

HILARIO ANTONIO RODRIGUES GONÇALVES

FORMULAÇÃO LAGRANGEANA PARA O MECANISMO DE "BOUNCE"
EM EXPLOSÃO DE SUPERNOVAS

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1989

- A meus pais e
- à Erica, minha filha.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Sérgio J. Barbosa Duarte, por sua orientação constante e verdadeiramente amigável, e pelo seu inestimável apoio.

- Ao Prof. Takeshi Kodama, pelo interesse com que acompanhou todo o desenrolar deste trabalho, e por suas críticas e sugestões.

- A Emil de Lima Medeiros, Edgar Corrêa de Oliveira e Gerson Pech, que aqui conheci, e a Vitor Hollup, amigo já de outras jornadas, pelas conversas sobre a física e a vida, pela amizade e companheirismo, por suas sugestões, críticas e incentivo, que fizeram, para mim, menos penosa a realização deste trabalho.

- Aos demais colegas e pesquisadores do DNE, onde realizei este trabalho e a todo o pessoal técnico.

- À Helena S. Ferreira pela bonita apresentação datilográfica.

- Ao CBPF e ao CNPq, pelo suporte financeiro.

R E S U M O

Uma descrição lagrangeana para o "bounce" do caroço de Supernovas é apresentada. A equação de movimento é estabelecida e resolvida numericamente para diferentes configurações iniciais. A quantidade de energia transferida da região central do caroço para sua região externa é calculada usando-se uma versão simplificada para a equação de estado. O índice adiabático da matéria é parametrizado por uma função suave da densidade a qual interpola o índice adiabático de um gás de elétron relativístico e degenerado com o índice adiabático de um gás de nêutron não relativístico e degenerado. A evolução dinâmica para caroços de 1.18, 1.24, 1.34 e 1.40 M_{\odot} é apresentada.

Os resultados mostraram que levando em conta apenas processos mecânicos e uma distribuição apropriada da massa entre a região central e externa do caroço é possível uma transferência de energia suficiente para gerar uma forte onda de choque.

S U M M A R Y

A lagrangean description for Supernova core bounce is presented. The equation of motion is established and solved numerically for different initial configurations. The amount of energy transferred from the inner core to the outer core is calculated, using a simple version of the equation of state. The adiabatic index of the matter is parametrized as a smooth function of density, which connects the adiabatic index of the relativistic degenerate electron gas to the adiabatic index of the nonrelativistic degenerate neutron gas. The dynamical evolution of 1.18, 1.24, 1.34 and 1.40 M_{\odot} core mass is presented.

The results shown that taking into account only mechanical process and appropriated mass distribution between the inner and outer core it was possible to transfer enough amount of energy to generate a strong shock wave.

S U M Á R I O

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTO	iii
RESUMO	iv
SUMMARY	v
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
<u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO I</u> - EVOLUÇÃO ESTELAR	12
1.1 - Diagrama HR	12
1.2 - Pré-Sequência Principal	14
1.3 - Sequência Principal	17
1.3.1 - Cadeias pp	17
1.3.2 - Ciclo CNO	18
1.4 - Limite de Chandraseckhar	20
1.5 - Anãs Brancas	23
1.6 - Gigante Vermelha	24
1.7 - Supernova, Estrela de Nêutron e Buraco Negro	27
<u>CAPÍTULO II</u> - EQUAÇÃO DE ESTADO	32
2.1 - Gás de Fermi	32
2.2 - Propriedades da Matéria Estelar	40
2.2.1 - Regime Subnuclear sem Nêutrons Livres	40
2.2.2 - Regime Subnuclear com Nêutrons Livres	40
2.2.3 - Regime Nuclear	41
2.2.4 - Regime Supranuclear ou Hadrônico	43
2.3 - Índice Adiabático e a Instabilidade de Carões Degenerados	43

<u>CAPÍTULO III</u> - MECANISMOS DE IMPLOÇÃO E EXPLOÇÃO.....	46
3.1 - Mecanismos de Implosão	46
3.1.1 - Fotodissociação do ^{56}Fe	46
3.1.2 - Captura Eletrônica	47
3.1.3 - Processo Urca	49
3.2 - Mecanismos de Explosão	50
3.2.1 - Transporte de Neutrinos	50
3.2.2 - Queimas Termonucleares Explosivas	56
3.2.3 - "Bounce" Hidrodinâmico	57
<u>CAPÍTULO IV</u> - FORMALISMO LAGRANGEANO PARA A DESCRIÇÃO DO "BOUNCE"	61
4.1 - Lagrangeana Efetiva.....	61
4.2 - Equação de Movimento	65
4.3 - Equação de Estado	66
4.4 - Condição Inicial	71
4.5 - Acionando o Colapso	73
<u>CAPÍTULO V</u> - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS..	77
5.1 - Evolução Dinâmica do Sistema	77
5.2 - Análise da Transferência de Energia	83
5.3 - Conclusões	87
<u>APÊNDICE A</u> - EXTENSÃO DA FORMULAÇÃO LAGRANGEANA PARA n CAMADAS HOMOGÊNEAS	89
<u>APÊNDICE B</u> - CRITÉRIO DE DEGENERESCÊNCIA E RELATIVIDADE.	96
<u>REFERÊNCIAS</u>	98

LISTA DE FIGURAS

<u>FIG.</u>	<u>PÁG.</u>
1 - Representação dos cálculos de Müller et al. para o colapso gravitacional de um caroço de $1.4M_{\odot}$	7
1.1 - Representação esquemática do diagrama de Hertzsprung-Russel...	13
1.2 - Dependência da taxa de produção de energia ϵ (erg/g.s) com a temperatura para o Sol, devido às cadeias pp's e ao ciclo CNO	19
2.1 - Plano $T \times \rho$ em escala logarítmica para o gás de Fermi	39
3.1 - Raio versus tempo em escala linear para a explosão de estrelas de $10M_{\odot}$ (a), $2M_{\odot}$ (b) e $1.5M_{\odot}$ (c), com o mecanismo de "deposição" de neutrinos proposto por Colgate e White	52
3.2 - Diagrama de Feynmann para interações com neutrino	53
4.1 -	62
4.2 - Equação de estado (A), (B) e (C) versus logaritmo da densidade.	69
4.3 - Índice adiabático (γ) versus logaritmo da densidade para as equações de estado (A), (B) e (C)	70
4.4 - Número de elétrons por nucleon (Y_e) versus logaritmo da densidade para as equações de estado (A), (B) e (C)	71
4.5 - Raio da camada-2 versus raio da camada-1 das configurações iniciais para quatro caroços de massas totais diferentes usadas neste trabalho	72
4.6 - Densidade da camada-2 versus densidade da camada-1 em escala logarítmica das mesmas configurações que aparecem na Fig. 4.4	73
4.7 - Ilustração do procedimento usado para iniciar a dinâmica: (a) equação de estado (A); (b) Índice adiabático contra o logaritmo da densidade e (c) variação do número de elétrons por nucleon contra o logaritmo da densidade.	75
5.1 - Evolução temporal dos raios das camadas (R_1 e R_2) para o caroço de $1.3M_{\odot}$ e $\alpha = 0.940$, onde foi usada a equação de estado tipo-A	77

5.2 - Evolução temporal dos raios das camadas (R_1 e R_2) para o caroço de $1.34M_{\odot}$ e $\alpha = 0.767$, onde também foi usada a equação de estado de tipo-A	78
5.3 - Evolução temporal da energia total do caroço (H_1) e da camada externa (H_2) para o evento de sucesso apresentado na Fig. 5.1	80
5.4 - Evolução temporal da energia total do caroço (H_1) e da camada externa (H_2) para o evento de não sucesso apresentado na Fig. 5.2	81
5.5 - Evolução temporal do índice adiabático de cada camada no evento de sucesso, mostrado na Fig. 5.1	82
5.6 - Evolução temporal do índice adiabático de cada camada no evento de não sucesso, mostrado na Fig. 5.2	83
5.7 - Variação da energia transferida com a distribuição de massa, especificada por α , para os caroços de 1.18, 1.24, 1.34 e 1.40 M_{\odot}	84
5.8 - Variação da energia transferida com a distribuição de massa, especificada por α , para os caroços de 1.18, 1.24 e 1.34 M_{\odot}	85
5.9 - Variação da energia transferida com a distribuição de massa, especificada por α , para os caroços de 1.18, 1.24 e 1.34 M_{\odot}	86

LISTA DE TABELAS

<u>TAB.</u>	<u>FIG.</u>
1.1 - Temperatura central (KeV), densidade central (g.cm^{-3}) e escala de tempo (anos) durante várias fases evolutivas para duas estrelas de $25M_{\odot}$ e $1M_{\odot}$	21
1.2 - Características das Supernovas I e II	30
4.1 - Característica de cada equação do estado usada em nossos cálculos.....	70
4.2 - Característica da configuração inicial de alguns modelos. As massas totais estão em unidades de $1M_{\odot}$, as densidades iniciais das camadas em unidades de 10^7 e 10^6 g/cm^3 , respectivamente, e as densidades de energia interna, ϵ_1 e ϵ_2 , em unidades de 10^{25} e 10^{23} erg/cm^3 . Os raios das camadas, R_1 e R_2 , estão em unidades de 10^8 cm. Na última coluna está representada a energia gravitacional da camada 1, em foe.....	76

"Mas imaginando ordens erradas, haveis no entanto encontrado alguma coisa..."

"Disseste uma coisa muito bonita, Adso, agradeço-te. A ordem que nossa mente imagina é como uma rede, ou uma escada, que se constroi para alcançar algo. Mas depois deve-se jogar a escada, porque se descobre, que mesmo servindo, era privada de sentido."

O NOME DA ROSA, *Umberto Eco*

... Naquele Império, a Arte da Cartografia atingiu uma tal Perfeição que o Mapa de uma sã Província ocupava toda uma Cidade, e o Mapa do Império, toda uma Província. Com o tempo, esses Mapas Desmedidos não satisfizeram e os Colégios de Cartógrafos levantaram um Mapa do Império que tinha o Tamanho do Império e coincidia ponto por ponto com ele. Menos Apegados ao Estudo da Cartografia, as Gerações Seguintes entenderam que esse extenso Mapa era Inútil e não sem Impiedade o entregaram às Inclemências do Sol e dos Invernos. Nos Desertos do Oeste subsistem despedaçadas Ruínas do Mapa, habitadas por Animais e por Mendigos. Em todo o País não resta outra relíquia das Disciplinas Geográficas.

DO RIGOR NA CIÊNCIA, *Jorge Luis Borges*

INTRODUÇÃO

Do ponto de vista da Astrofísica Nuclear o processo de explosão de Supernovas constitui-se num dos fenômenos mais interessantes da natureza e que, mais recentemente, vem atraindo a atenção de muitos pesquisadores, especialmente após a observação da Supernova 1987A.

De fato, quando, em fevereiro de 87 foram registrados simultaneamente 8 neutrinos no detetor IMB (nos EUA) — atingido no intervalo de alguns segundos por um pulso estimado em 10^{16} neutrinos —, e 11 no detetor de Kamiokande (no Japão), associados à explosão da Supernova 1987A, evidenciou-se indiretamente uma previsão básica da teoria das Supernovas: sua explosão foi precedida, efetivamente, pelo colapso gravitacional de uma estrela massiva.

Um dos objetivos principais no estudo das Supernovas, por exemplo, é obter-se alguma informação útil sobre as propriedades da matéria nuclear quando submetida a condições extremas de densidade e temperatura (este é o caso nos instantes finais do colapso estelar). Por outro lado, deseja-se também esclarecer a origem dos raios cósmicos, a abundância dos elementos químicos do hidrogênio ao grupo do ferro, e a nucleosíntese de elementos pesados via captura rápida de nêutrons, etc.

As Supernovas constituem-se também no mecanismo de formação de Estrelas de Nêutron e Buracos Negros.

Sem dúvida, o recente progresso da física de Supernovas deve-se tanto ao desenvolvimento da física de altas energias, quanto ao advento dos computadores eletrônicos, que viabilizaram, por exemplo, a realização de complicados cálculos de evo

lução estelar e colapso gravitacional, antes inimaginável.

Entretanto, não obstante os avanços já conquistados e a confirmação observacional de algumas idéias básicas sobre a origem das Supernovas, uma teoria consistente ainda não está estabelecida.

Acredita-se que as Supernovas de Tipo II estejam relacionadas à morte súbita e violenta das estrelas massivas ($M > 10M_{\odot}^{(*)}$) nos instantes finais de sua evolução. Por outro lado, sabe-se também que o processo de explosão de uma Supernova começa com o colapso gravitacional das regiões centrais da estrela (caroço). Porém, uma questão central ainda não foi resolvida pela Astrofísica Nuclear: como a implosão do caroço, cuja escala de tempo é da ordem de milissegundos, pode conduzir à explosão da estrela, isto é, ser invertida numa formidável expansão explosiva e ejetar suas camadas externas ?

Essencialmente, estrelas suficientemente massivas, após passarem por uma longa sequência de reações termonucleares, desenvolvem um caroço constituído basicamente por elementos do grupo do Fe, que possui energia de ligação por nucleon máxima. Uma vez alcançado esse estágio, cessam as reações termonucleares.

Com massa levemente superior ao limite de Chandrasekhar^(**), o caroço contrai quase hidrostáticamente até que atinja valores de temperatura e densidade central da ordem de $6 \times 10^9 \text{K}$ e $3 \text{ a } 6 \times 10^9 \text{ gcm}^{-3}$, respectivamente. Tal configuração

(*) $1M_{\odot} = 1$ massa solar ($\approx 1.98 \times 10^{33} \text{g}$).

(**) Ver Capítulo I, Seção 1.4.

é chamada de Pré-Supernova. Nestas condições, o índice adiabático efetivo no caroço assume um valor crítico ($\approx 4/3$), tornando instável todo o sistema.

A combinação de processos endotérmicos tais como captura eletrônica e fotodesintegração de núcleos, levam o caroço a entrar em colapso. Nos instantes finais do colapso, a matéria estelar, fortemente degenerada e rica em nêutrons, atinge altas densidades, maiores que a densidade da matéria nuclear, justificando, desse modo, a possível formação de Estrelas de Nêutron. Neste sentido, a explosão de uma Supernova pode ser entendida como um processo de separação da pré-Supernova numa envoltória - que expande explosivamente -, e um caroço denso remanescente - uma estrela de nêutron.

Não obstante o avanço das investigações teóricas, existem ainda muitas controvérsias quanto ao mecanismo básico responsável pela explosão de Supernova. Em parte, isto se deve à grande complexidade dos cálculos hidrodinâmicos que incluem, em geral, formação e propagação de onda de choque, processos de neutronização, transporte de neutrinos, opacidade a neutrinos, queimas termonucleares explosivas, equação de estado da matéria nuclear, etc; processos que, de resto, são ainda insufficientemente conhecidos.

De modo geral a maioria dos modelos existentes são de fato fortemente dependentes desses aspectos, não conseguindo, contudo, explicar qual é o mecanismo básico de explosão.

Os mecanismos de explosão propostos podem ser classificados do seguinte modo (*).

(*) O leitor encontrará no Capítulo II uma exposição mais detalhada sobre os mecanismos de explosão.

1. "Bounce" hidrodinâmico com geração de onda de choque;
2. Fusão termonuclear explosiva com propagação de onda de choque;
3. Transferência de momento e energia do caroço para a envoltória via neutrinos;
4. Efeitos magnetohidrodinâmicos associados à conservação do momento angular em modelos com rotação.

Em virtude de não depender diretamente de qualquer processo microscópico específico, o mecanismo de "bounce" hidrodinâmico é, em essência, o mais simples. Com efeito, tal mecanismo inclui basicamente as equações hidrodinâmicas (que em última análise expressam leis de conservação) e a mudança da equação de estado da matéria estelar quando transita da fase degenerada ordinária para a fase nuclear. Vale dizer, neste mecanismo é o comportamento do índice adiabático efetivo (γ) nos instantes finais do colapso que pode ocasionar, ou não, a sua inversão numa expansão explosiva.

O mecanismo de transporte de neutrino surgiu primeiramente nos trabalhos de Colgate e White⁽²⁾, de 1966, e Arnett⁽³⁾, de 1966 e 1967. Nestes trabalhos, o processo de transferência de energia do caroço neutronizado para as camadas externas via neutrinos foi descrito pelo acoplamento do transporte de neutrino às equações hidrodinâmicas. Ambos os trabalhos chegaram a resultados positivos, isto é, simularam explosão de estrelas.

Parecia, então, que o mecanismo de explosão estava estabelecido, pelo menos em seus fundamentos.

Contudo, a descoberta experimental de correntes neutras na interação fraca obrigou a uma drástica mudança no rumo das pesquisas. Mostrou-se que, face à existência de corrente neutra, os neutrinos emitidos tanto por captura eletrônica quanto criação de pares $\nu\bar{\nu}$, são confinados no caroço a partir de densidades $\geq 10^{12} \text{ gcm}^{-3}$, inibindo o mecanismo de deposição de neutrino (4,5), nas camadas externas ao caroço.

Supondo-se que os neutrinos ficam completamente confinados a partir de $\approx 10^{12} \text{ gcm}^{-3}$, torna-se possível, em primeira aproximação, descrever a dinâmica do colapso como um processo adiabático. Com efeito, em 1978, Van Riper (6) mostrou que para o colapso adiabático efeitos puramente hidrodinâmicos podem conduzir a uma explosão de Supernova. Em seu modelo a onda de choque gerada pelo "bounce" do caroço homólogo (velocidade proporcional ao raio) pode, dependendo da equação de estado, ejetar as camadas externas, mas a energia de ejeção é sensível ao valor do índice adiabático da manta no instante do choque. Segundo ele, para $\gamma_{\text{manta}} < 1.27$ não há ejeção.

Uma vantagem do tratamento de Van Riper, ao não introduzir transporte de neutrinos, está na economia de tempo no cálculo computacional.

Entretanto, em 1980 Müller et al. (7) levantaram uma dificuldade intrínseca à aproximação adiabática no período pós-bounce, empregada por Van Riper. Eles argumentaram que uma fração da energia transportada pela onda de choque é necessariamente dissipada em forma de calor devido à presença de forças viscosas, que é um processo não adiabático. Além disso, o aquecimento da matéria pode levar à dissociação de núcleos, alte -

rando a composição química. Com isso, demonstraram que o processo de colapso é qualitativamente afetado quando apenas uma fração da energia dissipada é reacoplada à dinâmica. O resultado obtido por eles está representado na Fig. 1. Nos três casos foram usados caroços de $1.4M_{\odot}$ (Fe) e assumida a simetria esférica (como em Van Riper).

A Fig. 1(a) representa o cálculo adiabático, isto é, sem dissipação, cujo resultado não difere muito do de Van Riper; em 1(b) e 1(c) 50% e 20% da energia dissipada, respectivamente, foi reacoplada à dinâmica. A redução por um fator 2 na energia reacoplada reduz consideravelmente as oscilações do caroço, diminuído em $\approx 30\%$ a quantidade de massa ejetada. Em 1(c), simplesmente não há ejeção.

Logo, segundo esses autores, se efeitos hidrodinâmicos por si só constituem, ou não, o mecanismo básico de explosão, não pode ser esclarecido através de modelos adiabáticos, pelo menos no período pós-"bounce".

Em 1981, Hillebrandt e Müller⁽⁸⁾ chegaram a um resultado mais contundente. Partindo da equação de estado derivada por El Eid e Hillebrandt⁽⁹⁾ mostraram que, independentemente de detalhes sobre a equação de estado, das hipóteses sobre a emissão de neutrinos nas regiões comprimidas pela onda de choque e das características do código hidrodinâmico, a onda de choque gerada pelo "bounce" nunca é suficientemente forte para ejetar matéria, seja o processo adiabático ou não adiabático. Porém, seus resultados foram obtidos para o modelo de Gigante de $15M_{\odot}$ desenvolvido por Weaver et al.⁽¹⁰⁾, com caroço de $1.6M_{\odot}$.

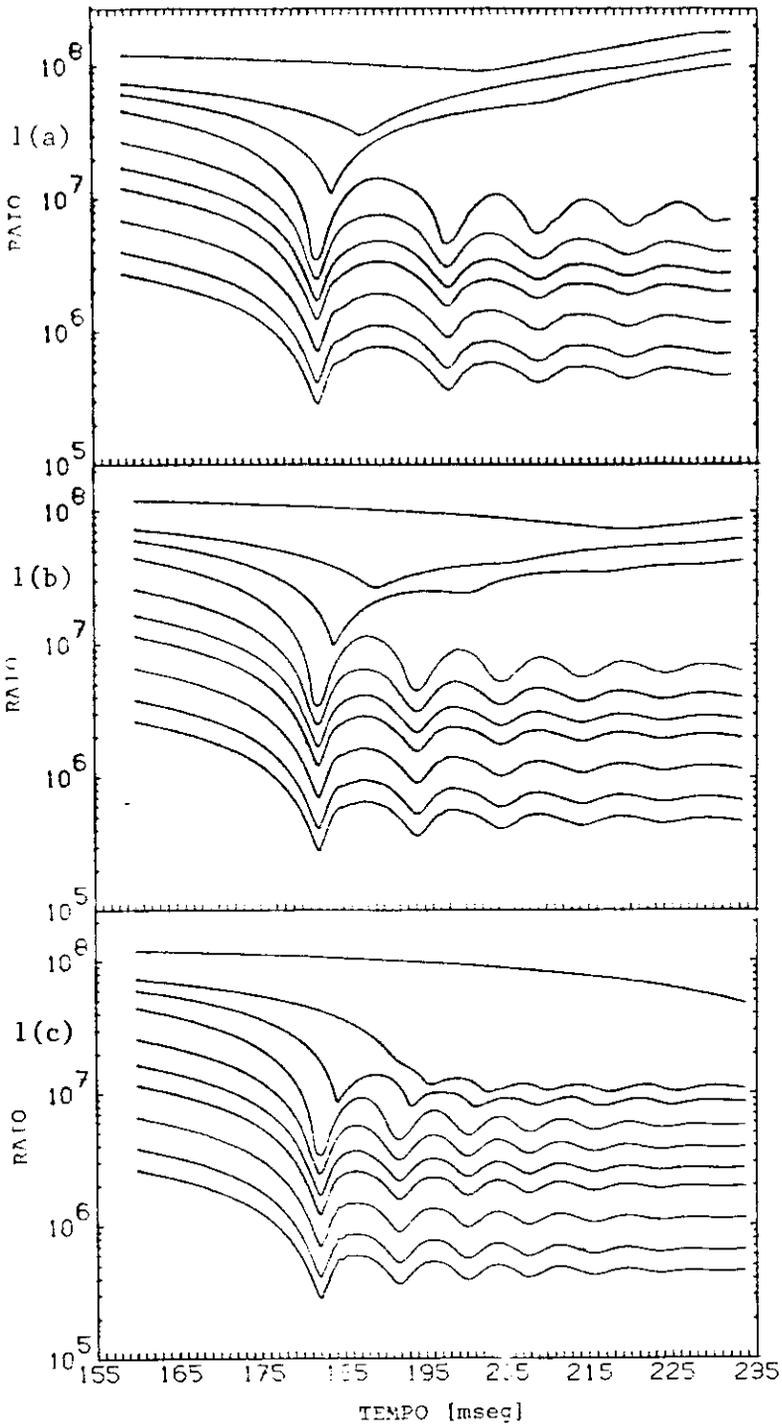


FIGURA 1 - Representação esquemática dos cálculos de Müller et al. para o colapso gravitacional de um caroço de $1.4M_{\odot}$. Os raios estão em unidades de cm e o tempo em ms. l(a) o processo é adiabático e mostra eficiente ejeção de matéria; l(b) 50% da energia da onda de choque é dissipada, afetando sensivelmente a ejeção de matéria; l(c) 80% de dissipação. Não há ejeção de matéria.

Ultimamente, as investigações têm sido dirigidas basicamente para os processos capazes de revitalizar a onda de choque como, por exemplo, deposição de neutrinos na envoltória emitidos nas regiões comprimidas pela onda de choque, efeitos de corrente de convecção, etc. (11,12).

