

JOSÉ CLÁUDIO DA ROSA FAULHABER

MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA E  
ESPECTRO DE ENERGIA EM COLISÕES PRÓTON-NÚCLEO  
A ALTAS ENERGIAS (300 GeV)

TRABALHO APRESENTADO PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE AO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 1989

*A meus pais, pois sem eles este trabalho jamais teria sido feito.*

*À Shirley e à Andrea, pois sem elas este trabalho teria sido feito muito antes, mas a vida perderia muito da sua graça.*

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao Chung, pelo incentivo, paciência e estímulo constantes no decorrer deste trabalho e por ter me ensinado grande parte do que hoje sei no campo da física nuclear.

A todos os amigos do CBPF e do LNCC, que fizeram deste trabalho uma tarefa menos árdua do que seria de se esperar.

A todo pessoal de apoio, tanto do CBPF como do LNCC, cujo trabalho não aparece, mas está sempre presente.

## RESUMO

Estudamos os espectros de massa, isotópico e de energia de fragmentos provenientes de uma colisão próton-núcleo altamente energética utilizando o modelo de percolação tetraédrica. O objetivo consiste em verificar se o modelo acima reproduz os dados experimentais existentes e extrair, a partir dos desvios observados entre as previsões do modelo e os resultados experimentais, conclusões que possam ajudar a desvendar os aspectos físicos essenciais da multifragmentação.

Foi determinado que o único dado experimental que possui maiores informações físicas é a parte mais energética do espectro de energia. Este fato é importante, pois muitos modelos existentes são baseados em hipóteses apropriadas à reprodução dos espectros de massa e isotópico. Esta análise constitui-se na contribuição original do trabalho.

## SUMMARY

We study the mass, isotopic and energy spectrum of fragments arising from a high-energy proton-nucleus collision using the tetrahedral percolation model. The purpose is to verify whether the model above can reproduce the existing experimental data and to draw, from the deviations observed between the predictions of the model and the experimental results, conclusions which can help us to clarify the essential physical features of multifragmentation.

We have determined that the only experimental result that possesses relevant physical information is the high-energy part of the energy spectrum. This is an important point, since many existing models are based on hypothesis suitable to reproduce the mass and isotopic spectrum. This analysis constitutes the original contribution of this work.

**ÍNDICE**

AGRADECIMENTOS..... ii

RESUMO..... iii

SUMMARY..... iii

ÍNDICE DE FIGURAS..... vi

**I- INTRODUÇÃO**

I.1- *Reações de Íons-Pesados*..... 1

I.2- *Fissão, Espalação e Multifragmentação*..... 2

I.3- *Multifragmentação*..... 4

**II- OS DADOS EXPERIMENTAIS**

II.1- *Introdução*..... 8

II.2- *Espectros de Massa*..... 10

II.3- *Espectros Isotópicos*..... 14

II.4- *Espectros de Energia*..... 16

**III- MODELOS PARA A MULTIFRAGMENTAÇÃO NUCLEAR**

III.1- *Introdução*..... 23

III.2- *O Modelo de Transição de Fase Líquido-Gás*..... 25

III.3- *O Modelo Estatístico de Multifragmentação Nuclear*.. 31

III.4- *O Modelo de Fragmentação Fria*..... 37

III.5- *O Modelo de Evaporação Seqüencial*..... 39

III.6- *Os Modelos Percolativos*..... 40

## IV- O MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA

IV.1- <i>A Teoria da Percolação</i> .....	42
IV.1.1- <i>Definição e Exemplos</i> .....	42
IV.1.2- <i>Tipos de Percolação</i> .....	44
IV.1.3- <i>Transições de Fase em Percolação</i> .....	45
IV.2- <i>O Modelo de Percolação Tetraédrica</i> .....	48
IV.3- <i>O Espectro Isotópico</i> .....	51
IV.4- <i>O Espectro de Energia</i> .....	59

## V- DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

V.1- <i>Resumo e Discussão dos Resultados</i> .....	82
V.2- <i>Conclusões</i> .....	87

## A1- A TEORIA DA CONDENSAÇÃO DE FISHER

### A2- O MÉTODO DE MONTE-CARLO

A2.1- <i>Origem e Definição</i> .....	93
A2.2- <i>Simulação de uma Variável Aleatória Discreta</i> .....	94
A2.3- <i>Simulação de uma Variável Aleatória Contínua</i> .....	95

REFERÊNCIAS.....	97
------------------	----

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Descrição	Página
1.1.....	Classificação dos processos de formação de..... . fragmentos pesados segundo Hüfner.	03
2.1.....	Rendimento em massa de reações de carbono..... e próton com núcleos de prata.	10
2.2.....	Influência da energia do próton incidente..... no rendimento em massa.	11
2.3.....	Rendimento em massa de uma reação próton..... Xenônio a altas energias.	12
2.4.....	Seções de choque de produção de vários..... fragmentos em uma colisão de próton com núcleos de Ouro.	13
2.5.....	Seções de choque de produção de isótopos..... de sódio para várias reações.	15
2.6.....	Espectro isotópico da reação próton mais..... Kriptônio para três elementos diferentes.	15
2.7.....	Espectros de energia de vários fragmentos..... provenientes de reações de um próton com núcleos de prata e urânio	17
2.8.....	Espectro de energia do oxigênio para vá-..... rias energias e ângulos de laboratório.	18
2.9.....	Espectro de energia do carbono advindo de..... reações próton + Kriptônio.	19
3.1.....	Diagrama de fases da matéria nuclear..... infinita.	26
3.2.....	Diagrama densidade contra temperatura..... para matéria nuclear infinita demonstan- do as curvas espinodais.	29
3.3.....	Diagrama densidade contra temperatura..... para uma gotícula clássica.	29
3.4.....	Visão esquemática da multifragmentação..... segundo o modelo estatístico.	32
3.5.....	Resultados do modelo estatístico.....	35

3.6.....	Cenário intuitivo do modelo de frag-	37
	mentação fria.	
4.1.....	Simulação Monte-Carlo para percolação	43
	de sítio.	
4.2.....	Efeitos de sistema finito em percolação	47
4.3.....	Expoente crítico $\tau$ em função da proba-	50
	bilidade de ocupação.	
4.4.....	Espectro isotópico do carbono calculado	53
	apenas com estatística.	
4.5a.....	Espectro com temperatura $T=5$ MeV	54
4.5b.....	Espectro com temperatura $T=6$ MeV	55
4.5c.....	Espectro com temperatura $T=4$ MeV	56
4.6.....	Espectro de massa com $T=5$ MeV	57
4.7.....	Esquema do cálculo do espectro de energia	69
4.8.....	Temperatura média contra probabilidade	70
	de ocupação.	
4.9a.....	Espectro de energia para duas	71
	probabilidades de ocupação.	
4.9b.....	Espectro de energia para duas	72
	energias de excitação.	
4.9c.....	Espectros de energia para dois	73
	volumes de quebra.	
4.10.....	Melhor ajuste do espectro de energia	74
4.11.....	Efeito da expansão coulombiana no	77
	espectro de energia.	
4.12.....	Espectro calculado considerando o núcleo	78
	um sistema frio.	
4.13.....	Melhores resultados gerais conseguidos	79
	com o modelo usado.	
A1.....	Comparação numérica da equação de Van der	92
	Waals com a eq. de estado nuclear.	



# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### I.1- REAÇÕES DE ÍONS-PESADOS

A física de íons-pesados a energias altas e intermediárias tem como um dos seus principais objetivos o estudo da matéria nuclear a densidades e temperaturas bastante acima daqueles valores encontrados em núcleos no estado fundamental. A realização prática destas condições é feita através de colisões nucleares a energias altas ( $E_{lab} > 0.4.A \text{ GeV}$ ) ou intermediárias ( $200.A \text{ MeV} > E_{lab} > 20.A \text{ MeV}$ ). Em reações neste domínio de energia, ocorre, durante uma pequena fração de tempo, uma compressão e um aquecimento da matéria nuclear envolvida. Enquanto que as colisões a altas energias são um bom laboratório para o estudo de partículas elementares, as colisões a energias intermediárias permitem o estudo do diagrama de fases da matéria nuclear e de fenômenos a ele relacionados. Um exemplo seria o estudo da transição de fase líquido-gás.

Dentre os vários fenômenos interessantes que podem ocorrer em uma colisão nuclear a energias altas e intermediárias destacam-se os relacionados com a produção de píons e os processos que levam à fragmentação nuclear, sendo que, muitas vezes, os dois processos ocorrem em uma mesma reação. Em termos genéricos, o que

seria uma reação de fragmentação? Reações de fragmentação são reações em que há uma quebra da matéria nuclear em vários pedaços relativamente pequenos. Esta quebra origina os fragmentos, que, por sua vez, originarão os núcleos detectados experimentalmente. Mais precisamente, após uma colisão núcleo-núcleo a energias intermediárias ou próton-núcleo a altas energias, podem ser produzidos vários fragmentos com massas menores do que cerca de  $1/3$  da massa dos núcleos envolvidos. Processos deste tipo, em que há formação de diversos fragmentos com massa intermediária, são chamados de multifragmentação. Outros processos, em que também há formação de fragmentos de massa razoável são a fissão e a espalação. O número e a massa dos fragmentos resultantes nos darão um critério para classificar uma reação como pertencente a um dos três grupos acima. Esta classificação pode ser encontrada em Hüfner<sup>[1]</sup> para reações de altas energias.

## I.2- FISSÃO - ESPALAÇÃO - MULTIFRAGMENTAÇÃO

Vários tipos de reação podem levar à formação de fragmentos de tamanho razoável: espalação, fissão e multifragmentação. Esta divisão é baseada no número de fragmentos com  $A > 10$  observados e na relação de suas massas com a massa do núcleo alvo (classificação de Hüfner). Doravante, chamaremos de fragmentos "pesados" àqueles fragmentos com  $A > 10$ <sup>[1]</sup>. Acredita-se que estes três tipos de reação possuam mecanismos diferentes (Warwick et al.<sup>[9]</sup>). O quadro a seguir<sup>[1]</sup>, apresenta esta classificação sob forma esquemática. Esta classificação, apesar de útil, é imprecisa, pois as

fronteiras das regiões não são bem definidas. Além disso, foi elaborada para reações a altas energias. Suas linhas gerais, porém, permanecem válidas também para energias intermediárias.

**MULTIPLICIDADE  
DE FRAGMENTOS  
PESADOS**

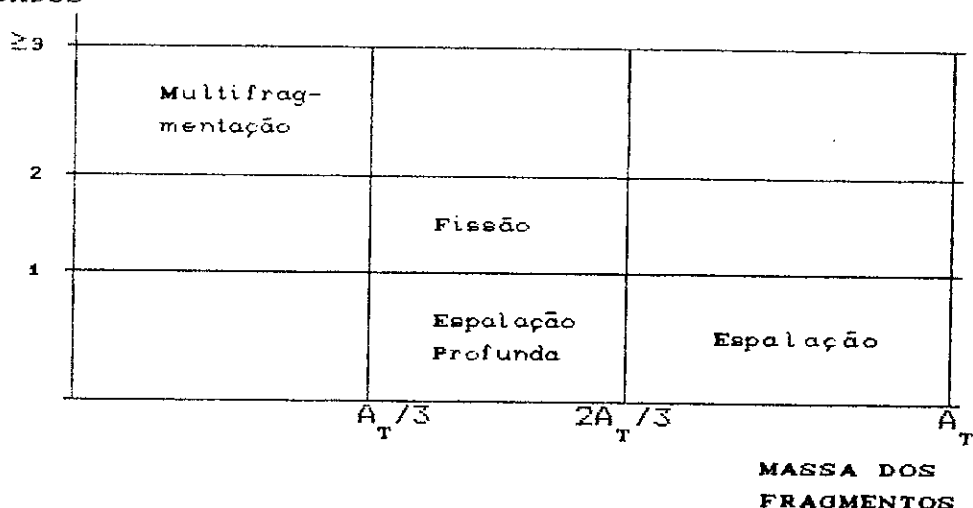


Fig. 1. 1. Classificação dos processos de formação de fragmentos pesados segundo Hüfner. As fronteiras das regiões não são bem definidas e a colocação da espalação profunda é tentativa.

Reações de espalação levam ao aparecimento de um fragmento cuja massa é próxima à massa do alvo ( $A_f \approx A$ ), sendo apenas um fragmento pesado observado. A fissão leva ao aparecimento de 2 fragmentos pesados cujas massas estão próximas à metade da massa do alvo ( $A_f \approx A_T/2$ ). Um outro processo, ainda pouco estudado, que pode levar também à produção de um fragmento pesado com massa semelhante a de um fragmento produzido por fissão é chamado de

espalação profunda (refs [1] e [3]). Este processo ainda é pouco conhecido. Finalmente, quando temos um estado final com vários fragmentos pesados e com massas menores do que cerca de um terço da massa do alvo ( $A_f \approx A_T/3$ ), temos um processo de multifragmentação. Logicamente, além dos fragmentos pesados detectados, são produzidos inúmeros outros fragmentos leves, nucleons soltos e píons.

Enquanto podemos dizer que os mecanismos da fissão e da espalação são razoavelmente bem compreendidos, a multifragmentação está sendo ativamente estudada, não havendo ainda uma idéia clara sobre o mecanismo do processo. Vários modelos, com hipóteses diferentes, e às vezes até opostas, foram apresentados recentemente. O acordo destes modelos com os dados experimentais é semelhante, principalmente quanto ao espectro de massa, sendo no presente momento bastante difícil escolhermos uma determinada abordagem com base unicamente nos dados experimentais existentes.

A classificação acima, apesar de não rigorosa, serve como guia em um campo vastíssimo, com numerosos fenômenos complexos e ainda não muito bem compreendidos - a produção de fragmentos em reações nucleares a energias altas e intermediárias.

### I.3- A MULTIFRAGMENTAÇÃO

Dentre os processos acima mencionados, um vem merecendo a atenção especial dos físicos: a multifragmentação. A razão para tal interesse repousa no fato de se acreditar que a multifragmentação talvez esteja relacionada a um fenômeno

extremamente interessante da matéria nuclear - a transição de fase líquido-gás. Esta hipótese foi lançada nos trabalhos de Minich et al.<sup>[11]</sup> e Hirsch et al.<sup>[4]</sup> e foi motivada pela análise de dados experimentais obtidos no Fermilab. Estes dados indicam que na região de multifragmentação, isto é, fragmentos de massa menor do que 1/3 da massa do alvo, a curva do rendimento em massa contra massa de uma reação próton-Kriptônio apresenta um comportamento tipo potência. Chama-se rendimento em massa de um reação ao número de fragmentos produzidos com determinada massa (proporcional à seção de choque de produção do fragmento  $\sigma(A)$ ). Tal comportamento (seção de choque na forma  $\sigma(A) \propto A^{-\tau}$  com  $\tau$  entre 2 e 3 e  $A$  - número de massa do fragmento), é previsto pela teoria da condensação de Fisher<sup>[10]</sup> para a distribuição de gotículas no ponto crítico de transição de fase líquido-gás de um sistema de Van der Waals.

A analogia descrita acima motivou a interpretação da multifragmentação como um fenômeno que ocorre no ponto crítico de transição de fase líquido-gás da matéria nuclear<sup>[4],[11]</sup>.

A interpretação dada acima, apesar de muito interessante, é discutível, já que a lei da potência não é privativa de uma transição líquido-gás (Campi et al.<sup>[21]</sup>). O principal objetivo deste trabalho será o de mostrar que podemos utilizar um modelo que explora uma transição de fase de outro tipo (percolativa), e, ainda assim, obter resultados bastante bons.

A multifragmentação ocorre em uma ampla faixa de energias incidentes (energia do núcleo projétil), tendo um limiar de cerca de 1 GeV para reações induzidas por prótons (Hirsch et al.<sup>[4]</sup>). Experimentos em coincidência indicam sempre uma alta

multiplicidade de partículas carregadas, apontando para uma colisão central (Warwick et al.<sup>[9]</sup>). Para reações induzidas por núcleos pesados, este mecanismo (multifragmentação) é especialmente importante na faixa de energias intermediárias (energia do projétil na faixa  $20 \text{ MeV} < E_{\text{lab}}/n < 200 \text{ MeV}$ ). Nesta faixa ocorre uma transição entre as características de baixas energias onde os núcleos em colisão têm um comportamento basicamente coletivo (efeitos de campo médio preponderantes), e as características de altas energias, onde os aspectos das interações nucleon-nucleon individuais são mais importantes (tratamentos de cascata intranuclear). A multifragmentação pode dar informações interessantes sobre as propriedades da matéria nuclear na região de alta densidade e temperatura atingida nestas reações.

Existe uma grande quantidade de dados experimentais relativos a colisões de íons-pesados a energias altas e intermediárias que levam à fragmentação nuclear. Estes dados, porém, são todos do tipo inclusivo, isto é, dados relativos a eventos em que apenas alguns observáveis são medidos, permanecendo os restantes desconhecidos. Este tipo de dado acarreta uma perda de informação, que no caso em questão pode ser fundamental.

Finalizaremos este capítulo introdutório explicitando o objetivo maior do trabalho. Calcularemos, com base em um modelo de multifragmentação recente - O MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA - o espectro de energia do Carbono proveniente de uma colisão  $p + \text{Kr}$  a alta energia. O espectro de energia não apresenta uma literatura tão vasta quanto o espectro de massa, e poucos são os modelos que efetivamente calcularam-no. Nosso cálculo servirá para testar se o modelo usado realmente pode responder por todos os dados

experimentais existentes atualmente (o espectro de massa foi bem reproduzido pelo modelo - referência [25]). Procuraremos determinar quais são as hipóteses físicas mais importantes para a reprodução dos dados. Finalmente, o trabalho servirá para ilustrar as potencialidades e as limitações de uma abordagem percolativa ao fenômeno de multifragmentação nuclear.

O plano geral do trabalho será o seguinte: No capítulo II apresentaremos alguns dados experimentais recentes relativos a colisões de íons-pesados e veremos as conclusões que podem ser extraídas a partir de um exame crítico destes dados. No capítulo III exporemos alguns modelos particularmente representativos que tentam explicar estes dados na região de multifragmentação. O capítulo IV será dedicado à apresentação mais detalhada do modelo utilizado nos cálculos - O MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA, introduzido pela primeira vez na referência [25]. O capítulo V apresentará os resultados dos cálculos efetuados com auxílio deste modelo, assim como as conclusões obtidas.

## CAPÍTULO II

### OS DADOS EXPERIMENTAIS

#### II.1 - OS DADOS EXPERIMENTAIS - INTRODUÇÃO

Estudos experimentais e teóricos de reações nucleares têm sido realizados por muitos anos. A produção de fragmentos nucleares já é conhecida há mais de 3 décadas. Os primeiros estudos sobre esse fenômeno utilizaram técnicas radioquímicas e técnicas de emulsão, com irradiação proveniente tanto de aceleradores como de raios cósmicos. Essas técnicas, embora úteis em muitos casos, possuem limitações. O método radioquímico, por exemplo, não permite a obtenção das energias dos pequenos fragmentos, enquanto o método de emulsão não fornece a identidade dos resíduos pesados. Além destes inconvenientes, há o agravante de que as duas técnicas não são aplicáveis em condições comparáveis, o que impede que uma possa suprir a falta de informação da outra.

Os desenvolvimentos mais recentes devem-se ao uso de feixes de alta intensidade e arranjos de detectores capazes de medidas de alta resolução, cobrindo um amplo espectro de cargas e energias. Uma amostra da sofisticação do aparato experimental e do sistema de aquisição de dados utilizados hoje em dia pode ser encontrado em Hirsch et al.<sup>[41]</sup>

O estudo dos dados experimentais existentes para reações de



fragmentação é importante em vários sentidos. Através do exame desses dados podemos obter informações sobre os processos de formação de fragmentos nucleares. Em especial, podemos obter as características gerais da multifragmentação. Podemos também ter uma idéia da influência de diversas grandezas presentes nos experimentos, tais como a energia do projétil incidente ou mesmo a sua natureza (próton, carbono, ou um núcleo mais pesado) nos resultados finais obtidos. Finalmente, é importante porque indica que este ramo da física é extremamente dependente dos dados experimentais, sendo os progressos obtidos bastante sensíveis a melhorias tecnológicas.

Podemos dividir os dados experimentais relativos às reações de fragmentação em três grandes grupos: os espectros de massa, em que são medidas as seções de choque diferenciais  $d\sigma/dA$  de formação de um fragmento de massa  $A$  provenientes de uma determinada reação; os espectros isotópicos, em que são medidas as seções de choque  $d\sigma/dZ$  de um determinado fragmento de número de massa  $A$ ; (fixamos a carga  $Z$  e detectamos todos os fragmentos com essa carga. Estes são, então, contados segundo seu número de massa  $A$ ); e finalmente os espectros de energia, em que são medidas as seções de choque duplamente diferenciais  $d^2\sigma/dEd\Omega$ . Examinaremos cada grupo e veremos o que pode ser concluído a partir dos resultados experimentais.

Começaremos pelo espectro de massa, que é o dado experimental mais pesquisado e sobre o qual se baseiam a maioria dos modelos apresentados para a multifragmentação.

## II.2- OS DADOS EXPERIMENTAIS - OS ESPECTROS DE MASSA

A figura 2.1 - retirada de Porile et al.<sup>(5)</sup> - fornece as características principais dos espectros de massa medidos. A curva tem uma forma em U, indicando a presença de fragmentos advindos de diferentes mecanismos de reação - fragmentos com ( $A < 40$ ) devidos à multifragmentação, fragmentos com ( $40 < A < 60$ ), devidos à fissão e espalação profunda e fragmentos com ( $A > 60$ ), devidos à espalação.

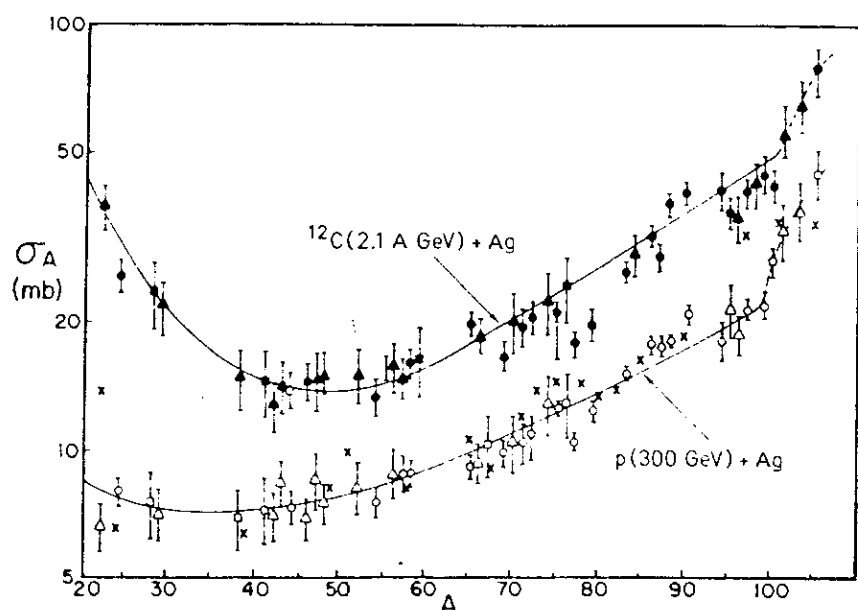


Fig 2.1. Rendimento em massa de reações de Carbono e próton com um núcleo de prata. As linhas sólidas são ajustes empíricos por mínimos quadrados. Note a semelhança das inclinações das curvas para  $A > 60$ . O experimento só detectou fragmentos com  $A > 20$ .

Note-se que as curvas apresentam um comportamento semelhante no regime de espalação, enquanto são bastante diferentes no regime de multifragmentação (fragmentos leves). O mínimo da curva pode ser interpretado como um indicador de uma região de transição do

mecanismo de espalação para multifragmentação. A diferença principal entre as duas curvas consiste em que nas reações induzidas por  $^{12}\text{C}$  são produzidos fragmentos pequenos em maior escala do que nas reações induzidas por prótons. Outras experiências parecem confirmar estes fatos no domínio de energias acima de 1 GeV.

Se abaixarmos a energia incidente teremos uma figura bem diferente. A fig 2.2 - tirada de Morrissey et al. <sup>(6)</sup> - mostra, para reações com prótons a 340 MeV, um pico em torno de  $A_T/2$  correspondendo à fissão e uma ausência de multifragmentação. Aumentando a energia do projétil incidente recuperamos a sistemática anterior.

