilinearés que sejam escalares de Lorentz, introduz-se a operação de conjugação de Dirac que é definida por:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{M} \equiv \gamma^0 M^\dagger \gamma^0, \quad (\text{A.14})$$

onde ψ é um espinor de Dirac e M uma matriz arbitrária atuando no espaço espinorial. A partir dessa definição, podemos verificar que $\overline{R(\Lambda)} = R(\Lambda)^\dagger$, onde $R(\Lambda)$ é a representação espinorial das transformações de Lorentz com geradores dados por (A.12). Portanto, constatamos que $\bar{\psi}\psi$ é um escalar de Lorentz.

A.1.1 - ESPINORES QUIRAIS OU DE WEYL

No caso de um espaço de Minkowski de dimensão par, podemos sempre definir no espaço espinorial uma matriz γ_{D+1} tal que

$$i) \quad (\gamma_{D+1})^2 = 1, \quad (\text{A.15a})$$

$$ii) \quad \{\gamma_{D+1}, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.15b})$$

A expressão explícita dessa matriz é dada por

$$\gamma_{D+1} \equiv \eta \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{D-1}, \quad (\text{A.16})$$

onde η é uma fase definida de tal modo a satisfazer (A.15a) e à condição de Hermiticidade.

A partir de γ_{D+1} podemos definir os operadores

$$P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_{D+1}}{2}, \quad (\text{A.17})$$

que, devido à propriedade (A.15a), pode-se verificar constituem

projetores ortogonais no espaço dos espinores, ou seja, são operadores Hermiteanos que satisfazem a :

$$P_+ + P_- = 1 , \quad (\text{A.18a})$$

$$P_+^2 = P_+ , \quad (\text{A.18b})$$

$$P_-^2 = P_- , \quad (\text{A.18c})$$

$$P_+ P_- = P_- P_+ = 0 . \quad (\text{A.18d})$$

Portanto, podemos escrever qualquer espinor destes espaços como a soma de dois outros espinores que pertencem aos subespaços induzidos pelos projetores P_+ e P_- :

$$\psi = \frac{1 + \gamma_{D+1}}{2} \psi + \frac{1 - \gamma_{D+1}}{2} \psi = P_+ \psi + P_- \psi \equiv \psi_+ + \psi_- , \quad (\text{A.19})$$

onde ψ_+ e ψ_- são espinores de $2^{(D/2)-1}$ componentes independentes, e são chamados de espinores de Weyl (ou quirais) *left-handed* e *right-handed* respectivamente (como $\psi_{+(-)}$ é autovetor de $P_{+(-)}$ com autovalor $+1(-1)$, dizemos que ele tem quiralidade $+1(-1)$).

Por outro lado, em decorrência da propriedade (A.15b), teremos que γ_{D+1} comuta com os geradores $\Sigma_{\mu\nu}$ dados por (A.12) e, conseqüentemente, comuta com as transformações de Lorentz (A.6). Portanto, teremos que os espinores de Weyl transformam-se independentemente segundo Lorentz, constituindo-se portanto em duas representações irredutíveis. Assim, os espinores de Dirac constituem uma representação redutível no caso de dimensões pares.

A.1.2 - ESPINORES DE MAJORANA

Sabemos que um campo espinorial ψ , clássico, de massa m e carga elétrica e , interagindo com um campo eletromagnético, é solução da equação de Dirac

$$(i\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - m - e\gamma_{\mu} A^{\mu}) \psi = 0 . \quad (\text{A.20})$$

Da mesma forma, podemos sempre definir um espinor $\psi^c \equiv C\bar{\psi}^t$ que também satisfaz à equação de Dirac com a mesma massa m , mas com carga oposta, ou seja

$$(i\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - m + e\gamma_{\mu} A^{\mu}) \psi^c = 0 . \quad (\text{A.21})$$

Para tanto, a matriz C deve satisfazer às seguintes condições:

$$C^{\dagger} C = 1 \quad (\text{transf. unitária}) \quad (\text{A.22a})$$

$$C\gamma_{\mu}^t C^{-1} = -\gamma_{\mu} . \quad (\text{A.22b})$$

Se impusermos a condição de que $\psi^c = \psi$ (condição de Majorana), (A.20) e (A.21) implicarão que a carga elétrica de ψ será nula. Tal espinor é denominado de espinor de Majorana. Afim de termos consistência, o espinor de Majorana deve ser tal que $(\psi^c)^c = \psi$, o que implica que $C^t = -C$. Como esta condição só ocorre em $D = 2,3,4 \pmod{8}$ [5], só poderemos definir um espinor de Majorana nessas dimensões.

