

HELDER COUTO

NOVAS LEIS DE CONSERVAÇÃO PARA O CAMPO GRAVITACIONAL LIVRE

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1989

C84/A

## AGRADECIMENTOS

A Mário Novello e Isaias Costa, cujo apoio e estímulo tornaram possível este trabalho.

A Mirian Simões Coutinho, pelo sempre pronto atendimento junto ao CFC.

A Luis Paulo Collato e Gerson Bazo Costamilan, com quem discuti muitos aspectos deste trabalho.

Aos meus colegas do Departamento de Física da U.F.J.F., pela amizade e boa vontade com que assumiram a responsabilidade de uma carga extra de trabalho, enquanto estive afastado.

A CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

## RESUMO

Mostramos a existência de novas leis de conservação gravitacionais, análogas às encontradas por Lipkin e Ragusa para o eletromagnetismo. Revisamos o trabalho de Novello et al, sobre o comportamento de monopolos magnéticos gravitacionais, onde se mostra que seu movimento ocorre sobre curvas de aceleração constante. Determinamos, finalmente, as equações de curvas de aceleração constante numa métrica de Minkowski perturbada.

# SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	ii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	v
INTRODUÇÃO .....	vi
CAPÍTULO 1 - NOVAS LEIS DE CONSERVAÇÃO .....	1
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - O Zilch Eletromagnético .....	1
1.3 - Novas Leis de Conservação Gravita- cionais .....	11
CAPÍTULO 2 - MONOPOLOS GRAVITACIONAIS .....	20
2.1 - Introdução .....	20
2.2 - Partes Elétrica e Magnética do Ten- sor de Weyl .....	23
2.3 - A Equação de Movimento dos Polos Gra- vitationais .....	26
2.4 - Mapeamento Conforme de Trajetórias de de Polos E em Trajetórias de Polos H .....	32
CAPÍTULO 3 - OBSERVADORES ACELERADOS .....	36
3.1 - Introdução .....	36
3.2 - Referenciais Uniformemente Acelerados num Espaço Plano .....	36
3.3 - Referenciais Acelerados Arbitrariamen- te .....	41
3.4 - Curvas com Aceleração Constante .....	50
CONCLUSÃO - .....	55
REFERÊNCIAS - .....	57

## INTRODUÇÃO

São reconhecidamente importantes na Física as simetrias dos sistemas físicos sob transformação de coordenadas, e as leis de conservação que delas resultam. Assim, a invariância sob translação espacial das equações que descrevem um sistema resultam na conservação do momento linear, a invariância sob rotações resulta na conservação do momento angular e a invariância sob translações temporais associa-se a conservação da energia.

Associam-se leis de conservação também a invariâncias dos sistemas físicos perante transformações não relacionadas às coordenadas. Um exemplo clássico é a invariância de calibre das equações de Maxwell, que resulta na conservação de carga.

A invariância dual das equações de Maxwell já, há muito tempo<sup>[10]</sup>, tem motivado extenso trabalho de pesquisa<sup>[11],[11],[12]</sup>. De uma maneira geral, podem-se salientar dois aspectos nestes trabalhos. As equações de Maxwell, na ausência de fontes, são invariantes perante transformações duais, e muitos trabalhos exploram este fato com o objetivo de estudar as leis de conservação associadas. São exemplos os trabalhos de Lipkin<sup>[1]</sup>, Calkin<sup>[12]</sup>, Kibble<sup>[11]</sup>, Ragusa<sup>[2]</sup> e outros. E há os trabalhos que propõe a manutenção desta invariância das equações de Maxwell mesmo na presença de fontes, sendo para isso necessário admitir a existência de

partículas dotadas de carga magnética. O trabalho em que Dirac<sup>[13]</sup> propõem a existência de monopolos magnéticos para justificar a quantização de carga gerou extensa literatura a este respeito<sup>[14],[15],[16]</sup>.

Neste trabalho estudamos os dois aspectos mencionados, no âmbito da teoria da gravitação de Einstein. No Capítulo 1, depois de fazermos uma revisão dos já citados trabalhos de Lipkin e Ragusa, mostramos a existência de novas leis de conservação gravitacionais, análogas às encontradas para o eletromagnetismo.

O Capítulo 2 dedica-se ao estudo do comportamento dos monopolos magnéticos gravitacionais que, como no eletromagnetismo, são introduzidos para preservar a invariância dual das equações de campo. Expomos o engenhoso argumento de Novello et al.<sup>[8]</sup>, em que aqueles autores utilizam o mapeamento conforme de trajetórias de polos elétricos gravitacionais em trajetórias de polos magnéticos gravitacionais. Ressaltamos também algumas características importantes do movimento dos monopolos magnéticos, entre elas a de deslocarem-se sobre curvas de aceleração constante.

No Capítulo 3 fazemos uma revisão sobre observadores acelerados e de sistemas de coordenadas apropriados para descrevê-los. Determinamos, em primeira aproximação, curvas de aceleração constante numa métrica de Minkowski com perturbação esférica.

## CAPÍTULO I

### NOVAS LEIS DE CONSERVAÇÃO

#### 1.1- Introdução

Lipkin<sup>[1]</sup>, indagando-se sobre o significado físico da lei de conservação

$$\text{div}\{E \wedge \partial E / \partial t + H \wedge \partial H / \partial t\} + \partial / \partial t [E \cdot (\text{rot} E) + H \cdot (\text{rot} H)] = 0, \quad (1.1.1)$$

que sempre acontece ser válida para um campo eletromagnético arbitrário no vácuo, procurou expressá-la em notação tensorial. Esta notação revelou nove leis adicionais, do tipo da eq.(1.1.1), ou seja, com a aparência de serem matematicamente independentes do impulso e da energia.

Ragusa<sup>[2]</sup>, em um trabalho recente, mostrou haver, para o campo eletromagnético, mais seis leis de conservação do tipo encontrado por Lipkin.

Neste estudo, mostramos que também para o campo gravitacional, na ausência de matéria, é possível definir grandezas conservadas análogas às encontradas por Lipkin e Ragusa para o campo eletromagnético.

#### 1.2- O zilch eletromagnético

Consideremos o tensor densidade de zilch, definido por

$$Z_{\mu\nu\rho} = \overset{*}{F}{}^{\lambda}{}_{\mu} F_{\lambda\nu,\rho} - F_{\mu}{}^{\lambda} \overset{*}{F}{}_{\lambda\nu,\rho} \quad (1.2.1)$$

onde  $\overset{*}{F}{}_{\mu\nu}$  é o dual de  $F_{\mu\nu}$ , definido como

$$\overset{*}{F}{}_{\mu\nu} = 1/2 \eta_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad (1.2.2)$$

e  $\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$  é o tensor completamente antissimétrico, com  $\eta_{0123} = -1$ .  $F_{\mu\nu}$  é o tensor antissimétrico que, junto com seu dual, satisfaz as equações de Maxwell para o vácuo

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (1.2.3a)$$

$$\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (1.2.3b)$$

e também as equações de onda

$$\square F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.2.4a)$$

$$\square \overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.4b)$$

Diferenciando a identidade<sup>[3]</sup>

$$F^{\mu\lambda} \overset{*}{F}{}_{\lambda\nu} = -1/4 F_{\alpha\beta} \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} \delta^{\mu}{}_{\nu} \quad (1.2.5)$$

obtemos

$$F^{\mu\lambda}{}_{,\rho} F_{\lambda\nu}{}^{\ast} = - F^{\mu\lambda}{}_{,\rho} F_{\lambda\nu}{}^{\ast} - 1/4 \delta^{\mu}_{\nu} (F_{\alpha\beta}{}^{\ast})_{,\rho} . \quad (1.2.6)$$

Diferenciando uma vez mais, e usando as equações de onda (1.2.4), chegamos a

$$F^{\mu\lambda}{}_{,\rho} F_{\lambda}{}^{\nu}{}_{,\rho} = - 1/4 g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}{}^{\ast}{}_{,\rho} F_{\alpha\beta}{}^{\ast}{}_{,\rho} . \quad (1.2.7)$$

Fazendo uso agora da eq. (1.2.6) na expressão (1.2.1) de  $Z_{\mu\nu\rho}$ , obtemos

$$Z_{\mu\nu\rho} = F_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\rho} F_{\lambda\nu}{}^{\ast} + F_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\rho} F_{\lambda\nu}{}^{\ast} + 1/4 g_{\mu\nu} (F_{\alpha\beta}{}^{\ast})_{,\rho} . \quad (1.2.8)$$

A expressão (1.2.8) é útil para mostrar algumas propriedades de  $Z_{\mu\nu\rho}$ , como veremos a seguir. Vê-se imediatamente, por exemplo, que  $Z_{\mu\nu\rho}$  é simétrico nos dois primeiros índices,

$$Z_{\mu\nu\rho} = Z_{\nu\mu\rho} , \quad (1.2.9)$$

e tem traços nulos, pois

$$Z^{\mu}{}_{\mu\rho} = 2 F^{\mu\lambda}{}_{,\rho} F_{\lambda\mu}{}^{\ast} + (F_{\alpha\beta}{}^{\ast})_{,\rho} = 0 , \quad (1.2.10)$$

e também, usando as equações de Maxwell (1.2.3) na expressão (1.2.1) da densidade de zilch,

$$Z_{\mu\rho}^{\rho} = F_{\mu\lambda}^{*\lambda\rho}{}_{,\rho} - F_{\mu\lambda}^{*\lambda\rho}{}_{,\rho} = 0. \quad (1.2.11)$$

Mostraremos agora que  $Z^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} = 0$ . Derivando a expressão (1.2.8), e usando as equações (1.2.4), temos, após agrupar os termos semelhantes,

$$Z^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} = 2 F_{\mu\lambda}^{*\lambda\nu}{}_{,\rho} F_{\lambda}^{\nu\rho} + 1/2 g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^{*\alpha\beta}{}_{,\rho} F_{\alpha\beta}{}^{\rho} = 0, \quad (1.2.12)$$

onde, nesta última passagem, usamos a identidade (1.2.7). A eq. (1.2.12) é de grande importância, pela interpretação que admite. A aplicação do teorema de Gauss<sup>[4]</sup>, generalizado para quatro dimensões, resulta

$$\oint Z^{\mu\nu\rho} dS_{\rho} = \int Z^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} dV, \quad (1.2.13)$$

onde a integral do lado esquerdo é realizada sobre uma hipersuperfície fechada, e  $dS_{\rho}$  são as componentes da densidade vetorial que em cada ponto da hipersuperfície é perpendicular a ela. Estas componentes são

$$dS_{\alpha} = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2). \quad (1.2.14)$$

Assim, a integral do lado esquerdo pode ser desmembrada em

$$\int Z^{\mu\nu 0} dx^1 dx^2 dx^3 +$$

$$+ \int (Z^{\mu\nu 1} dx^2 dx^3 + Z^{\mu\nu 2} dx^1 dx^3 + Z^{\mu\nu 3} dx^1 dx^2) dx^0 = 0. \quad (1.2.15)$$

Podemos interpretar  $Z^{\mu\nu}$ , definido pela integral volumétrica

$$Z^{\mu\nu} = \int Z^{\mu\nu 0} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.2.16)$$

como a quantidade total de zilch que o volume de espaço considerado contém. A integral de superfície,

$$J^{\mu\nu} = \int Z^{\mu\nu 1} dx^2 dx^3 + Z^{\mu\nu 2} dx^1 dx^3 + Z^{\mu\nu 3} dx^1 dx^2, \quad (1.2.17)$$

representa o fluxo instantâneo de zilch através da superfície que encerra o volume considerado. A eq.(1.2.15) é, assim, a forma integral da equação de conservação

$$dZ^{\mu\nu}/dx^0 = - J^{\mu\nu}. \quad (1.2.18)$$

$Z^{\mu\nu}$  e  $J^{\mu\nu}$  são tensores simétricos e de traço nulo, como asseguram as equações (1.2.9) e (1.2.11). Portanto, (1.2.18) estabelece a conservação de nove grandezas independentes.