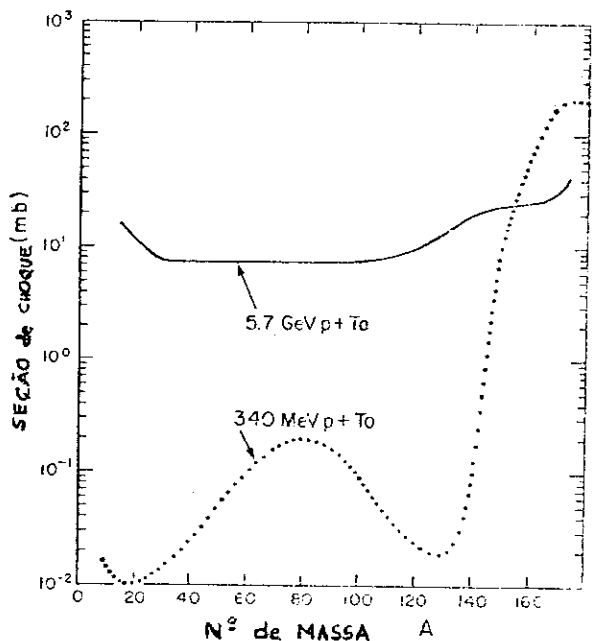


Fig 2.2. Influência da energia do próton incidente no rendimento em massa de uma reação com Tântalo. Observe que para baixas energias (340 MeV) a curva apresenta 2 picos. Um devido à fissão e outro correspondendo a processos periféricos que estão relacionados à espalação. Há uma quase total ausência de multifragmentação ( $A < 40$ ). Aumentando a energia (5.7 GeV), obtemos novamente uma curva em forma de U.

Uma experiência que enfatizou a região de multifragmentação foi realizada por Hirsch et al. no Fermilab. Seus resultados estão apresentados na fig 2.3 que mostra o espectro de massa obtido de uma colisão p + Xe com energia do próton variando entre 30 e 300 GeV. Não foi encontrada nenhuma dependência em relação à energia

(no intervalo de energia considerado). A linha sólida que aparece na figura é um ajuste segundo uma lei da potencia da forma:

$$\sigma(A) = \sigma_0 A^{-\tau} \quad \text{com } \tau = 2.64$$

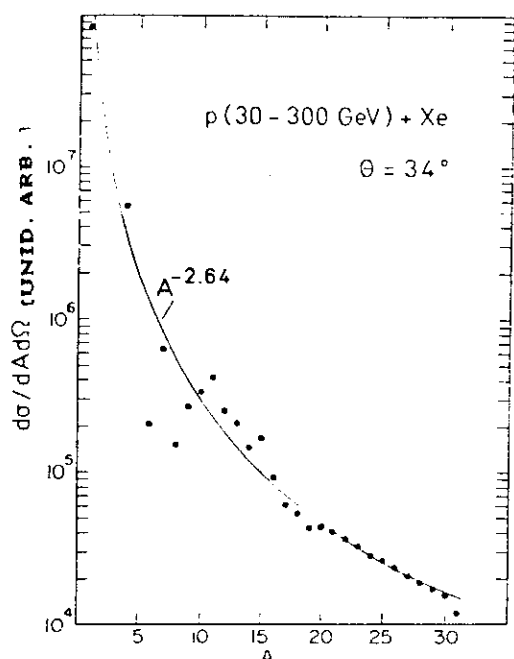


Fig 2.3. Produção de fragmentos em uma colisão p + Xe para energias 30-300 GeV. Como não foi encontrada dependência em relação à energia, os pontos representam a soma dos dados experimentais obtidos. A linha sólida é um ajuste segundo uma curva do tipo potência  $A^{-\tau}$ . Observe o desvio sistemático dos pontos experimentais de massa entre 5 e 10.

Este ajuste despertou muita discussão e serviu de inspiração para o modelo que Hirsch et al. e Minich et al. propuseram para explicar a multifragmentação. O próximo capítulo apresentará um resumo deste modelo.

Nossa última figura servirá para demonstrar a influência da energia do próton incidente sobre a seção de choque de fragmentação. Faremos isto para o regime de multifragmentação, que é o que nos interessa mais de perto.

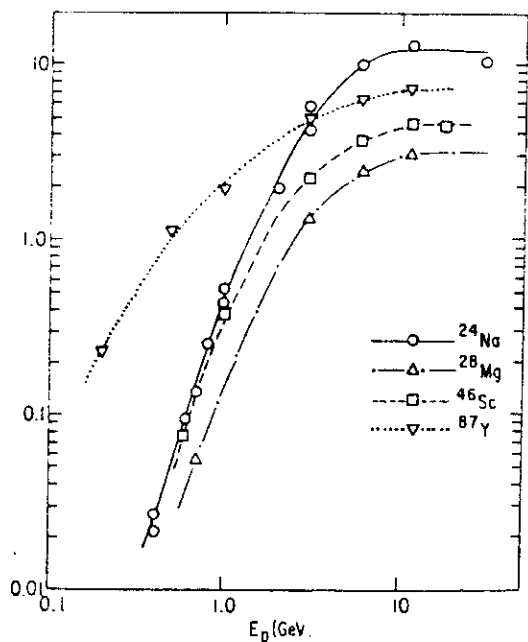


Fig 2.4. Seções de choque de produção de vários fragmentos a partir de uma colisão  $p + \text{Au}$  a diversas energias do próton incidente. Repare na subida bastante rápida da curva até 10 GeV. A partir desse valor as curvas se estabilizam. Medidas para  $E > 10$  GeV confirmam este fato até 950 GeV.

A fig 2.4 - retirada de Kaufman et al.<sup>[7]</sup> - apresenta as seções de choque para produção de diversos fragmentos no regime de multifragmentação para colisões  $p + ^{197}\text{Au}$  quando variamos a energia do próton. Podemos notar que a seção de choque cresce rapidamente com a energia incidente, até que atinge um valor limite em cerca de 10 GeV, quando então se mantém constante.

Os dados relativos ao espectro de massa, apesar de interessantes e ilustrativos, sofrem do mal de serem excessivamente inclusivos, ou seja, sabe-se apenas a seção de choque de produção de um determinado fragmento de massa  $A$ . Não é

feita nenhuma distinção quanto à carga do fragmento. Ora, sabemos que a relação carga-massa é um importante dado nuclear. Seria, portanto, importante o estudo de dados que levassem em consideração tal fato. Estes dados estão presentes nos espectros isotópicos.

## II.3- OS DADOS EXPERIMENTAIS - OS ESPECTROS ISOTÓPICOS

Chamamos a seção de choque  $\sigma(Z,N)$  de distribuição isotópica se mantivermos Z constante e deixarmos N variar.

A fig 2.5 - retirada de Westfall et al.<sup>(8)</sup> - demonstra de forma clara os fatos mais importante a respeito dos espectros isotópicos. A figura representa o resultado das medidas de seção de choque para produção de isótopos de sódio para diferentes reações. As curvas tem a forma de parábolas invertidas, com o máximo correspondendo ao isótopo mais estável. Note-se o fato bastante interessante de que o rendimento do isótopo menos estável ( $^{24}\text{Na}$ ), está distante 7 ordens de grandeza do pico da distribuição. Outro fato que chama a atenção na fig 2.5 diz respeito ao mecanismo das reações apresentadas. Repare que na reação  $p + ^{238}\text{U}$  o mecanismo de produção do sódio deve ser uma multifragmentação, já que a sua massa é bem menor do que a massa do núcleo alvo. Já nas reações  $^{48}\text{Ca} + \text{Be}$  e  $^{40}\text{Ar} + \text{C}$  o isótopo de sódio deve ter se originado a partir de um mecanismo de espalação, já que sua massa é semelhante à massa dos núcleos envolvidos. A conclusão que podemos tirar é que as distribuições isotópicas são bastante insensíveis ao mecanismo de reação. Este fato torna

discutível a obtenção de qualquer característica particular da multifragmentação a partir destes dados experimentais.

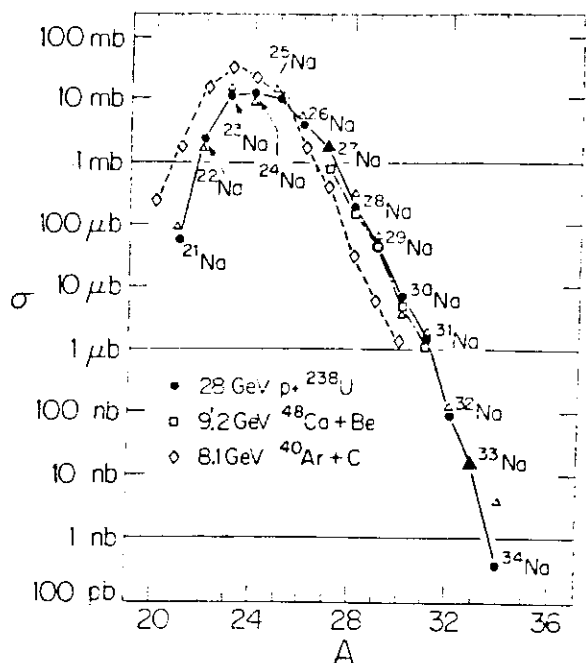


Fig 2.5. Seções de choque de produção do isótopo de sódio em várias reações diferentes. O isótopo pode ser produzido por fragmentação do núcleo alvo ou do núcleo projetil. Repare na enorme diferença das seções de choque para produzir o  $^{25}\text{Na}$  e o  $^{34}\text{Na}$ .

A fig 2.6 (Hirsch et al. <sup>[41]</sup>) apresenta o espectro medido por Hirsch et al. para colisões p + Kr para isótopos de carbono e oxigênio, provenientes, portanto, de reações de multifragmentação. Os resultados seguem a linha geral descrita acima.

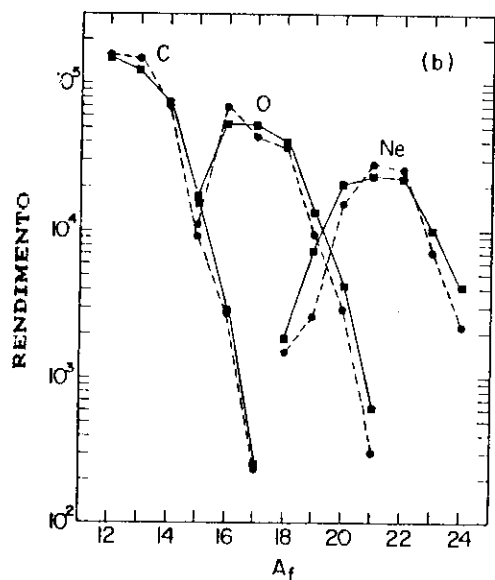


Fig 2.6. Espectro isotópico medido por Hirsch et al. em sua experiência no Fermilab. A reação foi p + Kr (80-350 GeV). As curvas sólidas são ajustes segundo um modelo de multifragmentação (o modelo de transição de fase líquido-gás).

Uma colisão nuclear é um fenômeno essencialmente dinâmico. Os dados que examinamos até agora são, no entanto, basicamente estáticos, isto é, fornecem poucas informações sobre o mecanismo dos processos envolvidos. Espera-se que informações mais interessantes sobre, por exemplo, momentum de Fermi, temperatura nuclear e dinâmica da fragmentação estejam presentes no espectro de energia.

#### II.4- OS DADOS EXPERIMENTAIS - OS ESPECTROS DE ENERGIA

Vários autores mediram e analisaram a seção de choque  $d^2\sigma/d\Omega dE$  que dá a distribuição de energia dos fragmentos detectados por unidade de ângulo sólido. Começando por Poskanzer et al.<sup>[9]</sup> que em 1971 estudaram o espectro de energia de fragmentos com  $2 \leq Z \leq 18$  originados em uma colisão  $p + {}^{238}\text{U}$  a 5.5 GeV; passando por Westfall et al.<sup>[10]</sup> que em 1978 ampliaram o trabalho anterior considerando alvos de carbono, alumínio e prata; e por Warwick et al.<sup>[9]</sup> que em 1983 estudaram a multifragmentação de ouro induzida por íons pesados a várias energias; e chegando finalmente a Hirsch et al.<sup>[4]</sup> que em 1984 estudaram e mediram a fragmentação de núcleos de Kriptônio e Xenônio induzida por prótons de alta energia (80 - 350 GeV).

Os dados obtidos por Hirsch et al. são particularmente importantes para a multifragmentação porque o aparato experimental foi especialmente projetado para detectar fragmentos de massa menor que 1/3 da massa do alvo e energias abaixo da energia mais



provavel (de 20-25 MeV, segundo os trabalhos anteriores).

Apesar da grande variedade de projéteis, alvos e energias envolvidas nas experiências acima mencionadas, podemos traçar um quadro geral dos resultados e conclusões, já que a seção de choque diferencial  $d^2\sigma/d\Omega dE$  não sofre mudanças drásticas.

A fig 2.7, retirada de Westfall et al<sup>(10)</sup>, mostra as características essenciais das distribuições de energia: uma subida rápida, seguida de um decaimento exponencial. O máximo da curva é pouco pronunciado e as inclinações das curvas para altas energias são praticamente independentes do fragmento e do alvo. (Reparar na diferença da escala dos gráficos).

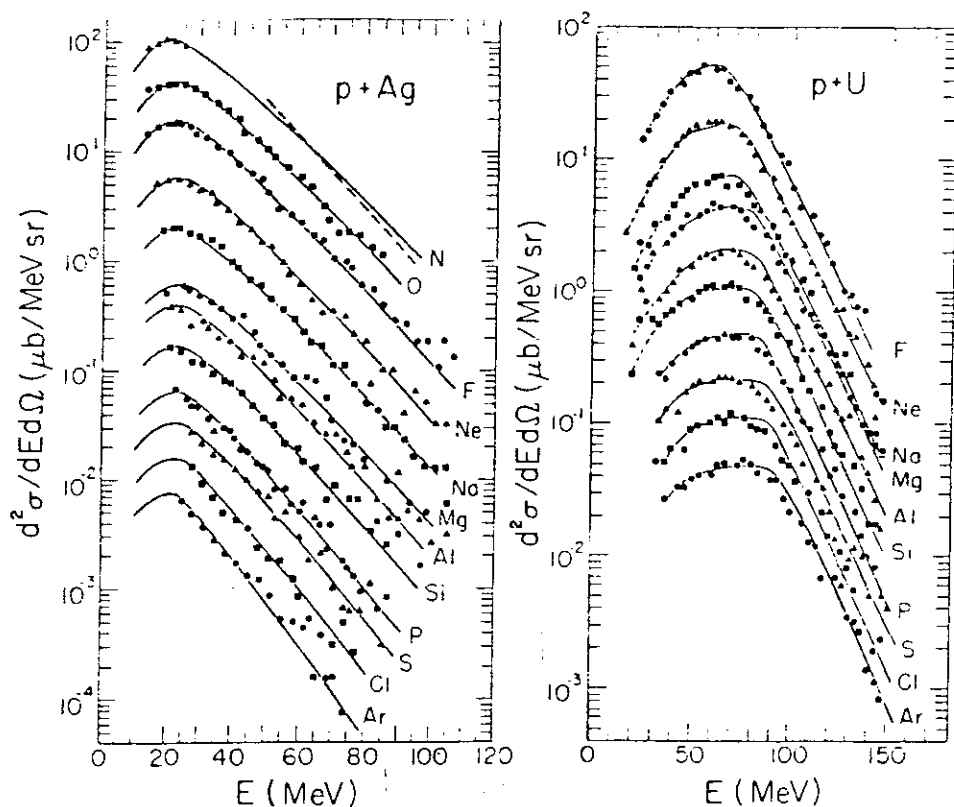


Fig 2.7. Seções de choque diferenciais duplas para produção de fragmentos com energia  $E$ . Repare que as curvas tem inclinação praticamente independente do fragmento e do alvo. As inclinações das curvas para as reações com o Urânio parecem diferentes devido a mudança de escala.

Devemos ressaltar que as distribuições analisadas são aquelas medidas em um determinado ângulo, definido como sendo o ângulo do detector com o feixe incidente ( $90^\circ$  na figura acima). As distribuições em energia e em massa são, porém, aproximadamente isotrópicas, sendo as conclusões praticamente independentes do ângulo no qual os fragmentos são detectados. A figura 2.8, retirada de Warwick et al. <sup>[9]</sup> mostra os espectros de energia em função da energia incidente para vários projéteis. Os detectores foram colocados em várias posições diferentes, correspondendo a diversos ângulos de laboratório. Podemos ver que a dependência dos espectros de energia quanto a estas variáveis é pequena.

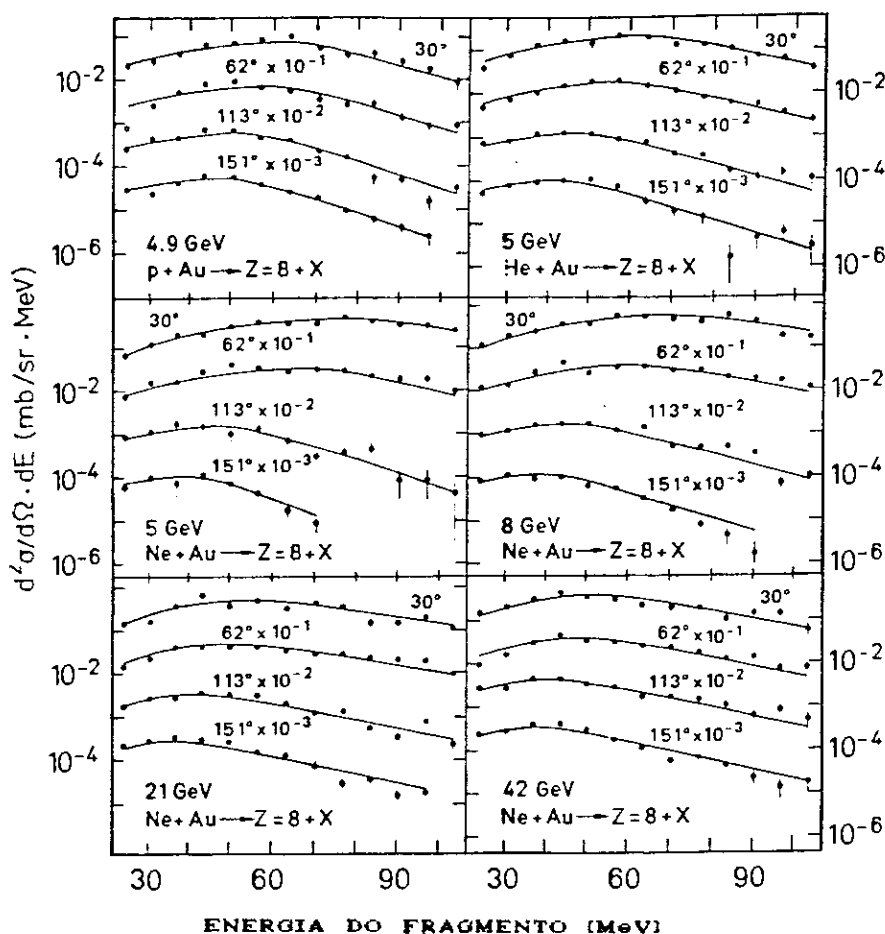


Fig 2.8. Espectros de energia do Oxigênio ( $Z = 8$ ). Repare a semelhança das curvas quanto ao ângulo de laboratório (os pontos experimentais foram multiplicados por uma constante para facilitar a visualização).

A fig 2.9 tirada de Hirsch et al. (ref [4]) apresenta o espectro de energia do carbono medido com uma precisão nunca antes alcançada. O "cut-off" do sistema foi de 0.5A MeV, isto é, partículas com energia menor do que 0.5A MeV não foram detectadas. Isto significa que para o Carbono a menor energia detectável foi de 6 MeV. Podemos perceber que as curvas seguem a tendência geral dos espectros de energia: subida rápida e decaimento mais lento, exponencial. A reprodução deste dado experimental em particular será o tema central deste trabalho.

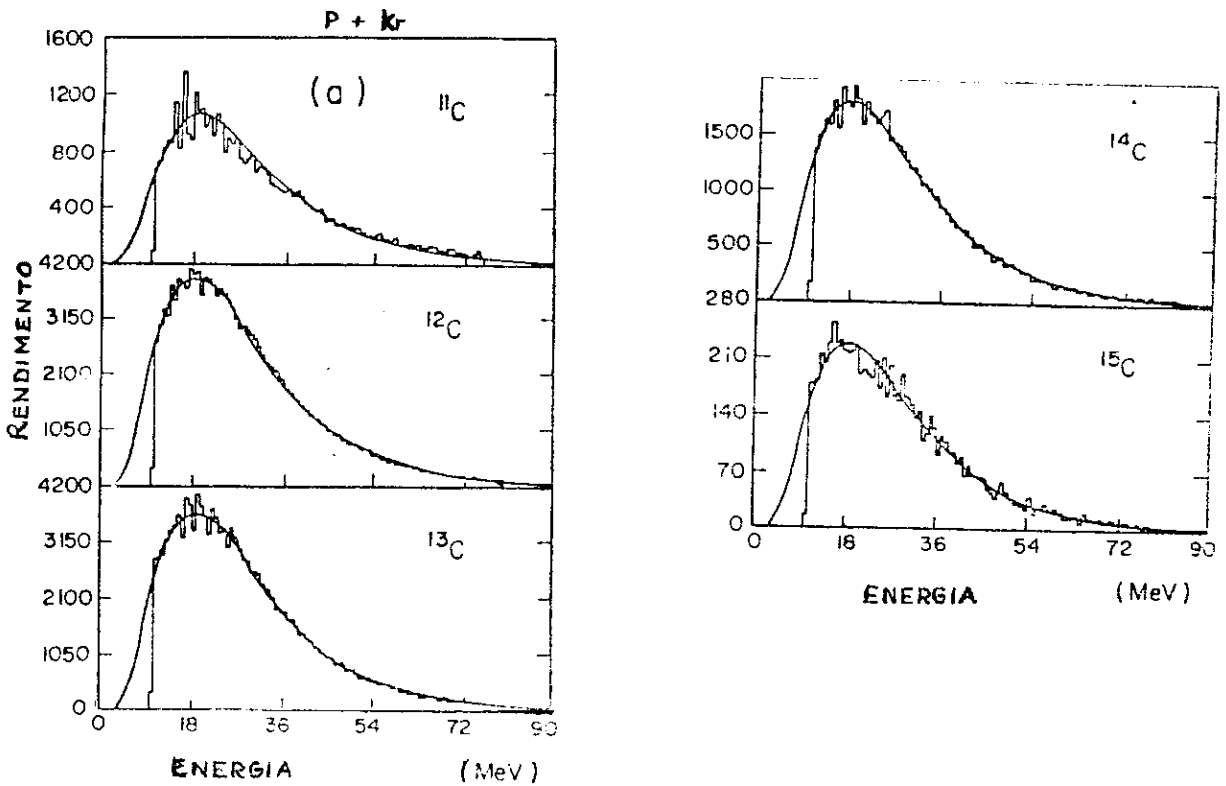


Fig 2.9. Espectros do Carbono medido por Hirsch et al. A curva contínua é um ajuste obtido com auxílio de inúmeros parâmetros. Repare o pico da distribuição em torno de 18 MeV, seguido de uma queda suave. Repare também que não há grandes diferenças entre os espectros dos vários isótopos.

Qual a interpretação física destes resultados? Não é possível, no momento, darmos uma resposta completa a esta pergunta, já que vários pontos ainda estão sob discussão. Podemos, no entanto, dar as linhas gerais que motivam as diferentes interpretações.

Um ponto que parece ter consenso consiste na interpretação da rápida subida da curva do espectro. Os autores interpretam esse fato como sendo devido à interação coulombiana, sendo a largura do pico uma consequência da não uniformidade da barreira coulombiana, isto é, os fragmentos formados sentem barreiras diferentes. Podemos compreender esse fato se considerarmos que o fragmento tem todo o volume nuclear para se formar, o que implica que a barreira varia de seu valor máximo, quando o fragmento forma-se na superfície do núcleo, até um valor mínimo, que ocorre quando o fragmento forma-se exatamente no centro do núcleo. Todos os casos intermediários são possíveis (refs. [3],[4],[8] e [9]).

A interpretação da parte de alta energia do espectro é muito mais problemática. Em linhas gerais, relaciona-se o decaimento exponencial ou à temperatura nuclear ou ao momentum de Fermi dos nucleons. A interpretação do decaimento exponencial como caracterizando uma temperatura nuclear provém do seguinte fato: Podemos parametrizar a curva exponencial através da função  $\exp[-E/E_0]$ , onde o parâmetro  $E_0$  toma valores próximos àqueles esperados para a temperatura crítica  $T_c$  calculada teoricamente ( $T_c = 12-20$  MeV - Jaqaman et al.<sup>[20]</sup>). Seria natural, portanto, relacionar as duas grandezas, ainda mais se interpretarmos a multifragmentação como ocorrendo no ponto crítico de transição de fase líquido-gás.