É interessante notar que só para as dimensões $D = 8n + 2$ podemos definir espinores que sejam de Weyl e que satisfaçam à condição de Majorana [5]. Tais espinores são denominados de

espinores de Majorana-Weyl.

A.2 - O GRUPO DE LORENTZ EM (1+1) DIMENSÕES

A.2.1 - A REPRESENTAÇÃO VETORIAL

A partir de (A.9), podemos obter que, na representação vetorial para (1+1) dimensões, os únicos geradores não-nulos serão

$$\Sigma_{01} = -\Sigma_{10} \equiv \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Dai, podemos obter que as transformações de Lorentz (A.6) serão

$$\Lambda(\alpha) = [\exp(\alpha \Sigma)] = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Um sistema de coordenadas muito utilizado em teorias (1+1), e que adotaremos em todo nosso estudo de $D = 2$, são as coordenadas do cone-de-luz, que são definidas por:

$$x^{\pm\pm} \equiv \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.25})$$

Neste sistema de coordenadas, o elemento de linha (A.2) assume a forma:

$$ds^2 = -2 dx^{++} dx^{--}, \quad (\text{A.26})$$

de onde podemos ver que a métrica escreve-se $\eta_{++++} = \eta_{----} = 0$ e $\eta_{+--+} = \eta_{-++-} = -1$. A grande vantagem dessas coordenadas é que as transformações de Lorentz (A.24) aparecem diagonalizadas, ou seja

$$\begin{pmatrix} x'^{++} \\ x'^{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{++} \\ x^{--} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Isto mostra que as transformações de Lorentz não misturam as componentes x^{++} e x^{--} . Costuma-se dizer que as componentes v^{++} e v^{--} de um vetor contravariante v^μ têm peso de Lorentz $+1$ e -1 respectivamente, enquanto que v_{++} e v_{--} têm peso -1 e $+1$, pois se transformam como $v_{\pm\pm} = e^{\mp\alpha} v_{\pm\pm}$.

A.2.2 - A REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL

Como estamos em $D = 2$, os espinores de Dirac terão duas componentes. Em particular, escolheremos a seguinte representação das matrizes γ , denominada representação de Majorana-Weyl, que será utilizada em todo nosso estudo de SUSY

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

que satisfazem a (A.11). Com elas, a partir de (A.12), podemos obter que

$$\Sigma_{01} = \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

de onde podemos tirar que um espinor de Dirac ψ se transforma segundo Lorentz da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Contudo, como estamos numa dimensão par, sabemos que são os espinores de Weyl que correspondem a uma representação irredutível. Para obtê-los, devemos definir a matriz γ_3 , que nesta representação é dada por

$$\gamma_3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Agora, substituindo γ_3 em (A.19) teremos que os espinores de Weyl nesta representação terão a seguinte forma:

$$\psi_+ = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_- = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

onde ψ_1 e ψ_2 são números Grassmanianos complexos. Através de (A.30), concluímos que segundo transformações de Lorentz,

$$\psi_{\pm}' = e^{\mp \alpha/2} \psi_{\pm}. \quad (\text{A.32})$$

o que significa que os espinores quirais ψ_+ e ψ_- , nesta representação, possuem pesos de Lorentz $-1/2$ e $+1/2$, respectivamente.

Vejamos agora como definir um espinor de Majorana. Substituindo (A.28) em (A.22a), podemos concluir que $C = \gamma^0$. Com essa informação, podemos tirar que $\psi^c \equiv C\bar{\psi}^t = \psi^*$. Portanto, um espinor de Majorana nessa representação deverá ser tal que $\psi = \psi^*$.

Como mencionamos anteriormente, em $D = 2$ podemos definir espinores de Majorana-Weyl, que são espinores quirais que satisfazem à condição de Majorana. Estes espinores terão a mesma

forma de (A.32), mas com sua componente não-nula real.

APÊNDICE B

RESULTADOS ÚTEIS AO CÁLCULO DE SUPERPROPAGADORES

Vamos considerar uma matriz quadrada não-singular genérica, M , com sua inversa M^{-1} . Podemos escrever tais matrizes da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde A e X , B e Z , C e Y e D e W são submatrizes com dimensões inversas ($n \times p$ e $p \times n$), compostas de elementos com propriedades de (anti)comutação genéricas. Por hipótese, vamos supor que B e C são matrizes quadradas e possuem os inversos, B^{-1} e C^{-1} , conhecidos.