Ragusa mostrou que existem seis leis adicionais de conservação do tipo das descobertas por Lipkin, ou seja, envolvendo apenas derivadas de primeira ordem das grandezas do campo. Estas leis adicionais relacionam-se com o tensor antissimétrico na troca dos dois primeiros índices

$$Y^{\mu\nu}_{\rho} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda\rho}^{\nu} - F^{\nu\lambda} F_{\lambda\rho}^{\mu}. \quad (1.2.19)$$

Para mostrar que  $Y^{\mu\nu\rho},_{\rho} = 0$ , basta tomar

$$Y^{\mu\nu\rho},_{\rho} = F^{\mu\lambda},_{\rho} F_{\lambda}^{\nu,\rho} + F^{\mu\lambda} \square F_{\lambda}^{\nu} - \\ - F^{\nu\lambda},_{\rho} F_{\lambda}^{\mu,\rho} - F^{\nu\lambda} \square F_{\lambda}^{\mu} = 0, \quad (1.2.20)$$

onde usamos as equações (1.2.4a) e (1.2.7). Com um procedimento análogo ao que nos levou ao estabelecimento de (1.2.18), pode-se mostrar que  $Y^{\mu\nu\rho}$  dá origem a seis novas leis de conservação.

Assim,

$$Y^{\mu\nu} = \int Y^{\mu\nu 0} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (1.2.21)$$

define seis grandezas conservadas que obedecem a equação

$$\frac{dY^{\mu\nu}}{dx^0} = -\phi^{\mu\nu}, \quad (1.2.22)$$

onde

$$\phi^{\mu\nu} = \int Y^{\mu\nu 1} dx^2 dx^3 + Y^{\mu\nu 2} dx^1 dx^3 + Y^{\mu\nu 3} dx^1 dx^2$$

é o fluxo total da grandeza conservada  $Y^{\mu\nu}$ .

As expressões das grandezas conservadas  $Z^{\mu\nu}$  e  $Y^{\mu\nu}$  em termos dos campos elétrico e magnético  $E$  e  $H$  podem ser obtidas por meio de

$$\begin{cases} E_i = F^{i0} , \\ H_i = -\epsilon_{ijk} F^{jk} = \tilde{F}^{i0} , \end{cases} \quad (1.2.23)$$

que, introduzidas nas eqs.(1.2.1) e (1.2.19), fornecem

$$Z^{000} = [ E \cdot (\nabla \times E) + H \cdot (\nabla \times HD) ] , \quad (1.2.24a)$$

$$Z^{0b0} = [ E \times \partial E / \partial t + H \times \partial H / \partial t ]_{(b)} , \quad (1.2.24b)$$

$$\begin{aligned} Z^{abo} &= \delta_{ab} Z^{000} - [ E_a (\nabla \times E)_{(b)} + H_a (\nabla \times HD)_{(b)} ] \\ &\quad - [ E_b (\nabla \times E)_{(a)} + H_b (\nabla \times HD)_{(a)} ] , \end{aligned} \quad (1.2.24c)$$

$$Y^{0b0} = [ H \times \partial H / \partial t - E \times \partial E / \partial t ]_{(b)} , \quad (1.2.25a)$$

$$\begin{aligned} Y^{abo} &= [ E_a (\nabla \times E)_{(b)} + H_b (\nabla \times HD)_{(a)} ] - \\ &\quad - [ E_b (\nabla \times E)_{(a)} + H_a (\nabla \times HD)_{(b)} ] . \end{aligned} \quad (1.2.25b)$$

Um exame destas expressões mostra que podemos considerar como constantes de movimento as grandezas  $Z^{00}$ , e ainda  $e$ ,  $h$ , e  $X_{ab}$  que são definidas por

$$e = \int E \times \partial E / \partial t \, dx^1 dx^2 dx^3 , \quad (1.2.26)$$

$$h = \int H \times \partial H / \partial t \, dx^1 dx^2 dx^3 , \quad (1.2.27)$$

$$X_{ab} = \int [ E_a (\nabla \times E)_{(b)} + H_b (\nabla \times H)_{(a)} ] dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.2.28)$$

Observando que o traço de  $X_{ab}$  é  $Z^{00}$ , temos que as expressões (1.2.26), (1.2.27) e (1.2.28) resultam num total de quinze constantes de movimento, que podem ser verificadas mostrando que as derivadas temporais de todas elas se reduzem a divergências. Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( E \times \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\partial E}{\partial t} \times \frac{\partial E}{\partial t} + E \times \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = E \times \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} E = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( E \times \frac{\partial E}{\partial x_i} \right),$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [ E_a (\nabla \times E)_{(b)} + H_b (\nabla \times H)_{(a)} ] = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} [ - E_a \partial H_b / \partial t + H_b \partial E_a / \partial t ] = - E_a \partial^2 H_b / \partial t^2 + H_b \partial^2 E_a / \partial t^2 \\ & = - E_a \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} H_b + H_b \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} E_a = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( - E_a \frac{\partial}{\partial x_i} H_b + H_b \frac{\partial}{\partial x_i} E_a \right). \end{aligned}$$

Ou seja, todas as expressões obedecem a equações de conservação:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \int E \times \frac{\partial E}{\partial x_i} dS_i,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \int H \times \frac{\partial H}{\partial x_i} dS_i,$$

$$\frac{\partial X_{ab}}{\partial t} = \int (-E_a \partial H_b / \partial x_i + H_b \partial E_a / \partial x_i) dS_i.$$

Algumas características interessantes do comportamento das densidades  $Z^{\mu\nu\sigma}$  são obtidas no caso de ondas eletromagnéticas planas no vácuo. Lipkin mostrou que ondas circularmente polarizadas transportam zilch, com fluxo linearmente proporcional à frequência de oscilação, e cujo sentido pode ser o mesmo ou oposto ao sentido de propagação da onda, dependendo do sentido da polarização. Para ver isso, consideremos uma onda eletromagnética plana de polarização arbitrária propagando-se na direção +z, cujos campos elétrico e magnético podem ser expressados como [5]

$$\begin{aligned} E_x &= H_y = A \exp(-ikz + i\omega t), \\ E_y &= -H_x = B \exp(-ikz + i\omega t), \\ E_z &= H_z = 0, \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

onde A e B são amplitudes complexas, podendo ser escritas como

$$\begin{aligned} A &= a e^{i\theta}, \\ B &= b e^{i\theta'}, \end{aligned}$$

onde a e b são coeficientes reais não negativos. Assim, se  $\theta = \theta'$ ,  $E_x$  e  $E_y$  oscilam em fase, resultando numa onda linearmente polarizada. No caso de ondas circularmente polarizadas,  $a = b$ . Se  $\theta = \theta' + \pi/2$ ,  $A = iB$ , e o vetor elétrico gira no sentido anti-horário para quem vê a onda aproximar-se. Se  $\theta = \theta' - \pi/2$ ,

$A = -iB$ , e o vetor elétrico gira no sentido horário.

Introduzindo as expressões (1.2.29) dos campos elétrico e magnético nas eq. (1.2.24), temos

$$Z^{ooo} = ik(A^*B - B^*A) , \quad (1.2.30a)$$

$$Z^{obo} = \delta_a^b Z^{ooo} , \quad (1.2.30b)$$

$$Z^{abo} = \delta_a^a \delta_a^b Z^{ooo} . \quad (1.2.30c)$$

Observe que as densidades  $Z^{\mu\nu\sigma}$  são constantes. Para uma onda linearmente polarizada,  $(A^*B - AB^*)$  anula-se. No caso de uma onda polarizada para a esquerda,  $A = iB$ , e  $[ik(A^*B - AB^*)] = 2k |B|^2 > 0$ ; e para uma onda polarizada para a direita,  $A = -iB$ , e  $[ik(A^*B - AB^*)] = -2k |B|^2 < 0$ .

Para estudarmos o comportamento das componentes  $Z^{\mu\nu\sigma}$  do fluxo, devemos expressá-las em termos dos campos elétrico e magnético, como fizemos para as densidades  $Z^{\mu\nu\sigma}$ . Encontramos assim,

$$Z^{ooc} = Z^{oco} - [\nabla \times (E \times H)]_{(c)} , \quad (1.2.31a)$$

$$Z^{obc} = Z^{bco} + \epsilon_{cda} \frac{\partial}{\partial x_a} [1/2 (E^2 + H^2) \delta_{bd} - (E_b E_d + H_b H_d)] , \quad (1.2.31b)$$

$$Z^{abc} = \delta_{ab} Z^{ooa} + \left\{ H_a E_{b,c} - E_a H_{b,c} + H_b E_{a,c} - E_b H_{a,c} \right\} \quad (1.2.31c)$$

Introduzindo agora as expressões (1.2.29) dos campos elétrico e magnético nas equações (1.2.31), encontramos

$$Z^{00c} = \delta_a^c Z^{000} = \delta_a^c [ik(A^*B - AB^*)], \quad (1.2.32a)$$

$$Z^{0bc} = \delta_a^b \delta_a^c Z^{000}, \quad (1.2.32b)$$

$$Z^{abc} = \delta_a^a \delta_a^b \delta_a^c Z^{000}. \quad (1.2.32c)$$

Podemos concluir das eqs.(1.2.32) que são diferentes de zero apenas as componentes que contribuem para um fluxo na direção de propagação da onda. Vemos também que ondas linearmente polarizadas, para as quais  $Z^{000} = 0$ , não transportam "zilch", e ainda que o sentido do fluxo é o mesmo da propagação da onda polarizada para a direita, ( $Z^{000} > 0$ ), e oposto ao sentido de propagação da onda polarizada para a esquerda, ( $Z^{000} < 0$ ). Outra característica interessante é o fato da densidade e do fluxo do zilch serem proporcionais à frequência da onda.