Entretanto, excepcionalmente, Cooperstein et al. (13), em 1984 e Baron et al. (14), em 1985, lograram simular um evento de explosão com os modelos de Pré-Supernova de 12 e 15 M_{\odot} , derivados por Woosly e Weaver (15), em 1984. Para tanto eles introduziram uma equação de estado "mole" para a matéria nuclear no regime de densidades supranucleares, além de incluírem efeitos relativísticos. Estes resultados são questionados (16-18), pois as experiências em colisões de íons pesados relativísticos parecem evidenciar que a equação de estado da matéria nuclear densa, com γ estimado entre 2 e 3 e incompressibilidade $K = 210 \pm 30$ MeV é efetivamente mais "dura" do que a usada pelos autores.

Em suma, o mecanismo de explosão de Supernovas Tipo II é um problema em aberto e cuja palavra final ainda não foi dada.

Naturalmente, os modelos formulados até agora estão em desacordo com os dados observacionais, se considerarmos a frequência de explosão de Supernovas. É possível que a explosão de Supernovas tenha origem mais na natureza genérica da estrutura da progenitora e nas propriedades globais da matéria estelar, que nos processos microscópicos ou detalhes dessa estrutura.

Usualmente, as equações hidrodinâmicas empregadas pa

ra descrever a evolução dinâmica de Supernovas são resolvidas pela transformação das correspondentes equações diferenciais parciais em equações de diferenças finitas ^(2,19), procedimento que requer o tratamento de inúmeras variáveis além de constituir-se num procedimento puramente matemático.

Neste trabalho nos propomos a estudar a natureza da explosão de Supernovas como decorrente de propriedades globais da evolução dinâmica do colapso gravitacional. Assim, não nos deteremos na descrição das propriedades locais considerando que a explosão é causada essencialmente por processos que ocorrem na inversão do colapso da região central da estrela e que durante esses processos o sistema desdobra-se em uma estrela de nêutron remanescente e uma camada intermediária capaz de transferir energia suficiente para a ejeção do restante da estrutura.

Para tanto, apresentamos aqui uma descrição lagrangeana do mecanismo de "bounce", discutindo a influência da distribuição da massa do caroço entre a parte central e sua envoltória sobre a transferência de energia durante a inversão do colapso. Por outro lado, uma descrição lagrangeana permitindo um rigoroso controle da conservação da energia permite, também, acompanhar passo a passo a evolução do conteúdo cinético, gravitacional e da energia interna do sistema.

O caroço da configuração de Pré-Supernova é dividido em duas camadas homogêneas, em interação ^(*). Cada camada é caracterizada por alguns parâmetros, como massa, densidade mé-

(*) No Apêndice A apresenta-se a generalização deste procedimento para um número arbitrário de camadas.

dia, pressão interna e densidade de energia. Assumindo simetria esférica, as coordenadas radiais limitadoras de cada camada são as nossas coordenadas lagrangeanas usadas. O campo de velocidade radial dentro de cada camada é extraído da equação de continuidade, com o qual calcula-se a energia cinética efetiva da camada. A lagrangeana do sistema é então construída, incluindo os termos de energia cinética, auto-energia gravitacional, energia de interação gravitacional entre as duas camadas e energia interna. Com a lagrangeana, deduzimos as equações de movimento, que são resolvidas numericamente.

Usamos uma versão simples para a equação de estado da matéria estelar, considerada fria (temperatura igual a zero) e degenerada; o índice adiabático é uma função suave da densidade que interpola o índice adiabático de um gás de elétrons relativístico degenerado (4/3) com o índice adiabático de um gás de nêutron não relativístico degenerado (5/3). O problema dos neutrinos é ignorado.

Em nossos cálculos conseguimos reproduzir bem o mecanismo de "bounce" e, nos muitos eventos analisados, a energia transferida durante o choque de reflexão entre as duas camadas variou entre 1 e mais de 4 foe (*). O método foi aplicado para caroços de Fe de diferentes massas.

Finalizando, a estrutura deste trabalho é a seguinte.

No Capítulo I, expomos brevemente os processos de nucleosíntese característicos de cada etapa da evolução este -

(*) 1 foe $\equiv 10^{51}$ erg (ten to fifty one ergs). Esta é a unidade natural de energia em física de Supernova.

lar e o significado do limite de Chandrasekhar para a Astrofísica Nuclear. Discute-se também porque o colapso gravitacional é tido como o ponto final da evolução de estrelas massivas. No Capítulo II, apresenta-se resumidamente a teoria do gás de Fermi e a equação de estado da matéria estelar. Os mecanismos de implosão (ou colapso) e os mecanismos de explosão são tratados no Capítulo III, com ênfase no mecanismo de "bounce". No Capítulo IV, apresenta-se o modelo e a equação de estado usado por nós. A análise dos resultados e as conclusões estão no Capítulo V. Encerrando o trabalho, os Apêndices A e B contêm, respectivamente, a generalização do formalismo para um número qualquer de camadas e o critério de degenerescência para o gás de Fermi.

CAPÍTULO I

EVOLUÇÃO ESTELAR

Neste capítulo, alguns aspectos da teoria de evolução estelar são apresentados com o objetivo central de situar o colapso gravitacional de estrelas massivas como o processo inicial na explosão de uma supernova. Para tanto, discutimos resumidamente os processos de nucleossíntese envolvidos nos vários estágios da evolução estelar.

1.1 - DIAGRAMA HR

A luminosidade e a temperatura superficial de estrelas são duas quantidades que derivam diretamente das técnicas observacionais e, uma vez que as estrelas evoluem no tempo, conseqüentemente variam também essas quantidades.

Hertzsprung, em 1911 e Russell, em 1913, deduziram a existência de uma correlação entre o índice de cor da estrela, associado à temperatura superficial, e sua magnitude absoluta, que é associada à luminosidade, e tiveram a idéia de plotar essas grandezas num gráfico conhecido como Diagrama de Hertzsprung-Russell.

Em uma das versões do diagrama HR (ver Fig. 1.1) cada estrela de um aglomerado é representada por um ponto em termos de sua luminosidade (eixo das ordenadas) e temperatura su-

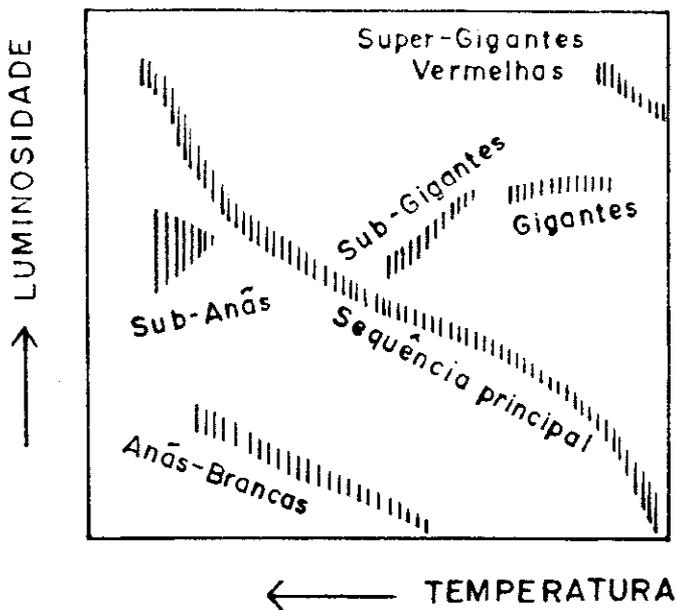


FIGURA 1.1 - Representação esquemática do diagrama de Hertzsprung-Russell. As grandezas crescem com o sentido das setas.

perficial (eixo das abscissas), permitindo, assim, classificá-la conforme o estágio de evo-

lução em que se encontra. Como mostra o gráfico, a maioria das estrelas situa-se ao longo da diagonal: essa região é denominada Sequência Principal - aí localiza-se, por exemplo, o nosso Sol. No alto e à direita, está a região ocupada pelas Gigantes Vermelhas, estrelas luminosas, relativamente frias ($T_{sup} \approx 10^3 K$), e de grandes dimensões (raio $\approx 10^{12} cm$). Mais acima estão as Super-Gigantes, que diferem das Gigantes por serem muito massivas e mais luminosas. Por último, em baixo e à esquerda, as Anãs-Branças, pouco luminosas, quentes ($T_{sup} \approx 10^4 K$) e muito compactas (raio $\approx 10^9 Km$).

Cabe agora a questão: por que a existência de três regiões (Sequência Principal, Gigantes Vermelhas e Anãs-Branças) tão bem definidas no diagrama HR? Uma resposta qualitativa pode ser dada. De fato, a probabilidade de ocorrência de um ponto no diagrama é maior nessas regiões que nas de transição, levando a concluir que as estrelas permanecem na Sequência Principal a maior parte de sua vida; a seguir penetram rapidamente na região das Gigantes Vermelhas passando depois à Anã-Branca. A As-

trofísica Nuclear Teórica estabelece justamente esses três estágios como os fundamentais na vida de uma estrela.

A Astrofísica⁽²⁰⁾ busca descrever, com base nos dados observacionais fornecidos pela Astronomia e nos resultados obtidos da Física Nuclear, os processos físicos subjacentes às trajetórias traçadas pelas estrelas no diagrama HR, que determinam seus estágios de evolução, tais como os mecanismos responsáveis pela produção de energia no interior estelar.

É justamente no interior estelar que reúnem-se condições de temperatura e densidade capazes de desencadear reações termonucleares, reações estas que se iniciam com a "queima" do hidrogênio e que, em certos casos, podem prosseguir até que todo o combustível nuclear disponível seja exaurido⁽²¹⁾. Como veremos, é a fusão de diferentes elementos químicos que explica a existência de diferentes etapas na evolução de uma estrela. Tais reações termonucleares serão apresentadas nas próximas seções deste capítulo.

1.2 - PRÉ-SEQUÊNCIA PRINCIPAL

Admite-se que o nascimento de uma estrela tenha origem na quebra de homogeneidade na distribuição de matéria de um gás interestelar, levando à formação de uma proto-estrela. Na composição química da proto-estrela predomina o hidrogênio, embora compareçam nuclídeos mais pesados, como o hélio, carbono, nitrogênio, oxigênio, etc.

Inicialmente a proto-estrela apresenta temperatura, densidade e raio estimados em $\approx 10\text{K}$, $\approx 1 \text{ partícula/cm}^3$ e ≈ 100

anos-luz ($\approx 10^{20}$ cm), respectivamente.

Em virtude da auto-gravitação, o sistema como um todo vai condensando lentamente. Com a contração, a temperatura aumenta até que a matéria se ioniza completamente. Como a energia de ionização atômica é da ordem de algumas dezenas de elétron-volts, a temperatura de ionização é $\approx 10^6$ K. Para o Sol, por exemplo, estima-se que $T \approx 1.5 \times 10^6$ K.

Ao longo dessa fase, chamada de Pré-Sequência Principal, a única fonte de energia da estrela é a gravitação. Assumindo que o processo de contração é aproximadamente adiabático, pelo menos metade da energia gravitacional empregada na contração, de acordo com o teorema do virial, é convertida em energia térmica e o restante consumido em forma de radiação. Por outro lado, a energia gravitacional é utilizada também para manter as correntes de convecção dentro da massa gasosa mas, à medida que a densidade aumenta, esses movimentos vão se restringindo às camadas mais externas, e um núcleo, então, é formado.

Esse processo continua até se estabelecerem condições termodinâmicas que permitam o início das reações termonucleares. Então, a estrela cessa a contração e se estabiliza. De fato, ao longo de toda a evolução, a estrela passará por vários períodos de contração, usufruindo, assim, das reservas de energia gravitacional.

Podemos agora considerar o seguinte: a escala de tempo hidrodinâmico (t_H) é $\approx (R/g)^{1/2}$; a escala de tempo térmico (t_T) é $\approx \epsilon_T/L$ e a escala de tempo nuclear (t_N) é $\approx M/L$ (R é o raio da estrela, M a massa, L a luminosidade, ϵ_T a energia térmica por partícula ($\approx 3kT$) e $g = GM/R^2$, com G a constante

gravitacional). Verifica-se que $t_H \ll t_T < t_N$. Para uma estrela de $1M_\odot$, por exemplo, tem-se

$$t_H \approx 10^9 \text{ seg.}$$

$$t_T \approx 10^{14} \text{ seg.}$$

$$t_N \approx 10^{17} \text{ seg.}$$

Podemos concluir, portanto, que o processo de evolução estelar se realiza, aproximadamente, segundo uma sucessão de estados de equilíbrio hidrostático (evolução quase-estática).

Se a estrela é um objeto gravitacionalmente ligado e em equilíbrio, então sua energia total deve ser mínima. Portanto, a primeira variação da energia total H deve satisfazer à seguinte identidade

$$\delta H = 0 \quad . \quad (1.2.1)$$

A energia total H é dada pela soma da energia gravitacional (E_G) e a energia térmica (E_T), de modo que

$$H = - \int_0^M \frac{Gm(r) dm(r)}{r^2} + \int_0^M \epsilon_T(r) dm(r) \quad (1.2.2)$$

onde ϵ_T é a densidade de energia térmica. Substituindo (1.2.2) em (1.2.1), pode-se mostrar que

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G\rho(r) dm(r)}{r^2} \quad (1.2.3)$$

na qual P e ρ são a pressão e a densidade no ponto r , respectivamente. Assim, segundo a equação anterior, em todos os pon -

tos no interior da estrela a força gravitacional é contrabalançada pelo gradiente de pressão na direção radial.

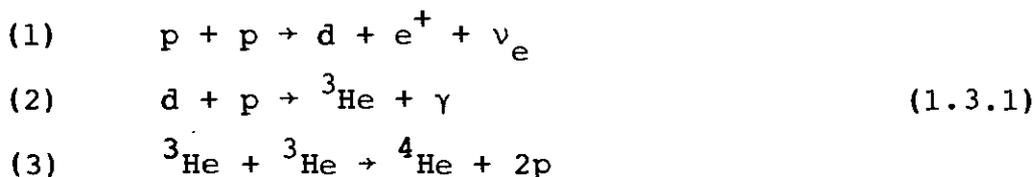
A estrela permanece na Pré-Sequência Principal por um período relativamente curto comparado com as etapas subsequentes ($\approx 10^7$ anos para estrelas de $1M_{\odot}$), após o qual ingressa na região de Sequência Principal do diagrama HR. Com densidade média $\approx 1 \text{ gcm}^{-3}$ e temperatura central $\approx 10^6 \text{ K}$, começam as reações termonucleares que, numa primeira etapa, irão transformar o hidrogênio em hélio.

1.3 - SEQUÊNCIA PRINCIPAL

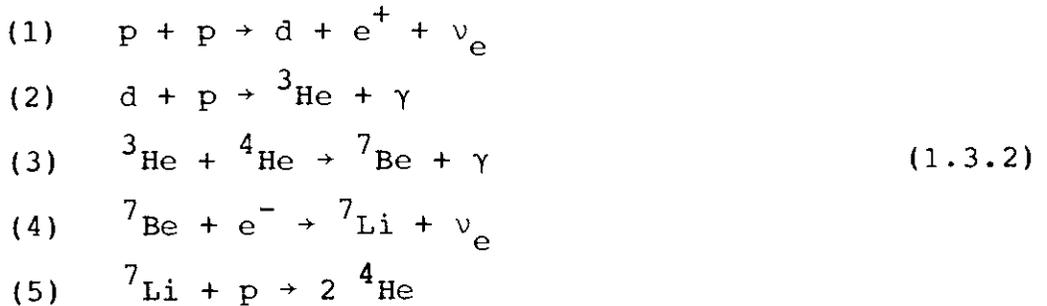
Quando entra na Sequência Principal, a estrutura da estrela é basicamente a seguinte: um núcleo extremamente quente, uma extensa camada difusa e uma atmosfera fria e rarefeita. A baixíssima condutividade térmica da camada intermediária acarreta o confinamento do plasma no núcleo estelar, sítio no qual se processarão o conjunto de reações nucleares que constituirão, agora, a principal fonte de energia da estrela.

1.3.1 - Cadeias pp

A fusão do hidrogênio ocorre através das Cadeias pp ou ciclo do hidrogênio, como também são chamadas. A primeira delas, a Cadeia ppI, é a seguinte:



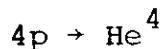
A medida que o meio vai ficando rico em hélio, e a temperatura aumentando, outra cadeia - a ppII - passa a predominar:



A terceira cadeia, a ppIII, pode ser favorecida dependendo da seção de choque do ${}^7\text{Be}$, que pode capturar tanto elétron quanto próton, e da densidade. Ela inclui as reações (1), (2) e (3) da ppII mais



O resultado final dessas reações é sempre

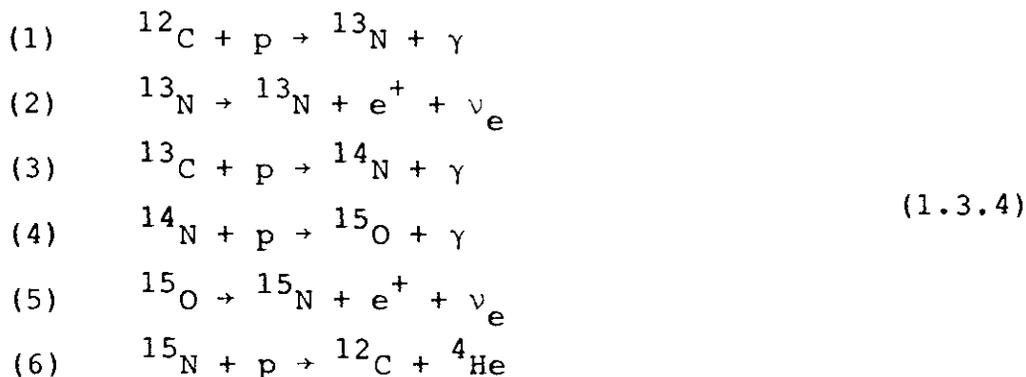


que libera ≈ 26.7 MeV de energia.

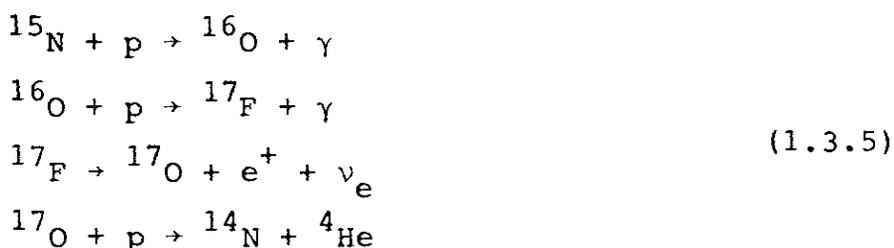
1.3.2 - Ciclo CNO

Existe uma outra cadeia eficaz para a queima do hidrogênio e que emprega elementos mais pesados: é o ciclo CNO ou ciclo do carbono, proposto independentemente por von Weizsäcker⁽²²⁾, em 1938, e H. Bethe⁽²³⁾, em 1939. Essa cadeia encerra

as seguintes reações:



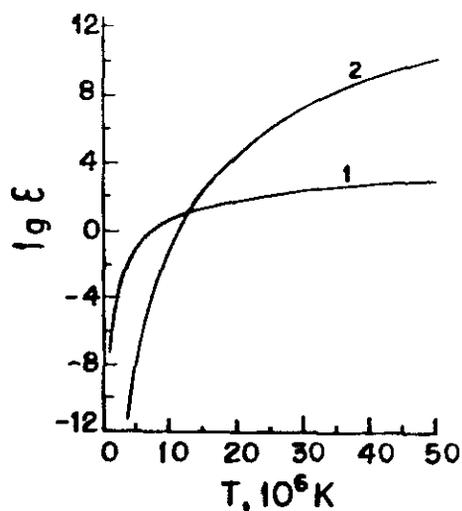
Como o carbono é recuperado ao final do ciclo, ele desempenha o mero papel de catalizador. Com probabilidade muito pequena, o ciclo ainda pode prosseguir com as reações



aumentando a abundância do nitrogênio. O ciclo CNO libera aproximadamente 26.8 MeV de energia.

A temperatura e a abundância relativa dos elementos no interior estelar determinarão qual processo será dominante, se as Cadeias pp ou o Ciclo CNO (ver Fig. 1.2).

FIGURA 1.2 - Dependência da taxa de produção de energia ϵ (erg/g.s) com a temperatura para o Sol, devido às cadeias pp's (curva 1) e ao ciclo CNO (curva 2).



O tempo gasto na Sequência Principal pode ser estimado ⁽⁵⁾ como:

$$t_{sp} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{L_{\odot}}{L}\right) \times 10^{10} \text{ anos} .$$

Para o Sol, $t_{sp} \approx 10^{10}$ anos. Esta é a fase mais duradoura na vida de uma estrela.

Consumido todo o hidrogênio das regiões centrais, o sistema atinge uma estrutura não homogênea: um núcleo composto basicamente de hélio e uma envoltória rica em hidrogênio. Não havendo condições termodinâmicas que favoreçam a fusão do hélio, as reações nucleares passam a ocorrer nas camadas externas. Com isso a estrela se expande, movendo-se para a região das Gigantes Vermelhas no diagrama HR.

1.4 - LIMITE DE CHANDRASECKHAR

A massa é o parâmetro determinante para se estabelecer a sequência evolutiva de uma estrela e o ponto final de sua evolução.

À cada etapa de queima nuclear corresponde um limiar inferior de massa para que seja alcançada a temperatura de ignição do combustível nuclear. Assim, por exemplo, as massas mínimas requeridas para a queima do hidrogênio, hélio, carbono e neônio são ⁽²⁵⁾, respectivamente, 0.08, 0.25, 1.06 e $1.37M_{\odot}$.

Estrelas massivas queimam seu combustível nuclear disponível mais rapidamente que estrelas pouco massivas e, por isso, gastam na Sequência Principal um tempo relativamente menor;

são as chamadas estrelas da População I (estrelas jovens). Por outro lado, a evolução das estrelas pouco massivas é mais lenta, isto é, são mais velhas, sendo por isso classificadas como estrelas da População II (consulte a Tabela I.1). Como o tempo de queima do combustível nuclear é $\approx M/L$, onde M é a massa da estrela e L sua luminosidade, verifica-se que as estrelas de População II exibem luminosidade relativa muito menor que as de População I.

TABELA I.1 - Temperatura central (KeV), densidade central (g.cm^{-3}) e escala de tempo (anos) durante várias fases evolutivas para duas estrelas de $25 M_{\odot}$ e $1M_{\odot}$. Adaptado da ref. (13).

Fase	$T_c(25)$	$T_c(1)$	$\rho_c(25)$	$\rho_c(1)$	Tempo(25)	Tempo(1)
Queima do H	5	2.5	5	100	2×10^6	10^{10}
Queima do He	20	10	700	4×10^4	5×10^5	10^8
Queima do C	80		2×10^5		60	
Queima do Ne	150		4×10^6		1	
Queima do O	200		10^7		0.5	
Queima do Si	350		3×10^7		0.01	
Colapso	600		3×10^9		10^{-6}	

Esse fato revela um aspecto fundamental sobre a natureza estelar. As estrelas da População II atingem a degenerescência mais rapidamente do que as estrelas da População I. Com efeito, para estrelas massivas ($\geq 15M_{\odot}$) pode-se desprezar essa degenerescência durante sua vida ativa, ao passo que em estrelas pouco massivas ($\leq 0,5M_{\odot}$) ela é apreciável já no início da fase de sequência principal. Em outras palavras, estrelas de pequeno porte atingem densidades centrais elevadas mais rapida-

mente que as estrelas massivas, e é por isso que tendem, já nos estágios iniciais de sua evolução, a desenvolver um caroço degenerado.

Consideremos uma estrela composta de matéria fria ($T = 0$). A altas densidades ($\geq 10^3 \text{ gcm}^{-3}$), os elétrons do plasma podem ser tratados com um gás de Fermi. Neste caso, a pressão exercida pelo gás de elétrons é dada por^(*)

$$P = 10^7 (Y_e \rho)^{5/9} \text{ erg.cm}^{-3} \text{ (não relativístico)} \quad (1.4.1)$$

$$P = 1.2 \times 10^9 (Y_e \rho)^{4/9} \text{ erg.cm}^{-3} \text{ (relativístico)} \quad , \quad (1.4.2)$$

onde Y_e é o número de elétrons por nucleon.

A pressão exercida pelas forças gravitacionais é $\approx M^{2/3} \rho^{4/3}$. Portanto, enquanto o gás estiver no domínio não relativístico a pressão térmica será suficiente para contrabalançar a pressão gravitacional, propiciando uma configuração estável, qualquer que seja a massa da estrela.