Este mesmo parâmetro  $E_0$  pode, no entanto, ser interpretado de forma bem diferente. Isto foi feito por Hüfner e pelos seguidores do modelo de fragmentação fria, que será visto no capítulo seguinte deste trabalho. Basicamente, o que é feito é relacionar-se  $E_0$  ao momentum de Fermi dos nucleons do núcleo alvo através da seguinte fórmula, devida a Goldhaber<sup>[39]</sup>:

$$E_0 = \frac{3}{5} \epsilon_F \left[ \frac{A_s - A}{A_s - 1} \right] \quad (2.1)$$

onde  $A_s$  é a massa da matéria espectadora (que não participa diretamente da colisão nuclear), e  $\epsilon_F$  é a energia de Fermi do núcleo. O valor de  $E_0$  dado pela fórmula acima para núcleos grandes é bem próximo dos valores achados experimentalmente, que estão ao redor de 15 MeV.

Ambas as interpretações possuem pontos favoráveis, e provavelmente só haverá uma decisão a respeito quando mais dados experimentais estiverem disponíveis.

Para finalizar, vamos dar a parametrização da seção de choque  $d\sigma/dE$  usada nos primeiros trabalhos sobre as distribuições de energia (Westfall et al.<sup>[8]</sup> e Poskanzer et al.<sup>[9]</sup>). A parametrização coloca em termos matemáticos simples os conceitos físicos explicitados acima.

$$\frac{d\sigma}{dE} \propto \int dB g(B) \Theta(E-B) (E-B)^\alpha e^{-E/E_0} \quad (2.2)$$

Na fórmula acima,  $B$  representa a barreira Coulombiana,  $g(B)$  traduz o fato de ser necessário considerar uma distribuição de

barreiras,  $\theta(x)$  é uma função degrau de Heaviside, igual a unidade se  $x > 0$  e nula se  $x \leq 0$ . O expoente  $\alpha$  toma os valores 1 ou 0.5, dependendo do autor, e não tem grande influência no ajuste. O decaimento exponencial para altas energias está representado pelo fator  $\exp(-E/E_0)$ . Tanto Poskanzer et al. como Westfall et al. dão valores para  $E_0$  que estão no intervalo 12-16 MeV, independentemente do alvo, do fragmento e da energia do projétil. O valor tirado por Hirsch et al. é de 14 MeV.

Já vimos que a interpretação dada a este parâmetro depende da maneira como encaramos a multifragmentação nuclear, e que parece que os dados inclusivos atualmente disponíveis não podem decidir a questão. Devemos aguardar a chegada de mais dados, de preferência exclusivos.

Alguns dos principais dados experimentais existentes atualmente foram revistos nesse capítulo, junto com suas interpretações mais aceitas. O próximo capítulo será dedicado à apresentação de alguns modelos que foram desenvolvidos para explicar uma parte ou todos os dados experimentais citados.

## CAPÍTULO III

### MODELOS PARA A MULTIFRAGMENTAÇÃO NUCLEAR

#### III.1- MODELOS PARA A MULTIFRAGMENTAÇÃO NUCLEAR - INTRODUÇÃO

Este capítulo deveria ser, sem dúvida, o mais longo deste trabalho, já que é impressionante a quantidade de modelos apresentados nos últimos anos. A introdução de modelos fenomenológicos para explicar a multifragmentação é necessária, pois trata-se de um fenômeno muito complexo e as ferramentas teóricas disponíveis são de aplicação extremamente complicada (por ex. equação de Schrödinger a N-corpos). Vamos rever alguns modelos que consideramos como representativos de uma determinada abordagem do problema, apresentando apenas suas características gerais.

Nosso objetivo ao fazer este tipo de revisão é duplo. Primeiro, por se tratar de material de publicação muito recente, não se encontrando ainda sistematizado, seria útil didaticamente para o não especialista adquirir uma visão global do atual estágio dos modelos teóricos. O segundo objetivo consiste em mostrar a grande variedade de abordagens que são possíveis dentro do atual quadro de dados experimentais. Todos os modelos que apresentaremos conseguem reproduzir, senão todos, pelo menos boa parte dos dados experimentais existentes. Esta situação motiva a busca de um modelo que, além de económico no sentido de não fazer hipóteses

desnecessárias, pudesse servir de teste para várias suposições feitas em outros modelos. Tal modelo deveria aproveitar ao máximo os aspectos geométricos e estatísticos do problema. Estes fatores (geometria e estatística), serviriam de base para as investigações teóricas no sentido de sabermos exatamente quais os aspectos físicos que devemos efetivamente considerar, a fim de reproduzir os dados experimentais. Um modelo com as propriedades citadas acima será utilizado neste trabalho para calcular as grandezas relevantes da multifragmentação.

Antes, porém, vamos rever os diversos modelos apresentados recentemente na literatura (após 1983). Veremos que eles são bem diferentes em suas hipóteses principais. Por exemplo, há os que exploram a transição de fase líquido-gás da matéria nuclear; os que consideram uma quebra fria; o que pensa a multifragmentação como uma emissão em sequência de fragmentos de um núcleo altamente excitado e finalmente aqueles que exploram os aspectos estatísticos do problema. Serão revistos:

- |  |                     |
|--|---------------------|
| 1- O Modelo de Transição de Fase Líquido-Gás | refs [4] e [11]     |
| 2- O Modelo de Multifragmentação Estatística | refs [12] [13] [14] |
| 3- O Modelo de Fragmentação Fria             | ref [15]            |
| 4- O Modelo de Evaporação Sequencial         | refs [16] e [17]    |
| 5- Os Modelos Percolativos                   | refs [21] a [26]    |

Os dois primeiros serão vistos com algum detalhe, enquanto dos seguintes será dada só a idéia geral. Os modelos percolativos serão examinados em conjunto.



### III.2- O MODELO DE TRANSIÇÃO DE FASE LÍQUIDO-GÁS

Este modelo trata a formação de fragmentos como uma transição líquido-gás no ponto crítico. A inspiração para este tratamento provém do excelente ajuste proporcionado por uma lei do tipo  $A^{-\tau}$  para o espectro de massa na região de multifragmentação.

A formação de aglomerados ou "clusters" em um sistema molecular tipo Van der Waals sofrendo uma transição de fase do tipo líquido-gás foi estudada por Fisher<sup>[18]</sup>. Seus resultados principais estão listados no apêndice I. O resultado mais importante, e o que nos interessa mais de perto, é justamente o que diz que a distribuição de clusters (gotículas) na vizinhança do ponto crítico obedece a uma lei do tipo  $A^{-\tau}$ , da mesma forma, portanto, que o ajuste do espectro de massa da multifragmentação.

Esta semelhança motiva a seguinte interpretação para a multifragmentação: após uma colisão próton-núcleo forma-se um sistema excitado caracterizado por uma temperatura  $T$ , uma densidade  $\rho$  e uma pressão  $P$ . Abaixo de uma determinada temperatura crítica  $T_c$  o sistema permanece em uma fase do tipo líquida, decaindo por emissão de nucleons (evaporação). À medida que  $T \rightarrow T_c$ , o sistema torna-se instável com respeito à formação de fragmentos de tamanho apreciável. Estes fragmentos nucleares são os análogos das "gotículas" do modelo de Fisher. Para  $T \gg T_c$  o sistema encontra-se em uma fase do tipo gás, sendo a observação de um cluster com número grande de nucleons extremamente improvável. Esta discussão está na referência original (Minich et al.<sup>[14]</sup>).

Vamos examinar mais detidamente as idéias acima com base em um diagrama de fases para a matéria nuclear. A discussão que apresentaremos está, basicamente, contida em Panagiotou et al. (87) As curvas mostradas na fig. 3.1 são típicas e foram tiradas da referência [12].

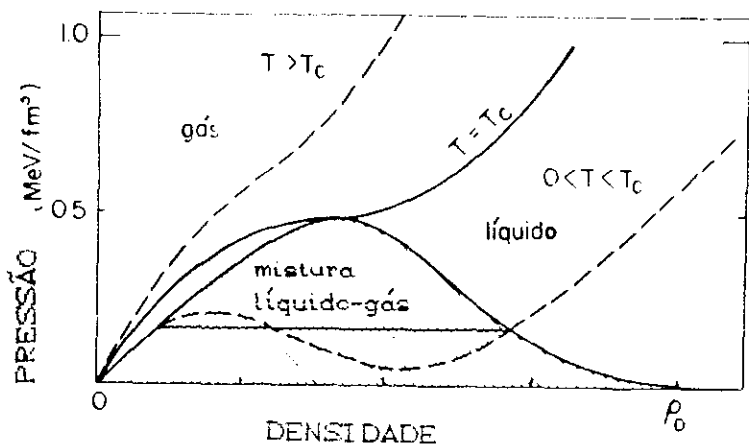


Fig 3.1. Diagrama de fase para matéria nuclear infinita. As regiões de fase líquida, gasosa e de coexistência estão indicadas. A isoterma correspondente à Temperatura crítica, assim como a construção de Maxwell que iguala os potenciais químicos das fases estão ilustradas.

Após uma excitação externa (que pode ser uma colisão nuclear), a matéria nuclear se expande, diminuindo sua densidade. Essa expansão normalmente é considerada ao longo de uma isoterma (existem estudos sobre expansões isobáricas). A diminuição de densidade prossegue até que o sistema atinja uma densidade na qual o livre percurso médio de seus elementos (fragmentos formados) seja da mesma ordem de grandeza das dimensões da região quente. Neste ponto, os fragmentos se movem praticamente livres. Chamamos esta densidade característica de densidade de isolamento (freeze-out density) -  $\rho_f$ . O sistema, levado até a região metaestável onde coexistem as fases líquida e gasosa passa a ser um sistema composto, sendo a fase líquida caracterizada pela

densidade  $\rho_f$  e a fase gasosa caracterizada pela densidade  $\rho_g$ . A matéria nuclear na fase gasosa então resfria-se, condensando-se em fragmentos. À medida que a temperatura aumenta, as densidades das duas fases vão se tornando cada vez mais próximas, até que, a uma determinada temperatura  $T_c$ , elas se tornam iguais  $\rho_g = \rho_f = \rho_c$ , sendo  $\rho_c$  a densidade crítica, onde  $dF/d\rho = 0$ . Neste ponto, ocorreria a multifragmentação.

Após essa breve digressão, vamos voltar à explicação do modelo de Transição de Fase Líquido-Gás. Deve ficar claro que o modelo em questão é fenomenológico, e que a discussão acima não se encontra nos artigos originais de Minich et al e Hirsch et al.

A aplicação das idéias de Fisher para o caso nuclear foi feita considerando um sistema composto de duas espécies: nêutron-próton e modificando os coeficientes da fórmula semi-empírica de Bethe-Weizsäcker.

Para um sistema composto, deve ser considerada a entropia que resulta da mistura das duas espécies, além, é claro, das entropias individuais. Isto implica na seguinte modificação:

$$\mu\beta A \rightarrow (\mu_n N_f + \mu_z Z_f)\beta + \left[ N_f \ln\left(\frac{N_f}{A}\right) + Z_f \ln\left(\frac{Z_f}{A}\right) \right] \quad (3.1)$$

Na fórmula acima,  $\mu\beta A$  é a entropia de um sistema composto somente de um tipo de partícula, enquanto o lado direito representa a entropia resultante da mistura nêutron-próton. Os coeficientes  $\mu_n$  e  $\mu_z$  representam os potenciais químicos do nêutron e do próton, respectivamente, as letras  $N$ ,  $Z$  e  $A$  referem-se ao

número de nêutrons, prótons e nêutrons mais prótons, respectivamente.  $\beta$  tem o significado usual de  $(kT)^{-1}$ .

O próximo passo consiste em supor que a forma analítica da função de Helmholtz é a mesma que a da energia de ligação. Esta última é dada pela fórmula de Weizsäcker:

$$f(Z_f, A_f) = a_v A_f - a_s A_f^{2/3} - a_c Z_f^2 / A_f^{1/3} - a_a (A_f - 2Z_f)^2 / A_f - \delta$$

Deve ficar claro que os coeficientes da fórmula acima não são os mesmos usados na fórmula semi-empírica usual. Apenas a forma analítica foi preservada. Os coeficientes que aparecem na equação acima são agora considerados como parâmetros que são ajustados aos dados experimentais.

Finalizaremos nossa exposição mencionando um resultado bastante interessante, e que pode ser considerado como colocando sérias dúvidas a respeito da interpretação da multifragmentação como sendo manifestação de uma transição de fase do tipo líquido-gás da matéria nuclear. Examinaremos este resultado com certo detalhe porque ele contém uma série de conceitos interessantes e, além disso, mostrará ao leitor que este campo ainda está em aberto, com muitas opiniões opostas.

Vicentini et al.<sup>[36]</sup>, utilizando cálculos baseados em dinâmica molecular clássica, examinaram a fragmentação de uma gotícula formada por cerca de 200 partículas. Esse sistema, que interagiu através de potenciais moleculares apropriados, apresenta uma grande similaridade com um sistema nuclear. Podemos apreciar melhor este fato se examinarmos as figuras abaixo, que contém os diagramas densidade contra temperatura para os dois sistemas.

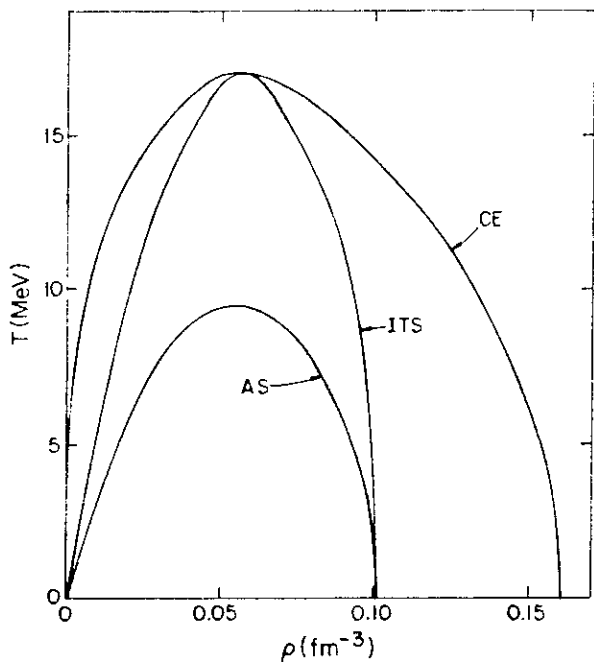


Fig 3.2. Diagrama densidade contra temperatura para matéria nuclear obtido através de uma equação de estado do tipo Skyrme, ignorando a força coulombiana. Os cálculos foram feitos por Friedman et al. as curvas da figura foram obtidas por Ravenhall (citado no trabalho de Vicentini et al.).

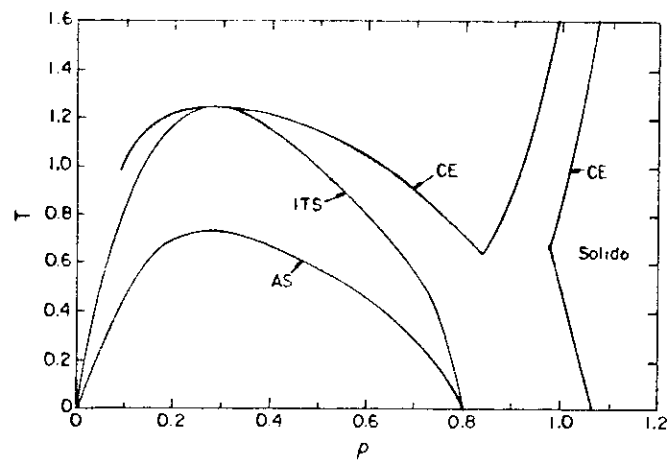


Fig 3.3. Diagrama de fases da gotícula, considerada por Vicentini et al. As partículas interagem classicamente, através de um potencial do tipo Lennard-Jones. Observe a semelhança com a figura anterior.

As curvas assinaladas são as espinodais isotérmica (ITS) e adiabática (AS). Uma espinodal é o lugar geométrico dos pontos onde  $\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0$ . A curva de coexistência (CE), onde as fases líquida e gasosa estão em equilíbrio também está representada. O ponto crítico é o ponto de contato da espinodal isotérmica e da curva de coexistência. A espinodal isotérmica engloba a área onde a matéria nuclear é instável, isto é, qualquer flutuação na densidade pode levar à sua quebra. A multifragmentação nuclear deve ocorrer, portanto, nesta região. Observemos que enquanto a espinodal isotérmica estende-se até a curva de coexistência, a espinodal adiabática, apesar de se encontrar na área de instabilidade compreendida pela espinodal isotérmica, não toca esta curva.

Os resultados de Vicentini et al. mostram que no sistema clássico considerado, (e que possui curvas espinodais bastante semelhantes às encontradas para o caso nuclear), a fragmentação ocorre nas vizinhanças da espinodal adiabática. Se isto for verdade para o caso nuclear a multifragmentação não pode se dar no ponto crítico  $(T_c, \rho_c)$ . A questão está, porém, longe de uma palavra final. Compare, por exemplo, as referências [36],[37] e [41].

O modelo de transição de fase líquido-gás, apesar de todas as críticas posteriores, é bastante importante, inspirou um sem número de trabalhos e foi um dos grandes responsáveis pela onda de interesse na multifragmentação nuclear.

### III.3- O MODELO ESTATÍSTICO DE MULTIFRAGMENTAÇÃO NUCLEAR:

Este modelo aplica conceitos probabilísticos associados a uma visão termodinâmica do processo de fragmentação. Os aspectos mais importantes do modelo são:

- i) Um cálculo puramente combinatório das possíveis partições de um sistema finito, incluindo conservação da massa e da carga.
- ii) A introdução de pesos estatísticos para essas partições. Isto é feito através da entropia de cada partição.
- iii) O cálculo da entropia é feito a partir de uma generalização da fórmula da Gota-Líquida (Bethe-Weizsäcker) para núcleos quentes.
- iv) O sistema é suposto estar em equilíbrio termodinâmico no instante de fragmentação.

O cenário físico explorado pelo modelo é o seguinte: Após uma colisão com um próton forma-se um sistema composto com algumas instabilidades (rachaduras - cracks). O sistema aumenta de volume, diminuindo a densidade da matéria nuclear e criando bolhas em seu interior.. Dependendo da energia de excitação do sistema, este se expande o suficiente para atingir uma determinada densidade, chamada densidade de quebra, dando origem à completa dirupção do núcleo. Após essa quebra, os fragmentos formados passam a interagir somente através da força Coulombiana e podem, eventualmente, sofrer novo decaimento, evaporando partículas leves. A figura 3.4 dá uma visão esquemática deste cenário.

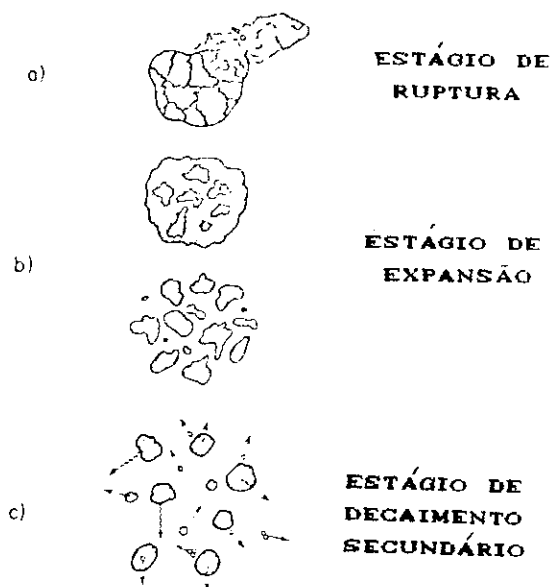


Fig. 3. 4. Visão esquemática do processo de fragmentação segundo o modelo de multifragmentação estatística. Os três estágios estão explicados no texto.

A fragmentação é vista aqui como se, em um determinado momento, um sistema composto que interagira em todo seu volume através da força nuclear forte (curto alcance), mudasse repentinamente sua configuração para um sistema de fragmentos livres (presença apenas da força coulombiana - longo alcance). O leitor interessado em maiores detalhes deve consultar a referência original ([12],[13],[14]).

O passo fundamental para o cálculo das grandezas físicas é a associação de um peso estatístico  $W$  a cada partição. Este peso é introduzido via entropia da partição -  $S$  através de  $W = e^S$ .



Resumiremos a seguir o esquema de cálculo.

A generalização da fórmula da Gota Líquida para temperaturas  $T > 0$  desenvolvida por Bondorf et al.<sup>[12]</sup> é a seguinte: (eq. 3.2)



$$E_{A,Z}^{INT} = (W_0 + \frac{T^2}{\epsilon_0})A + (\beta - T) \frac{d\beta}{dT} A^{2/3} + \gamma \frac{(A-2Z)}{A} + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_{A,Z}} \left(1 - \frac{R_{A,Z}}{R_{A,Z}^c}\right)$$

O primeiro termo representa a excitação no volume através do parâmetro de densidade de nível  $\epsilon_0$ . Os valores numéricos são:  $\epsilon_0 = 16$  MeV e  $W_0 = -16$  MeV. O segundo termo descreve a energia de excitação de superfície através da função  $\beta(T)$ . O termo coulombiano é calculado segundo a aproximação de Wigner-Seitz. O cálculo é feito separando-se a parte da energia coulombiana devida a uma esfera uniformemente carregada e a parte devida ao aparecimento de fragmentos com densidade  $\rho_0$ , maior do que a densidade do sistema total. Os símbolos que aparecem na fórmula tem os seguintes significados:  $R_{A,Z}$  - raio do fragmento à densidade normal.  $R_{A,Z}^c$  - raio da célula de Wigner-Seitz que contém o fragmento. O coeficiente  $\gamma$  tem o valor usual de 25 MeV. A função  $\beta(T)$  foi obtida utilizando-se cálculos de Thomas-Fermi e argumentos de escala para  $T$  próximo à temperatura crítica  $T_c$ . Detalhes podem ser encontrados em Bondorf et al.<sup>[12]</sup>, onde a fórmula foi proposta pela primeira vez. A função partição é então calculada considerando-se que os fragmentos movem-se independentemente em um "Volume livre" -  $V_f$ , que exclui o volume dos fragmentos. A partir daí aplicam-se as igualdades termodinâmicas conhecidas e chega-se facilmente a uma expressão

que dá a entropia de um fragmento de massa A e carga Z. A entropia da partição nuclear é então calculada somando-se as entropias individuais de cada fragmento.

A temperatura de cada partição é determinada com base na conservação da energia total do sistema. O procedimento é o seguinte: Resolve-se a equação:

$$\frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_b} + \sum_i^m E_i(T) = E_0^{GS} + E_0^* \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.3)$$

onde m é a multiplicidade dos fragmentos da partição,  $E_i(T)$  é a energia de cada um desses fragmentos e  $R_b$  é o raio do sistema no momento de quebra. A energia de excitação do sistema ( $E_0^*$ ) é um parâmetro livre. A solução desta equação fornece a temperatura associada à partição considerada.

O valor esperado de uma grandeza Q é então calculado tomando uma média de seu valor em cada partição do núcleo multiplicado pelo peso estatístico da partição. O cálculo é do tipo Monte Carlo. Assim, se representarmos uma partição de um núcleo caracterizado por número de massa A e número atômico Z pelo vetor  $N_i$ , teremos que:

$$\bar{Q} = \sum W(N_i) Q(N_i) \quad (3.4)$$

onde o somatório se estende a todas as partições possíveis do núcleo que conservam a carga e a massa total. Na fórmula acima, W é o peso estatístico de cada uma das partições e Q é o valor que esta grandeza toma naquela partição determinada. Como o número de partições de uma sistema realista (A = 100) é extremamente grande, recorre-se ao procedimento de Monte Carlo.

As conclusões do modelo são de que existe uma temperatura de quebra, além da qual um núcleo sofre fragmentação. A temperatura estimada está no intervalo de 5 a 6 MeV. A densidade de quebra é também calculada e seu valor está entre  $1/2$  e  $1/3$  da densidade nuclear normal. A energia de excitação capaz de induzir a fragmentação é maior do que 3 MeV para um sistema de 100 nucleons. O modelo prevê duas transições de fase, uma relacionada ao limiar de multifragmentação, que ocorre à temperatura de cerca de 5 MeV, conforme dito acima. A outra ocorre a uma temperatura bem mais alta, cerca de 16 MeV, e está relacionada com a transição de fase líquido-gás.

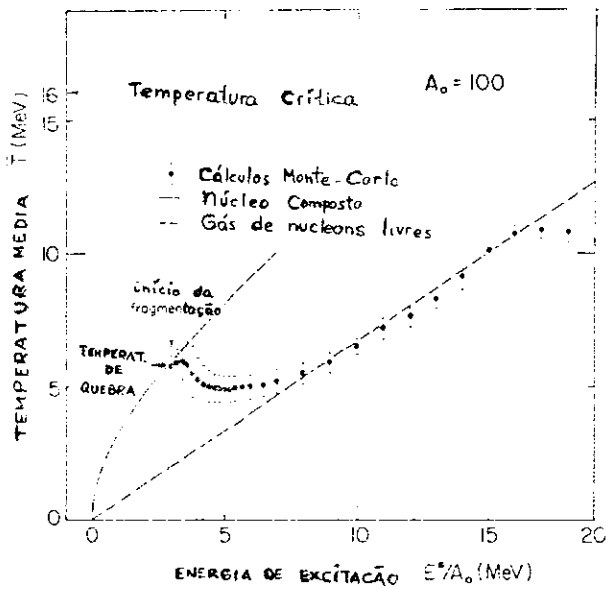


Fig. 3. 5. Resultados do modelo. Reparar na existência de uma temperatura de quebra, além da qual o núcleo sofre fragmentação.