### 1.3- Novas leis de conservação gravitacionais

Na ausência de matéria, as equações de Einstein se escrevem

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.3.1)$$

Para enfatizar esta situação, é conveniente trabalhar com o tensor de Weyl,  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ , definido como a parte sem traço do

tensor  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ . Admitimos também que, na classe de geometrias com as quais trabalhamos, o tensor de Weyl satisfaz a equação da onda

$$\square W_{\alpha\beta\mu\nu} = \square \overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \quad (1.3.2)$$

Pode-se definir, em analogia ao zilch eletromagnético, o tensor

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \overset{*}{W}_{\alpha\alpha|\mu}{}^\rho W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon} - W_{\alpha\alpha|\mu}{}^\rho \overset{*}{W}^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon}. \quad (1.3.3)$$

Vamos primeiramente demonstrar as propriedades de simetria deste tensor. Derivando a identidade <sup>[3]</sup>

$$\overset{*}{W}_{\alpha\alpha|\mu}{}^\rho W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu} = I g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}, \quad (1.3.4)$$

onde  $I = 1/8 W_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{*}{W}^{\alpha\beta\mu\nu}$ , obtemos

$$\overset{*}{W}_{\alpha\alpha|\mu;\varepsilon}{}^\rho W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu} = I_{;\varepsilon} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \overset{*}{W}_{\alpha\alpha|\mu}{}^\rho W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon}. \quad (1.3.5)$$

Levando esta expressão à definição (1.3.3) de  $Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$ , teremos

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} &= \overset{*}{W}_{\alpha\alpha|\mu}{}^\rho W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon} + W_{\alpha\alpha|\mu;\varepsilon}{}^\rho \overset{*}{W}^\sigma{}_{|\beta\rho\nu} - \\ &\quad - I_{;\varepsilon} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Esta expressão de  $Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$  torna evidentes as seguintes propriedades de simetria

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = Z_{\beta\alpha\mu\nu\varepsilon} = Z_{\alpha\beta\nu\mu\varepsilon}. \quad (1.3.7)$$

Podemos mostrar que também

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = Z_{\mu\nu\alpha\beta\varepsilon}, \quad (1.3.8)$$

expandindo a expressão de  $Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = & \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\alpha\mu} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\beta\nu;\varepsilon} + \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\beta\mu} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\alpha\nu;\varepsilon} + \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\alpha\mu;\varepsilon} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\beta\nu} + \\ & + \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\beta\mu;\varepsilon} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\alpha\nu} - I_{;\varepsilon} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

e comparando-a termo a termo com

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu\alpha\beta\varepsilon} = & \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\mu\alpha} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\nu\beta;\varepsilon} + \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\nu\alpha} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\mu\beta;\varepsilon} + \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\mu\alpha;\varepsilon} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\nu\beta} + \\ & + \overset{\rho}{\mathbb{W}}_{\sigma\nu\alpha;\varepsilon} \overset{\sigma}{\mathbb{W}}_{\mu\beta} - I_{;\varepsilon} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

O zilch gravitacional tem traço nulo na contração dos dois primeiros índices,

$$Z_{\alpha\mu\nu\varepsilon}^{\alpha} = 0, \quad (1.3.9a)$$

e também na contração do primeiro e último índices,

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0. \quad (1.3.9b)$$

Para provar (1.3.9a), devemos notar que

$$\overset{*}{W}_{\sigma\alpha\mu}{}^{\rho} W^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu} = 1/2 \eta_{\sigma\alpha}{}^{\gamma\delta} W_{\gamma\delta\mu}{}^{\rho} W^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu} = W_{\sigma\alpha\mu}{}^{\rho} \overset{*}{W}^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu} . \quad (1.3.10)$$

Como  $\eta_{\alpha\beta\mu\nu;\epsilon} = 0$ , temos também,

$$\overset{*}{W}_{\sigma\alpha\mu}{}^{\rho} W^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu;\epsilon} = W_{\sigma\alpha\mu}{}^{\rho} \overset{*}{W}^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu;\epsilon} . \quad (1.3.11)$$

E, assim,

$$Z_{\alpha\mu\nu\epsilon}{}^{\alpha} = 2 \overset{*}{W}_{\sigma\alpha\mu}{}^{\rho} W^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu;\epsilon} - 2 W_{\sigma\alpha\mu}{}^{\rho} \overset{*}{W}^{\sigma\alpha}{}_{\rho\nu;\epsilon} = 0 .$$

Para provar (1.3.9b), lembremos que

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon} = Z_{\mu\nu\beta\alpha\epsilon} ,$$

e, portanto,

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{\alpha} = Z_{\mu\nu\beta\alpha}{}^{\alpha} = \overset{*}{W}_{\sigma\alpha\mu|\beta}{}^{\rho} W^{\sigma}{}_{\nu\rho\alpha}{}^{\alpha} - W_{\sigma\alpha\mu|\beta}{}^{\rho} \overset{*}{W}^{\sigma}{}_{\nu\rho\alpha}{}^{\alpha} .$$

Na ausência de matéria [9] ,

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 ,$$

$$\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 .$$

Assim,

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu}{}^\alpha = 0.$$

Mostraremos agora que

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}{}_{;\varepsilon} = 0. \quad (1.3.12)$$

Pressupondo que  $\square W_{\alpha\beta\mu\nu} = \square \overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ , temos

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}{}^\varepsilon &= \overset{*}{W}_{\alpha|\mu}{}^\rho{}_\varepsilon W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon} + W_{\alpha|\mu}{}^\rho{}_\varepsilon \overset{*}{W}^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon} \\ &\quad - \square I g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Derivando duas vezes a identidade (1.3.4), obtemos

$$\square I g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = 2 \overset{*}{W}_{\alpha|\mu}{}^\rho{}_\varepsilon W^\sigma{}_{|\beta\rho\nu;\varepsilon}. \quad (1.3.14)$$

Introduzindo isto na expressão (1.3.13) da divergência de  $Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$ , encontramos

$$Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}{}^\varepsilon = 1/2 \square I g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + 1/2 \square I g_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \square I g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = 0.$$

Outras grandezas análogas a  $Z^{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$ , todas com a propriedade comum de possuírem divergência nula, podem ser definidas. Por exemplo,

$$A_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \overset{*}{W}_{\alpha|\rho\mu} W^\sigma{}_{|\beta}{}^\rho{}_{\nu;\varepsilon} - \overset{*}{W}_{\alpha|\rho\nu} W^\sigma{}_{|\beta}{}^\rho{}_{\mu;\varepsilon}, \quad (1.3.15)$$

$$B_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \delta_{\sigma\alpha|\rho\mu} W^{\sigma}{}_{|\beta)} \rho_{\nu;\varepsilon} + \delta_{\sigma\alpha|\rho\nu} W^{\sigma}{}_{|\beta)} \rho_{\mu;\varepsilon} , \quad (1.3.16)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \delta_{\sigma\alpha|\rho\mu} W^{\sigma}{}_{|\beta)} \rho_{\nu;\varepsilon} - \delta_{\sigma\mu|\rho\alpha} W^{\sigma}{}_{|\nu)} \rho_{\beta;\varepsilon} . \quad (1.3.17)$$

Como fizemos para  $Z_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$ , podemos empregar a eq.(1.3.4) para dispor as expressões (1.3.15) e (1.3.17) numa outra forma.

Temos então as seguintes expressões alternativas:

$$A_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \delta_{\sigma\alpha|\rho\mu} W^{\sigma}{}_{|\beta)} \rho_{\nu;\varepsilon} + \delta_{\sigma\alpha|\rho\nu;\varepsilon} W^{\sigma}{}_{|\beta)} \rho_{\mu} - \\ - I_{;\varepsilon} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} , \quad (1.3.18)$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \delta_{\sigma\alpha|\rho\mu} W^{\sigma}{}_{|\beta)} \rho_{\nu;\varepsilon} + \delta_{\sigma\mu|\rho\alpha;\varepsilon} W^{\sigma}{}_{|\nu)} \rho_{\beta} - \\ - I_{;\varepsilon} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} . \quad (1.3.19)$$

Uma forma mais simples para  $C_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon}$  pode ser encontrada expandindo a expressão (1.3.17) :

$$C_{\alpha\beta\mu\nu\varepsilon} = \delta_{\sigma\alpha\rho\mu} W^{\sigma}{}_{\beta} \rho_{\nu;\varepsilon} - \delta_{\sigma\mu\rho\alpha} W^{\sigma}{}_{\nu} \rho_{\beta;\varepsilon} + \\ + \delta_{\sigma\beta\rho\mu} W^{\sigma}{}_{\alpha} \rho_{\nu;\varepsilon} - \delta_{\sigma\nu\rho\alpha} W^{\sigma}{}_{\mu} \rho_{\beta;\varepsilon} .$$

Usando agora as propriedades, de simetria do tensor de Weyl, temos

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon} &= \epsilon_{\sigma\alpha\rho\mu} W^{\sigma\rho}_{\beta\nu\epsilon} - \epsilon_{\sigma\alpha\rho\mu} W^{\sigma\rho}_{\beta\nu\epsilon} + \\
 &+ \epsilon_{\sigma\beta\rho\mu} W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu\epsilon} - \epsilon_{\sigma\alpha\rho\nu} W^{\sigma\rho}_{\beta\mu\epsilon} = \\
 &= \epsilon_{\sigma\beta\rho\mu} W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu\epsilon} - \epsilon_{\sigma\alpha\rho\nu} W^{\sigma\rho}_{\beta\mu\epsilon}. \quad (1.3.20)
 \end{aligned}$$

As propriedades de simetria de  $A_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$ ,  $B_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$  e  $C_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$  são facilmente verificadas inspecionando-se as expressões (1.3.15), (1.3.16) e (1.3.20). Obtemos assim

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon} &= -A_{\beta\alpha\mu\nu\epsilon} = -A_{\alpha\beta\nu\mu\epsilon}, \\
 B_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon} &= -B_{\beta\alpha\mu\nu\epsilon} = +B_{\alpha\beta\nu\mu\epsilon}, \quad (1.3.21) \\
 C_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon} &= -C_{\mu\nu\alpha\beta\epsilon} = -C_{\beta\alpha\nu\mu\epsilon}.
 \end{aligned}$$

Resta ainda mostrar que estas grandezas têm divergência nula. Para isto, tomamos as derivadas das eqs.(1.3.15), (1.3.16) e (1.3.20):

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon;\sigma} &= \epsilon_{\sigma\alpha|\rho\mu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{|\beta|\nu\epsilon} - \epsilon_{\sigma\alpha|\rho\nu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{|\beta|\mu\epsilon} = \\
 &= \epsilon_{\sigma\alpha\rho\mu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{\beta\nu\epsilon} - \epsilon_{\sigma\alpha\rho\nu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{\beta\mu\epsilon} + \\
 &+ \epsilon_{\sigma\beta\rho\mu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu\epsilon} - \epsilon_{\sigma\beta\rho\nu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{\alpha\mu\epsilon} = 0, \quad (1.3.22)
 \end{aligned}$$

$$B_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon;\sigma} = \epsilon_{\sigma\alpha|\rho\mu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{|\beta|\nu\epsilon} + \epsilon_{\sigma\alpha|\rho\nu}{}_{;\sigma} W^{\sigma\rho}_{|\beta|\mu\epsilon} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\alpha\rho\mu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\beta\nu;\epsilon} + \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\alpha\rho\nu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\beta\mu;\epsilon} - \\
 &- \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\mu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu;\epsilon} - \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\nu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\mu;\epsilon} = \\
 &= W_{\sigma\alpha\rho\mu} \overset{\ast}{\nabla}_{\beta\nu;\epsilon} \epsilon W^{\sigma\rho} + W_{\sigma\alpha\rho\nu} \overset{\ast}{\nabla}_{\beta\mu;\epsilon} \epsilon W^{\sigma\rho} - \\
 &- \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\mu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu;\epsilon} - \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\nu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\mu;\epsilon} = 0, \tag{1.3.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon} \epsilon &= \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\mu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu;\epsilon} - \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\alpha\rho\nu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\beta\mu;\epsilon} = \\
 &= \overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\mu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu;\epsilon} - W_{\sigma\alpha\rho\nu} \overset{\ast}{\nabla}_{\beta\mu;\epsilon} \epsilon W^{\sigma\rho} = 0. \tag{1.3.24}
 \end{aligned}$$

Na dedução das eqs. (1.3.22), (1.3.23) e (1.3.24) usamos a eq.(1.3.2), propriedades de simetria do tensor de Weyl e ainda a identidade abaixo, que pode ser facilmente vista da eq.(1.3.10),

$$\overset{\ast}{\nabla}_{\sigma\beta\rho\mu} \epsilon W^{\sigma\rho}_{\alpha\nu;\epsilon} = W_{\sigma\beta\rho\mu} \overset{\ast}{\nabla}_{\alpha\nu;\epsilon} \epsilon W^{\sigma\rho}. \tag{1.3.25}$$