Entretanto, no caso relativístico existe um limite superior de massa a partir do qual a pressão do gás de elétron não mais equilibra as forças gravitacionais. Este limite foi estabelecido por Chandrasekhar⁽²⁶⁾, e é dado por

$$M_{\text{ch}} = 5.75 Y_e^2 M_{\odot} \quad , \quad (1.4.3)$$

conhecido como limite de Chandrasekhar.

Para matéria composta de núcleos relativamente leves,

^(*) No Capítulo II trata-se mais detalhadamente da teoria do gás de Fermi.

para os quais $N \approx Z$ ($Y_e \approx 0.5$), temos

$$M_{ch} \approx 1.44M_{\odot} .$$

Acredita-se que as Anãs-Branças mantenham-se em equilíbrio gravitacional graças à pressão exercida pela matéria degenerada que supõe-se existir em seu interior.

1.5 - ANÃ-BRANCA

Terminado o longo período de Sequência Principal, a evolução ulterior da estrela vai depender criticamente de sua massa.

Se a massa for menor que M_{ch} , é a degenerescência dos elétrons e o esfriamento da matéria estelar que desempenharão o papel mais relevante.

Consumido o hidrogênio do caroço, a estrela contrai (um mini-colapso gravitacional) até que seja contida pela pressão do gás de elétron e se estabilize novamente. Com temperatura superficial típica $\approx 10^4 K$, densidade central $\approx 10^6 \text{gcm}^{-3}$ e raio $\approx 10^9 \text{Km}$ e não havendo condições que favoreçam a queima termonuclear do hélio — agora abundante no caroço —, resta à estrela o seu contínuo esfriamento. A partir daí, a luminosidade terá origem na energia térmica dos núcleos ainda não degenerados.

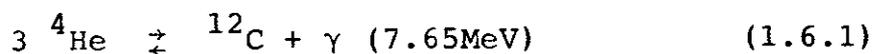
Este estágio na vida da estrela — o derradeiro para estrelas desse porte — é chamado de Anã-Branca. Na verdade, trata-se de uma morte não catastrófica por um processo efetivamente lento. A composição química e a temperatura central dita-

rão o tempo gasto para o esfriamento da estrela. Para uma configuração inicial com $T = 5 \times 10^6 \text{ K}$ e $A = 20$, por exemplo, esse tempo é estimado em $\approx 10^9$ anos, ao fim do qual a estrela torna-se um corpo frio, denso e sem atividade - uma Anã-Negra.

1.6 - GIGANTE VERMELHA

Se a massa da estrela é maior que M_{ch} , a pressão do gás de elétron não pode mais suportar a pressão gravitacional e evitar a contração. Quando o caroço atinge uma temperatura $\approx 10^8 \text{ K}$ e densidade $\approx 10^6 \text{ gcm}^{-3}$ passa a ocorrer a fusão do hélio, enquanto a envoltória continuará queimando hidrogênio.

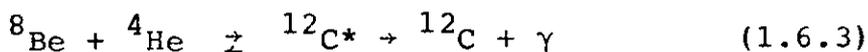
A fusão do hélio se processa através da reação $3-\alpha$, que em notação compacta escreve-se



que ocorre em dois estágios. Duas partículas combinam-se por um tempo muito curto ($\approx 10^{-6}$ seg) formando o núcleo do isótopo ^8Be , muito instável



mas que, graças às condições existentes, pode interagir novamente



Produzida uma quantidade suficiente de carbono, o hé-

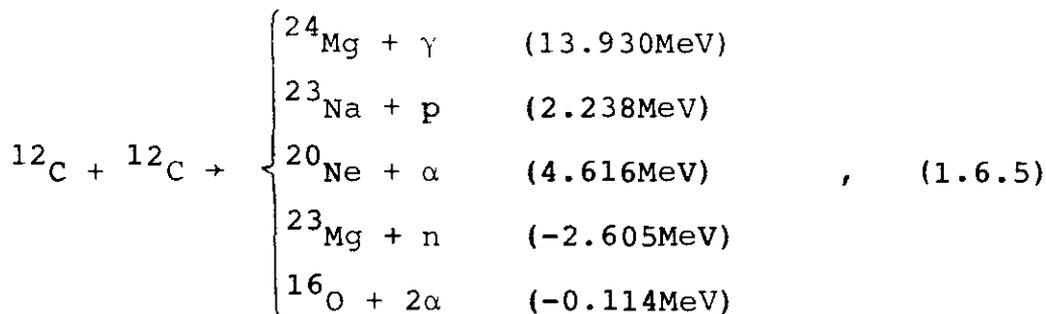
lio poderá ser consumido por outra reação, a saber:



que sintetiza o oxigênio.

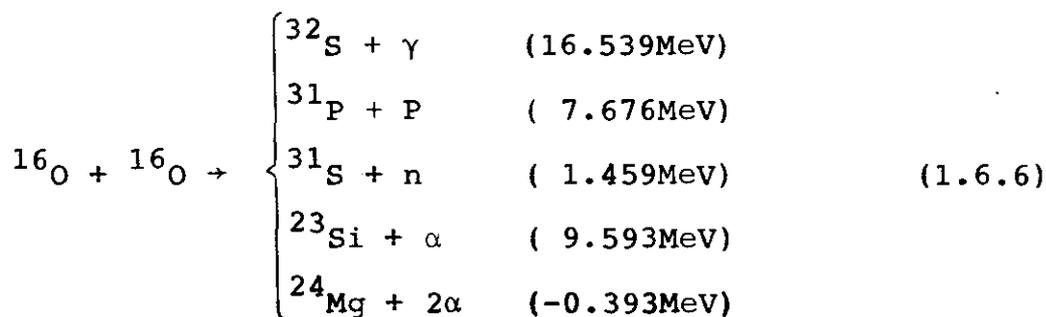
Terminada a fusão de todo o hélio do caroço (agora composto basicamente de carbono e oxigênio) este novamente se contrai. A envoltória então se expande, baixando a temperatura e fazendo cessar a queima do hidrogênio nas regiões mais externas. Esta é a fase de Gigante Vermelha.

O que ocorrerá em seguida à queima do hélio vai depender fortemente da sua massa. O próximo passo será, naturalmente, a queima de carbono e oxigênio. A fusão do carbono pode ocorrer por um dos seguintes canais:

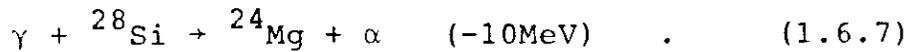


onde as reações $^{23}\text{Na} + \text{p}$ e $^{20}\text{Ne} + \alpha$ são as mais prováveis, ao passo que cada uma delas libera em média uma energia de 13MeV.

Quanto ao oxigênio, ele pode ser queimado pelos canais:



nas quais o ^{28}Si aparece como o principal núcleo sintetizado, o qual, por seu turno, sofre a seguinte reação fotonuclear



Deste modo vão se sucedendo um conjunto de reações cujo resultado final é a síntese de núcleos cada vez mais pesados, em particular reações fotonucleares rápidas a partir da queima do silício, levando os núcleos a alcançarem formas mais estáveis, localizando-se na região próxima ao ferro na tabela periódica – o grupo do ferro. É um fato bem sabido que o ^{56}Fe possui um máximo de energia de ligação por nucleon, sendo mais estável.

Por fim, a estrela possui agora uma estrutura de um caroço composto basicamente de núcleos de ^{56}Fe e uma envoltória com predominância de elementos mais leves onde, possivelmente, prossegue a fusão de hélio e hidrogênio.

Na ausência de fonte nuclear de energia, resta ao caroço contrair em busca das reservas de energia gravitacional. A contração conduz a estrutura estelar a uma configuração altamente instável, desencadeando reações ultra-rápidas. A esta configuração chama-se Pré-Supernovas: é quando o sistema está na iminência de entrar em colapso gravitacional.

Processos fortemente endotérmicos como a foto-dissociação do ferro e/ou captura eletrônica, reduzem repentinamente a pressão, acionando o colapso gravitacional (implosão). A matéria se neutroniza, ao passo que em frações de segundo as camadas centrais precipitam-se sobre si mesmas, com velocidade da

ordem da velocidade de queda livre. Nestas condições, a equação de estado varia bruscamente passando a depender, essencialmente, apenas da densidade devido à degenerescência.

Durante a implosão a temperatura e a densidade atingem valores elevadíssimos ($T \approx 10^9 \text{ K}$ e $\rho \approx 10^9 - 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$) até que reste no núcleo da estrela um caroço duro e rico em neutrons. A implosão, então, inverte-se numa expansão explosiva originando um evento de supernova.

1.7 - SUPERNOVA, ESTRELA DE NEUTRON E BURACO NEGRO

Não obstante o avanço verificado nas últimas décadas em nosso conhecimento sobre a natureza das supernovas, ainda não ficou suficientemente esclarecido para a Astrofísica Nuclear por que, após o colapso gravitacional, a pré-supernova explode tão violentamente como supernova. Que processos tão eficientes poderiam, a um só tempo, conter a implosão, causar a expansão do sistema e ejetar as camadas externas ?

Acredita-se que da explosão de uma supernova, em geral, deve resultar um caroço denso remanescente, e que, dependendo de sua massa, pode atingir uma configuração de equilíbrio, isto é, uma estrela de neutron. Desse modo, as supernovas seriam responsáveis pela formação de estrelas de neutron.

É um problema ainda em aberto estimar o limite superior para a massa de uma estrela de neutron, uma vez que conhecemos as propriedades da matéria nuclear apenas na densidade de saturação ($\rho_0 \approx 0.15 \text{ fm}^{-3}$). Para a matéria nuclear densa e quente, a equação de estado ainda é desconhecida (ver Capítulo II).

Por outro lado, no caso em que a massa do caroço remanescente seja maior que este limite superior, este, provavelmente, após a explosão, reimplode continuamente, dando origem a um Buraco Negro. Para o caso de simetria esférica, a Teoria Geral da Relatividade prevê que, para um observador remoto, situado fora do campo gravitacional da estrela, seu raio tende as sintoticamente para o valor

$$r = 2GM/c^2$$

conhecido como raio de Schwarzschild.

É possível ainda que a explosão conduza à completa destruição da estrela. Entretanto, tudo parece depender do intervalo de massa ao qual a estrela pertence e de sua composição química.

A partir de cálculos recentes⁽²⁷⁾, é possível traçar um quadro para o tipo de produto final da evolução de uma estrela em função de sua massa ao ingressar na Sequência Principal (M_{sp}):

- 1 - $M_{sp} < 0.08M_{\odot}$: incapazes de acionarem a queima do hidrogênio; estrelas desse porte devem tornar-se um objeto sem atividade e frio;
- 2 - $0.08M_{\odot} < M_{sp} < 0.45M_{\odot}$: após queimar o hidrogênio, a estrela torna-se uma Anã-Branca de hélio;
- 3 - $0.45M_{\odot} < M_{sp} < 8M_{\odot}$: a estrela desenvolve um caroço mesclado de carbono e oxigênio (massa $< 1.06M_{\odot}$), e fortemente degerado. A maioria dessas estrelas terminam como Anãs-Brancas, mas algumas delas ($6 - 8M_{\odot}$) podem explodir como Superer

novas acionando a detonação do carbono^(*);

- 4 - $8M_{\odot} < M_{sp} < 10M_{\odot}$: a queima do carbono (não degenerado) conduz a um caroço degenerado de oxigênio, neônio e magnésio. A massa desse caroço ($< 1.37M_{\odot}$) é suficiente para acionar a queima de neônio, entretanto, quando a densidade central excede um certo valor limiar, o magnésio e o neônio passam a capturar elétrons, induzindo o caroço ao colapso, durante o qual é queimado o oxigênio;
- 5 - $10M_{\odot} < M_{sp} < 13M_{\odot}$: a estrela desenvolve um caroço de oxigênio, neônio e magnésio semidegenerado, com massa entre 1.37 e $1.5M_{\odot}$, suficientemente massivo para queimar o neônio. Eventualmente, o colapso pode provocar a queima explosiva do oxigênio, ejetando as camadas mais externas;
- 6 - $M_{sp} > 13M_{\odot}$: alternam-se períodos de contração gravitacional e de reações termonucleares nas regiões centrais da estrela, onde progressivamente são consumidos o hidrogênio, hélio, carbono, neônio, oxigênio e silício, culminando na formação de um caroço de ferro.

São identificadas duas classes de Supernovas: Tipo I (SN I) e Tipo II (SN II), distinguindo-se uma da outra, fundamentalmente, pelo comportamento da luminosidade no tempo (curva de luz), pelo intervalo de massa para a progenitora e pelo mecanismo de explosão.

As SN I's levam em torno de 50 dias para atingir o máximo de luminosidade e sua principal característica reside na regularidade da curva de luz. Seu brilho é mais intenso que o das SN II's.

(*) Vide Capítulo 3, Seção 3.22.

Supõe-se que as SN I's estejam associadas a sistemas binários⁽²⁸⁾. Como resultado do fluxo de matéria oriunda da companheira, a Anã-Branca, excedendo a massa de Chandraseckhar, entra em colapso e desencadeia, por exemplo, a detonação do carbono.

A origem da SN I ainda permanece obscura, entretanto, não há registro de nenhuma estrela de neutron remanescente de uma SN I⁽²⁹⁾. Além do mais, essas Supernovas são identificadas com estrelas relativamente velhas (População II) e pouco massivas ($4M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$).

Já as SN II's apresentam curvas de luz irregulares. Acredita-se que sejam o resultado final da evolução de estrelas massivas ($8M_{\odot} < M < 100M_{\odot}$), relativamente novas (População I) as quais, após colapsarem e explodirem, deixam um caroço denso remanescente — uma Estrela de Neutron ou um Buraco Negro. Na Tabela I.2 estão listadas algumas das principais características das Supernovas.

TABELA I.2 - Características das Supernovas I e II.

Tipo de Supernova	SN I	SN II
Massa ejetada	$\approx 0.1-1M_{\odot}$	$> 5M_{\odot}$
Velocidade	$\approx 10^9$ cm/s	$\approx 5 \times 10^9$ cm/s
Energia cinética	≈ 0.5 foe	≈ 1 foe

Finalizando, Tammann⁽³⁰⁾, por exemplo, estima para nossa Galáxia a taxa de 1 evento a cada 25 anos. Há registro de apenas seis Supernovas galácticas, e destas a mais famosa

é a que resultou na Nebulosa de Caranguejo, observada pelos chineses em 1054, no centro da qual está o pulsar de Caranguejo.

CAPÍTULO II

EQUAÇÃO DE ESTADO

Neste capítulo, abordamos o importante tópico sobre a equação de estado da matéria estelar para a configuração de Pré-Supernova e o processo de colapso gravitacional. As principais características da matéria de Supernova são apresentadas, permitindo obter as relações

$$p = p(T, \rho, X_i)$$

e

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho, X_i)$$

neste contexto.

Uma configuração típica de Pré-Supernova tem seu caroço composto basicamente de núcleos de ^{56}Fe imersos num mar de elétrons que, em primeira aproximação, pode ser tratado como um gás de Fermi degenerado. Assim, iniciamos este capítulo com uma breve apresentação da teoria do gás de Fermi.

2.1 - GÁS DE FERMI

O gás de elétron é a componente dominante para a equação de estado nos instantes iniciais do colapso de uma Pré-Supernova.

Devemos ressaltar que, dadas as condições existentes



no interior estelar, este gás pode exibir efeitos de degenerescência bem como efeitos relativísticos. Por exemplo, a degenerescência pode ocorrer mesmo a temperaturas de bilhões de kelvin, contanto que a densidade seja suficientemente elevada. À medida que o gás fica degenerado, a influência da temperatura sobre a equação de estado diminui e pequenas variações na densidade são acompanhadas de mudanças na pressão bem maiores que num gás clássico.

O potencial termodinâmico do sistema é dado por

$$\Omega = -kT \ln Z \quad (2.1.1)$$

onde Z é a função partição, que no caso de férmions não-interagentes escreve-se

$$Z = \prod_{i=1}^N \{ \exp(\mu - \epsilon_i) / kT + 1 \} \quad , \quad (2.1.2)$$

onde ϵ_i é a energia cinética da partícula, μ o potencial químico e k a constante de Boltzmann. Substituindo a eq. (2.1.2) em (2.1.1), temos

$$\Omega = -kT \sum_i \ln \{ \exp(\epsilon_i - \mu) / kT + 1 \} \quad .$$

Como a energia dos elétrons está no contínuo, a soma na expressão anterior deve ser substituída por uma integral sobre todos os estados de energia. Temos então

$$\Omega = - (2I+1) V kT \int \frac{d^3 p}{h^3} \ln \left\{ 1 + e^{(\mu - \epsilon) / kT} \right\} \quad , \quad (2.1.3)$$

onde V é o volume total e I o spin.

Consideremos agora as seguintes relações:

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{V, T} \quad (2.1.4)$$

$$P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad , \quad (2.1.5)$$

que dão o número de partículas e a pressão, respectivamente. Definindo $n = N/V$ como densidade de número e usando a eq. (2.1.4), temos

$$n = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] + 1} \quad . \quad (2.1.6)$$

Analogamente, pela eq. (2.1.5), derivando (2.1.3) e a seguir integrando por partes, obtemos

$$P = \frac{g}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^3 \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \frac{dp}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] + 1} \quad . \quad (2.1.7)$$

Para determinar a expressão da densidade de energia interna, vamos partir da seguinte expressão

$$E = -PV + ST + \mu N \quad (2.1.8)$$

onde

$$S = V \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu} \quad (2.1.9)$$

e

$$N = V \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T} \quad .$$

Combinando a eq. (2.1.8) com as eqs. (2.1.9) e dividindo por V , temos

$$E = \frac{g}{2\pi^2 h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon p^2 dp}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] + 1} \quad (2.1.10)$$

Em seguida, vamos apresentar as situações em que as integrais (2.2.6), (2.2.7) e (2.2.10) podem ser reduzidas a formas mais simples.

a) - Limite Não-Relativístico^(*)

Neste caso, a relação entre o momento e a energia cinética do elétron é dada por

$$p = (2m\epsilon)^{1/2} \quad (2.1.11)$$

Introduzindo-se as variáveis ξ e η , definidas como

$$\xi = \mu/kT$$

e

$$\eta = \epsilon/kT,$$

é imediato verificar que as eqs. (2.1.6), (2.1.10) e (2.1.7) tornam-se

$$n = \frac{g(2mkT)^{3/2}}{4\pi^2 h^3} F_{1/2}(\xi) \quad (2.1.12)$$

$$E = \frac{g(2mkT)^{3/2}}{4\pi^2 h^3} kT F_{3/2}(\xi) \quad (2.1.13)$$

$$p = \frac{g(2mkT)^{3/2}}{6\pi^2 h^3} kT F_{3/2}(\xi) = (2/3)E \quad (2.1.14)$$

onde

^(*)No Apêndice B tratamos dos critérios de degenerescência e relatividade utilizados nesta seção.

$$F_{\alpha}(\xi) \equiv \int_0^{\infty} \frac{\eta^{\alpha}}{1 + e^{\eta - \xi}} d\eta \quad (2.1.15)$$

são as integrais de Fermi, de ordem α .

b) - Limite Extremamente Relativístico

Neste caso, vale a relação

$$\epsilon \approx pc \quad (2.1.16)$$

de modo que

$$n = \frac{g}{2\pi^2 k^3} (kT/c)^3 F_2(\xi) \quad (2.1.17)$$

$$E = \frac{g}{2\pi^2 k^3} (kT/c)^3 kT F_3(\xi) \quad (2.1.18)$$

$$P = \frac{g}{6\pi^2 k^3} (kT/c)^3 kT F_3(\xi) = (1/3)E \quad (2.1.19)$$

c) - Limite Não-Degenerado

Este domínio corresponde à aproximação de gás ideal clássico, onde os elétrons obedecem simplesmente à estatística de Maxwell-Boltzmann. As expressões para n , E e P são

$$n = \frac{g}{2\pi^2 k^3} \int_0^{\infty} p^2 \exp[-(\epsilon - \mu)/kT] dp \quad (2.1.20)$$

$$E = \frac{g}{2\pi^2 k^3} \int_0^{\infty} \epsilon p^2 \exp[-(\epsilon - \mu)/kT] dp \quad (2.1.21)$$

$$P = \frac{g}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^3 \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \exp[-(\epsilon - \mu)/kT] dp \quad . \quad (2.1.22)$$

A última expressão pode ser reescrita como

$$P = \frac{gkT}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 \exp[-(\epsilon - \mu)/kT] dp \quad ,$$

ou

$$PV = NkT \quad . \quad (2.1.23)$$

Por outro lado, após integrar-se a eq. (2.1.21), a densidade do número fica dada por

$$n = \frac{g}{8(\pi\hbar)^3} (2m\pi kT)^{3/2} e^{\mu/kT} \quad , \quad (2.1.24)$$

para o caso não-relativístico, e

$$n = (g/\pi^2) \left[\frac{kT}{\hbar c} \right]^3 e^{\mu/kT} \quad , \quad (2.1.25)$$

se relativístico. Do mesmo modo, de (2.1.21), obtemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{3g}{16(\pi\hbar)^3} (2m\pi kT)^{3/2} kT e^{\mu/kT} = \\ &= \frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} P \quad (\text{não-relativístico}) \quad , \quad (2.1.26) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E &= \frac{3g}{\pi^2} \left[\frac{kT}{\hbar c} \right]^3 kT e^{\mu/kT} = \\ &= 3nkT = 3P \quad (\text{relativístico}) \quad . \quad (2.1.27) \end{aligned}$$

d) - Limite de Degenerescência Completa

No limite $T \rightarrow 0$, a distribuição de Fermi reduz-se à seguinte função

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \epsilon < \epsilon_F \\ 0, & \epsilon \geq \epsilon_F \end{cases} .$$

Agora, definindo $x = p_F/mc$, vem (31)

$$n = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{1}{3\pi^2} (mc/\hbar)^3 x^3 = 5.865 \times 10^{20} x^3 \quad (2.1.28)$$

$$E = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp = \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} g(x) = 6.0026 \times 10^{22} g(x) \quad (2.1.29)$$

$$P = \frac{g}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 \frac{d\epsilon}{dp} = \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} f(x) = 6.0026 \times 10^{22} f(x) \quad (2.1.30)$$

onde

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(1+x^2)^{1/2} + 3\text{senh}^{-1}x \quad (2.1.31)$$

$$g(x) = 8x^3 \left[(1+x^2)^{1/2} - 1 \right] - f(x) \quad (2.1.32)$$

que possuem as seguintes expressões assintóticas:

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{8}{5} x^5 - \frac{4}{7} x^7 + \dots & , \quad x \rightarrow 0 \quad (2.1.33) \\ 2x^4 - 3x^2 + \dots & , \quad x \rightarrow \infty \quad (2.1.34) \end{cases}$$

$$g(x) \rightarrow \begin{cases} (12/5)x^5 - \frac{3}{7}x^7 + \dots & , \quad x \rightarrow 0 & (2.1.35) \\ 6x^4 - 8x^3 + \dots & , \quad x \rightarrow \infty & (2.1.36) \end{cases}$$

Com as expressões anteriores, recuperam-se as relações

$$P = (1/3)E \quad (\text{relativístico}) \quad (2.1.37)$$

$$P = (2/3)E \quad (\text{não-relativístico}) \quad . \quad (2.1.38)$$

Na região semi-degenerada não é possível levar a efeito simplificações maiores nas expressões que dão a pressão e densidade de energia na forma integral e, evidentemente, a equação de estado torna-se mais complexa. Afortunadamente, o comportamento do gás durante o colapso pode ser tratado dentro da aproximação de completa degenerescência.

A Figura 2.1 ilustra as diferentes regiões no plano $T \times \rho$ onde os limites de degenerescência e relatividade podem ser usados, conforme discutiu-se nesta seção.