Pela definição de matriz inversa, devemos ter que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (\text{B.2})$$

de onde podemos obter as relações:

$$\begin{aligned}
 AX + BZ &= 1, \\
 AY + BW &= 0, \\
 CX + DZ &= 0, \\
 CY + DZ &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

Utilizando nossa hipótese, podemos sempre escrever a solução desse sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 Z &= (B - AC^{-1}D)^{-1} \\
 Y &= (C - DB^{-1}A)^{-1} \\
 W &= -B^{-1}AY \\
 X &= -C^{-1}DZ
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

B.1 - CÁLCULO DE M PARA O CASO DE MATÉRIA

Vamos considerar cada elemento de M, da eq(2.9), como as submatrizes A, B, C e D. Portanto, lembrando que $-2\theta_{++}\theta_{--} = \square$ e $D_{--} = -i\theta_{--}$, podemos chegar em

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{D_{--}}{\square - m^2/2} & \frac{m/2}{\square - m^2/2} \\ \frac{m/2}{\square - m^2/2} & \frac{i\theta_{++}D_{--}}{\square - m^2/2} \end{pmatrix}
 \tag{B.5}$$

REFERÊNCIAS

- [1] J. Wess e B. Zumino, Nucl. Phys. B70 (1974) 39.
- [2] J. Wess e B. Zumino, Phys. Lett. B49 (1974) 52;
J. Iliopoulos e B. Zumino, Nucl. Phys. B76 (1974) 310.
- [3] A. Salam e J. Strathdee, Nucl. Phys. B80 (1974) 499;
A. Salam e J. Strathdee, Nucl. Phys. B84 (1975) 127;
A. Salam e J. Strathdee, Nucl. Phys. B76 (1974) 477;
A. Salam e J. Strathdee, Fortschr. Phys. 26 (1978) 57.
- [4] S. Deser e B. Zumino, Phys. Lett. 62B (1976) 335;
S. Ferrara e P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. 74B (1978) 333.
- [5] F. Gliozzi, D. Olive e J. Scherk, Nucl. Phys. B112 (1977) 253.
- [6] F. Englert, Phys. Lett. 119B (1982) 339;
E. Cremmer, B. Julia e J. Scherk, Phys. Lett. 76B (1978) 409;
E. Cremmer e B. Julia, Nucl. Phys. B159 (1979) 141;
E. Cremmer e J. Scherk, Nucl. Phys. B108 (1976) 409;
T.L. Curtight e P.G.O. Freund "SUS(8) Unification and Supergravity", in Proc. Stony Brook Supergravity Workshop, editores P. van Nieuwenhuizen e D.Z. Freedman, North-Holland, Amsterdam, (1979) 197.
- [7] J. Schwarz, Phys. Rep. 89 (1982) 225, e ref. ai contidas.
- [8] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger e E. Witten, Nucl. Phys. B258 (1985) 46.

- [9] H. Osborn, " σ - Models and Strings", Preprint DAMP/88 - 25, Seminário apresentado no "XXII Symposium on the Theory of Elementary Particles", Ahrenshoop;
M Sakamoto, Phys. Lett. 151B (1985) 115;
C. M. Hull e E. Witten, Phys. Lett. 160B (1985) 398;
R. Brooks, F. Muhammad e S. J. Gates Jr, Nucl. Phys. B268 (1986) 599.
- [10] M. Evans e B. Ovrut, Phys. Lett. 174B (1986) 63;
M. Evans e B. Ovrut, Phys. Lett. 175B (1986) 145;
M. Evans e B. Ovrut, Phys. Lett. 184B (1987) 134;
G. Moore e P. Nelson, Nucl. Phys. B274 (1986) 509.
- [11] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, Phys. Rev. Lett. 54B (1985) 502;
D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, Nucl. Phys. B256 (1985) 253;
D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, Nucl. Phys. B267 (1985) 75.
- [12] M. Porrati e E. T. Tomboulis, Nucl. Phys. B315 (1989) 615.
- [13] A. M. Polyakov e P. B. Wiegmann, Phys. Lett. 131B (1983) 121;
A. M. Polyakov e P. B. Wiegmann, Phys. Lett. 141B (1984) 223;
P. Di Vecchia e P. Rossi, Phys. Lett. 140B (1984) 344;
P. Goddard, W. Nalm e D. Olive, Phys. Lett. 160B (1985) 111;
I. Antoniadis e C. Bachas, Nucl. Phys. B27B (1986) 343.
- [14] A. N. Reddlich e H. J. Schnitzer, Phys. Lett. 167B (1986) 315;
K. Bardakci, E. Rabinovici e B. Säring, Nucl. Phys. B299 (1988) 151.
- [15] E. T. Tombolis, Phys. Lett. 198B (1987) 165.
- [16] J. Bagger *et al.*, Nucl. Phys. B289 (1987) 53;
H. Kawai *et al.*, Nucl. Phys. B299(1988) 431.