Tendo mostrado que  $A_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$ ,  $B_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$ ,  $C_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$  e  $Z_{\alpha\beta\mu\nu\epsilon}$  têm divergente nulo, a aplicação do teorema de Gauss nos assegura que estas grandezas são conservadas, obedecendo a equação de conservação genérica

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \sqrt{-g} D^{\alpha\beta\mu\nu} dx^1 dx^2 dx^3 = - \zeta^{\alpha\beta\mu\nu},$$

onde

$$\xi^{\alpha\beta\mu\nu} = \int \sqrt{-g} ( D^{\alpha\beta\mu\nu i} + E^{\alpha\beta\mu\nu i} ) dS_i ,$$

sendo  $dS_i$  as componentes espaciais da densidade vetorial definida pela eq.(1.2.14) e onde  $E^{\alpha\beta\mu\nu i}$  são componentes de qualquer tensor  $E^{\alpha\beta\mu\nu\rho}$  que satisfaça

$$E^{\alpha\beta\mu\nu i}{}_{,i} = \Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\alpha} D^{\gamma\beta\mu\nu\varepsilon} + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\beta} D^{\alpha\gamma\mu\nu\varepsilon} + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\mu} D^{\alpha\beta\gamma\nu\varepsilon} + \\ + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\nu} D^{\alpha\beta\mu\gamma\varepsilon} + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\varepsilon} D^{\alpha\beta\mu\nu\gamma} .$$

## CAPÍTULO 2

### MONOPOLOS GRAVITACIONAIS

#### 2.1- Introdução

É fato conhecido que as equações de Maxwell da eletrodinâmica, na ausência de fontes,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

são invariantes perante a transformação de dualidade

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}' \cos\theta + \mathbf{H}' \operatorname{sen}\theta, \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{E}' \operatorname{sen}\theta + \mathbf{H}' \cos\theta.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Esta transformação deixa invariantes formas quadráticas como  $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$ ,  $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  e a lagrangiana do campo livre  $\mathcal{L} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . Para manter esta simetria na presença de fontes, torna-se necessário modificar as equações de Maxwell, introduzindo uma classe de partículas dotadas de carga magnética, chamadas de monopolos magnéticos. As equações de Maxwell seriam, então,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho_e , & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_e , \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi \rho_m , & -\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m . \end{aligned}$$

Uma situação análoga existe para as equações do campo gravitacional. Pode-se mostrar que, para o espaço vazio, as equações de Einstein são equivalentes à divergência nula do tensor de Weyl<sup>[6]</sup>. Esta formulação mostra uma notável semelhança com as equações de Maxwell do eletromagnetismo, sendo porisso que as componentes do tensor de Weyl são separadas em parte elétrica,  $(E_{\alpha\beta})$ , e magnética,  $(H_{\alpha\beta})$ . Observa-se que também aqui as equações são invariantes perante a transformação

$$E_{\alpha\beta} \longrightarrow H_{\alpha\beta} ,$$

$$H_{\alpha\beta} \longrightarrow -E_{\alpha\beta} . \quad (2.1.2)$$

Outra semelhança com o eletromagnetismo surge quando se modificam as equações no sentido de preservar a invariância perante as transformações acima na presença de matéria, pois estas modificações implicam na introdução de uma categoria de partículas que, sob a ação da força gravitacional, têm um comportamento distinto do da matéria usual. Seguindo a analogia com o eletromagnetismo, estas partículas são denominadas monopolos magnéticos gravitacionais.

O estudo das modificações das equações de Einstein poderia

ser o ponto de partida para a análise da simetria citada, porém este não é o único caminho.

Um observador que esteja unicamente submetido à ação de forças gravitacionais, e portanto em movimento geodético, não tem meios de medir a força que age sobre ele, pois todos os objetos em sua vizinhança estarão caindo com a mesma aceleração. O único meio de conhecer a curvatura do espaço com medidas locais é observar as "forças de maré" entre objetos vizinhos. Tais forças atuam sobre corpos que estejam caindo num campo gravitacional não uniforme, pois neste caso as linhas geodéticas se aproximam ou se afastam conforme a curvatura do lugar. Assim, medindo-se a evolução do vetor  $\eta^\alpha$ , que liga pontos de mesmo parâmetro sobre geodéticas vizinhas, e que satisfaz a equação

$$\frac{D^2 \eta^\alpha}{D s^2} = R^{\alpha\mu}_{\beta\nu} V_\mu V^\nu \eta^\beta, \quad (2.1.3)$$

onde  $V^\mu = dx^\mu/ds$  é o vetor tangente à geodética  $X^\mu(s)$ , e  $R^{\alpha\mu}_{\beta\nu}$  é o tensor de curvatura, pode-se conhecer a curvatura do espaço. Por outro lado, vê-se através da mesma equação como o tensor  $R^{\alpha\mu}_{\beta\nu}$  governa o movimento geodético. É, assim, razoável esperar [8] que uma equação análoga governe o movimento das partículas introduzidas por conta da preservação da simetria das equações do campo gravitacional. As propriedades de simetria do tensor de Riemann indicam que a única maneira de escrevermos tal equação é

$$\frac{D^2 \Pi^\alpha}{D s^2} = f R^{\alpha\mu}_{\beta\nu} V^\nu V_\mu \Pi^\beta, \quad (2.1.4)$$

onde o vetor  $\Pi^\alpha$  liga pontos de mesmo parâmetro  $s$  sobre curvas  $Y^\alpha(s)$  vizinhas, e onde

$$R^{\alpha\mu}_{\beta\nu} = 1/2 \eta^{\alpha\mu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\beta\nu}$$

é o dual do tensor de curvatura. A razão de introduzirmos a constante  $f$  na eq.(2.1.4) se deve ao fato de que as novas partículas seguem um movimento forçado no campo gravitacional, e admitimos que a razão entre a força a que são submetidas e sua massa inercial seja característica de cada partícula.

## 2.2- Partes elétrica e magnética do tensor de Weyl

O tensor de Weyl,  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ , pode ser decomposto em termos de dois tensores simétricos e de traços nulos,  $E_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$ , que são, respectivamente, as projeções do tensor de Weyl e seu dual sobre uma curva arbitrária  $Y^\alpha(s)$ :

$$E_{\alpha\beta} = - W_{\alpha\mu\beta\nu} S^\mu S^\nu,$$

$$H_{\alpha\beta} = \tilde{W}_{\alpha\mu\beta\nu} S^\mu S^\nu. \quad (2.2.1)$$

$S^\mu = dY^\mu/ds$  é o vetor unitário, tangente à curva  $Y^\alpha(s)$ .  $E_{\alpha\beta}$  é

chamado de parte elétrica e  $H_{\alpha\beta}$  é a parte magnética do tensor de Weyl na direção  $S^\mu$ . Expresso em termos de  $E_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$ , o tensor de Weyl escreve-se

$$W^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = 2 S_{(\alpha} E^{\mu}_{\beta)} S^{\nu)} + \delta^{\mu\nu}_{(\alpha\beta)} - \eta_{\alpha\beta\lambda\sigma} S^\lambda H^{\sigma(\mu} S^{\nu)} - \eta^{\mu\nu\rho\sigma} S_\rho H_{\sigma\alpha} S_{\beta)}. \quad (2.2.2)$$

Usando os tensores  $E_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$ , é possível escrever [7] um conjunto de equações que são equivalentes às equações de Einstein, sob condições iniciais adequadas [6]. Usando um tensor de impulso-energia que represente um fluido perfeito, de densidade  $\rho$  e pressão  $p$ , temos

$$H^{\mu\lambda}_{;\nu} h^\sigma_{\epsilon\lambda} h^\nu_\mu - 3 E_{\alpha\epsilon} \omega^\alpha - E^\mu_{\alpha\mu\beta} S_\lambda \eta^\epsilon{}^{\lambda\beta\alpha} = (\rho + p) \omega_\epsilon \quad (2.2.3a)$$

$$E^{\mu\lambda}_{;\nu} h^\sigma_{\epsilon\lambda} h^\nu_\mu + 3 H_{\alpha\epsilon} \omega^\alpha + H^\mu_{\alpha\mu\beta} S_\lambda \eta^\epsilon{}^{\lambda\beta\alpha} = 1/3 \rho_{,\alpha} h^\alpha_\epsilon, \quad (2.2.3b)$$

$$\begin{aligned} & H^{\rho\mu} h_\mu^\sigma h_\rho^\epsilon + 1/2 E^{\alpha\mu;\nu} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\epsilon)}{}_{\lambda\nu\alpha} S^\lambda + \theta E^{\epsilon\sigma} - \\ & - 1/2 H_\nu{}^{(\epsilon} \theta^{\sigma\nu)} - 1/2 H_\nu{}^{(\epsilon} \omega^{\sigma\nu)} - \eta^{\sigma\nu\alpha} \eta^{\epsilon\lambda\alpha\beta} S_\rho S_\lambda H_{\alpha\beta} \theta_{\beta\nu} - \\ & - S^\alpha E^{\beta\sigma} \eta^{\epsilon)}{}_{\lambda\alpha\beta} S^\lambda = 0, \end{aligned} \quad (2.2.4a)$$

$$\begin{aligned} & E^{\rho\mu} h_\mu^\sigma h_\rho^\epsilon - 1/2 H^{\alpha\mu;\nu} h_\mu^{(\sigma} \eta^{\epsilon)}{}_{\lambda\nu\alpha} S^\lambda + \theta E^{\epsilon\sigma} - \\ & - 1/2 E_\nu{}^{(\epsilon} \theta^{\sigma\nu)} - 1/2 E_\nu{}^{(\epsilon} \omega^{\sigma\nu)} - \eta^{\sigma\nu\alpha} \eta^{\epsilon\lambda\alpha\beta} S_\rho S_\lambda E_{\alpha\beta} \theta_{\beta\nu} + \end{aligned}$$

$$+ S^\alpha H^{\beta\sigma} \eta^{\epsilon\lambda} \lambda_{\alpha\beta} S^\lambda = -1/4 (\rho + p) o^{\epsilon\sigma} . \quad (2.2.4b)$$

Nestas equações,  $h_{\mu\nu}$  é o projetor sobre o plano ortogonal a  $S^\mu$ ,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - S_\mu S_\nu , \quad (2.2.5)$$

e o ponto sobre  $E_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$  representa a derivada covariante na direção de  $S_\mu$ ,

$$\dot{E}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta;\lambda} S^\lambda . \quad (2.2.6)$$

Os tensores de cisalhamento,  $\sigma_{\mu\nu}$ , rotação,  $\omega_{\mu\nu}$ , e a expansão  $\theta$  são dados por

$$\theta = S^\alpha{}_{;\alpha} . \quad (2.2.7)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = 1/2 h^\lambda{}_\mu h^\epsilon{}_\nu S_{\lambda;\epsilon} - 1/3 \theta h_{\mu\nu} , \quad (2.2.8)$$

$$\omega_{\mu\nu} = 1/2 h^\lambda{}_\mu h^\epsilon{}_\nu S_{\lambda;\epsilon} . \quad (2.2.9)$$

$\sigma_{\mu\nu}$  é a parte de traço nulo do tensor de cisalhamento  $\theta_{\mu\nu}$ ,

$$\sigma_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - 1/3 \theta h_{\mu\nu} , \quad (2.2.10)$$

e  $\omega^\alpha$  é o vetor de rotação, definido por

$$\omega^\alpha = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \omega_{\mu\nu} S_\rho .$$

As equações (2.2.3) e (2.2.4), na região onde  $T_{\mu\nu} = 0$ , são invariantes perante a transformação

$$E_{\alpha\beta} \longrightarrow E'_{\alpha\beta} = \cos\phi E_{\alpha\beta} + \text{sen}\phi H_{\alpha\beta}, \quad (2.2.11a)$$

$$H_{\alpha\beta} \longrightarrow H'_{\alpha\beta} = -\text{sen}\phi E_{\alpha\beta} + \cos\phi H_{\alpha\beta}. \quad (2.2.11b)$$

Observe que a transformação (2.1.2) é uma situação particular da transformação mais geral (2.2.11).