O modelo de multifragmentação estatística explora de forma bastante eficaz os vínculos resultantes do tamanho finito do sistema. Representa um passo intermediário entre uma visão puramente termodinâmica, como a assumida pelo modelo anterior, e uma visão puramente estatística, considerada nos modelos de percolação. Uma suposição fundamental no modelo é de que o núcleo atinge o equilíbrio térmico antes de se fragmentar. Tal suposição encontra alguma evidência para colisões com prótons a cerca de 1 GeV, conforme o trabalho de Wedemann<sup>[44]</sup>.

O modelo consegue reproduzir os espectros de massa e energia bastante bem, mas necessita para isso considerar o decaimento secundário dos fragmentos formados.

### III.4- O MODELO DE FRAGMENTAÇÃO FRIA

Examinaremos agora, de forma bem sucinta, um modelo que faz uma hipótese diferente daqueles anteriormente examinados. Nos modelos anteriores, sempre estava implícita a idéia de equilíbrio termodinâmico. No modelo de fragmentação fria faz-se a hipótese inversa, isto é, o núcleo que se fragmenta ainda não atingiu o equilíbrio. O modelo baseia-se na idéia geométrica de que alguns nucleons interagem fortemente enquanto outros, fora da trajetória geométrica, ficam "frios". Esta imagem é fundamentada na observação experimental de que há pouca transferência de momentum transversal em uma colisão de alta energia. Os nucleons que participam ativamente da colisão são chamados, muito propriamente, de participantes, enquanto os outros, que permanecem em uma posição fora da zona de interseção geométrica são chamados espectadores.

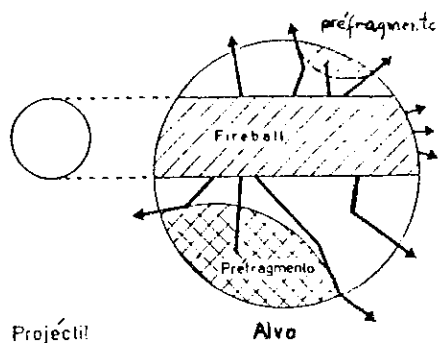


Fig. 3.6. Visão intuitiva do cenário explorado pelo modelo de fragmentação fria. Um projétil colide com um alvo formando uma bola de fogo na zona de interseção geométrica de suas trajetórias. Alguns nucleons provenientes da bola de fogo depositam energia e momentum na matéria espectadora fria. Este processo leva a uma desestabilização global da matéria nuclear, induzindo sua fragmentação.

A fragmentação é vista então como um processo em duas etapas: Na primeira etapa, os nucleons participantes formam uma região altamente excitada e em equilíbrio térmico, chamada de bola de fogo (fireball), enquanto a matéria espectadora permanece fria, pouco excitada. A segunda etapa tem início com o decaimento da bola de fogo, que começa a perder sua energia emitindo nucleons. Alguns destes nucleons emitidos penetram na matéria espectadora, transferindo energia e momentum para os nucleons que estavam frios. Esse fluxo de energia gera uma desestabilização da matéria espectadora, induzindo sua quebra. A força Coulombiana age separando esses "pedaços do núcleo", que ainda estão bastante excitados. Esses "pedaços" altamente excitados são chamados de pré-fragmentos. Os pré-fragmentos então decaem, perdendo energia de excitação por evaporação. Os pré-fragmentos, após este processo, dão origem aos fragmentos observados experimentalmente. Estima-se que este processo modifique a energia final dos fragmentos observados em relação à energia dos pré-fragmentos em apenas 1 MeV, sendo, portanto, desprezível.

Este modelo possui uma analogia bastante interessante com a imagem de um vidro se estilhaçando. A quebra do núcleo é vista como resultante de instabilidades mecânicas que se desenvolvem na região vizinha à bola de fogo. É um modelo interessante, mas que precisa de um grande número de parâmetros para reproduzir os dados experimentais. Em compensação, é o único que reproduz uma seção de choque diferencial tripla  $\frac{d^3\sigma}{dE dZ d\Omega}$  (energia, carga e ângulo).

### III.5- O MODELO DE EVAPORAÇÃO SEQUENCIAL

Neste modelo, considera-se que os fragmentos são formados em seqüência, emitidos da superfície de um núcleo altamente excitado. Após cada evaporação, o núcleo residual é suposto termalizado. A hipótese de emissão seqüencial é bastante diferente daquelas usadas nos modelos anteriores, que consideravam a fragmentação como um processo simultâneo, isto é, todos os fragmentos eram formados ao mesmo tempo.

Considera-se um sistema composto C, que decai em um sistema B através da emissão de uma partícula que podemos chamar de b. Denotando por  $N_b$  o número de partículas do tipo b emitidas, temos que  $d^2N_b / dt dE$  representa a taxa de emissão de partículas do tipo b com energia no intervalo entre E e E+dE. O formalismo desenvolvido permite a determinação desta seção de choque dupla. São considerados dois pontos de vista: evaporação de um gás de Fermi e emissão estatística de um núcleo excitado segundo a teoria de Weisskopf. Os resultados são comparados e então generalizados.

O sistema é caracterizado em cada instante de tempo por uma temperatura T, que diminui a medida que o sistema se desexcita. A temperatura no instante  $t = 0$  é máxima, caindo a zero quando o tempo vai a infinito. Efeitos como a emissão de núcleos excitados, recuo após a ejeção de uma partícula e barreira coulombiana são todos levados em consideração.

O modelo tem boa concordância com os dados experimentais, (ajuste do espectro de energia - excelente, ajuste do espectro de massa - bom.), sendo um dos únicos a fornecer uma escala de tempo

associada ao processo de fragmentação. Alguns pontos são, no entanto, obscuros. Por exemplo, a temperatura inicial utilizada para reproduzir os dados é de 15 MeV, extremamente alta. Além disso, sendo o processo de emissão muito rápido (40 unidades de massa em  $20\text{fm}/c$  para um núcleo com  $A=133$ ,  $Z=55$ ,  $T = 18$  MeV) não é fácil justificar a hipótese de termalização.

### III.6- OS MODELOS PERCOLATIVOS

Os modelos percolativos tentam explorar ao máximo o aspecto estatístico e geométrico do problema de fragmentação nuclear. Sua principal ferramenta teórica é a teoria da percolação, a qual será discutida brevemente no capítulo seguinte. Foram introduzidos pela primeira vez em física nuclear por Campi e Desbois<sup>[21]</sup> em 1985. Logo após foram publicados vários outros tratamentos, que diferiam bastante do trabalho original de Campi et al. O primeiro deles foi o artigo de Bauer et al.<sup>[22]</sup> de 1985 que introduz o Modelo de Rede Nuclear (Nuclear Lattice Model). Seguiram-se outros, incorporando novos fatores e desenvolvendo as idéias dos trabalhos anteriores (Chao et al.<sup>[25]</sup>, Biro et al.<sup>[26]</sup>).

A principal objeção que poderia ser feita a tais modelos consiste no fato de se considerar o núcleo como uma rede estática, onde os nucleons estão parados. Um argumento quanto a isso, porém, pode ser dado se examinarmos uma energia típica de um nucleon dentro do núcleo (40 MeV - energia de Fermi), e compararmos com a energia do projétil incidente. Para prótons de 100 GeV, vemos que o projétil vê uma imagem praticamente "congelada" do núcleo, sendo, portanto, plausível considerar o núcleo como formado de



nucleons parados em posições determinadas. Este argumento encontra-se em Bauer et al.<sup>[24]</sup>.

Podemos dizer que os modelos percolativos tem sido bastante estudados, sendo suficiente olhar as datas de publicação dos principais trabalhos sobre o assunto para se convencer de que se trata de assunto novo e interessante.

Mencionamos os trabalhos anteriores apenas para uma questão de referência. Nenhum deles será examinado, já que no capítulo seguinte faremos um estudo detalhado de um modelo percolativo recente (Chao et al.<sup>[25]</sup>) realizando vários cálculos e comparando com os resultados experimentais de Hirsch et al.

## CAPÍTULO IV

### O MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA

#### IV.1- A TEORIA DA PERCOLAÇÃO

Começaremos este capítulo fazendo uma exposição breve da teoria da percolação, já que se trata de assunto de aplicação ainda muito recente a problemas de física nuclear.

##### IV.1.1- Definição e Exemplos

Considere um conjunto de pontos geométricos no plano ou no espaço tridimensional onde cada ponto, que chamaremos de agora em diante de sítio, pode estar ocupado (não-ocupado) com uma probabilidade  $p$  ( $1-p$ ). Em geral, consideram-se estes sítios dispostos em forma de uma rede, com topologia bem definida, (por exemplo: rede cúbica simples, rede cúbica de face centrada e várias outras). Quando a probabilidade de ocupação  $p$  for pequena ( $p \ll 1$ ) os sítios, em sua maioria, estarão isolados, com muitos próximos vizinhos não ocupados. Por outro lado, quando  $p \simeq 1$  a quantidade de sítios ocupados torna-se muito grande, e estes ficam quase todos conectados entre si, formando um grande aglomerado. A fig 4.1 retirada de Stauffer<sup>[27]</sup>, dá uma boa idéia do que ocorre quando variamos  $p$ . Lá, estão plotados os resultados de uma simulação Monte-Carlo para percolação de sítio.

Extrapolando, podemos imaginar uma rede infinitamente grande. Para uma tal rede, surge a possibilidade de haver um numero infinito de sitios conectados. Podemos compreender melhor o que ocorre se partirmos da figura 4.1. Lá, quando  $p=0.60$ , está assinalado um cluster bastante grande, cujos sitios estão todos conectados por distâncias de mais próximos vizinhos (pode-se ir de um sitio a outro tomando-se apenas caminhos verticais ou horizontais). Na rede infinita, deve haver uma probabilidade  $p_c$  na qual aparece um cluster com infinitos pontos ligados, como na figura 4.1 para  $p = 0.60$ . Ao cluster mencionado acima dá-se o nome de **cluster infinito**. Quando é que, pela primeira vez, ele aparece? A resposta a essa pergunta, isto é, o valor de  $p$  para o qual o cluster infinito aparece pela primeira vez, nos dá a chamada **probabilidade crítica**  $p_c$ . O resultado fundamental da teoria da percolação nos diz que, em redes infinitas, esta probabilidade é bem definida e única e que para  $p > p_c$  haverá sempre um cluster infinito. Diz-se então que o sistema passou de um estado não-percolante ( $p < p_c$ ) para um estado percolante ( $p \geq p_c$ ).

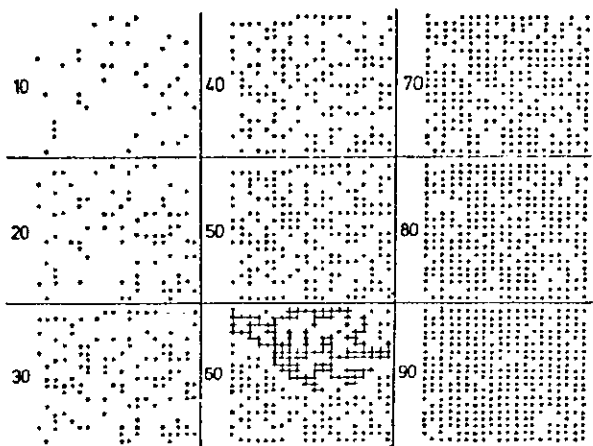


Fig 4.1-Exemplo com uma rede quadrada  $20 \times 20$  de um problema de percolação de sitio, ilustrando a formação de clusters. Foi feita uma simulação Monte Carlo para  $p=0.1, 0.2, \dots, 0.9$ . Para  $0.6$  está assinalado um cluster que une os dois lados da rede.

O parágrafo acima descreve os fundamentos de um problema de percolação. A primeira formulação matemática deste problema foi feita por Broadbent e Hammersley<sup>[42]</sup> em 1957 que estudaram como as propriedades aleatórias de um "meio" influenciavam a passagem de um "fluido" através deste. A própria palavra percolação deriva de uma palavra latina que significa coar, filtrar. Em termos intuitivos, um sistema percolante seria então aquele que permitiria a passagem de um "fluido" através de uma distância infinita do meio.

Sistemas que podem ser estudados utilizando conceitos de percolação são bastante comuns em diversas áreas. Poderíamos citar a propagação de epidemias, transmissão de informações por redes telefônicas, condutância de uma rede de resistores distribuídos aleatoriamente, transições sol-gel, polimerização de moléculas orgânicas, transição isolante-semicondutor de Si dopado com P e inúmeros outros casos, que ocorrem, principalmente, na física do estado sólido.

#### IV.1.2- Tipos de Percolação

O mecanismo aleatório do meio define dois tipos de percolação:

i) Percolação de sítios - Ocorre quando as posições ocupadas pelos objetos são aleatórias, e as conexões entre eles são determinadas por uma regra que depende de suas posições.

ii) Percolação de ligação - Ocorre quando as posições dos pontos são fixas e as conexões entre eles são aleatórias.

Os casos citados acima são os mais simples possíveis, em que o problema pode ser descrito por uma única probabilidade de

conexão, que permanece constante independentemente das conexões vizinhas. Pode-se ter combinações as mais variadas fazendo a probabilidade  $p$  depender de uma série de fatores, tais como a localização dos sítios, a direção, a quantidade de conexões na vizinhança e muitos outros. Podemos também considerar o caso híbrido de percolação de sítio-ligação, onde o sistema é descrito por duas probabilidades, representando os dois mecanismos aleatórios do meio. Além disso, é possível considerar que as probabilidades de conexão são funções do tempo.

#### IV.1.3- Transições de Fase de Percolação

Os modelos de percolação são extremamente úteis para descrever fenômenos críticos e transições de fase. Isto porque um sistema de percolação apresenta uma transição puramente geométrico-probabilística, onde os clusters são objetos estáticos. Em suma, a percolação pode descrever uma transição de fase sem precisar usar uma Hamiltoniana. As grandezas estudadas em percolação, portanto, dizem respeito ao tamanho e distribuição dos clusters. O fato que motiva tal estudo é que muitas propriedades macroscópicas dos sistemas de percolação estão relacionadas apenas ao tamanho dos clusters, e não à sua forma particular.

A grandeza mais importante na aplicação que faremos da teoria da percolação é a distribuição de clusters em função da probabilidade  $p$ . Se chamarmos de  $n(A,p)$  o número de clusters de tamanho  $A$  ( $A$ -sítios), em um sistema caracterizado pela probabilidade  $p$ , teremos o seguinte resultado, conhecido como Lei de escala (Stauffer<sup>(27)</sup>), que dá  $n(A,p)$  em termos de alguns rede.

$$n(A,p) \propto A^{-\tau} f([p-p_c]A^\sigma) \quad , \quad f(0)=1 \quad (4.1)$$

onde:

$\tau$  e  $\sigma$  são expoentes que não dependem de  $p$ .

$p_c$  é a probabilidade crítica de percolação.

$f$  é a chamada função de escala (scaling function).

A simples observação da fórmula acima permite uma conclusão bastante importante: No ponto crítico ( $p = p_c$ ), a distribuição de clusters segue uma lei da potência  $A^{-\tau}$ . O valor de  $\tau$  e de  $\sigma$  para redes tridimensionais é de  $\tau \simeq 2.1$  e  $\sigma \simeq 0.45$ , respectivamente. A lei acima só é rigorosamente válida para sistemas infinitos.

Quando passamos a sistemas finitos, a transição de fase é "atenuada", não havendo mais uma probabilidade crítica bem definida, mas sim um "intervalo crítico". Neste intervalo crítico temos apenas uma probabilidade de encontrar um cluster percolante, isto é, enquanto anteriormente após uma certa probabilidade de conexão tínhamos certeza absoluta de que o cluster infinito apareceria ( $p_\infty = 1$  se  $p > p_c$ ), agora não temos mais esta certeza ( $p_n < 1$  se  $p > p_c$ ,  $p_n$  - probabilidade de aparição de um cluster infinito em uma rede de  $n$  sítios). Outro problema em sistemas finitos consiste na própria definição de cluster percolante. Pode-se defini-lo como sendo o cluster que une determinadas regiões da rede (por exemplo, duas faces opostas de uma rede cúbica). Esta definição, porém, encontra problemas para redes que não tenham fronteiras retas ou planas. A próxima figura, retirada do trabalho de Bauer et al.<sup>[24]</sup> de 1986 ilustrará estes pontos. Lá está plotada a probabilidade de

aparecer um cluster percolante ( $p_{perc}$ ) em função da probabilidade de quebra de ligações ( $p_b$ ).

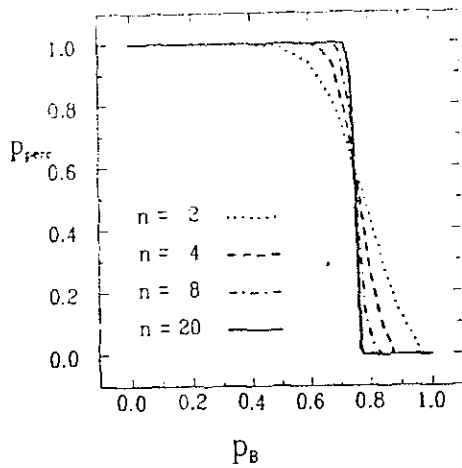


Fig 4.2- Exemplo do efeito de sistema finito na probabilidade crítica de percolação. Foi considerada percolação de ligação. A probabilidade de aparecer um cluster percolante está plotada em função da probabilidade de quebra. Repare que ao aumentarmos o tamanho do sistema a curva tende a uma função degrau, com uma probabilidade crítica bem definida, ou seja,  $p_n \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ . A simulação Monte-Carlo foi feita em um rede cúbica  $n \times n \times n$ .

O comportamento das grandezas de percolação para sistemas finitos é descrito por técnicas que utilizam o conceito de grupo de renormalização. Para um tratamento elementar e bastante claro aconselhamos o livro de Stauffer - referência [27]. Este resumo da teoria da percolação não dá uma idéia da complexidade deste campo, que parte de um conceito bastante simples, mas cujo desenvolvimento matemático é extremamente intrincado. Ao leitor que tiver curiosidade sobre este tópico, recomendamos o livro de Kesten (referência [31]), onde o tópico é desenvolvido sob um ponto de vista matemático e algumas probabilidades críticas são calculadas exatamente.

## IV.2- O MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA

Descreveremos agora um modelo de fragmentação que utiliza idéias de percolação. Começaremos explorando o cenário físico sobre o qual o modelo se baseia, deixando para depois a parte mais técnica.

O modelo considera a fragmentação nuclear como um processo de duas etapas. Na primeira etapa, após uma colisão com um projétil pequeno e altamente energético, o núcleo e o projétil formam um sistema composto muito excitado. A restrição que o modelo faz relativamente ao tamanho do projétil é basicamente devida ao fato de, neste caso, podermos minimizar a dependência com o parâmetro de impacto. Parte da energia depositada no sistema é liberada através da emissão de nucleons rápidos. Em uma segunda etapa, o sistema se expande, e dependendo da energia de excitação resultante da primeira etapa, as instabilidades criadas tendem a quebrar o sistema em vários fragmentos de tamanho apreciável. Estes fragmentos podem ter uma superfície bastante estranha, com geometria bem diferente da esférica. Isto implica que eles ainda estão muito excitados. Considera-se então que são produzidas novas quebras até que os fragmentos resultantes sejam aproximadamente esféricos. Estes fragmentos mais compactos são mais estáveis, e de vida média muito maior. Todo este processo é considerado ser extremamente rápido. Os fragmentos então formados são acelerados pela força Coulombiana mútua sendo, finalmente, detectados e medidos. Este quadro para a fragmentação parece encontrar apoio experimental, como mostram as análises de uma experiência recente



(Warwick et al.<sup>[9]</sup>) em que os produtos de uma colisão central Ne+Au a 42 GeV foram todos detectados. Foi determinado nestas análises que cerca de 100 nucleons rápidos eram ejetados no primeiro estágio da colisão, seguidos pela produção de 5 ou 6 fragmentos pesados junto com cerca de 30 nucleons lentos.

O Modelo de Percolação Tetraédrica trata a formação dos clusters através da teoria da percolação, usando um algoritmo de percolação de sítio. O modelo relaciona a multifragmentação a um fenómeno crítico (de percolação). Considera-se que os nucleons estão arrumados dentro de uma esfera segundo uma rede FCC (Face-Centered-Cubic). Um algoritmo Monte Carlo é empregado para seleccionar aleatoriamente  $pA$  nucleons da rede FCC, sendo  $0 < p < 1$  constante para todo sítio da rede, o que pode ser interpretado como uma simulação de um sistema termalizado, segundo Bauer et al.<sup>[29]</sup>. Estes  $pA$  nucleons seleccionados serão considerados os remanescentes do primeiro estágio da colisão. Um algoritmo de identificação de clusters procura então conjuntos de quatro pontos do sistema que tenham permanecido ocupados e que formem um tetraedro cujo lado é a distância de primeiros próximos vizinhos. Clusters que têm pontos em comum são combinados entre si, formando um novo cluster. Na referência [25] são descritos dois critérios de união: o primeiro, que origina o MODELO I corresponde a unir os clusters quando estes possuem 1 ou mais pontos em comum. O segundo critério, que origina o MODELO II, só une os clusters se estes possuem dois ou mais pontos em comum. Chao e Chung<sup>[25]</sup> calcularam o espectro de massa de uma colisão  $p + Kr$  relativística utilizando o MOD II descrito acima. O principal problema consiste em

estabelecer a probabilidade crítica de percolação  $p$  que reproduz um espectro de massa da forma  $A^{-\tau}$ . Os resultados de Chao e Chung indicam que para valores de  $p$  no intervalo  $0.55 < p < 0.95$  todas as curvas comportam-se aproximadamente como  $A^{-\tau}$ . O expoente  $\tau$  também é uma função da probabilidade  $p$ , isto é,  $\tau = \tau(p)$  e os mesmos autores determinaram que para  $0.66 < p < 0.79$   $\tau(p)$  é aproximadamente constante e está no intervalo  $2.6 < \tau(p) < 2.7$ , o que pode ser comparado com o dado da referência 4 ( $\tau = 2.65$  - Análises recentes dão um valor um pouco menor para  $\tau$ .<sup>(99)</sup>). A fig 4.3 contém esses resultados.

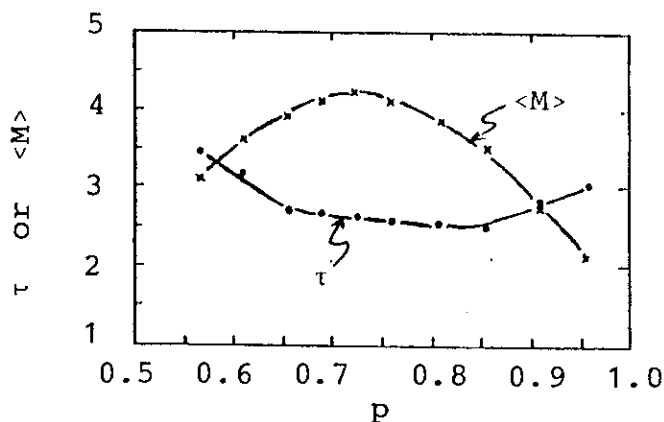


Fig 4.3-Gráficos mostrando o valor de  $\tau$  e de  $\langle M \rangle$ , número médio de fragmentos com  $A > 4$  em função da probabilidade de percolação. Repare que  $\tau$  se mantém relativamente constante para um intervalo grande de probabilidades. Isto se deve ao fato do sistema examinado ser muito pequeno -  $A = 87$ .

O comportamento visto acima é coerente com o que poderíamos esperar de um sistema finito, isto é, a transição de fase de percolação foi atenuada, e tudo que se obteve foi um intervalo crítico, que no caso foi bastante grande devido ao tamanho do sistema ( $A = 87$ ). Mesmo assim, se compararmos o resultado do cálculo com o dado experimental de Hirsch et al., podemos ver que a concordância é notável.

O modelo acima descrito tenta levar em conta de modo

geométrico os efeitos de decaimento secundário, simulados através do processo de percolação tetraédrica e do critério de combinação de clusters. O efeito destas duas características é a inibição da formação de clusters ramificados, o que de alguma forma deve corresponder a um tratamento efetivo da evaporação.

A seguir faremos vários cálculos com auxílio do modelo acima, e mostraremos que não só o espectro de massa, mas praticamente todos os dados experimentais podem ser reproduzidos com precisão comparável à de outros modelos mais sofisticados. Os resultados e as conclusões mais importantes serão discutidos no capítulo V.