- [17] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa e E. Witten, Nucl. Phys. B261 (1985) 651;
L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa e E. Witten, Nucl. Phys. B274 (1986) 285.
- [18] J. Schwinger, Phys. Rev. 125 (1962) 397;
J. Schwinger, Phys. Rev. 128 (1962) 2425.
- [19] L. E. Ibañez, H. P. Nilles e F. Quevedo, Phys. Lett. 187B (1987) 25;
L. E. Ibañez, J. E. Kim, H. P. Nilles e F. Quevedo, Phys. Lett. 191B (1987) 282;
Para uma revisão: L. E. Ibañez: "Some Recent results in (2,2) and (0,2) Heterotic String Compactifications", Preprint CERN - TH.5405/89.
- [20] S. Coleman e J. Mandula, Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [21] E. Witten, "Introduction to Supersymmetry", Preprint (1982).
- [22] R. Haag, J. Łopuszanski e M. Sohnius, Nucl. Phys. B88 (1975) 257.
- [23] Para uma revisão:
S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel: "Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry", Benjamin/Cummings Publishing, Massachusetts (1983);
P. West: "Introduction to Supersymmetry and Supergravity", World Scientific, Singapore (1986);
P. P. Srivastava: "Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an Introduction", Adam Hilger, Boston (1986).
- [24] G. Vello e D. Zwanziger, Phys. Rev. 186 (1969) 1337.
- [25] S. A. Dias, R. M. Doria e J. L. Matheus Valle; "Information On The Gauge Principle From An $N = 1/2 - D = 2$ Supersymmetric Model" U.C.P. Preprint 88/10.
- [26] M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, Nucl. Phys. B159 (1979)

429;

M. T. Grisaru e W. Siegel, Nucl. Phys. B201 (1982) 292.

[27] R. Brooks e S. J. Gates, Phys. Lett. 184B (1987) 217.

[28] Gates, M. Grisaru, L. Mezincescu e P. Townsend, Nucl. Phys. B286, (1987) 1.

[29] K. Harada e I. Tsuitsui, Phys. Lett. 183B (1987) 311.

[30] J. Wess e B. Zumino, Phys. Lett. 37B (1971) 95.

[31] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, Phys. Lett 37B (1974) 344;
Para uma revisão: L. Baulieu, Phys. Rep. 129 (1985) 1.

[32] J. C. Collins, "Renormalization", Cambridge University Press, Cambridge (1984) - cap. 5.

[33] Veja S. J. Gates et al. em [23]

[34] J. Louis e B. A. Ovrut, Phys. Rev. D 36 (1987) 1119.

[35] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. 140 (1982) 372

[36] R. Jackiw e R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett., 54 (1982) 1219;
Veja K. Harada et. al. em [29];

K. Harada, H. Kubota e I. Tsuitsui, Phys. Lett 173B (1987) 77.

[37] R. Jackiw e C. Rebbi Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 172;

R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. 52 (1980), 661;

S. Deser, M. Duff e C. Isham, Phys. Lett. 93B (1980) 419.

[38] S. Chern, "Complex Manifolds Without Potential Theory", 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[39] R. Jackiw e S. Templeton, Phys. Rev. D23 (1981) 2291;

W. Siegel, Nucl. Phys. B156 (1979) 135;

S. Deser, R. Jackiw, e S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 975.


[40] J. A. Helayël-Neto, S. Mokhtari e A. W. Smith, "Torsion-Induced Gauge Superfield Mass Generation for Gauge-Invariant Non-Linear σ -Models", Preprint CBPF-NF-035/89

- [41] A. Smailagic e J. A. Helysül-Neto, Mod. Phys. Lett. 2 (1987) 787.
- [42] C. Chevalley, "The Algebraic Theory os Spinor", Columbia University Press, N.Y. (1954)
- [43] V. Gates, Empty Kangaroo, M. Roachcock e W. C. Gall, Physica 15D (1985) 285.

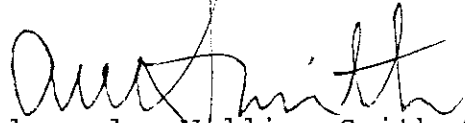
ASPECTOS QUÂNTICOS DE MODELOS DE GAUGE HETERÔTICOS
COM SUPERSIMETRIA (1,0)"

MARCO AURELIO CATTACINI KNEIPP

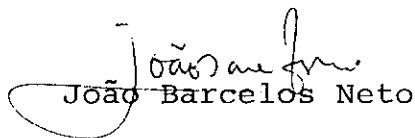
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



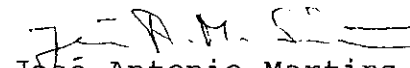
José Abdalla Helayël-Neto (Presidente)



Alexander Willian Smith (Co-orientador)



João Barcelos Neto



José Antonio Martins Simões