### 2.3- A equação de movimento dos polos gravitacionais

Consideremos uma família de curvas descritas por

$$X^\alpha = X^\alpha(s, q), \quad (2.3.1)$$

onde admitimos que  $X^\alpha$  é uma função contínua e diferenciável em ambos os parâmetros,  $s$  e  $q$ . O parâmetro  $s$  será usado para distinguir pontos sobre uma mesma curva, enquanto o parâmetro  $q$  será usado para distinguir curvas em uma família.

Definiremos, para essa família de curvas, o campo vetorial

$$S^\mu(s, q) = \partial X^\mu(s, q) / \partial s, \quad (2.3.2)$$

de vetores tangentes às curvas, e também

$$\Pi^\mu(s, q) = \partial X^\mu(s, q) / \partial q, \quad (2.3.3)$$

que descreve o desvio de dois pontos de mesmo parâmetro  $s$  sobre duas curvas infinitesimalmente próximas. Intercambiando as derivadas parciais, temos

$$\partial S^\alpha / \partial q = \partial^2 X^\alpha / \partial q \partial s = \partial \Pi^\alpha / \partial s . \quad (2.3.4)$$

Podemos interpretar o vetor tangente  $S^\alpha(s, q)$  como representando a velocidade de um observador que se desloca sobre a curva  $X^\alpha(s, q)$  e que tenha adotado o parâmetro  $s$  como tempo próprio. Com isto, a aceleração de tal observador será a derivada covariante de  $S^\alpha$  na direção da curva  $X^\alpha(s, q)$ . Portanto,

$$a^\alpha(s, q) = Ds^\alpha / Ds = \partial S^\alpha / \partial s + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha S^\beta S^\gamma \equiv S^\alpha_{;\beta} S^\beta . \quad (2.3.5)$$

Se  $a^\alpha(s, q)$  for sempre nula,  $X^\alpha(s, q)$  será uma família de geodésicas, pois neste caso a eq.(3.3.5) se reduz a

$$a^\alpha(s, q) = \partial^2 X^\alpha / \partial s^2 + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial X^\beta / \partial s \partial X^\gamma / \partial s = 0 . \quad (2.3.6)$$

Vamos agora tomar a derivada covariante de  $\Pi^\alpha$  ao longo da curva  $X^\alpha(s, q)$ :

$$\begin{aligned} D\Pi^\alpha / Ds &= \Pi^\alpha_{;\beta} S^\beta = \partial \Pi^\alpha / \partial s + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha S^\beta \Pi^\gamma = \\ &= \partial S^\alpha / \partial q + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha S^\beta \Pi^\gamma . \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

O que queremos mostrar é obtido derivando covariantemente (2.3.7),

$$D^2 \Pi^\alpha / Ds^2 = (D\Pi^\alpha / Ds)_{;\delta} S^\delta = \\ = \partial / \partial s (D\Pi^\alpha / Ds) + \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha (D\Pi^\epsilon / Ds) S^\delta . \quad (2.3.8)$$

Usando a expressão (2.3.7) para  $D\Pi^\alpha / Ds$  e ainda (2.3.2) e (2.3.4), obtemos

$$D^2 \Pi^\alpha / Ds^2 = \partial / \partial q (\partial^2 x^\alpha / \partial s^2) + \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha \partial x^\beta / \partial s \partial x^\gamma / \partial q \partial x^\delta / \partial s + \\ + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (\partial^2 x^\beta / \partial s^2) \partial x^\gamma / \partial q + 2 \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial x^\beta / \partial s (\partial^2 x^\gamma / \partial s \partial q) + \\ + \Gamma_{\delta\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon \partial x^\beta / \partial s \partial x^\gamma / \partial q \partial x^\delta / \partial s . \quad (2.3.9)$$

Reescrevendo a eq.(2.3.6) na forma

$$\partial^2 x^\alpha / \partial s^2 = a^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial x^\beta / \partial s \partial x^\gamma / \partial s, \quad (2.3.10)$$

podemos eliminar de (2.3.9) os termos  $\partial^2 x^\alpha / \partial s^2$ . Fazendo isto, e rearranjando os termos, temos

$$D^2 \Pi^\alpha / Ds^2 = (\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon) \partial x^\beta / \partial s \partial x^\gamma / \partial s \Pi^\delta \\ + a^\alpha_{;\delta} \Pi^\delta . \quad (2.3.11)$$

O termo entre parênteses nada mais é que a definição do tensor de curvatura. Podemos simplificar a eq.(2.3.11) para

$$D^2 \Pi^\alpha / Ds^2 = - R^\alpha_{\beta\gamma\delta} S^\beta S^\gamma \Pi^\delta + a^\alpha_{;\delta} \Pi^\delta . \quad (2.3.12)$$

Na ausência de fontes o tensor de Riemann é igual ao tensor de Weyl; assim, usando a eq.(2.2.1a), podemos escrever

$$D^2 \Pi^\alpha / Ds^2 = (a^\alpha_{;\delta} - E^\alpha_\delta) \Pi^\delta, \quad (2.3.13)$$

relação esta que é válida no vácuo.

O significado físico da eq.(2.3.13) é obtido mais facilmente considerando uma situação particular, em que  $a^\alpha = 0$ . Como vimos, isto corresponde ao movimento sobre uma geodésica, e aqui admitiremos que um observador, deslocando-se sobre uma geodésica, tenha adotado o parâmetro  $s$  como medida do tempo, e interprete o desvio geodésico

$$z^\alpha = \epsilon \Pi^\alpha(s)$$

como o vetor posição de um objeto que se desloque numa geodésica vizinha. O fator positivo  $\epsilon$  é a medida da distância do objeto. Pela eq.(2.3.13), teremos

$$d^2 z^\alpha / dt^2 = - E^\alpha_\beta z^\beta. \quad (2.3.14)$$

Consideremos, por outro lado, o problema, tratado de acordo com a mecânica Newtoniana, de uma força proporcional à massa e que varie apenas com a posição. Se  $A^i(x^k)$  é o vetor aceleração deste campo, o objeto terá uma aceleração relativa ao observador dada por

$$d^2 z^i / dt^2 = A^i(x^k + z^k) - A^i(x^k) =$$

$$= \partial A^i / \partial x^k z^k + \alpha z^2. \quad (2.3.15)$$

Comparando as equações (2.3.15) e (2.3.14), vemos ser válida a associação

$$- E^i_k \longleftrightarrow \partial A^i / \partial x^k. \quad (2.3.16)$$

Se o campo de força admite um potencial  $\phi(x^i)$ , tal que

$$A^i = - \partial \phi / \partial x^i, \quad (2.3.17)$$

obtemos a correspondência

$$E^i_k \longleftrightarrow \partial^2 \phi / \partial x^i \partial x^k. \quad (2.3.18)$$

A condição estabelecida pela equação de Laplace,  $\nabla^2 \phi = 0$ , corresponde a

$$E^i_i = 0, \quad (2.3.19)$$

ou seja, ao traço nulo de  $E^i_j$ , analogamente à condição assegurada pela definição (2.2.1).

A equação (2.1.4) também pode ser escrita como

$$D^2 \Pi^\alpha / Ds^2 = f H^\alpha_\beta \Pi^\beta, \quad (2.3.20)$$

sendo que esta forma é válida no vácuo. Se impusermos a eq.(2.3.20) sobre o comportamento do vetor desvio  $\Pi^\alpha$ , então a

eq.(2.3.13) nos diz que os polos H estarão sujeitos a um campo de acelerações dado por

$$a^{\alpha}_{;\delta} = E^{\alpha}_{\delta} + f H^{\alpha}_{\delta} . \quad (2.3.21)$$

A consideração da eq.(2.3.21), apenas, não nos permite obter as equações de movimento das partículas, pois para isso precisaríamos conhecer o campo de acelerações, e este, por sua vez, depende das partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, que são obtidas projetando-o na direção do movimento das partículas. Estas dificuldades não nos impedem, contudo, de obter algumas informações úteis sobre o campo de acelerações  $a^{\alpha}$ . Devido à simetria de  $E^{\alpha}_{\beta}$  e  $H^{\alpha}_{\beta}$ , temos

$$a_{\alpha;\beta} = a_{\beta;\alpha} ,$$

ou seja,

$$a_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\beta} a_{\epsilon} = a_{\beta,\alpha} - \Gamma^{\epsilon}_{\beta\alpha} .$$

Como  $\Gamma^{\epsilon}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\epsilon}_{\beta\alpha}$ , a igualdade acima, para ser satisfeita, exige que

$$a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha} ,$$

e isto em geral só será válido se pudermos expressar  $a^{\alpha}$  como o gradiente de um potencial  $\phi$ :

$$a_{\alpha} = \phi_{,\alpha} . \quad (2.3.22)$$

Outra característica importante do movimento das partículas é obtida tomando a derivada de  $a^{\alpha}$  na direção da trajetória,

$$\frac{Da^{\alpha}}{Ds} = a^{\alpha}{}_{;\delta} V^{\delta} = (E^{\alpha}_{\delta} + f H^{\alpha}_{\delta}) V^{\delta} = 0 . \quad (2.3.23)$$

Ou seja, a eq.(2.3.23) nos assegura que o movimento dos monopolos magnéticos gravitacionais ocorre sobre curvas de aceleração constante.

#### 2.4- Mapeamento conforme de trajetórias de polos E em trajetórias de polo H

Uma maneira de contornar as dificuldades na determinação das trajetórias das partículas associadas à eq.(2.3.21) surge das propriedades simétricas desta teoria, quando estudamos seu comportamento perante transformações conformes.