#### IV.3- O ESPECTRO ISOTÓPICO

O cálculo do espectro de massa descrito na referência [25] não pode ser usado para determinar a distribuição isotópica, já que não faz nenhuma distinção entre prótons e nêutrons. É bastante interessante notar que uma mera aplicação da conservação da carga não é capaz de reproduzir o espectro, como podemos ver na figura 4.4. Isto indica que temos que introduzir informações nucleares específicas para conseguirmos um acordo com a experiência. Adotamos o método de cálculo usado por Knospe et al.<sup>[26]</sup>, que é bastante simples e direto. Lá, o espectro isotópico foi calculado usando-se um modelo de percolação simples através da introdução de alguns pesos estatísticos. O procedimento é o seguinte:

1- Calculamos a distribuição de massa da forma usual, usando o modelo de percolação tetraédrica (conforme a referência [25]), sem fazer intervir nenhuma propriedade nuclear, sendo no entanto

atribuído o caráter próton ou nêutron a cada sítio ocupado de forma a satisfazer a conservação da carga. Sorteamos p uniformemente no intervalo crítico  $0.7 < p < 0.8$  determinado por Chao e Chung<sup>[25]</sup>. Separamos os fragmentos por carga e chegamos à distribuição isotópica  $f(A,Z)$ . Esta distribuição foi gerada somente pela estatística do problema. A figura 4.4 mostra o resultado obtido.

2- Utilizamos o procedimento adotado na referência [28], que consiste em ponderar a distribuição isotópica achada acima por fatores que levem em consideração a assimetria nêutron-próton. Introduzimos pesos estatísticos, cuja forma analítica é exatamente igual a usada na referência citada acima. Estes pesos provêm de uma sofisticada fórmula da gota líquida e não serão discutidos aqui. As justificativas de tal procedimento podem ser encontradas no trabalho original. Os pesos estatísticos usados foram:

$$W(A,Z) = 1 \text{ se } A=1$$

$$W(A,Z) = \exp [-(\gamma/4TA)(A-2Z)^2] \text{ se } 2 \leq A \leq 10$$

$$W(A,Z) = \exp [-(\gamma/4TA)(A-2Z-0.4A^2)/(A+200)^2] \text{ se } A > 10$$

onde  $\gamma = 100$  MeV é um coeficiente fixo, análogo ao coeficiente do termo de simetria da fórmula da gota líquida. A grandeza T pode ser interpretada como uma temperatura, e é o parâmetro livre do cálculo.

3- Calculamos então a distribuição isotópica ponderada, tomando a distribuição achada no item 1 e os pesos considerados no item 2 da seguinte forma:

$$f_w(A,Z) = f(A,Z) \cdot W(A,Z) \quad (4.2)$$

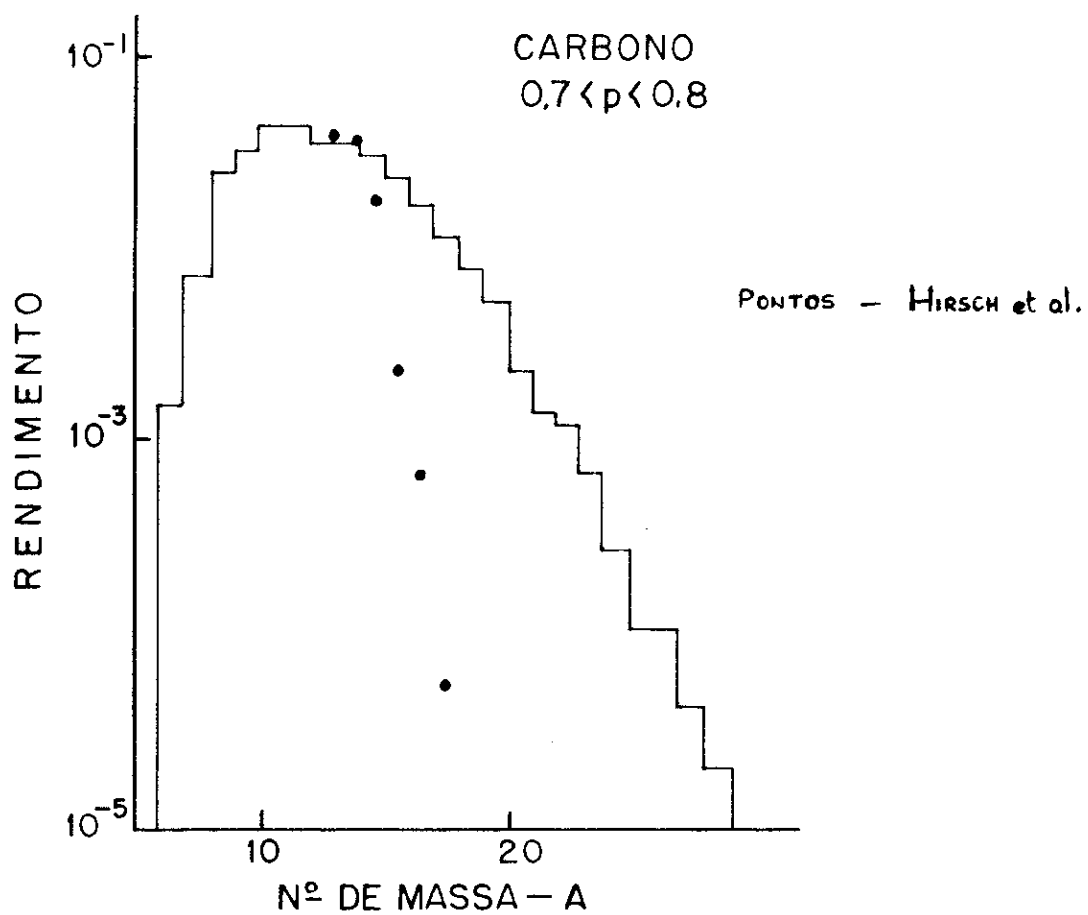


Fig. 4. 4. Espectro isotópico do carbono calculado utilizando-se apenas estatística.

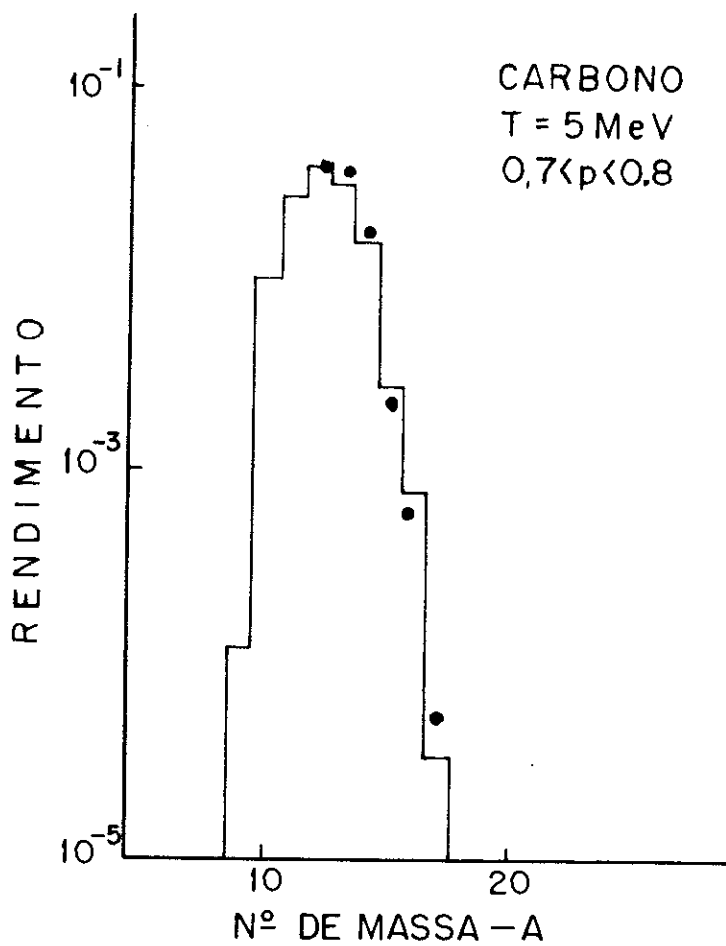


Fig. 4. 5a. Espectro isotópico do carbono calculado utilizando-se os pesos estatísticos introduzidos no texto. A temperatura usada foi de  $T=5 \text{ MeV}$ .

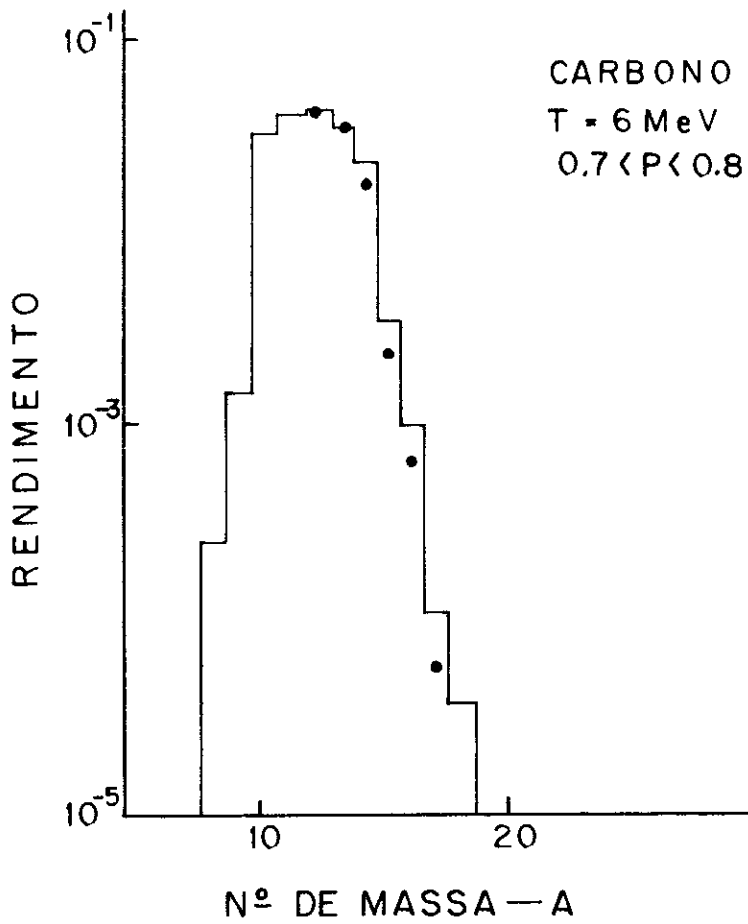


Fig. 4. 5b. Espectro isotópico com temperatura  $T=6 \text{ MeV}$ .

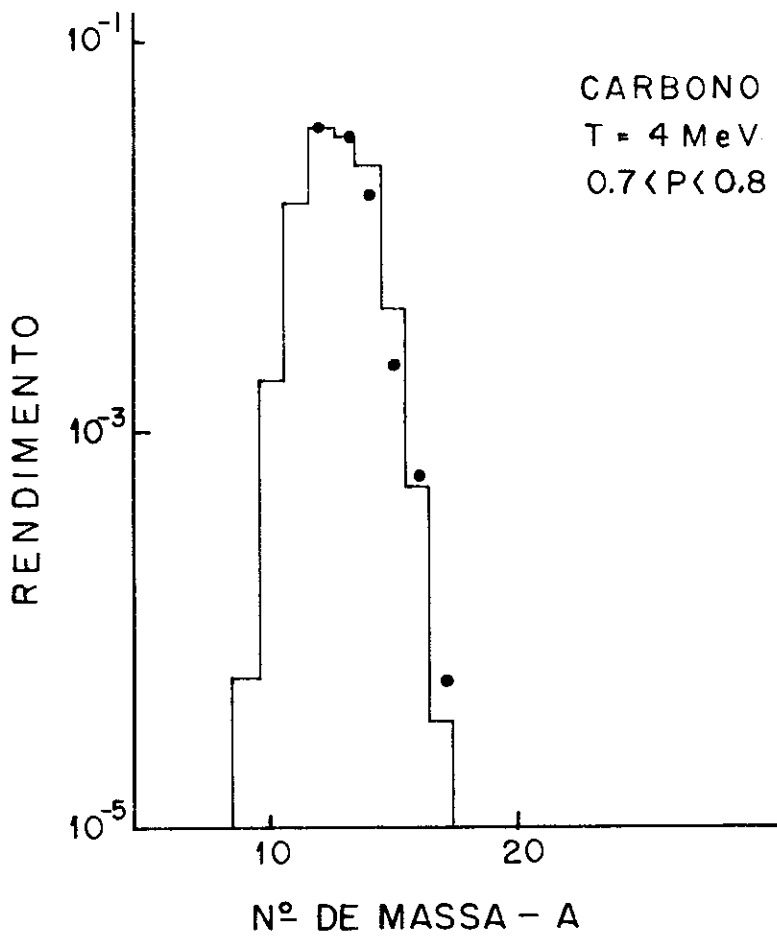


Fig. 4.5c. Espectro isotópico com temperatura  $T=4 \text{ MeV}$ .



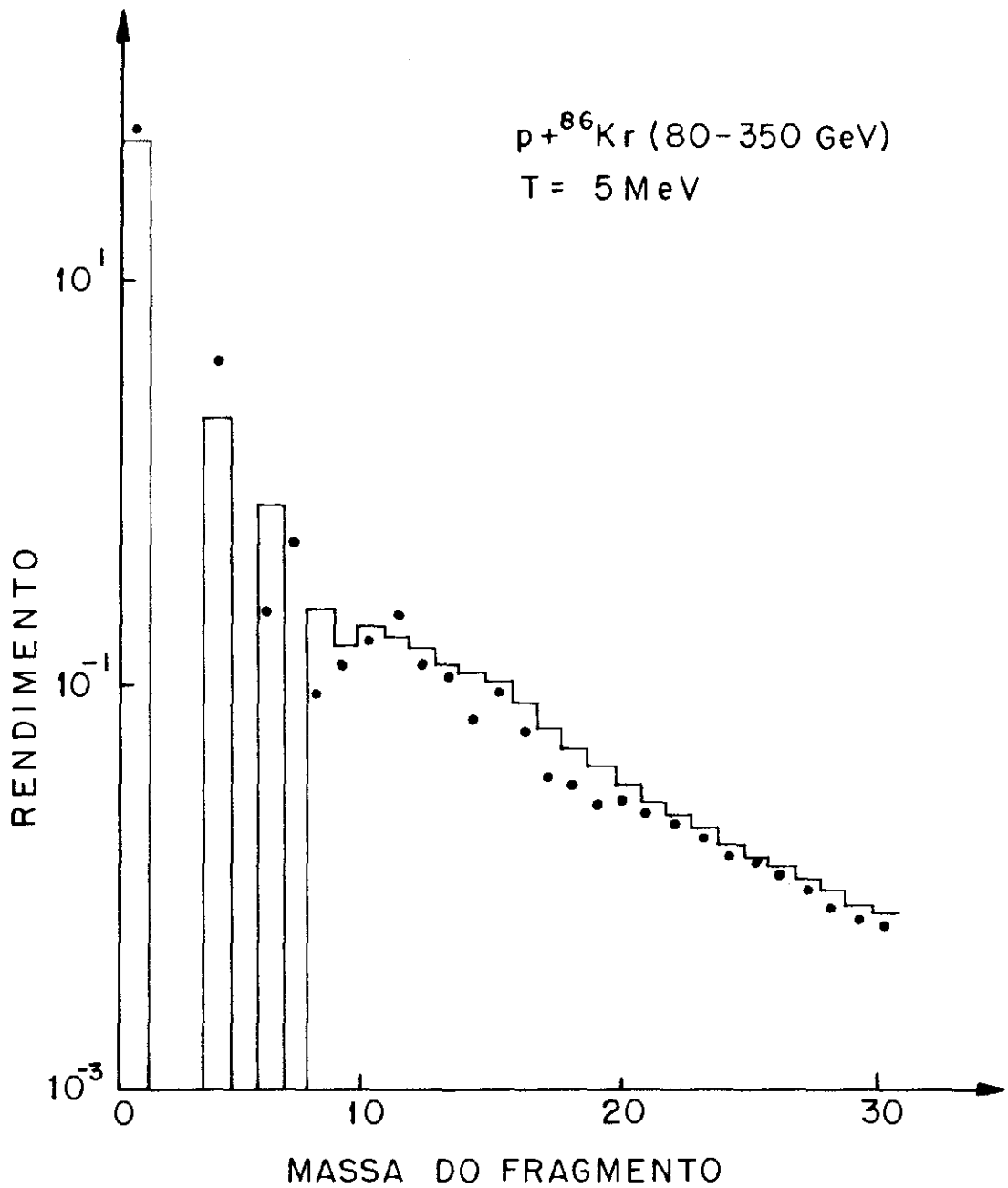


Fig. 4. 6. Espectro de massa calculado com os pesos estatísticos do texto. Os pontos pretos são os dados experimentais obtidos por Hirsch et al. Note-se a falta de fragmentos com 2, 3, 5 e 7 nucleons, consequência da geometria usada no modelo de percolação tetraédrica.

Os resultados do cálculo para isótopos de Carbono estão mostrados nas fig 4.4 , 4.5a, 4.5b e 4.5c. Podemos ver que a concordância é boa, apesar da aproximação acima ser a mais simples possível.

O espectro de massa também pode ser recalculado usando-se o esquema acima. Basta tomar  $f_{\nu}(A) = \sum f_{\nu}(A, Z)$  onde o somatório se estende a todo Z. O resultado, com  $T = 5.0$  MeV é mostrado na fig 4.6. Não há grandes mudanças em relação ao espectro anterior (calculado na referência [25]), o que reforça a idéia de que o espectro de massa é uma questão muito mais de estatística e geometria do que de propriedades nucleares específicas.

Outro fator interessante consiste na dependência dos espectros isotópicos em relação à temperatura. O efeito da temperatura consiste em afinar o espectro, tornando muito improvável o aparecimento de isótopos com razão carga/massa longe de 0.5. Os resultados para 4, 5 e 6 MeV são, porém, muito parecidos, o que parece indicar que não é possível extrair, através desses cálculos, informações precisas sobre a temperatura de quebra, embora possamos situá-la grosseiramente na faixa de 3 a 7 MeV.

Os resultados acima mostram que com auxílio de apenas dois parâmetros,  $p$  e  $T$ , é possível a reprodução dos espectros isotópico e de massa simultaneamente. A conclusão mais interessante refere-se à necessidade de se introduzir uma informação não-estatística e não-geométrica para a reprodução do espectro isotópico.

Passemos agora ao cálculo mais importante e que constitui a contribuição original deste trabalho - o cálculo do espectro de energia.

#### IV.4- O ESPECTRO DE ENERGIA

O espectro de energia é uma informação muito importante a respeito da multifragmentação nuclear. É um dado experimental mais difícil de reproduzir do que o espectro de massa, na medida que exige maior quantidade de hipóteses físicas. Enquanto praticamente todos os modelos de multifragmentação reproduzem o espectro de massa, apenas alguns (Friedman et al.<sup>[17]</sup> e Barz et al.<sup>[20]</sup>) atacam o problema do espectro de energia. Sua investigação pode trazer informações importantes sobre os aspectos dinâmicos do processo de multifragmentação, assim como sobre a temperatura e densidade nas quais ocorre a quebra nuclear. Constitui-se no tema central deste trabalho.

Vamos utilizar o Modelo de Percolação Tetraédrica, complementado por algumas suposições bastante razoáveis, para tentar reproduzir o espectro de energia do  $^{12}\text{C}$  resultante de uma colisão  $p + ^{86}\text{Kr}$  altamente energética medido por Hirsch et al.<sup>[4]</sup>

Utilizaremos o modelo para investigar alguns tópicos importantes e sobre os quais não há consenso na literatura. Primeiramente calcularemos o espectro de energia supondo um núcleo quente, completamente termalizado e portanto caracterizado por uma temperatura bem definida  $T$ . A temperatura será introduzida através do uso da fórmula da Gota Líquida Térmica da referência

[12]. A fórmula da Gota Líquida Térmica representa uma generalização para núcleos quentes da fórmula da Gota Líquida usual. A generalização leva em conta a excitação da matéria nuclear, fazendo correções dos termos de volume e superfície em função da temperatura.

Vamos considerar que após o primeiro estágio da reação com o próton formam-se fragmentos à densidade normal  $\rho_0$ . O sistema como um todo tem sua densidade diminuída, já que alguns nucleons foram ejetados. No instante de dirupção, o sistema é caracterizado por um volume final  $V_f$  e uma densidade  $\rho_f$  que se relacionam com os valores iniciais através das relações:

$$\rho_f = \rho_0 \left[ \frac{\rho_0}{1 + X} \right] \quad V_f = V_1 + X V_1 \quad (4.3)$$

onde  $X$  representa o acréscimo de volume que o sistema experimentou, isto é, quanto o sistema se expandiu antes de se fragmentar em partes que interagem apenas através da força coulombiana.

Podemos relacionar os parâmetros acima com grandezas típicas da percolação, tais como o parâmetro de rede -  $d$  e a probabilidade de ocupação -  $p$ , usando relações geométricas simples da rede FCC.

$$d = \left( \frac{4V_f}{A} \right)^{1/3} = 1.17 \left[ \frac{16\pi}{3} (1+X) \right]^{1/3} = 2.98 (1+X)^{1/3} \quad (4.4)$$

o que equivale a:  $d = 4^{1/3} p^{1/3} \rho^{-1}$ , onde  $V_f$  é o volume do sistema,  $A$  é o número de sítios englobado por este volume,  $p$  é a probabilidade de percolação,  $\rho$  é a densidade e  $X$  é o aumento relativo de volume.

O Ansatz de Campi (Campi et al.<sup>[22]</sup>), nos dá a energia que foi

depositada no sistema após a ejeção dos primeiros nucleons rápidos. Este Ansatz relaciona a energia de excitação por nucleon do sistema com a probabilidade de ejeção de um nucleon:

$$\epsilon^* = \epsilon_0 \left[ \frac{1 - p}{p} \right] \quad (4.5)$$

Esta relação foi proposta por Campi et al. na referência [22]. A interpretação do parâmetro  $\epsilon_0$  dada aí foi de que ele representaria a energia de excitação depositada no sistema devido à ejeção de um nucleon. Seu valor, proposto por Campi, foi de 8 MeV.

Resta-nos determinar se esta energia é suficiente para fragmentar o sistema. Isto é feito usando-se a fórmula da gota líquida generalizada e levando em conta a conservação da energia total. Se a energia for suficiente, o sistema se fragmentará e será caracterizado por uma determinada temperatura  $T$ , que pode também ser calculada. Esta temperatura caracteriza o grau de excitação dos fragmentos (energia interna) e o grau de excitação do sistema de fragmentos (energia translacional). É interessante notarmos o grau de liberdade a mais (translação) que deve ser introduzido nos cálculos. A fórmula da Gota Líquida para núcleos quentes tem a forma:

$$E_{A,Z}^{INT}(T) = \left( W_0 + \frac{T^2}{\epsilon_0} \right) A + \left( \beta - T \frac{d\beta}{dT} \right) A^{2/3} + E_{asim} + E_{coul} \quad (4.6)$$

A energia de excitação do sistema, após a ejeção dos primeiros nucleons rápidos é então dada por :

$$E^*(T) = E^{INT}(T) - E^{INT}(T=0) \quad (4.7)$$

$$E^*(T) = \frac{T^2}{\epsilon_0} A - T \frac{d\epsilon}{dT} A^{2/3} \quad (4.8)$$

Os termos  $E_{\text{ast } m}$  e  $E_{\text{coul}}$  representam as energias de assimetria nêutron-próton e a energia coulombiana, que não dependem da temperatura explicitamente e não interferem no cálculo. Os parâmetros  $W_0$  e  $\epsilon_0$  tem valores de -16 e 16 MeV respectivamente. O termo  $\beta(T)$  tem a seguinte forma:

$$\beta(T) = \beta_0 \left[ \frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2} \right]^{5/4} \quad \beta_0 = 18 \text{ MeV} \quad T_c = 16 \text{ MeV} \quad (4.9)$$

A fórmula para a energia de excitação fica então: (4.10)

$$E^*(T) = \frac{T^2}{\epsilon_0} A + \beta_0 A^{2/3} \left( \left[ \frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2} \right]^{5/4} \left[ 1 + \frac{5 \left( \frac{T}{T_c} \right)^2}{1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4} \right] - 1 \right)$$

O sistema inicial é caracterizado por um número de nucleons igual a  $pA_0$ , uma densidade  $\rho_0$ , e uma energia de excitação  $\epsilon^*$  dada por  $\epsilon^* = \epsilon_0 \left[ \frac{1-p}{p} \right]$ , segundo o Ansatz de Campi. Após a fragmentação, o sistema passa a ser formado por  $m$  fragmentos de massa  $A_i$ , onde  $1 \leq i \leq m$ . A conservação de energia obriga que a soma da energia total dos fragmentos seja igual à energia do sistema inicial. Se chamarmos de  $E^{\text{GS}}$  a energia do sistema em seu estado fundamental (calculada com a fórmula da gota usual para  $T = 0$ ), teremos que a seguinte equação deverá ser satisfeita:

$$E^{GS} + \epsilon^* = \sum_1^m [E_1^{GS} + E_1^*(T) + \frac{3}{2}kT] + E_c \quad (4.11)$$

Nesta equação, o primeiro termo representa o sistema antes de se fragmentar, e  $\epsilon^*$  deve ser calculada a partir da fórmula de Campi. No segundo termo, somamos as energias de cada fragmento formado, onde:  $E_1^*(T) = E^*(T, A_1, Z_1)$ . e incluímos o grau de liberdade de translação, representado pelo fator  $\frac{3}{2}kT$ . O termo  $E_c$  representa a energia coulombiana de uma esfera uniformemente carregada com o raio do sistema. Sua presença é consequência do método de cálculo da energia coulombiana e não possui maiores implicações físicas. Detalhes encontram-se em Bondorf et al.<sup>(12)</sup>.