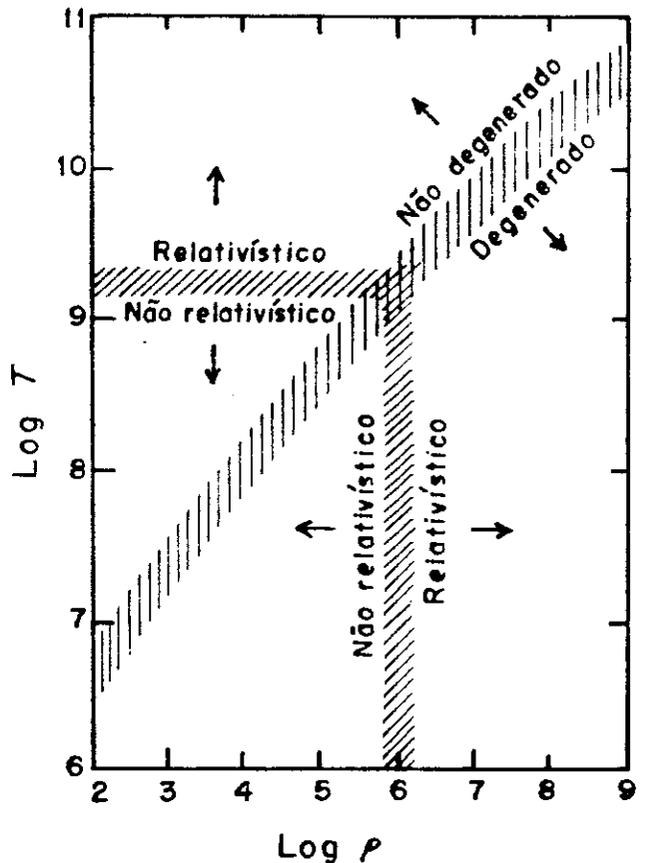


FIGURA 2.1 - Plano $T \times \rho$ em escala logarítmica para o gás de Fermi.

2.2 - PROPRIEDADES DA MATÉRIA ESTELAR

Nos processos de Supernova, a matéria estelar passa por diferentes fases ou regimes, a saber: subnuclear sem nêutrons livres, subnuclear com nêutrons livres, nuclear e supra-nuclear ou hadrônica.

2.2.1 - Regime Subnuclear sem Nêutrons Livres

No regime de baixas densidades a matéria compõe-se essencialmente de núcleos imersos num mar de elétrons, e a interdistância média entre os núcleos,

$$r = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} R_0 \quad , \quad (2.2.1)$$

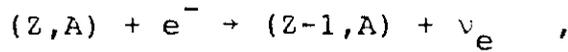
é bem maior que o raio nuclear, R_0 . Para $\rho = 10^7 \text{ g.cm}^{-3}$ temos, por exemplo, $r \approx 300R_0$. Portanto, a interação dominante é a eletromagnética.

O regime subnuclear sem nêutrons livres cobre justamente a faixa que vai de 500 g.cm^{-3} (onde o gás de elétron é a componente determinante da pressão e densidade de energia) até a densidade limiar para evaporação de nêutrons ($\rho \approx 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$).

Neste regime, o gás de elétron pode ser tratado, em primeira aproximação, como um gás de Fermi degenerado.

2.2.2 - Regime Subnuclear com Nêutrons Livres

Quando nêutrons começam a ser liberados por núcleos ricos em nêutrons resultante tanto da captura eletrônica



quanto por reações de foto-emissão de nêutrons, a matéria estelar entra no regime subnuclear com nêutrons livres (ρ compreendido entre $\approx 10^{11} \text{ gcm}^{-3}$ e $\approx 5 \times 10^{13} \text{ g.cm}^{-3}$).

Ao longo desta fase a matéria se apresenta, inicialmente, com núcleos ricos em nêutrons imersos numa mistura de gás de elétron e gás de nêutron. Os nêutrons livres, por sua vez, vão tornando-se mais abundantes à medida que a matéria vai se comprimindo. Como os neutrons interagem fortemente, ao contrário dos elétrons, eles tendem a reduzir a tensão superficial dos núcleos e patrocinar sua dissociação.

A equação de estado nesta faixa de densidade deve ser acrescida do termo de pressão de gás de nêutron. Esta parcela compete com a contribuição de gás de elétron, superando-a como fonte principal de pressão à medida que a quantidade de neutrons livres vai aumentando. No caso não relativístico a pressão do gás ideal de nêutron degenerado é dada por

$$P_n = \frac{\hbar^2}{5m_n^{8/3}} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3} \quad (2.2.2)$$

e quando extremamente relativístico

$$P_n = \frac{1}{4} \hbar c m_n^{-4/3} (3\pi^2)^{1/3} \rho^{4/3} \quad (2.2.3)$$

2.2.3 - Regime Nuclear

Entre $\approx 5 \times 10^{13}$ e $\approx 6 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ a matéria estelar é

constituída de uma fase homogênea nêutron-próton-elêtron abundante em nêutrons. Este é o regime nuclear.

A matéria nuclear obedece à seguinte condição de equilíbrio químico

$$\mu_n - \mu_p = \mu_e \quad , \quad (2.2.4)$$

onde os termos, da direita para a esquerda, representam o potencial químico do nêutron, do próton e do elétron, respectivamente. Entretanto, se $\mu_n - \mu_p \approx 105 \text{ MeV}$ ($\rho \approx 3 \times 10^{14} \text{ gcm}^{-3}$), pode ocorrer a produção de múons via a reação



Porém a produção de múons é extremamente baixa, e para densidades menores que $10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$ sua contribuição para a equação de estado é irrelevante.

Porém, se $\mu_n - \mu_p \approx 138 \text{ MeV}$ (massa de repouso do π^-) é possível a seguinte reação



que dá a produção de pions.

Os pions são bósons e por isso exibem uma propriedade oposta a dos elétrons e múons: a baixas temperaturas os bósons tendem a se aglomerar (condensação de Einstein). Estima-se que a condensação dos pions tenha início para $\rho \approx 3 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ e que ela afete a taxa de esfriamento da estrela. É possível que nesta fase a matéria se apresente num esta-

do de superfluidez (viscosidade nula).

2.2.4 - Regime Supranuclear ou Hadrônico

Quando a matéria nuclear é ainda mais comprimida, no domínio de densidade superior a $\approx 6 \times 10^{14} \text{ gcm}^{-3}$ outros bárions devem se fazer presentes como Σ^- , Σ^0 , Λ e Ξ .

O comportamento da matéria nuclear densa constitui atualmente objeto de intensa pesquisa em Física de Altas Energias, mas não dispomos ainda de uma forma consagrada para a equação de estado da matéria nesta fase. Entre 7.2×10^{14} e 10^{15} gcm^{-3} a QCD prevê uma transição da matéria hadrônica para a matéria de quarks, isto é, o desconfinamento destes últimos em sítios extensos como, por exemplo, o interior das Estrelas de Nêutron.

2.3 - ÍNDICE ADIABÁTICO E A INSTABILIDADE DE CAROÇOS DEGENERADOS

O índice adiabático desempenha um papel fundamental na discussão da estabilidade de sistemas gravitacionalmente ligados. No sentido de explicitar a condição de instabilidade determinada pelo índice adiabático, consideremos a condição de estabilidade

$$\delta^2 H \geq 0 .$$

Tendo em conta que a energia total do sistema, H , inclui a energia interna do gás, essa condição nos leva à desigualdade

$$\int_0^{V_r} P(\gamma-4/3) dV > 0 \quad . \quad (2.3.1)$$

Portanto, o sistema é estável se $\gamma > 4/3$.

Vale a pena aqui ilustrarmos o comportamento do índice adiabático nos limites (2.1.34)–(2.1.36), que são de maior interesse para a discussão do colapso. De acordo com a definição do índice adiabático

$$\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S \quad (2.3.2)$$

no limite de gás de elétron não relativístico e completamente degenerado, isto é,

$$P = k_1 \rho^{5/3} \quad (2.3.3)$$

com

$$k_1 = \frac{1}{5} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right) \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{m_a^{5/3}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} = 3.12 \times 10^{12} (2Z/A)^{5/3}$$

e sendo m_a a unidade de massa atômica, o valor de γ é 5/3.

Por outro lado, no caso relativístico, onde

$$P = k_2 \rho^{4/3} \quad , \quad (2.3.4)$$

com

$$k_2 = \left(\frac{3\pi^2}{32g} \right)^{1/3} \hbar c \frac{1}{m_a^{4/3}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{4/3} = 4.56 \times 10^{14} (2Z/A)$$

temos $\gamma = 4/3$, justamente o valor crítico para a estabilidade.

Portanto, quando o gás de elétron degenerado no interior do caroço estelar aproxima-se de condições relativísticas, surgem instabilidades que propiciam o colapso. A captura eletrônica e a fotodissociação de núcleos, durante o colapso, levam o índice adiabático a assumir valores ainda menores que $4/3$, tornando o sistema mais e mais instável. Entretanto, o gás de neutron que surge, como mencionado na Seção 2.2.2, vai predominando sobre o restante da mistura e, devido à sua degenerescência, γ passa a aumentar. A equação de estado endurece, causando, eventualmente, a inversão do colapso.

CAPÍTULO III

MECANISMOS DE IMPLOÇÃO E EXPLOÇÃO

Consideremos um caroço de Pré-Supernova de $1.5M_{\odot}$ e raio da ordem de 10^8 cm. A escala de tempo de queda livre do sistema, dada por

$$t_{q1} \approx \left(\frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2}$$

é da ordem de 50 milissegundos. Ocorre colapso gravitacional justamente quando a escala de tempo da contração gravitacional é da ordem da escala de tempo de queda livre do sistema.

Entretanto, que processos físicos, tão eficientes, poderiam, em frações de segundo, levar um caroço quente e denso a implodir? E que mecanismo pode ser capaz de inverter esta implosão numa explosão?

Este capítulo é dedicado à análise destas questões.

3.1 - MECANISMOS DE IMPLOÇÃO

Os mecanismos que podem acionar o processo de implosão são os seguintes:

3.1.1 - Fotodissociação do ^{56}Fe

Em 1957 Burbidge, Burbidge, Fowler e Hoyle ⁽²¹⁾ sugeri

ram a seguinte reação fotonuclear para acionar a implosão:



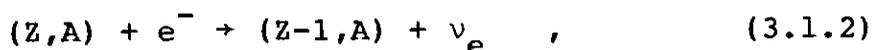
uma reação endotérmica cujo valor Q é -2.1×10^{18} erg/g. Lembremos que o ferro é precisamente o produto final em caroços de Pré-Supernova, isto é, o núcleo dominante que resulta dos processos de nucleossíntese presentes nas fases anteriores de sua evolução.

Efetivamente, admitindo equilíbrio estatístico e usando a equação de Saha ⁽³²⁾, eles mostraram que o movimento de queda livre, durante o qual a temperatura das camadas mais externas aumenta substancialmente, sítio em que passam a ocorrer reações termonucleares explosivas.

3.1.2 - Captura Eletrônica

Um outro mecanismo capaz de acionar o colapso é a captura eletrônica.

Após atingir o elemento ${}^{56}\text{Fe}$ e esgotada a fonte de energia termonuclear, o caroço começa a se contrair lentamente, aumentando sua densidade. Então, o potencial químico também aumenta, por causa da redução do volume ocupado pelos elétrons. De fato, para densidades $\geq 10^9 \text{ gcm}^{-3}$ a energia de Fermi do elétron é ≥ 10 MeV, de modo que a reação



onde (Z,A) representa o núcleo cujo número atômico é Z e o núme

ro de massa é A, torna-se energeticamente possível. Nesta reação, conhecida como captura eletrônica, a energia dos elétrons está no contínuo.

Prótons livres, embora escassos, também podem capturar elétrons,



Em 1964 Bahcall ⁽³³⁾, por exemplo, calculou a taxa de captura eletrônica para as condições reinantes no interior de Pré-Supernovas, demonstrando ser este um mecanismo de implosão muito eficiente.

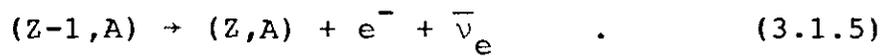
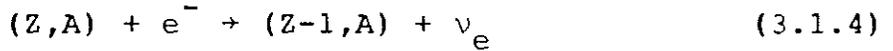
A captura eletrônica neutroniza rapidamente a matéria estelar, constituindo-se simultaneamente numa tremenda fonte de emissão de neutrinos. Veremos mais adiante que a neutronização e a emissão de neutrinos, ambas, desempenham um papel fundamental nos instantes finais do colapso.

A reação de captura é também um processo endotérmico que reduz drasticamente a pressão interna do caroço. De um lado, devido à redução do número de elétrons livres, que reduz a pressão eletrônica e, de outro, o fluxo de neutrinos copiosamente emitidos que conduzem energia para fora do caroço, esfriando-o.

O número de capturas por unidade de tempo é função crescente da densidade. Assim, a densidade aumentando, a taxa de captura também cresce, fazendo aumentar outra vez a densidade. É justamente esse processo que constitui a implosão. De fato, em frações de segundo, a implosão provoca uma brusca variação na densidade: de $\approx 10^9$ a $\approx 10^{14}$ g/cm³.

3.1.3 - Processo Urca

Proposto em 1941 por Gamow e Schoenberg⁽³⁴⁾, o Processo Urca, assim chamado em homenagem ao extinto cassino da Urca, consiste no seguinte ciclo



Na primeira reação (captura), uma representativa fração da energia do elétron é utilizada na criação de neutrinos e na segunda (decaimento beta) o núcleo resultante decai, convertendo parte da energia do processo em um anti-neutrino (o núcleo original é sempre regenerado).

As duas reações constituem efetivamente um ciclo de produção de neutrinos às custas da energia dos elétrons, que reduzem a pressão do gás de elétrons e esfriam a estrela.

Porém, é pouco provável que o processo Urca seja um mecanismo eficiente de implosão. A razão é que, à medida que aumenta a degenerescência dos elétrons, o espaço de fase acessível aos neutrinos diminui, e a segunda reação do ciclo fica fortemente inibida.

Concluimos esta seção mencionando que os mecanismos de implosão considerados mais eficientes, dentre os que aqui foram apresentados, são a fotodissociação do Fe e a captura eletrônica. Acredita-se, entretanto, que ambos os processos atuem simultaneamente durante o colapso gravitacional.

3.2 - MECANISMOS DE EXPLOSÃO

Dentre os mecanismos propostos que podem causar uma explosão de Supernova, destacamos os seguintes:

3.2.1 - Transporte de Neutrinos

Em 1966, Colgate e White⁽²⁾ fizeram o primeiro cálculo hidrodinâmico para o colapso gravitacional por métodos numéricos, onde incluíram o transporte de neutrino. Os neutrinos são produzidos durante quase todo o curso da evolução de uma estrela e, em virtude de seu grande livre percurso médio ($\lambda_{\nu} \approx 10^{18}$ cm para energia de 1 MeV, muito maior, portanto, que a dimensão da estrela), eles escapam livremente.

Todavia, neste trabalho, Colgate e White levantaram a hipótese de que nos instantes finais da implosão as camadas externas ao caroço pudessem ficar opacas a neutrinos devido a formação de núcleos pesados. O transporte de neutrinos foi simulado por um processo a que denominaram "deposição" que, em linhas gerais, consiste no seguinte:

Devido à opacidade, os neutrinos emitidos durante a captura transferem energia tanto por espalhamento elétron-neutrino, quanto pela absorção por núcleos pesados. Naturalmente, essa energia é transportada em forma de calor, levando o caroço a esfriar e a envoltória a aquecer. Com esse aumento na temperatura, a pressão do gás aumenta e o gradiente de pressão, gerando uma onda de choque, é que eventualmente pode causar uma explosão.

Com esse mecanismo, eles simularam a explosão de es -

trelas de 10, 2 e $1.5M_{\odot}$, das quais resultaram caroços remanescentes de nêutron de 1.8, 0.98 e $0.87M_{\odot}$. Concluíram ainda que tanto a fotodissociação do ^{56}Fe , quanto a captura eletrônica podem acionar a implosão (seus resultados estão ilustrados na Figura 3.1).

Arnett⁽³⁾, em 1966 e 1967, publicou dois trabalhos em que usou para o transporte de neutrinos a aproximação de difusão, em analogia com a difusão de fótons. Para investigar o papel da opacidade, Arnett admitiu apenas o espalhamento elétron-neutrino. Seus cálculos mostraram que, sem incluir a opacidade a neutrinos, não há ejeção da envoltória. Mas, por outro lado, mostrou também que a implosão só é seguida de explosão se a massa da estrela for suficientemente pequena ($\approx 2M_{\odot}$).

Em 1971, Wilson⁽³⁵⁾ realizou um cálculo para a dinâmica do colapso à luz da Relatividade Geral em que usou uma equação de transporte de Boltzmann para tratar o fluxo de neutrinos. Entretanto, encontrou para a opacidade valores consideravelmente maiores que os de Arnett, com os quais o mecanismo de transporte de calor por neutrinos é incapaz de ejetar a envoltória.

Contudo, a descoberta das correntes neutras em interação fraca trouxe consigo uma nova geração de modelos de Supernova.

Com efeito, além dos já conhecidos processos de interação fraca, como as reações $e^{-} + p \rightleftharpoons n + \nu_e$, $e^{+} + n \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e$, espalhamento elétron-neutrino ou processos de produção de par $\nu\bar{\nu}$, os processos de corrente neutra, como por exemplo, espalhamento neutrino-nucleon, neutrino-neutrino, neutrino-núcleo, possuem importância evidente para a Astrofísica, sobretudo por

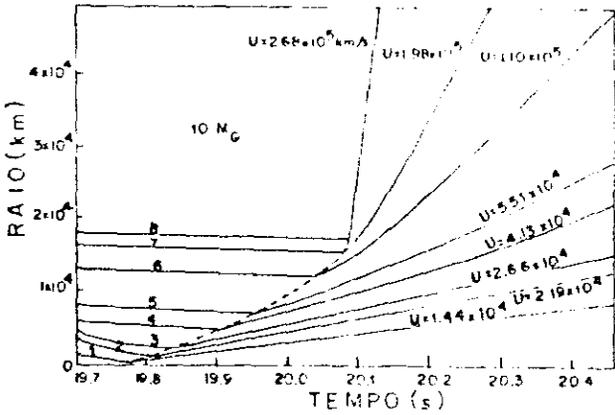


FIGURA 3.1a

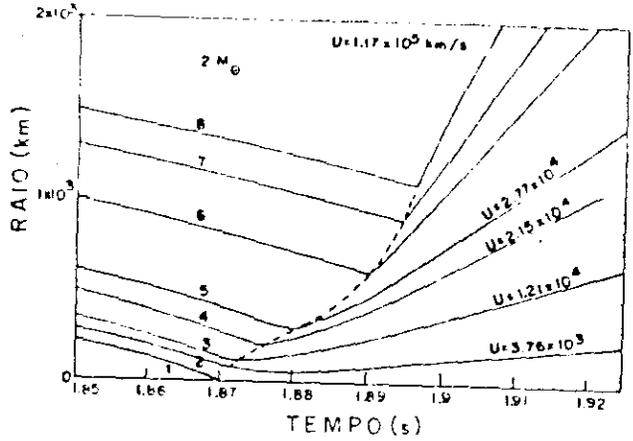


FIGURA 3.1b

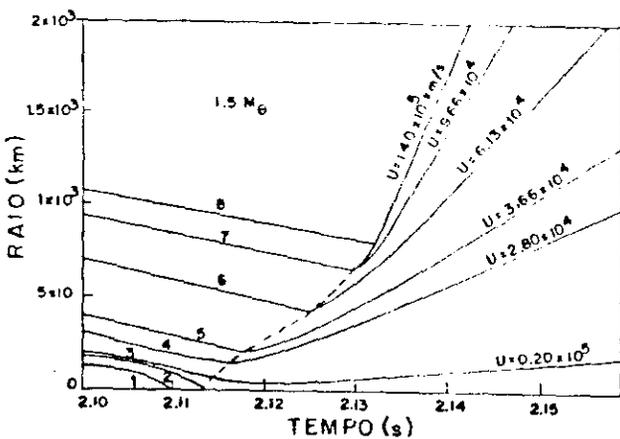


FIGURA 3.1c

FIGURA 3.1 - Raio versus tempo em escala linear para a explosão de estrelas de $10 M_{\odot}$ (a), $2 M_{\odot}$ (b) e $1.5 M_{\odot}$ (c), com o mecanismo de "de posição" de neutrinos proposto por Colgate e White. Observe em (a) o aumento progressivo na velocidade da onda de choque, que chega a alcançar o limite relativístico para a camada 8 (adaptado da referência (2)).

constituírem-se numa fonte a mais de opacidade aos neutrinos (ver Fig. 3.2). O espalhamento coerente neutrino-núcleo, por exemplo, tem seção de choque proporcional a A^2 . Consequentemente, para núcleos com A grande, presumivelmente presentes no interior estelar nos instantes finais da implosão, o espalhamento coerente deve ser a principal fonte de opacidade a neutrinos, o qual, devido à sua dependência com o quadrado de A, pode provocar seu confinamento nas regiões centrais da estrela.

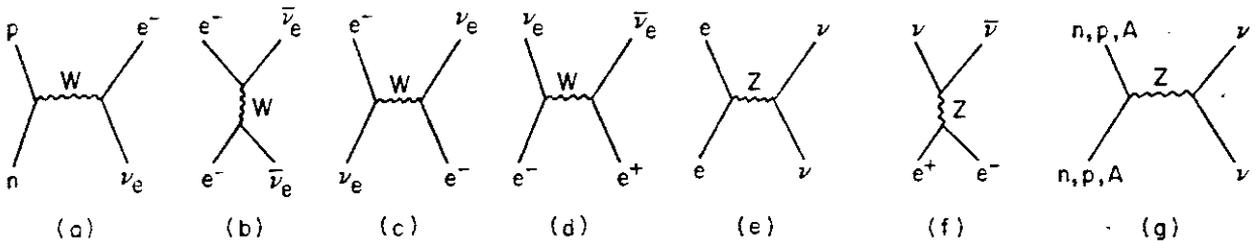


FIGURA 3.2 - Diagramas de Feynmann para interações com neutrino. Nos diagramas (a)-(d) consideram-se apenas neutrinos e antineutrinos eletrônicos. Os diagramas de espalhamento (b) e (c) valem também para as substituições $\nu_e + \bar{\nu}_e$, $e^- \rightarrow e^+$. Os diagramas de corrente neutra (e)-(g) envolvem todos os tipos de neutrino e antineutrino. O diagrama (g) representa tanto o espalhamento elástico com nucleons livres (n,p) quanto espalhamento coerente um núcleo A.

Ao contrário da absorção ou do espalhamento elétron-neutrino, o espalhamento coerente ν -nucleon e ν -núcleo não conduzem a um acoplamento do gás de neutrino com a hidrodinâmica da matéria no sentido de melhorar a eficiência do transporte de energia por neutrino. Com efeito, ao incluir-se as corren-

tes neutras nos cálculos de seção de choque, o transporte de energia por neutrinos deixa de ser um mecanismo eficiente para a explosão.

Em vista dessas dificuldades, Schramm e Arnett ⁽³⁶⁾ levantaram uma outra possibilidade: a transferência de momento via neutrinos. Segundo esse mecanismo, os neutrinos emitidos durante o colapso "depositariam" momento nas camadas externas ricas em núcleos pesados, ejetando-as. Basicamente, o funcionamento do mecanismo é o seguinte:

No caso de simetria esférica, a aceleração por unidade de massa é dada por

$$\ddot{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2} + \frac{Fk_{\nu}}{c} \quad (3.2.1)$$

onde F é o fluxo de energia de neutrinos, k_{ν} a opacidade e c a velocidade da luz. Como o terceiro termo do lado direito da eq. (3.2.1) dá uma contribuição positiva à aceleração, uma explosão pode ocorrer se

$$\frac{Fk_{\nu}}{c} > \frac{Gm}{r^2} \quad , \quad (3.2.2)$$

isto é, se a luminosidade de neutrino for maior que

$$L_{\nu} = 4\pi Gm/k_{\nu} \quad , \quad (3.2.3)$$

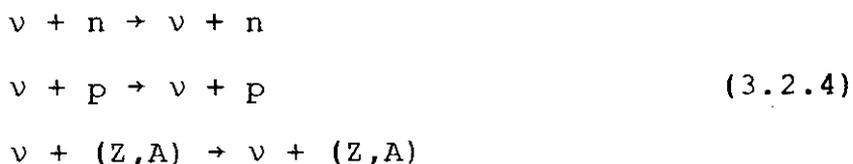
conhecido como limite de Eddington.

Observe-se a dependência de L_{ν} com o inverso da opacidade; desse modo, grande opacidade aos neutrinos enfraquece o transporte de momento.