Para isso, consideremos uma variedade de Riemann  $V_4$  dotada de uma métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  e um conjunto de geodésicas não-nulas caracterizado pelo campo vetorial tangente  $S^{\alpha}(s)$ , onde  $s$  é o parâmetro afim. Uma transformação conforme nesta variedade é dada por

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\psi(x)} g_{\mu\nu}(x) , \quad (2.4.1a)$$

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = e^{-2\psi(x)} g^{\mu\nu}(x) . \quad (2.4.1b)$$



Esta transformação resulta num mapeamento de  $V_4$  em  $\tilde{V}_4$ , chamado mapeamento conforme. Se adotarmos o mesmo sistema de coordenadas em ambos os espaços, os elementos de linha serão relacionados por

$$d\tilde{s}^2 = e^{2\psi} ds^2 \quad (2.4.2)$$

O mapeamento conforme preserva o ângulo entre dois vetores, como é fácil ver da expressão do cosseno do ângulo,

$$\cos(A, B) = \frac{A_\alpha B^\alpha}{[(A_\alpha A^\alpha)(B_\alpha B^\alpha)]^{1/2}}$$

O tensor de Weyl e seu dual são preservados por esta transformação [4]:

$$\tilde{W}^\alpha_{\beta\mu\nu} = W^\alpha_{\beta\mu\nu} \quad (2.4.3a)$$

$$\tilde{\tilde{W}}^\alpha_{\beta\mu\nu} = \tilde{\tilde{W}}^\alpha_{\beta\mu\nu} \quad (2.4.3b)$$

Lembrando que  $S^\alpha = dx^\alpha/ds$ , temos

$$\tilde{S}^\alpha = dx^\alpha/d\tilde{s} = e^{-\psi} S^\alpha \quad (2.4.4)$$

Com isto, as partes elétrica e magnética transformam-se como

$$\tilde{E}_{\alpha\beta} = -\tilde{W}_{\alpha\mu\beta\nu} \tilde{S}^\mu \tilde{S}^\nu = -W_{\alpha\mu\beta\nu} S^\mu S^\nu = E_{\alpha\beta} \quad (2.4.5a)$$

$$\tilde{H}_{\alpha\beta} = \tilde{H}_{\alpha\mu\beta\nu} \tilde{S}^\mu \tilde{S}^\nu = \tilde{H}_{\alpha\mu\beta\nu} S^\mu S^\nu = H_{\alpha\beta} . \quad (3.4.5b)$$

O comportamento de outras grandezas, como a expansão  $\theta$ , o cisalhamento  $\sigma_{\mu\nu}$  e a rotação  $\omega_{\mu\nu}$  pode também ser obtido facilmente:

$$\theta \longrightarrow \tilde{\theta} = e^{-\psi} \theta - 3(e^{-\psi})_{, \alpha} S^\alpha ,$$

$$\sigma_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{\sigma}_{\mu\nu} = e^\psi \sigma_{\mu\nu} , \quad (2.4.6)$$

$$\omega_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{\omega}_{\mu\nu} = e^\psi \omega_{\mu\nu} .$$

O símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  transforma-se como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= 1/2 g^{\alpha\epsilon} (g_{\epsilon\mu, \nu} + g_{\epsilon\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \epsilon}) = 1/2 e^{2\psi} \tilde{g}^{\alpha\epsilon} [e^{-2\psi} \tilde{g}_{\epsilon\mu, \nu} + \\ &+ (e^{-2\psi})_{, \nu} \tilde{g}_{\epsilon\mu} + e^{-2\psi} \tilde{g}_{\epsilon\nu, \mu} + (e^{-2\psi})_{, \mu} \tilde{g}_{\epsilon\nu} - e^{-2\psi} \tilde{g}_{\mu\nu, \epsilon} - \\ &- (e^{-2\psi})_{, \epsilon} \tilde{g}_{\mu\nu}] = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - (\psi_{, \nu} \delta_\mu^\alpha + \psi_{, \mu} \delta_\nu^\alpha - \psi_{, \epsilon} \tilde{g}^{\alpha\epsilon} \tilde{g}_{\mu\nu}) . \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Vamos agora ver como é o mapeamento das geodésicas,

$$\frac{DS^\alpha}{Ds} = (S^\alpha_{, \beta} + \Gamma_{\epsilon\beta}^\alpha S^\epsilon) S^\beta = 0 .$$

Usando as equações (2.4.4) e (2.4.7), temos

$$\frac{DS^\alpha}{Ds} = [ (e^\psi \tilde{S}^\alpha)_{,\beta} + ( \tilde{\Gamma}_{\epsilon\beta}^\alpha - \psi_{,\epsilon} \delta_\beta^\alpha - \psi_{,\beta} \delta_\epsilon^\alpha + \psi_{,\mu} \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}_{\epsilon\beta} ) (e^\psi \tilde{S}^\epsilon) ] e^\psi \tilde{S}^\beta = 0 \quad (2.4.8)$$

Inserindo nesta expressão a definição

$$\frac{D\tilde{S}^\alpha}{D\tilde{s}} = ( \tilde{S}^\alpha_{,\beta} + \tilde{\Gamma}_{\epsilon\beta}^\alpha \tilde{S}^\epsilon ) \tilde{S}^\beta, \quad (2.4.9)$$

e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{D\tilde{S}^\alpha}{D\tilde{s}} = 1/2 (e^{-2\psi})_{,\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (2.4.10)$$

onde  $h^{\alpha\beta}$  é o projetor definido por (2.2.5). A equação (2.4.10) nos diz que a aplicação da transformação conforme sobre a geodésica caracterizada pelo vetor tangente  $S^\alpha(s)$ , resulta numa curva acelerada caracterizada pelo vetor tangente  $\tilde{S}^\alpha(\tilde{s})$ , e cuja aceleração, é dada por

$$\tilde{a}^\alpha = 1/2 (e^{-2\psi})_{,\beta} h^{\alpha\beta}. \quad (2.4.11)$$

Aqui interessa-nos a transformação conforme para a qual

$$\tilde{a}^\alpha_{;\mu} = \tilde{E}^\alpha_\mu + f \tilde{H}^\alpha_\mu = e^{-2\psi} (E^\alpha_\mu + f H^\alpha_\mu). \quad (2.4.12)$$

Utilizando a expressão para  $\tilde{a}^\alpha$  dada por (2.4.11), temos

$$[1/2 (e^{-2\psi})_{,\beta} h^{\alpha\beta}]_{;\mu} = e^{-2\psi} (E^\alpha_\mu + f H^\alpha_\mu). \quad (2.4.13)$$

## CAPÍTULO 3

### OBSERVADORES ACELERADOS

#### 3.1- Introdução

Neste capítulo estudamos referenciais acelerados, começando com o caso de referenciais uniformemente acelerados em um espaço plano, e generalizando progressivamente até chegarmos à situação de referenciais dotados de aceleração arbitrária num espaço curvo. São enfatizados exemplos de observadores dotados de aceleração constante, tendo em vista sua importância na descrição do movimento dos monopolos magnéticos.

#### 3.2- Referenciais Uniformemente Acelerados num Espaço Plano

Antes de mais nada, é necessário comentar o que significa a expressão "referencial uniformemente acelerado". Isto porque, no âmbito da relatividade especial, existem apenas observadores inerciais e regras de como relacioná-los, que são as transformações de Lorentz. Portanto, para inserir neste esquema um observador não inercial, será preciso, de alguma forma, traduzir suas observações para a linguagem de observadores inerciais.

Isto se faz imaginando-se uma seqüência infinita de

observadores inerciais dispostos em fila, e cada qual dotado de uma velocidade ligeiramente diferente do anterior, de tal forma que o observador acelerado seja sempre visto em repouso pelo referencial inercial com o qual, em cada instante, estiver emparelhado. Assim, em cada instante, as observações do referencial acelerado com respeito a posições, distâncias e velocidades coincidirão com as observações correspondentes de um certo referencial inercial.

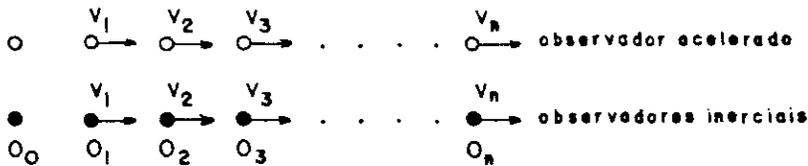


fig. (3.1)- Em cada instante o observador acelerado é visto em repouso por um observador inercial

Tomemos como exemplo deste procedimento a determinação das equações de movimento de um observador que experimenta uma aceleração constante  $a$  na direção  $x^1$  de um referencial inercial. Sua quadrivelocidade satisfaz a condição

$$u^2 = 1. \tag{3.1.1}$$

Portanto, já que

$$d(u^2)/d\tau = 2 (du/d\tau) \cdot u = 0 ,$$

temos que a quadriaceleração  $a = du/d\tau$  é ortogonal à quadrivelocidade. No referencial de repouso do observador acelerado (isto é, o referencial inercial em relação ao qual o observador, num certo instante, está em repouso),

$$a^\mu = (0, a, 0, 0)$$

e assim,

$$a^\mu a_\mu = - a^2 \tag{3.2.2}$$

As equações de movimento do observador acelerado num referencial inercial são

$$\frac{dt}{d\tau} = u^0 , \quad \frac{dx}{d\tau} = u^1 , \tag{3.2.3}$$

$$\frac{du^0}{d\tau} = a^0 , \quad \frac{du^1}{d\tau} = a^1 .$$

Estas equações, juntamente com as condições

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 = 1 ,$$

$$u^\mu a_\mu = u^0 a^0 - u^1 a^1 = 0 ,$$

$$a^\mu a_\mu = (a^0)^2 - (a^1)^2 = -a^2 ,$$

permitem encontrar

$$a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = u^0 a, \quad |$$

(3.2.4)

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = u^1 a,$$

ou seja,

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = u^1 a, \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = u^0 a,$$

(3.2.5)

que admitem a solução particular

$$t = a^{-1} \sinh ar, \quad x = a^{-1} \cosh ar.$$

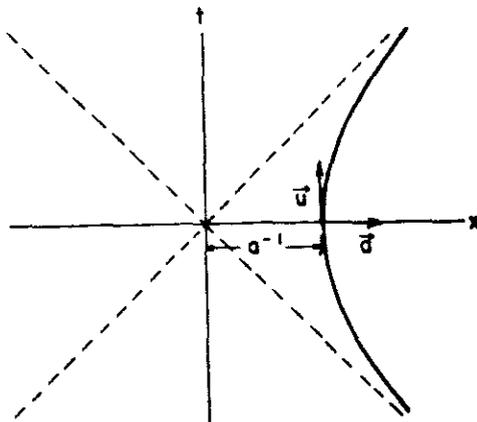


fig. (9.2) - Trajetória de um objeto com aceleração constante ao longo do eixo x.

Observando que

$$t^2 - x^2 = a^{-2} ,$$

num diagrama espaço-tempo, a trajetória será uma hipérbole, como é mostrado na fig.(3.2).

É interessante, antes de passarmos ao estudo de referenciais com aceleração arbitrária, fornecermos as indicações de como construir uma base de tetradas para o referencial dotado de aceleração constante. Uma maneira simples de se fazer isto consiste em escolher o eixo do tempo coincidente com o eixo do tempo do referencial inercial em relação ao qual o referencial acelerado estiver por um momento em repouso. Isto significa que o quadrivector velocidade coincidirá com o eixo do tempo; como este quadrivector tem módulo unitário, decorre naturalmente a identificação

$$e_0 = u .$$

O segundo vetor é escolhido de uma maneira muito simples: basta lembrar que a quadriaceleração é ortogonal à quadrivelocidade. Escolhemos, portanto,

$$e_1 = a^{-1} a .$$

Os outros dois vetores da base,  $e_2$  e  $e_3$  não são afetados pela transformação de Lorentz na direção do movimento do observador

acelerado, e portanto podem ser feitos coincidir com os vetores unitários correspondentes do referencial inercial que, por exemplo, usamos para descrever o movimento do observador acelerado. As componentes dos vetores da tetrada são, portanto,

$$\begin{aligned} e_0 &= (\cosh ar, \sinh ar, 0, 0), \\ e_1 &= (\sinh ar, \cosh ar, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

### 3.3- Referenciais acelerados arbitrariamente

O aspecto fundamental da descrição do movimento de observadores acelerados usando-se a estrutura conceitual da relatividade restrita, é a substituição de um observador acelerado por muitos observadores inerciais escolhidos convenientemente, como foi salientado na seção precedente. Firmando-nos nesta idéia, indicaremos nesta seção a construção de uma base de tetradas para o observador acelerado e como usar esta base para obter um sistema de coordenadas.