A solução desta equação permite a determinação da temperatura de fragmentação. Isto foi feito numericamente utilizando-se o método de Newton-Raphson. Estamos agora em condições de passar ao cálculo efetivo do espectro de energia.

O cálculo será dividido em várias etapas, que serão detalhadas em separado. Tal divisão visa tornar mais claro o procedimento, que é algo complicado. As etapas são as seguintes:

1- Sorteamos o parâmetro de impacto uniformemente no intervalo  $[0, R]$ , onde  $R$  é o raio do núcleo. Isto foi feito com a finalidade de tornar o resultado mais realista, visto que os dados experimentais são todos do tipo inclusivo, e portanto incluem todos os parâmetros de impacto.

2- Determinamos a probabilidade de percolação a partir da expressão sugerida na referência [23]. Lá, foi utilizado um modelo

de percolação por ligação e introduzida uma expressão do tipo Woods-Saxon para relacionar o parâmetro de impacto com a probabilidade de percolação. Adaptamos tal expressão ao caso da percolação por sítio, admitindo que, aproximadamente,  $p_s = 1 - p_b$ , ou seja, a probabilidade de um nucleon permanecer no sistema ( $p_s$ ) é equivalente à probabilidade das ligações deste nucleon não serem quebradas ( $1 - p_b$ ). A forma analítica usada foi:

$$p = 1 - p_0 \left[ \frac{1}{1 + e^{(b-R)/a}} \right]$$

Onde  $b$  é o parâmetro de impacto sorteado e  $R$  é o raio do núcleo.

A constante  $a$  foi dado o valor de 1 Fermi, em concordância com a referência original - Bauer et al. <sup>[29]</sup>. Determinamos a constante  $p_0$

que aparece na fórmula acima considerando que a probabilidade média  $\langle p \rangle$  deve se manter no intervalo  $0.70 < p < 0.80$ , que é o intervalo crítico determinado pela análise do espectro de massa.

3- Admitimos que o sistema que se fragmenta está caracterizado por uma energia de excitação  $\epsilon^*$ , relacionada ao número de nucleons ejetados pelo sistema no primeiro estágio do processo.

4- Associamos  $\epsilon^*$  à probabilidade de percolação  $p$  através do Ansatz de Campi:  $p = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon^*}{\epsilon_0}}$ , onde  $\epsilon_0$  é um parâmetro cujo valor foi

tomado como sendo ajustável, esta etapa é, conceitualmente, o ponto mais delicado do cálculo, já que relacionamos a energia depositada no sistema, que sem dúvida é uma função muito complicada de diversos parâmetros, com apenas uma grandeza estatística - a probabilidade de ocupação  $p$ . A justificativa para a fórmula acima deve vir "*a posteriori*", quando compararmos os resultados do cálculo com os dados experimentais.



5- Usamos um procedimento Monte-Carlo e desocupamos uma quantidade  $(1-p)A$  de sítios de uma rede FCC, colocada dentro de uma esfera. Um algoritmo de identificação de clusters determina então as partições nucleares associadas a esta probabilidade  $p$ . Este algoritmo procura 4 sítios ocupados que formem um tetraedro cujo lado é a distância de mais próximos vizinhos. Em seguida, o algoritmo combina clusters com 2 ou mais pontos em comum para formar os fragmentos. É importante notar que a uma mesma probabilidade  $p$  são associadas várias partições diferentes, que dependem das posições dos nucleons remanescentes do primeiro estágio da colisão, posições estas que são, também, variáveis aleatórias.

6- Guardamos aquelas partições que possuem o fragmento que nos interessa, no caso o  $^{12}\text{C}$ .

7- Consideramos que o sistema que se fragmenta possui uma energia total dada pela sua energia do estado fundamental mais sua energia de excitação.

8- Resolvemos a equação  $E_{\text{sistema}}^{\text{antes}} = \sum_{\text{fragmentos}} E^{\text{depois}}(T)$ , e encontramos a temperatura  $T$  que caracteriza o sistema de fragmentos no instante de dirupção. Utiliza-se o Método de Newton-Raphson. Esta etapa impõe que o sistema conserve energia.

9- Os fragmentos formados são considerados em equilíbrio térmico, e caracterizados pela temperatura  $T$ , achada acima. O sistema é suposto clássico, obedecendo à distribuição de Maxwell-Boltzmann.

$$f(\mathbf{p}) = (2\pi mT)^{-3/2} \exp(-\mathbf{p}^2 / 2mT)$$

10- As posições e as velocidades iniciais dos fragmentos são então determinadas. As posições são aquelas do centro de massa de cada

fragmento, considerando-se os nucleons individuais em sitios da rede FCC. Estas posições dependem da densidade de quebra do sistema que se fragmenta. As velocidades iniciais são determinadas através de sorteios Monte-Carlo seguindo a distribuição de Maxwell-Boltzmann acima. As direções são consideradas equiprováveis e sorteadas uniformemente (Apêndice II), levando-se em consideração a conservação do momentum total.

11- O sistema é então liberado e expande-se devido à interação Coulombiana entre os fragmentos, sendo as equações clássicas de movimento resolvidas numericamente (Método de Runge-Kutta). Consideramos sempre  $A = 2Z$ , exceto para nucleons soltos, quando então sorteávamos a carga entre 0 (néutron) e 1 (próton).

12- A energia do sistema é calculada a cada passo e a razão  $r = E_{\text{cin}} / E_{\text{pot}}$  é determinada. A expansão é terminada quando  $r \geq 0.98$ .

13-Acumulamos estatísticas dos resultados, e só terminamos quando a mudança quantitativa das energias determinadas for menor que 5% em todo espectro. Por exemplo, se em 100 repetições fossem obtidos 100 núcleos com 20 MeV então em 200 repetições deveríamos obter entre 195 e 205 núcleos com 20 MeV. Foi determinado que após 2000 repetições não havia mudanças maiores do que 3%.

14-O cálculo é repetido para várias energias de excitação e vários parâmetros de rede, comparando-se os resultados com os dados experimentais.

Apenas por uma questão de completeza, reportamos que o tempo de CPU gasto no computador IBM 4381 do LNCC foi de cerca de 35 minutos para 1500 iterações. A procura de uma partição que contenha carbono é o processo mais demorado.

Para o cálculo acima foi fundamental a introdução de uma temperatura que caracterizava o sistema como um todo (sistema termalizado). Testaremos agora a importância desta hipótese (termalização) calculando o espectro de energia considerando o núcleo como um sistema frio. Através da comparação dos resultados obtidos poderemos extrair algumas conclusões.

Consideramos agora que o núcleo que se fragmenta está completamente frio, com a velocidade inicial dos fragmentos formados sendo devida ao momentum de Fermi dos nucleons que formam esse fragmento. O cálculo será o mais simples possível, e certamente pode ser muito melhorado. Esta, porém, não é uma tarefa fácil. As etapas de cálculo foram:

1- Armazenamos as partições que contém determinado fragmento, como no caso anterior. A probabilidade  $p$  é determinada exatamente da mesma forma que no caso anterior (etapas 1 e 2 do outro cálculo).

2- Calculamos o centro de massa de cada fragmento e consideramos este ponto como posição inicial.

3- Determinamos o Momentum de Fermi do núcleo em função de sua densidade através da conhecida relação:  $\rho = 2/3\pi^2 K_f^3$ , onde  $K_f = \frac{p_f}{h}$ , onde  $p_f$  é o Momentum de Fermi (função degrau).

4- Dividimos o intervalo  $[0, K_f]$  em  $pA$  intervalos iguais, sendo  $pA$  o número de nucleons no sistema. Distribuimos aleatoriamente os nucleons por esses intervalos, de forma que cada intervalo contenha apenas um nucleon. As direções dos momenta foram consideradas equiprováveis e sorteadas uniformemente,

respeitando-se a conservação do momentum total.

5- Somamos vetorialmente os momenta dos nucleons e chegamos ao momentum inicial dos fragmentos. O resto do cálculo prossegue como no caso anterior (etapas 11, 12, 13 e 14 do cálculo anterior).

Este cálculo está mais ao estilo de um modelo percolativo, já que não precisa levar em consideração a temperatura do sistema que se fragmenta. Tem, porém, um grave inconveniente em relação ao cálculo anterior, pois não possui nenhum mecanismo que leve em conta a conservação de energia. Poderíamos sofisticá-lo um pouco, considerando, por exemplo, que os momenta de Fermi dos nucleons possuem uma distribuição gaussiana. Achamos, porém, que a abordagem simplificada do texto atinge seu objetivo, que é mais qualitativo do que quantitativo.

A seguir mostraremos os resultados desses cálculos. Discussões e conclusões serão deixadas para o capítulo V.

A figura 4.7 contém um esquema das etapas seguidas em nossos cálculos. Podemos ver claramente que, em última análise, as duas hipóteses opostas feitas (núcleo quente/núcleo frio), acarretam apenas uma pequena modificação no esquema de cálculo. Isto é consequência do fato do modelo utilizado estar fundamentado em geometria e estatística.

## ETAPAS DO CÁLCULO

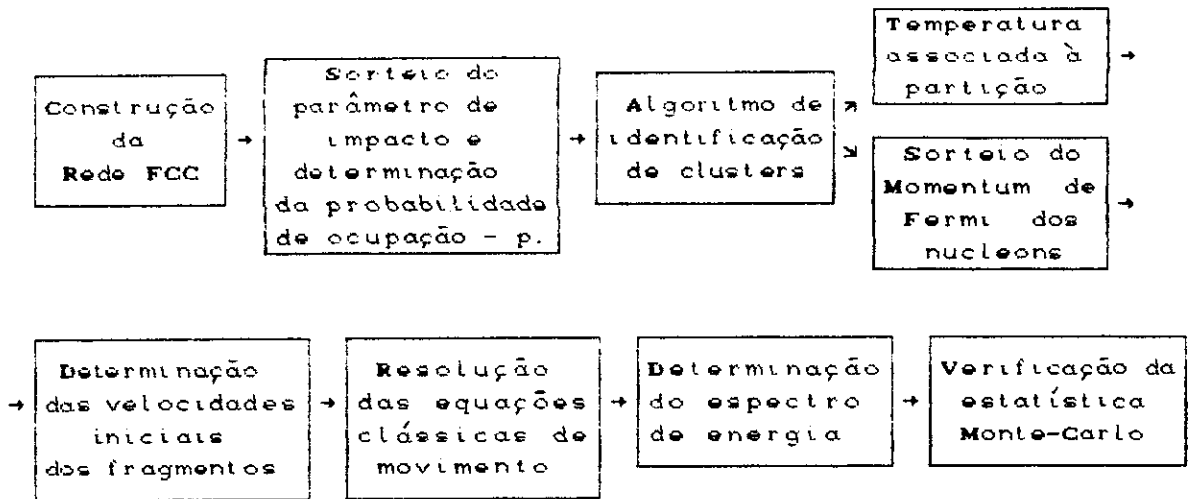


Fig. 4. 7. Resumo esquemático do cálculo do espectro de energia pelo modelo de percolação tetraédrica. Repare que a diferença entre fazermos as hipóteses de núcleo frio ou quente refletem-se no cálculo de maneira pequena, já que as partições são determinadas de forma puramente estatística e geométrica.

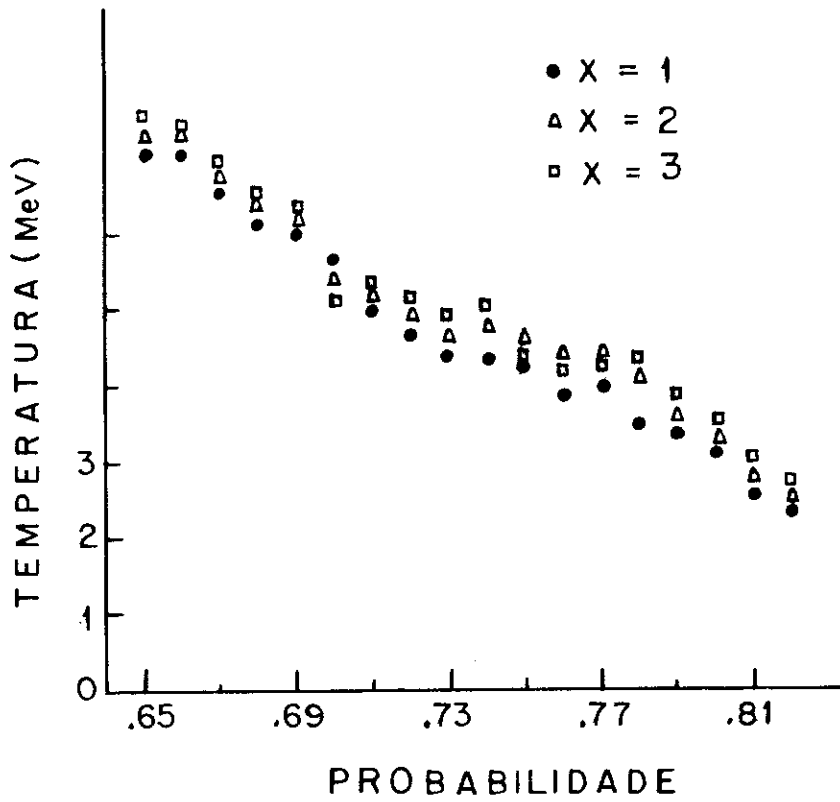


Fig. 4.8. Gráfico mostrando a variação da temperatura média do sistema que se fragmenta em função da probabilidade de ocupação.

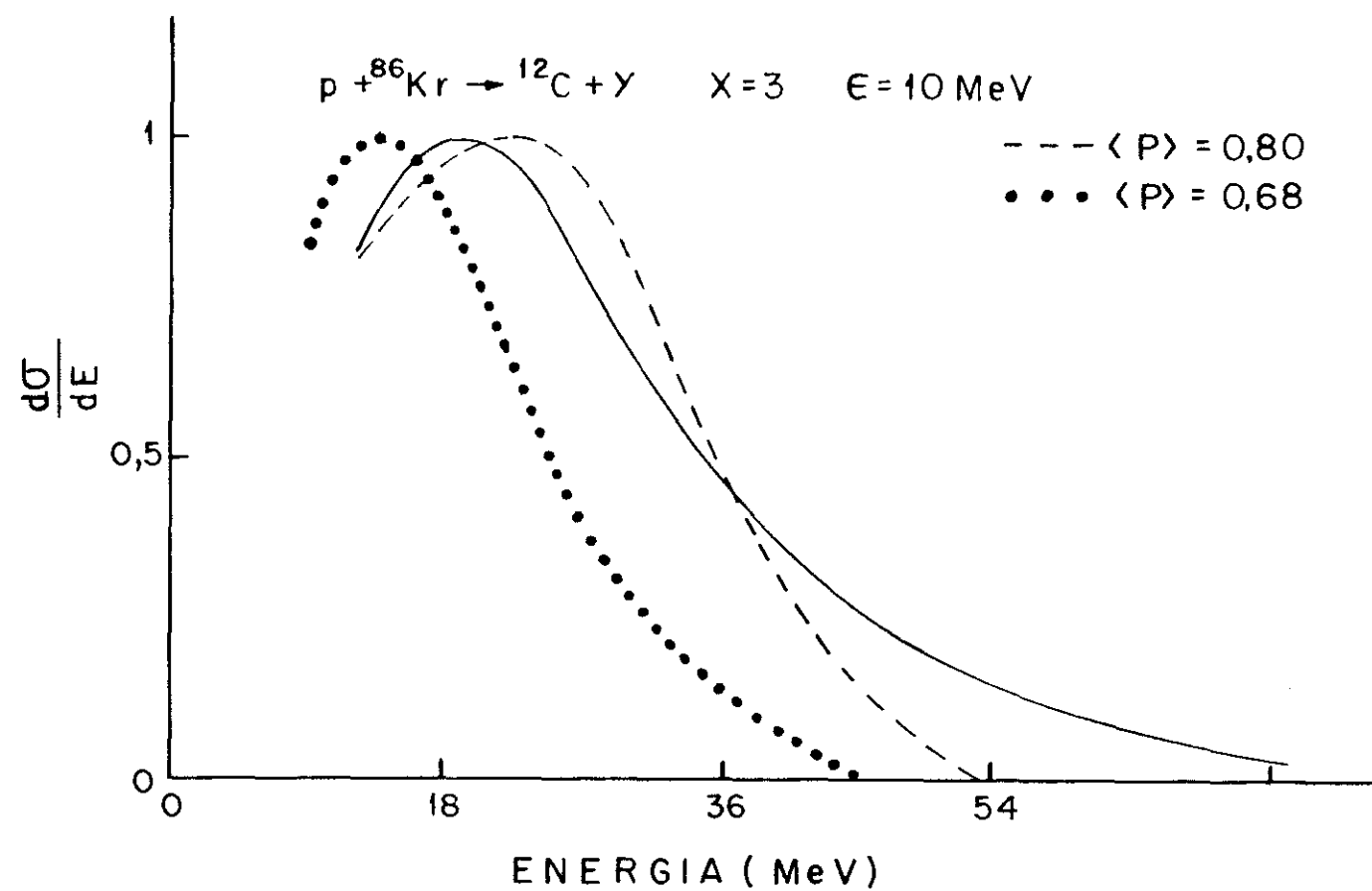


Fig. 4. 9a. Espectro de energia do  ${}^{12}\text{C}$  para duas probabilidades de ocupação. A linha sólida representa os dados experimentais.

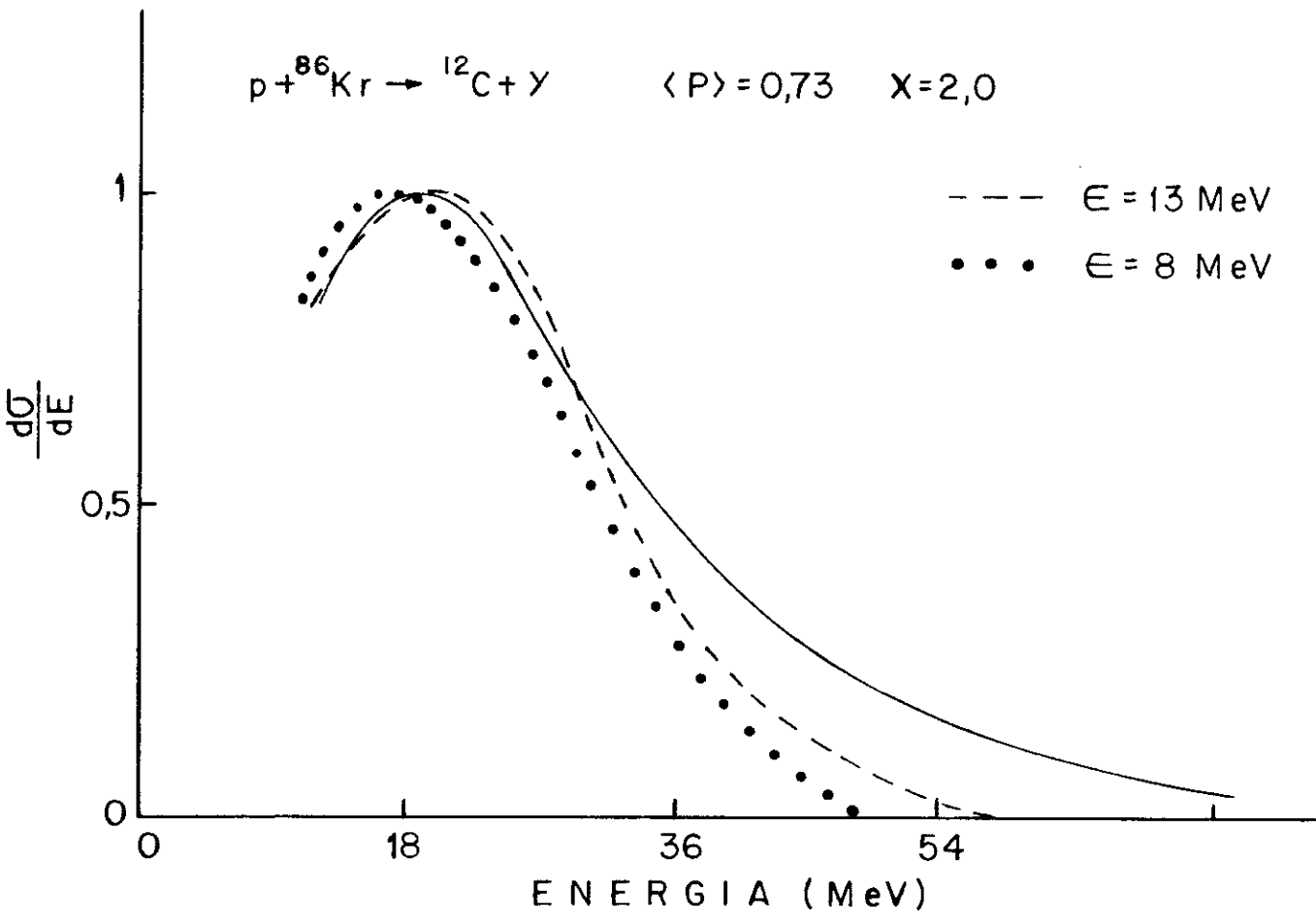


Fig. 4. pb. Espectro de energia para dois valores da energia de excitação do sistema.



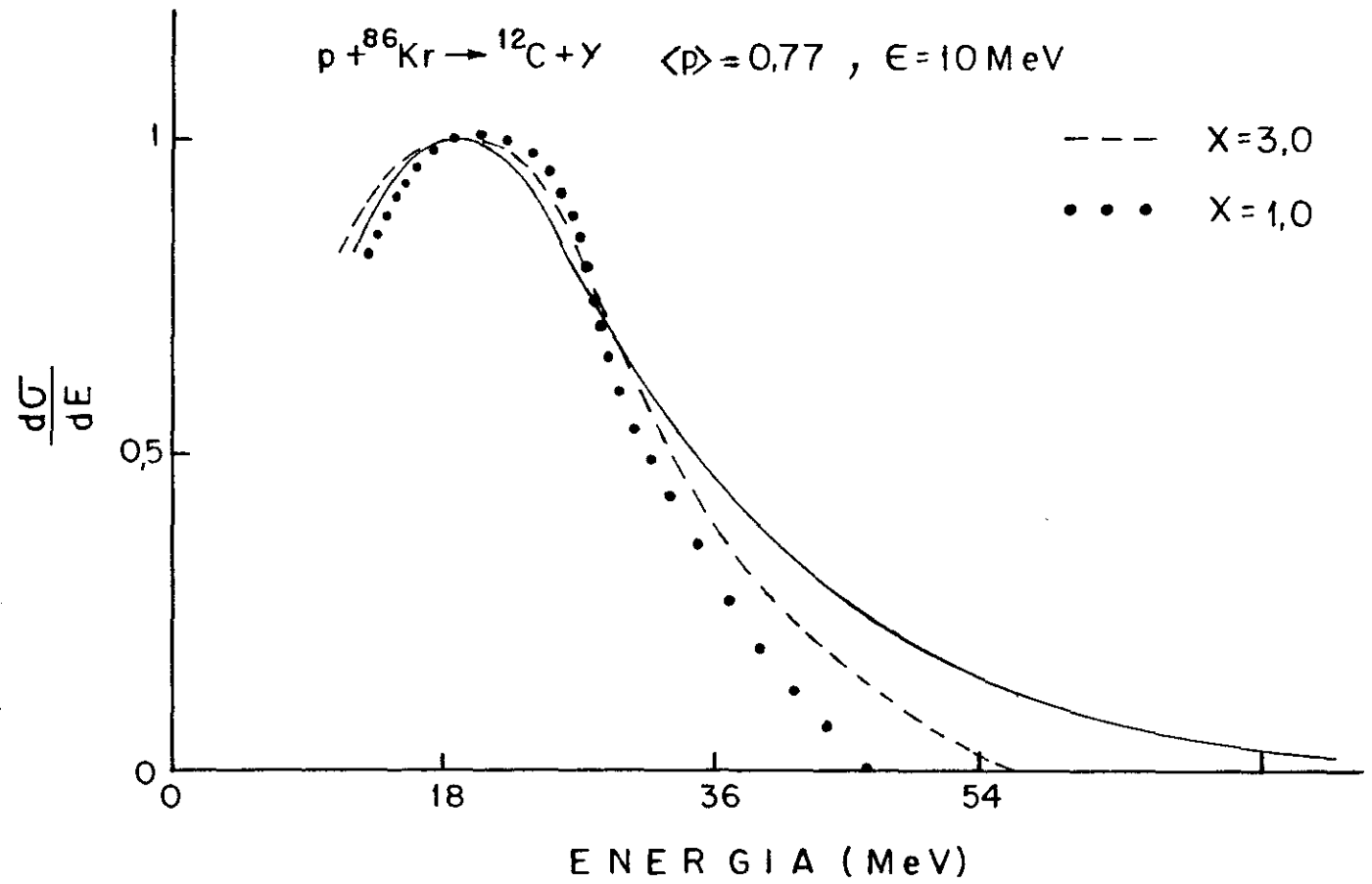


Fig. 4. 9c. Espectro de energia para dois valores do volume de quebra do sistema.