Entretanto, outros trabalhos puseram em questão o transporte de neutrinos como mecanismo eficiente de explosão.

Por exemplo, Sato⁽³⁷⁾, em 1975, usando a teoria de Weinberg, mostrou que a matéria torna-se muito opaca antes mesmo que a captura eletrônica ocorra apreciavelmente, levando ao confinamento dos neutrinos no caroço. Conseqüentemente, a neutronização é fortemente inibida tanto pelo mar degenerado de neutrinos que vai se formando, quanto pela captura de neutrinos por núcleos (o processo inverso à captura eletrônica).

Em vista disto, Epstein e Pethick⁽³⁸⁾ determinaram o valor crítico de densidade a partir da qual ocorre o confinamento. Eles incluíram os seguintes processos de corrente neutra (diagrama (g) da Fig. 3.2).



onde também usaram o modelo de Weinberg-Salam para o cálculo das seções de choque. Compararam o tempo gasto por um neutrino para escapar por difusão do caroço com o tempo de queda livre e mostraram que o confinamento ocorre para densidades $\rho \gtrsim 10^{12} \text{ gcm}^{-3}$ e para a energia do neutrino $\gtrsim 10 \text{ MeV}$. Assim, o transporte de neutrinos não seria suficiente para explicar as explosões de Supernovas.

Contudo, os efeitos do confinamento de neutrinos sobre a dinâmica do colapso gravitacional continua sendo ainda objeto de intensa pesquisa.

Segundo Bruenn, Arnett e Schramm⁽³⁹⁾, a transferência de momento pode ser um mecanismo eficiente somente se a energia média por neutrino for $> 15 \text{ MeV}$. Por outro lado, o mecanismo

de deposição de energia requer neutrinos ainda mais energéticos (26 MeV).

3.2.2 - Queimas Termonucleares Explosivas

Sob certas condições de densidade e temperatura e sendo a matéria estelar degenerada, as reações termonucleares tornam-se explosivas. Neste contexto, queimas termonucleares explosivas aparecem como possíveis mecanismos de explosão de Supernovas.

. Detonação do ^{12}C

A fusão do carbono é dada por



No caso em que o caroço é não degenerado, a queima do carbono se dá não-explosivamente, pois num gás não degenerado a pressão atua como um termostato, vale dizer, um aumento na temperatura induz a uma expansão a qual, por sua vez, diminui a pressão, controlando a taxa de reação. Entretanto, num gás degenerado a pressão não depende mais da temperatura e nada impede que a temperatura aumente e com ela também a taxa de reação.

Portanto, no caso degenerado, a queima do carbono pode, eventualmente, se proceder numa escala de tempo tão rápida, que resulte numa queima termonuclear explosiva.

Um ponto fraco em tal mecanismo reside no fato de conduzir à total destruição da estrela, não deixando remanescente.

O mecanismo de detonação do carbono pode ser o mecanismo de explosão de Supernovas Tipo I.

. Detonação do ^{16}O

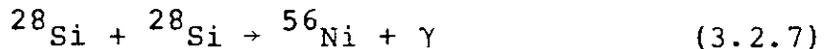
A detonação do oxigênio é uma outra possibilidade:



que libera 16.5 MeV de energia.

. Detonação do ^{28}Si

Existe ainda a possibilidade da queima explosiva do silício:



que libera 11 MeV de energia. Contudo, admite-se que estas reações sejam menos prováveis para provocar explosão do que a detonação do carbono.

3.2.3 -"Bounce"Hidrodinâmico

Um outro mecanismo, proposto por Colgate e Johnson ⁽⁴⁰⁾ em 1960 e retomado por Bruenn ⁽⁴¹⁾ em 1975, é o bounce hidrodinâmico. Ao atingir altas densidades o caroço repentinamente inverte o sentido do colapso (bounce) e, neste caso, é a onda de choque gerada por esta inversão que pode, eventualmente, ejetar as camadas externas.

Na ausência de transporte de neutrino, a eq. (3.2.1)

torna-se

$$\ddot{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2} \quad . \quad (3.2.8)$$

O sinal da aceleração depende da competição entre o termo de gradiente de pressão e o termo gravitacional. O "bounce" ocorre quando o primeiro termo suplanta o segundo, levando o caroço, em geral, a oscilar. Entretanto, dependendo da equação de estado, o gradiente de pressão pode ser muito maior que a pressão gravitacional e gerar uma onda de choque capaz de ejetar matéria. Para tanto, é preciso que nos instantes finais do colapso o índice adiabático γ passe subitamente de um valor abaixo de 4/3 para um valor bem acima de 4/3.

Para entender melhor o mecanismo, vamos admitir, por simplicidade, a contração homóloga (isto é, velocidade proporcional ao raio) de um caroço de gás politrópico. A equação de estado então é dada por

$$P = K\rho^\gamma \quad , \quad (3.2.9)$$

com

$$\rho \approx \rho_0 (r_0/r)^3 \quad , \quad (3.2.10)$$

de modo que

$$\frac{dP}{dr} = - 3\gamma(P/r) \quad (3.2.11)$$

e

$$\ddot{r} = - \frac{Gm}{r} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3\gamma-4} \right] \quad . \quad (3.2.12)$$

Em (3.2.12), r_0 corresponde à situação de equilíbrio hidrostático. Assim, se $\gamma < \frac{4}{3}$ e $r < r_0$, então $\ddot{r} < 0$ e procede-se o colapso. Se, no final do colapso, γ passa subitamente para, digamos, $5/3$, então $\ddot{r} \gg 0$. É o bounce, portanto.

No contexto do mecanismo de bounce, a dinâmica do colapso é basicamente a seguinte. Durante a implosão, o caroço divide-se numa região central que colapsa homologamente, isto é, mantendo sua distribuição de densidade efetivamente similar no decorrer do colapso, enquanto o material da envoltória cai em queda livre. O colapso prossegue até que a densidade central ultrapasse a densidade da matéria nuclear ($\approx 2-3 \rho_0$). A grande incompressibilidade da matéria nuclear provoca um repentino estancamento do colapso, levando o caroço a expandir. O resultado é a propagação de uma onda de pressão que se acumula na borda do caroço homólogo, dando lugar a uma onda estacionária. Esta é justamente a região onde a velocidade de queda livre das camadas externas iguala-se, em módulo, à velocidade do som naquele meio, sendo chamada, por isso, de "ponto sônico".

Assim, uma vez acumulada pressão suficiente na borda do caroço, o bounce pode, eventualmente, gerar uma forte onda de choque. Essa onda de choque, se propaga supersonicamente através da manta, ejetando-a juntamente com o envelope.

Uma onda de choque constitui-se, basicamente, na propagação de descontinuidades (densidade, pressão, etc) em um meio, devendo satisfazer às condições de Hugoniot-Rankine ⁽⁴²⁾.

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{u_0}{u_1} \quad (3.2.13)$$

$$u_0 - u_1 = \left[(p_1 - p_0) (v_0 - v_1) \right]^{1/2} \quad (3.2.14)$$

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2} (p_1 + p_0) (v_0 - v_1) \quad , \quad (3.2.15)$$

que expressam a conservação da massa, momento e energia. Os sub-índices 1 e 0 denotam, pela ordem, a região localizada imediatamente antes e após a frente de onda e p , v , u e E designam a pressão, volume específico ($1/\rho$), velocidade do meio e energia interna.

CAPÍTULO IV

FORMALISMO LAGRANGEANO PARA A DESCRIÇÃO DO "BOUNCE"

Este capítulo é reservado à apresentação do formalismo lagrangeano para a descrição da dinâmica do caroço em colapso gravitacional e do mecanismo de "bounce". O objetivo central é discutir a energética do "bounce" acompanhando a dinâmica do sistema desde o início do colapso até alguns milissegundos após o choque de reflexão.

Na seção 4.1 é construída a lagrangeana efetiva do caroço da pré-Supernova que é desmembrado em duas camadas homogêneas. Na seção 4.2 deduz-se as equações de movimento que são então integradas numericamente pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg⁽⁴³⁾. Na seção 4.3 apresenta-se uma versão simplificada da equação de estado da matéria fria composta de gás de elétron degenerado e relativístico (configuração inicial) e gás de nêutron degenerado e não relativístico (configuração final).

A distribuição de massa entre as camadas é ditada por um parâmetro introduzido na seção 4.4, onde analisa-se também a configuração inicial. Por último, examina-se na seção 4.5 de que modo é desencadeado o colapso do sistema.

4.1 - LAGRANGEANA EFETIVA

Como ponto de partida, o nosso sistema, isto é, o ca

roço de Pré-Supernova propriamente dito, é dividido em dois subsistemas ou duas camadas de densidade uniforme. A camada-1 é caracterizada pelos parâmetros R_1 e ρ_1 e a camada-2 por R_1, R_2 e ρ_2 , onde os R_i são as coordenadas radiais de cada camada e ρ_i suas densidades médias (ver Fig. 4.1). Com essas definições, a conservação de massa impõe que

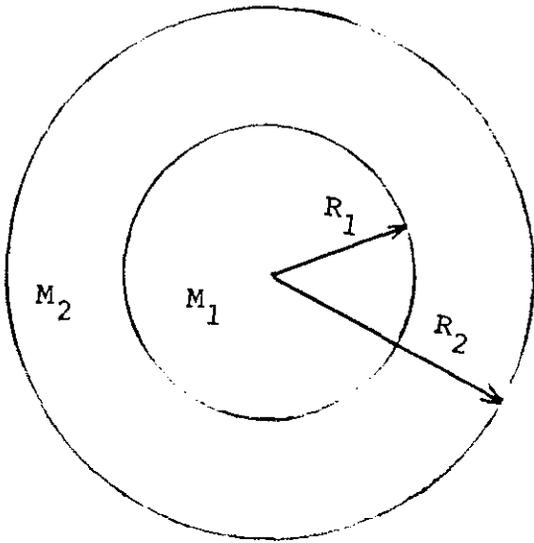


FIGURA 4.1

nições, a conservação de massa impõe que

$$(4\pi/3) \rho_1 R_1^3 = M_1 \quad (4.1.1)$$

e

$$(4\pi/3) \rho_2 (R_2^3 - R_1^3) = M_2, \quad (4.1.2)$$

onde M_1 e M_2 representam as massas (constantes) de cada camada.

Agora vamos construir a lagrangeana efetiva, definida por

$$\begin{aligned} L &= L(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2) \\ &= K - V_G - E, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

onde K representa a energia cinética do sistema, V_G a energia potencial gravitacional e E a energia interna.

Evidentemente, as quantidades K e E são obtidas quando somamos a contribuição de cada camada

$$K = K_1 + K_2,$$

$$E = E_1 + E_2.$$

De forma geral, o termo de energia cinética é dado por

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \vec{v}^2 dV \quad , \quad (4.1.4)$$

onde \vec{v} é o campo de velocidade no interior da camada.

Vamos determinar a expressão do campo de velocidade supondo-o irrotacional e esfericamente simétrico. Neste caso a equação de continuidade tem a forma:

$$(1/r^2) \frac{d}{dr} [r^2(\rho v)] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \quad (4.1.5)$$

Uma vez que as camadas são homogêneas, como estamos supondo, então a equação anterior fica

$$(1/r^2) \frac{d}{dr} (r^2 v) = - \dot{\rho} / \rho \quad , \quad (4.1.6)$$

cuja solução é dada por

$$v(r) = \begin{cases} \frac{\dot{R}_1}{R_2} r \quad , & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)} \left[(\dot{R}_2 R_2^2 - \dot{R}_1 R_1^2) r + (\dot{R}_1 R_1^2 R_2^3 - \dot{R}_2 R_2^2 R_1^3) r^{-2} \right] \quad , & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

onde usou-se as seguintes condições de contorno

$$v(r=R_1) = \dot{R}_1 \quad , \quad (4.1.8)$$

e

$$v(r=R_2) = \dot{R}_2 \quad . \quad (4.1.9)$$

De acordo com a eq. (4.1.7), o campo de velocidade dentro da camada-1 é proporcional ao raio, ou seja, para a região interna do caroço o colapso é homólogo^(*).

Agora, substituindo em (4.1.4) a expressão deduzida para $v(r)$, encontramos para a energia cinética

$$K = \frac{1}{2} \frac{3}{5} \left(M_1 \dot{R}_1^2 + M_2 (T_{11} \dot{R}_1^2 + 2T_{12} \dot{R}_1 \dot{R}_2 + T_{22} \dot{R}_2^2) \right) \quad (4.1.10)$$

com

$$T_{11} = \frac{5\xi^3 + 6\xi^2 + 3\xi + 1}{(1 + \xi + \xi^2)^3} \quad , \quad (4.1.11)$$

$$T_{12} = T_{21} = \frac{3}{2} \frac{\xi^2 (\xi^2 + 3\xi + 1)}{(1 + \xi + \xi^2)^3} \quad , \quad (4.1.12)$$

$$T_{22} = \frac{\xi^3 (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 5)}{(1 + \xi + \xi^2)^3} \quad , \quad (4.1.13)$$

onde

$$\xi \equiv R_2/R_1 \quad . \quad (4.1.14)$$

É fácil verificar que no limite $R_1 \rightarrow R_2$ ($\xi \rightarrow 1$) a eq. (4.1.10) coincide exatamente com a energia cinética de uma camada esférica infinitesimal de massa Δm , isto é, $\frac{1}{2} \Delta m \dot{R}^2$.

Por outro lado, a energia potencial gravitacional total é expressa por

$$V_G = - \frac{3}{5} G/R_1 \left(M_1^2 + M_2^2 f(\xi) + \frac{5}{2} M_1 M_2 g(\xi) \right) \quad , \quad (4.1.15)$$

onde

(*)Daqui em diante, usaremos também o termo caroço homólogo ao nos referirmos à camada-1.

$$f(\xi) = \frac{1}{2} (2\xi^3 + 4\xi^2 + 6\xi + 3) / (1 + \xi + \xi^2)^2, \quad (4.1.16)$$

$$g(\xi) = (\xi+1) / (1 + \xi + \xi^2) \quad . \quad (4.1.17)$$

Na eq. (4.1.15) os dois primeiros termos representam a auto-energia gravitacional de cada camada, e o terceiro a interação mútua entre elas.

Por último, a energia interna E de cada camada é dada por

$$E = M\varepsilon/\rho \quad , \quad (4.1.18)$$

onde ε representa a densidade de energia por unidade de volume.

4.2 - EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Com a Lagrangeana construída na seção precedente extraímos através das equações de Euler-Lagrange as seguintes equações de movimento acopladas^(*)

$$M_1 \ddot{R}_1 + M_2 (T_{11} \ddot{R}_1 + T_{12} \ddot{R}_2) = \frac{M_2}{R_1} \left[T'_{11} \left(\frac{1}{2} \xi \dot{R}_1 - \dot{R}_2 \right) \dot{R}_1 - \left(\frac{1}{2} \xi T'_{22} + T'_{12} \right) \dot{R}_2 \right] - G/R_1^2 \left[M_1^2 + M_2^2 (f + \xi f') + \frac{3}{5} M_1 M_2 (g + \xi g') \right] + \frac{20\pi}{3} R_1^2 (P_1 - P_2) \quad . \quad (4.2.1)$$

$$M_2 (T_{12} \ddot{R}_1 + T_{22} \ddot{R}_2) = \frac{M_2}{M_1} \left[T'_{22} \left(\xi \dot{R}_1 - \frac{1}{2} \dot{R}_2 \right) \dot{R}_2 + \left(\xi T'_{12} + \frac{1}{2} T'_{11} \right) \dot{R}_1 \right] + G/R_1^2 \left[M_2^2 f' + \frac{5}{2} M_1 M_2 g' \right] + \frac{20\pi}{3} R_1^2 \xi^2 P_2 \quad , \quad (4.2.1')$$

(*) Ver Apêndice A para detalhes do cálculo.

onde P_i é a pressão e

$$T'_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial \xi} \quad , \quad (4.2.2)$$

$$f' = f'(\xi) \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad , \quad (4.2.3)$$

e

$$g' = g'(\xi) \equiv \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad . \quad (4.2.4)$$

4.3 - EQUAÇÃO DE ESTADO

Para resolvermos as equações (4.2.1) e (4.2.1') precisamos entrar com a condição inicial do problema, isto é, especificar os valores de R_i e \dot{R}_i ($i = 1, 2$) em $t = 0$, juntamente com a equação de estado

$$P = P(\rho, T) \quad .$$

O formalismo desenvolvido anteriormente será aplicado sobre um modelo bem simplificado de Pré-Supernova. O primeiro passo neste sentido é construir uma expressão simples para a equação de estado. Para tanto, usamos duas hipóteses básicas:

- 1) - O caroço da estrela é composto de uma mistura de elétrons de nêutrons, supostos livres;
- 2) - A matéria estelar é completamente degenerada ao longo de todo o processo.

Tendo em vista que o índice adiabático da matéria estelar é um parâmetro decisivo para a inversão do colapso ("bounce") do caroço, devemos implementar uma parametrização do índice adiabático com a densidade que permita traduzir as proprieda

des físicas globais da matéria estelar em colapso. Para tanto , precisamos construir uma equação de estado capaz de acompanhar tanto a desleptonização causada pela captura eletrônica, quanto a neutronização da matéria estelar, os quais, juntos, constituem os processos físicos básicos que determinam a explosão de Supernovas.

A equação de estado que usamos é

$$P = P_e + P_n \quad , \quad (4.3.1)$$

onde a primeira parcela (P_e) corresponde à pressão do gás de elétron degenerado, enquanto a segunda (P_n) dá a pressão do gás de nêutron degenerado e não relativístico. Explicitamente,

$$P_e = K_1 \left\{ x(2x^2-3)(x^2+1)^{1/2} + 3 \ln \left[x + (x^2+1)^{1/2} \right] \right\} \quad (4.3.2)$$

e

$$P_n = k_2 \rho^{5/3} \quad , \quad (4.3.3)$$

onde

$$x \equiv \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{mc} \hbar (Y_0 \mathcal{D} \rho/m_a)^{1/3} \quad , \quad (4.3.4)$$

$$K_1 = 6.002 \times 10^{22} \quad , \quad (4.3.5)$$

$$K_2 = 5.454 \times 10^9 \quad . \quad (4.3.6)$$

m é a massa do elétron, Y_0 a razão próton-nucleon inicial, ρ a densidade de massa e m_a a unidade de massa atômica.

Na eq. (4.3.4) introduzimos a função \mathcal{D} , definida por

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\zeta) = \left(1 + e^{(\zeta - \zeta_0) \zeta_a} \right)^{-1}, \quad (4.3.7)$$

onde

$$\zeta \equiv \ln \rho, \quad (4.3.8)$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} (\zeta_e + \zeta_c), \quad (4.3.9)$$

$$\zeta_a = \frac{1}{2} (\zeta_e - \zeta_c). \quad (4.3.10)$$

Além disso, ζ_c e ζ_e são parâmetros que fixam o comportamento de γ com a densidade.

Por outro lado, como \mathcal{D} é função decrescente da densidade, o produto $\mathcal{D}Y_0$ – que pode ser interpretado como o número de elétrons por nucleon (Y_e) – simula justamente o processo de desleptonização ocasionado pela captura eletrônica ao longo do colapso gravitacional.

Por fim, com a nossa equação de estado é possível obter-se a seguinte expressão para o índice adiabático efetivo ($\gamma = (1/P) \partial P / \partial \zeta$)

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{1}{P} \left[\left(\frac{1}{\zeta_a} (\mathcal{D}-1) + 1 \right) \left(8K_1 x^5 (x^2-1)^{-1/2} \right) + 5P_n \right], \quad (4.3.11)$$

que dá sua parametrização com a densidade.

Como indicamos na Tabela 4.1, foram adotadas no presente trabalho três versões para a equação de estado, conforme os valores que estipulamos para os parâmetros ζ_e e ζ_c no sentido de investigar sua influência sobre a energética do "bounce". Veremos no capítulo seguinte que, de fato, pequenas variações em tais parâmetros afetam sensivelmente a dinâmica do

colapso ou o processo de transferência de energia durante o choque de reflexão. O comportamento de cada uma dessas equações de estado está representado na Fig. 4.2.

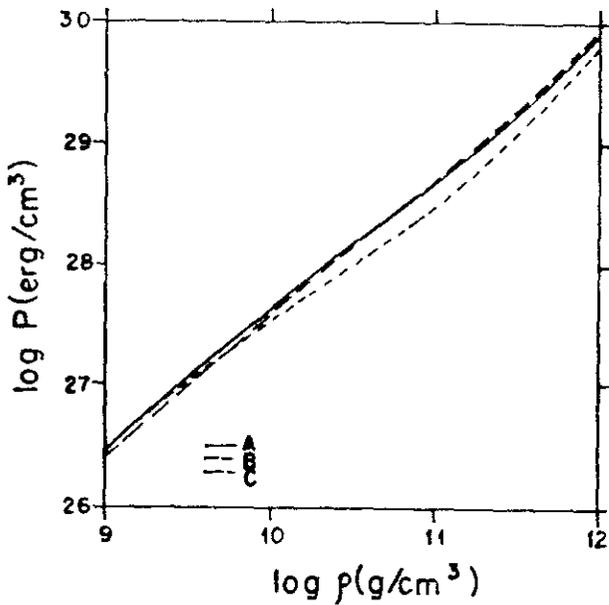
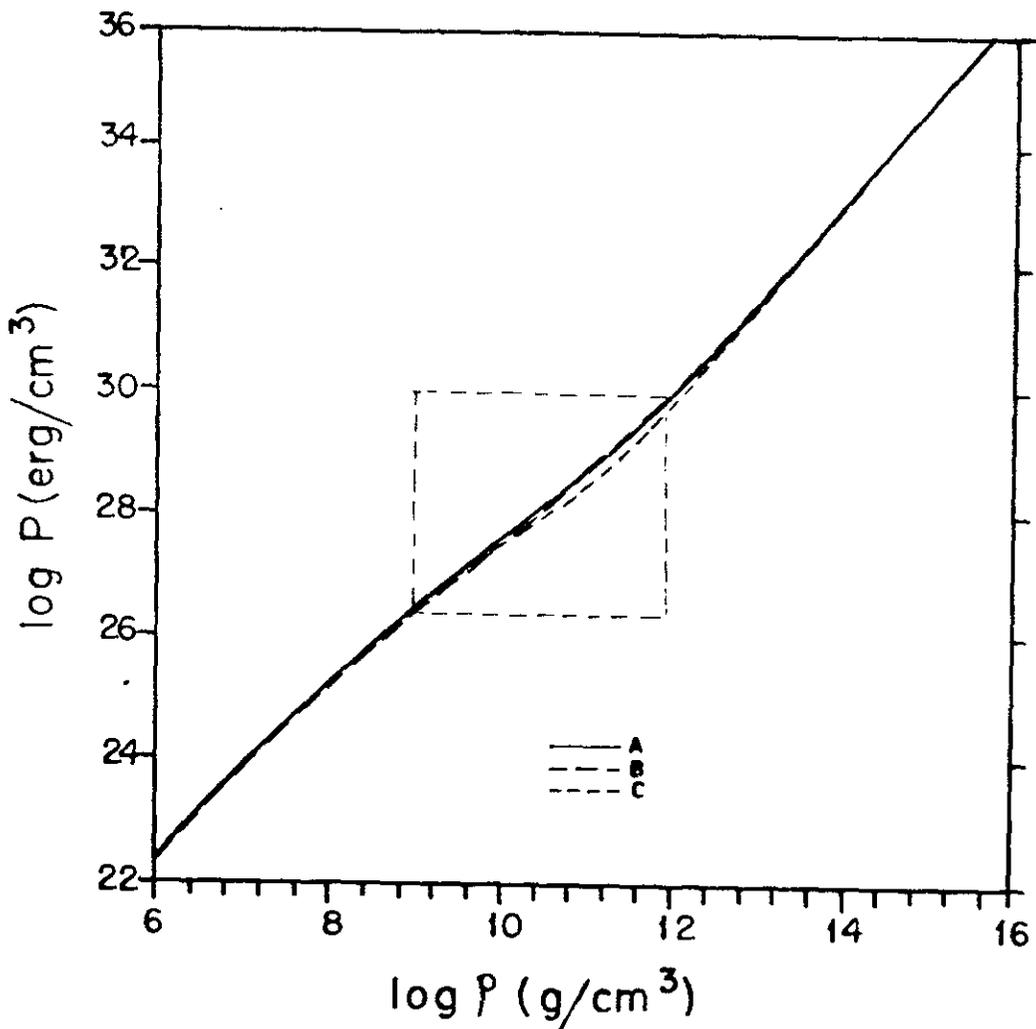


FIGURA 4.2 - Equação de estado (A), (B) e (C) versus logaritmo da densidade. Os parâmetros de cada equação são especificados na Tabela 4.1.