Tomemos uma base de vetores para um referencial inercial

$$e^\mu \equiv (e^\mu_0, e^\mu_1, e^\mu_2, e^\mu_3)$$

(escolhemos aqui o índice latino para especificar o vetor,

enquanto o índice grego especifica a componente do vetor). Esta base de vetores, por simplicidade, é feita ortonormal

$$e^{\mu}_{i} e^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{i}, \quad (3.3.1)$$

e submetida à condição

$$e^{\mu}_{i} e^{\nu}_{\mu} = \eta_{ij}, \quad (3.3.2)$$

onde  $\eta_{ij}$  é a matriz simétrica constante

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Este referencial é escolhido de tal modo que, num certo instante, esteja em repouso relativamente ao observador acelerado. Além disso, o vetor do tipo tempo  $e^{\mu}_{0}$  é identificado com a quadrivelocidade do observador acelerado, no tal instante; ou seja,

$$e^{\mu}_{0} = (1, 0, 0, 0) \equiv u^{\mu}$$

Num instante posterior escolhemos um outro referencial inercial dotado de uma base

$$e'^{\mu}_{i} = (e'^{\mu}_{0}, e'^{\mu}_{1}, e'^{\mu}_{2}, e'^{\mu}_{3}),$$

exatamente com as mesmas características do referencial inercial anterior, ou seja, que esteja em repouso relativo com

o observador acelerado no instante considerado e que, neste instante,

$$e'^{\mu}_0 = u^{\mu} .$$

Os vetores da base de tetradas de ambos os referenciais inerciais relacionam-se através das transformações de Lorentz:

$$e'^{\mu}_i(\tau) = \Lambda^j_i(\tau) e^{\mu}_j .$$

A transformação de Lorentz pode ser entendida como uma rotação no espaço-tempo. Por exemplo, a quadrivelocidade, de módulo unitário constante, apenas muda de direção. Este modo de interpretar a transformação de Lorentz mostra-se útil, como veremos a seguir.

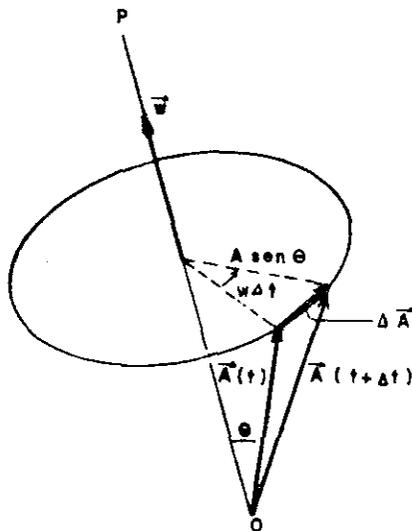


fig. (3.3)- O vetor  $\vec{A}$  gira em torno do eixo  $OP$  com velocidade angular  $\omega$ .

A mecânica não relativista descreve o movimento de rotação

de um vetor em torno de um eixo com o auxílio do vetor velocidade angular  $\vec{\omega}$ . Observando a figura (3.3), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{|d\vec{A}|}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|A\vec{\omega}(t + \Delta t) - A\vec{\omega}(t)|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{A}|}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(A \operatorname{sen} \theta)(\omega \Delta t)}{\Delta t} = A\omega \operatorname{sen} \theta . \end{aligned}$$

Usando a regra do produto vetorial, é fácil convencer-se que

$$\frac{dA_i}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \omega_j A_k . \quad (3.3.3)$$

Para se usar uma idéia semelhante no espaço-tempo de quatro dimensões, é conveniente pensar a rotação ocorrendo em um plano perpendicular a  $\vec{\omega}$ , porque a própria transformação de Lorentz implica numa rotação, que deve ser distinguida de rotações ordinárias dos eixos espaciais.

Assim, define-se

$$\frac{dv_i}{dt} = -\Omega_{ik} v_k ,$$

onde

$$\Omega_{jk} = -\Omega_{kj} = \omega_l \epsilon_{ljk}$$

tem componentes diferentes de zero apenas no plano de rotação.

Note que

$$\omega_j \Omega_{jk} = \omega_j \omega_i \epsilon_{ijk} = 0 .$$

Portanto, o análogo para quatro dimensões da eq.(3.3.3) é

$$\frac{dv^i}{d\tau} = - \Omega^{ik} v_k , \quad (3.3.4)$$

com  $\Omega^{ik} = - \Omega^{ki}$ . Devemos exigir que o tensor  $\Omega^{\mu\nu}$ , que aqui faz o papel de uma transformação de Lorentz infinitesimal, cumpra as seguintes exigências:

a) 
$$\frac{du^\mu}{d\tau} = - \Omega^{\mu\nu} u_\nu = a^\mu \quad (3.3.5)$$

b) Seja  $\vec{\omega}$  um vetor ortogonal a  $\vec{a}$  e  $\vec{u}$ . Deveremos ter

$$\Omega^{\mu\nu} \omega_\nu = 0 . \quad (3.3.6)$$

Estas duas condições asseguram a transformação de Lorentz apropriada (a), assim como excluem qualquer rotação em planos do tipo espaço (b). Ambas as condições são satisfeitas fazendo

$$\Omega^{\mu\nu} = a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu \quad (3.3.7)$$

Com isto, temos que um referencial móvel apropriado para o observador acelerado consiste num conjunto de quatro vetores ortonormais transportados sobre a trajetória do observador de

acordo com

$$\frac{de^\mu}{d\tau}{}^{(i)} = -\Omega^{\mu\nu} e_{(i)\nu}, \quad (3.3.8)$$

sendo que um destes quatro vetores coincide com a quadrivelocidade do observador acelerado.

Um sistema local de coordenadas para o observador acelerado pode ser construído tomando como referência um observador inercial que, em algum instante, tenha sido o

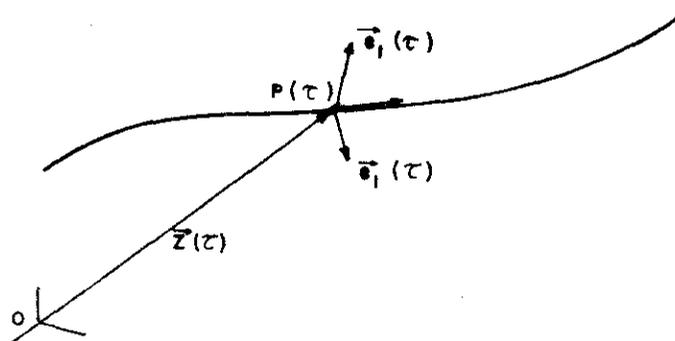


fig.(3.4)- P(τ) é o evento que localiza o observador acelerado no tempo próprio τ.

referencial de repouso do observador acelerado. Suponhamos, como na fig.(3.4), que P(τ) seja o evento que localiza o observador acelerado no tempo próprio τ. Façamos  $\vec{Z}(\tau)$  ser o vetor deslocamento unindo o evento P(τ) à origem do já mencionado referencial inercial. O evento P(τ), mais os tres vetores do tipo espaço,  $\vec{e}_1(\tau)$ ,  $\vec{e}_2(\tau)$ , e  $\vec{e}_3(\tau)$ , definem um hiperplano espacial no instante τ. Um ponto qualquer deste

hiperplano terá coordenadas  $x^\mu(\tau)$  no referencial inercial original, que podem ser escritas da seguinte forma

$$x^\mu(\tau) = \xi^1 e_{(1)}^\mu(\tau) + \xi^2 e_{(2)}^\mu(\tau) + \xi^3 e_{(3)}^\mu(\tau) + Z^\mu(\tau) \quad (3.3.9)$$

Neste conjunto de quatro equações,  $x^\mu$  e  $Z^\mu$  são conhecidos, enquanto que  $\tau$  e  $\xi^i$  são considerados como incógnitas.

Como aplicação do procedimento delineado acima, vamos ver o exemplo do observador com aceleração constante, que já estudamos antes. Como antes, tomaremos a aceleração ao longo da direção  $x^1$ . Assim, a transformação de Lorentz se processará apenas no plano (0, 1), deixando os demais inalterados. O tensor  $\Omega^{\mu\nu}$  terá apenas duas componentes não nulas,

$$\Omega^{10} = a^1 u^0 - a^0 u^1,$$

$$\Omega^{01} = -\Omega^{10}.$$

Fazendo  $e_{(0)}^\mu = u^\mu$ , a velocidade do observador acelerado, teremos da eq.(3.3.8),

$$\begin{aligned} \frac{de_{(0)}^0}{d\tau} &= \frac{du^0}{d\tau} = -\Omega^{01} e_{(0)1} = \\ &= (a^1 u^0 - u^1 a^0) u_1. \end{aligned}$$

Mas  $a^\mu u_\mu = 0$ , ou seja,

$$a^1 u_1 = - a^0 u_0.$$

Assim,

$$\frac{de^{(0)}}{d\tau} = - a^0 ( u^0 u_0 + u^1 u_1 ) = - a^0 \quad (3.3.10)$$

Do mesmo modo,

$$\frac{de^{(1)}}{d\tau} = a^1 . \quad (3.3.11)$$

Por outro lado, temos também as equações

$$u^\mu u_\mu = 1 ,$$

$$u^\mu a_\mu = 0 ,$$

$$a^\mu a_\mu = - g^2 ,$$

que fornecem as seguintes relações

$$a^1 = g u^0 ,$$

$$a^0 = g u^1 .$$

(3.3.12)

Substituindo as equações (3.3.10) e (3.3.11) nas equações (3.3.9), temos

$$\frac{du^0}{dr} = gu^1, \quad \frac{du^1}{dr} = gu^0 \quad (3.3.13)$$

que têm como solução particular

$$\begin{aligned} u^0 &= \cosh gr \\ u^1 &= \sinh gr \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Esta solução faz com que  $\Omega^{\mu\nu}$  seja uma matriz constante, pois

$$\Omega^{10} = -\Omega^{01} = g [(u^0)^2 - (u^1)^2] = g.$$

Usando isto na equação (3.3.8), obtemos as equações que definem

$e_{(1)}^\mu$  :

$$\begin{aligned} \frac{de_{(1)}^0}{dr} &= g e_{(1)}^1, \\ \frac{de_{(1)}^1}{dr} &= g e_{(1)}^0, \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

que têm como solução particular

$$e_{(1)}^\mu = g^{-1} a^\mu \quad (3.3.16)$$

ou seja,

$$e_{(1)}^0 = \sinh gr, \quad e_{(1)}^1 = \cosh gr.$$

Com isto, podemos escrever a base de vetores apropriada para o

observador acelerado:

$$e_0^\mu = (\cosh g\tau, \sinh g\tau, 0, 0)$$

$$e_1^\mu = (\sinh g\tau, \cosh g\tau, 0, 0)$$

$$e_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

$$e_3^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

Se adotarmos  $x^1(0) = g^{-1}$  como posição inicial do observador acelerado com relação ao observador inercial, as equações (3.3.9) permitem escrever

$$x^0 = (g^{-1} + \xi^1) \sinh g\xi^0 ,$$

$$x^1 = (g^{-1} + \xi^1) \cosh g\xi^0 ,$$

$$x^2 = \xi^2 ,$$

$$x^3 = \xi^3 .$$

### 3.4- Curvas com aceleração constante

Como mostramos no capítulo sobre monopolos magnéticos, é de grande interesse o estudo de curvas de aceleração constante. Vamos considerar aqui o problema da determinação do movimento de um objeto dotado de aceleração própria constante numa métrica de Minkovski com uma perturbação esfericamente

simétrica, do tipo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (3.4.1)$$

onde  $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  , e  $h_{\mu\nu} = -2m/\rho \delta_{\mu\nu}$  , com

$$\rho = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2} .$$

O elemento de linha tem a forma

$$ds^2 = (1 - 2m/\rho)dt^2 - (1 + 2m/\rho)d\sigma^2 , \quad (3.4.2)$$

e os símbolos de Christoffel diferentes de zero são

$$\begin{aligned} \Gamma_{ci}^c &= \Gamma_{\infty}^i = \Gamma_{kk}^i = -\Gamma_{ii}^i = m/\rho^3 x^i \\ \Gamma_{ik}^i &= -m/\rho^3 x^k \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Vamos tomar, por simplicidade, a aceleração dirigida ao longo da direção  $x^1$  e tomemos ainda  $x^2 = x^3 = 0$  . Com isto, o movimento se dará no plano  $x^0-x^1$ , e as componentes diferentes de zero da velocidade e da aceleração do corpo num referencial inercial serão

$$u^0 = \frac{dt}{ds} \quad , \quad u^1 = \frac{dx^1}{ds} \quad ,$$

$$a^0 = \frac{Du^0}{Ds} = u^0_{;\alpha} \quad u^\alpha = \frac{du^0}{ds} + 2m/\rho^3 \times u^1 u^0 \quad , \quad (3.4.4)$$

$$a^1 = \frac{Du^1}{Ds} = u^1_{;\alpha} \quad u^\alpha = \frac{du^1}{ds} + m/\rho^3 \times [(u^0)^2 - (u^1)^2].$$