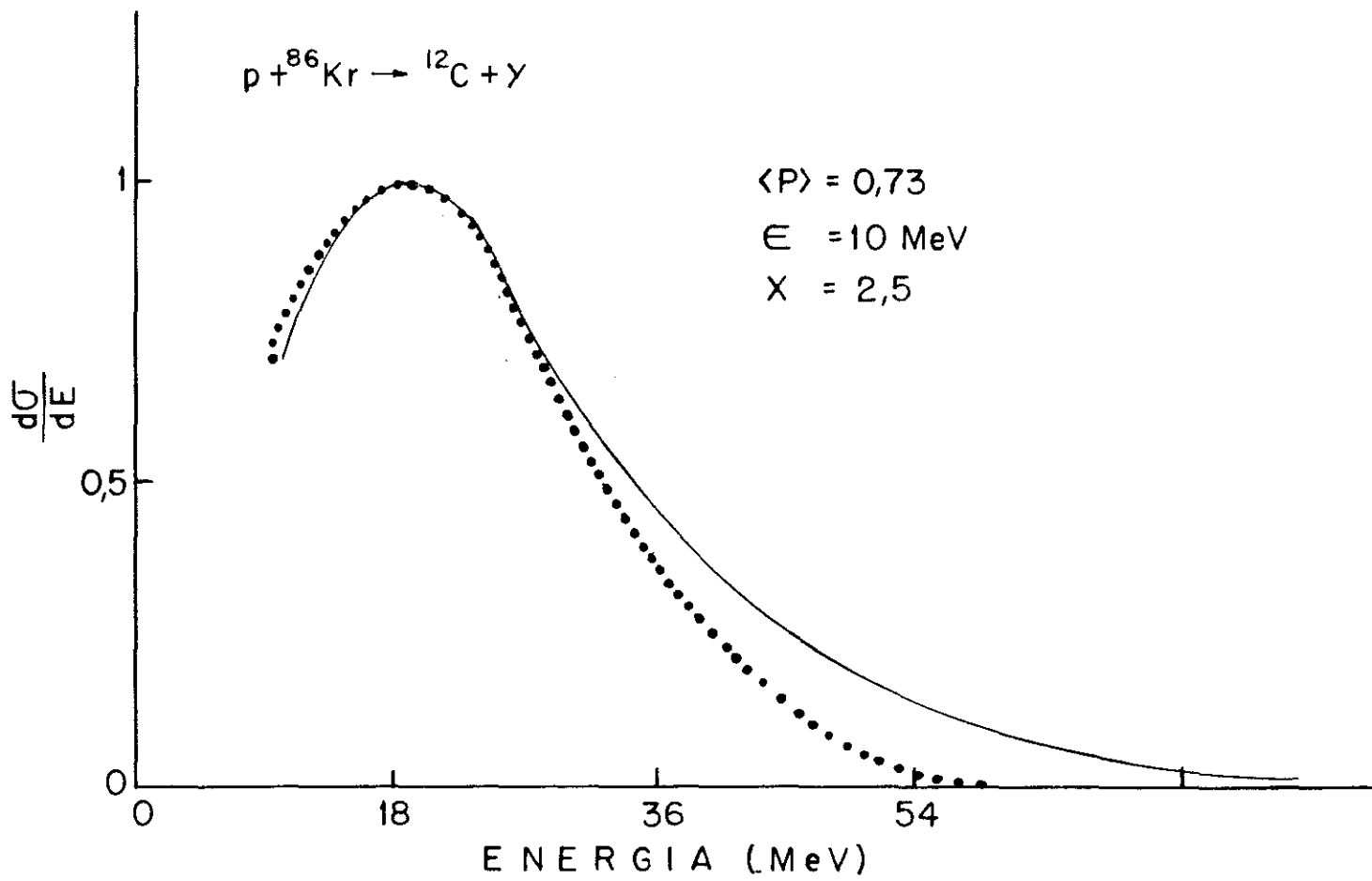


Fig. 4. 10. Melhor ajuste conseguido segundo o cálculo para núcleos quentes. A temperatura correspondente a esses valores é de cerca de  $T=5 \text{ MeV}$ .

Os gráficos mostrados na fig 4.8 indicam a dependência da temperatura (média) do sistema que se fragmenta -  $T$  com a probabilidade  $p$ . Foram feitas 100 repetições para cada ponto do gráfico e depois tirada uma média. O parâmetro  $\epsilon_0$  utilizado foi de 28 MeV. Valores de  $\epsilon_0$  entre 25 e 35 MeV produzem resultados qualitativamente semelhantes. Podemos observar a ocorrência de um leve patamar, correspondendo ao intervalo crítico  $0.7 < p < 0.8$ . Neste intervalo, a temperatura parece que se estabiliza em torno de 5 MeV. São plotados os resultados para três volumes diferentes (lembrar que  $V = V_0(1+X)$ ). Pode-se notar que as temperaturas tendem a ser ligeiramente mais altas à medida que aumentamos o volume. Este efeito, porém, não é muito sensível. Note-se também que a curva tem o comportamento esperado para altas probabilidades. Quanto maior a probabilidade, menor foi o estrago produzido pela colisão, e daí, menor a temperatura resultante.

Os espectros de energia para o  $^{12}\text{C}$  proveniente de uma colisão  $p + \text{Kr}$  relativística estão mostrados nas figuras a seguir (4.9a, 4.9b, 4.9c). Procuramos demonstrar a influência dos parâmetros relevantes examinando sempre dois casos extremos. Usando este procedimento, podemos ver que um aumento de  $p$  ou de  $\epsilon_0$  produz o efeito de deslocar o espectro para a direita, ou seja, para regiões de maior energia. Já um aumento de  $X$  (uma diminuição de densidade), tem um efeito mais sutil. Ao mesmo tempo que o pico é levemente deslocado para a esquerda (menor energia), a parte de maior energia da curva é deslocada para a direita. Podemos explicar esse fato se examinarmos a dependência da temperatura com o parâmetro de rede, que mostra que ao aumentarmos  $d$  (e portanto  $X$  - aumento relativo de volume) também aumentamos  $T$ , enquanto

obviamente diminuimos a interação coulombiana. Os efeitos no espectro são então contrários, pois enquanto uma maior temperatura tende a deslocar a curva para maiores energias, uma menor interação coulombiana tende a puxar a curva para a esquerda. Nas regiões de baixas energias, o efeito coulombiano predomina. Já em energias mais altas, a temperatura é o fator preponderante. A figura 4.10 mostra o melhor ajuste conseguido para o espectro do  $^{12}\text{C}$ . Os parâmetros utilizados foram  $\epsilon_0 = 28$  MeV,  $p = 0.73$  e  $X = 2.5$ . Não foi possível a reprodução da parte de altas energias da curva ( $E > 50$  MeV).

O valor de  $\epsilon_0$  encontrado (28 MeV) não concorda com o estipulado por Campi et al. no trabalho original.<sup>[22]</sup> Observando, porém, os dados experimentais de Metropolis et al.<sup>[98]</sup> (citados por Hüfner<sup>[1]</sup> em seu excelente artigo de revisão), verificamos que, para colisões com prótons de cerca de 2 GeV de energia, um núcleo de  $A \simeq 90$  que perde 17 nucleons recebe uma energia de excitação da ordem de 500-600 MeV. Isto implica em um valor de  $\epsilon_0 \simeq 30$  MeV (bastante próximo ao valor utilizado de 28 MeV), se quisermos manter a interpretação da referência original. A diferença observada pode ser atribuída aos diferentes modelos de percolação utilizados (lembramos mais uma vez que a relação de Campi (eq.4.5) não é, de forma alguma, rigorosa).

É interessante examinar a influência do processo de expansão coulombiana no espectro. Para tanto, vamos primeiro calcular a distribuição de energia do carbono antes de qualquer passo da expansão e depois comparar com os resultados finais que já possuímos. A figura 4.11 contém os resultados desse cálculo.

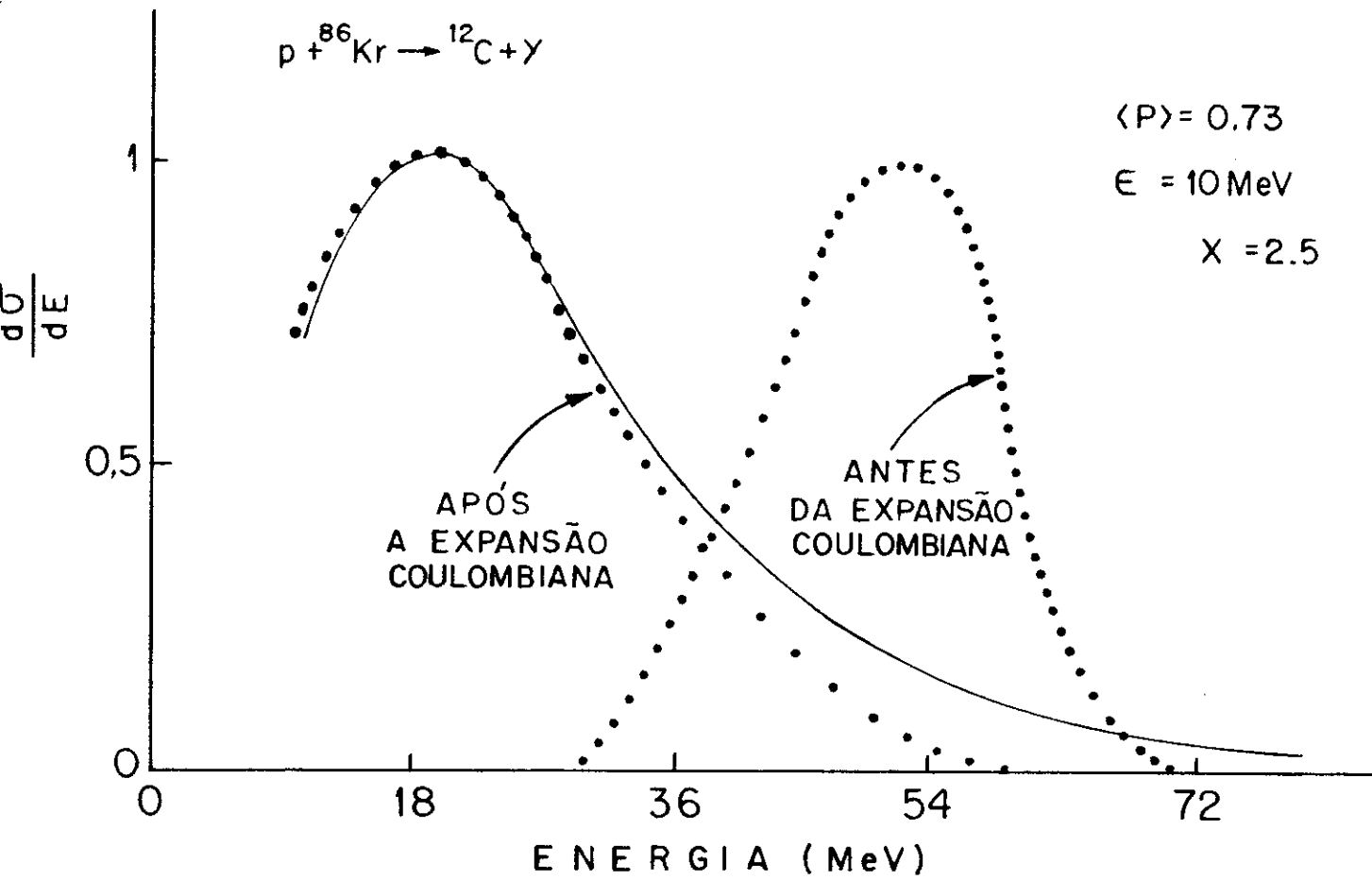


Fig. 4. 11. Efeito da expansão coulombiana no espectro de energia do carbono.

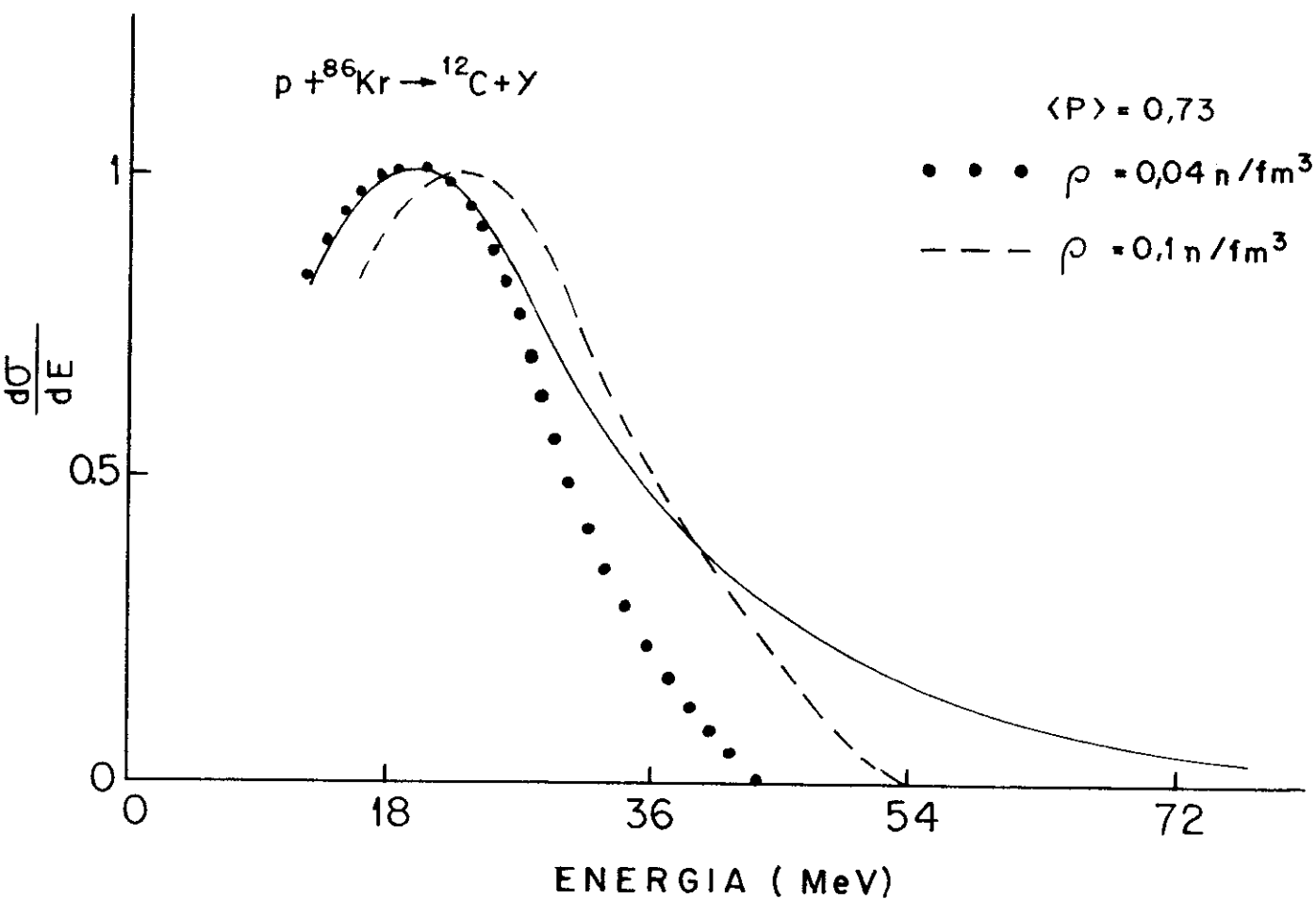


Fig. 4. 12. Espectro de energia do carbono segundo o cálculo considerando o núcleo que se fragmenta como um sistema frio.

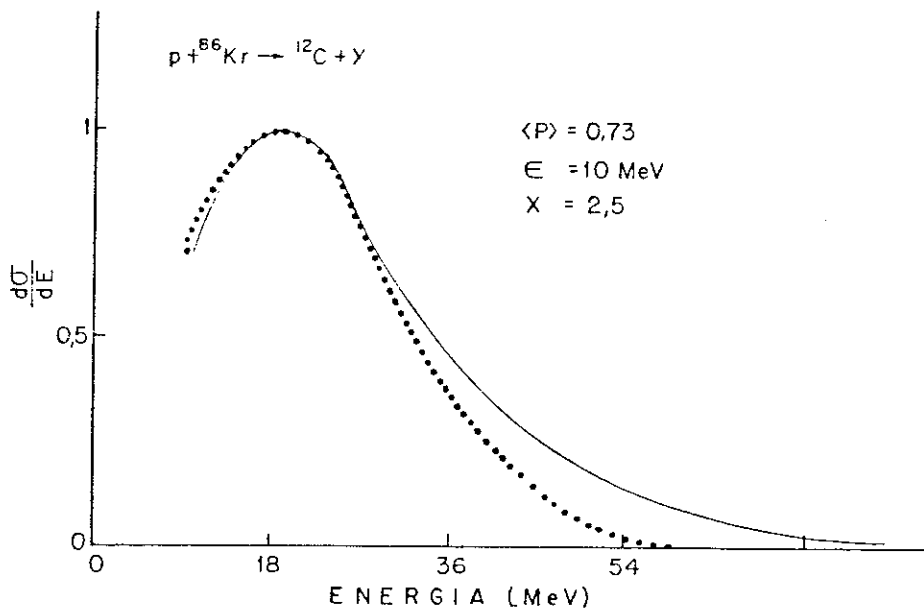
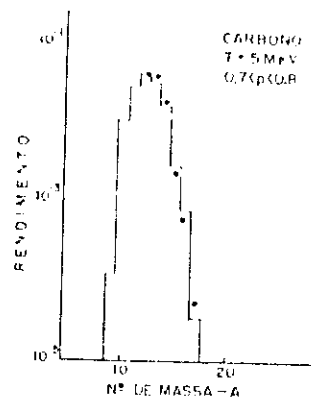
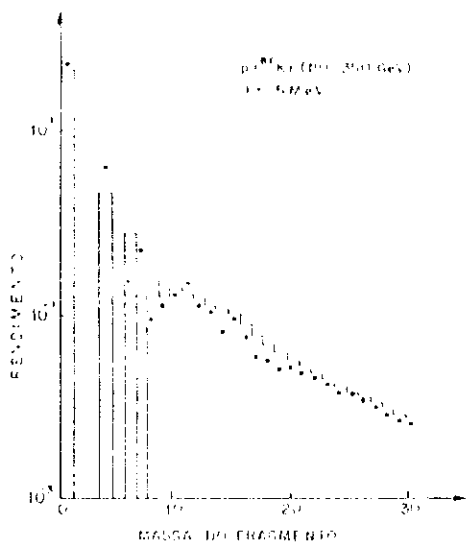


Fig. 4. 13. Melhores ajustes conseguidos com o modelo de percolação tetraédrica. Nos espectros de massa e isotópico os histogramas são os resultados dos cálculos. No espectro de energia os resultados teóricos estão em linha pontilhada, sendo a linha contínua o ajuste de Hirsch et al.

O resultado mostra claramente a importância dos efeitos dinâmicos no espectro. A expansão faz com que o Carbono perca boa parte de sua energia inicial, sendo o pico da distribuição deslocado em cerca de 30 MeV! Podemos considerar este fato como uma evidência de que o fragmento de carbono deve se formar, preferencialmente no centro do sistema nuclear excitado, já que só desta forma poderia ele perder tanta energia no decorrer do processo de expansão.

O gráfico reproduzido na figura 4.12 mostra os resultados do cálculo considerando o núcleo um sistema frio e formado por um gás de Fermi de nucleons. Mantivemos a probabilidade média em 0.73 e variamos o parâmetro de rede  $d$ . O melhor ajuste foi obtido com um parâmetro de rede  $d = 4.2$  Fermi, correspondendo a uma densidade de  $\rho = 0.04 \text{ fm}^{-3}$ . Se compararmos os resultados com o cálculo anterior em que consideramos o núcleo quente, vemos que agora temos um resultado inferior, principalmente na parte de altas energias (acima de 25 MeV). Na parte de baixas energias o ajuste obtido é comparável ao anterior, enquanto que nas altas energias este ajuste foi bem pior do que o conseguido anteriormente. A curva caiu rápido demais, não sendo produzido nenhum fragmento com energia acima de 44 MeV, enquanto que no caso anterior tínhamos fragmentos com até 85 MeV. Este é um fato importante, pois parece indicar que a parte mais energética do espectro ( $E > 25 \text{ MeV}$ ) é bastante sensível às hipóteses físicas que introduzimos, enquanto que a parte de baixas energias é mais influenciada pelos aspectos estatísticos do problema. Ainda assim, a comparação com os resultados anteriores, em que introduzíamos uma temperatura não é



completamente desfavorável. O ajuste certamente é inferior, mas devemos lembrar que aqui além de não haver temperatura ou energia de excitação, não foi feito nenhum tratamento da conservação da energia.

A figura 4.13 mostra todos os resultados conseguidos com o modelo e sua comparação com os dados de Hirsch et al.. Podemos ver que a concordância é bastante boa quanto aos espectros isotópico e de massa, e que é bem aceitável quanto ao espectro de energia. Em todos os cálculos utilizamos os mesmos valores da probabilidade de percolação ( $0.7 < p < 0.8$ ) e da temperatura ( $T = 5$  MeV).

Constitui um fato muito interessante o cálculo pelos dois modelos ter chegado a uma densidade de quebra ao redor de  $0.05 \text{ fm}^{-3}$ . Esta densidade está em bom acordo com a deduzida no trabalho de Bondorf et al.<sup>[12]</sup> e também é coerente com o diagrama de fase da matéria nuclear simétrica (A densidade está dentro da zona compreendida pela espinodal isotérmica). A temperatura média encontrada ( $T \simeq 5$  MeV) também concorda com os resultados achados por Bondorf et al.<sup>[12]</sup>. É interessante notarmos que no primeiro cálculo, o modelo de percolação tetraédrica se assemelha ao modelo estatístico de multifragmentação nuclear de Bondorf et al., enquanto que no segundo cálculo, o modelo está mais próximo do modelo de fragmentação fria de Aichelín et al.<sup>[15]</sup>. Esta é uma boa mostra da versatilidade do modelo utilizado.

## CAPÍTULO V

### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste capítulo final discutiremos os resultados obtidos a partir dos cálculos efetuados com o Modelo de Percolação Tetraédrica. As conclusões gerais serão deixadas para o final. A ênfase será dada à interpretação dos espectros de energia obtidos, que são, efetivamente, a contribuição original deste trabalho.

#### V.1 - RESUMO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Executamos vários cálculos usando o Método de Monte Carlo e o Modelo de Percolação Tetraédrica. Primeiramente, reproduzimos o espectro isotópico do núcleo de Carbono proveniente de uma colisão  $p + {}^{86}\text{Kr}$  com energia do próton no intervalo 80 - 350 GeV. Foi mostrado que um cálculo baseado puramente na estatística do problema (atribuindo aleatoriamente uma razão nêutron/próton a cada sítio) não é capaz de reproduzir os dados experimentais (Fig 4.4). Seguimos então o trabalho de Knospe et al.<sup>[28]</sup> e realizamos um cálculo introduzindo um parâmetro T, identificado com a temperatura do sistema que se fragmenta, e cujo valor foi tomado como  $T = 5.0$  MeV. A probabilidade foi sorteada no intervalo 0.70-0.80. Não foi observada uma dependência considerável em relação a esta temperatura, e os espectros para  $T = 4.0$  MeV e  $T = 6.0$  MeV não apresentam discrepâncias grandes em relação ao de 5.0

MeV (Figs. 4.5a,b,c). A conclusão que podemos tirar desses cálculos é de que as distribuições isotópicas são governadas não somente por estatística e geometria, já que é imprescindível a consideração de uma propriedade nuclear específica, introduzida através do termo de assimetria de uma fórmula da gota líquida sofisticada e apresentados na referência [28]. Entretanto, a simples utilização desta propriedade permite uma descrição bastante boa dos dados experimentais, impedindo, portanto, qualquer conclusão mais detalhada. Devemos ressaltar também que não foi levado em consideração o decaimento secundário dos fragmentos, sendo este simulado apenas através da geometria do problema e do critério de conexão entre sítios (percolação tetraédrica). Estes fatos indicam que os dados examinados (os espectros isotópicos), não contém informações suficientes para conclusões mais profundas a respeito do mecanismo da multifragmentação.