Tal comportamento pode ser melhor visualizado ao considerarmos, com ajuda da Fig. 4.3, a variação de γ contra a densidade. Como podemos verificar, o índice adiabático é uma função suave da densidade, e que interpola o índice adiabático de um gás de elétron degenerado relativístico ($\gamma=4/3$) ao índice adiabático de um gás de nêutron degenerado e não relativístico ($\gamma=5/3$). Desse modo, a nossa parametrização da equação de estado é capaz de traduzir globalmente os processos de captura eletrônica e neutronização.

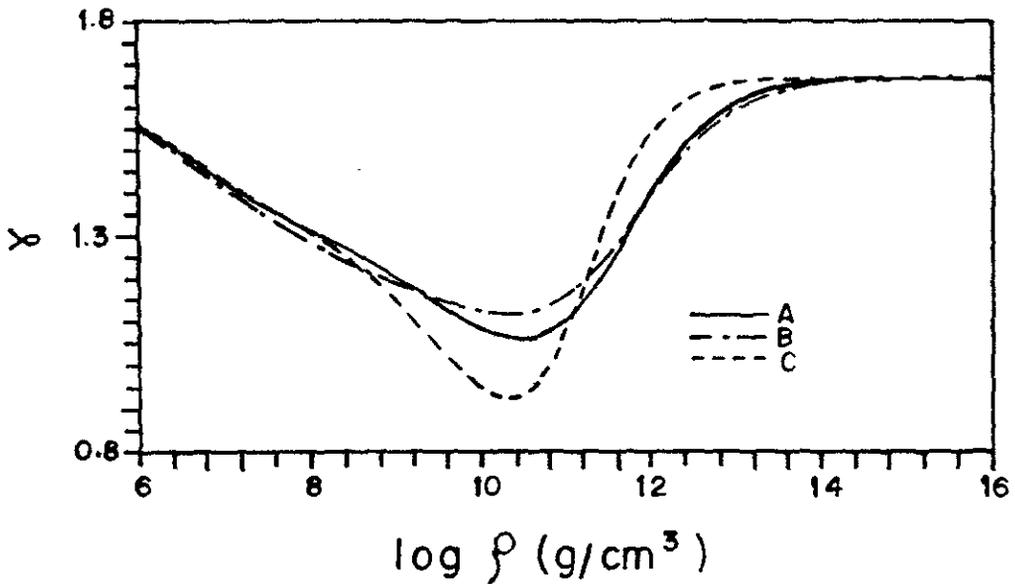


FIGURA 4.3 - Índice adiabático (γ) versus logaritmo da densidade para as equações de estado (A), (B) e (C) descritas na Tabela 4.1.

TABELA 4.1 - Característica de cada equação de estado usada em nossos cálculos. Os parâmetros ζ_e e ζ_c comparecem nas eqs. (4.3.9)-(4.3.10).

Equação de Estado	ζ_e (g/cm ³)	ζ_c (g/cm ³)	γ_{\min}
(A)	11.0	9.0	1.06
(B)	11.0	8.5	1.12
(C)	10.5	9.0	0.92

Essencialmente, como já vimos, é esse comportamento de γ que ocasiona o "bounce".

Para as equações de estado (A), (B) e (C) os valores mínimos de γ são 1.06, 1.12 e 0.92, respectivamente (Tab. 4.1). Na figura 4.4 representamos a dependência do número de elétrons por nucleon (Y_e) com a densidade. Note que nos três casos a captura eletrônica é muito efetiva.

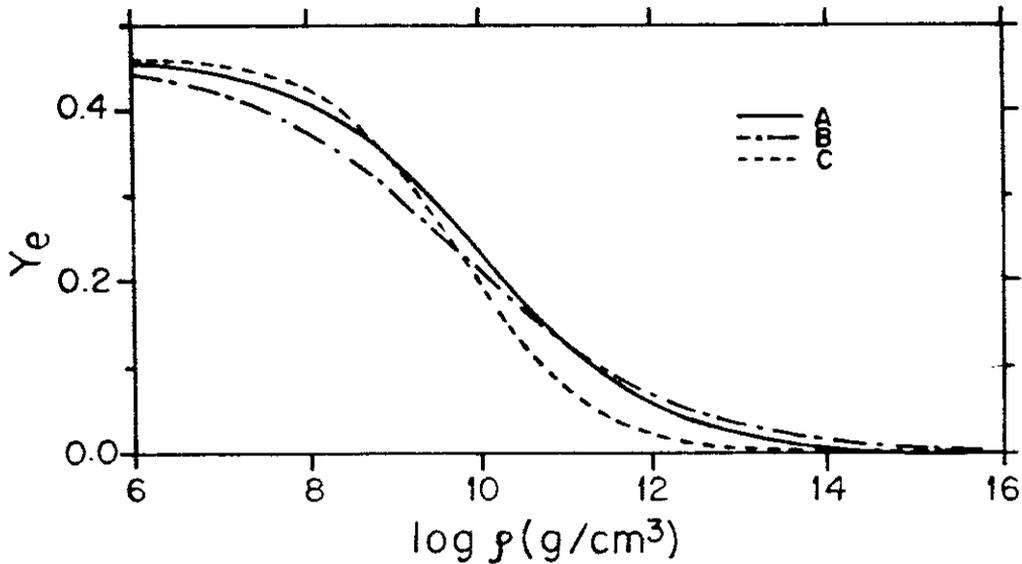


FIGURA 4.4 - Número de elétrons por nucleon (Y_e) versus logaritmo da densidade para as equações de estado (A), (B) e (C) descritas na Tabela 4.1.

4.4 - CONDIÇÃO INICIAL

Os modelos de caroço de Pré-Supernova usados em nos^s cálculos caracterizam-se pela massa total e pelo parâmetro α , que dá a partição de massa entre as duas camadas, sendo compostas de ^{56}Fe puro ($Y_e^0 \equiv Z/A \approx 0.46$).

Quanto ao parâmetro α , ele é definido por

$$\alpha = M_1/M \quad ,$$

onde M_1 é a massa do caroço homólogo e M a massa total. A massa da camada-2 é igual a $(1-\alpha)M$.

Para definir a condição inicial do problema, tomamos o caroço em equilíbrio estático com equação de estado de um gás de elétron puro ($Y_e^0 \approx 0.46$, eq. (2.1.30)). O perfil de densidade de cada modelo (e os raios, portanto) foram obtidos pela minimização da energia total, com esta equação de estado.

Os raios (R_2 vs R_1) e densidade (ρ_2 vs ρ_1) de todas as configurações iniciais estão representados nas Figuras 4.5 e 4.6. Notemos que, para uma mesma massa total, quanto menor α menores são R_1 e R_2 e mais compacto o caroço.

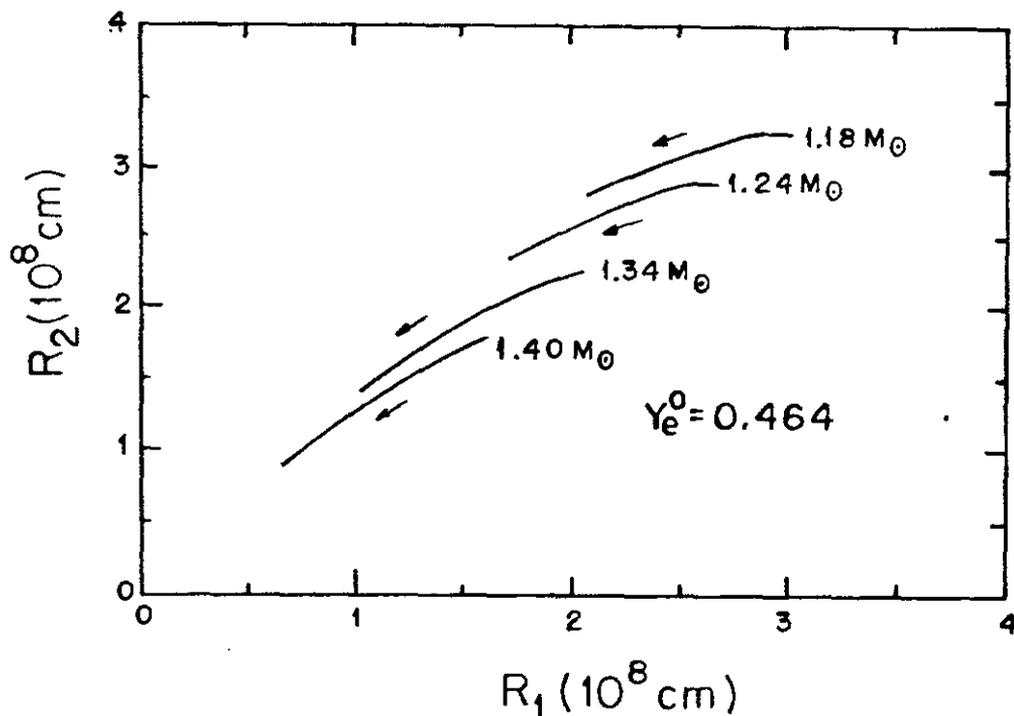


FIGURA 4.5 - Raio da camada-2 versus raio da camada-1 das configurações iniciais para quatro caroços de massas totais diferentes usadas neste trabalho. O parâmetro α cresce com o sentido da seta próxima a cada curva.

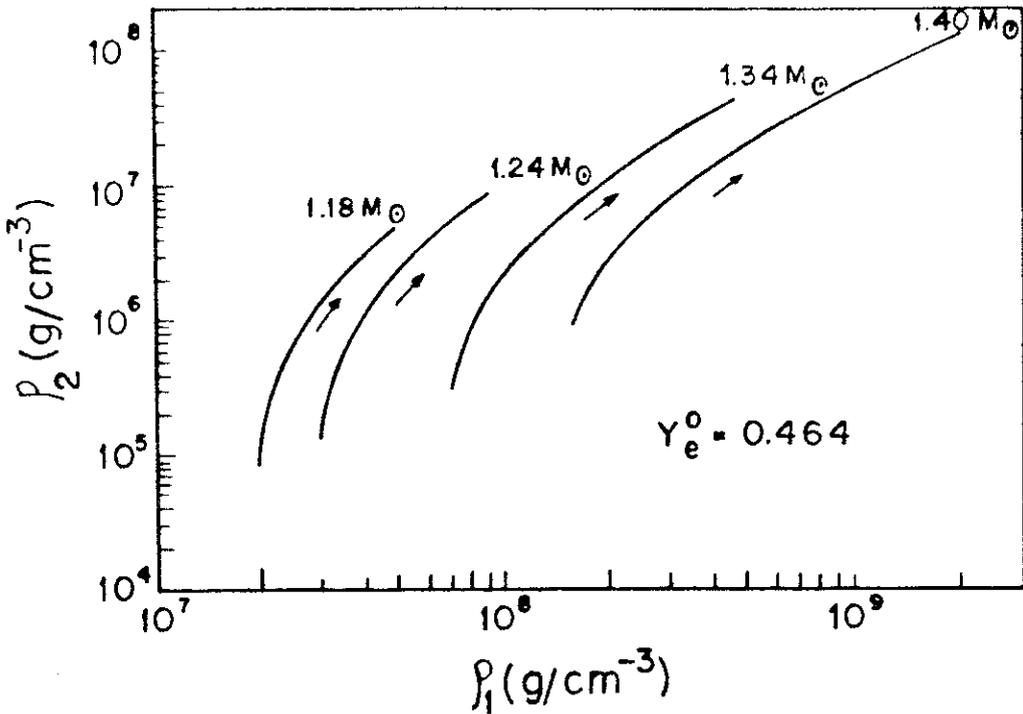


FIGURA 4.6 - Densidade da camada-2 versus densidade da camada-1 em escala logarítmica das mesmas configurações que aparecem na Fig. 4.4. O parâmetro α cresce com o sentido da seta próxima a cada curva.

4.5 - ACIONANDO O COLAPSO

Como dissemos, as configurações de equilíbrio que discutimos mais acima são preparadas com a equação de estado de gás de elétron puro. Mas, como dar a partida na evolução dinâmica do sistema? O que fizemos, simplesmente, foi "ligar" a equação de estado dada na eq. (4.3.1) à configuração de equilíbrio inicial. Esta mudança na equação de estado equivale a reduzir o número de elétrons por nucleon, levando a uma repentina despressurização do gás. Desse modo, como o sistema é instável ($\gamma \approx 4/3$), o equilíbrio hidrostático é rompido já que a pressão do gás torna-se menor que a pressão exercida pela força gravitacional. Com isso, começa então o colapso.

Para ilustrar este procedimento, consideremos uma configuração inicial cuja densidade do caroço homólogo seja, por exemplo, $\approx 2 \times 10^8 \text{ g/cm}^{-3}$. Neste caso, a pressão, o índice adiabático e o número de elétrons por nucleons têm os seguintes valores, respectivamente

$$P_{\text{eq}} = 5 \times 10^{25} \text{ erg/cm}^3 ,$$

$$\gamma_{\text{eq}} = 1.34 ,$$

$$Y_0 = 0.464 .$$

Ao ligarmos, por exemplo, a equação de estado A para a dinâmica, os valores de P , γ e Y_e relativos à mesma densidade são $4 \times 10^{25} \text{ erg/cm}^3$, 1.27 e 0.39, equivalente a uma redução de 20, 16 e 5%, respectivamente (ver Fig. 4.7).

Finalizando, as características de alguns desses modelos, de acordo com a descrição que fizemos na seção anterior, estão listados na Tabela 4.2

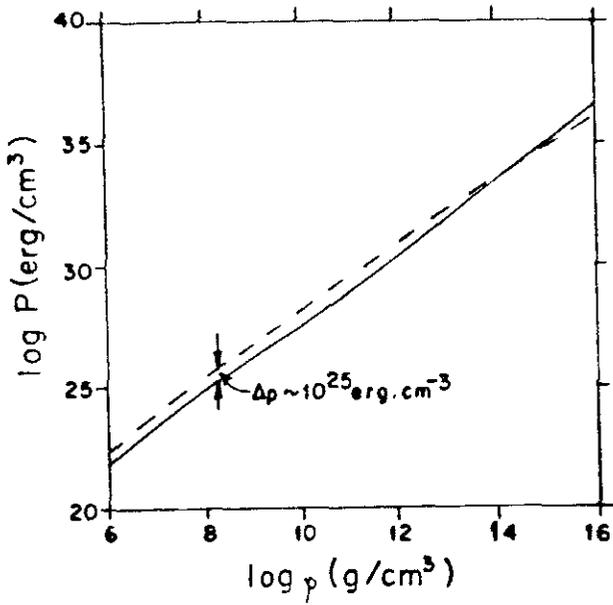


Fig. 1.a

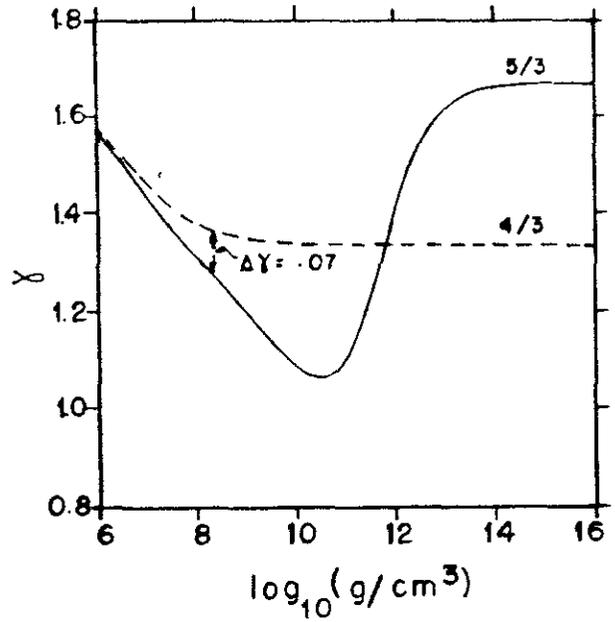


Fig. 1.b

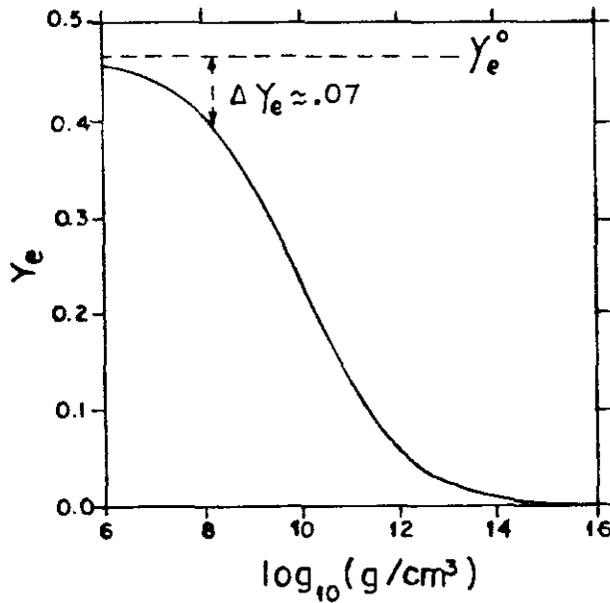


Fig. 1.c

FIGURA 4.7 - Ilustração do procedimento usado para iniciar a dinâmica: (a) Equação de estado (A); (b) Índice adiabático contra o logaritmo da densidade e (c) variação do número de elétrons por nucleon contra o logaritmo da densidade. As curvas tracejadas correspondem à configuração de equilíbrio ($\rho \approx 2 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$).

TABELA 4.2 - Característica da configuração inicial de alguns modelos. As massas totais estão em unidades de $1M_{\odot}$, as densidades iniciais das camadas em unidades de 10^7 e 10^6 g/cm³, respectivamente, e as densidades de energia interna, ϵ_1 e ϵ_2 , em unidades de 10^{25} e 10^{23} erg/cm³. Os raios das camadas, R_1 e R_2 , estão em unidades de 10^8 cm. Na última coluna está representada a energia gravitacional da camada 1, em foe.

MODELO	MASSA	α	ρ_1	ρ_2	R_1	R_2	γ_1	γ_2	ϵ_1	ϵ_2	E_G
500	1.18	.975	2.3	0.4	2.87	3.24	1.42	1.55	0.5	0.2	-.723
013	1.18	.934	2.9	1.2	2.62	3.13	1.41	1.52	0.7	0.8	-.728
016	1.18	.919	3.2	1.5	2.54	3.08	1.41	1.50	0.8	1.2	-.727
019	1.18	.904	3.4	1.9	2.45	3.03	1.40	1.49	0.9	1.6	-.724
040	1.18	.789	5.0	5.1	2.07	2.79	1.39	1.46	1.6	6.8	-.675
049	1.24	.954	4.1	1.2	2.39	2.80	1.40	1.51	1.2	0.9	-.920
052	1.24	.939	4.5	1.7	2.30	2.75	1.39	1.50	1.4	1.5	-.926
055	1.24	.924	5.0	2.2	2.22	2.69	1.39	1.49	1.6	2.2	-.931
057	1.24	.914	5.3	2.6	2.16	2.66	1.39	1.48	1.7	2.8	-.932
079	1.24	.804	8.9	8.8	1.73	2.35	1.37	1.43	3.7	15.	-.900
085	1.34	.974	9.0	0.1	1.89	2.16	1.37	1.48	4.2	2.0	-1.43
086	1.34	.069	9.6	0.2	1.85	2.14	1.37	1.49	4.1	2.0	-1.44
092	1.34	.939	13.5	0.5	1.64	1.98	1.36	1.45	6.7	7.3	-1.52
094	1.34	.020	15.	0.6	1.58	1.93	1.36	1.44	7.8	10.	-1.54
114	1.34	.829	37.	3.1	1.11	1.51	1.35	1.39	29.	100.	-1.74
122	1.40	.992	15.6	0.9	1.61	1.77	1.36	1.50	8.3	0.7	-1.88
127	1.40	.973	22.4	3.9	1.42	1.65	1.36	1.45	14.	5.8	-2.05
131	1.40	.958	29.4	7.5	1.29	1.54	1.35	1.43	20.5	14.8	-2.19
144	1.40	.909	74.	35.8	0.93	1.18	1.34	1.38	74.9	134.	-2.73
152	1.40	.879	142.	86.4	0.74	0.97	1.34	1.36	185.	461.	-3.20

CAPÍTULO V

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1 - EVOLUÇÃO DINÂMICA DO SISTEMA

Acionada a implosão do sistema, a solução das equações de movimento 4.2.1 e 4.2.1' nos fornece a evolução temporal do raio, velocidade e aceleração de cada camada. As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram a evolução temporal dos raios das duas camadas de duas configurações distintas. O choque de reflexão corresponde ao instante em que o caroço homólogo na fa-

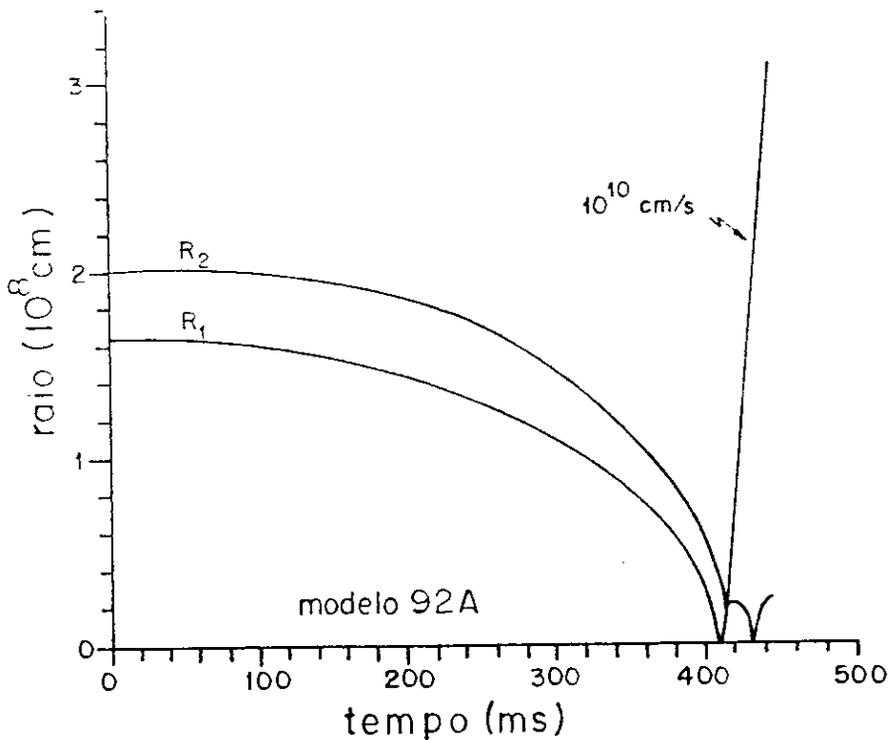


FIGURA 5.1 - Evolução temporal dos raios das camadas (R_1 e R_2) para o caroço de $1.34M_0$ e $\alpha = 0.940$, onde foi usada a equação de estado tipo-A.