Por outro lado, a velocidade do corpo satisfaz a condição

$$u^\alpha u_\alpha = 1. \quad (3.4.5)$$

Tomando a derivada desta expressão,

$$\frac{D}{Ds} (u^\alpha u_\alpha) = (u^\alpha u_\alpha)_{;\beta} u^\beta = 2 a^\alpha u_\alpha = 0. \quad (3.4.6)$$

Ou seja, a quadriaceleração é perpendicular à quadrivelocidade. A aceleração, sendo constante no referencial de repouso do objeto, também satisfará

$$a^\mu a_\mu = - a^2 = \text{constante}. \quad (3.4.7)$$

As equações (3.4.5), (3.4.6) e (3.4.7) permitem obter as relações abaixo, válidas em primeira ordem em  $2m/\rho$ :

$$a^0 = (1 + 2m/\rho) u^1 a,$$

$$a^1 = (1 - 2m/\rho) u^0 a. \quad (3.4.8)$$

Usando as equações (3.4.4), obtemos

$$\frac{du^0}{ds} - u^1 a = 2m/\rho (a - xu^0/\rho^2) u^1, \quad (3.4.9)$$

$$\frac{du^1}{ds} - u^0 a = - 2m/\rho (x/\rho^2 + u^0 a).$$

As soluções das equações homogêneas correspondentes a (3.4.9) são conhecidas da sec.3.2. Com isto, as soluções das equações (3.4.9) devem ser do tipo

$$x(s) = a^{-1} \cosh as + X(s), \quad (3.4.10)$$

$$t(s) = a^{-1} \sinh as + T(s),$$

onde  $X(s)$  e  $T(s)$  são termos da solução associados à perturbação introduzida na métrica. Lembrando que  $\rho = |x|$  na situação que tratamos, a introdução das expressões (3.4.10) nas equações (3.4.9) nos fornece as equações para  $X(s)$  e  $T(s)$  :

$$\frac{d^2 T}{ds^2} - a \frac{dX}{ds} = 0, \quad (3.4.11)$$

$$\frac{d^2 X}{ds^2} - a \frac{dT}{ds} = - ma^2 (\operatorname{sech}^2 as + 2).$$

Integrando a primeira equação, obtemos  $dT/ds$  a menos de uma constante, que é feita arbitrariamente igual a zero. Substituindo  $dT/ds$  assim obtido na segunda equação, temos

$$\frac{d^2X}{ds^2} - a^2X = -ma^2(\operatorname{sech}^2as + 2). \quad (3.4.12)$$

A solução geral da equação homogênea correspondente,

$$\frac{d^2X}{ds^2} - a^2X = 0 ,$$

é

$$X(s) = C_1 e^{-as} + C_2 e^{as}. \quad (3.4.13)$$

Baseando-nos nesta solução, podemos empregar o método de variação de constantes para obter a solução da equação não homogênea. O método consiste em considerar  $C_1$  e  $C_2$  não mais como constantes e impor que

$$\frac{dC_1}{ds} e^{-as} + \frac{dC_2}{ds} e^{as} = 0 . \quad (3.4.14)$$

Introduzindo a expressão de  $X(s)$  dada por (3.4.13) na equação (3.4.12), obtemos

$$\frac{dC_1}{ds} e^{-as} - \frac{dC_2}{ds} e^{as} = ma (\operatorname{sech}^2as + 2) . \quad (3.4.15)$$

As eqs. (3.4.14) e (3.4.15) formam um sistema de equações algébricas em  $dC_1(s)/ds$  e  $dC_2(s)/ds$ , que pode ser resolvido imediatamente

$$\frac{dC_1}{ds} = \frac{1}{2} m a (\operatorname{sech}^2 as + 2) e^{as} \quad (3.4.16)$$

$$\frac{dC_2}{ds} = -\frac{1}{2} m a (\operatorname{sech}^2 as + 2) e^{-as} \quad (3.4.17)$$

Integrando as equações acima, temos

$$C_1(s) = \frac{1}{2} m (\operatorname{tgh} as e^{as} + 2 \operatorname{arctg} e^{as} + e^{as}) \quad (3.4.18)$$

$$C_2(s) = -\frac{1}{2} m (\operatorname{tgh} as e^{-as} + 2 \operatorname{arctg} e^{as} - e^{-as}) \quad (3.4.19)$$

Levando estes resultados à expressão (3.4.13) de  $X(s)$ , temos

$$X(s) = -2 m \operatorname{arctg} e^{as} \operatorname{senh} as + m. \quad (3.4.20)$$

Introduzindo agora esta expressão de  $X(s)$  na primeira das equações (3.4.11), podemos obter  $T(s)$  por integração

$$T(s) = -2 m \operatorname{arctg} e^{as} \cosh as + 2 m a s. \quad (3.4.21)$$

As soluções (3.4.10), com as expressões obtidas em (3.4.20) e (3.4.21) para  $X(s)$  e  $T(s)$ , são, portanto,

$$x(s) = a^{-1} \cosh as + m (1 - 2 \operatorname{arctg} e^{as} \operatorname{senh} as) \quad (3.4.22)$$

$$t(s) = a^{-1} \sinh as + 2mC as - \operatorname{arctg} e^{as} \cosh as \quad (3.4.23)$$

## CONCLUSÃO

A semelhança entre a estrutura das equações de Maxwell e as equações de Einstein, na formulação de Jordan apresentada no Cap. 2, permite fazer uso de analogias que fundamentam o método empregado de obtenção de novas quantidades conservadas, associadas à geometria do espaço-tempo. Embora este método não o evidencie, podemos concluir através do trabalho de Calkin, que as novas leis de conservação do eletromagnetismo - e, por analogia, também as gravitacionais - resultam da invariância das equações de campo perante transformações de dualidade.

Outra contribuição deste trabalho, o desenvolvimento de um método para a obtenção de curvas de aceleração constante numa métrica de Minkowski com perturbação esférica, resultou da tentativa de determinação das trajetórias de movimento de monopolos magnéticos gravitacionais. Embora as curvas obtidas não se prestem ao objetivo proposto porque são aproximações de primeira ordem e, neste caso, as componentes magnéticas do tensor de Weyl se anulam, esperamos que o mesmo método possa ser empregado em perturbação de segunda ordem.

Indicamos como possíveis extensões deste trabalho:

- Aplicação das novas leis de conservação ao caso de ondas gravitacionais, com o objetivo de estudar o significado físico das grandezas envolvidas.

- Explorar ainda mais profundamente as analogias entre os campos eletromagnético e gravitacional, no sentido de comparar as características do movimento de monopolos magnéticos.
- Empregar o método apresentado para o cálculo das trajetórias de aceleração constante, mas com aproximação de segunda ordem.

REFERENCIAS

- [1] - Lipkin D. M. - "Existence of a New Conservation Law in Eletromagnetic Theory" - J. of Math. Phys., 5, (1964), 696.
- [2] - Ragusa S. - "New First Order Conservation Laws for the Eletromagnetic Field" - Prep. 010/88, IFQSC - USP, (1988).
- [3] - Novello M., Duarte de Oliveira J. - "On Dual Properties of the Weyl Tensor" - General Relativity and Gravitation, 12, 11, (1980), 871.
- [4] - Carmeli M. - "Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory" - Wiley-Interscience Publ., (1982), 44.
- [5] - Jackson J.D. - "Eletrodinâmica Clássica" - 2<sup>a</sup> edição, Ed. Guanabara Dois, (1983), Capítulo 7.
- [6] - Lichnerowicz A. - Ann. Mat. Pura Appl., 50, (1960), 1.
- [7] - Jordan P., Ehlers J. and Kundt W., Abh. Math. Naturw.

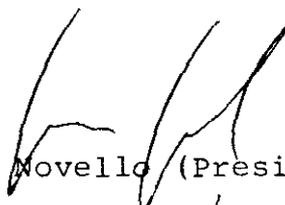
Kl. Akad. Wiss. Mainz, (1960), nº 2.

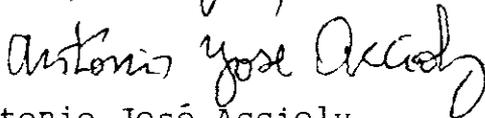
- [8] - Novello M., Galvão C.A.P., Damião Soares I., Salim J.M. -  
"Electric and Magnetic Gravitational Monopoles I. The  
Equation of Motion of Poles" - J. Phys. A, 9, nº 4,  
(1976), 547.
- [9] - Novello M. and Salim J.M. - "Non-Equilibrium  
Relativistic Cosmology" - Fund. of Cosmic Phys., (1983),  
8, 222.
- [10] - Dirac P.A.M. - Proc. Roy. Soc., A133, (1931), 60.
- [11] - Kibble T.W.B. - "Conservation Laws for Free Fields", J.  
of Math. Phys., 6, nº 7, (1965), 1022.
- [12] - Calkin M.G. - "An Invariance Property of the Free  
Electromagnetic Field".
- [13] - Dirac P.A.M. - Phys. Rev., 74, (1948), 817.
- [14] - Amaldi E., "On the Dirac Magnetic Monopoles", em Old and  
New Problems in Elementary Particles, ed. G. Puppi,  
Academic Press, New York, (1968).
- [15] - Sandars P.G.H., Contemporary Physics, 7, (1966), 419.
- [16] - Carrigan R.H., Nuovo Cimento, 38, (1965), 638.

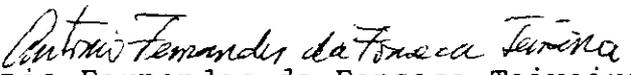
"NOVAS LEIS DE CONSERVAÇÃO PARA O CAMPO GRAVITACIONAL LIVRE"

HELDER COUTO

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

  
Mário Novello (Presidente)

  
Antonio José Accioly

  
Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

  
Luiz Alberto Rezende de Oliveira (Suplente)

Rio de Janeiro, 19 de outubro de 1989