O segundo cálculo aproveitou a idéia do primeiro e recalculou o espectro de massa utilizando o mesmo esquema (fig 4.6). Os resultados foram todos semelhantes ao espectro de massa calculado por Chao e Chung<sup>[25]</sup>, o que indica que este dado experimental parece não possuir nenhuma informação capaz de fornecer pistas sobre a temperatura do sistema que se fragmenta.

Finalmente, o terceiro e mais importante cálculo deste trabalho tenta reproduzir o espectro de energia do  $^{12}\text{C}$  proveniente de uma colisão  $p + \text{Kr}$  obtido por Hirsch et al.<sup>[4]</sup>. As conclusões que podem ser inferidas dos resultados são interessantes, pois

apesar de não elucidarem o mecanismo do processo de multifragmentação, parecem indicar em que parte dos dados experimentais disponíveis atualmente os aspectos físicos do processo são mais visíveis. Isto pode ser visto no resultado mostrado na fig.4.10 que demonstra que o pico e a forma do espectro para energias até cerca de 30 MeV são muito bem reproduzidas pelo Modelo de Percolação Tetraédrica. A partir de 30 MeV, porém, há um desvio sistemático das curvas, que caem de forma mais rápida do que os dados experimentais. Tal desvio ocorre tanto no cálculo com o núcleo quente como no cálculo com o núcleo frio. Este fato indica que os fragmentos mais energéticos provém de processos que não foram bem simulados pelo modelo. Tais processos poderiam estar relacionados com o decaimento secundário dos fragmentos (evaporação), fenômenos coletivos tais como rotações nucleares ou ainda processos de não-equilíbrio termodinâmico. Esta última interpretação (não-equilíbrio), recebe apoio em Barz et al.<sup>[20]</sup>, onde foi calculado o espectro de energia do Carbono usando-se o modelo de multifragmentação estatística. Lá, apesar do tratamento mais sofisticado empregado, inclusive com a consideração do decaimento secundário, não foi possível uma reprodução dos dados experimentais superior à conseguida em nossos cálculos. Faremos a seguir um sumário dos principais pontos investigados no presente trabalho, assim como das informações conseguidas a partir dos cálculos efetuados. Chamaremos atenção para alguns pontos particularmente delicados e que merecem uma futura investigação.

1- É possível reproduzir o espectro de massa da multifragmentação utilizando-se somente considerações estatísticas e geométricas. Tal fato deve ser consequência do caráter altamente inclusivo dos dados do espectro de massa. A chegada de novos dados exclusivos certamente imporá restrições bem maiores.

2- O espectro isotópico necessita da introdução de características nucleares específicas, sendo, no entanto, pouco sensível à temperatura de fragmentação. Isto parece indicar que também o espectro isotópico tem como maior contribuição os fatores geométricos e estatísticos, embora em grau menor do que o espectro de massa.

3- O espectro de energia foi razoavelmente bem reproduzido pelo modelo. É necessário considerar o sistema em equilíbrio térmico no instante de fragmentação e admitir o "Ansatz" de Campi e Desbois sobre a relação entre a energia de excitação do sistema e a probabilidade de percolação, além de considerarmos a fórmula da Gota Líquida Térmica (Bondorf et al.<sup>[12]</sup>). Apesar de tudo isso, não foi possível reproduzir o espectro em toda sua extensão. Enquanto a parte de baixas energias ( $E < 30$  MeV) foi muito bem reproduzida, a parte de energias mais altas apresentou desvios sistemáticos, não sendo possível dentro do intervalo considerado de probabilidades de percolação ( $0.70 < p < 0.80$ ), uma reprodução perfeita desta parte da curva.

4- A imagem da multifragmentação que emergiu dos cálculos foi portanto a seguinte: a multifragmentação é um processo que ocorre a densidades de cerca de  $0.05 \text{ fm}^{-3}$ , caracterizado por uma temperatura de cerca de 5.0 MeV. O parâmetro de percolação que corresponde a essa imagem é  $p = 0.73$ . Estes números são muito

próximos aos valores que Bondorf et al.<sup>[12],[13]</sup> encontraram utilizando seu modelo estatístico. Além disso, podemos dizer que provavelmente existem processos de não-equilíbrio envolvidos em, pelo menos, algumas reações, e que são responsáveis pela parte mais energética do espectro de energia.

5- A energia de excitação que produziu o melhor ajuste do espectro de energia foi de cerca de 10 MeV por nucleon. Esta energia é bastante alta. Seu valor está acima daquele previsto pelo modelo estatístico (3-4 MeV para induzir a multifragmentação), embora não seja incoerente com este modelo, como podemos observar pela análise da referência [30]. O valor obtido, está, porém, em bom acordo com os valores estimados por Bauer et al.<sup>[91]</sup> e por Mahi et al.<sup>[92]</sup>. Gostaríamos de frisar, além disso, que a energia de excitação foi introduzida através de um Ansatz sugerido por Campi:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{1-p}{p}$  no qual comparece um parâmetro  $\varepsilon_0$  cujo valor foi considerado como ajustável. Apesar desta expressão ser razoável do ponto de vista intuitivo (energia diretamente proporcional ao "estrago" causado no núcleo, medido pelo número de nucleons que foram ejetados em relação ao número de nucleons que permaneceram), ela não é, de modo algum, rigorosa, constituindo-se certamente em uma aproximação. Quão boa é esta aproximação? Esta pergunta só poderia ser respondida se conseguíssemos estabelecer uma relação entre a equação de estado da matéria nuclear excitada e um modelo percolativo do núcleo. Claramente, esta é uma tarefa bastante difícil, embora alguns estudos sobre esse tópico estejam em andamento.

## V.2- CONCLUSÕES

Utilizando o Modelo de Percolação Tetraédrica fomos capazes de reproduzir praticamente todos os resultados experimentais inclusivos disponíveis (fig 4.13). Reproduzimos o espectro isotópico introduzindo uma informação física adicional. Usamos o mesmo esquema para calcular o espectro de massa. Em ambos os casos usamos um parametro que identificamos com a temperatura e que tomou o valor de 5 MeV. É interessante notarmos que nossos resultados mostram que o decaimento secundário pode ser muito bem simulado por restrições geométricas, ao menos no que diz respeito aos espectros de massa e isotópicos. Conseguimos também uma boa reprodução do espectro de energia e pudemos verificar, através de dois cálculos feitos sob hipóteses diferentes, a região das curvas experimentais mais ricas em informações físicas (a região de altas energias). Foi claramente demonstrado que qualquer modelo que pretenda explicar a multifragmentação baseado em hipóteses físicas mais sofisticadas do que as usadas no presente trabalho deve ser capaz de reproduzir esta parte do espectro de energia, já que o modelo utilizado aqui contém um mínimo de informações e pode dar conta perfeitamente da parte de baixas energias. Segundo o Modelo de Percolação Tetraédrica, determinamos que a fragmentação ocorre a uma temperatura de cerca de 5 MeV e a uma densidade de  $0.05 \text{ fm}^{-3}$ . Esta temperatura foi a mesma em todos os 3 cálculos (espectros de massa, isotópico e de energia). O valor encontrado para a densidade foi particularmente interessante, pois as duas abordagens do problema (núcleo quente/núcleo frio) produziram

praticamente o mesmo resultado. Chamamos atenção, também, para o Ansatz de Campi, que precisa ser justificado para dar maior consistência ao cálculo.

A partir destes resultados, podemos concluir que as idéias de percolação representam um valioso auxílio para estudos no campo da multifragmentação nuclear. Sua principal virtude consiste em separar o que realmente é importante fisicamente no fenômeno, em distinção daqueles aspectos que somente são consequência de fatores geométricos e estatísticos. Tem-se, assim, um instrumento capaz de testar diferentes hipóteses físicas dentro de um mesmo contexto, e, portanto, auxiliar na formulação e melhoria de modelos mais sofisticados. A força maior destas idéias se fará sentir quando estiverem disponíveis novos dados exclusivos, que imporão restrições muito mais severas aos diferentes modelos.

Gostaríamos, ainda, de chamar a atenção para outras aplicações do código desenvolvido. O código pode tratar percolação híbrida sítio-ligação e ser utilizado, por exemplo, para o estudo do plasma de quarks-gluons, ao estilo do trabalho de Boisgard et al.<sup>[42]</sup>.

A multifragmentação nuclear é um campo extremamente interessante e difícil, que necessita de muito esforço tanto teórico como experimental para que tenha seus mecanismos completamente desvendados. A chegada de novos dados exclusivos, (Waddington et al.<sup>[92]</sup>), assim como o desenvolvimento de modelos mais realistas que incorporam a dinâmica do processo em seus cálculos (exemplo - Cerruti et al.<sup>[95]</sup>), poderá certamente proporcionar uma compreensão mais profunda dos processos de



multifragmentação. Acreditamos que o presente trabalho mostrou que as idéias de percolação terão um lugar de destaque neste desenvolvimento.

## APÊNDICE I

### A TEORIA DA CONDENSAÇÃO DE FISHER

Os principais pontos da teoria de Fisher estão resumidos a seguir. Trata-se de assunto bastante complexo, e a monografia da qual estes tópicos foram retirados, referência [18], contém muita física interessante. De forma bem sucinta, aqui estão os resultados de Fisher:

i) A probabilidade de formação de um cluster, isto é, de um aglomerado de moléculas unidas por forças fortes de curto alcance e que não tenham praticamente nenhuma interação com moléculas fora do cluster, é dada por:

$$m(A) = A^{-\tau} \exp [-(f(A) - \mu A)\beta] \quad (1a)$$

onde:

$m(A)$  - probabilidade de formar uma gota com  $A$  moléculas.

$\tau$  - expoente fixo, independente de  $A$ .

$f(A)$  - Energia livre de Helmholtz da gota.

$\mu$  - Potencial químico por molécula.

ii) A energia livre de Helmholtz representa o balanço de energia de ligação do cluster e de sua entropia, isto é:

$$f(A) = U(A) - TS(A) \quad (2a)$$

onde:

$U(A)$  - Energia de ligação total do cluster.

$T$  - Temperatura do cluster.

$S(A)$  - Entropia do cluster.

iii) No ponto crítico, Fisher afirma que  $f(A) - \mu A = 0$ , daí:

$$m(A) \propto A^{-\tau} \quad (3a)$$

As suposições que Fisher faz para chegar a essas conclusões envolvem a geometria das moléculas e a interação entre os clusters.

O que tem as conclusões acima de interessante para a física nuclear? A resposta pode ser encontrada se observarmos que a matéria nuclear possui características típicas de um sistema de Van der Waals, isto é: forças atrativas de longo alcance e forças repulsivas muito fortes de curto alcance. Apesar das escalas de energia e densidades serem muito diferentes, podemos esperar um comportamento semelhante.

Cálculos utilizando procedimentos de Hartree-Fock dependente do tempo com forças de Skyrme realizados por Jaqaman et al. na referência [20] proporcionaram os seguintes resultados, que corroboram e ilustram o que foi dito acima. Os cálculos são bastante complexos e só seus resultados serão reproduzidos aqui.

A equação de estado nuclear encontrada foi:

$$p = 3 \frac{t}{v} - \frac{3}{v^2} + \frac{1}{v^3} \quad (4a)$$

Onde  $t = \frac{T}{T_c}$ ,  $v = \frac{V}{V_c} = \frac{\rho}{\rho_c}$ ,  $p = \frac{P}{P_c}$  sendo os valores com índice aqueles referentes ao ponto crítico.

Compararemos, agora, a equação acima com a equação original de Van der Waals:

$$p = \frac{8t}{(3v-1)} - \frac{3}{v^2} \quad (5a)$$

Podemos ver a semelhança que existe entre ambas, inclusive numericamente. A figura A1, ao lado, vale mais do que qualquer frase. Um grande problema que existe nos cálculos refere-se à determinação das grandezas do ponto crítico nuclear. Os cálculos dão valores diferentes dependendo dos métodos usados e os parâmetros utilizados. Os valores de Jaqaman et al. são:

$T_c = 18 \text{ MeV}$ ,  $\rho_c = 0.4\rho_0$  e  $P_c = 0.4 \text{ MeV.fm}^{-9}$ .

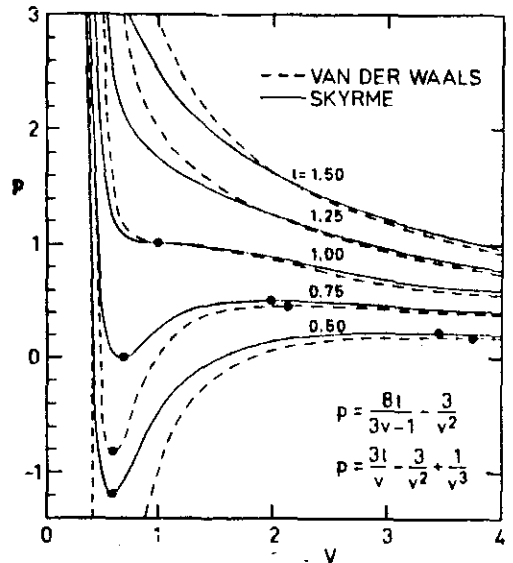


Fig. A1.

O comportamento tipo Van der Waals da matéria nuclear indica que esta deve apresentar fenômenos de condensação na transição de fase líquido-gás. A teoria de Fisher seria então aplicável neste ponto.

## APÊNDICE II

### O MÉTODO DE MONTE CARLO

#### AII.1) ORIGEM E DEFINIÇÃO

O Método de solução numérica de Monte Carlo se baseia essencialmente na simulação de variáveis aleatórias. Teve origem em 1949 com a publicação do artigo "The Monte Carlo Method" por J. Von Neumann e S. Ulam<sup>[49]</sup>, e deve sua implementação prática ao advento dos computadores eletrônicos. Criado originalmente para simular processos que envolvem fatores aleatórios, mostrou uma notável flexibilidade, sendo atualmente usado em problemas determinísticos com bastante eficiência.

A formulação matemática do método baseia-se no Teorema Central do Limite (Laplace, Tchebychev, Markov) de demonstração extremamente difícil, mas de resultado simples. Em linhas bastante gerais, este teorema diz o seguinte: a soma de um número muito grande de variáveis independentes igualmente distribuídas é normal (Gaussiana). Este resultado explica porque todo fenômeno que é influenciado por uma grande quantidade de pequenos fatores tem um resultado que possui distribuição normal.

A utilização do método em computadores tem como passo fundamental uma rotina geradora de números aleatórios. Constitui um fato bastante interessante que um algoritmo possa gerar tais tipos

de números. A rotina utilizada no presente trabalho foi testada até um total de dez milhões de números, e nenhuma correlação foi encontrada. Devemos alertar, contudo, que nenhuma rotina é realmente aleatória, e a partir de determinado número de repetições há sempre o risco de haver uma correlação entre os números.

### III.2) SIMULAÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Chamamos discreta uma variável que pode assumir um conjunto finito de valores. Vamos dar um exemplo que foi efetivamente utilizado em nossos cálculos.

Queremos sortear os sítios de uma rede FCC que serão considerados desocupados (primeiro estágio do modelo de percolação tetraédrica). Estipulamos como sendo  $p$  a probabilidade que um sítio tem de permanecer ocupado. O procedimento então é o seguinte:

- 1- Sorteamos um número aleatório  $x$  entre 0 e 1.
- 2- Se  $x < p$  o sítio permanece ocupado, caso contrário consideramos que ele ficou vazio.

O procedimento acima, extremamente simples, simula a situação descrita no início do parágrafo. A situação no caso contínuo é um pouco mais complicada e será examinada a seguir.

### AII.3) SIMULAÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

O problema agora, de enorme interesse prático, é o de sortear direções no espaço de forma tal que todas tenham a mesma probabilidade de ocorrência. Tal questão nos leva à simulação de uma variável contínua.

A solução deste problema é dada pelo seguinte teorema:

TEOREMA: Para simular uma VA  $\xi$  contínua e distribuída em um intervalo  $(a,b)$  com densidade  $p(x)$ , basta achar a solução da equação:

$$\int_a^{\xi} p(x) dx = \gamma \quad \text{onde } \gamma \text{ é um número aleatório.}$$

Demonstração: Consideremos a função  $y(x) = \int_a^x p(x) dx$ . As seguintes propriedades são satisfeitas:

- i)  $y(a) = 0$
- ii)  $y(b) = 1$
- iii)  $y'(x) = p(x) > 0$

A função  $y(x)$  é portanto monótona, crescente, sendo sua interseção com a função  $y(x) = \gamma$  única. Chamemos de  $\xi$  os pontos achados acima. Estes pontos possuem a seguinte propriedade:

Se  $(a',b') \subset (a,b)$  e  $x \in (a',b')$  e portanto  $y(a') < y < y(b')$  temos que  $\xi \in (a',b') \iff y(a') < \gamma < y(b')$ . Esta última relação implica que:  $P(a' < \xi < b') = P(y(a') < \gamma < y(b'))$ . Como  $\gamma$  está uniformemente distribuída em  $(0,1)$ , vale:

$$P(y(a') < \gamma < y(b')) = y(b') - y(a') = \int_{b'}^{a'} p(x) dx \quad \text{ou seja,}$$

pelo resultado anterior:

$$P(a' < \xi < b') = \int_{b'}^{a'} p(x) dx \quad \text{c. q. d.}$$

Podemos agora resolver o problema colocado no início deste parágrafo, ou seja, a simulação de direções equiprováveis.

Vamos considerar coordenadas esféricas, fixando a coordenada radial em um valor constante qualquer. Temos que sortear uniformemente um ponto da esfera  $r = \text{constante}$ . Seja  $\Omega$  a variável aleatória assim definida. Temos que:

$$P(\Omega \in dS) = \frac{dS}{4\pi} = \frac{\sin\Phi \, d\Phi \, d\Psi}{4\pi}$$

Chamando de  $p(\Phi, \Psi)$  a densidade de probabilidade do ponto

$$(\Phi, \Psi), \text{ tem-se que } p(\Phi, \Psi) \, d\Phi \, d\Psi = \frac{dS}{4\pi} \longrightarrow p(\Phi, \Psi) = \frac{\sin\Phi}{4\pi}$$

Vamos escolher  $\Psi$  uniformemente no intervalo  $(0, 2\pi)$ , isto é:

$$\Psi = 2\pi\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]$$

Pelo que foi dito acima,  $p(\Phi, \Psi) = \frac{\sin\Phi}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\Phi}{2}$  e devemos então simular uma variável aleatória com distribuição  $\frac{\sin\Phi}{2}$ , daí, aplicando os resultados anteriores:  $\frac{1}{2} \int_0^{\Phi} \sin x \, dx = \gamma$  ou seja:  $\cos\Phi = 1 - 2\gamma$ . Assim, chegamos finalmente ao resultado de que os números  $\Phi$  e  $\Psi$  dados através das equações:

$$\begin{cases} \Psi = 2\pi\gamma \\ \Phi = \cos^{-1}(1 - 2\gamma) \end{cases} \quad \gamma - \text{número aleatório entre 0 e 1}$$

simulam direções equiprováveis no espaço.



## REFERÊNCIAS

- 1- J. Hüfner, Phys. Reports, 125, 4 (1985) 129.
- 2- W.G. Meyer et al., Phys. Rev. C22 (1980) 179.
- 3- A.I. Warwick et al., Phys. Rev. C27 (1983) 1083.
- 4- A.S. Hirsch et al., Phys. Rev. C29 (1984) 508.
- 5- N.T. Porile, G.D. Cole e C.R. Rudy, Phys. Rev. C19 (1979) 2288.
- 6- D.J. Morrissey et al., Phys. Rev. C21 (1980) 1783.
- 7- S.B. Kaufman e E.P. Steinberg, Phys. Rev. C22 (1980) 167.
- 8- G.D. Westfall et al. Phys. Rev. Letters 43 (1979) 1859.
- 9- A.M. Poskanzer, G. Butler e E.K. Hyde, Phys. Rev. C3 (1971) 882.
- 10- G.D. Westfall et al., Phys. Rev. C17 (1978) 1368.
- 11- R.W. Minich et al., Phys. Lett. 118B (1982) 458.
- 12- J.B. Bondorf et al., Nucl. Phys. A443 (1985) 321.
- 13- J.B. Bondorf et al., Nucl. Phys. A444 (1985) 460.
- 14- H.W. Barz et al., Nucl. Phys. A448 (1986) 753.
- 15- J. Aichelin, J. Hüfner e R. Ibarra, Phys. Rev. C30 (1984) 107.
- 16- W. Friedman, W. Lynch, Phys. Rev. C28 (1983) 16.
- 17- W. Friedman, W. Lynch, Phys. Rev. C28 (1983) 950.
- 18- M.E. Fisher, Physics (N.Y.) 3 (1967) 255.
- 19- G. Sauer, H. Chandra e U. Mosel, Nucl. Phys. A264 (1976) 221.
- 20- H.R. Jaqaman, A.Z. Mekjian, L. Zamick, Phys. Rev. C27 (1983) 2782;  
C29 (1984) 2067.
- 21- X. Campi e J. Desbois, Proc. 23rd. Int. Winter Meeting on  
Nuclear Physics, Bormio 1985 p.497.
- 22- X. Campi e J. Desbois, Proc. 7th High Energy Ion Study

- (Darmstadt, October 1984) p.707, GSI-Report 85-10 (1985).
- 23- W.Bauer et al., Proc. Seventh High-Energy Heavy-ion Study, GSI Darmstadt, 1984 p.701.
- 24- W.Bauer et al., Phys.Lett. 150B (1985) 53 e Nucl. Phys. A452 (1986) 699 .
- 25- N.Chao e C.K.Chung, Third International Conference on Nucleus-Nucleus collisions, Saint-Malo, France (1988).
- 26- T.S.Biro, J.Knoll e J.Richert, Nucl.Phys. A459 (1986) 692.
- 27- D.Stauffer, Introduction to Percolation Theory, Taylor and Francis - 1985.
- 28- O.Knospe, R.Schmidt e H.Schulz, Phys.Lett. B182 (1986) 293.
- 29- H.W.Barz et al., Nucl. Phys. A462 (1987) 742.
- 30- H.W.Barz et al., Phys.Lett. B169 (1986) 318.
- 31- H.Kesten, Percolation Theory for Mathematicians, Boston, Birkhäuser - 1982.
- 32- C.J.Waddington e P.S.Freier, Phys.Rev. C31 (1985) 888.
- 33- M.Mahi et al., Phys.Rev.Letters 60 (1988) 1936.
- 34- W.Bauer, Phys.Rev. C38 (1988) 1297.
- 35- C.Cerruti et al., Nucl.Phys. A476 (1988) 74.
- 36- A.Vicentini et al., Phys.Rev. C31 (1985) 1783.
- 37- A.Panagiotou et al., Phys.Rev. C31 (1985) 55.
- 38- N.Metropolis et al., Phys.Rev. 110 (1958) 185 e 204.
- 39- A.Goldhaber, Phys.Lett. 53B, (1974) 306.
- 40- B.Friedman e V.R.Pandharipande, Nucl.Phys. A361, (1981) 502.
- 41- J.Aichelin et al. Phys.Rev. C37, (1988) 2451.
- 42- P.Broadbent et al. Proc. Cambridge Philos. Soc. 53, (1957) 629.
- 43- S.Ulam et al., "The Monte-Carlo Method", J.Amer.Statistical Association. 44, (1949) 335.

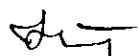
44- R. Wedemann. Tese de Mestrado. Instituto de Física da UFRJ, (1988).

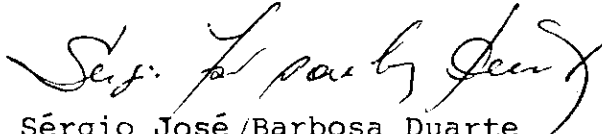
"MODELO DE PERCOLAÇÃO TETRAÉDRICA E ESPECTRO DE ENERGIA  
EM COLISÕES PRÓTON-NÚCLEO A ALTAS ENERGIAS (300 GeV)"

JOSÉ CLAUDIO DA ROSA FAULHABER

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
Chung Kai Cheong - Presidente

  
Luiz Felipe Alvahydo de Ulloa Canto

  
Sérgio José Barbosa Duarte

Rio de Janeiro, 17 de março de 1989