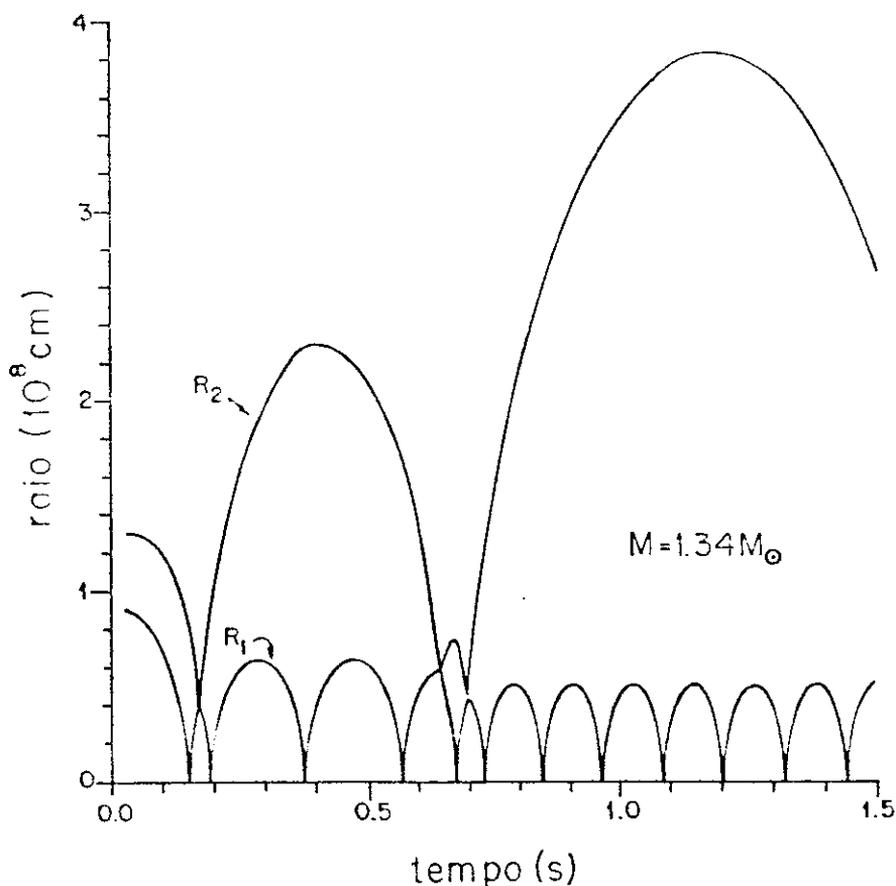


FIGURA 5.2 - Evolução temporal dos raios das camadas (R_1 e R_2) para o caroço de $1.34 M_{\odot}$ e $\alpha = 0.767$, onde também foi usada a equação de estado de tipo-A.

se de repentina expansão ("bounce") colide com a camada externa, invertendo seu movimento de quase queda livre num movimento de expansão. Se após o primeiro choque de reflexão a camada externa consegue se desacoplar da dinâmica do caroço homólogo, como na Figura 5.1, dizemos então que ocorreu um evento de sucesso, isto é, a camada externa foi eficientemente acelerada adquirindo energia cinética característica de uma explosão de Supernova. Por outro lado, o evento representado na Figura 5.2 é considerado um evento de não sucesso.

No primeiro caso, o choque de reflexão permite, num curtíssimo intervalo de tempo (da ordem de nanosegundos), que a camada externa seja suficientemente acelerada, levando-a a

desacoplar-se da dinâmica do caroço homólogo numa expansão quase livre com velocidade e energia total praticamente constantes. Porém, no segundo exemplo, observa-se que a dinâmica da camada externa permanece ainda fortemente acoplada às oscilações do caroço homólogo, sem que este tenha transferido energia suficiente durante o primeiro choque de reflexão, possibilitando uma reimplosão da camada externa.

A ocorrência de um evento de sucesso depende fortemente da massa total do caroço, da distribuição da massa total entre as duas camadas e, ainda, dos valores escolhidos para os parâmetros da equação de estado usada. Realizamos uma análise sistemática da dinâmica do sistema face a variação dessas grandezas, visando a uma estimativa da energia máxima disponível para a formação de onda de choque, em cada configuração, sem incluir os possíveis mecanismos de dissipação no período posterior ao choque de reflexão. Nesta análise fixamos a equação de estado na forma descrita no capítulo anterior, atribuindo os valores dos parâmetros da Tabela 4.1. A massa total do sistema é especificada e o cálculo da evolução dinâmica varre várias distribuições da massa total entre as duas camadas.

A evolução temporal da energia total de cada camada para o evento de sucesso é mostrado na Figura 5.3. Podemos observar que durante o choque de reflexão a energia total da camada externa (H_2) e a do caroço interno (H_1) sofrem uma súbita variação durante o choque de reflexão. Com efeito, vemos que uma parcela da energia total do caroço homólogo é efetivamente transferida para a camada externa. Em virtude da tremenda quantidade de energia cinética adquirida então pela camada ex

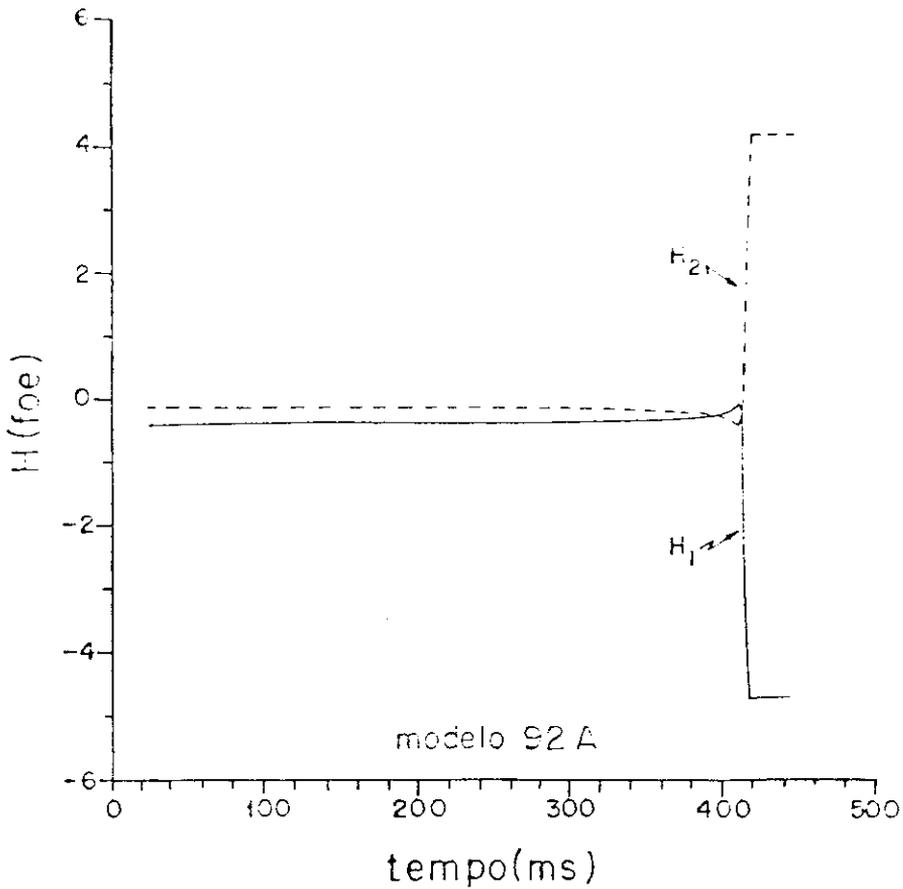


FIGURA 5.3 - Evolução temporal da energia total do caroço (H_1) e da camada externa (H_2) para o evento de sucesso apresentado na Fig. 5.1.

terna - às custas da energia do caroço homólogo -, sua energia total passa a ser positiva e suficientemente maior que nos instantes anteriores ao choque de reflexão. Em outros termos, a soma da sua energia interna e cinética, que jogam a favor de sua expansão, torna-se bem maior que sua energia gravitacional. Com isso, e em consequência da conservação da energia total, resta no centro do sistema um caroço ligado gravitacionalmente (energia total negativa) e estável, num regime pulsante cuja densidade de equilíbrio é característica de uma estrela de nêutron.

Por outro lado, para o evento de não sucesso da Figura 5.2 a energia da camada externa após o choque de reflexão

permanece negativa, como pode ser visto na Figura 5.4, não permitindo seu desacoplamento do caroço interno.

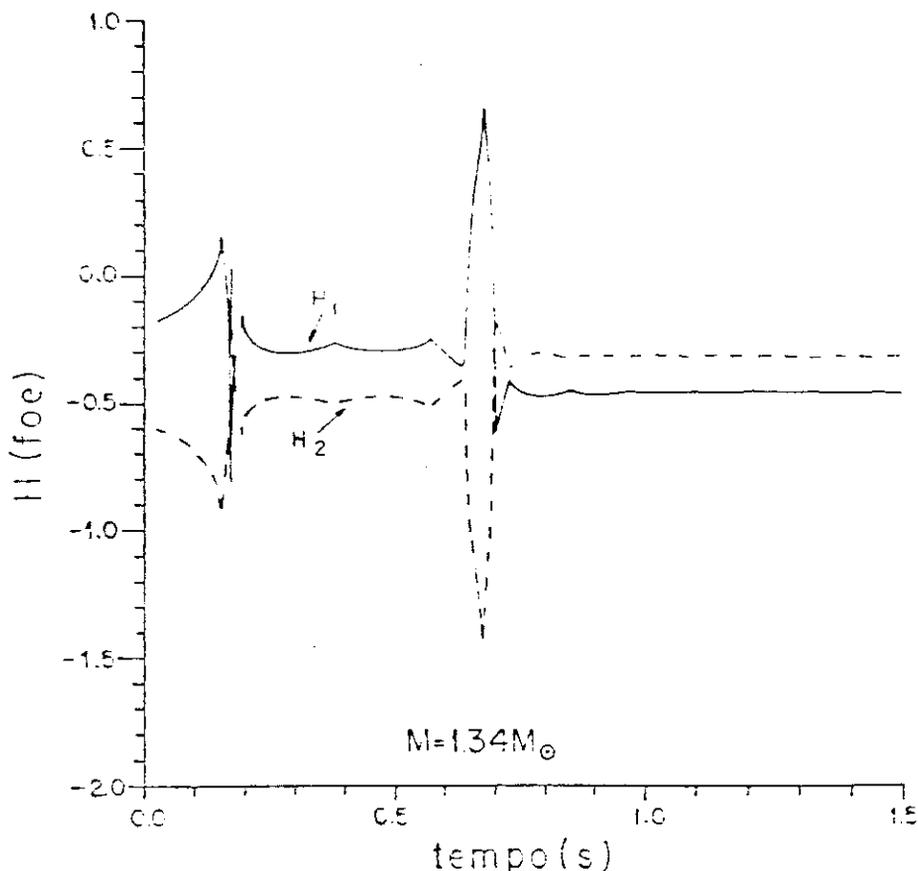


FIGURA 5.4 - Evolução temporal da energia total do caroço (H_1) e da camada externa (H_2) para o evento de não sucesso apresentado na Fig. 5.2.

A descrição do "bounce" de um caroço homólogo isolado, como fizemos no último parágrafo do Capítulo III, prende-se ao comportamento do índice adiabático da matéria estelar durante a inversão de seu movimento. Neste sentido seria interessante discutir brevemente o comportamento do índice adiabático do caroço homólogo e da camada externa ao longo da evolução dinâmica do nosso sistema.

Na Figura 5.5 está representada a variação do índice adiabático de cada camada ao longo do tempo, relativamente ao evento de sucesso já apresentado. Com efeito, podemos perce

ber que, durante o choque de reflexão, a camada externa passa rapidamente por uma fase de compressão seguida de uma fase de rarefação, onde o índice adiabático (γ_2) acompanha esta fase com uma variação tipo-delta na escala de tempo apresentada. O índice adiabático, γ_2 , varia então de ≈ 1.06 a ≈ 1.66 , isto é, cobrindo praticamente todo o intervalo de variação permitido pela equação de estado que usamos.

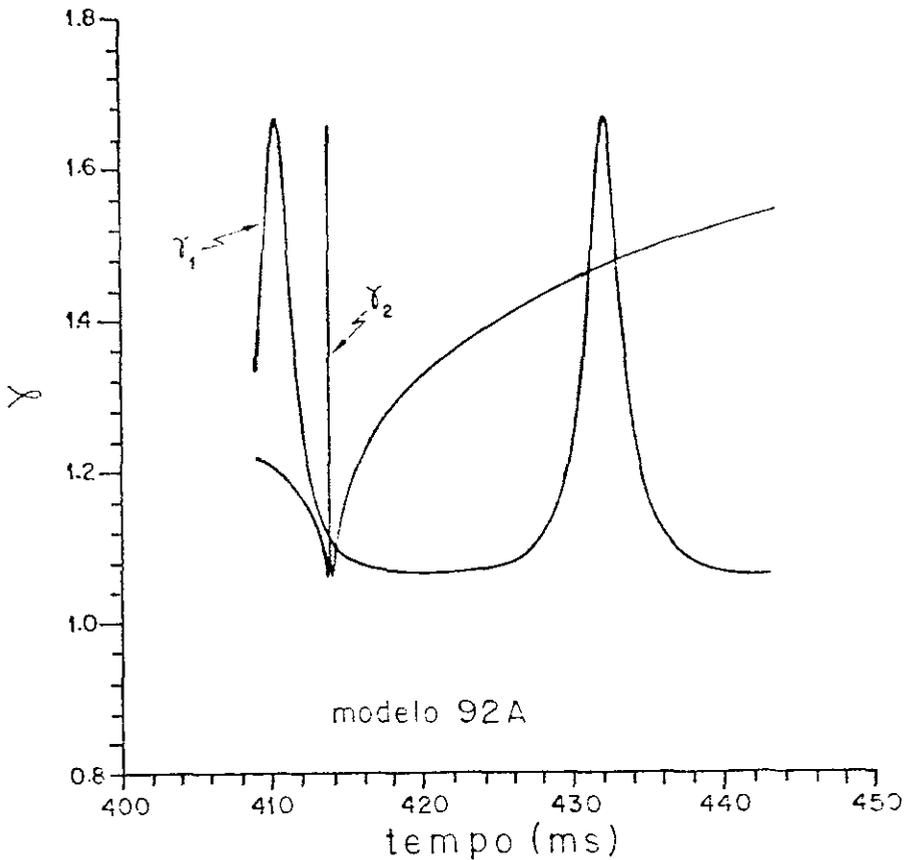


FIGURA 5.5 - Evolução temporal do índice adiabático de cada camada no evento de sucesso, mostrado na Figura 5.1.

Por outro lado, para o evento de não sucesso a variação do índice adiabático da camada externa durante o choque de reflexão não varre todo o intervalo permitido pela equação de estado. A Figura 5.6 mostra que o índice adiabático da camada externa (γ_2) durante a fase de compressão-rarefação varia

no intervalo de 1.06 a 1.37.

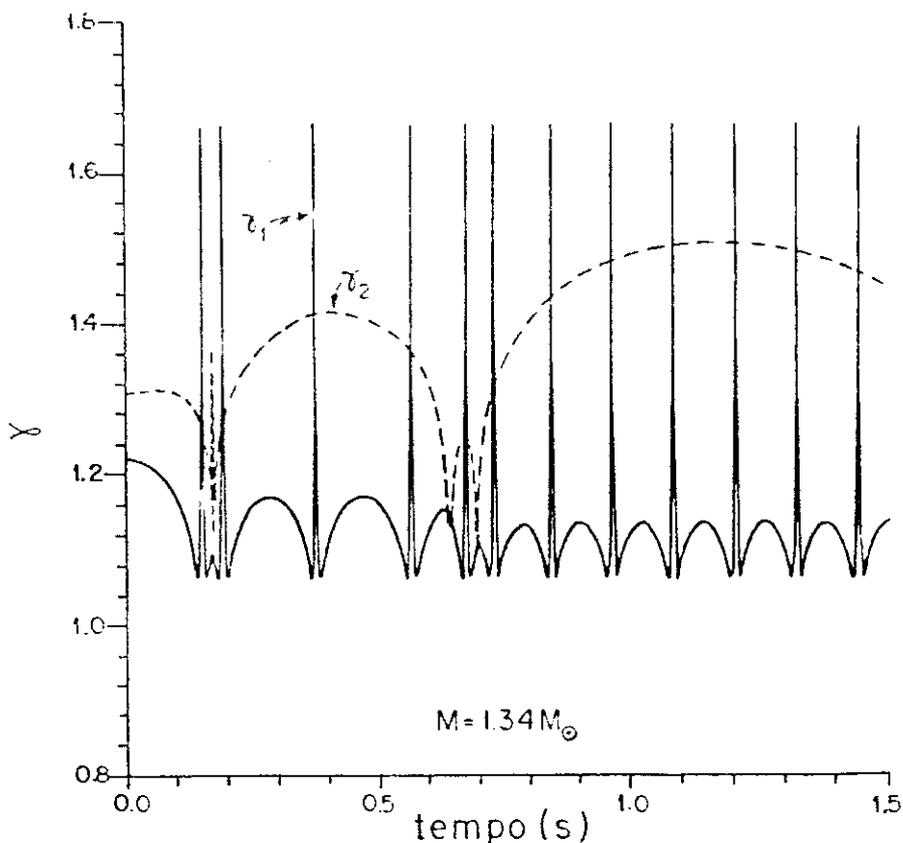


FIGURA 5.6 - Evolução temporal do índice adiabático de cada camada no evento de não sucesso, mostrado na Fig. 5.2.

5.2 - ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA

O objetivo principal deste trabalho consiste na avaliação da energia transferida do caroço homólogo para a camada externa através do mecanismo de "bounce".

Definimos a energia transferida como:

$$E_{tf} = - [H_1^f - H_1^{(0)}] \quad ,$$

onde $H_1^{(0)}$ é a energia total do caroço homólogo no instante em que foi desencadeado o colapso e H_1^f sua energia após o desaco

plamento da camada externa.

Considerando-se agora a distribuição da massa total do caroço entre as duas camadas, ditada pelo parâmetro α , observamos que para situações limites em que $\alpha \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow 1$, a dinâmica do sistema reduz-se simplesmente a oscilação de um caroço homogêneo com energia total constante, ou seja, ΔE_{tf} tende a zero. Sendo assim, deve existir uma distribuição de massa mais favorável para um máximo de transferência de energia, dada por um valor do parâmetro α no intervalo $[0,1]$; portanto, um máximo para energia transferida como função de α . Isto pode ser verificado na Figura 5.7, onde mostramos o comportamento da energia transferida para os seguintes valores da mas-

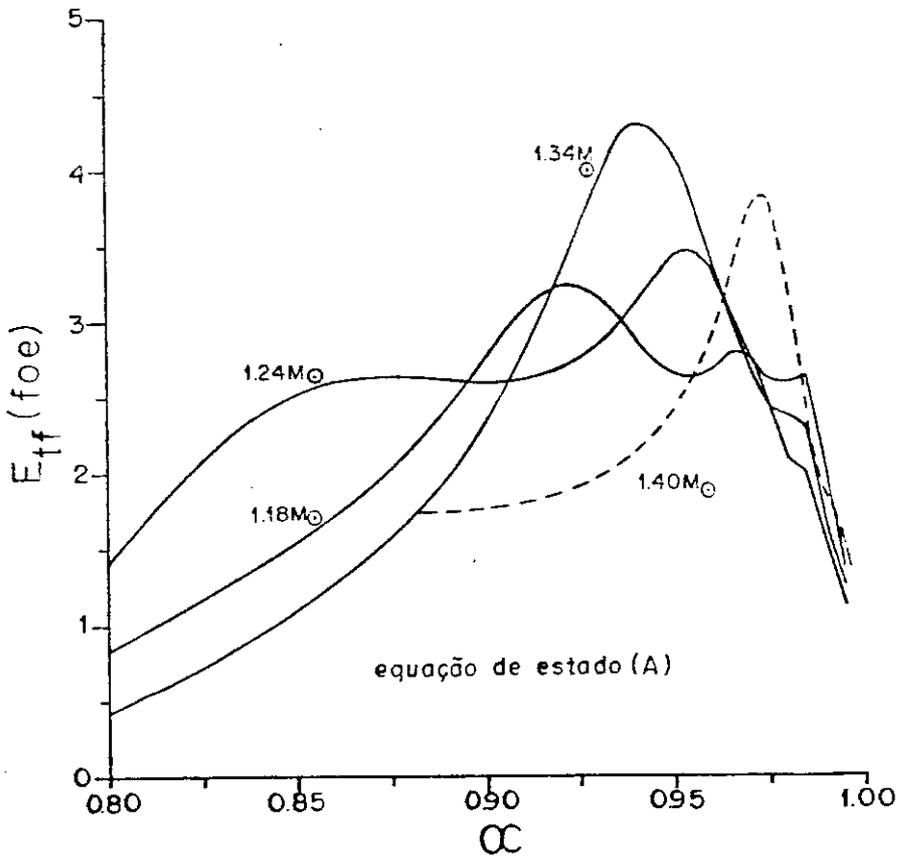


FIGURA 5.7 - Variação da energia transferida com a distribuição de massa, especificada por α , para os caroços de 1.18, 1.24, 1.34 e 1.40 M_{\odot} . A equação de estado é fixada como tipo-A na Tabela 4.1.

sa total do sistema: 1.18, 1.24, 1.34 e 1.40 M_{\odot} . Observamos ainda que, para cada uma delas, o máximo de energia transferida ocorre para valores de α relativamente grandes, isto é, $\alpha = 0.92, 0.95, 0.94$ e 0.97 , respectivamente. Em outras palavras, a transferência de energia é mais eficaz para as configurações em que a camada externa é relativamente pouco massiva. Vale salientar que os cálculos hidrodinâmicos com a inclusão de mecanismos de formação de onda de choque apontam justamente a borda do caroço homólogo como o lugar onde a onda de choque é formada.

Para avaliar o quanto estes resultados são sensíveis a mudanças nos parâmetros da equação de estado utilizada, repetimos o mesmo cálculo para o conjunto de parâmetros que fixam as equações de estado tipo-B e C da Tabela 4.1. Os resultados estão representados nas Figuras 5.8 e 5.9. O comportamento da

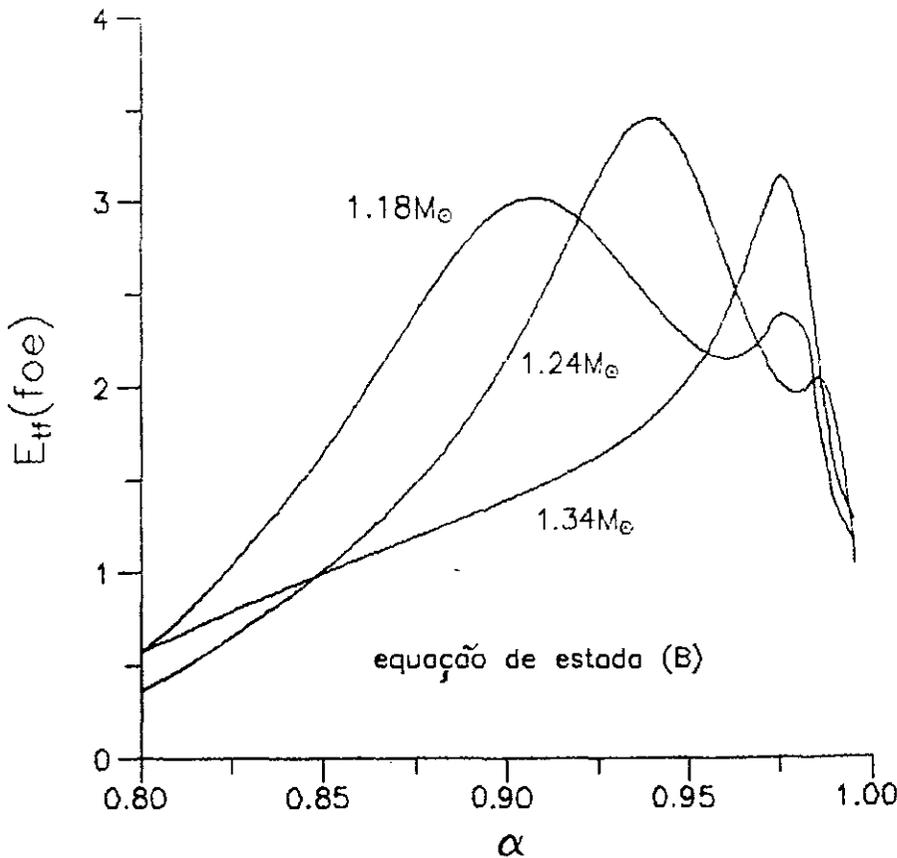


FIGURA 5.8 - Variação da energia transferida com a distribuição de massa, especificada por α , para os caroços de 1.18, 1.24 e 1.34 M_{\odot} . A equação de estado é fixada como tipo-B na Tabela 4.1.

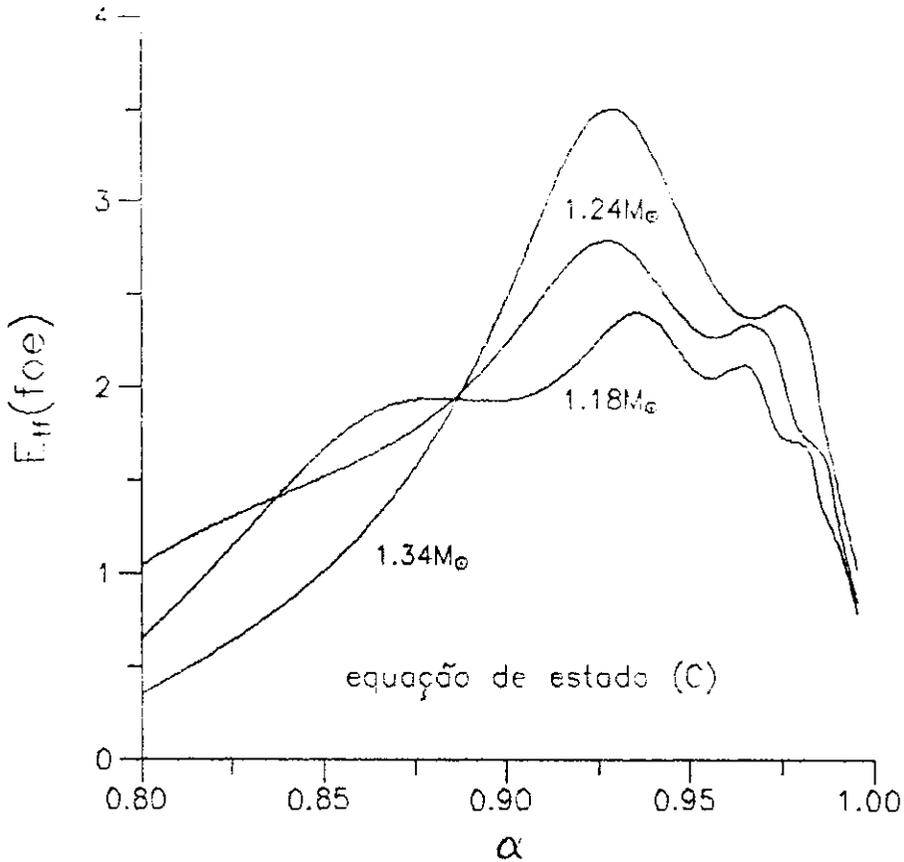


FIGURA 5.9 - Variação da energia transferida com a distribuição de massa, especificada por α , para os caroços de 1.18, 1.24 e 1.34 M_{\odot} . A equação de estado é fixada com tipo-C na Tabela 4.1.

curva de energia transferida é análogo ao mostrado na Figura 5.7, podendo-se destacar claramente um deslocamento dos máximos da energia transferida. Para o caroço com massa total de $1.34 M_{\odot}$ e $\alpha = 0.940$, por exemplo, corresponde 4.32, 1.84 e 3.22 foe de energia transferida, respectivamente, para as equações de estado de tipo A, B e C.

Estes resultados comprovam que a equação de estado desempenha realmente um papel importantíssimo no processo de transferência de energia. Por outro lado, verificou-se também que tais mudanças nos parâmetros da equação de estado acarretam uma variação da ordem de apenas 0.3% na incompressi

bilidade (*) do gás, quando calculada para o valor da densidade da matéria nuclear em equilíbrio (ρ_0). Nos três casos, e incompressibilidade ficou em torno de 328 MeV. Portanto, não é a variação da incompressibilidade oferecida pela equação de estado a responsável pelas mudanças apresentadas nas Figs. 5.7, 5.8 e 5.9, quando mudamos os parâmetros da equação de estado. É interessante que este último resultado seja mencionado na medida em que alguns autores (16-18) atribuem um caráter decisivo à incompressibilidade da matéria nuclear para que o "bounce" hidrodinâmico seja um mecanismo eficiente de explosão.

5.3 - CONCLUSÕES

Partindo de uma configuração de pré-Supernova simples, apresentamos um modelo de descrição lagrangeana do mecanismo de "bounce" que permite acompanhar explicitamente a evolução energética do sistema. Este trabalho mostrou que efeitos puramente mecânicos são energeticamente capazes de gerar uma forte onda de choque com energias características de explosão de Supernovas, e estabelece um método simples para o cálculo da energia máxima disponível para a formação da onda de choque.

A aproximação adiabática que usamos no cálculo da evolução dinâmica do sistema se justifica, uma vez que assumimos a hipótese do confinamento dos neutrinos. Esta aproximação é razoável para o período de colapso, "bounce" e choque de reflexão, quando a densidade do sistema é suficientemente elevada.

(*) A incompressibilidade da matéria nuclear é definida como $K = 9 \frac{dp}{d\rho} \Big|_{\rho_0}$ (MeV), onde ρ_0 simboliza a densidade da matéria nuclear em equilíbrio.

Entretanto, para o período posterior ao choque de reflexão — quando se faz necessário analisar a propagação da onda de choque —, esta aproximação deixa de ser válida e nossa abordagem fica prejudicada. Aí, tornam-se fundamentais os processos dissipativos que acompanham a onda de choque, como o transporte e termalização dos neutrinos, agora abundantemente emitidos, a dissociação de núcleos, o aquecimento da matéria devido a forças de viscosidade, a variação da temperatura e da entropia do sistema, etc. Portanto, a solução das equações de movimento deixam de ser realísticas nos instantes seguintes ao choque de reflexão.

Como prosseguimento a este trabalho, seria interessante estender o modelo para um sistema com muitas camadas que permita simular a propagação de ondas de choque, usando uma equação de estado mais realística para o regime nuclear e supranuclear, além de introduzir um tratamento adequado para os processos dissipativos.

APÊNDICE A

EXTENSÃO DA FORMULAÇÃO LAGRANGEANA PARA n CAMADAS HOMOGÊNEAS

O sistema é dividido em n camadas esféricas homogêneas. A i-ésima camada é então caracterizada pelas coordenadas radiais r_i e R_i , que limitam as superfícies interna e externa da camada, e pela densidade, ρ_i . Obviamente, $r_1 = 0$. Sendo assim, devemos ter

$$r_i = R_{i-1} \quad , \quad i = 2, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

e

$$\frac{4\pi}{3} \rho_i (R_i^3 - r_i^3) = M_i \quad (\text{A.2})$$

onde M_i é a massa da i-ésima camada. A equação (A.1) expressa a condição de que duas camadas adjacentes estejam sempre em contato, e a equação (A.2) representa a conservação de massa.

$$\begin{aligned} L &= L(\{r_i\}, \{R_i\}, \{\dot{r}_i\}, \{\dot{R}_i\}) \\ &= K - V_G - E \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde K representa a energia cinética associada com o movimento, V_G a energia gravitacional total e E a energia interna. K e E são dadas pela soma da contribuição de todas as camadas:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$E = \sum_{i=1}^n E_i \quad . \quad (\text{A.5})$$

A energia cinética de cada camada tem a forma

$$K_i = \frac{1}{2} \int_V \rho_i v_i^2 dv \quad , \quad (\text{A.6})$$

onde $v_i(r)$ é o campo de velocidade no interior da i -ésima camada. Para determiná-lo, usamos a equação de continuidade supondo-o irrotacional e esfericamente simétrico, como fizemos na seção 4.1. Após um cálculo fácil, mas trabalhoso, podemos obter a seguinte expressão para a energia cinética da camada:

$$K_i = \frac{3}{10} \langle \dot{R}_i | T_i | \dot{R}_i \rangle \quad , \quad (\text{A.7})$$

onde introduzimos a notação matricial

$$|\dot{R}_i\rangle \equiv \begin{bmatrix} \dot{r}_i \\ \dot{R}_i \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A.8})$$

e

$$T_i \equiv \begin{bmatrix} T_{11}^i & T_{12}^i \\ T_{21}^i & T_{22}^i \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{A.9})$$

Os elementos T_{ij} são dados por

$$T_{11}^i = T_{11}^i(\xi) = \frac{5\xi^3 + 6\xi^2 + 3\xi + 1}{(1 + \xi + \xi^2)^3} M_i \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$T_{12}^i = T_{21}^i(\xi) = \frac{3}{2} \frac{\xi^2(1 + 3\xi + \xi^2)}{(1 + \xi + \xi^2)^3} M_i \quad , \quad (\text{A.11})$$

$$T_{22}^i = T_{22}^i(\xi) = \frac{\xi^3 (\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 5)}{(1 + \xi + \xi^2)^3} M_i \quad . \quad (A.12)$$

onde definimos a coordenada $\xi = \xi_i \equiv R_i/r_i$.

O cálculo da energia potencial gravitacional para a i -ésima camada deve incluir sua auto energia gravitacional e a energia de interação gravitacional entre ela e as demais camadas.

A parcela de auto energia gravitacional pode ser determinada da seguinte forma:

$$V_i = V_{R_i} - V_{r_i} - V_{(R_i, r_i)} \quad , \quad (A.13)$$

onde V_{R_i} denota a energia gravitacional de uma esfera homogênea de raio R_i e densidade média ρ_i , e V_{r_i} a energia gravitacional de uma esfera homogênea de raio r_i e de mesma densidade média, concêntrica à primeira, que podem ser obtidas a partir da expressão integral geral

$$V_R = - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi G} \int_0^\infty \vec{g}^2 dV \quad ,$$

onde

$$\vec{g}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \rho G \vec{r} & , \text{ se } r < R \quad , \\ \frac{4\pi}{3} \rho G \left(\frac{R}{r}\right)^3 \vec{r} & , \text{ se } r > R \quad . \end{cases} \quad (A.14)$$

Desse modo, temos

$$V_R = - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi G} \left(\int_0^R g_{r < R}^2 dV + \int_R^\infty g_{r > R}^2 dV \right) \quad , \quad (A.15)$$

que nos permite obter

$$V_R = - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \quad . \quad (A.16)$$

Com a equação (A.16), podemos escrever as seguintes expressões para V_{R_i} e V_{r_i} :

$$V_{R_i} = - \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 G R_i^5 \rho_i^2 \quad ,$$

$$V_{r_i} = - \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{5}\right)^2 G r_i^5 \rho_i^2 \quad . \quad (A.17)$$

O termo $V_{(R_i, r_i)}$, que aparece na equação (A.13), representa a energia de interação gravitacional entre a camada , de densidade ρ_i , e a outra esfera de raio r_i introduzida artificialmente para o cálculo, devendo ser subtraída na expressão da auto energia gravitacional da camada. Podemos determiná-la partindo da expressão diferencial

$$dV_{(R_i, r_i)} = - \left(\frac{4\pi}{3}\right) G \rho_i r_i^3 \frac{dm_i}{r} \quad , \quad (A.18)$$

onde dm_i é um elemento infinitesimal de massa da i -ésima camada. Integrando a eq. (A.18), obtemos

$$V_{(R_i, r_i)} = - \frac{1}{3} G (4\pi \rho_i)^2 r_i^3 \frac{(R_i^2 - r_i^2)}{2} \quad . \quad (A.19)$$

Com os resultados parciais (A.17) e (A.19), a eq. (A.13) pode ser escrita como

$$V_i = - \frac{3}{5} G \frac{M_i^2}{r_i} f(\xi) \quad , \quad (A.20)$$

onde definimos

$$f(\xi) = \frac{1}{2} (2\xi^3 + 4\xi^2 + 6\xi + 3) / (1 + \xi + \xi^2) \quad . \quad (\text{A.21})$$

Para o termo de interação gravitacional entre a i -ésima camada e as outras camadas, é imediato verificar que sua expressão é dada por

$$V_i^{\text{int.}} = - \frac{3}{5} G m_i \frac{M_i}{r_i} g(\xi) \quad , \quad (\text{A.22})$$

onde,

$$g(\xi) \equiv (1 + \xi) / (1 + \xi + \xi^2)^2 \quad , \quad (\text{A.23})$$

e

$$m_1 = 0 \quad ,$$

$$m_i = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \quad , \quad i \geq 2 \quad . \quad (\text{A.24})$$

Com os resultados precedentes, temos a expressão final para a energia potencial gravitacional somada em todas as camadas, dada por

$$V_G = - G \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{5} M_i f(\xi) + \frac{3}{2} m_i g(\xi) \right) M_i / r_i \quad . \quad (\text{A.25})$$

Por último, a energia interna do sistema vem dada por

$$E = \sum_{i=1}^n M_i \varepsilon_i / \rho_i \quad , \quad (\text{A.26})$$

onde ε_i é a densidade de energia interna por unidade de volume.

Com a lagrangeana assim construída, deduzimos as equa-

ções de Euler-Lagrange, com as quais escrevemos n equações de movimento acopladas, do tipo

$$\begin{aligned}
 T_{12}^{(i)} \ddot{R}_{i-1} + (T_{11}^{(i)} + T_{22}^{(i+1)}) \ddot{R}_i + T_{12}^{(i-1)} \ddot{R}_{i+1} = \\
 = Q_{21}^{(i)} \dot{R}_{i-1} + (Q_{11}^{(i)} + Q_{22}^{(i+1)}) \dot{R}_i + Q_{12}^{(i+1)} \dot{R}_{i+1} + \\
 + \frac{20\pi}{3} (P_i - P_{i+1}) R_i^2 - G/R_i^2 \left[M_i^2 f_2^{(i)} + M_{i+1}^2 f_1^{(i+1)} + \right. \\
 \left. + \frac{5}{2} (M_i m_i g_2^{(i)} + M_{i+1} m_{i+1} g_1^{(i+1)}) \right] , \quad 1 \leq i \leq n ,
 \end{aligned}
 \tag{A.27}$$

onde,

$$f_1^{(i)} = \frac{3}{2} \frac{(\xi^2 + 3\xi + 1)}{(1 + \xi + \xi^2)^3} , \quad g_1^{(i)} = \frac{2\xi + 1}{(1 + \xi + \xi^2)^2}$$

$$f_2^{(i)} = \frac{\xi(\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi + 5)}{(1 + \xi + \xi^2)^3} , \quad g_2^{(i)} = \frac{\xi(\xi + 2)}{(1 + \xi + \xi^2)^2} ,$$

$$Q_{11}^{(i)} = \frac{1}{2(1 + \xi + \xi^2)^4} \left[(\xi \dot{R}_i - 2\dot{R}_{i+1}) 3\xi(5\xi^2 + 8\xi + 2) + 3\xi^2 \dot{R}_{i+1} (\xi^4 + 4\xi^2 - 4\xi - 1) \right] ,$$

$$Q_{12}^{(i)} = \frac{1}{2(1 + \xi + \xi^2)^4} \left[(\xi \dot{R}_i - 2\dot{R}_{i+1}) 3\xi(\xi^4 + 4\xi^2 - 4\xi - 1) + 3\xi^3 \dot{R}_{i+1} (2\xi^2 + 8\xi + 5) \right] ,$$

$$Q_{21}^{(i)} = - \frac{1}{2(1 + \xi + \xi^2)^4} \left[2\xi^2 \dot{R}_i (5\xi^2 + 8\xi + 2) + (2\xi \dot{R}_i - \dot{R}_{i+1}) 3\xi(\xi^4 + 4\xi^2 - 4\xi - 1) \right] ,$$

$$Q_{22}^{(i)} = - \frac{1}{2(1 + \xi + \xi^2)^4} \left[3\xi \dot{R}_i (\xi^4 + 4\xi^2 - 4\xi - 1) - (2\xi \dot{R}_i - \dot{R}_{i+1}) 3\xi^2 (2\xi^2 + 8\xi + 5) \right] ,$$

e P_i é a pressão da i -ésima camada. Além disso, na eq. (A.27)

adotamos a convenção

$$R_0 = R_{n+1} = 0 \quad ,$$

e (A.28)

$$P_{n+1} = 0 \quad .$$

Cabe frisar ainda, que no limite hidrodinâmico ($n \rightarrow \infty$, $\xi_i \rightarrow 1$, $R_i \rightarrow R_{i+1}$), a eq. (A.27) torna-se

$$\frac{5}{3} \Delta M \ddot{R} = - \frac{20\pi}{3} \Delta P R^2 - G \frac{\Delta M}{R^2} \left[\frac{5}{6} \Delta M + \frac{5}{3} m(R) \right] \quad , \quad (A.29)$$

a qual, tomando-se o limite $\Delta M \rightarrow 0$, recupera a forma usual

$$\dot{v} = - 4\pi R^2 \frac{dP}{dM} - \frac{G}{R^2} \int_0^{m(R)} dM \quad . \quad (A.30)$$

APÊNDICE B

CRITÉRIO DE DEGENERESCÊNCIA E RELATIVIDADE

A energia de Fermi do elétron é dada por

$$\epsilon_F = (p_F^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} - m_0 c^2 \quad , \quad (\text{B.1})$$

onde m_0 , p_F e c representam a massa de repouso do elétron, o momento de Fermi do elétron e a velocidade da luz, respectivamente.

Fazendo $p_F = x m_0 c$ e substituindo em (B.1), temos

$$\epsilon_F = m_0 c^2 \left[(x^2 + 1)^{1/2} - 1 \right] \quad , \quad (\text{B.2})$$

onde x é o parâmetro relatividade.

Usando a eq. (2.1.28) e fazendo $n = Y_e m_a \rho$, é fácil verificar que

$$x = \left(Y_e \rho / 10^6 \right)^{1/3} \quad , \quad (\text{B.3})$$

de modo que

$$\epsilon_F = m_0 c^2 \left\{ \left[(Y_e \rho / 10^6)^{2/3} + 1 \right]^{1/2} - 1 \right\} . \quad (\text{B.4})$$

O limite não relativístico corresponde a

$$Y_e \rho / 10^6 \ll 1 \quad .$$

Expandindo-se o termo entre colchetes da eq. (B.4) em série de potências e dividindo-se por kT , temos

$$\epsilon_F / kT \approx \frac{1}{2} \frac{m_0 c^2}{kT} (Y_e \rho / 10^6)^{2/3} \quad , \quad (B.5)$$

onde ϵ_F / kT é o parâmetro degenerescência.

Se $\epsilon_F / kT \gg 1$, o gás é fortemente degenerado, o que equivale a

$$\rho \gg \left(Y_e^{-1} T / 2.97 \times 10^5 \right)^{3/2} \quad . \quad (B.6)$$

Para o limite relativístico $\rho \gg 10^6 Y_e^{-1}$. Neste caso,

$$\epsilon_F / kT \approx \frac{m_0 c^2}{kT} (Y_e \rho / 10^6)^{2/3} \quad , \quad (B.7)$$

e a condição de degenerescência é dada por

$$\rho \gg \left(Y_e^{-1} T / 5.93 \times 10^7 \right)^3 \quad . \quad (B.8)$$

REFERÊNCIAS

- (1) - Cooperstein, J., Phys. Rev., 163, 1-3(1988), 95.
- (2) - Colgate, S.A. e White, R.H., Astrophys. J., 143 (1966), 626.
- (3) - Arnett, W.D., Canadian J. Phys., 44 (1966), 2553; Arnett, W.D., Canadian J. Phys., 45 (1967), 1621.
- (4) - Sato, K., Progr. Theoret. Phys., 54 (1975), 1325.
- (5) - Mazurek, T.J., Astrophys. J., 207 (1976), L87.
- (6) - Van Riper, K.A., Astrophys. J., 221 (1978), 304.
- (7) - Müller, E., Rózyńska, M. E Hillebrandt, W., Astron. Astrophys., 81 (1980), 288.
- (8) - Hillebrandt, W. e Müller, E., Astron. Astrophys., 103 (1981), 147.
- (9) - El Eid, M.F. e Hillebrandt W., Astron. Astrophys. Suppl., 42 (1980), 215.
- (10) - Weaver, T.A., Zimmermann, B. e Woosley, S.E., Astrophys. J., 225 (1978), 1021.
- (11) - Bethe, H.A. e Wilson, J.R., Astrophys. J., 295(1985), 14.
- (12) - Wilson, J.R. e Mayle, R.W., Phys. Rep., 163 (1988), 63.
- (13) - Cooperstein, J., Bethe, H.A. e Brown, G.E., Nucl. Phys., A, 429 (1984), 527.
- (14) - Baron E., Cooperstein, J. e Kahana, S., Nucl. Phys., A, 440 (1985), 744.
- (15) - Woosley, S.E. e Weaver, T.A., Bull. Am. Astron. Soc., 16 (1984), 971.
- (16) - Burrows, A. e Lattimer, J.M., Astrophys. J., 299 (1985), L19.

- (17) - Brown, G.E., Phys. Rep., 163 (1988), 167.
- (18) - Bludman, S.A., Phys. Rev., 163 (1988), 47.
- (19) - Richtmyer, R.D. , "Difference Methods for Initial-Value Problems", Interscience Publishers, Inc., New York(1957).
- (20) - Da extensa literatura em Astrofísica, citamos: Clayton, D.D., "Principles of Stellar Evolutions", MacGraw-Hill (1968); Chiu, H.Y., "Stellar Physics", vol. I, Blaisdel Publishing Company (1968); Zeldovich, Y.B. e Novikov , I.D., "Relativistic Astrophysics", vol. I, the University of Chicago Press (1971).
- (21) - Burbidge, E.M., Burbidge, G.R., Fowler, W.A. e Hoyle, F., Rev. Mod. Phys., 29 (1957), 547.
- (22) - Weizsaker, C.F., Phys. Z., 39 (1938), 633.
- (23) - Bethe, H.A., Phys. Rev., 55 (1939), 434.
- (24) - Reeves, H., "Evolution Stellaire et Nucléosynthese", Gordon and Breach (1968).
- (25) - Nomoto, K. e Hashimoto, M., Prog. Nucl. Phys., 17 (1986), 267.
- (26) - Chandrasekhar, S., "An Introduction to the Study of Stellar Structure", Dover Publications (1957).
- (27) - Nomoto, K. e Hashimoto, M., Phys. Rev. 163(1988), 13.
- (28) - Woosley, S.E. e Weaver, T.A., Ann. Astron. Astrophys., 24 (1986), 205.
- (29) - Trimble, V., Rev. Mod. Phys., 54 (1982), 1183.
- (30) - Trimble, V., Rev. Mod. Phys., 55 (1983), 511.
- (31) - Chiu, H.Y., "Stellar Physics", Vol. I, Blaisdel Publishing Company (1968), Capítulo III.
- (32) - Hoyle, F., Monthly Nottices Roy. Astron. Soc., 106(1946), 343.

- (33) - Bahcall, J.N., *Astrophys. J.*, 139 (1964), 318.
- (34) - Gamow, G. e Schoenberg, M., *Phys. Rev.*, 59 (1941), 539.
- (35) - Wilson, J.R., *Ap. J.*, 163 (1971), 209.
- (36) - Schramm, D.N. e Arnett, W.D., *Ap. J.*, 198 (1975), 628.
- (37) - Sato, K., *Prog. Theor. Phys.*, 54 (1975), 1325.
- (38) - Epstein, R.I. e Pethick, C.J., *Astrophys. J.*, 243 (1981), 1003.
- (39) - Bruenn, S.W., Arnett, W.D. e Schramm, D.N., *Astrophys. J.*, 213 (1977), 213.
- (40) - Colgate, S.A. e Johnson, M.J., *Phys. Rev. Lett.*, 5(1960), 235.
- (41) - Bruenn, S.W., *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 262 (1975), 80.
- (42) - Zeldovich, Y.B. e Raizer, Y.P., "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena", Academic Press, Inc. (1970).
- (43) - Burden, L.R., Faires, J.D., Reynolds, A.C., "Numerical Analysis", Prindle, Weber & Schmidt, editors, Boston-Massachusetts, pg. 209.
- (44) - Brown, G.E., *Phys. Rep.*, 163 (1988), 3.

"FORMAÇÃO LAGRANGEANA PARA O MECANISMO DE "BOUNCE"
EM EXPLOSÃO DE SUPERNOVA"

HILÁRIO ANTÔNIO RODRIGUES GONÇALVES

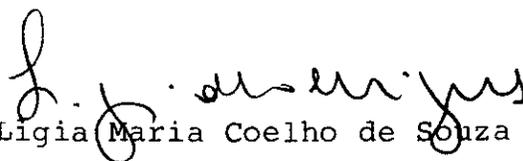
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Sérgio José Barbosa Duarte - Presidente



José Antonio de Freitas Pacheco



Lúcia Maria Coelho de Souza Rodrigues

Rio de Janeiro, 01 de novembro de 1989